

Основы комбинаторики - II

1 k -перестановки из n элементов

1.1. Сколько чисел, меньших миллиона, можно записать с помощью цифр 8 и 9?

Решение. Любое описанное в условии задачи число может иметь в длину от одного до шести разрядов. Если число разрядов равно i , то выбрать значения этих разрядов можно 2^i способами (значение каждого разряда выбирается двумя способами). Поэтому общее количество описанных выше чисел есть

$$\sum_{i=1}^6 2^i = 2^7 - 2 = 126.$$

1.2. На перекрестке имеется 6 светофоров. Сколько существует различных состояний этих светофоров, если каждый из них независимо от других имеет три возможных состояния — горит красный, горит желтый или горит зеленый?

Решение. Любое состояние шести светофоров можно рассматривать как слово, состоящее из шести букв, над алфавитом, состоящим из трех цветов. Как следствие, имеем 3^6 вариантов различных состояний.

1.3. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую четность? Например, в числе 222222 все цифры четные.

Решение. Подсчитаем отдельно количество чисел, составленных из нечетных и четных цифр. В первом случае мы можем на любую из позиций поставить любую из цифр 1, 3, 5, 7, 9. Во втором случае на любую позицию кроме первой мы можем поставить любую четную цифру, а на первую — любую четную цифру, отличную от 0. Таким образом получаем $5^6 + 4 \cdot 5^5 = 28125$ чисел.

1.4. Сколько существует трехзначных чисел в пятеричной системе счисления, в которых все три цифры различны?

Решение. Легче всего данную задачу решать, используя подход, обычно называемый “плохой — хороший”:

$$\text{количество хороших объектов} = \text{количество всех объектов} - \text{количество плохих объектов}. \quad (1)$$

Всего трехзначных чисел в пятеричной системе счисления $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$. Из них имеется четыре числа, состоящих из одной цифры, повторенной три раза. Наконец, количество трехзначных чисел с двумя одинаковыми цифрами равно $3 \cdot 16$: мы для каждой из трех позиций, на которых должна стоять уникальная цифра, можем четырьмя способами подобрать цифру, стоящую на этой уникальной позиции, и четырьмя способами подобрать цифру, стоящую на двух оставшихся позициях. Как следствие, количество чисел с различными цифрами равно

$$100 - 4 - 16 \cdot 3 = 48.$$

1.5. Сколько существует восьмизначных чисел в пятеричной системе счисления, в которых все цифры различны?

Решение. Для того, чтобы в восьмизначном числе все цифры были различны, необходимо, чтобы таких цифр было как минимум восемь. Но в пятеричной системе счисления у нас имеется всего пять цифр. Следовательно, таких чисел не бывает.

1.6. В алфавите племени Бум-Бум всего имеется шесть букв. Словом у них называется любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке Бум-Бум?

Решение. Снова воспользуемся принципом “плохой-хороший” (1). Всего можно составить 6^6 шестибуквенных последовательностей из букв алфавита племени Бум-Бум. А последовательностей, в которых все буквы различны, имеется $6!$ штук. Тогда, согласно (1), получаем, что искомое количество слов равно

$$6^6 - 6! = 45936.$$

1.7. Ребенок раскладывает в ряд разноцветные карточки с буквами “А”, “А”, “А”, “А”, “А”, “Е”, “Е”, “Т”, “Л”, “М”, “М”, “П”, “П”, “Р”, “Т”, “Т”. В скольких вариантах получится слово “ТЕЛЕГАММААППАРАТ”?

Решение. Предположим, что мы сложили из карточек слово “ТЕЛЕГАММААППАРАТ”. Количество способов сложить это слово совпадает с количеством перестановок карточек с одинаковыми буквами в этом слове. Пусть L – множество букв в слове, а $P(l)$ – количество вхождений буквы l в данное слово. Тогда искомое количество вариантов может быть вычислено по формуле

$$\prod_{l \in L} P(l)! = 5! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2! = 1920.$$

1.8. Задача на программирование: сгенерировать все возможные k -перестановки n -элементов без повторений.

Решение. Сначала поймем, как можно сгенерировать все перестановки n элементного множества. Для этого мы разберем несложный алгоритм получения по заданной перестановке следующей за ней в лексикографическом порядке. Понятно, что последовательно применяя его к изначально упорядоченной последовательности, мы сможем получить все $n!$ перестановок.

Представим перестановку в виде упорядоченного массива чисел от 0 до $n - 1$. Первой перестановкой будет массив вида $0, 1, 2, \dots, n - 1$, а последней — $n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$. Для получения следующей перестановки нам нужно найти в массиве самую правую пару элементов, в которой первый элемент меньше следующего за ним. Назавем такую пару подъемом.

P_i	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
\vdots	\vdots				
17	0	3	4	2	1
18	0	4	1	2	3
19	0	4	1	3	2
20	0	4	2	1	3
21	0	4	2	3	1
22	0	4	3	1	2
23	0	4	3	2	1
24	1	0	2	3	4
\vdots	\vdots				

Таблица 1: Некоторые из перестановок $P(5)$ с выделенными подъемами

Если подъем не был найден, значит все элементы расположены в порядке убывания. Т.е. рассматриваемая перестановка является последней в лексикографическом порядке. В противном случае, первый элемент в паре меняется местами с наименьшим превосходящим его элементом справа.

P_i	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
\vdots	\vdots				
17	0	4	3	2	1
18	0	4	1	3	2
19	0	4	2	3	1
20	0	4	2	3	1
21	0	4	3	2	1
22	0	4	3	2	1
23	1	4	3	2	0
24	1	0	2	4	3
\vdots	\vdots				

Таблица 2: Перестановки, в которых элементы были поменяны местами. Выделенная часть будет инвертирована.

После того, как элементы обменены местами, правая часть нашего массива оказывается упорядоченной по убыванию, и нам необходимо её инвертировать, т.е. переставить в порядке возрастания. В результате мы получаем следующую перестановку.

Для перехода к k -перестановкам нужно заметить, что мы можем просто перебирать все перестановки и брать из них первые k элементов. Проблема в том, что нам придется пропускать перестановки через $(n - k)!$ шагов, чтобы у нас не было повторений. Или другими словами, пропускать все перестановки, которые не изменяют порядка первых k элементов.

При генерации таких перестановок нас интересуют только подъемы, лежащие не правее k -й позиции, “границы”. Причем, второй элемент подъема не обязан быть расположенным сразу после первого.

В начале предположим, что первый элемент подъема лежит на границе, а второй — где-то справа от нее. Если все элементы справа меньше граничного элемента, то мы ищем подъем слева от границы. Однако, в отличие от обычной генерации перестановок, в данном случае перед обменом элементов местами все числа справа от границы будут упорядочены по возрастанию. Т.к. мы начали с возрастающей последовательности, и только переставляли элементы на границе с превосходящими ее элементами справа. Но мы можем просто инвертировать всю правую часть, чтобы оказаться в состоянии сходном с тем, которое мы получаем при генерации всех перестановок.

P_i	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	1	2	3	4
1	0	1	3	2	4
2	0	1	4	2	3
	0	1	4	3	2
	0	2	4	3	1
3	0	2	1	3	4
\vdots	\vdots				

Таблица 3: Иллюстрация работы алгоритма при генерации перестановок $P(5, 3)$. Серым обозначена граница. Элементы выделенные желтым будут инвертированы, отрезки выделенные синим — инвертированы.

Псевдокод алгоритма генерации следующей k -перестановки:

```

edge = k - 1

j = k
while j < n and permutation[edge] >= permutation[j]:
    j += 1

if j < n:
    swap(permutation[edge], permutation[j])
else:
    reverse(permutation[k ... n-1])

    i = edge - 1
    while i >= 0 and permutation[i] >= permutation[i + 1]:
        i -= 1

    if i < 0:
        return 0

    j = n - 1
    while j > i and permutation[i] >= permutation[j]:
        j -= 1

    swap(permutation[i], permutation[j])
    reverse(permutation[i+1 ... n-1])
output(permutation[0...k-1])

```

2 Урновые схемы и схемы раскладки предметов по ящикам

2.1. В купе поезда едет 6 неразличимых для нас человек. Поезд делает 5 остановок. Сколькими способами пассажиры могут распределиться между этими остановками?

Решение. В случае, когда мы пассажиров не различаем, мы имеем задачу о раскладке шести неразличимых предметов по пяти различным ящикам при условии отсутствия ограничений на количество предметов в каждом ящике. При таких условиях имеется $\binom{5}{6}$ способов распределения пассажиров по этим остановам.

2.2. Трое мужчин и две женщины выбирают себе место работы. В городе имеются три фирмы, в которых требуются только мужчины, две — в которых требуются только женщины, и две — в которых берут и мужчин, и женщин. Сколькими способами они могут выбрать себе место работы?

Решение. Каждый из трёх мужчин выбирает одну фирму из пяти, и каждый возможный способ выбора кодируется строкой из трёх букв над алфавитом из пяти символов. Аналогично, выбор женщин кодируется строкой из двух символов над алфавитом из четырёх символов. По правилу произведения, общее число способов равно $5^3 \cdot 4^2$.

2.3. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами это может быть сделано?

Решение. В данной задаче вновь удобнее пользоваться принципом (1). Именно, подсчитаем общее число групп из 11 человек и вычтем оттуда количество групп, состоящих только из мужчин, а также число групп, в которые входят не более одной женщины. При использовании этого подхода получаем

$$\binom{11}{6} - \binom{7}{6} - \binom{4}{1} \cdot \binom{7}{5} = 462 - 7 - 4 \cdot 21 = 371$$

количество способов.

3 Подсчет количества отображений конечных множеств

3.1. Доказать справедливость формулы (??) для любого $n \in \mathbb{Z}_+$.

Решение. Действительно, в случае $n \geq k$ имеем

$$\sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n, i) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n, i) + \sum_{i=k+1}^n \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n, i) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n, i)$$

за счет того, что биномиальные коэффициенты $\binom{k}{i} = 0$ для всех $i > k$. В случае же $n < k$

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n, i) = \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n, i) + \sum_{i=n+1}^k \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n, i) = \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n, i)$$

уже за счет того, что при $i > n$ все числа $\widehat{S}(n, i) = 0$.

3.2. Доказать формулу обращения ??.

Решение. Доказательство этой формулы можно провести, например, так:

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} g_i = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \sum_{j=0}^i (-1)^{j-i} \binom{i}{j} f_j = \sum_{j=0}^k f_j \sum_{i=j}^k (-1)^{j-i} \binom{k}{i} \binom{i}{j} =$$

$$= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f_j \sum_{i=j}^k (-1)^{j-i} \binom{k-j}{i-j} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f_j \sum_{l=0}^{k-j} (-1)^{-l} \binom{k-j}{l}.$$

Внутренняя сумма равна нулю для всех $k-j > 0$. В случае $k=j$ она равна единице, и поэтому

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} g_i = f_k.$$

3.3. В начале учебного года на кафедре происходит распределение нагрузки. Имеется 5 преподавателей и 7 различных групп студентов, которым эти преподаватели должны прочитать один и тот же курс. Любой преподаватель может вести занятия в любой группе. Подсчитать количество способов распределения нагрузки между преподавателями при условии, что каждый преподаватель должен вести занятия хотя бы в одной группе.

Решение. С формальной точки зрения речь идет о подсчете количества сюръективных отображений 7-элементного множества X в пятиэлементное множество Y . Это количество равно $\hat{S}(7, 5)$. Для его расчета можно, например, воспользоваться формулой (??). Число 7 можно разбить на пять слагаемых следующими двумя способами:

$$7 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Первому разбиению отвечают $\binom{5}{2} = 10$ способов выбора двух преподавателей из пяти, читающих по две лекции. Второму разбиению соответствует $\binom{5}{1} = 5$ способов выбора преподавателя, ведущего у трех групп студентов. Тогда общее количество вариантов равно

$$\hat{S}(7, 5) = 10 \cdot P(7; 2, 2) + 5 \cdot P(7; 3) = 16\,800.$$

3.4. Сколько разных слов можно получить, переставляя буквы слова “математика”?

Решение. Количество различных слов равняется количеству перестановок n элементов (букв в слове) с повторениями. Поэтому из слова “математика” можно составить

$$P(10; 3, 2, 2) = \frac{10!}{3! 2! 2!},$$

вариантов слов.

4 Рекуррентные соотношения

4.1. Решить рекуррентное соотношение

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n$$

при следующих начальных условиях: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Решение. Соответствующее заданному в упражнении рекуррентному соотношению характеристическое уравнение

$$r^2 - 7r + 12 = 0$$

имеет вещественные корни, равные $r_1 = 3$, $r_2 = 4$. Следовательно, общий вид решения такого уравнения имеет вид

$$a_n = c_1 3^n + c_2 4^n.$$

В случае $n = 0$ имеем

$$a_0 = 0 = c_1 3^0 + c_2 4^0 = c_1 + c_2.$$

Подставляя $n = 1$, получаем второе уравнение для определения неизвестных c_1 и c_2 :

$$a_1 = 1 = c_1 3^1 + c_2 4^1 = 3c_1 + 4c_2.$$

Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений дает $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. Как следствие, решение заданного в упражнении рекуррентного соотношения имеет вид

$$a_n = 4^n - 3^n.$$

4.2. Решить поставленную в начале данного параграфа задачу про лягушек.

Решение. Полученное для этой задачи рекуррентное соотношение

$$a_{n+1} = 4a_n - 100$$

является неоднородным. Для того, чтобы от этой неоднородности избавиться, сделаем следующую замену переменных:

$$\hat{a}_n := a_n + c.$$

Подставляя это выражение в исходное рекуррентное соотношение, получаем

$$\hat{a}_{n+1} - c = 4\hat{a}_n - 4c - 100.$$

Константу c подберем так, чтобы избавиться от неоднородности:

$$3c = -100 \quad \implies \quad c = -100/3.$$

При таком выборе константы c рекуррентное соотношение для числовой последовательности \hat{a}_n примет вид

$$\hat{a}_{n+1} = 4\hat{a}_n, \quad \hat{a}_0 = 50 + c = 50/3 \quad \implies \quad \hat{a}_n = 4^n \cdot a_0 = 4^n \cdot 50/3.$$

Окончательно получаем, что

$$a_n = \hat{a}_n - c = (50 \cdot 4^n + 100)/3.$$

4.3. Еще один интересный комбинаторный объект, родственные числам Фибоначчи — так называемые числа Люка (Lucas numbers) L_n , удовлетворяющие следующему рекуррентному соотношению:

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad n \geq 0; \quad L_0 = 2, \quad L_1 = 1.$$

Решить данное рекуррентное соотношение.

Решение. Характеристическое уравнение для этого рекуррентного соотношения совпадает с характеристическим уравнением для чисел Фибоначчи, поэтому

$$L_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Константы c_1 и c_2 определим из начальных условий:

$$\begin{aligned} L_0 = 2 &= c_1 + c_2 \\ L_1 = 1 &= c_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \implies \quad c_1 = c_2 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем следующее явное выражение для чисел Люка:

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$