ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
МОСКВА •
КРАСНОДАР •
2013 •

И. В. БАБИЧЕВА

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА. КОНТРОЛИРУЮЩИЕ МАТЕРИАЛЫ К ТЕСТИРОВАНИЮ

Учебное пособие

Издание второе, исправленное

ЛАНЬ®

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
МОСКВА •
КРАСНОДАР •
2013 •

ББК 22.176.я73
Б 12

Бабичева И. В.

Б 12 Дискретная математика. Контролирующие материалы к тестированию: Учебное пособие. — 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2013. — 160 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1456-7

Учебное пособие содержит кодификатор, тестовые задания и типовой расчет к разделу «Дискретная математика». Раздел представлен четырьмя темами: элементы теории множеств, элементы комбинаторного анализа, элементы теории графов и элементы математической логики. Каждая тема снабжена справочным материалом, оформленным в виде таблиц, схем, рисунков. Имеются тестовые задания с решениями, тестовые задания для самопроверки и индивидуальные типовые задания с образцом для их выполнения. К тестовым заданиям для самопроверки прилагаются ответы.

Данное пособие можно использовать для подготовки студентов к компьютерному тестированию по дискретной математике на этапах текущего, промежуточного контроля и проверки остаточных знаний.

Пособие адресовано студентам и преподавателям математики технических вузов.

ББК 22.176.я73

Рецензенты:

А. А. КОЛОКОЛОВ — доктор физико-математических наук, профессор, зав. лабораторией дискретной оптимизации Омского филиала института математики им. С. Л. Соболева СО РАН;

В. А. ДАЛИНГЕР — доктор педагогических наук, профессор, зав. кафедрой теории и методики обучения математике Омского государственного педагогического университета.

Обложка

Е. А. Власова

ВВЕДЕНИЕ

Тестирование студентов — сравнительно новый способ контроля знаний, который получает все большее распространение. Постепенный переход от традиционных форм контроля и оценивания знаний к компьютерному тестированию отвечает духу времени и общей концепции модернизации и компьютеризации российской системы образования.

Основная цель данного учебного пособия — подготовить студентов к компьютерному тестированию по базовым понятиям дискретной математики на этапах входного и промежуточного контроля знаний, а также на этапе проверки остаточных знаний. Тестовые задания разработаны в соответствии с программой для технических специальностей в объеме 20 аудиторных часов (8 часов лекционных занятий и 12 часов практических занятий).

Пособие содержит контролирующие материалы к четырем разделам дискретной математики: «Элементы теории множеств», «Элементы комбинаторного анализа», «Элементы теории графов» и «Элементы математической логики». Контролируемое содержание разделов отражено в кодификаторе. Каждый раздел начинается со справочного материала, оформленного для наглядности в виде таблиц, схем, рисунков. Затем предлагаются тестовые задания с решениями. Задания имеют два уровня сложности. Уровень 1 — начальный, соответствует первому («фактическому») уровню знаний, который заключается в накоплении «фонда знаний», состоящего в основном из фактов. При решении таких заданий учащиеся ограничиваются приведением единичных фактов, дают заученные характеристики терминов и явлений. Уровень 2 — операционный, заключается в умении осуществлять простейшие логические операции по готовому образцу и характеризуется образованием частно-системных ассоциаций и наличием связи между знаниями, усвоенными в пределах одной главы или одного раздела. Пособие включает тестовые задания как теоретического, так и практического характера в двух формах: закрытой форме, содержащей вопрос и несколько вариантов ответа, из которых нужно выбрать правильные (верных ответов может быть несколько!), и на установление соответствия.

Для подготовки к итоговому контролю знаний приводится типовой расчет с образцом для его выполнения.

ГЛАВА 1

КОДИФИКАТОР

Контролируемое содержание раздела «Дискретная математика» включает код элемента содержания и наименование элемента содержания (темы задания). *Первый разряд в записи кода элемента содержания* указывает на номер дидактической единицы раздела «Дискретная математика», *второй разряд в записи кода элемента содержания* идентифицирует номер темы задания. Например, код элемента содержания 1.6 указывает на то, что предложенный элемент содержания принадлежит первой дидактической единице (ДЕ) «Элементы теории множеств» и четвертой теме в этой ДЕ, которая называется «Бинарные отношения: свойства». Нумерация тестовых заданий второй главы содержит код вопроса из кодификатора и уровень сложности в круглых скобках. Нумерация тестовых заданий третьей главы содержит номер по порядку внутри элемента знаний и уровень сложности.

Перечень контролируемых учебных элементов отражает требования к знаниям и умениям, которые студент должен приобрести в результате освоения раздела. При этом уровень сложности заданий БАЗОВЫЙ, т. е. все предлагаемые в пособии задания контролируют обязательную подготовку студентов на уровне требований, задаваемом государственными образовательными стандартами (табл. 1).

Таблица 1

Контролируемое содержание дисциплины		Перечень контролируемых учебных элементов, которые студент должен знать и уметь
Код элемента содержания	**Элементы содержания дисциплины (темы)**	
1. Элементы теории множеств		
1.1	Множества: основные определения	Знать: основные определения теории множеств, способы задания множества с помощью характеристического свойства. Уметь: устанавливать способ задания множества, относить элемент к заданному множеству
1.2	Операции над множествами	Знать: определение основных операций над множествами. Уметь: выполнять операции над конечными множествами, числовыми множествами
1.3	Законы операций над множествами	Знать: законы операций над множествами. Уметь: использовать законы операций над множествами для упрощения формул
1.4	Кортежи и декартово произведение множеств	Знать: определение кортежа, декартова произведения множеств. Уметь: составлять кортежи для множеств, находить декартово произведение множеств
1.5	Бинарные отношения: способы задания	Знать: способы задания бинарного отношения. Уметь: строить матрицу смежности по заданному бинарному отношению
1.6	Бинарные отношения: свойства	Знать: свойства бинарных отношений. Уметь: определять свойства бинарных отношений
2. Элементы комбинаторного анализа		
2.1	Основные правила и формулы комбинаторики	Знать: основные правила и формулы комбинаторики. Уметь: находить число комбинаций с использованием правил и формул комбинаторики, решать комбинаторные задачи

Контролируемое содержание дисциплины		**Перечень контролируемых учебных элементов, которые студент должен знать и уметь**
Код элемента содержания	**Элементы содержания дисциплины (темы)**	
3. Элементы теории графов		
3.1	Основные понятия теории графов	Знать: определения графа и его характеристик. Уметь: определять число его вершин и ребер, по отношению смежности и инцидентности ребер и вершин представлять граф в виде геометрических объектов
3.2	Ориентированные графы	Знать: определение ориентированного графа, его характеристик. Уметь: находить источник, сток, выделять путь, контур
3.3	Способы задания графа	Знать: определение матрицы смежности и инцидентности. Уметь: по матрице смежности и инцидентности представлять граф в виде геометрических объектов
3.4	Виды и типы графов	Знать: определение полного, планарного графа, условия существования эйлерова и гамильтонова цикла (пути). Уметь: распознавать графы
4. Элементы математической логики		
4.1	Элементы алгебры логики высказываний	Знать: определение высказывания. Уметь: выделять высказывания, составлять сложные высказывания
4.2	Операции над высказываниями	Знать: определения логических операций. Уметь: составлять таблицы истинности для основных операций над высказываниями
4.3	Формулы алгебры логики высказываний	Знать: определение формулы. Уметь: записывать высказывания на языке алгебры логики, составлять таблицу истинности для формулы алгебры высказываний

Продолжение табл. 1

Контролируемое содержание дисциплины		Перечень контролируемых учебных элементов, которые студент должен знать и уметь
Код элемента содержания	**Элементы содержания дисциплины (темы)**	
4.4	Необходимость и достаточность условий	Знать: варианты импликации, методы доказательства логических следствий. Уметь: определять необходимость и достаточность условий в формулировках утверждений, уметь доказывать логические следствия
4.5	Булевы функции	Знать: определение булевой функции, элементарные булевы функции. Уметь: вычислять значение булевой функции на различных наборах значений переменных
4.6	Свойства элементарных булевых функций	Знать: основные свойства булевых функций. Уметь: использовать свойства для упрощения булевых функций
4.7	Формы представления булевых функций	Знать: определения совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ) и совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ). Уметь: записывать СКНФ и СДНФ для формул алгебры логики
4.8	Приложения булевых функций в теории релейно-контактных схем	Знать: основные задачи теории релейно-контактных схем. Уметь: проводить анализ, синтез и минимизацию релейно-контактных схем
4.9	Алгебра логики предикатов	Знать: определение предиката, квантора, предикатной формулы, виды формул. Уметь: различать предикаты, определять множество их истинности, записывать суждения в виде предикатной формулы, классифицировать предикаты
4.10	Применение логики предикатов	Знать: метод доказательства логических следствий, записанных предикатной формулой, с помощью диаграмм Эйлера — Венна. Уметь: записывать математические выражения на языке логики предикатов, доказывать логические следствия с помощью диаграмм Эйлера — Венна

ГЛАВА 2

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ РАЗДЕЛА «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

2.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

МНОЖЕСТВА: ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Множество A — объединение в единое целое определенных различимых объектов, которые называются *элементами* множества.

Исходное множество U — *универсальное* множество. Множество, не содержащее ни одного элемента, — *пустое* множество ($\varnothing$).

Множества A и B — *равные* ($A = B$), если состоят из одних и тех же элементов.

Множество A, состоящее из некоторых элементов множества B, называется *подмножеством* множества B ($A \subseteq B$) (рис. 1). Если при этом $A \neq B$, то A — *собственное подмножество* множества B ($A \subset B$).

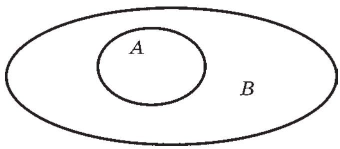


Рис. 1

Если $A = B$, то $A \subset B$ и $B \subset A$.

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*.

$N = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ — множество *натуральных* чисел;

$Z = \{0; \pm1; \pm2; \ldots; \pm n; \ldots\}$ — множество *целых* чисел;

$Q = \left\{\frac{m}{n} : m \in Z, n \in N\right\}$ — множество *рациональных* чисел;

R — множество *действительных* чисел.

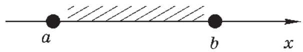
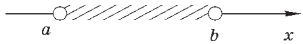
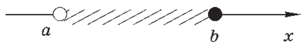
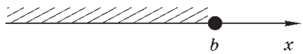
Множество R содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое действительное число может быть записано в виде десятичной дроби. При этом рациональным числам, и только им соответствуют периодические десятичные дроби.

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*.

Имеют место включения: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Каждому числу $x \in R$ соответствует единственная точка числовой оси, и наоборот, каждой точке оси соответствует единственное действительное число. Пусть $a \in R$, $b \in R$, причем $a < b$ (табл. 2).

Таблица 2

Числовой промежуток	Характеристическое свойство	Изображение
Отрезок	$[a; b] = \{x : a \le x \le b\}$	 $[a; b]$
Интервал	$(a; b) = \{x : a < x < b\}$	 $(a; b)$
Полуоткрытые интервалы	$[a; b) = \{x : a \le x < b\}$ $(a; b] = \{x : a < x \le b\}$	 $(a; b]$
Бесконечные интервалы	$[a; \infty) = \{x : x \ge a\}$ $(a; \infty) = \{x : x > a\}$ $(-\infty; b] = \{x : x \le b\}$ $(-\infty; b) = \{x : x < b\}$ $(-\infty; \infty) = \{x : -\infty < x < \infty\} = R$	 $(-\infty; b]$

Задание 1.1 (2). Выберите один вариант ответа.

Множеством, удовлетворяющим заданному характеристическому свойству $B = \{(x, y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}$, является...

Варианты ответа (рис. 2):

Решение. Уравнение $y = 0$ определяет в плоскости Oxy ось Ox, $y = 1$ — прямую, параллельную оси Ox, неравенство $0 \le y \le 1$ — полосу, ограниченную прямыми $y = 0$ и $y = 1$. Уравнение $x = 0$ определяет ось Oy, $y = x$ — биссектрису первого и третьего координатного угла, неравенство $0 \le x \le y$ — точки, лежащие выше биссектрисы. Тогда множество $B = \{(x, y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}$ изображено на рисунке $2d$.

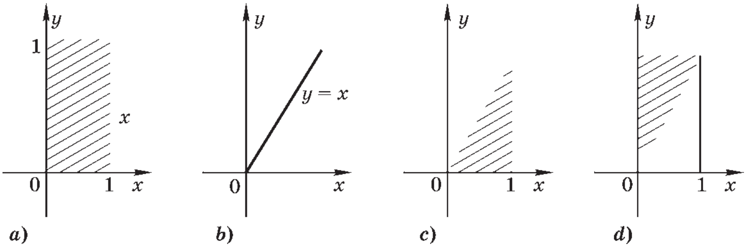
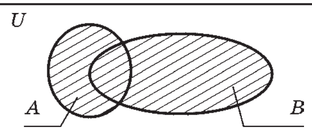
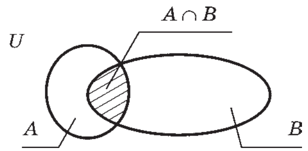
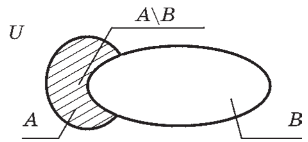
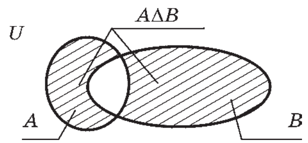
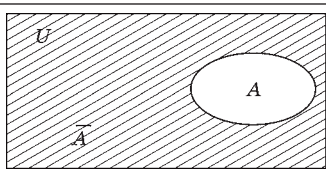


Рис. 2

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Название операции и обозначение	**Определение**	**Диаграмма Эйлера — Венна**
Объединение $C = A \bigcup B$	$C = \{c \mid c \in A$ или $c \in B\}$	
Пересечение $C = A \bigcap B$	$C = \{c \mid c \in A$ и $c \in B\}$	
Разность $C = A - B$ или $C = A \setminus B$	$C = \{c \mid c \in A$ и $c \notin B\}$	
Симметрическая разность $C = A \oplus B$ или $C = A \Delta B$	$C = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$	
Дополнение A в U $C = \overline{A}$	$C = U \setminus A$ $C = \{c \mid c \notin A\}$	

Задание 1.2 (1). Выберите один вариант ответа.

Множеством, состоящим из всех тех, и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному множеству A, B и C, является...

Варианты ответа: 1) $A \cap B \cap C$; 2) $A \cup B \cup C$; 3) $(A \cap B) \cup C$; 4) $A \cup (B \cap C)$.

Решение. Так как результатом объединения конечного числа множеств является множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств, то для множеств A, B и C имеем $A \cup B \cup C$.

Задание 1.2 (1). Выберите один вариант ответа.

Результатом операции $A \cap A$ над множеством A является...

Варианты ответа: 1) $2A$; 2) A; 3) A^2; 4) операция не имеет смысла.

Решение. Так как результатом пересечения множеств является множество, состоящее из элементов, принадлежащих обоим множествам, то $A \cap A = A$.

Задание 1.2 (2). Выберите один вариант ответа.

Если $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$, то равенство $A \cap B = A$...

Варианты ответа: 1) является возможным для любых множеств A и B; 2) возможно, если $A \subset B$; 3) возможно, если $B \subset A$; 4) равенство невозможно.

Решение. $A \cap B = A$, если элементы множества A будут являться элементами множества B, т. е $A \subset B$.

Задание 1.2 (1). Выберите варианты согласно тексту задания.

Установите соответствие между заданными числами и множествами, которым они принадлежат.

1) $x = 2$;

2) $x = \sqrt{3}$;

3) $x = -5$;

4) $x = 0{,}5$.

a) $B = \{x \in R \backslash Q \mid -5 < x < 2\}$;

b) $C = \{x \in Z \mid -7 < x < 0{,}5\}$;

c) $D = \{x \in Q \mid -5 < x < 2\}$;

d) $U = \{x \in Z \mid -5 < x < 2\}$;

e) $A = \{x \in N \mid 0 < x \leq 3\}$;

f) $E = \{x \in N \mid -5 \leq x < 2\}$.

Решение. Число $x = 2$ является натуральным и $2 \in (0; 3] \Rightarrow x = 2 \in A$; число $x = \sqrt{3}$ является иррациональным и $\sqrt{3} \in (-5; 2) \Rightarrow x = \sqrt{3} \in B$; число $x = -5$ является целым и $-5 \in (-7; 0{,}5) \Rightarrow x = -3 \in C$; число $x = 0{,}5$ является рациональным и $0{,}5 \in (-5; 2) \Rightarrow x = 0{,}5 \in D$.

Задание 1.2 (1). Выберите один вариант ответа.

Даны множества $A = \{-2; -1{,}5; 0{,}5; 2; 4\}$ и Z — множество целых чисел. Тогда $A \bigcap Z$ есть множество…

Варианты ответа: 1) $\{-1{,}5; 0{,}5\}$; 2) $\{-2; 2; 4\}$; 3) $\{-2; 2\}$; 4) $\{2; 4\}$.

Решение. Так как множество $A \bigcap Z$ содержит только целые числа из множества A, то $A \bigcap Z = \{-2; 2; 4\}$.

Задание 1.2 (2). Выберите один вариант ответа.

Если A и B — множества действительных чисел: $A = [-2, 5)$, $B = (0, 8]$, то множество $B \backslash A$ равно…

Варианты ответа: 1) $[-2, 0]$; 2) $(5, 8]$; 3) $[-2, 0)$; 4) $[5, 8]$.

Решение. Так как результатом разности множеств $B \backslash A$ является множество, состоящее из элементов множества B, не принадлежащих множеству A, то $B \backslash A = (5{,}8]$.

Задание 1.2 (2). Выберите один вариант ответа.

Для множеств $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2y \geq 0\}$ и $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 4y \leq 0\}$ $A \bigcap B$ есть множество…

Варианты ответа (рис. 3):

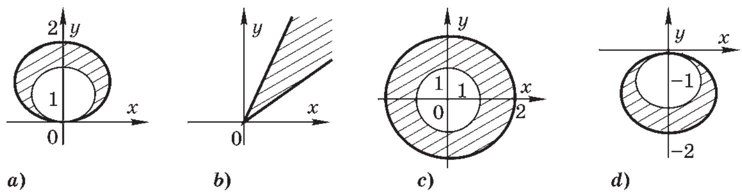


Рис. 3

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 - 2y = 0$ в плоскости Oxy определяет окружность со смещенным центром. Для установления координат центра и радиуса окружности приведем уравнение к каноническому виду $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. С этой целью выделим в левой части уравнения полный квадрат: $x^2 + (y^2 - 2y + 1) - 1 = x^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0$ или $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Таким образом, центр окружности находится в точке

(0; 1), радиус $R = 1$. Неравенство $x^2 + y^2 - 2y \geq 0$ определяет данную окружность с внешней ее частью. Неравенство $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$ определяет окружность с центром в точке (0; 2), радиусом $R = 2$ с внутренней ее частью. Тогда $A \cap B$ есть множество на рисунке 3*а*.

ЗАКОНЫ ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Законы для объединения	**Законы для пересечения**
1. Коммутативность	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность	
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Дистрибутивность	
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. Идемпотентность	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
5. Закон де Моргана	
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
6. Операции с множеством $\varnothing$	
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
7. Операции с множеством U	
$A \cup U = U \Rightarrow U = \bar{\varnothing} \Rightarrow \bar{U} = \varnothing$	$A \cap U = A$
8. Законы поглощения	
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cup \bar{A} = U$	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cap \bar{A} = \varnothing$
9. Свойства операции разности	
$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$ $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$ $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$	$A \setminus B = A \cap \bar{B}$, $A \backslash A = \varnothing$ $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$ $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$ $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$
10. Свойства операции симметрической разности	
$A \Delta B = B \Delta A$ $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$	

Задание 1.3 (2). Выберите один вариант ответа.

В результате использования законов над множествами формула $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ эквивалентна формуле...

Варианты ответа: 1) A; 2) $A \cup B$; 3) $A \cap B$; 4) B.

Решение. $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ (используем закон дистрибутивности относительно операции объединения) $= A \cap (B \cup \bar{B}) =$ (используем закон поглощения относительно операции объединения) $= A \cap U =$ (используем свойство операции пересечения с универсальным множеством) $= A$.

КОРТЕЖИ

Кортежем длины n, составленным из элементов множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$, называется конечная последовательность $a = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, где для любого $k (1 \le k \le n)$ имеем $x_k \in X_k$. Элемент x_k называется k-й координатой, или k-й компонентой кортежа a.

Два кортежа a и b *равны* только в случае, если они имеют одинаковую длину и координаты a_k и b_k равны.

Пустым называется кортеж длины 0, т. е. кортеж, не содержащий ни одной координаты.

Основные *отличия* понятий кортежа и множества:

1) в множестве порядок элементов не играет роли, в кортежах порядок элементов играет роль: два кортежа, имеющие одинаковый состав, но различный порядок элементов, различны;

2) в множестве все элементы различны, в кортеже координаты могут повторяться.

Чтобы различать множества и кортежи, введем обозначения:

- для множества $-X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$;
- для кортежа $a = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

Задание 1.4 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Равными кортежами являются…

Варианты ответа: 1) $\langle 1^2, 2^2, 3^2 \rangle$ и $\langle \sqrt{1}, \sqrt{16}, \sqrt{81} \rangle$; 2) $\langle 1, 2, 3 \rangle$ и $\langle 3, 2, 1 \rangle$; 3) $\langle 1, 2, 3 \rangle$ и $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$; 4) $\langle 1, 2, 3, 3 \rangle$ и $\langle 1, 2, 3 \rangle$.

Решение. Кортежи $\langle 1^2, 2^2, 3^2 \rangle$ и $\langle \sqrt{1}, \sqrt{16}, \sqrt{81} \rangle$ равны, поскольку $1^1 = \sqrt{1}, 2^2 = \sqrt{16}, 3^2 = \sqrt{81}$. Кортежи $\langle 1, 2, 3 \rangle$ и $\langle 3, 2, 1 \rangle$ различны, так как координаты кортежей располагаются в разном порядке. Кортежи 3 и 4 различны, так как имеют разную длину.

ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Декартовым произведением множеств A_1, A_2, ..., A_n ($A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$) называется множество, состоящее из кортежей вида $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$. В частности, $A \times A = A^2$ — *декартов квадрат*.

Задание 1.4 (2). Выберите один вариант ответа.

Верным будет утверждение о том, что...

1) декартовым произведением множеств $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ является множество упорядоченных наборов $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, где $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, ..., $x_n \in A_n$;

2) декартово произведение n конечных числовых множеств — это константа, равная сумме всевозможных произведений n элементов, каждое из которых содержит по одному элементу из каждого множества;

3) декартово произведение множеств $A_1 \times A_2 \times \ldots \times \mathrm{A}_n$ не является пустым множеством, если хотя бы одно из этих множеств пусто;

4) декартово произведение множеств не может быть применено к множествам, содержащим разное число элементов.

Решение. Верным является только первое утверждение. Второе утверждение ложно, так как декартово произведение представляет собой множество, а не константу. Третье утверждение ложно, так как по определению, если одно из множеств пусто, то пусто и декартово произведение. Третье утверждение ложно, так как декартово произведение может быть применено к множествам с различным числом элементов.

Задание 1.4 (2). Впишите правильный ответ.

Если $C = \{1, 2\}$, то декартов квадрат C^2 состоит из _____ кортежей.

Решение. Имеем 4 кортежа, так как
$C^2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$.

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Пусть элементы множества A обладают некоторым признаком R.

Унарным (*одноместным*) *отношением* R между элементами множества A называется любое подмножество множества A, т. е. $R \subset A$.

Задание 1.5 (2). Выберите один вариант ответа.

Свойству «Быть больше 0» удовлетворяют…

Варианты ответа: 1) целые числа; 2) действительные числа; 3) натуральные числа.

Решение. Данному свойству удовлетворяют только натуральные числа, так как действительные и целые числа могут быть отрицательными.

Бинарным отношением R между элементами множеств A и B называется любое подмножество R множества $A \times B$, т. е. $R \subseteq A \times B$.

Таким образом, если элементы a и b множеств A и B связаны бинарным отношением R, т. е. aRb, то $\langle a, b\rangle \in R$.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

1. Перечисление пар, на которых бинарное отношение R выполняется.

2. Матрица бинарного отношения $R \subseteq A \times B$, где $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ — прямоугольная матрица размерностью $n \times m$, элементы которой $r_{ij} = \begin{cases} \mathbf{0}, a_i \bar{R} b_j \\ \mathbf{1}, a_i R b_j \end{cases}$, где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Задание 1.5 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Если $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, то бинарное отношение $R = \{(x, y) : x, y \in A, x \text{ делит } y, x \le 3\}$ содержит кортежи вида…

Варианты ответа: 1) $\langle 2, 2\rangle$; 2) $\langle 6, 2\rangle$; 3) $\langle 2, 6\rangle$; 4) $\langle 3, 3\rangle$; 5) $\langle 3, 6\rangle$.

Решение. Данному отношению R не удовлетворяет только кортеж $\langle 6, 2\rangle$, так как 2 не делится без остатка на 6.

Задание 1.5 (2). Выберите один вариант ответа.

Для множества $A = \{a, b, c, d\}$ бинарное отношение $R = \{\langle a, b\rangle; \langle c, d\rangle\}$ задается матрицей вида…

Варианты ответа:

1)

	a	*b*	*c*	*d*
a	0	0	0	0
b	1	0	0	0
c	0	0	0	0
d	0	0	1	0

2)

	a	*b*	*c*	*d*
a	0	1	0	0
b	0	0	0	0
c	0	0	0	1
d	0	0	0	0

3)

	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	1	0	0	0
c	0	0	0	1
d	0	0	1	0

Решение. Указанному порядку следования элементов в кортежах удовлетворяет только матрица 2.

СВОЙСТВА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Свойства	**Определение**	**Примеры R**
Рефлексивность	$\forall a \in A$: $\langle a, a\rangle \in R$	Параллельность прямых и плоскостей, быть не больше на множестве чисел
Антирефлексивность	$\forall a \in A : \langle a, a\rangle \notin R$	Быть больше на множестве чисел
Симметричность	$\forall a, b \in A : \langle a, b\rangle \in R \Rightarrow \langle b, a\rangle \in R$	Перпендикулярность прямых и плоскостей
Антисимметричность	$\forall a, b \in A : \langle a, b\rangle \in R \Rightarrow \langle b, a\rangle \notin R$	Быть выше на множестве людей
Транзитивность	$\forall a, b, c \in A : \langle a, b\rangle \in R$ и $\langle b, c\rangle \in R \Rightarrow \langle a, c\rangle \in R$	Быть меньше на множестве чисел
Эквивалентность	Отношение одновременно рефлексивное, симметричное и транзитивное	Отношение подобия на множестве фигур

Задание 1.6 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Отношение включения двух множеств $\subseteq$ (быть подмножеством) имеет свойства...

Варианты ответа: 1) рефлексивность; 2) симметричность; 3) антисимметричность; 4) транзитивность.

Решение. Пусть множество $U \neq \varnothing$, а множество E — булеан этого множества, т. е. множество всех подмножеств множества U. Тогда отношение включения множества во множество (быть подмножеством) имеет следующие свойства: 1) рефлексивность, так как для любого $X \in E \Rightarrow X \subseteq X$, т. е. каждое множество является своим подмножеством; 3) антисимметричность, так как для любых $X \in E$, $Y \in E$, из того, что множество X — подмножество множества Y ($X \subseteq Y$) не следует, что множество Y — подмножество множества

X ($Y \subseteq X$); 4) транзитивность, так как для любых $X \in E$, $Y \in E$, $Z \in E$, если множество X есть подмножество множества Y ($X \subseteq Y$) и множество Y есть подмножество множества Z ($Y \subseteq Z$), то множество X есть подмножество множества Z ($X \subseteq Z$).

2.2. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

Правила комбинаторики.

Правило умножения: если из некоторого конечного множества элемент a можно выбрать n_1 способами, а второй элемент b – n_2 способами, то оба элемента (a и b) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Правило сложения: если из некоторого конечного множества элемент a можно выбрать n_1 способами, а элемент b – n_2 способами, причем способы не пересекаются, то любой из объектов (a или b) можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Формулы комбинаторики

Выборки	Размещения	Перестановки	Сочетания
Схема выбора	Определение		
	Упорядоченная выборка из n элементов по m	Упорядоченная выборка из n элементов по n	Неупорядоченная выборка из n элементов по m
Без возвращения	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	$P_n = n!$	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$
С возвращением	$\bar{A}_n^m = n^m$	$P_n(n_1, n_2, ..., n_m) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_m!}$	$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

Задание 2.1 (2). Выберите один вариант ответа.

На столе лежат пять книг по математике и три книги по физике. Тогда число способов выбора одной книги равно…

Варианты ответа: 1) 8; 2) 15; 3) 3!5!; 4) 3! + 5!

Решение. Одну книгу по математике можно выбрать 5 способами, одну книгу по физике — 3 способами. Тогда одну книгу по физике или математике, согласно правилу суммы, можно выбрать $5 + 3 = 8$ способами.

Задание 2.1 (2). Выберите один вариант ответа.

Число способов выбора гласной и согласной буквы из слова «зеркало» равно…

Варианты ответа: 1) 12; 2) 7; 3) 4!3!; 4) 4!+3!

Решение. В этом слове 4 согласные буквы и 3 гласные, поэтому, согласно правилу произведения, число способов равно $4 \cdot 3 = 12$.

Задание 2.1 (1). Выберите один вариант ответа.

Необходимо угадать четырехзначный код, который строится из элементов множества $M = \{2; 4; 7; 9\}$ без повторений элементов. Тогда наибольшее число комбинаций, которое, возможно, придется перебрать, равно…

Варианты ответа: 1) 10 000; 2) 24; 3) 9000; 4) 256.

Решение. Сформулируем задачу на языке дискретной математики: требуется найти число упорядоченных 4-элементных наборов без повторений из четырех различных элементов, т. е. число различных перестановок, равное $P_4 = 4! = 24$.

Задание 2.1 (2). Выберите один вариант ответа.

Текст кодируется цифрами от 0 до 9. Тогда наибольшее число сообщений, которые можно составить из 4 различных цифр, равно…

Варианты ответа: 1) 10 000; 2) 5040; 3) 210; 4) 256.

Решение. Множество, из которого выбираются группы по четыре элемента, состоит из десяти элементов (10 цифр). Каждая группа (соединение, комбинация) отличается одна от другой либо самими элементами, либо их порядком, поэтому, по определению, эти соединения являются размещениями. Число таких размещений равно $A_{10}^{4} = \dfrac{10!}{4!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Задание 2.1 (2). Выберите один вариант ответа.

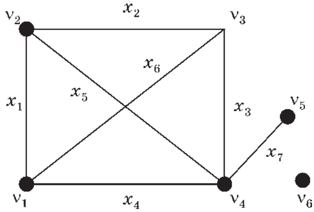
В полуфинале первенства России по шахматам участвуют 20 шахматистов, а в финал попадают трое. Тогда наибольшее число финальных троек можно получить ________ способами.

Варианты ответа: 1) C_{20}^{3}; 2) A_{20}^{3}; 3) 3!20; 4) 20!3!

Решение. Надо подсчитать число соединений, которые можно составить из 20 элементов по три элемента, причем каждое соединение отличается от другого только составом (порядок элементов в каждой тройке не важен). Поэтому эти соединения являются сочетаниями, и их число равно $C_{20}^{3} = \dfrac{20!}{3!17!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140.$

2.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Основные понятия для графа	Пример
Граф — система объектов, находящихся в некоторых отношениях друг с другом. Множество объектов V — вершины графа, отношения между объектами X — ребра графа. Обозначение: $G(V, X)$, где $X \subset V \times V$	
Если $x = (v_i, v_j)$ — ребро графа, то вершины v_i и v_j *инцидентны* ребру x	Вершины v_2 и v_4 инцидентны ребру x_5, являются смежными
Две вершины *смежные*, если принадлежат одному ребру	
Степень вершины $d(v)$ — число ребер, которым вершина v инцидентна. Вершина v может быть: *изолированная*, если $d(v) = 0$; *висячая*, если $d(v) = 1$; *четная*, если $d(v)$ — четное число	$d(v_2) = 3$, вершина v_5 — висячая, вершина v_6 — изолированная
Маршрут для графа $G(V, X)$ — чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентны $v_1x_1v_2x_2v_3\ldots x_kv_{k+1}$. *Длина маршрута* — количество ребер в нем	Если $M = v_1x_1v_2x_2v_3x_3v_4x_5v_2$, то $\lvert M \rvert = 4$
Маршрут *замкнутый*, если его начальная и конечная вершины совпадают	$v_1x_1v_2x_2v_3x_3v_4x_5v_2x_1v_1$
Маршрут называется *цепью*, если имеет различные ребра. Цепь *простая*, если в ней все вершины попарно различны	$v_2x_2v_3x_3v_4$
Цикл — замкнутый маршрут. *Цикл простой*, если в нем все вершины попарно различны	$v_2x_2v_3x_3v_4x_5v_2$ — простой цикл
Две вершины графа *связные*, если существует соединяющая их простая цепь	Вершины v_1 и v_3 — связные

ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Основные понятия для орграфа. Если элементы множества X графа $G(V, X)$ упорядоченные пары, то граф называется *ориентированным*, или *орграфом*.

$x = (v_i, v_j)$ — дуга орграфа, где вершина v_i — начало, а вершина v_j — конец дуги x. Дуга вида $x = (v, v)$ — *петля*, т. е. начальная и конечная вершины совпадают. Петля обычно считается неориентированной.

Граф называется *псевдографом*, если содержит петли.

Степень входа вершины орграфа — число входящих в вершину ребер, *степень выхода* — число выходящих из вершины ребер.

Источником называется вершина, степень входа которой равна нулю, а степень выхода положительна.

Стоком называется вершина, степень входа которой положительна, а степень выхода равна нулю.

Изолированная вершина орграфа — вершина, у которой степень входа и степень выхода равна нулю.

Маршрут в орграфе называется *путем*, если все его дуги различны.

Полный путь — путь, проходящий по дугам графа от источника к стоку.

Путь называется *контуром*, если начальная и конечная вершины совпадают.

Пример. Граф имеет источник — вершину v_2, сток — вершину v_4. Один из путей: $v_2 \to v_3 \to v_4$ (рис. 4)

Пример. Граф является псевдографом, так как содержит петли (1, 1) и (3, 3). Граф содержит контур $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$ (рис. 5)

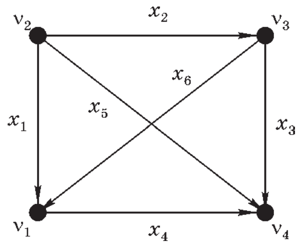


Рис. 4

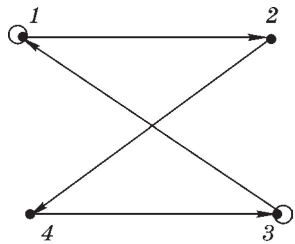


Рис. 5

Задание 3.1 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Нечетными вершинами (рис. 6) в графе являются…

Варианты ответа: 1) *4*; 2) *6*; 3) *3*; 4) *5*.

Решение. Найдем степени вершин графа. Так как вершина *1* инцидентна двум ребрам, то $d(1) = 2$. Аналогично $d(2) = 2$; $d(3) = 1$, $d(4) = 6$; $d(5) = 2$; $d(6) = 1$; $d(7) = 2$; $d(8) = 2$. Таким образом, нечетными вершинами являются вершины *3* и *6*.

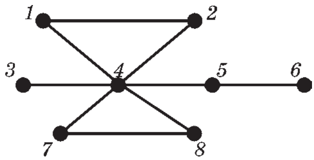


Рис. 6

Задание 3.2 (1). Выберите один вариант ответа.

Для ориентированного графа (рис. 7) контур может иметь вид…

Варианты ответа: 1) L: $7 \to 9 \to 8 \to 9 \to 7$; 2) L: $7 \to 6 \to 8 \to 9 \to 7$; 3) L: $7 \to 6 \to 9 \to 8 \to 7$; 4) L: $7 \to 6 \to 8 \to 9$.

Решение. Из предложенных вариантов ответа контур представлен только в варианте 2. Вариант 1 содержит не принадлежащую орграфу дугу (*7*; *9*). Вариант 3 не является контуром, так как вершины *6* и *9* в представленном орграфе не смежные между собой. В варианте 4 представлен путь, а не контур.

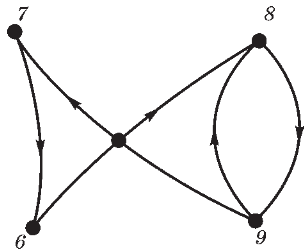
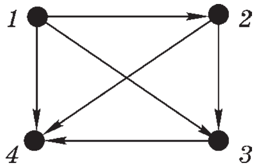


Рис. 7

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФА

Способ задания	Определение	Пример
Аналитический	Задание бинарного отношения R на множестве вершин $V = \{v_i\}$, $i = \overline{1, n}$	$V = \{1, 2, 3, 4\}$ $\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow$ «$x < y$»
Список ребер	*Замечание.* Для неориентированного графа порядок вершин в списке ребер не важен	$X = \begin{Bmatrix}(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), \\ (2, 4), (3, 4)\end{Bmatrix}$

<table>
<tr><th>Способ задания</th><th>Определение</th><th>Пример</th></tr>
<tr><td>Реализация графа</td><td>Наглядное изображение графа, где вершинам соответствуют точки, ребрам — отрезки или дуги</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Матрица смежности</td><td>$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (v_i, v_j) \in X; \\ 0, \text{ если } (v_i, v_j) \notin X \end{cases}$$</td><td>
<table>
<tr><th>v_i</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Матрица инциденций</td><td>Для неориентированного графа
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } v_i \text{ инцидентна} \\ \text{ребру } x_j; \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$
Для орграфа
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_j \text{ исходит из } v_i; \\ -1, \text{ если } x_j \text{ заходит в } v_i; \\ 0, \text{ если } x_j \\ \text{не инцидентна } v_i \end{cases}$$</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>(1,2)</th><th>(1,3)</th><th>(1,4)</th><th>(2,3)</th><th>(2,4)</th><th>(3,4)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>–1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>–1</td><td>0</td><td>–1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>–1</td><td>0</td><td>–1</td><td>–1</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Задание 3.3 (1). Выберите один вариант ответа.
Матрица смежности орграфа (рис. 8) имеет вид…

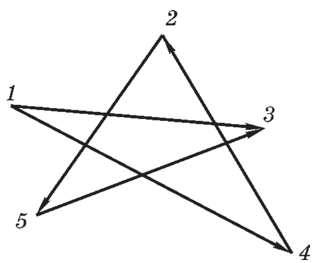


Рис. 8

Варианты ответа:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Орграф определен пятью вершинами, поэтому матрица смежности пятого порядка. Граф содержит пять дуг, поэтому матрица смежности будет содержать пять единиц. По направлению стрелок, идущих от вершины *1*, имеем $a_{13} = a_{14} = 1$. Для вершины *2* имеем $a_{25} = a_{42} = 1$. Для вершины *5* имеем $a_{53} = 1$. Тогда орграфу соответствует матрица смежности 2).

Задание 3.3 (1). Выберите один вариант ответа.

Число полных путей в ориентированном графе, представленном матрицей смежности, равно…

	A	*B*	*C*	*D*
A	0	0	1	1
B	1	0	1	0
C	0	0	0	0
D	0	0	1	0

Варианты ответа: 1) 1; 2) 4; 3) 2; 4) 2.

Решение. Имеем граф вида (рис. 9).

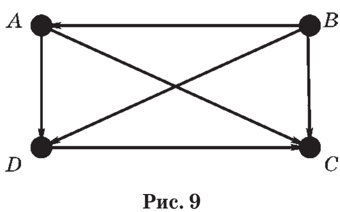


Рис. 9

Граф имеет источник в вершине *B* и сток в вершине *C*. Имеем четыре полных пути $\{(BA), (AD), (DC)\}$, $\{(BC)\}$, $\{(BA), (AC)\}$ и $\{(BD), (DC)\}$, проходящих от источника к стоку.

Задание 3.3 (2). Выберите варианты согласно тексту задания.

Неориентированные графы имеют множество вершин $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Множества их ребер заданы отношением инцидентности: каждое ребро представлено как пара вершин. Поставьте в соответствие каждому графу его графическое изображение.

1) $\{(v_2, v_3), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_1, v_4)\}$;

2) $\{(v_1, v_3), (v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$;

3) $\{(v_2, v_3), (v_1, v_3), (v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_3, v_4)\}$;

4) $\{(v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_3, v_4)\}$.

Варианты ответа (рис. 10):

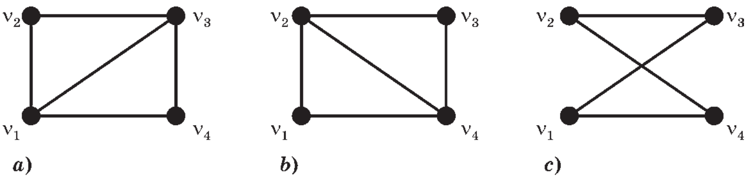


Рис. 10

Решение. Первому и второму четырехэлементным наборам должны соответствовать графы из четырех ребер. По перечню ребер первому набору соответствует граф *c*. Второй набор не представлен на рисунке графом. Графы *a* и *b* отличаются одним ребром. Третьему набору соответствует граф *a*, четвертому набору — граф *b*.

Задание 3.3 (2). Выберите один вариант ответа.

Графу (рис. 11), соответствует бинарное отношение…

Варианты ответа: 1) «быть старше»; 2) «быть братом»; 3) «быть родственником»; 4) «быть другом».

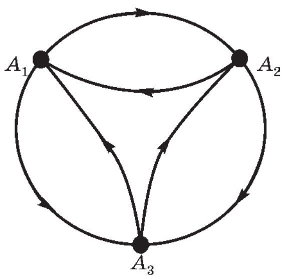


Рис. 11

Решение. Направление стрелок в орграфе указывает, что бинарное отношение обладает свойствами симметричности, транзитивности и антирефлексивности. Из перечисленных отношений такими свойствами обладает отношение «быть родственником».

ВИДЫ ГРАФОВ

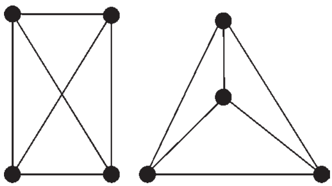
Граф *связный*, если каждые две его вершины связные.

Граф *полный* — граф без кратных ребер, в котором любые две его вершины соединены одним ребром.

Граф *планарный,* если его можно изобразить на плоскости так, что все пересечения его ребер являются вершинами графа. Такое изображение графа на плоскости называется *плоским*.

Графы $G(X, V)$ и $G'(X', V')$ *изоморфны*, если между их вершинами можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что вершины v_i', $v_j' \in V'$ графа G' соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины $v_i, v_j \in V$ графа G соединены ребром.

Пример (рис. 12). $G_1(X, V)$ — полный, связный и планарный.



$G_1(X, V)$ $G_2(X, V)$

Рис. 12

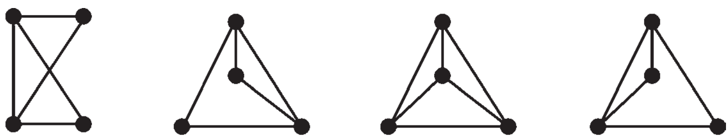
$G_2(X, V)$ — плоское изображение графа $G_1(X, V)$.

Графы $G_1(X, V)$ и $G_2(X, V)$ изоморфны.

Задание 3.4 (1). Выберите один вариант ответа.

Из представленных графов (рис. 13) не изоморфен остальным граф...

Варианты ответа:

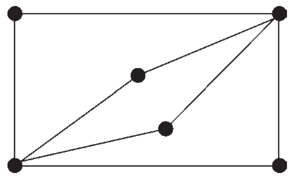
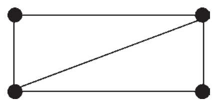
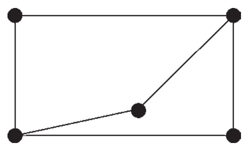


1) 2) 3) 4)

Рис. 13

Решение. Третий граф, содержащий шесть ребер, не изоморфен графам 1, 2 и 4, содержащим по пять ребер.

ТИПЫ ГРАФОВ

<table>
<tr><th>Определение</th><th>Условия существования</th><th>Иллюстрирующие примеры</th></tr>
<tr><td>Путь (цикл), содержащий все ребра графа и притом по одному разу, называется эйлеровым путем (циклом). Граф, обладающий эйлеровым циклом (путем), называется эйлеровым графом</td><td>Критерий существования эйлерова цикла: связный неориентированный граф содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех вершин графа четные.
Критерий существования эйлерова пути: связный неориентированный граф содержит эйлеров путь тогда и только тогда, когда имеет ровно две вершины нечетной степени</td><td rowspan="2">
Есть эйлеров и гамильтонов цикл.

Есть эйлеров цикл, но нет гамильтонова цикла.

Есть гамильтонов, но нет эйлерова цикла.

Нет ни эйлерова, ни гамильтонова цикла</td></tr>
<tr><td>Путь (цикл), содержащий все вершины графа по одному разу, называется гамильтоновым. Граф, обладающий гамильтоновым циклом (путем), называется гамильтоновым графом</td><td>Достаточные условия существования гамильтоновых циклов
1. Всякий полный граф является гамильтоновым.
2. Если граф, помимо простого цикла, проходящего через все его вершины, содержит и другие ребра, то он также является гамильтоновым.
3. Если граф имеет гамильтонов цикл, то он может иметь и другие гамильтоновы циклы</td></tr>
</table>

2.4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Высказыванием P называется предложение, к которому возможно применить понятия «истинно» (И) или «ложно» (Л).

Задание 4.1 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Высказываниями являются…

Варианты ответа:

1. Москва — столица России.

2. Студент математического факультета университета.

3. Треугольник ABC подобен треугольнику $A'B'C'$.

4. 2–3 = 1.

Решение. 1) Предложение является высказыванием, к которому можно применить понятие «истинно». 2) Предложение не является высказыванием, так как ничего не утверждает о студенте. 3) Предложение не является высказыванием, так как нельзя определить, истинно оно или ложно. 4) Предложение является высказыванием, к которому можно применить понятие «ложно».

Сложным называется высказывание, полученное из простых с помощью грамматических связок: «не», «и», «или», «тогда и только тогда...», «если.., то...». *Простое* (*элементарное*) *высказывание* рассматривается как некое неделимое целое (аналогично элементу множества).

Задание 4.1 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Простыми являются высказывания...

Варианты ответа:

1) A: {Параллелограмм не является ромбом};

2) B: {Число 11 — нечетное};

3) C: {Параллелограмм является ромбом};

4) D: {Число 11 является нечетным или простым};

5) E: {Число 11 нечетное и простое}.

Решение. Элементарными являются высказывания B и C. Предложение A не является высказыванием, так как может быть образовано из высказывания C с помощью связки «не». Предложения D и E не являются высказываниями, так как могут быть образованы из высказывания B с помощью связок «или» и «и» соответственно.

ОПЕРАЦИИ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ

Название логических операций, их обозначение и прочтение	Определение	Таблица истинности
Отрицание ($\neg$) связка «не»	Высказывание $\neg P$ (или $\bar{P}$) истинно, когда P ложно, и ложно, когда P истинно	<table><tr><td>P</td><td>¬P</td></tr><tr><td>И</td><td>Л</td></tr><tr><td>Л</td><td>И</td></tr></table>

<table>
<tr><th>Название логических операций, их обозначение и прочтение</th><th>Определение</th><th>Таблица истинности</th></tr>
<tr><td>Конъюнкция ($\wedge$ или &) связка «и»</td><td>Высказывание $P \wedge Q$ истинно только в том случае, когда оба высказывания истинны</td><td><table><tr><th>P</th><th>Q</th><th>$P \wedge Q$</th></tr><tr><td>Л</td><td>Л</td><td>Л</td></tr><tr><td>Л</td><td>И</td><td>Л</td></tr><tr><td>И</td><td>Л</td><td>Л</td></tr><tr><td>И</td><td>И</td><td>И</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Дизъюнкция ($\vee$) связка «или»</td><td>Высказывание $P \vee Q$ ложно, когда ложны оба высказывания</td><td><table><tr><th>P</th><th>Q</th><th>$P \vee Q$</th></tr><tr><td>Л</td><td>Л</td><td>Л</td></tr><tr><td>Л</td><td>И</td><td>И</td></tr><tr><td>И</td><td>Л</td><td>И</td></tr><tr><td>И</td><td>И</td><td>И</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Импликация ($\Rightarrow$) связка «если…, то…»</td><td>Высказывание $P \Rightarrow Q$ ложно, когда P истинно, а Q — ложно</td><td><table><tr><th>P</th><th>Q</th><th>$P \Rightarrow Q$</th></tr><tr><td>Л</td><td>Л</td><td>И</td></tr><tr><td>Л</td><td>И</td><td>И</td></tr><tr><td>И</td><td>Л</td><td>Л</td></tr><tr><td>И</td><td>И</td><td>И</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Эквиваленция ($\sim$ или $\Leftrightarrow$) связка «тогда и только тогда»</td><td>Высказывание $P \sim Q$ истинно, когда оба высказывания истинны или ложны</td><td><table><tr><th>P</th><th>Q</th><th>$P \sim Q$</th></tr><tr><td>Л</td><td>Л</td><td>И</td></tr><tr><td>Л</td><td>И</td><td>Л</td></tr><tr><td>И</td><td>Л</td><td>Л</td></tr><tr><td>И</td><td>И</td><td>И</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Сумма по модулю 2 ($\oplus$) связка «…или, или…»</td><td>Высказывание $P \oplus Q$ ложно, когда оба высказывания истинны или ложны</td><td><table><tr><th>P</th><th>Q</th><th>$P \oplus Q$</th></tr><tr><td>Л</td><td>Л</td><td>Л</td></tr><tr><td>Л</td><td>И</td><td>И</td></tr><tr><td>И</td><td>Л</td><td>И</td></tr><tr><td>И</td><td>И</td><td>Л</td></tr></table></td></tr>
</table>

Примечание. Сумма по модулю 2 понимается как разделительное «или».

Задание 4.2 (2). Выберите один вариант ответа.

Логическое значение высказывания «$3 \cdot 3 = 9$ и $4 + 7 = 11$» есть…

Варианты ответа: 1) истина; 2) ложь; 3) правда; 4) неправда.

Решение. Высказывание «$3 \cdot 3 = 9$» истинно, высказывание «$4 + 7 = 11$» также истинно. К высказываниям применяется операция конъюнкция. На основании определения этой операции логическое значение высказывания «$3 \cdot 3 = 9$ и $4 + 7 = 11$» есть истина.

Задание 4.2 (2). Выберите один вариант ответа.

Логическое значение высказывания $A \vee (2 \cdot 2 = 5)$, если высказывание A ложно, есть…

Варианты ответа: 1) истина; 2) ложь; 3) правда; 4) неправда.

Решение. Дизъюнкция высказываний есть ложное высказывание в том и только в том случае, если оба входящих в дизъюнкцию высказывания ложны. В нашем случае второе высказывание «$2 \cdot 2 = 5$» ложно, и высказывание A ложно. Поэтому исходное высказывание ложно.

Задание 4.2 (2). Выберите один вариант ответа.

Условие истинности предложения «$\frac{a}{b} = 0$» (a, b — действительные числа) имеет вид…

Варианты ответа: 1) $(a = 0) \wedge (b \neq 0)$; 2) $(a = 0) \vee (b \neq 0)$; 3) $(a = 0) \to (b \neq 0)$; 4) $(a \neq 0) \wedge (b = 0)$.

Решение. Дробь равна нулю лишь в том случае, когда числитель равен нулю, а («и») знаменатель отличен от нуля, т. е. $(a = 0) \wedge (b \neq 0)$.

ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Пропозициональные переменные — переменные, вместо которых можно подставлять конкретные высказывания.

Формула алгебры высказываний определяется по следующим правилам:

1) всякая пропозициональная переменная есть формула;

2) если F_1 и F_2 — формулы, то выражения $\neg F$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \Leftrightarrow F_2)$ также являются формулами;

3) других формул, кроме построенных по правилам двух предыдущих пунктов, нет.

Задание 4.2 (2). Выберите один вариант ответа.

Пусть имеются простые высказывания A — «Идет дождь», B — «Крыши мокрые». Тогда сложное высказывание C — «Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые» представимо в виде…

Варианты ответа: 1) $(A \to B) \wedge (\bar{A} \wedge B)$; 2) $(A \to B) \wedge$ $\wedge (\bar{A} \vee B)$; 3) $(A \Leftrightarrow B) \wedge (\bar{A} \wedge B)$.

Решение. В первом предложении «Если идет дождь, то крыши мокрые» высказывания A и B соединены связкой «если…, то»: $A \to B$. Во втором предложении «Дождя нет, а крыши мокрые» союз «а» имеет смысл связки «и», кроме того, высказывание A следует взять с отрицанием: $\bar{A} \wedge B$. Для записи высказывания C в виде формулы остается объединить представленные выше высказывания в одно связкой «и»: $C = (A \to B) \wedge (\bar{A} \wedge B)$.

Задание 4.2 (2). Выберите один вариант ответа.

Имеются высказывания, обозначенные буквами A, B и C. Буквы A и C обозначают истинные высказывания (A = И, B = И, где И есть истина). Буква B обозначает ложное высказывание (B = Л, Л есть ложь). Тогда истинным является высказывание…

Варианты ответа: 1) $C \Rightarrow (A \Rightarrow B)$; 2) $(C \Leftrightarrow A) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$; 3) $\neg(C \vee A) \vee B$; 4) $\neg(A \wedge (B \wedge \neg(A \wedge C)))$.

Решение. В заданные высказывания (пропозициональные формы) подставим истинностные значения букв, которые указаны в условии задачи.

1) $C \Rightarrow (A \Rightarrow B)$: подставляем значения и используем таблицу истинности для импликации — И $\Rightarrow$ (И $\Rightarrow$ Л) = И $\Rightarrow$ Л = Л. Высказывание ложно.

2) $(C \Leftrightarrow A) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$: подставляем значения и используем таблицу истинности для эквиваленции — (И $\Leftrightarrow$ И) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (Л $\Leftrightarrow$ И) = И $\Leftrightarrow$ Л = Л.

3) $\neg(C \vee A) \vee B$: подставляем значения и используем таблицы истинности для дизъюнкции и отрицания — $\neg$(И$\vee$И) $\vee$ $\vee$ Л = ($\neg$И) $\vee$ Л = Л $\vee$ Л = Л.

4) $\neg(A \wedge (B \wedge \neg(A \wedge C)))$: подставляем значения и используем таблицы истинности для конъюнкции и отрицания — $\neg$(И $\wedge$ (Л $\wedge$ $\neg$(И $\wedge$ И))) = $\neg$(И $\wedge$ (Л $\wedge$ $\neg$И)) = $\neg$(И $\wedge$ (Л $\wedge$ Л)) = = $\neg$(И $\wedge$ Л) = $\neg$Л = И.

Итак, истинным высказыванием для заданного распределения истинностных значений пропозициональных букв является высказывание $\neg(A \wedge (B \wedge \neg(A \wedge C)))$.

Задание 4.2 (2). Выберите один вариант ответа.

Имеются высказывания, обозначенные буквами A, B и C. Укажите составное высказывание, построенное из высказываний A, B, и C, которое ложно тогда и только тогда, когда ложно лишь высказывание C.

Варианты ответа: 1) $A \wedge B \wedge C$; 2) $(A \wedge B) \to C$; 3) $A \vee \vee B \vee C$; 4) $(A \vee B) \to C$.

Решение. Искомое высказывание должно быть ложно лишь в одном случае: когда высказывание C ложно, а оба высказывания A и B истинны. Таким высказыванием могло бы стать высказывание $M \to C$, где высказывание M должно быть истинно и сконструировано из высказываний A и B, так, что если хотя бы одно из высказываний A или B будет ложным, то ложным станет и M. Тогда $M = A \wedge B$, а искомое высказывание имеет вид: $(A \wedge B) \to C$.

ВИДЫ ФОРМУЛ

Название формулы	Определение
Выполнимая (опровержимая)	Существует такой набор высказываний, который обращает эту формулу в истинное (ложное) высказывание
Тождественно истинная (тавтология)	Формула обращается в истинное высказывание при всех наборах значений переменных
Тождественно ложная (противоречие)	Формула обращается в ложное высказывание при всех наборах значений переменных
Равносильные (эквивалентные) формулы	$X = Y$, если при любых значениях переменных логические значения, получающихся из формул X и Y высказываний, совпадают

Задание 4.2 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула $\varphi = \overline{p} \to (p \wedge r)$ является...

Варианты ответа: 1) выполнимой (опровержимой); 2) тавтологией; 3) противоречием.

Решение. Составим таблицу истинности для формулы φ (табл. 3).

Таблица 3

p	r	$\overline{p}$	$(p \wedge r)$	$\varphi = \overline{p} \to (p \wedge r)$
Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	Л
И	Л	Л	Л	И
И	И	Л	И	И

По последнему столбцу таблицы формула выполнима.

Задание 4.2 (2). Выберите один вариант ответа.

Утверждение: «Если верно, что, когда идет дождь, дороги мокрые, то также верно, что если дороги сухие, то дождя нет» соответствует формула, которая является...

Варианты ответа: 1) выполнимой; 2) тавтологией; 3) противоречием.

Решение. Положим a — «Идет дождь»; b — «Дороги мокрые». Тогда так как высказыванию «Если идет дождь, то дороги мокрые» соответствует формула $a \to b$, высказыванию «Если дороги сухие, дождя нет» — формула $\bar{b} \to \bar{a}$, то окончательно имеем формулу $F = (a \to b) \to (\bar{b} \to \bar{a})$. Составим таблицу истинности формулы F (табл. 4).

Таблица 4

a	b	$a \to b\ (s)$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{b} \to \bar{a}(t)$	$s \to t$
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	И
И	И	И	Л	Л	И	И

Формула F — тавтология, тождественно истинная формула.

Задание 4.2 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Укажите формулы, равносильные формуле $(X \wedge X) \leftrightarrow X$.

Варианты ответа: 1) $(X \vee X) \leftrightarrow X$; 2) $(X \wedge X) \to X$; 3) $(X \vee X) \to X$; 4) $X \to X$.

Решение. Построим таблицу истинности для указанных формул (табл. 5).

Таблица 5

X	$X \wedge X$	$X \vee X$	$X \to X$	$(X \wedge X) \leftrightarrow X$	$(X \vee X) \leftrightarrow X$	$(X \wedge X) \to X$	$(X \vee X) \to X$
И	И	И	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	И	И

По последним пяти столбцам видим, что все формулы являются тавтологиями и поэтому равносильны формуле $(X \wedge X) \leftrightarrow X$.

ВАРИАНТЫ ИМПЛИКАЦИИ

X	Y	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	Импликация $X \to Y$	Конверсия импликации $Y \to X$	Конверсия контрапозиции $\bar{X} \to \bar{Y}$	Контрапозиция $\bar{Y} \to \bar{X}$	Двойная импликация $X \leftrightarrow Y$
Л	Л	И	И	И	И	И	И	И
Л	И	И	Л	И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	И	Л	И	И	Л	Л
И	И	Л	Л	И	И	И	И	И

Задание 4.3 (2). Выберите один вариант ответа.

Конъюнкция импликации и ее конверсии равносильна...

Варианты ответа: 1) контрапозиции; 2) конверсии контрапозиции; 3) двойной импликации; 4) конверсии импликации.

Решение.

X	Y	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	Импликация $X \to Y$	Конверсия импликации $Y \to X$	Конъюнкция импликации и ее конверсии $(X \to Y) \wedge (Y \to X)$	Двойная импликация $X \leftrightarrow Y$
Л	Л	И	И	И	И	И	И
Л	И	И	Л	И	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	И	Л	Л
И	И	Л	Л	И	И	И	И

Итак, $(X \to Y) \wedge (Y \to X) = X \leftrightarrow Y$.

НЕОБХОДИМОСТЬ И ДОСТАТОЧНОСТЬ УСЛОВИЙ

1. X является достаточным условием для Y: если имеет место X, то Y также будет иметь место. Импликация $X \to Y$.

2. X является необходимым условием для Y: если имеет место Y, то X также будет иметь место. Конверсия достаточного условия $Y \to X$.

3. X является необходимым и достаточным условием для Y: X имеет место, если и только если имеет место Y. Двойная импликация (эквивалентность) $X \sim Y$.

Задание 4.4 (1). Выберите варианты согласно тексту задания.

Пусть имеют место простые высказывания: A — «Он счастлив»; B — «Он управляет автомобилем». Установите соответствие между утверждением и формулой.

1) он счастлив, если управляет автомобилем;

2) он счастлив, только если управляет автомобилем;

3) он счастлив тогда и только тогда, когда управляет автомобилем.

a) $A \to B$;

b) $B \to A$;

c) $A \sim B$.

Решение. В утверждении «Он счастлив, если управляет автомобилем» сформулированы достаточные условия счастья этого человека. Если он управляет автомобилем, он наверняка счастлив, что не исключает возможности ему быть счастливым не только за рулем. Первое утверждение записывается формулой $B \to A$. Высказывание «Он счастлив, только если управляет автомобилем», означает необходимые условия счастья. Если этот человек счастлив, он, безусловно, за рулем. В ином состоянии он всегда несчастлив. Кроме того, управление автомобилем еще не гарантирует счастье, все может быть. Поэтому данное высказывание записывается формулой $A \to B$. В третьем высказывании сформулированы необходимые и достаточные условия его счастья. Он счастлив, если и только если управляет автомобилем. Следовательно, нужно записать формулу $A \sim B$.

Задание 4.4 (1). Выберите один вариант ответа.

Теорема: «Всякая сходящаяся последовательность ограничена» в форме устного суждения «Если..., то...» имеет вид...

Варианты ответа:

1) если последовательность сходится, то она ограничена;

2) если последовательность ограничена, то она сходится;

3) истинны оба высказывания;

4) все предыдущие высказывания ложны.

Решение. Введем простые высказывания: X — «Существует сходящаяся последовательность», Y — «Эта последовательность является ограниченной». Тогда если будет иметь место X, то будет иметь место Y, т. е. X является достаточным условием для Y. Тогда теорема будет иметь вид: «Если последовательность сходится, то она ограничена».

Задание 4.4 (1). Выберите один вариант ответа.

Теорема: «Всякая сходящаяся последовательность ограничена» с использованием термина «необходимое условие» имеет вид...

Варианты ответа:

1) ограниченность последовательности есть необходимое условие ее сходимости;

2) сходимость последовательности есть необходимое условие ее ограниченности;

3) верны оба высказывания;

4) среди предыдущих высказываний нет истинного высказывания.

Решение. Пусть высказывание X — «Существует сходящаяся последовательность», Y — «Эта последовательность является ограниченной». Тогда, если имеет место X, то будет иметь место Y. Тогда теорема будет иметь вид: «Ограниченность последовательности есть необходимое условие ее сходимости».

Задание 4.4 (2). Выберите один вариант ответа.

Теорема: «Всякая сходящаяся последовательность ограничена» после применения теоремы контрапозиции эквивалентна высказыванию...

Варианты ответа:

1) если последовательность не сходится, то она не ограничена;

2) всякая ограниченная последовательность сходится;

3) всякая ограниченная последовательность не сходится;

4) если последовательность не ограничена, то она не сходится.

Решение. Пусть X — «Существует сходящаяся последовательность», Y — «Эта последовательность является ограниченной». Тогда данной теореме соответствует импликация $X \to Y$. $\bar{X}$ соответствует высказывание «Существует не сходящаяся последовательность», $\bar{Y}$ — «Эта последовательность не является ограниченной». Тогда контрапозиции $\bar{Y} \to \bar{X}$ соответствует высказывание «Если последовательность не ограничена, то она не сходится».

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Пусть $E = \{H_1, H_2, \ldots, H_m\}$ — конечное множество формул и A — формула. Формула A называется *логическим следствием* формул множества E, если A истинна на всякой интерпретации, на которой истинны одновременно все формулы $H_1, \ldots, H_m$. В этом случае используют запись $H_1, \ldots, H_m \models A$, котораяназывается *правилом вывода*, или *клаузой*. Формулы $H_1, \ldots, H_m$ называются *гипотезами*, или *посылками*, или *допущениями*. Формулу A называют *заключением*. Клауза верна, если формула A действительно логическое следствие формул $H_1, \ldots, H_m$, и неверна, если логическое следствие места не имеет.

Если вместо аргументов формул $H_1, \ldots, H_m, A$ подставить конкретные высказывания, клауза наполнится конкретным содержанием, которое мы будем называть *легендой*.

Задание 4.10 (2). Выберите один вариант ответа.

Пусть A — «Сверкнула молния», B — «Грянул гром». Тогда клаузе $A \to B, A \models B$ соответствует легенда…

Варианты ответа:

1) если сверкнула молния, то грянет гром. Молния сверкнула. Следовательно, должен грянуть гром;

2) если сверкнула молния, то грянет гром. Грянул гром. Следовательно, сверкнула молния;

3) если грянет гром, то сверкнет молния. Молния сверкнула. Следовательно, должен грянуть гром.

Решение. По условию высказывание A имеет место, если имеет место B. Тогда первой гипотезе $A \to B$ соответствует высказывание — «Если сверкнула молния, то грянет гром». Вторая гипотеза — высказывание A — «Сверкнула молния». Следствие клаузы есть высказывание B — «Грянул гром». Имеем легенду: «Если сверкнула молния, то грянет гром. Молния сверкнула. Следовательно, должен грянуть гром».

МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА КЛАУЗ

Пусть имеет место клауза: $H_1, \ldots, H_m \models A$.

1. Доказательство клаузы с помощью *анализа таблицы истинности*. Необходимо убедиться, что на всех наборах

значений переменных, на которых гипотезы $H_1, \ldots, H_n$ истинны одновременно, также равна 1 (И) формула A, которая проверяется на логическое следствие.

2. *Доказательство от противного*. Полагают, что заключение равно 0 (Л), и доказывают, что в этом случае хотя бы одна из гипотез (посылок) обязательно равна 0 (Л). Тогда логическое следствие имеет место. В противном случае (все гипотезы равны 1, а заключение равно 0) клауза неверна.

Задание 4.10 (2). Выберите один вариант ответа.

Клауза $xy, y \to (xy) \models \bar{x} \vee \bar{y} \ldots$

Варианты ответа: 1) верна; 2) неверна.

Решение. Составим таблицу истинности (табл. 6).

Таблица 6

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	xy	x	x	$\bar{x} \vee \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	0	(1	1)	1 ∨
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	(1	1)	1 ∨
1	0	1	0	1	0	0	(1	1)	1 ∨
1	1	0	0	0	1	1	(1	1)	0 ←
1	1	1	0	0	0	1	(1	1)	0 ←

Формулы слева от знака клаузы одновременно равны 1 на пяти наборах значений аргументов. На двух из этих пяти интерпретаций формула слева от знака клаузы равна 0 (нули отмечены символом «←»). Следовательно, формула $\bar{x} \vee \bar{y}$ не есть логическое следствие формул $x \vee \bar{z}, y \to (xy)$, клауза неверна.

Задание 4.10 (2). Выберите один вариант ответа.

Рассуждение: «Этот человек умен. Умного человека невозможно подкупить лестью. Значит, этого человека невозможно подкупить лестью»...

Варианты ответа: 1) логично; 2) нелогично.

Решение. Введем простые высказывания: A — «Этот человек умен», B — «Этого человека невозможно подкупить лестью». Тогда $A \to B$: «Умного человека невозможно подкупить лестью». Клауза имеет вид: $A,\ A \to B \models B$. Пусть $A = 1, A \to B = 1 \Rightarrow 1 \to B = 1 \Rightarrow B = 1$, клауза верна и рассуждение логично.

Задание 4.10 (2). Выберите один вариант ответа.

Рассуждение: «Он сказал, что придет, если не будет дождя. На его слова можно положиться. Но идет дождь. Значит, он не придет»...

Варианты ответа: 1) верно; 2) ложно.

Решение. Пусть A — «Он придет», B — «Будет дождь». Тогда клауза получается такой: $\bar{B} \to A, B \models \bar{A}$. Положим, $\bar{A} = 0 \Rightarrow A = 1$. Пусть $B = 1$ (B — одна из гипотез). Тогда $\bar{B} = 0$ и $\bar{B} \to A = 0 \to 1 = 1$. Итак, обе гипотезы оказались истинными, когда заключение ложно. Следовательно, рассуждение ложно. Достаточные условия не обязаны быть необходимыми. Этот человек ничего не сообщил о возможности своего прихода, когда идет дождь, поэтому он может прийти.

Задание 4.10 (2). Выберите один вариант ответа.

Рассуждение: «Он сказал, что придет (A), только если не будет дождя $(\bar{B})$. Но идет дождь. Значит, он не придет»...

Варианты ответа: 1) верно; 2) ложно.

Решение. А здесь высказаны необходимые условия появления этого человека. Он наверняка не придет, если идет дождь. Клауза получается такой: $A \to \bar{B}, B \models \bar{A}$. Положим $\bar{A} = 0 \Rightarrow A = 1$. Пусть $B = 1$.Тогда $A \to \bar{B} = 1 \to 0 = 0$. Обе гипотезы не могут быть истинными, когда заключение ложно. Следовательно, рассуждение верно.

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ И ИХ ТАБЛИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Функцией алгебры логики (*логической функцией*, *булевой функцией*) n переменных называется функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, принимающая значения 0 или 1, аргументы которой также принимают значения 0 или 1. Константу 1 по-другому называют *истиной*, а константу 0 — *ложью*.

Аргументы логической функции называют *логическими* (*булевыми*) переменными (табл. 7, 8).

Таблица 7

Таблица истинности элементарных булевых функций одной переменной

x	$f_1(x) = 0$	$f_2(x) = 1$	$f_4(x) = x$	$f_3(x) = \bar{x}$
Название	Константа 0	Константа 1	Переменная x	Отрицание x
0	0	0	0	1
1	0	1	1	0

Таблица 8

Таблица истинности элементарных булевых функций двух переменных

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \Rightarrow x_2$	$x_1 \Leftrightarrow x_2$	$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$	$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$	$x_1 \otimes x_2 = \overline{x_1 \leftrightarrow x_2}$
Название		Конъюнкция	Дизъюнкция	Импликация	Эквивалентность	Штрих Шеффера	Стрелка Пирса	Сумма по модулю 2
0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Иерархия операций (в порядке убывания старшинства) задается так: (&, $|$, $\downarrow$), $\vee$, $\to$, ($\sim$, $\oplus$). В скобках указаны равносильные операции.

Задание 4.6 (1). Выберите один вариант ответа.

Булевой функции $f(x, y, z) = (x \to \bar{z}) \sim (y \to z)$ соответствует столбец значений вида...

Варианты ответа: 1) $f(x, y, z) = [11101000]^T$; 2) $f(x, y, z) = [11011000]^T$; 3) $f(x, y, z) = [11011011]^T$; 4) $f(x, y, z) = [01011001]^T$.

Решение. Расставим порядок действий:

$$f(x, y, z) = (x \overset{2}{\to} \overset{1}{\bar{z}}) \overset{4}{\sim} (y \overset{3}{\to} z).$$

x	y	z	$\bar{z}$	$x \to \bar{z}$	$y \to z$	$f(x, y, z)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0

x	y	z	$\bar{z}$	$x \to \bar{z}$	$y \to z$	$f(x, y, z)$
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0

Транспонируем столбец значений: $f(x, y, z) = [11011000]^T$.

ФОРМУЛЫ

Формула — это последовательность имен переменных, соединенных логическими связками &, $\vee$, $\to$, $\oplus$, ~, $\downarrow$, |, и составленная по определенным правилам.

1. Всякая переменная, быть может с индексами, — это формула. Логические константы 0 и 1 — это формулы.

2. Если A — формула, то (A) и $\bar{A}$ — это формулы.

3. Если A и B — формулы, то $A \mathbin{\&} B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \sim B$, $A \oplus B$, $A|B$, $A \downarrow B$ — это формулы.

4. Других формул нет.

Задание 4.6 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Формулами являются последовательности символов…

Варианты ответа: 1) x_1; 2) $(x) \to yz$; 3) $(x) \vee x \vee x$; 4) $z \mathbin{\&} \mathbin{\&} y \vee (x_1 \to y \to z)$.

Решение. Формулой не является только последовательность $z \mathbin{\&\&} y \vee (x_1 \to y \to z)$, так как содержит две следующие друг за другом конъюнкции.

Эквивалентными (*равносильными*) называются формулы F_1 и F_2, представляющие одну и ту же функцию (обозначение $F_1 = F_2$).

Значит, у равносильных формул совпадают таблицы истинности.

Задание 4.6 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула $x \vee y$ равносильна формуле…

Варианты ответа: 1) $\bar{x} \wedge \bar{y}$; 2) $x \wedge y$; 3) $\bar{x} \wedge y$; 4) $x \vee \bar{y}$.

Решение. Составим таблицу истинности для всех формул (табл. 9).

Таблица 9

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$	$x \wedge y$	$\overline{x \wedge y}$	$\bar{x} \wedge y$	$x \vee \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1

Так как формулы $\overline{x \vee y}$ и $\bar{x} \wedge \bar{y}$ принимают одинаковые значения на одних и тех же наборах значений, то представляют одну и ту же функцию, т. е. равносильны.

Задание 4.6 (2). Выберите один вариант ответа.

Булевой функции $f(x_1, x_2) : f(0, 1) = 0$ соответствует формула...

Варианты ответа: 1) $x_1 \to x_2$; 2) $x_1 \vee x_2$; 3) $x_1 \wedge x_2$; 4) $x_1 \oplus x_2$.

Решение. Имеем $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Тогда $0 \to 1 = 1$, $0 \vee 1 = 1$, $0 \wedge 1 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$. Тогда булевой функции соответствует формула $x_1 \wedge x_2$.

ОСНОВНЫЕ РАВНОСИЛЬНОСТИ

Название равносильности	Равносильности относительно операции конъюнкции	Равносильности относительно операции дизъюнкции
Идемпотентность	$x \wedge x = x$	$x \vee x = x$
Коммутативность	$x \wedge y = y \wedge x$	$x \vee y = y \vee x$
Ассоциативность	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
Дистрибутивность	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
Законы де Моргана	$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$	$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$
Законы поглощения	$x \wedge (x \vee y) = x$	$x \vee (x \wedge y) = x$
Операции с 0 и 1	$x \wedge 1 = x$; $x \wedge 0 = 0$	$x \vee 1 = 1$; $x \vee 0 = x$
Закон дополнительности	$x \wedge \bar{x} = 0$	$x \vee \bar{x} = 1$
Закон склеивания	$(y \vee x) \wedge (y \vee \bar{x}) = y$	$(y \wedge x) \vee (y \wedge \bar{x}) = y$

Название равносильности	Равносильности относительно операции конъюнкции	Равносильности относительно операции дизъюнкции
Закон ортогонализации	$x \vee (\bar{x} \wedge y) = x \vee y$	
Закон импликации	$x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$	
Двойное отрицание	$\bar{\bar{x}} = x$	

Задание 4.6 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула $x \to y$ равносильна формуле…

Варианты ответа: 1) $x \vee \bar{y}$; 2) $x \wedge \bar{y}$; 3) $\bar{x} \wedge y$; 4) $\bar{x} \wedge \bar{y}$.

Решение. Используя закон импликации и де Моргана, имеем: $x \to y = \bar{x} \vee y = x \wedge \bar{y}$.

Задание 4.6 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула $x \to (x \wedge y)$ равносильна формуле…

Варианты ответа: 1) $x \wedge y$; 2) $x \to y$; 3) $\bar{x} \vee y$; 4) $\bar{x} \to \bar{y}$.

Решение. По закону импликации: $x \to (x \wedge y) = \bar{x} \vee (x \wedge y)$. По закону дистрибутивности: $\bar{x} \vee (x \wedge x) = (\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{x} \vee x)$. По закону дополнительности: $(\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{x} \vee x) = 1 \wedge (x \to x)$. Операция с 1 дает конечный результат $1 \wedge (x \to y) = x \to y$.

СОВЕРШЕННЫЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $x^0 = \bar{x}, x^1 = x, \delta \in \{0, 1\}$.

$$x^{\delta} = \begin{cases} x, \text{если } \delta = 1 \\ \bar{x}, \text{если } \delta = 0 \end{cases} \text{— литера.}$$

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вида $K_{\delta}(x) = x_1^{\delta_1} \cdot x_2^{\delta_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\delta_n}$ называется *совершенной элементарной конъюнкцией* (*конъюнктом*).

Теорема. Конъюнкт $K_{\delta}(x) = x_1^{\delta_1} \cdot x_2^{\delta_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\delta_n}$ равен 1 лишь на одном наборе $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ нулей и единиц, когда $x_i = \delta_i$.

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вида $D_{\delta}(x) = x_1^{\delta_1} \vee x_2^{\delta_2} \vee \vee \ldots x_n^{\delta_n}$ называется *совершенной элементарной дизъюнкцией* (*дизъюнктом*).

Теорема. Дизъюнкт $D_{\delta}(x) = x_1^{\delta_1} \vee x_2^{\delta_2} \vee \ldots \vee x_n^{\delta_n}$ равен 0 лишь на одном наборе $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ нулей и единиц, когда $x_i = \bar{\delta}_i$.

Задание 4.7 (2). Выберите один вариант ответа.

Булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) : f(0,1,1) = 0$ соответствует дизъюнкт…

Варианты ответа: 1) $x_1 \vee x_2 \vee x_3$; 2) $\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3$; 3) $x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$; 4) $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$.

Решение. Дизъюнкция трех переменных равна нулю, если каждая переменная принимает значение 0. Так как по условию $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, то имеем дизъюнкт вида $x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$. Используя литерную запись, имеем: $x_1^{\bar{0}} \vee x_2^{\bar{1}} \vee x_3^{\bar{1}} = x_1^1 \vee x_2^0 \vee x_3^0 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$.

Задание 4.7 (2). Выберите один вариант ответа.

Булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$: $f(0, 1, 1) = 1$ соответствует конъюнкт…

Варианты ответа: 1) $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$; 2) $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$; 3) $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3$; 4) $\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3$.

Решение. Конъюнкция трех переменных равна единице, если каждая переменная принимает значение 1. Так как по условию $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, то имеем конъюнкт вида $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$.

Используя литерную запись, имеем: $x_1^0 \wedge x_2^1 \wedge x_3^1 = \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3$.

Совершенные формы	Формула
Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) — конъюнкция элементарных дизъюнкций, соответствующих наборам значений переменных, для которых значения функции равны 0	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underset{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n), \\ \text{на которых} \\ f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)=0}}{\wedge} \left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i^{\overline{\delta_i}} \right)$
Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) — дизъюнкция элементарных конъюнкций, соответствующих наборам значений переменных, для которых значения функции равны 1	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underset{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n), \\ \text{на которых} \\ f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)=1}}{\vee} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{\delta_i} \right)$

Задание 4.7 (2). Выберите один вариант ответа.

Для функции $f(x, y) = x \vee y$ СКНФ имеет вид…

Варианты ответа:
1) $(x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$; 2) $(x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$;
3) $(x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$; 4) $(x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y)$.

Решение.

x	y	$f(x, y) = \overline{x \vee y}$	**Элементарные конъюнкции**	**Элементарные дизъюнкции**
0	0	1	$x^0 \wedge y^0 = \bar{x} \wedge \bar{y}$	
0	1	0		$x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} = x^1 \vee y^0 = x \vee \bar{y}$
1	0	0		$x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} = x^0 \vee y^1 = \bar{x} \vee y$
1	1	0		$x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{1}} = x^0 \vee y^0 = \bar{x} \vee \bar{y}$

Таким образом, СКНФ:
$f(x, y) = x \vee y = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$.

ПРИЛОЖЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Релейно-контактная схема (КС) — устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Контакты могут быть замыкающими и размыкающими. Каждый контакт подключен к некоторому реле (переключателю). Когда реле срабатывает (находится под током), все подключенные к нему замыкающие контакты замкнуты, а размыкающие контакты разомкнуты. Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная x, которая принимает значение 1, если реле срабатывает, и 0 — в противном случае.

На чертежах все замыкающие контакты, подключенные к реле x, обозначаются символом x, а размыкающие — символом x'. Это означает, что при срабатывании реле x все его размыкающие контакты не проводят ток и им сопоставляется 0. При отключении реле создается противоположная ситуация.

Всей схеме также ставится в соответствие логическая переменная y, которая равна 1, если схема проводит ток, и 0 — в противном случае. Переменная y, соответствующая схеме, является булевой функцией от переменных x_1, x_2, …, x_n, соответствующих реле. Таблица истинности булевой функции задает условия работы схемы. Наборы значений переменных, на которых $y = 1$, называется функцией проводимости схемы.

Две релейно-контактные схемы называются *равносильными*, если одна из них проводит ток тогда и только тогда, когда другая схема проводит ток, т. е. обе схемы обладают одинаковыми функциями проводимости. Из двух равносильных схем более простой считается та, которая содержит меньшее число контактов.

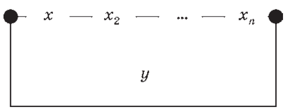
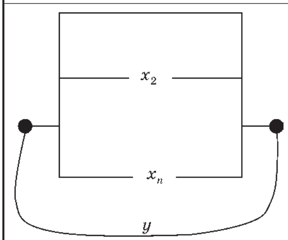
В теории релейно-контактных схем решаются три задачи:

1. *Задача анализа*, состоящая в нахождении математической модели КС в виде булевой функции.

2. *Задача синтеза,* состоящая в построении схемы по заданным условиям работы.

3. *Задача минимизации*, состоящая в нахождении равносильной схемы минимальной сложности.

Для решения задачи минимизации все алгоритмы основываются на применении формул склеивания:
$(A \cdot C) \vee (B \cdot C) = (A \vee B) \cdot C$; $(A \vee C) \wedge (B \vee C) = (A \cdot B) \vee C$; $(A \cdot C) \vee (\bar{A} \cdot C) = C$; $(A \vee C) \wedge (\bar{A} \vee C) = C$; $C \cdot (A \vee C) = C$; $C \wedge (A \cdot C) = C$, где A, B, C — некоторые булевы функции.

Простейшие КС	Булева функция	Условия работы КС
 Последовательное соединение контактов	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$	$\begin{cases} 1, \text{ если } x_1 = \ldots = x_n = 1; \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$
 Параллельное соединение контактов	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$	$\begin{cases} 0, \text{ если } x_1 = \ldots = x_n = 0; \\ 1 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$
 Разомкнутый контакт	$f(x) = \bar{x}$	$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = 0; \\ 0, \text{ если } x = 1 \end{cases}$

Задание 4.8 (2). Выберите один вариант ответа.

Схема (рис. 14) после упрощения будет иметь число контактов, равное...

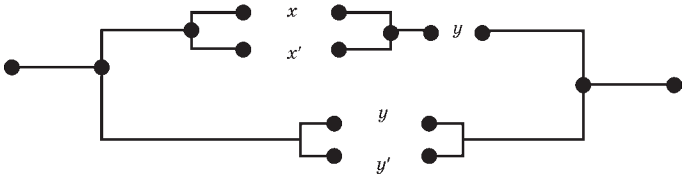


Рис. 14

Варианты ответа: 1) 2; 2) 1; 3) 0.

Решение. Данной схеме соответствует булева функция вида $f(x, y) = [(x \vee \bar{x})y] \vee [y \vee \bar{y}]$. Используя свойства булевых функций, имеем: $f(x, y) = [1 \wedge y] \vee 1 = y \vee 1 = 1$. Упрощенная схема не будет содержать ни одного контакта.

Задание 4.8 (2). Выберите один вариант ответа.

Условия работы схемы (рис. 15) имеют вид...

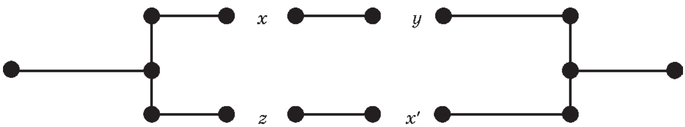


Рис. 15

1) $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 1) = f(1, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 1$.
2) $f(0, 0, 1) = f(0, 0, 1) = f(1, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 1$.
3) $f(0, 0, 1) = f(0, 1, 1) = f(1, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 1$.
4) $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 1) = f(1, 0, 0) = f(1, 1, 1) = 1$.

Решение. Данной схеме соответствует булева функция вида $f(x, y, z) = (xy) \vee (z\bar{x})$. Составим для нее таблицу истинности (табл. 10).

Таблица 10

x	y	z	xy	$Z\bar{x}$	$f(x, y, z) = xy \vee \bar{x}z$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0

x	y	z	xy	$Z\bar{x}$	$f(x, y, z) = xy \vee \bar{x}z$
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

Выбираем наборы переменных, на которых функция принимает значение «1». Тогда схеме соответствуют условия работы $f(0, 0, 1) = f(0, 1, 1) = f(1, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 1$.

Задание 4.8 (2). (Впишите правильный ответ).

Минимизированная схема с заданными условиями работы $f(0, 1) = f(1, 1) = 1$ имеет ______ контакт(а).

Решение. Имеем функцию проводимости вида $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 = x_2(\bar{x}_1 \vee x_1) = x_2 \wedge 1 = x_2$. Таким образом, упрощенная схема будет содержать только один контакт.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Предикат — повествовательное предложение, содержащее предметные переменные, определенные на соответствующих множествах. При замене переменных конкретными значениями (элементами) этих множеств предложение обращается в высказывание, т. е. принимает значение «истинно» или «ложно».

Пусть M_i — множество значений предметной переменной x_i, $i = \overline{1, n}$. *n-местным предикатом* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется логическая функция вида $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) : M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n \to \{и, \wedge\}$, где M — *универсум* (*предметная область* предиката).

Множество истинности предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ заданного над множествами $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — совокупность упорядоченных наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ таких, что данный предикат обращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при подстановке $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$. Обозначается P^+.

Предикаты называются:

- тождественно истинными, если $M = P^+$;
- тождественно ложными, если $P^+ = \varnothing$;
- выполнимыми (опровержимыми), если $P^+ \neq \varnothing$ (если $M - P^+ \neq \varnothing$).

Два n-местных предиката P и Q, заданных на одном и том же множестве $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, называются *равносильными*, если $P^+ = Q^+$. Обозначается $P \Leftrightarrow Q$ Предикат Q называется *следствием* предиката P, если и только если $P^+ \subset Q^+$. Обозначается $P \Rightarrow Q$.

Задание 4.9 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Если двуместный предикат делимости натуральных чисел имеет вид

$$P(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, x_1 \vdots x_2; \\ 0, \text{в противном случае}, \end{cases}$$

то предикат обращается в истинное высказывание на наборах переменных…

Варианты ответа: 1) (18; 3); 2) (3; 18); 3) (6; 3); 4) (3; 6).

Решение. $P(18; 3) = 1$, так как $18 \vdots 3$. $P(3; 18) = 0$, так как 3 не делится на 18. Аналогично $P(6; 3) = 1$, $P(3; 6) = 0$.

Задание 4.9 (2). Выберите один вариант ответа.

Множеством истинности предиката $P(x)$: «$x^2 - 4x + 4 = 0$» является множество…

Варианты ответа: 1) $\{1; -2; \sqrt{2}\}$; 2) $\{1; -2\}$; 3) $\{2\}$.

Решение. Выражение «$x^2 - 4x + 4 = 0$» можно рассматривать как одноместный предикат, где $M = R$ — множество действительных чисел.

Так как $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2) = 0$, то $P^+ = \{2\}$.

Задание 4.9 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Множество истинности предиката «$x + y < 0$», если $M_1 = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ — множество значений x, $M_2 = \{-5; -4; 3\}$ — множество значений y, содержит наборы вида… *Варианты ответа*: 1) (3; 3); 2) (2; −5); 3) (−5; −3); 4) (−1; −5).

Решение. Множеством истинности этого предиката будет подмножество декартова произведения множеств $M_1 \times M_2$, т. е. множество, состоящее из всех таких упорядоченных пар (x, y), что $x \in M_1$ и $y \in M_2$ и $x + y < 0$. Тогда из предлагаемых наборов множеству истинности принадлежат наборы (2; −5) и (−1; −5).

Задание 4.9 (2). Выберите один вариант ответа.

Область истинности предиката $P(x, y) = (((x - y)$ делится на 3) $\to (x + y > 6))$, где $X = \{1; 4; 5; 6\}$, $Y = \{2; 3; 4\}$ можно задать таблицей…

Варианты ответа:

1)

	2	3	4
1	1	1	1
4	1	0	1
5	1	1	1
6	1	1	1

2)

	2	3	4
1	1	1	0
4	1	1	1
5	1	1	1
6	1	1	1

3)

	2	3	4
1	1	1	1
4	1	1	1
5	0	1	1
6	1	1	1

4)

	2	3	4
1	1	1	1
4	1	1	1
5	1	1	1
6	1	0	1

Решение. Исходя из условия задачи $P(x,y) : X \times Y \to \{0; 1\}$, составим $X \times Y = \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (6; 2), (6; 3), (6; 4)\}$.

Определим значение $P(x, y)$ для каждой из пар $X \times Y$.

$$(1; 2):\ \underbrace{(((1-2)\text{ делится на 3})}_{=0} \to \underbrace{(1+2>6))}_{=0} = 0 \to 0 = 1,$$

$$(1; 3):\ \underbrace{(((1-3)\text{ делится на 3})}_{=0} \to \underbrace{(1+3>6))}_{=0} = 0 \to 0 = 1,$$

$$(1; 4):\ \underbrace{(((1-4)\text{ делится на 3})}_{=1} \to \underbrace{(1+4>6))}_{=0} = 1 \to 0 = 0,$$

$$(4; 2):\ \underbrace{(((4-2)\text{ делится на 3})}_{=0} \to \underbrace{(4+2>6))}_{=0} = 0 \to 0 = 1,$$

$$(4; 3):\ \underbrace{(((4-3)\text{ делится на 3})}_{=0} \to \underbrace{(4+3>6))}_{=1} = 0 \to 1 = 1,$$

$$(4; 4):\ \underbrace{(((4-4)\text{ делится на 3})}_{=1} \to \underbrace{(4+4>6))}_{=1} = 1 \to 1 = 1,$$

$$(5; 2):\ \underbrace{(((5-2)\text{ делится на 3})}_{=1} \to \underbrace{(5+2>6))}_{=1} = 1 \to 1 = 1,$$

$$(5; 3):\ \underbrace{(((5-3)\text{ делится на 3})}_{=0} \to \underbrace{(5+3>6))}_{=1} = 0 \to 1 = 1,$$

$$(5; 4):\ \underbrace{(((5-4)\text{ делится на 3})}_{=0} \to \underbrace{(5+4>6))}_{=1} = 0 \to 1 = 1,$$

$$(6;\,2):\ \underbrace{(((6-2)\text{ делится на }3)}_{=0}\to\underbrace{(6+2>6))}_{=1}=0\to 1=1,$$

$$(6;\,3):\ \underbrace{(((6-3)\text{ делится на }3)}_{=1}\to\underbrace{(6+3>6))}_{=1}=1\to 1=1,$$

$$(6;\,4):\ \underbrace{(((6-4)\text{ делится на }3)}_{=0}\to\underbrace{(6+4>6))}_{=1}=0\to 1=1.$$

Таким образом, область истинности предиката $P(x, y)$ — это множество $\{(1; 2), (1; 3), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (6; 2), (6; 3), (6; 4)\}$. Тогда область значений предиката можно задать таблицей вида:

	2	3	4
1	1	1	0
4	1	1	1
5	1	1	1
6	1	1	1

Задание 4.9 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Два предиката $P(x)$ – «$x^2 = 1$» и $Q(x)$«$(x-1)(x+\sqrt{2})\times\times(x-1{,}5)(x+1)=0$» равносильны на множестве...

Варианты ответа: 1) натуральных чисел N; 2) целых чисел Z; 3) действительных чисел R.

Решение. На множестве N имеем $P^+ = Q^+ = \{1\}$, т. е. предикаты равносильны. На множестве Z имеем $P^+ = Q^+ = \{-1; 1\}$, т. е. предикаты равносильны. На множестве R имеем $P^+ = \{-1; 1\}$, $Q^+ = \{-1;\ 1; -\sqrt{2}; 1{,}5\}$ т. е. предикаты не равносильны.

КВАНТОРЫ И ПРЕДИКАТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Собственные связки логики предикатов: *квантор общности* $\forall$ и *квантор существования* $\exists$. Переход от $P(x)$ к $(\forall x)P(x)$ или $(\exists x)P(x)$ называется *связыванием* переменной x, или *навешиванием квантора* на переменную x. Выражение, на которое навешивается квантор, называется *областью действия квантора*. При этом переменная, на которую навешен квантор, называется *связанной*, а несвязанная квантором переменная называется *свободной*.

Пример. $\exists x \forall y\ P(x, y, z)$, x, y — связанные переменные, z — свободная.

Операция навешивания квантора на одну переменную уменьшает местность предиката на 1.

Пример. $\exists x\ P(x)$ — 0-местный предикат, $\forall x\ P(x, y)$ — 1-местный предикат, $\forall x \exists xy\ P(x, y, z, t)$ — 2-местный предикат.

1. Каждая 0-местная предикатная переменная есть формула.

2. Всякий n-местный предикатный символ $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть формула, в котором предметные переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются свободными переменными.

3. Если F_1 и F_2 — формулы, то $\neg F$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \wedge F_0$, $F_1 \to F_2$ также формулы.

4. Если F — формула со свободной переменной x, то $(\forall x)$ (F) и $(\exists x)$ (F) также формулы со связанной переменной x.

5. Других формул в логике предикатов, кроме перечисленных, нет.

Формулы, перечисленные в пп. 1–2 — *элементарные*, остальные — *составные*.

Формула логики предикатов называется *выполнимой* (*опровержимой*) на множестве M, если при некоторой подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на M, она обращается в выполнимый (опровержимый) предикат.

Формула логики предикатов называется *тождественно истинной* (*тождественно ложной*) на множестве M, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на множестве M, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Формула логики предикатов называется *тавтологией,* если при подстановке вместо предметных переменных любых предикатов, заданных на каких угодно множествах, она превращается в тождественно истинный предикат.

Задание 4.9 (2). Выберите один вариант ответа.

Предложение, выражающее транзитивное свойство делимости целых чисел, записанное формулой логики предикатов, имеет вид...

Варианты ответа: 1) $(P(a, b)) \vee P(b, c)) \to P(a, c)$; 2) $(P(a, b)) \wedge P(b, c)) \to P(a, c)$; 3) $(P(a, b)) \to P(b, c)) \vee P(a, c)$; 4) $(P(a, b)) \to P(b, c)) \wedge P(a, c)$.

Решение. Имеем составное высказывание, являющееся формулировкой свойства транзитивности отношения делимости целых чисел: «Если a делится на b и b делится на c, то a делится на c». Пусть $P(a, b)$ — «a делится на b», $P(b, c)$ — «b делится на c», $P(a, c)$ — «a делится на c». Тогда транзитивное свойство, записанное формулой логики предикатов, будет иметь вид: $(P(a, b) \wedge P(b, c)) \rightarrow P(a, c)$.

Задание 4.9 (2). Выберите один вариант ответа.

Пусть предикат $S(x)$ — «x — смертен» определен на множестве людей M. Тогда высказыванию «все люди смертны» соответствует формула...

Варианты ответа: 1) $\exists xS(x)$; 2) $\forall xS(x)$; 3) $\neg\forall xS(x)$; 4) $\neg\exists xS(x)$.

Решение. Высказывание «все люди смертны» не зависит от переменной x, а характеризует всех людей в целом, т. е. выражает суждение относительно всех x множества M. Тогда его запись имеет вид $(\forall x)P(x)$. Выражению $\exists xS(x)$ соответствует предложение «существуют смертные люди», $\neg\forall xS(x)$ — «не все люди смертны», $\neg\exists xS(x)$ — «не существует смертных людей» или «все люди бессмертны».

Задание 4.9 (2). Выберите варианты согласно тексту задания.

Установите соответствие между формулой и ее словесной формулировкой.

Предикат $P(x, y)$ описывает отношение «x любит y».

Варианты ответа:

1) $\forall x\exists yP(x, y)$;

2) $\exists y\forall xP(x, y)$;

3) $\forall y\exists xP(x, y)$;

4) $\exists x\forall yP(x, y)$.

a) каждого человека кто-то любит;

b) всякий человек кого-нибудь любит;

c) существует человек, который любит всех людей.

Решение. Предложение «каждого человека кто-то любит» может звучать так: «для всякого человека существует человек, который его любит», что соответствует выражению $\forall y\exists xP(x, y)$ — «для любого человека x существует человек y, которого он любит» или «всякий человек кого-нибудь любит». $\exists y\forall xP(x, y)$ — «существует такой человек y, что его любят все

x» или «каждого человека кто-то любит». $\exists x \forall y P(x, y)$ — «существует человек, который любит всех людей».

Задание 4.9 (2). Выберите варианты согласно тексту задания.

Установите соответствие между суждением и формулой:

1) все судьи ($J(x)$ — от *англ.* judge — судья) — юристы ($L(x)$ — от *англ.* lawyer — юрист);

2) некоторые юристы — жулики ($S(x)$, от *англ.* swindler — мошенник);

3) ни один судья не является жуликом.

a) $(\exists x)(L(x) \,\&\, S(x))$;

b) $(\forall x)(J(x) \to L(x))$;

c) $(\forall x)(J(x) \to \neg S(x))$.

Решение. Если утверждается, что все судьи — юристы, то быть судьей является достаточным условием для того, чтобы быть юристом. Тогда имеем формулу $(\forall x)(J(x) \to L(x))$. Если находятся юристы, которые одновременно являются жуликами, то формула для этого утверждения примет вид $(\exists x)(J(x) \,\&S(x))$. Ни один судья не является жуликом означает, что быть судьей является достаточным условием для того, чтобы не быть жуликом. Тогда имеем формулу $(\forall x)$ $(J(x) \to \neg S(x))$.

Задание 4.9 (2). Выберите один вариант ответа.

Пусть $Q(x)$: «x — рациональное число», $R(x)$: «x — действительное число», то утверждению $Q \subset R$ соответствует формула вида…

Варианты ответа: 1) $(\forall x)(Q(x) \to R(x))$; 2) $(\exists x)$ $(Q(x) \to R(x))$; 3) $(\forall x)(R(x) \to Q(x))$; 4) $(\exists x)(R(x) \to Q(x))$.

Решение. Если $Q \subset R$, то всякое рациональное число является действительным числом. Тогда условие «быть рациональным числом» является достаточным условием для того, чтобы быть действительным числом. Тогда формула $(\forall x)(Q(x) \to R(x))$ есть формальная запись высказанного утверждения о включении множества рациональных чисел во множество действительных чисел.

Задание 4.9 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Высказывание «Существуют три точки на плоскости, не принадлежащие одной прямой» на языке логики предикатов может иметь вид…

Варианты ответа:
1) $(\exists A)(\exists B)(\exists C)\neg(\exists l)(A \in l \wedge B \in l \wedge C \in l)$; 2) $(\exists A)(\exists B)(\exists C)(\exists l)$ $(A \notin l \wedge B \notin l \wedge C \notin l)$; 3) $(\exists A)(\exists B)(\exists C)(\forall l)(A \notin l \wedge B \notin l \wedge C \notin l)$; 4) $(\exists A)(\exists B)(\exists C)(\forall l)(A \in l \wedge B \in l \wedge C \in l)$.

Решение. Переведем утверждение на язык логики предикатов.

Имеем: существуют такие три точки A, B и C, что не найдется такой прямой l, которой бы эти точки принадлежали. Запись данной фразы будет выглядеть так: $(\exists A)(\exists B)$ $(\exists C) \neg (\exists l)(A \in l \wedge B \in l \wedge C \in l)$.

Задание 4.9 (2). Выберите один вариант ответа.

Определение равномерной непрерывности функции на множестве действительных чисел на языке алгебры предикатов имеет вид...

Варианты ответа:

1) $(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x_1 x_2 \in M)(|x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$;

2) $(\exists \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x_1 x_2 \in M)(|x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$;

3) $(\exists \varepsilon)(\forall \delta)(\forall x_1 x_2 \in M)(|x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$.

Решение. По определению функция $f(x)$ называется *равномерно-непрерывной* на множестве M, если абсолютная величина разности между значениями функции для каждой пары точек может быть меньше любого наперед заданного как угодно малого положительного числа, если эти точки достаточно близки друг к другу. Тогда теорема на языке алгебры предикатов записывается символически в виде: $(\forall \varepsilon)$ $(\exists \delta)(\forall x_1 x_2 \in M)(|x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$.

Задание 4.9 (2). Выберите один вариант ответа.

Трехместный предикат суммы $\forall x S(x, y, x)$ на множестве натуральных чисел с нулем N^0 является...

Варианты ответа: 1) тождественно истинным; 2) тождественно ложным; 3) выполнимым.

Решение. Рассмотрим множество натуральных чисел с нулем N^0. Если S — предикат суммы, то для формулы $\forall x S(x, y, x)$ существует подстановка константы вместо свободной переменной $y = 0$, при которой формула $\forall x S(x, 0, x)$ становится истинной. Таким образом, предикат $\forall x S(x, y, x)$ выполним, так как $P^+ \neq \varnothing$.

Задание 4.9 (2). Выберите варианты согласно тексту задания.

Установите соответствие между формулами и их выполнимостью:

1) $(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge P(y))$;

2) $(\forall x)(P(x) \wedge \neg P(y))$;

3) $\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \to P(x))$.

a) Выполнима (опровержима);

b) тождественно истинная;

c) тождественно ложная.

Решение. Пусть область определения — N^0, $P(x)$ означает «x — четное число». Тогда формула $(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge P(y))$ превращается в высказывание «Среди натуральных чисел существуют как четные, так и нечетные числа», которое истинно. Следовательно, формула выполнима. Формула $(\forall x)(P(x) \wedge \neg P(y))$ превращается в высказывание «Любое натуральное число одновременно является четным и нечетным», которое ложно. Следовательно, формула опровержима на N^0.

При исследовании формулы $\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \to P(x))$ на выполнимость предположим противное. Пусть формула ложна, т. е. не для всех x $f(x,y) = [(x \vee \bar{x}) \wedge y] \vee [y \vee \bar{y}]$, истинно. Тогда существует константа $a \in M$, подстановка которой в формулу сделает ее ложной, т. е. $(P(a) \wedge Q(a)) \to P(a) = 0$. Это возможно лишь тогда, когда $P(a) = 0$ (правая часть импликации), а $P(a) \wedge Q(a) = 1$ (левая часть), но последнее требует, чтобы $P(a) = 1$ и $Q(a) = 1$. Таким образом, требуется, чтобы существовала константа a в области M такая, что $P(a) = 0$ и $P(a) = 1$, что невозможно. Принятое предположение относительно ложности формулы привело к противоречию, поэтому оно неверно, и, следовательно, формула $\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \to P(x))$ тождественно истинна.

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Логика предикатов и алгебра высказываний помогают хорошо ориентироваться в комплексе теорем:

$A \to B$ (прямая теорема);

$B \to A$ (обратная теорема);

$\bar{A} \to \bar{B}$ (противоположная прямой теореме);

$\bar{B} \to \bar{A}$ (противоположная обратной теореме).

По закону контрапозиции имеем $(A \to B) \Leftrightarrow (\bar{B} \to \bar{A})$, т. е. вместо прямой теоремы можно доказать эквивалентную ей обратно противоположную теорему.

Задание 4.10 (2). Выберите один вариант ответа.

Пусть на множестве всех четырехугольников заданы предикаты: $P(q)$ — «четырехугольник q есть ромб» и $Q(q)$ — «в четырехугольнике q диагонали взаимно-перпендикулярны». Тогда теорема, противоположная обратной теореме «Если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно-перпендикулярны» имеет вид...

Варианты ответа:

1) $(\forall q)\overline{Q(q)} \to \overline{P(q)}$; 2) $(\forall q)\overline{Q(q)} \to \overline{P(q)}$; 3) $(\forall q)Q(q) \to P(q)$.

Решение.

Прямая теорема на языке алгебры предикатов может быть записана в виде $(\forall q)P(q) \to Q(q)$.

Обратная теорема: пусть q — произвольный четырехугольник, тогда если диагонали четырехугольника взаимно-перпендикулярны, то четырехугольник есть ромб (теорема неверна) или $(\forall q)Q(q) \to P(q)$.

Противоположная теорема: пусть q — любой четырехугольник, тогда если q — не ромб, то его диагонали не перпендикулярны (теорема неверна) или $(\forall q)\overline{P(q)} \to \overline{Q(q)}$.

Противоположная обратной теореме: пусть q — произвольный четырехугольник, тогда если диагонали четырехугольника не перпендикулярны друг к другу, то четырехугольник не является ромбом (теорема верна) и $(\forall q)\overline{Q(q)} \to \overline{P(q)}$.

Логика предикатов применяется для осуществления перехода от своего рода «технической» постановки задачи к ее математической постановке, с тем чтобы в процессе ее решения можно было использовать математические методы.

Рассмотрим доказательство логических следствий с применением логики предикатов и теории множеств.

Справедливость заключений вида «для всех» и «для некоторых» можно неформально проверять при помощи диаграмм Эйлера — Венна. Всякое утверждение вида «для всех» означает включение одного множества в другое. Утверждение вида «для некоторых» означает непустое пересечение множеств. Соответствующие множества изображаются кругами внутри универсума. Если можно построить такую диаграмму, на которой в условиях истинности посылок заключение не выполняется (нет вложений одного множества в другое, пересечение множеств пусто), то вывод неверен. В противном случае из данных посылок построен правильный вывод.

Задание 4.10 (2). Выберите один вариант ответа.

Умозаключение: «Некоторые адвокаты богаты. Некоторые врачи богаты. Значит, некоторые врачи — адвокаты» является...

Варианты ответа: 1) верным; 2) ложным.

Решение. Универсум — множество всех людей. Пусть A — множество богатых людей, B — множество адвокатов, C — множество врачей. В посылке «Некоторые адвокаты богаты» говорится о непустом пересечении множеств A и $B(AB \neq \varnothing)$. В посылке «Некоторые врачи богаты» — о непустом пересечении множеств A и $C(AC \neq \varnothing)$. В заключении «Некоторые врачи — адвокаты» утверждается, что $BC \neq \varnothing$. На построенной диаграмме (рис. 16) показана возможность пустого пересечения множеств B и C ($BC = \varnothing$), следовательно, заключение неверно.

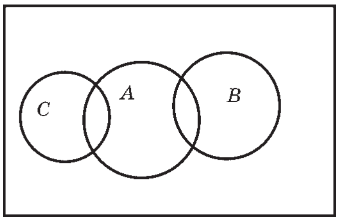


Рис. 16

Пусть $A(x)$: «x — богат», $B(x)$: «x — адвокат», $C(x)$: «x — врач». На языке исчисления предикатов умозаключению соответствует клауза вида: $(\exists x)(A(x)\ \&\ B(x))$, $(\exists x)(A(x)\ \&\ C(x))$, $\models (\exists x)(B(x)\ \&\ C(x))$, которая верна.

ГЛАВА 3 ЗАДАНИЯ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

3.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ЭЛЕМЕНТ 1.1. МНОЖЕСТВА: ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

Пустое множество $\varnothing$ является __________ подмножеством некоторого множества.

Варианты ответа: 1) собственным; 2) несобственным; 3) не является подмножеством.

Задание 2 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Верными является соотношения…

a) $x \in \{2, a, x\}$;

b) $3 \in \{1, \{2, 3\}, 4\}$;

c) $x \in \{1, \sin x\}$;

d) $\{x, y\} \in \{a, \{x, y\}, b\}$.

Варианты ответа: 1) верных нет; 2) только a; 3) a, d; 4) все верные.

Задание 3 (1). Выберите один вариант ответа.

Число 2,5 принадлежит множеству…

Варианты ответа: 1) $C = \{c \mid c \in R, -3 < c \le 2{,}6\}$; 2) $A = \{a \mid a \in N, -1 < a < 10\}$; 3) $D = \{d \mid d \in Q, d < 2\}$; 4) $B = \{b \mid b \in Z, -2 \le b < 3\}$.

Задание 4 (1). Выберите варианты согласно тексту задания.

Установите соответствие между заданными числами и множествами, которым они принадлежат.

1) $x = -9{,}3$;

2) $x = \sqrt{5}$;

3) $x = 4$;

4) $x = -8$.

a) $B = \{x \in R \mid 2 \le x < 3\}$;
b) $D = \{x \in Z \mid -10 < x < -5\}$;
c) $C = \{x \in N \mid 3 \le x < 10\}$;
d) $E = \{x \in N \mid -8 \le x < 4\}$;
e) $A = \{x \in R \mid -11 \le x \le -9\}$.

Задание 5 (1). Выберите один вариант ответа.

Для множеств A, B, C и D где A — множество действительных чисел, B — множество рациональных чисел, C — множество целых чисел и D — множество натуральных чисел, цепочка вложенности множеств имеет вид…

Варианты ответа: 1) $A \subset B \subset C \subset D$; 2) $D \subset C \subset B \subset A$; 3) $A \subset C \subset B \subset D$; 4) $D \subset B \subset C \subset A$.

Задание 6 (2). Выберите один вариант ответа.

Множеством, удовлетворяющим заданному характеристическому свойству $B = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$, является множество…

Варианты ответа (рис. 17):

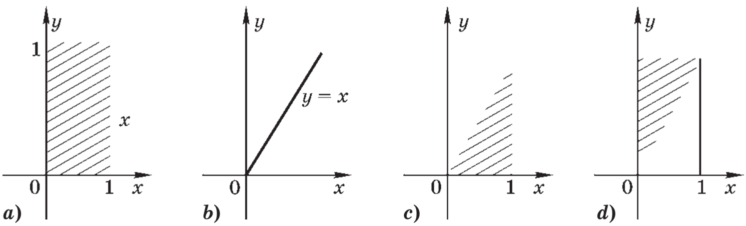


Рис. 17

Задание 7 (2). Выберите один вариант ответа.

Множеством, удовлетворяющим заданному характеристическому свойству $A = \{(x, y) : x_2 + y_2 \le 1\}$, является множество…

Варианты ответа (рис. 18):

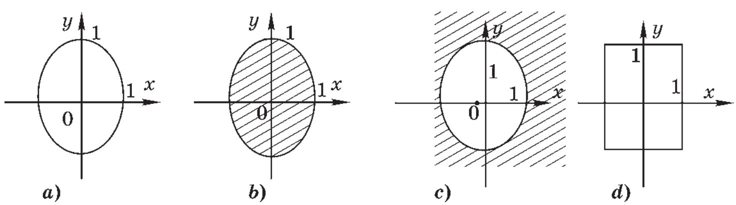


Рис. 18

Задание 8 (2). Выберите один вариант ответа.

Множеством, удовлетворяющим заданному характеристическому свойству $B = \{(x, y) : x \in R, y \le 2 - x\}$, является множество…

Варианты ответа (рис. 19):

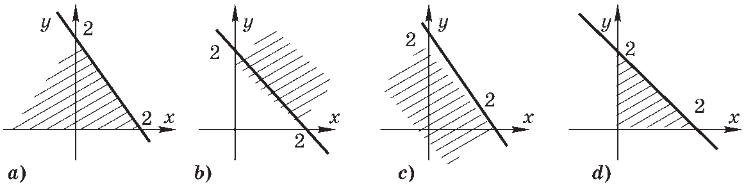


Рис. 19

ЭЛЕМЕНТ 1.2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке 20, является…

Варианты ответа: 1) $A \cup B$; 2) $B \setminus A$; 3) $A \setminus B$; 4) $A \cap B$.

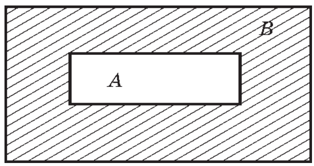


Рис. 20

Задание 2 (1). Выберите варианты согласно тексту задания.

Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке 21, является…

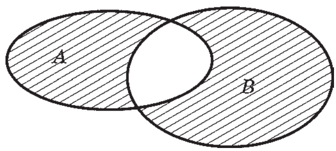


Рис. 21

Варианты ответа:

1) $A \oplus B$; 2) $A \setminus B$; 3) $A \cap B$; 4) $A \cup B$.

Задание 3 (2). Выберите один вариант ответа.

Результатом операции $A \cup A$ над множеством A является…

Варианты ответа: 1) $2A$; 2) A; 3) A^2; 4) операция не имеет смысла.

Задание 4 (2). Выберите один вариант ответа.

Для множеств A, B и C с помощью операций объединения и пересечения укажите множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат всем трем множествам...

Варианты ответа: 1) $A \bigcap B \bigcap C$; 2) $A \bigcup B \bigcup C$; 3) $(A \bigcap B) \bigcup C$; 4) $A \bigcup (B \bigcap C)$.

Задание 5 (2). Выберите один вариант ответа.

Пусть $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$, то равенство $A \bigcup B = A$ возможно, если...

Варианты ответа: 1) A и B — любые множества; 2) $A \subset B$; 3) $B \subset A$; 4) равенство невозможно.

Задание 6 (2). Выберите один вариант ответа.

Из равенства $A \backslash B = C$ вытекает равенство $A = B \bigcup A$, если...

Варианты ответа: 1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$; 3) $A \bigcap B = \varnothing$; 4) $A \bigcup B = U$.

Задание 7 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Из предложенных высказываний для множеств $X = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ и $Y = \{1, 5, 9\}$ верными являются...

Варианты ответа: 1) $Y \backslash X = Y$; 2) $X \bigcap Y = Y$; 3) $X \bigcup Y = X$; 4) $X \subset Y$.

Задание 8 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Из предложенных высказываний для множеств $X = \{1, 6, 10\}$, $Y = \{0, 1, 5, 6, 7, 10\}$ верными являются...

Варианты ответа: 1) $Y \backslash X = Y$; 2) $X \bigcap Y = X$; 3) $X \bigcup Y = X$; 4) $X \subset Y$.

Задание 9 (2). Выберите один вариант ответа.

Даны множества $A = \{-2; -1{,}5; 0{,}5; 2; 4\}$ и N — множество натуральных чисел. Тогда $A \bigcap N$ есть множество...

Варианты ответа: 1) $\{-1{,}5; 0{,}5\}$; 2) $\{-2; 2; 4\}$; 3) $\{-2; 2\}$; 4) $\{2; 4\}$.

Задание 10 (2). Выберите один вариант ответа.

Если $A = \{0, 1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$, то множествами $C = A \bigcup B$ и $D = A \bigcap B$ являются...

Варианты ответа: 1) $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $D = \varnothing$; 2) $C = \{0, 1, 3, 5\}$, $D = \{2, 4\}$; 3) $C = \{0, 1, 3, 5\}$, $D = \varnothing$; 4) $D = \{2, 4\}$, $C = \varnothing$.

Задание 11 (2). Выберите варианты согласно тексту задания).

Установите соответствие между списками двух множеств, заданных различным образом:

1) $\{x : x^2 - 5x + 6 \le 0\}$;
2) $\{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$;
3) $\{x : x^2 - 5x + 6 < 0\}$;
4) $\{x : x^2 - 5x + 6 > 0\}$.
a) $\{2, 3\}$;
b) $(2, 3)$;
c) $(-\infty; 2) \cup (3; \infty)$;
d) $(-\infty; 2] \cup [3; \infty)$;
e) $[2, 3]$;
f) $(-\infty; 2] \cup [3; \infty)$.

Задание 12 (2). Выберите один вариант ответа.

A и B — множества действительных чисел: $A = [-2, 5)$, $B = (0, 8]$.

Тогда множество $A \backslash B$ равно…

Варианты ответа: 1) $[-2, 0]$; 2) $(5, 8]$; 3) $[-2, 0)$; 4) $[5, 8]$.

Задание 13 (2). Выберите один вариант ответа.

A и B — множества действительных чисел: $A = (-4, 0]$, $B = [-2, 3)$.

Тогда множество $A \cup B$ равно…

Варианты ответа: 1) $(-4, 3)$; 2) $(-2, 0)$; 3) $[-4, 3)$; 4) $(-2, 0]$.

Задание 14 (2). Выберите один вариант ответа.

Если $A = (2, 5)$, $B = [2, 5]$, множествами $A \cup B$ и $A \cap B$ являются…

Варианты ответа: 1) $A \cup B = (2, 5)$ и $A \cap B = [2, 5]$; 2) $A \cup B = [2, 5]$ и $A \cap B = (2, 5)$; 3) $A \cup B = R$ и $A \cap B = \varnothing$; 4) $A \cup B = \varnothing$ и $A \cap B = R$.

Задание 15 (2). Выберите один вариант ответа.

Если $A = \{x\colon 1 < x \le 2\}$, $B = \{x\colon 1,5 \le x < \infty\}$, то множествами $A \cup B$ и $A \cap B$ являются…

Варианты ответа:
1) $A \cup B = \{x\colon -\infty < x < \infty\}$ и $A \cap B = \{x\colon 1{,}5 \le x \le 2\}$;
2) $A \cup B = \{x\colon 1 < x < \infty\}$ и $A \cap B = \{x\colon 1{,}5 < x \le 2\}$;
3) $A \cup B = \{x\colon 1 < x < \infty\}$ и $A \cap B = \{x\colon 1{,}5 \le x \le 2\}$;
4) $A \cup B = \{x\colon 1 < x < 2\}$ и $A \cap B = \{x\colon 1 < x \le 1{,}5\}$.

Задание 16 (2). Выберите один вариант ответа.

Для множеств $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ и $B = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$ верно утверждение…

Варианты ответа: 1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$; 3) $A = B$; 4) все предыдущие утверждения ложны.

Задание 17 (2). Выберите один вариант ответа.

Для множеств $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ и $B = \{(x, y) : x \in R, y \le 2 - x\}$ верно утверждение…

Варианты ответа: 1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$; 3) $A = B$; 4) все предыдущие утверждения ложны.

ЭЛЕМЕНТ 1.3. ЗАКОНЫ ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Задание 1 (2). Выберите один вариант ответа.

В результате использования законов над множествами формула $A \bigcup (\bar{A} \bigcap B)$ эквивалентна формуле.

Варианты ответа: 1) A; 2) $A \bigcup B$; 3) $A \bigcap B$; 4) B.

Задание 2 (2). Выберите один вариант ответа.

В результате использования законов над множествами формула $(\bar{A} \bigcup B) \bigcap A$ эквивалентна формуле…

Варианты ответа: 1) A; 2) $A \bigcup B$; 3) $A \bigcap B$; 4) B.

Задание 3 (2). Выберите один вариант ответа.

В результате использования законов над множествами формула $(A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap \bar{B}) \bigcup (\bar{A} \bigcap B)$ эквивалентна формуле…

Варианты ответа: 1) A; 2) $A \bigcup B$; 3) $A \bigcap B$; 4) B.

Задание 4 (2). Выберите один вариант ответа.

В результате использования законов над множествами формула $(A \bigcap B) \backslash A$ эквивалентна формуле…

Варианты ответа: 1) A; 2) $A \bigcup B$; 3) $\varnothing$; 4) B.

Задание 5 (2). Выберите один вариант ответа.

В результате использования законов над множествами формула $B \backslash (A \bigcup B)$ эквивалентна формуле…

Варианты ответа: 1) A; 2) $A \bigcup B$; 3) $\varnothing$; 4) B.

ЭЛЕМЕНТ 1.4. КОРТЕЖИ И ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

Дано множество $A = \{b, y\}$. Тогда декартово произведение $A \times A$ содержит ____ кортежей.

Варианты ответа: 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 1.

Задание 2 (2). Выберите один вариант ответа.

Из множеств $A = \{b, y, z\}$ и $B = \{1, 2\}$ можно составить ___ кортежей.

Варианты ответа: 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7.

Задание 3 (2). Выберите один вариант ответа.

Даны множества $A = \{b, y\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Тогда декартовым (прямым) произведением $A \times B$ является…

Варианты ответа:

1) $\{(1, b), (1, y), (2, b), (2, y), (3, b), (3, y)\}$;

2) $\{b, y, 1, 2, 3\}$;

3) $\{(b, y, 1), (b, y, 2), (b, y, 3)\}$;

4) $\{(b, 1), (b, 2), (b, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$.

Задание 4 (2). Выберите варианты согласно тексту задания.

Установите соответствие между парой множеств A и B и их декартовым произведением $A \times B$.

1) $A = \{y, b\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$;

2) $A = \{y, b\}$ и $B = \{3, 2, 1\}$;

3) $A = \{y, b\}$ и $B = \{2, 3, 1\}$.

a) $\{(y, 1), (y, 2), (y, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$;

b) $\{(y, 3), (y, 2), (y, 1), (b, 3), (b, 2), (b, 1)\}$;

c) $\{(y, 2), (y, 3), (y, 1), (b, 3), (b, 2), (b, 1)\}$;

d) $\{(2, y), (3, y), (1, y), (2, b), (3, b), (1, b)\}$;

e) $\{(1, y), (2, y), (3, y), (1, b), (2, b), (3, b)\}$;

f) $\{(3, y), (2, y), (1, y), (3, b), (2, b), (1, b)\}$.

Задание 5 (2). Выберите один вариант ответа.

Пусть в R заданы множества $A = \{x\colon 0 \le x \le 1\}$, $B = \{y : 0 \le y \le 2\}$, тогда декартово произведение $A \times B$ представляет собой…

Варианты ответа: 1) совокупность точек, принадлежащих сторонам прямоугольника; 2) отрезок; 3) прямоугольник; 4) квадрат.

ЭЛЕМЕНТ 1.5. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ: СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

Отношение $R = A \times A$, если R означает «быть меньше», $A = \{1, 2, 3\}$, задается списком кортежей вида…

Варианты ответа: 1) $\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle$; 2) $\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle$; 3) $\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle$; 4) $\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle$.

Задание 2 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Отношение $R = \{\langle x, y\rangle : x, y \in A, x$ делит $y, x \le 3\}$, если $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, содержит кортежи вида…

Варианты ответа: 1) $\langle 4, 8\rangle$; 2) $\langle 2, 8\rangle$; 3) $\langle 8, 2\rangle$; 4) $\langle 3, 6\rangle$; 5) $\langle 3, 3\rangle$.

Задание 3 (1). Выберите один вариант ответа.

Отношение $R = A \times A$, если R означает «быть меньше», $A = \{1, 2, 3\}$, задается матрицей смежности вида…

Варианты ответа:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 4 (2). Выберите один вариант ответа.

Если Саша (С) учится вместе с Таней (Т), Юра (Ю) с Аней (А), а Аня с Мишей (М), то бинарное отношение R — «учиться вместе» задается матрицей смежности вида…

Варианты ответа:

1)

	С	Т	Ю	А	М
С	0	1	0	0	0
Т	0	0	0	0	0
Ю	0	0	0	1	0
А	0	0	0	0	1
М	0	0	0	0	0

2)

	С	Т	Ю	А	М
С	0	1	0	0	0
Т	1	0	0	0	0
Ю	0	0	0	1	0
А	0	0	1	0	1
М	0	0	0	1	0

3)

	С	Т	Ю	А	М
С	0	1	0	0	0
Т	1	0	0	0	0
Ю	0	0	0	1	1
А	0	0	1	0	1
М	0	0	1	1	0

4)

	С	Т	Ю	А	М
С	0	1	0	0	0
Т	1	0	0	0	0
Ю	0	0	0	1	0
А	0	0	1	0	1
М	0	0	1	1	0

Задание 5 (1). Выберите один вариант ответа.

Граф (рис. 22) на множестве прямых A_1, A_2, A_3 моделирует бинарное отношение…

Варианты ответа: 1) «быть параллельными»; 2) «быть перпендикулярными»; 3) «быть скрещивающимися»; 4) «быть пересекающимися».

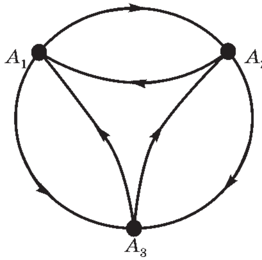


Рис. 22

Задание 6 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Граф (рис. 23) моделирует бинарные отношения между людьми…

Варианты ответа: 1) «быть другом»; 2) «быть одноклассником»; 3) «быть отцом»; 4) «быть родственником».

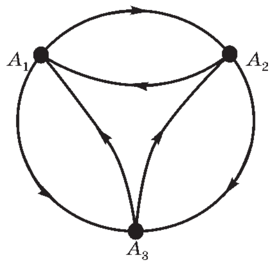


Рис. 23

ЭЛЕМЕНТ 1.6. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ: СВОЙСТВА

Задание 1 (1). Выберите несколько вариантов ответа

Отношение «быть старше»: «x старше y» является…

Варианты ответа: 1) рефлексивным; 2) симметричным; 3) антисимметричным; 4) транзитивным.

Задание 2 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Отношение «x — победитель y» является…

Варианты ответа: 1) антирефлексивным; 2) симметричным; 3) транзитивным; 4) рефлексивным.

Задание 3 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Отношение «быть меньше» на множестве действительных чисел является…

Варианты ответа: 1) рефлексивным; 2) антирефлексивным; 3) транзитивным; 4) симметричным.

Задание 4 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Пара книг принадлежит бинарному отношению R, если и только если в этих книгах есть ссылка на одни и те же литературные источники. Тогда отношение R является…

Варианты ответа: 1) рефлексивным; 2) симметричным; 3) транзитивным; 4) антирефлексивным; 5) антитранзитивным.

Задание 5 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Свойством транзитивности обладает бинарное отношение…

Варианты ответа: 1) «иметь разный рост»; 2) «быть параллельным»; 3) «быть родственником»; 4) «быть перпендикулярным».

Задание 6 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Свойством симметричности обладает бинарное отношение…

Варианты ответа: 1) «быть родственником»; 2) «быть больше»; 3) «быть перпендикулярным»; 4) «быть отцом».

Задание 7 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Свойством рефлексивности на множестве действительных чисел обладает бинарное отношение…

Варианты ответа: 1) «быть меньше»; 2) «быть не больше»; 3) «быть равным»; 4) «быть больше».

Задание 8 (1). Выберите один вариант ответа.

Пусть бинарное отношение задано графом (рис. 24). Тогда такое отношение обладает свойствами…

Варианты ответа: 1) рефлексивности и транзитивности; 2) симметричности и транзитивности; 3) симметричности; 4) рефлексивности и симметричности.

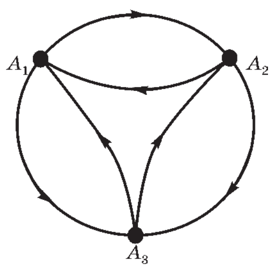


Рис. 24

3.2. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

ЭЛЕМЕНТ 2.1. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

Если элемент x может быть выбран m способами, а элемент y — n способами, то оба элемента в указанном порядке можно выбрать _____ способами

Варианты ответа: 1) $m \cdot n$; 2) $m + n$; 3) $m - n$; 4) $n - m$.

Задание 2 (1). Выберите один вариант ответа.

Если элемент x может быть выбран m способами, а элемент y — другими n способами, то любой из элементов можно выбрать _____ способами.

Варианты ответа: 1) $m \cdot n$; 2) $m + n$; 3) $m - n$; 4) $n - m$.

Задание 3 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

В размещениях кортежи один от другого отличаются...

Варианты ответа: 1) элементами; 2) порядком следования элементов; 3) количеством элементов.

Задание 4 (1). Выберите один вариант ответа.

В перестановках кортежи отличаются один от другого...

Варианты ответа: 1) элементами; 2) порядком следования элементов; 3) количеством элементов.

Задание 5 (1). Выберите один вариант ответа.

В сочетаниях кортежи отличаются один от другого...

Варианты ответа: 1) элементами; 2) порядком следования элементов; 3) количеством элементов.

Задание 6 (2). Выберите один вариант ответа.

Число всевозможных способов добраться из пункта A в пункт B, если между этими пунктами существуют два авиамаршрута, один железнодорожный и три автобусных, равно...

Варианты ответа: 1) 6; 2) 12; 3) 3; 4) 5.

Задание 7 (2). Выберите один вариант ответа.

Число возможных способов выбрать из 6 студентов 4 студента и разместить их за партой равно...

Варианты ответа: 1) $\frac{6!}{4!2!}$; 2) $\frac{6!}{2!}$; 3) $6!$; 4) $4!$

Задание 8 (2). Выберите один вариант ответа.

В магазине 6 различных плюшевых зайцев. Тогда число способов разместить их в ряд на витрине, равно...

Варианты ответа: 1) 99; 2) 42; 3) 66; 4) 720.

Задание 9 (2). Выберите один вариант ответа.

Число всевозможных способов извлечь из шести учебников 2 равно...

Варианты ответа: 1) 20; 2) 15; 3) 45; 4) 12.

Задание 10 (2). Выберите один вариант ответа.

Число всевозможных способов составить флаг, состоящий из четырех горизонтальных полос, имея четыре различных цвета, равно…

Варианты ответа: 1) 24; 2) 256; 3) 16; 4) 4.

Задание 11 (2). Выберите один вариант ответа.

Число всевозможных способов составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос, имея четыре различные цвета, равно…

Варианты ответа: 1) 24; 2) 256; 3) 16; 4) 4.

Задание 12 (2). Выберите один вариант ответа.

Число всевозможных способов составить из цифр 2,3,4,5 различные трехзначные числа, при условии, что цифры в числах могут повторяться, равно…

Варианты ответа: 1) 24; 2) 64; 3) 16; 4) 8.

Задание 13 (2). Выберите один вариант ответа.

Число всевозможных способов рассадить шесть пассажиров в трех вагонах равно…

Варианты ответа: 1) A_6^3; 2) C_6^3; 3) 3^6; 4) 6^3.

Задание 14 (2). Выберите один вариант ответа.

Число всевозможных способов рассадить шесть пассажиров в первом из трех вагонов равно…

Варианты ответа: 1) A_6^3; 2) C_6^3; 3) 3; 4) 1.

Задание 15 (2). Выберите один вариант ответа.

Число всевозможных способов рассадить шесть пассажиров в шести разных вагонах равно…

Варианты ответа: 1) 12; 2) 6^6; 3) 6!; 4) 36.

3.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

ЭЛЕМЕНТ 3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Задание 1 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Четными вершинами в графе (рис. 25) являются…

Варианты ответа: 1) *4*; 2) *6*; 3) *7*; 4) *5*.

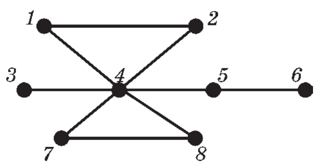


Рис. 25

Задание 2 (1). Выберите несколько вариантов ответа. Висячими вершинами в графе (рис. 26) являются…

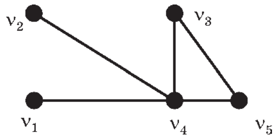


Рис. 26

Варианты ответа: 1) v_1; 2) v_2; 3) v_3; 4) v_4; 5) v_5.

Задание 3 (1). Выберите несколько вариантов ответа. Нечетными вершинами в графе (рис. 27) являются…

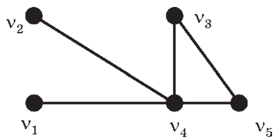


Рис. 27

Варианты ответа: 1) v_1; 2) v_2; 3) v_3; 4) v_4; 5) v_5.

Задание 4 (1). Выберите варианты согласно тексту задания.

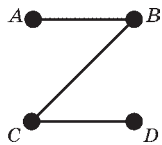


Рис. 28

Неориентированный граф (рис. 28) имеет маршрут $M = ABCD$ длиной…

Варианты ответа: 1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 4.

Задание 5 (1). Выберите один вариант ответа.

Неориентированный граф (рис. 29) можно задать списком ребер вида…

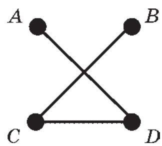


Рис. 29

Варианты ответа: 1) $\{(A, D), (B, C), (C, D)\}$; 2) $\{(A, B), (B, C), (C, D)\}$; 3) $\{(A, D), (B, C), (C, D), (B, B)\}$.

Задание 6 (2). Выберите варианты согласно тексту задания.

Неориентированные графы имеют множество вершин $\{A, B, C, D\}$. Множества их ребер заданы отношением инцидентности: каждое ребро представлено как пара вершин. Поставьте в соответствие каждому графу его графическое изображение (рис. 30).

1) $\{(A, D), (B, C), (C, D)\}$;
2) $\{(A, B), (B, C), (C, D)\}$;
3) $\{(A, D), (B, C), (C, D), (B, B)\}$.

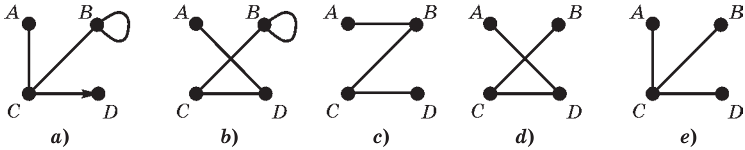


Рис. 30

ЭЛЕМЕНТ 3.2. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

В орграфе (рис. 31), висячей является вершина…

Варианты ответа: 1) *1*; 2) *2*; 3) *3*; 4) *4*.

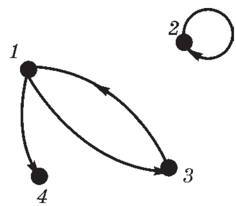


Рис. 31

Задание 2 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Среди приведенных ниже графов (рис. 32) псевдографами являются…

Варианты ответа:

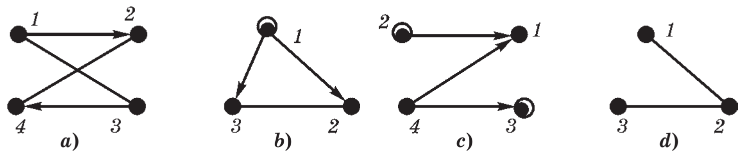


Рис. 32

Задание 3 (1). Выберите один вариант ответа.

Списком дуг ориентированного графа (рис. 33) является…

Варианты ответа: 1) $\{(1; 1), (2; 1), (2; 4), (4; 3)\}$; 2) $\{(2; 1), (2; 4), (4; 2), (4; 3)\}$; 3) $\{(1; 1), (2; 1), (2; 4), (4; 2), (4; 3)\}$; 4) $\{1; 2; 3; 4\}$.

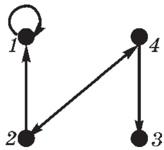


Рис. 33

Задание 4 (1). Выберите один вариант ответа.

Реализацией графа с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4\}$ и списком дуг $E = \{(4; 1), (1; 3), (2; 2), (4; 2), (3; 1)\}$ является…

Варианты ответа (рис. 34):

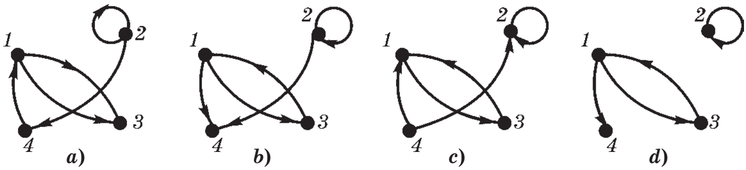


Рис. 34

Задание 5 (1). Выберите один вариант ответа.

Реализацией графа с множеством вершин $V = \{6, 7, 8, 9\}$ и списком дуг $E = \{(8; 9), (6; 8), (9; 8), (7; 6), (9; 7), (7; 7)\}$ является...

Варианты ответа (рис. 35):

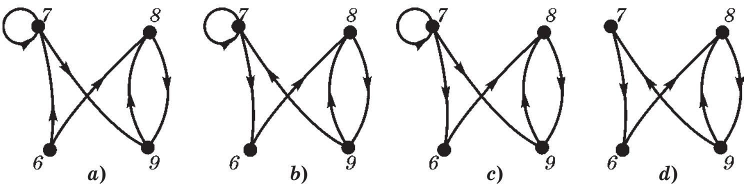


Рис. 35

Задание 6 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Для ориентированного графа (рис. 36) путь может иметь вид...

Варианты ответа: 1) L: $7 \to 6 \to 8 \to 9$; 2) L: $7 \to 8 \to 9 \to 6$; 3) L: $6 \to 8 \to 9$; 4) L: $9 \to 8 \to 6 \to 7$.

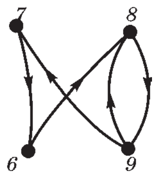


Рис. 36

Задание 7 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Ориентированный граф (рис. 37) содержит контур...

Варианты ответа: 1) L: $7 \to 6 \to 8 \to 9 \to 7$; 2) L: $7 \to 6 \to 8$; 3) L: $8 \to 9 \to 8$; 4) L: $9 \to 7 \to 6 \to 8$.

Задание 8 (2). Выберите один вариант ответа.

Ориентированный граф задан списком дуг $\{(3; 1), (2; 1), (3; 2)\}$. Тогда источник находится в вершине...

Варианты ответа: 1) 1; 2) 2; 3) 3.

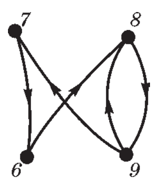


Рис. 37

Задание 9 (2). Выберите один вариант ответа.

Ориентированный граф задан списком дуг {(3; 1), (2; 1), (3; 2)}. Тогда сток находится в вершине…

Варианты ответа: 1) 1; 2) 2; 3) 3.

ЭЛЕМЕНТ 3.3. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

Задание 1 (2). Выберите один вариант ответа.

На множестве чисел $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ отношение «b делится без остатка на $a(a \neq b)$» задается графом…

Варианты ответа (рис. 38):

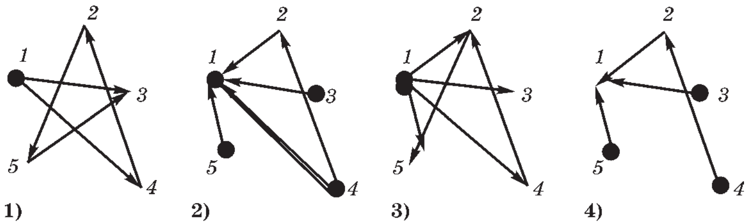


Рис. 38

Задание 2 (2). Выберите один вариант ответа.

Матрица $\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ является матрицей смежности ориентированного графа. Тогда списком ребер ориентированного графа является множество…

Варианты ответа: 1) {1, 2, 3}; 2) {(1, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)}; 3) {(1, 1), (2, 3), (1, 3), (3, 2)}; 4) {(1, 1), (2, 3), (3, 3), (3, 2)}.

Задание 3 (2). Выберите один вариант ответа.

Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ является матрицей смежности ориентированного графа. Тогда число ребер графа равно…

Варианты ответа: 1) 4; 2) 10; 3) 5; 4) 7.

Задание 4 (2). Выберите один вариант ответа.

Матрица смежности ориентированного графа (рис. 39) равна...

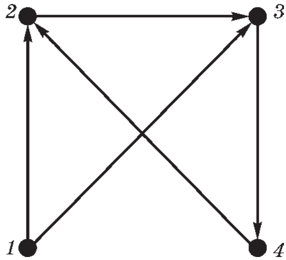


Рис. 39

Варианты ответа:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задание 5 (2). Выберите один вариант ответа.

На множестве чисел $M = \{1, 2, 3\}$ отношение «$a < b$» задается матрицей инциденций вида...

Варианты ответа:

1)

	(1; 2)	(1; 3)	(2; 3)
1	1	1	0
2	–1	0	1
3	0	–1	–1

2)

	(2; 1)	(3; 1)	(3; 2)
1	1	1	0
2	–1	0	1
3	0	–1	–1

3)

	(1; 2)	(1; 3)	(2; 3)
1	1	1	0
2	–1	0	1
3	0	–1	–1

Задание 6 (2). Выберите один вариант ответа.

На множестве чисел $M = \{1, 2, 3\}$ отношение «$a > b$» задается матрицей инциденций вида...

Варианты ответа:

1)

	(1; 2)	(1; 3)	(2; 3)
1	1	1	0
2	–1	0	1
3	0	–1	–1

2)

	(2; 1)	(3; 1)	(3; 2)
1	1	1	0
2	–1	0	1
3	0	–1	–1

3)

	(2; 1)	(3; 1)	(3; 2)
1	–1	–1	0
2	1	0	–1
3	0	1	1

ЭЛЕМЕНТ 3.4. ВИДЫ И ТИПЫ ГРАФОВ

Задание 1 (1). Впишите необходимое число.

Необходимо провести ____ ребер, чтобы достроить граф (рис. 40) до полного.

Варианты ответа: 1) 3; 2) 2; 3) 0; 4) 1.

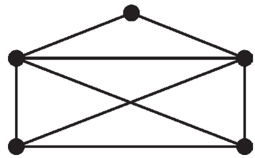


Рис. 40

Задание 2 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Неполными графами (рис. 41) являются…

Варианты ответа:

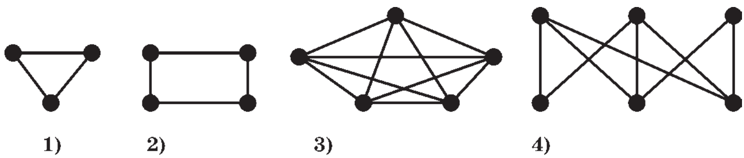


Рис. 41

Задание 3 (1). Выберите один вариант ответа.

Для ориентированного графа (рис. 42) полный путь может иметь вид…

Варианты ответа:
1) L: $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4$; 2) L: $0 \to 1 \to 3 \to 4$; 3) L: $2 \to 3 \to 4$; 4) L: $0 \to 1 \to 4$.

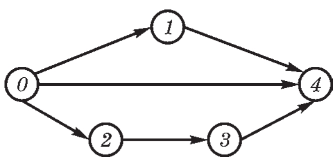


Рис. 42

Задание 4 (2). Выберите один вариант ответа.

Число полных путей в ориентированном графе, представленном матрицей смежности, равно…

	A	*B*	*C*	*D*
A	0	1	1	0
B	0	0	0	1
C	0	0	0	1
D	0	0	0	0

Варианты ответа: 1) 1; 2) 4; 3) 2; 4) 0.

Задание 5 (2). Выберите один вариант ответа.

Для сетевого графика (рис. 43) длина критического пути равна…

Варианты ответа: 1) 10; 2) 12; 3) 31; 4) 9.

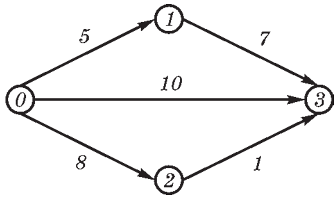


Рис. 43

Задание 6 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Графами, содержащими эйлеров цикл, являются…

Варианты ответа (рис. 44):

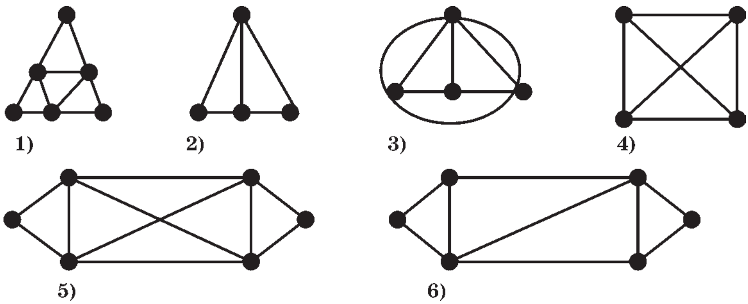


Рис. 44

Задание 7 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Графами, содержащими эйлеров путь, являются…

Варианты ответа (рис. 45):

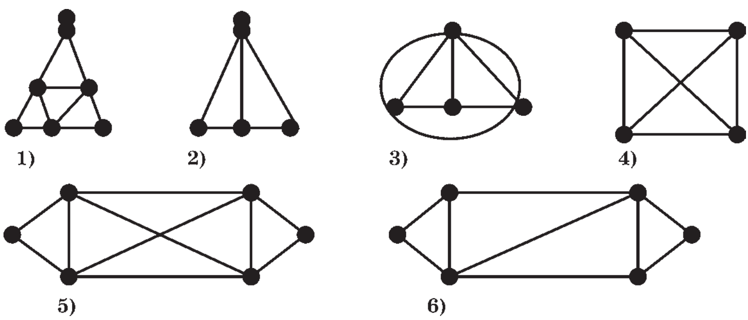


Рис. 45

3.4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

ЭЛЕМЕНТ 4.1. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

Наука, изучающая формы и законы мышления, называется…

Варианты ответа: 1) алгебра; 2) геометрия; 3) философия; 4) логика.

Задание 2 (1). Выберите один вариант ответа.

В алгебре логики повествовательное предложение, в котором что-то утверждается или отрицается, называется…

Варианты ответа: 1) выражение; 2) высказывание; 3) вопрос; 4) умозаключение.

Задание 3 (1). Выберите один вариант ответа.

Высказывание — это…

Варианты ответа:

1) любое повествовательное предложение, в котором утверждается что-либо о чем-либо, при этом можно судить, истинно оно или ложно, в данных условиях места и времени;

2) повествовательное предложение, о котором можно судить, истинно оно или ложно;

3) любое истинное повествовательное предложение;

4) предложение, о котором можно судить, истинно оно или ложно.

Задание 4 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Высказываниями являются…

Варианты ответа: 1) $2 + 2 - 4$; 2) тюльпаны бывают красные; 3) привет, ученик! 4) $2 + 2 = 5$.

Задание 5 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Истинным является высказывание ________.

Варианты ответа: 1) $3 + 5 = 2 + 4$; 2) I + VII = VIII; 3) Париж — столица Англии; 4) кислород — газ.

Задание 6 (1). Выберите один вариант ответа.

Сложным называется высказывание, полученное из простых с помощью грамматических связок:

Варианты ответа:

1) «только тогда… когда», «если…, то…»;

2) «не», «и», «или», «тогда и только тогда...», «если.., то...»;

3) «не», «и», «или»;

4) «не», «тогда и только тогда...», «если..., то...».

Задание 7 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Сложное высказывание «Если в четырехугольнике диагонали не перпендикулярны, то этот четырехугольник не является квадратом» составляют следующие элементарные высказывания...

Варианты ответа:

1) A — «В четырехугольнике диагонали не перпендикулярны»;

2) B — «В четырехугольнике диагонали перпендикулярны»;

3) C — «Четырехугольник является квадратом»;

4) D — «Четырехугольник не является квадратом».

Задание 8 (1). Выберите один вариант ответа.

Сложное высказывание «Неверно, что первым пришел Петр или Павел» составляют следующие элементарные высказывания...

Варианты ответа:

1) A — «Неверно, что первым пришел Петр». B — «Неверно, что первым пришел Павел»;

2) A — «Первым пришел Петр». B — «Неверно, что первым пришел Павел»;

3) A — «Первым пришел Петр». B — «Первым пришел Павел»;

4) A — «Неверно, что первым пришел Петр». B — «Первым пришел Павел».

Задание 9 (1). Выберите один вариант ответа.

Логическому высказыванию «Точка x принадлежит интервалу (a, b)» соответствует логическое выражение...

Варианты ответа: 1) $(x < a)$ или $(x > b)$; 2) $(x > a)$ и $(x < b)$; 3) не $(x < a)$ или $(x < b)$; 4) $(x > a)$ или $(x > b)$.

Задание 10 (2). Выберите ответы согласно тексту задания.

Установите соответствие между утверждениями и соответствующими им высказываниями.

1) $(y > 0$ и $y < 3)$ или $(y < 10$ и $y > 4)$;

2) (не $(y < 0)$) и $(y < 10)$;

3) ($y > 0$) и (не($y > 10$)).

a) Точка y принадлежит интервалу [0, 10);

b) точка y принадлежит интервалу (0, 10);

c) точка y принадлежит интервалу (0, 10].

ЭЛЕМЕНТ 4.2. ОПЕРАЦИИ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

Объединение двух высказываний в одно с помощью союза «и» называется…

Варианты ответа: 1) импликация; 2) дизъюнкция; 3) конъюнкция; 4) отрицание.

Задание 2 (1). Выберите один вариант ответа.

Объединение двух высказываний в одно с помощью оборота «если…, то…» называется…

Варианты ответа: 1) импликация; 2) дизъюнкция; 3) конъюнкция; 4) отрицание.

Задание 3 (1). Выберите один вариант ответа.

Объединение двух высказываний в одно с помощью союза «или» называется…

Варианты ответа: 1) импликация; 2) дизъюнкция; 3) конъюнкция; 4) отрицание.

Задание 4 (1). Выберите один вариант ответа.

Операцией над высказываниями не является…

Варианты ответа: 1) логическое деление; 2) логическое отрицание; 3) логическое сложение; 4) логическое умножение.

Задание 5 (1). Выберите один вариант ответа.

Логическая функция — это…

Варианты ответа: 1) простое высказывание; 2) составное высказывание; 3) вопросительное предложение; 4) логическая операция.

Задание 6 (1). Выберите один вариант ответа.

Логической операцией, не являющейся базовой, является…

Варианты ответа: 1) конъюнкция; 2) дизъюнкция; 3) эквивалентность; 4) отрицание.

Задание 7 (1). Выберите один вариант ответа.

Дизъюнкция имеет обозначение вида…

Варианты ответа: 1) $\bigcap$; 2) $\vee$; 3 $\wedge$; 4) &.

Задание 8 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Конъюнкция имеет обозначение вида…

Варианты ответа: 1) $\bigcap$; 2) $\vee$; 3) $\wedge$; 4) &.

Задание 9 (1). Выберите один вариант ответа.

Таблица, содержащая все возможные значения логического выражения, называется…

Варианты ответа: 1) таблица ложности; 2) таблица истинности; 3) таблица значений; 4) таблица ответов.

Задание 10 (1). Выберите один вариант ответа.

Таблица истинности дизъюнкции имеет вид…

Варианты ответа:

1)

a	b	$a \vee b$
Л	Л	Л
Л	И	Л
И	Л	И
И	И	И

2)

a	b	$a \wedge b$
Л	Л	И
Л	И	Л
И	Л	И
И	И	И

3)

a	b	$a \wedge b$
Л	Л	Л
Л	И	Л
И	Л	Л
И	И	И

4)

a	b	$a \vee b$
Л	Л	Л
Л	И	И
И	Л	И
И	И	И

Задание 11 (1). Выберите один вариант ответа.

Таблицей истинности логического высказывания $a \wedge b$ является…

Варианты ответа:

1)

a	b	$a \wedge b$
Л	Л	Л
Л	И	Л
И	Л	И
И	И	И

2)

a	b	$a \wedge b$
Л	Л	И
Л	И	Л
И	Л	И
И	И	И

3)

a	b	$a \wedge b$
Л	Л	Л
Л	И	Л
И	Л	Л
И	И	И

4)

a	b	$a \wedge b$
Л	Л	Л
Л	И	И
И	Л	И
И	И	И

Задание 12 (1). Выберите один вариант ответа.

Укажите правильную таблицу истинности логического высказывания $a \vee b$…

Варианты ответа:

1)

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

2)

a	b	$a \vee b$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

3)

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4)

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Задание 13 (2). Выберите один вариант ответа.

Логическое значение высказывания «$3 \cdot 3 = 9$ или белые медведи живут в Африке» есть…

Варианты ответа: 1) истина; 2) ложь; 3) правда; 4) неправда.

Задание 14 (2). Выберите один вариант ответа.

Логическое значение высказывания «Если 9 делится на 3, то 4 делится на 2» есть…

Варианты ответа: 1) истина; 2) ложь; 3) правда; 4) неправда.

Задание 15 (2). Выберите один вариант ответа.

Логическое значение высказывания «11 делится на 6 тогда и только тогда, когда 11 делится на 3» есть…

Варианты ответа: 1) истина; 2) ложь; 3) правда; 4) неправда.

Задание 16 (2). Выберите один вариант ответа.

Логическое значение высказывания $A \wedge (2 \cdot 2 = 4)$, если высказывание A ложно, есть…

Варианты ответа: 1) истина; 2) ложь; 3) правда; 4) неправда.

Задание 17 (2). Выберите один вариант ответа.

Логическое значение высказывания $\bar{A} \vee (2 \cdot 2 = 4)$, если высказывание A ложно, есть…

Варианты ответа: 1) истина; 2) ложь; 3) правда; 4) неправда.

Задание 18 (2). Выберите один вариант ответа.

Логическое значение высказывания $\bar{A} \wedge (2 \cdot 2 = 5)$, если высказывание A истинно, есть…

Варианты ответа: 1) истина; 2) ложь; 3) правда; 4) неправда.

Задание 19 (2). Выберите один вариант ответа.

Значение логического выражения $(1 \vee 1) \wedge (1 \vee 0)$ равно…

Варианты ответа: 1) 1; 2) 0; 3) 10; 4) 2.

Задание 20 (2). Выберите один вариант ответа.

Значение логического выражения $(1 \vee 1) \wedge (0 \vee \neg 0)$ равно…

Варианты ответа: 1) 0; 2) 1; 3) 10; 4) 2.

ЭЛЕМЕНТ 4.3. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

Логической формулой называется любое сложное высказывание, которое…

Варианты ответа:

1) принимает значение «истина»;

2) может быть получено из простых высказываний посредством применения логических операций;

3) является обозначением простого высказывания.

Задание 2 (2). Выберите один вариант ответа.

Множеством истинности у невыполнимой формулы является…

Варианты ответа: 1) универсальное множество U; 2) пустое множество; 3) некоторое множество A, не являющееся ни пустым, ни универсальным.

Задание 3 (1). Выберите ответы согласно тексту задания.

Установите соответствие между высказываниями и соответствующими им логическими формулами:

1) число 7 нечетное (A) и двузначное (B);

2) если число четное (A), то оно делится на 2 (B);

3) водительские права можно получить (A) тогда и только тогда, когда тебе исполнится 18 (B);

4) неверно, что корова — хищное животное (A).

a) $A \to B$;

b) $A \wedge B$;

c) $A \Leftrightarrow B$;

d) $\neg A$;

e) $A \vee B$.

Задание 4 (1). Выберите один вариант ответа.

Сложное высказывание «Что в лоб (A), что по лбу (B)» представимо в виде логической формулы…

Варианты ответа: 1) $A \Leftrightarrow B$; 2) $A \to B$; 3) $A \vee B$; 4) $A \wedge B$.

Задание 5 (2). Выберите ответы согласно тексту задания.

Установите соответствие между высказываниями и соответствующими им логическими формулами

1) если число делится на 2 (A) и не делится на 3 (B), то оно не делится на 6 (C);

2) произведение трех чисел равно нулю (A) тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них равно нулю (B, C, D);

3) если производная функции в точке равна нулю (A) и вторая производная этой функции в этой же точке отрицательна (B), то данная точка есть точка локального максимума (C);

4) если какие-либо из трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ коллинеарные (A, B, C), то их смешанное произведение равно нулю (D).

a) $A \Leftrightarrow (B \vee C \vee D)$;

b) $(A \wedge B) \Rightarrow C$;

c) $(A \vee B \vee C) \Rightarrow D$.

Задание 6 (2). Выберите один вариант ответа.

Условие истинности предложения «$\frac{a}{b} \neq 0$» (a, b — действительные числа) имеет вид…

Варианты ответа: 1) $(a \neq 0) \wedge (b \neq 0)$; 2) $(a \neq 0) \vee (b \neq 0)$; 3) $(a = 0) \to (b \neq 0)$; 4) $(a \neq 0) \wedge (b = 0)$.

Задание 7 (2). Выберите один вариант ответа.

Условие истинности предложения «$a^2 + b^2 = 0$» (a, b — действительные числа) имеет вид…

Варианты ответа: 1) $(a = 0) \wedge (b = 0)$; 2) $(a = 0) \vee (b = 0)$; 3) $(a = 0) \vee (b \neq 0)$; 4) $(a \neq 0) \wedge (b = 0)$.

Задание 8 (1). Выберите один вариант ответа.

Укажите составное высказывание, построенное из высказываний A, B, и C, которое истинно тогда и только тогда, когда все данные высказывания истинны.

Варианты ответа: 1) $A \wedge B \wedge C$; 2) $(A \wedge B) \to C$; 3) $A \vee B \vee C$; 4) $(A \vee B) \to C$.

Задание 9 (1). Выберите один вариант ответа.

Укажите составное высказывание, построенное из высказываний A, B, и C, которое ложно тогда и только тогда, когда все данные высказывания ложны.

Варианты ответа: 1) $A \wedge B \wedge C$; 2) $(A \wedge B) \to C$; 3) $A \vee B \vee C$; 4) $(A \vee B) \to \text{C}$.

Задание 10 (2). Выберите один вариант ответа.

Условие истинности предложения «$\frac{a}{b} = 0$» (a, b — действительные числа) имеет вид…

Варианты ответа: 1) $(a = 0) \wedge (b \neq 0)$; 2) $(a \neq 0) \vee (b \neq 0)$; 3) $(a = 0) \to (b \neq 0)$; 4) $(a \neq 0) \wedge (b = 0)$.

Задание 11 (2). Выберите один вариант ответа.

Данное высказывание $S = (A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$ является…

Варианты ответа: 1) тождественно истинным; 2) тождественно ложным; 3) переменным.

Задание 12 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула $\phi = \bar{p} \to (\bar{p} \vee \bar{r})$ является…

Варианты ответа: 1) выполнимой (опровержимой); 2) тавтологией; 3) противоречием.

Задание 13 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула вида $((P \vee \neg Q) \to Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ является…

Варианты ответа: 1) выполнимой (опровержимой); 2) тавтологией; 3) противоречием.

Задание 14 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула вида $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$ является…

Варианты ответа: 1) выполнимой (опровержимой); 2) тавтологией; 3) противоречием.

Задание 15 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула вида $P \wedge (Q \wedge (\neg P \vee \neg Q))$ является…

Варианты ответа: 1) выполнимой (опровержимой); 2) тавтологией; 3) противоречием.

Задание 16 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула вида $((P \to Q) \to P) \to Q$ является…

Варианты ответа: 1) выполнимой (опровержимой); 2) тавтологией; 3) противоречием.

Задание 17 (2). Выберите один вариант ответа.

Укажите правильную таблицу истинности высказывания $p \wedge q \vee r$…

Варианты ответа:

1)

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \vee r$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

2)

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \vee r$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	0	1	1

3)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q \vee r$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	0	1	1

4)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q \vee r$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Задание 18 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Укажите, для каких высказываний их логическое значение не зависит от логического значения высказывания A.

Варианты ответа: 1) $A \wedge 0$; 2) $A \vee \neg A$; 3) $A \to 1$; 4) $A \vee 1$; 5) $A \wedge 1$; 6) $A \Leftrightarrow A$.

ЭЛЕМЕНТ 4.4. НЕОБХОДИМОСТЬ И ДОСТАТОЧНОСТЬ УСЛОВИЙ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

Если множество истинности высказывания A есть подмножество множества истинности высказывания B, то…

Варианты ответа: 1) из A следует B; 2) из B следует A; 3) ни одно высказывание не следует из другого.

Задание 2 (1). Выберите один вариант ответа.

Если высказывания A и B несовместимы, то…

Варианты ответа: 1) множество истинности A есть подмножество множества истинности высказывания B; 2) множество истинности A и B совпадают; 3) множество истинности A и B не пересекаются.

Задание 3 (1). Выберите один вариант ответа.

Если высказывания A и B несовместимы, то…

Варианты ответа: 1) из A следует B; 2) из B следует A; 3) ни одно высказывание не следует из другого.

Задание 4 (2). Выберите один вариант ответа.

Высказывание «A только, если B» означает…

Варианты ответа: 1) A достаточно для B; 2) A необходимо для B; 3) A необходимо и достаточно для B.

Задание 5 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Обозначим утверждение «четырехугольник является ромбом» через A, утверждение «диагонали четырехугольника перпендикулярны» через B. Тогда в теореме «диагонали ромба перпендикулярны» условие…

Варианты ответа: 1) A достаточно для B; 2) B необходимо для A; 3) B достаточно для A; 4) A необходимо для B.

Задание 6 (2). Выберите один вариант ответа.

Необходимым и достаточным условием делимости натурального числа N на 60 является его делимость…

Варианты ответа: 1) на 2, на 10 и на 3; 2) на 6 и на 10; 3) на 3, на 4 и на 5; 4) на 2 и на 30.

Задание 7 (2). Выберите один вариант ответа.

Теорема: «Дифференцируемость функции есть ее достаточное условие ее непрерывности» в форме устного суждения «Если…, то…» имеет вид…

Варианты ответа:

1) если функция непрерывна, то она дифференцируема;

2) если функция дифференцируема, то она непрерывна;

3) истинны оба высказывания;

4) все предыдущие высказывания ложны.

Задание 8 (2). Выберите один вариант ответа.

Теорема: «Для сходящегося ряда выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$» в форме устного суждения «Если…, то…» имеет вид…

Варианты ответа:

1) если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится;

2) если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

3) истинны оба высказывания;

4) все предыдущие высказывания ложны.

Задание 9 (2). Выберите один вариант ответа.

Дизъюнкция импликации и ее двойной импликации равносильна…

Варианты ответа: 1) контрапозиции; 2) конверсии контрапозиции; 3) двойной импликации.

Задание 10 (2). Выберите один вариант ответа.

Теорема: «Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$» после применения теоремы контрапозиции эквивалентна высказыванию…

Варианты ответа:

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

2) если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится;

3) если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд не сходится;

4) для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Задание 11 (2). Выберите один вариант ответа.

Теорема: «Если функция дифференцируема, то она непрерывна» после применения теоремы контрапозиции эквивалентна высказыванию…

Варианты ответа:

1) если функция разрывна, то она не дифференцируема;
2) если функция непрерывна, то она дифференцируема;
3) если функция не дифференцируема, то она непрерывна;
4) правильный ответ не указан.

ЭЛЕМЕНТ 4.5. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

Константа, которая в алгебре логики обозначается «1», называется…

Варианты ответа: 1) ложь; 2) правда; 3) истина; 4) неправда.

Задание 2 (1). Выберите один вариант ответа.

Функция вида $f = x_2 \to x_1$ называется…

Варианты ответа: 1) импликацией; 2) конверсией; 3) контрапозицией; 4) конверсией контрапозиции.

Задание 3 (2). Выберите один вариант ответа.

Булевой функции $f(x_1, x_2)$: $f(1, 0) = 1$ соответствует формула…

Варианты ответа: 1) $x_1 \to x_2$; 2) $x_1 \vee x_2$; 3) $x_1 \wedge x_2$; 4) $x_1 \Leftrightarrow x_2$.

Задание 4 (2). Выберите один вариант ответа.

Из указанных функций f_1, f_2 и f_3 (табл. 11) логической формуле $s = x_1 \to (x_2 \wedge x_3)$ соответствует функция…

Таблица 11

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Варианты ответа: 1) f_1; 2) f_2; 3) f_3; 4) другая функция.

Задание 5 (2). Выберите один вариант ответа.

Из указанных функций f_1, f_2 и f_3 (табл. 12) логической формуле $s = (x_1 \wedge x_2) \to x_3$ соответствует функция...

Таблица 12

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Варианты ответа: 1) f_1; 2) f_2; 3) f_3; 4) другая функция.

Задание 6 (2). Выберите один вариант ответа.

Значение логического выражения $(1 \to 1) \wedge (1 \vee 0)$ равно...

Варианты ответа: 1) 1; 2) 0; 3) 10; 4) 2.

Задание 7 (2). Выберите один вариант ответа.

Значение логического выражения $(1 \vee 1) \wedge (0 \vee \neg 0)$ равно...

Варианты ответа: 1) 0; 2) 1; 3) 10; 4) 2.

Задание 8 (2). Выберите один вариант ответа.

Значение логического выражения $(1 \wedge 1) \wedge (0 \vee \neg 1)$ равно...

Варианты ответа: 1) 0; 2) 1; 3) 10; 4) 2.

ЭЛЕМЕНТ 4.6. СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

Двойное отрицание логической переменной есть...

Варианты ответа: 1) 1; 2) 0; 3) исходная переменная; 4) обратная переменная.

Задание 2 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Равносильными выражениями являются...

Варианты ответа: 1) $x \wedge x$ и x; 2) $x \wedge (y \vee z)$ и $x \wedge y \vee x \wedge z$; 3) $x \wedge \neg x$ и 0; 4) $x \wedge (y \vee z) = x \wedge y \vee z$.

Задание 3 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Равносильными выражениями являются...

Варианты ответа: 1) $P \vee P$ и P; 2) $P \vee \neg P$ и 1; 3) $P \vee \neg P$ и 0; 4) $P \wedge P$ и P; 5) $P \wedge \neg P$ и 0; 6) $P \wedge \neg P$ и 1.

Задание 4 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула $X \to (Y \wedge Z)$ эквивалента формуле…

Варианты ответа: 1)$X \wedge (Y \to Z)$; 2)$(X \to Y) \wedge (X \to Z)$; 3) $(X \to Y) \vee (X \to Z)$; 4) $Y \wedge (X \to Z)$.

Задание 5 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула $X \to (X \vee Y)$ эквивалентна формуле…

Варианты ответа: 1) $X \wedge Y$; 2) $X \to X$; 3) $\bar{X} \vee Y$; 4) $\bar{X} \to \bar{Y}$.

Задание 6 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула $X \vee (Y \to Z)$ эквивалентна формуле…

Варианты ответа: 1) $X \to (Y \vee Z)$; 2) $(X \to Y) \vee (X \to Z)$; 3) $(X \vee Y) \to (X \vee Z)$; 4) $(X \to Y) \vee (Y \to Z)$.

Задание 7 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула $(X \to Y) \vee Z$ эквивалентна формуле…

Варианты ответа: 1) $X \vee (Y \to Z)$; 2) $(X \to Y) \vee (X \to Z)$; 3) $(X \to Y) \vee (Y \to Z)$; 4) $(X \vee Z) \to (Y \vee Z)$.

Задание 8 (2). Выберите ответы согласно тексту задания.

Установите соответствие между формулой логического высказывания и результатом ее упрощения.

1) $(A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B})$;

2) $(\overline{(A \vee B)} \vee A) \wedge B$;

3) $\overline{(A \wedge B)}$.

a) $\bar{A} \vee \bar{B}$;

b) $\bar{A} \wedge \bar{B}$;

c) B;

d) A;

e) $A \wedge B$.

Задание 9 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула вида $P \to (P \wedge Q)$ равносильна формуле…

Варианты ответа: 1) $P \to Q$; 2) $Q \to P$; 3) $(P \to Q) \vee P$; 4) $(P \to Q) \wedge Q$.

Задание 10 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула вида $P \to (Q \wedge R)$ равносильна формуле…

Варианты ответа: 1) $(P \to Q) \wedge (P \to R)$; 2) $(P \to Q) \vee R$; 3) $(P \to Q) \vee (P \to R)$; 4) $(P \to Q) \wedge R$.

ЭЛЕМЕНТ 4.7. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

Булевой функции $f(x, y)$: $f(1, 1) = 1$ соответствует конъюнктивный одночлен вида…

Варианты ответа: 1) $x \wedge \neg y$; 2) $x \wedge y$; 3) $\neg x \wedge \neg y$; 4) $\neg x \wedge y$.

Задание 2 (2). Выберите один вариант ответа

Булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$: $f(1, 1, 1) = 0$ соответствует дизъюнктивный одночлен вида…

Варианты ответа: 1) $x_1 \vee x_2 \vee x_3$; 2) $\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3$; 3) $x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$; 4) $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$.

Задание 3 (2). Выберите один вариант ответа.

Булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$: $f(0, 1, 1) =1$ соответствует конъюнктивный одночлен вида…

Варианты ответа: 1) $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$; 2) $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$; 3) $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3$; 4) $\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3$.

Задание 4 (1). Выберите один вариант ответа.

Тождественно истинная формула алгебры высказываний СКНФ…

Варианты ответа: 1) имеет; 2) не имеет; 3) имеет, но не всегда.

Задание 5 (1). Выберите один вариант ответа.

Невыполнимая формула алгебры высказываний СДНФ…

Варианты ответа: 1) имеет; 2) не имеет; 3) имеет, но не всегда.

Задание 6 (1). Выберите один вариант ответа.

Для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, принимающей значение «0» на всех наборах значений переменных x_1, x_2, x_3, можно построить…

Варианты ответа: 1) СДНФ; 2) СКНФ; 3) нельзя построить ни одной СНФ.

Задание 7 (2). Выберите один вариант ответа.

Для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, принимающей на всех наборах значений переменных значение «1», СДНФ имеет _______ слагаемых.

Варианты ответа: 1) 2; 2) 4; 3) 8; 4) 0.

Задание 8 (2). Выберите один вариант ответа.

Для функции $f(x_1, x_2, x_3) : f(1, 1, 1) = f(1, 0, 1) = 0$, СКНФ имеет _______ сомножителей.

Варианты ответа: 1) 2; 2) 4; 3) 8; 4) 0.

Задание 9 (2). Выберите один вариант ответа.

Если СДНФ формулы $f(x_1, x_2, x_3)$ содержит 3 слагаемых, то СКНФ содержит _________ сомножителей.

Варианты ответа: 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 0.

Задание 10 (2). Выберите один вариант ответа.

Максимальное число слагаемых СДНФ для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принимающей значение «1» на всех наборах значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равно...

Варианты ответа: 1) n; 2) 2^n; 3) $2n$; 4) n^n.

Задание 11 (2). Выберите один вариант ответа.

Максимальное число слагаемых СКНФ невыполнимой формулы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равно...

Варианты ответа: 1) n; 2) 2^n; 3) $2n$; 4) n^n.

Задание 12 (2). Выберите один вариант ответа.

Функция $f(x_1, x_2, x_3)$, заданная указанной таблицей истинности (табл. 13), имеет СДНФ вида...

Таблица 13

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Варианты ответа:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$;

2) $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;

3) $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$;

4) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3})$.

Задание 13 (2). Выберите один вариант ответа.

Функция $f(x_1, x_2, x_3)$, заданная указанной таблицей истинности (табл. 14), имеет СКНФ вида…

Таблица 14

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Варианты ответа:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$;

2) $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;

3) $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$;

4) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3})$.

Задание 14 (2). Выберите один вариант ответа.

Для функции $f(x_1, x_2, x_3)$: $f(1, 1, 1) = f(1, 0, 1) = f(0, 1, 1) = 0$ СКНФ имеет вид…

Варианты ответа:

1) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$;

2) $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$;

3) $(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \wedge (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3})$;

4) $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3)$.

Задание 15 (2). Выберите один вариант ответа.

Для функции $f(x_1, x_2, x_3)$: $f(1, 1, 1) = f(1, 0, 1) = f(0, 1, 1) = 1$, СДНФ имеет вид…

Варианты ответа:

1) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$;

2) $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$;

3) $(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3})$;

4) $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3)$.

ЭЛЕМЕНТ 4.8. ПРИЛОЖЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫХ СХЕМ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

В теории релейно-контактных схем задача анализа состоит…

Варианты ответа:

1) в построении схемы с наперед заданными условиями работы;

2) в изучении характера работы схемы.

Задание 2 (1). Выберите один вариант ответа.

Параллельному соединению контактов x и y соответствует булева функция вида…

Варианты ответа: 1) $f(x, y) = x \wedge y$; 2) $f(x, y) = x \vee y$; 3) $f(x, y) = x \to y$; 4) $f(x, y) = x \Leftrightarrow y$.

Задание 3 (1). Выберите один вариант ответа.

При параллельном соединении контактов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ условия работы π-схемы имеют вид…

Варианты ответа:

1) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, \text{ если } x_1 = \ldots = x_n = 1; \\ 0 \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$

2) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_1 = \ldots = x_n = 0; \\ 1 \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$

3) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$;

4) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Задание 4 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Анализ работы релейно-контактной схемы (рис. 46) можно провести к булевой функции вида…

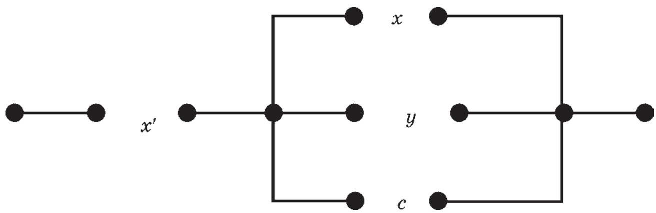


Рис. 46

Варианты ответа:
1) $f(x, y, c) = \bar{x}(x \vee y \vee c)$; 2) $f(x,y,c) = \bar{x} \vee (x \wedge y \wedge c)$;
3) $f(x, y, c) = \bar{x} \wedge x \vee y \vee c$; 4) $f(x, y, c) = (y \vee c)\bar{x}$.

Задание 5 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Анализ работы релейно-контактной схемы (рис. 47) можно провести к булевой функции вида…

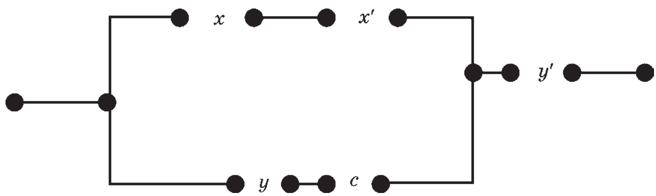


Рис. 47

Варианты ответа: 1) 0; 2) 1; 3) $\bar{y} \wedge c \wedge y$; 4) $\bar{y} \vee c \vee y$.

Задание 6 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Анализ работы релейно-контактной схемы (рис. 48) можно провести к булевой функции вида…

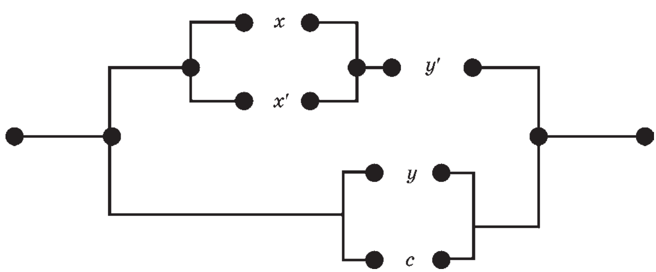


Рис. 48

Варианты ответа: 1) 0; 2) 1; 3) $\bar{y} \wedge c \wedge y$; 4) $\bar{y} \vee c \vee y$.

Задание 7 (2). Выберите один вариант ответа.

При заданных условиях работы $f(0, 1) = f(1, 1) = 1$ минимизированная π-схема имеет _____ контактов.

Варианты ответа: 1) 2; 2) 1; 3) 0.

Задание 8 (2). Выберите один вариант ответа.

Две релейно-контактные схемы, соответствующие одной и той же функции проводимости, могут иметь ______ число реле.

Варианты ответа: 1) только одинаковое; 2) как одинаковое, так и различное.

Задание 9 (2). Выберите один вариант ответа.

Если π-схеме соответствует булева функция вида $f(x, y) = [(x \vee \bar{x}) \wedge y] \vee [y \vee \bar{y}]$, то минимизированная схема будет иметь _____ контактов.

Варианты ответа: 1) 2; 2) 1; 3) 0.

Задание 10 (2). Выберите один вариант ответа.

При заданных условиях работы $f(0, 1, 0) = (0, 1, 1) = f(1, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 1$ упрощенная π-схема будет иметь _____ контактов.

Варианты ответа: 1) 2; 2) 1; 3) 0.

Задание 11 (2). Выберите один вариант ответа.

При заданных условиях работы $f(0, 1, 0) = f(0, 1, 1) = f(1, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 0$.

упрощенная π-схема будет иметь _____ контактов.

Варианты ответа: 1) 2; 2) 1; 3) 0.

ЭЛЕМЕНТ 4.9. АЛГЕБРА ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Задание 1 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Предикатами являются следующие выражения...

Варианты ответа: 1) «x делится на 5» ($x \in N$; 2) «$\mathrm{ctg}\, 45° = 1$»; 3) «$x^2 + x - 6 = 0$» ($x \in R$); 4) «Для всех вещественных чисел x выполняется равенство $x^2 + x - 6 = 0$».

Задание 2 (1). Выберите несколько вариантов ответа.

Предикатами являются следующие выражения...

Варианты ответа: 1) «$\mathrm{tg}\, 45° = 1$»; 2) «Река x впадает в озеро Байкал» (x пробегает множество названий всевозможных рек); 3) «$x^2 + x - 6$» ($x \in R$); 4) «x есть брат y» (x и y пробегают множество людей).

Задание 3 (1). Выберите один вариант ответа.

Если $S(x)$ — предикат, определенный на множестве M, то высказывание «Для всех x из M $S(x)$ истинно» обозначается…

Варианты ответа: 1) $\exists S(x)$; 2) $\forall xS(x)$; 3) $\neg\forall xS(x)$; 4) $\neg\exists xS(x)$.

Задание 4 (1). Выберите один вариант ответа.

Если $S(x)$ — предикат, определенный на множестве M, то высказывание «Существует такой x из M, что $S(x)$ — ложно» обозначается…

Варианты ответа: 1) $\exists xS(x)$; 2) $\forall xS(x)$; 3) $\neg\forall xS(x)$; 4) $\neg\exists xS(x)$.

Задание 5 (2). Выберите ответы согласно тексту задания.

Установите соответствие между высказываниями и различными вариантами навешивания кванторов на предикат $S(x, y)$, описывающий отношение «x любит y»:

1) всякий человек кого-нибудь любит;

2) существует такой человек y, что его любят все x;

3) каждого человека кто-то любит;

4) существует человек, который любит всех людей.

a) $\forall x\exists yS(x, y)$;

b) $\exists y\forall xS(x, y)$;

c) $\forall y\exists xS(x, y)$;

d) $\exists x\forall yS(x, y)$.

Задание 6 (2). Выберите один вариант ответа.

Если x — студент группы, $S(x)$ — студент, не сдавший экзамен, то высказывание $\neg\exists xS$ равносильно высказыванию…

Варианты ответа:

1) не все студенты группы сдали экзамен;

2) все студенты группы сдали экзамен;

3) существуют студенты группы, не сдавшие экзамен;

4) некоторые студенты группы сдали экзамен.

Задание 7 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Пусть переменные предикатов x и y пробегают множество действительных чисел. Тогда истинными предикатами являются…

Варианты ответа: 1) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 7)$; 2) $(\exists x)(\forall y)(x + y = 7)$; 3) $(\exists y)(\forall x)(x + y = 7)$; 4) $(\forall x)(\forall y)(x + y = 7)$.

Задание 8 (2). Выберите ответы согласно тексту задания.

Установите соответствие между областью определения M предиката $S(x)$: «$(x-1)(x+2)(x-\sqrt{2})=0$» и его множеством истинности.

1) M — множество натуральных чисел;

2) M — множество целых чисел;

3) M — множество действительных чисел.

a) $\{1, -2, \sqrt{2}\}$;

b) $\{1; -2\}$;

c) $\{1\}$.

Задание 9 (2). Выберите один вариант ответа.

Предикаты «$x^2 = 1$» и «$(x-1)(x+\sqrt{2})(x-1,5)(x+1)=0$» равносильны на множестве…

Варианты ответа: 1) натуральных чисел; 2) целых чисел; 3) рациональных чисел; 4) действительных чисел.

Задание 10 (2). Выберите несколько вариантов ответа.

Предикат «$(x-1)(x+\sqrt{2})(x-1,5)(x+1)=0$» является следствием предиката «$x^2 = 1$» на множестве…

Варианты ответа: 1) натуральных чисел; 2) целых чисел; 3) рациональных чисел; 4) действительных чисел.

Задание 11 (2). Выберите один вариант ответа.

Трехместный предикат произведения $\forall x \Pi(x, y, x)$ на множестве натуральных чисел является…

Варианты ответа: 1) тождественно истинным; 2) тождественно ложным; 3) выполнимым.

Задание 12 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула логики предикатов $(\forall x)(S(x) \wedge \neg S(x))$, определенная на множестве натуральных чисел, где $S(x)$: «x — четное число», является…

Варианты ответа: 1) выполнимой; 2) опровержимой; 3) тавтологией.

Задание 13 (2). Выберите один вариант ответа.

Если $H(x)$ — «x — человек» [human (*англ.*) — человек], $W(x)$ — «x — женщина» [woman (*англ.*) — женщина], то суждению «Все женщины люди» соответствует предикатная формула вида…

Варианты ответа: 1) $(\exists x)(W(x) \to H(x))$;
2) $(\forall x)(W(x) \to H(x))$; 3) $(\forall x)(H(x) \to W(x))$.

Задание 14 (2). Выберите один вариант ответа.

Если $H(x)$ — «x — человек» [human (*англ.*) — человек], $Q(x)$«x — четвероногое» [quadruped (*англ.*) — четвероногий], то суждению «Ни один человек не является четвероногим» соответствует предикатная формула вида...

Варианты ответа:

1) $(\forall x)(W(x) \to \bar{Q}(x))$; 2) $(\exists x)(W(x) \to \bar{Q}(x))$; 3) $(\forall x)(\overline{Q(x)} \to$ $\to W(x))$.

Задание 15 (2). Выберите один вариант ответа.

Пусть $C(x)$ = «x — член комитета», $W(x)$ = «x — богат», $R(x)$ = «x — республиканец», $O(x)$ = «x — старик». Тогда суждению «Каждый член комитета — богат и республиканец. Некоторые члены комитета — старики. Следовательно, существуют старики — республиканцы» соответствует клауза вида...

Варианты ответа:

1) $(\forall x)(C(x) \to W(x)\ \&\ R(x))$; $(\exists x)(C(x)\&O(x)) \models (\exists x)(O(x)\ \&\ R(x))$;

2) $(\exists x)(C(x) \to W(x)\ \&\ R(x))$; $(\forall x)(C(x)\ \&\ O(x)) \models (\exists x)(O(x)\ \&\ R(x))$;

3) $(\forall x)(C(x) \to W(x)\ \&\ R(x))$; $(\exists x)(C(x)\ \&\ O(x)) \models (\exists x)(O(x)\ \&\ R(x))$.

ЭЛЕМЕНТ 4.10. ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Задание 1 (1). Выберите один вариант ответа.

Если $S(x)$ — дифференцируемая функция, то высказывание $\neg\forall x S(x)$ равносильно высказыванию...

Варианты ответа:

1) существует недифференцируемая функция;

2) все функции недифференцируемы;

3) любая функция дифференцируема;

4) существует дифференцируемая функция.

Задание 2 (1). Выберите один вариант ответа.

Если $S(x)$ — ограниченная последовательность, то высказывание $\neg\forall x S(x)$ равносильно высказыванию...

Варианты ответа:

1) любая последовательность ограничена;

2) все последовательности ограничены;

3) существует неограниченная последовательность;

4) существует ограниченная последовательность.

Задание 3 (2). Выберите ответы согласно тексту задания.

Пусть $Q(x)$ означает «x — рациональное число», $R(x)$ — «x — действительное число». Установите соответствия между высказываниями и их предикатами:

1) все рациональные числа действительные;

2) ни одно рациональное число не является действительным;

3) некоторые рациональные числа действительные;

4) некоторые рациональные числа не являются действительными.

a) $(\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$;

b) $(\forall x)(Q(x) \to \neg R(x))$;

c) $(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$;

d) $(\forall x)(Q(x) \to R(x))$.

Задание 4 (2). Выберите один вариант ответа.

Формула логики предикатов, выражающая транзитивное свойство делимости целых чисел, имеет вид...

Варианты ответа: 1) $(S(x, y) \wedge S(y, z)) \to S(z, x)$; 2) $(S(x, y) \vee S(y, z)) \to S(x, z)$; 3) $(S(x, y) \wedge S(z, y)) \to S(z, x)$; 4) $(S(x, y) \vee S(z, y)) \to S(y, z)$.

Задание 5 (2). Выберите один вариант ответа.

Верным определением бесконечно большой функции на языке логики предикатов является...

Варианты ответа:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \exists M > 0 \forall \delta > 0 \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)| > M$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \exists M > 0 \forall \delta > 0 \forall x \neq x_0 : |x - x_0 > \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)| < M$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \neq x_0 : |x - x_0| > \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)| < M$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \neq x_0 : |x - x_0 < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)| > M$.

Задание 6 (2). Выберите один вариант ответа.

Верным определением предела функции в точке на языке логики предикатов является…

Варианты ответа:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists\delta(\varepsilon) > 0\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0\forall\delta(\varepsilon) > 0\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists\delta(\varepsilon) > 0\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - A| < \delta;$

4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0\forall\delta(\varepsilon) > 0\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - A| > \varepsilon.$

Задание 7 (2). Выберите один вариант ответа.

Верным определением предела функции на бесконечности на языке логики предикатов является…

Варианты ответа:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0\forall M > 0\forall x : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists M > 0\forall x : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists M > 0\forall x : |x| < M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0\forall M > 0\exists x : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

Задание 8 (2). Выберите один вариант ответа.

Верным определением бесконечно малой функции на языке логики предикатов является…

Варианты ответа:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists\delta(\varepsilon) > 0\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)| < \varepsilon;$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0\forall\delta(\varepsilon) > 0\exists x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)| < \varepsilon;$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0 \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)| < \delta$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0 \forall\delta(\varepsilon) > 0 \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Задание 9 (2). Выберите один вариант ответа.

Пусть $E(x)$ означает «x — четное число», $D(x, y)$ — «x делит y». Тогда высказывание «Всякое натуральное число, делящееся на четное число, само будет четным» на языке логики предикатов будет иметь вид...

Варианты ответа:

1) $(\forall y)(E(y) \to (\forall x)(D(x, y) \to E(x)))$;
2) $(\forall x)(E(x) \to (\forall y)(D(x, y) \to E(y)))$;
3) $(\exists x)(E(x) \to (\forall y)(D(x, y) \to E(y)))$;
4) $(\exists x)(E(x) \to (\exists y)(D(x, y) \to E(y)))$.

Задание 10 (2). Выберите один вариант ответа.

Верным определением функции, не являющейся непрерывной на отрезке, на языке логики предикатов вляется...

Варианты ответа:

1) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in M)(|x_1 - x_2| < \delta \to$
$\to |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$;
2) $(\exists\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in M)(|x_1 - x_2| < \delta \wedge$
$\wedge |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$;
3) $(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x_1, x_2 \in M)(|x_1 - x_2| < \delta \wedge$
$\wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon)$;
4) $(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x_1, x_2 \in M)(|x_1 - x_2| < \delta \to$
$\to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$.

Задание 11 (2). Выберите ответы согласно тексту задания.

Установите соответствия между высказываниями и их записью на языке логики предикатов:

1) существует не более одного x такого, что $P(x)$;
2) существует точно один x такой, что $P(x)$;
3) существует не более двух x таких, что $P(x)$;
4) существует по меньшей мере два различных x таких, что $P(x)$.

a) $(\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge P(y)) \to x = y)$;

b) $(\exists x)(P(x)) \wedge (\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge P(y)) \to (x = y))$;

c) $(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge P(y) \wedge (x \neq y))$.

Задание 12 (2). Выберите один вариант ответа.

Умозаключение: «Некоторые врачи умные. Все умные люди поэты. Значит, некоторые врачи — поэты» является…

Варианты ответа: 1) верным; 2) ложным.

Задание 13 (2). Выберите один вариант ответа.

Умозаключение: «Некоторые гуси — мужчины. Некоторые мужчины играют в гольф. Значит, некоторые гуси играют в гольф» является…

Варианты ответа: 1) верным; 2) ложным.

Задание 14 (2). Выберите один вариант ответа.

Умозаключение: «Все политики — лицедеи. Некоторые лицедеи — лицемерны. Значит, все политики — лицемерны» является…

Варианты ответа: 1) верным; 2) ложным.

ГЛАВА 4 ОТВЕТЫ К ТЕСТОВЫМ ЗАДАНИЯМ

4.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ЭЛЕМЕНТ 1.1. МНОЖЕСТВА: ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. 1. **2.** 3. **3.** 1. **4.** 1) — *e*); 2) — *a*); 3) — *c*); 4) — *b*). **5.** 2. **6.** *c*. **7.** *b*. **8.** *c*.

ЭЛЕМЕНТ 1.2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1. 2. **2.** 1. **3.** 2. **4.** 1. **5.** 3. **6.** 2. **7.** 2, 3. **8.** 2, 4. **9.** 4. **10.** 1. **11.** 1) — *e*); 2) — *a*); 3) — *b*); 4) — *c*). **12.** 3. **13.** 1. **14.** 2. **15.** 3. **16.** 4. **17.** 1.

ЭЛЕМЕНТ 1.3. ЗАКОНЫ ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1. 2. **2.** 3. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 3.

ЭЛЕМЕНТ 1.4. КОРТЕЖИ И ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

1. 3. **2.** 3. **3.** 4. **4.** 1) — *a*); 2) — *b*); 3) — *c*). **5.** 3.

ЭЛЕМЕНТ 1.5. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ: СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

1. 4. **2.** 2, 4, 5. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 1. **6.** 2, 4.

ЭЛЕМЕНТ 1.6. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ: СВОЙСТВА

1. 3, 4. **2.** 1, 3. **3.** 2, 3. **4.** 1, 2, 5. **5.** 2, 3. **6.** 1, 3. **7.** 2, 3. **8.** 2.

4.2. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

ЭЛЕМЕНТ 2.1. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

1. 1. **2.** 2. **3.** 1, 2. **4.** 2. **5.** 1. **6.** 1. **7.** 2. **8.** 4. **9.** 2. **10.** 1. **11.** 1. **12.** 2. **13.** 3. **14.** 4. **15.** 3.

4.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

ЭЛЕМЕНТ 3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

1. 1, 4, 3. **2.** 1, 2. **3.** 1, 2. **4.** 2. **5.** 1. **6.** 1) — *d*); 2) — *c*); 3) — *b*).

ЭЛЕМЕНТ 3.2. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

1. 4. **2.** *b*, *c*. **3.** 3. **4.** *c*. **5.** *b*. **6.** 1, 3. **7.** 1, 3. **8.** 3. **9.** 1.

ЭЛЕМЕНТ 3.3. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

1. 2. **2.** 3. **3.** 2. **4.** 4. **5.** 3. **6.** 1.

ЭЛЕМЕНТ 3.4. ВИДЫ И ТИПЫ ГРАФОВ

1. 2. **2.** 2, 4. **3.** 4. **4.** 3. **5.** 2. **6.** 1, 5. **7.** 2, 3, 6.

4.4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

ЭЛЕМЕНТ 4.1. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. 4. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 2, 4. **5.** 2, 4. **6.** 2. **7.** 2, 3. **8.** 3. **9.** 2. **10.** 1) — *b*); 2) — *a*); 3) — *c*).

ЭЛЕМЕНТ 4.2. ОПЕРАЦИИ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ

1. 3. **2.** 1. **3.** 2. **4.** 1. **5.** 2. **6.** 3. **7.** 2. **8.** 4. **9.** 1. **10.** 4. **11.** 3. **12.** 1. **13.** 1. **14.** 1. **15.** 2. **16.** 1. **17.** 2. **18.** 4. **19.** 1. **20.** 2.

ЭЛЕМЕНТ 4.3. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. 2. **2.** 1. **3.** 1) — *b*); 2) — *a*); 3) — *c*); 4) — *d*). **3.** 1. **4.** 1) — *b*); 2) — *a*); 3) — *d*); 4) — *c*). **5.** 1. **6.** 1. **7.** 1. **8.** 3. **9.** 4. **10.** 1. **11.** 2. **12.** 2. **13.** 1. **14.** 2. **15.** 3. **16.** 1. **17.** 2. **18.** 1, 2, 4.

ЭЛЕМЕНТ 4.4. НЕОБХОДИМОСТЬ И ДОСТАТОЧНОСТЬ УСЛОВИЙ

1. 2. **2.** 3. **3.** 3. **4.** 2. **5.** 1, 2. **6.** 3. **7.** 2. **8.** 2. **9.** 1. **10.** 3. **11.** 1.

ЭЛЕМЗЕНТ 4.5. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

1. 3. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 2. **6.** 1. **7.** 2. **8.** 1.

ЭЛЕМЕНТ 4.6. СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

1. 3. **2.** 1, 3. **3.** 1, 2, 4, 5. **4.** 2. **5.** 2. **6.** 3. **7.** 4. **8.** 1) — *d*); 2) — *e*); 3) — *a*). **9.** 1. **10.** 3.

ЭЛЕМЕНТ 4.7. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

1. 2. **2.** 4. **3.** 2. **4.** 2. **5.** 2. **6.** 2. **7.** 3. **8.** 1. **9.** 3. **10.** 2. **11.** 2. **12.** 3. **13.** 1. **14.** 2. **15.** 4.

ЭЛЕМЕНТ 4.8. ПРИЛОЖЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫХ СХЕМ

1. 2. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 1, 4. **5.** 1, 3. **6.** 2, 4. **7.** 2. **8.** 2. **9.** 3. **10.** 2. **11.** 2.

ЭЛЕМЕНТ 4.9. АЛГЕБРА ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

1. 1, 3. **2.** 2, 4. **3.** 2. **4.** 1. **5.** 1) — *a*); 2) — *b*); 3) — *c*); 4) — *d*. **6.** 2. **7.** 1, 2. **8.** 1) — *c*); 2) — *b*); 3) — *a*). **9.** 1. **10.** 3, 4. **11.** 3. **12.** 2. **13.** 2. **14.** 1. **15.** 1.

ЭЛЕМЕНТ 4.10. ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

1. 1. **2.** 3. **3.** 1) — *d*); 2) — *b*); 3) — *c*); 4) — *a*). **4.** 1. **5.** 4. **6.** 1. **7.** 2. **8.** 1. **9.** 2. **10.** 3. **11.** 1) — *a*); 2) — *b*); 4) — *c*). **12.** 1. **13.** 2. **14.** 2.

ГЛАВА 5 ТИПОВОЙ РАСЧЕТ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

5.1. ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Задание 1. Даны множества $B = \{a, c, d\}$; $A = \{a, b\}$; $C = \{b, c, d, e\}$. Найти: $B \cup C$, $A \cap B$, $A \backslash B$; $(A \cup B) \cap C$.

Решение.

1. $B \cup C = \{a, c, d\} \cup \{b, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$.
2. $B \cap A = \{a, c, d\} \cap \{a, b\} = \{a\}$.
3. $A \backslash B = \{a, b\} \backslash \{a, c, d\} = \{b\}$.
4. $A \cup B = \{a, b\} \cup \{a, c, d\} = \{a, b, c, d\}$; $(A \cup B) \cap C = \{a, b, c, d\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c, d\}$.

Задание 2. Доказать тождество: $A \backslash B = A \backslash C(A \cap B)$.

Решение. $A \backslash (A \cap B) = (A \backslash A) \cup (A \backslash B) = \varnothing \cup (A \backslash B) = A \backslash B$.

Задание 3. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «зеркало»?

Решение. В этом слове 4 согласные буквы и 3 гласные, поэтому число способов выбрать гласную букву — 4, согласную — 3. По правилу произведения число способов выбрать гласную и согласную букву равно $N = 4 \cdot 3 = 12$ способам.

Задание 4. В полуфинале первенства России по шахматам участвуют 20 шахматистов, а в финал попадают трое. Сколькими способами может образоваться финальная тройка?

Решение. Надо подсчитать число соединений, которые можно составить из 20 элементов по три элемента. Каждое соединение отличается от другого только составом (порядок элементов в каждой тройке не важен). Поэтому эти соединения являются сочетаниями, и их число равно

$$N = C_{20}^{3} = \frac{20!}{3!(30-3)!} = \frac{20!}{3!27!} \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140.$$

Задание 5. Множество A характеризует членов семьи: A = {Дед, Отец, Сын}. Для этого множества задано отношение T: «...быть родителем...». Построить граф и матрицу смежности для отношения T. Определить свойства T.

Решение. Имеем отношение T, состоящее из кортежей вида: $T = \{\langle Д, О\rangle; \langle О, С\rangle\}$.

Матрица бинарного отношения T имеет вид:

	Д	О	С
Д	0	1	0
О	0	0	1
С	0	0	0

Граф отношения T имеет вид (рис. 49)

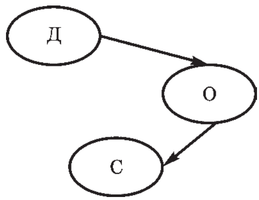


Рис. 49

Отношение T «...быть родителем...» антирефлексивно (отсутствие петель), антисимметрично, антитранзитивно.

Задание 6. Для графа, представленного следующей матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности и изобразите его графически.

Решение. Данная матрица смежности имеет четыре строки и четыре столбца, следовательно, в орграфе четыре вершины *1*, *2*, *3*, *4*. Зададим граф списком дуг: $U = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$.

Строим орграф (рис. 50):

Рис. 50

Для построенного орграфа запишем матрицу инцидентности, элементы которой будем находить по правилу:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если дуга } u_j \text{ исходит из вершины } a_i; \\ -1, \text{ если дуга } u_j \text{ заходит в вершину } a_i; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

	(1, 2)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 1)	(4, 2)
1	1	0	0	–1	0
2	–1	1	0	0	–1
3	0	0	1	0	0
4	0	–1	–1	1	1

Задание 7. Представить высказывание: «Для выхода на российский или мировой рынок фирме необходимо расширить ассортимент продукции и повысить ее качество» в виде логической формулы.

Решение. Пусть A — «Выход на российский рынок», B — «Выход на мировой рынок», C — «Расширение ассортимента продукции», D — «Повышение качества продукции». Так как высказывания C и D есть необходимые условия для A или B, то имеем формулу: $(A \vee B) \to (C \wedge D)$.

Задание 8. Доказать или опровергнуть данную клаузу, используя анализ таблицы истинности: $A \vee B$, $A \to C$, $B \to D \models C \vee D$.

Решение. Составим таблицу истинности для клаузы (табл. 15).

Таблица 15

A	B	C	D	$A \vee B$	$A \to C$	$B \to D$	$C \vee D$
0 0	0 0	0 0	0 1	0 0	1 1	1 1	0 1
0 0	0 0	1 1	0 1	0 0	1 1	1 1	1 1
0 0	1 1	0 0	0 1	1 (1	1 1	0 1)	0 1←
0 0	1 1	1 1	0 1	1 (1	1 1	0 1)	1 1←
1 1	0 0	0 0	0 1	1 1	0 0	1 1	0 1
1 1	0 0	1 1	0 1	(1 (1	1 1	1) 1)	1← 1←
1 1	1 1	0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	0 1
1 1	1 1	1 1	0 1	1 (1	1 1	0 1)	1 1←

Допущения равны 1 на пяти наборах. Формула $C \vee D$ ни на одном из них не равна 0. Логическое следствие верно.

Задание 9. Для заданной булевой функции трех переменных $(x \wedge y) \vee z$ построить таблицу истинности, записать функцию в СДНФ и СКНФ.

Решение. Восстановим по исходной формуле $(x \wedge y) \vee z$ ее таблицу истинности (табл. 16).

Таблица 16

x	y	z	$x \wedge y$	$f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee z$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Выпишем элементарные конъюнкции для всех единичных наборов и элементарные дизъюнкции для всех нулевых наборов переменных x, y, z (табл. 17).

Таблица 17

x	y	z	$f(x, y, z)$	Элементарные конъюнкции	Элементарные дизъюнкции
0	0	0	0		$x \vee y \vee z$
0	0	1	1	$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z$	
0	1	0	0		$x \vee \bar{y} \vee z$
0	1	1	1	$\bar{x} \wedge y \wedge z$	
1	0	0	0		$\bar{x} \vee y \vee z$
1	0	1	1	$x \wedge \bar{y} \wedge z$	
1	1	0	1	$x \wedge y \wedge \bar{z}$	
1	1	1	1	$x \wedge y \wedge z$	

Для получения СДНФ объединим элементарные конъюнкции знаком дизъюнкции, а для получения СКНФ — элементарные дизъюнкции знаком конъюнкции.

СДНФ: $(x \wedge y) \vee z = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$.

СКНФ: $(x \wedge y) \vee z = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)$.

Задание 10. Провести анализ работы π-схемы (рис. 51) и ее минимизировать.

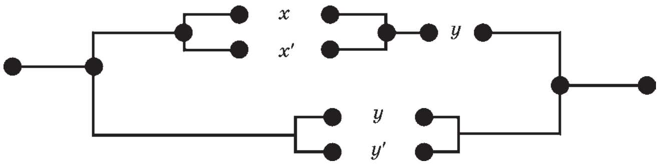


Рис. 51

Решение. Используя соответствия между правилами соединения контактов реле и булевыми операциями, получим формулу $f(x, y) = [(x \vee \overline{x})y] \vee [y \vee \overline{y}]$.

Упростим булеву функцию: $f(x, y) = [1 \wedge y] \vee 1 = y \vee 1 = 1$.

Упрощенная схема не будет содержать ни одного контакта.

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 0, 1) = f(0, 1, 1) = f(1, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 1$.

Решение. Выпишем СДНФ по заданным условиям работы π-схемы: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

Минимизируем функцию проводимости, сгруппировав 1 и 2, 3 и 4 элементарные конъюнкции и применив закон склеивания.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_3 (\overline{x_2} \vee x_2) \vee x_1 x_2 (\overline{x_3} \vee x_3) = \overline{x_1} x_3 \vee x_1 x_2.$$

По полученной булевой функции вычерчиваем требуемую π-схему (рис. 52).

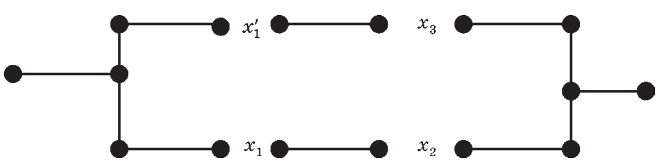


Рис. 52

Задание 12. Пусть $P(x, y)$ — «x делит y», $x, y \in N$. Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

Решение. Формула $(\forall x)P(x, y)$ задает одноместный предикат — «Всякое натуральное число делит y», который будет ложным, так как какое бы значение y из области определения не подставлять в эту формулу, всегда получится ложь.

Формула $(\exists y)P(x, y)$ представляет собой функцию переменной x — «Существует число, которое делится на x». Предикат истинный для всякого натурального x.

Формула $(\exists x)(\exists y)P(x, y)$ представляет собой высказывание: «Существуют такие натуральные числа, что одно из них делит другое» — истина.

Формула $(\exists x)(\forall y)P(x, y)$ представляет собой высказывание: «Существует натуральное число, которое делит всякое натуральное число» — истина (1 делит все натуральные числа).

Формула $(\forall x)(\forall y)P(x, y)$ представляет собой высказывание: «Всякое натуральное число делит все остальные натуральные числа» — ложь.

Формула $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$ представляет собой высказывание: «У всякого натурального числа есть делители» — истина (простое число делится на 1 и само на себя). Если предложение $P(x, y)$ сформулировать в виде: «x делит y и $x \neq y$, $x \neq 1$», то высказывание $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$ становится ложным.

Задание 13. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Все поэты счастливы. Некоторые поэты ленивы. Значит, некоторые ленивые люди счастливы.

Решение. Пусть A — множество поэтов, B — множество счастливых людей, C — множество ленивых людей, универсум — множество всех людей.

Дано: $A \subseteq B$; $AC \neq \varnothing$. Верно ли, что $BC \neq \varnothing$?

Из диаграмм Эйлера — Венна следует, что непустое пересечение AC принадлежит множеству B, поэтому BC заведомо непустое множество (рис. 53).

Итак, $A \subseteq B$; $AC \neq \varnothing \Rightarrow$ $\Rightarrow BC \neq \varnothing$, заключение верно.

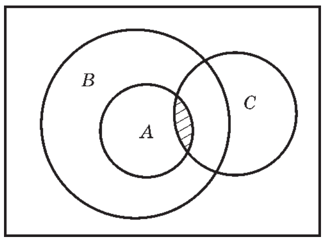


Рис. 53

На языке исчисления предикатов: если верно, что $(\forall x)(A(x) \to B(x))$ и $(\exists x)(A(x)\ \&\ C(x))$, то верно также, что $(\exists x)(B(x)\ \&\ C(x))$.

5.2. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО РАЗДЕЛУ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

ВАРИАНТ 1

Задание 1. Даны множества $A = \{a, b, d, e, f, k\}$; $B = \{a, b, e, f\}$; $C = \{b, e, f, h\}$. Найти $A \bigcup B$; $B \bigcup C$; $A \bigcap B$; $A \backslash B$; $(A \bigcup B) \bigcap C$.

Задание 2. Доказать тождество: $A \backslash (B \bigcup C) = (A \backslash B) \bigcap (A \backslash C)$.

Задание 3. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти различных оттенков?

Задание 4. Сколькими способами можно построить в одну шеренгу игроков двух футбольных команд так, чтобы при этом два футболиста одной команды не стояли рядом?

Задание 5. Дано множество чисел $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Для этого множества задано отношение T: $(a, b) \in T$, где b делится без остатка на a. Построить граф для отношения T. Построить матрицу смежности для отношения T. Определить свойства T.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Если допоздна работаешь с компьютером и при этом пьешь много кофе, то утром просыпаешься в дурном расположении духа или с головной болью».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $C, (A \to B) \to (C \to A) \models$ A.

Задание 9. Для булевой функции $(x \vee \bar{y}) \to (\bar{z} \oplus \bar{x})$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ работы π-схемы (рис. 54).

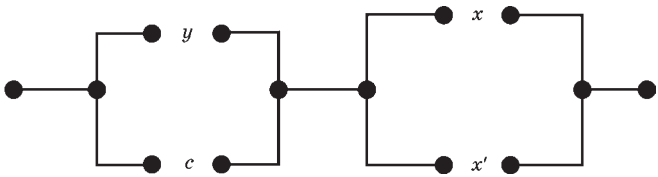


Рис. 54

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 0, 1) = f(0, 1, 1) = f(1, 1, 0) = f(0, 0, 0) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Ни одно животное не бессмертно. Кошки — животные. Значит, некоторые кошки не бессмертны.

Задание 13. Пусть предметная область $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $Q(x, у)$ = «x делится на y». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 2

Задание 1. Пусть М — множество рабочих завода. Подмножества: К — квалифицированные рабочие; В — ветераны завода; С — рабочие со средним образованием; Н — рабочие с неполным образованием. Что означает запись К $\cap$ В; (К $\cap$ В)\С; (К $\cap$ С) $\cup$ (В $\cap$ Н); (В $\cap$ С) $\cup$ (К $\cap$ Н)? Построить диаграмму Венна.

Задание 2. Доказать тождество: $A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$.

Задание 3. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную из слова «камера»?

Задание 4. Группа студентов изучает восемь различных дисциплин. Скольким числом способов можно составить расписание занятий в субботу, если в этот день недели должны быть три различные дисциплины (порядок дисциплин роли не играет)?

Задание 5. Задано множество чисел $M = \{1, 2, 3, 6, 8, 9\}$. Для этого множества дано отношение T : $(a, b) \in T$, если «$b - a$» — четное число. Построить граф и матрицу смежности для T. Определить свойства T.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Если социологические исследования показывают, что потребитель отдает предпочтение удобству и многообразию выбора, то фирме следует сделать упор на усовершенствование товара или увеличение многообразия новых форм».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A, B \to C \models A\overline{B} \vee BC$.

Задание 9. Для булевой функции $\overline{(x \vee \overline{y})} \to (z \oplus \overline{x})$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 55).

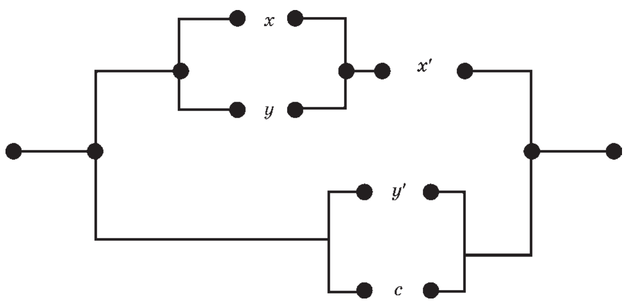


Рис. 55

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 0, 1) = f(0, 1, 0) = f(0, 0, 0) = f(1, 0, 0) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Перья есть только у птиц. Ни одно млекопитающее не является птицей. Значит, все млекопитающие лишены перьев.

Задание 13. Пусть предметная область $D = N$, $Q(x, y) =$ $=$ «x делится на y». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 3

Задание 1. Пусть Q — множество автомашин в гараже. Подмножества: Л — легковые; Г — грузовые, причем $Q =$ Л $\cup$ Г; О — отечественные машины; И — импортные; К — машины красного цвета; Р — машины на ремонте. Что означает запись (Л $\cap$ О)\К; (Г $\cap$ И) $\cup$ (Л\Р); (Л $\cap$ Р) $\cup$ (Г\И)? Построить диаграмму Венна.

Задание 2. Доказать тождество: $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$.

Задание 3. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из четырех горизонтальных полос, имея четыре различных цвета?

Задание 4. Из группы в 15 человек должны быть выделены бригадир и 4 члена бригады. Сколькими способами это можно сделать?

Задание 5. Два завода $З_1$ и $З_2$ поставляют продукцию на склад С. Со склада продукция поступает в три магазина: $М_1$, $М_2$, $М_3$. Ввести бинарное отношение T «поставщик — потребитель». Построить граф и матрицу смежности для T. Определить его свойства.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Если натуральное число делится на 12, то оно делится на 2, 4 и 6». Найти логические значения высказывания.

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A \vee B$, $A \vee C$, $(B \to C) \to A \models B \vee C$.

Задание 9. Для булевой функции $(x \vee \bar{y}) \to \overline{(z \leftrightarrow \bar{x})}$ построить таблицу истинности, привести функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 56).

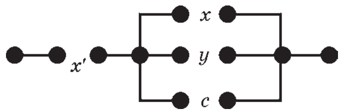


Рис. 56

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 1) = f(0, 1, 0) = (1, 1, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Всякий, кто может решить эту задачу, — математик. Кэбот не может ее решить. Значит, Кэбот не математик.

Задание 13. Пусть предметная область $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $Q(x, y)$ = «x имеет отличный от 1 общий делитель с y». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 4

Задание 1. Даны множества $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $B = \{3, 4, 5, 7\}$. Найти $A \cup B$; $A \cap B$; $A \backslash B$; $(A \cap B) \cap (A \backslash B)$.

Задание 2. Доказать тождество: $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$.

Задание 3. Четверо студентов получают оценки A, B, C, D. Сколькими различными способами можно расставить оценки так, чтобы никакие два студента не получили одну и ту же оценку?

Задание 4. В урне десять белых и пять черных шаров. Сколькими способами из урны наугад можно вынуть три шара, чтобы при этом два шара оказались белыми, а один — черным?

Задание 5. Карьер поставляет глину на два кирпичных завода, а заводы поставляют кирпичи на три ДСК. Ввести бинарное отношение T «поставщик — потребитель», построить граф и матрицу смежности для T, определить его свойства.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Чтобы получить профессию или сделать карьеру, необходимо получить хорошее образование и приложить много труда».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A \vee B$, $C \to B$, $B \to A$, $A \to C \models BC$.

Задание 9. Для булевой функции $\overline{(x \vee \overline{y}) \to (z \leftrightarrow \overline{x})}$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 57).

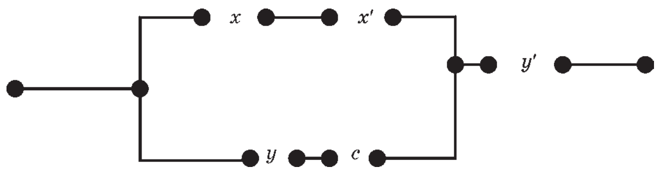


Рис. 57

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 1) = f(0, 1, 0) = f(1, 0, 0) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Тот, кто распускает этот слух, должен быть ловким и беспринципным. Кэбот не ловок, Лоуэлл не беспринципен. Значит, ни Кэбот, ни Лоуэлл не распускают этот слух.

Задание 13. Пусть предметная область $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $Q(x, y)$ = «$x + y$ делится на 3». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 5

Задание 1. В библиотеке множества К — книги и Ж — журналы. Подмножества: Р — раритеты; Н — новинки; И — книги на иностранных языках. Что означает запись $(К \cap Н)\backslash И$; $(Ж \cap Р) \cup (Ж\backslash И)$; $(К \cup Ж)\backslash Н$?

Задание 2. Доказать тождество: $(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$.

Задание 3. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1; 2; 3; 4; 5 при условии, что числа могут содержать одинаковые цифры?

Задание 4. Скольким числом способов можно распределить шесть пригласительных билетов на презентацию среди 30 человек?

Задание 5. Германия имеет дипломатические отношения с Россией и Китаем. Ввести бинарное отношение T_1 «имеет дипломатические отношения». Построить граф и матрицу смежности для T_1. Определить свойства бинарного отношения.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Если сумма цифр делится на 3 и число делится на 9, то оно делится на 3».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A \vee C$, $A \to B$, $C \to B \models AB \vee BC$.

Задание 9. Для булевой функции $\overline{(x \mid \bar{y}) \oplus (z \to \bar{x})}$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 58).

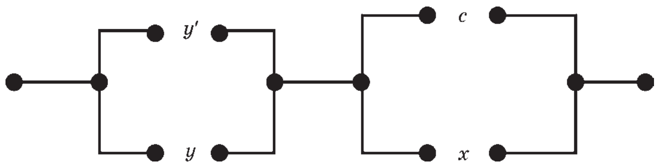


Рис. 58

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 0, 0) = f(0, 0, 1) = f(0, 1, 0) = f(1, 0, 0) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Все женщины любят красиво одеваться. Некоторые профессора — женщины. Следовательно, некоторые профессора любят красиво одеваться.

Задание 13. Пусть предметная область $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $Q(x, y)$ = «xy — четное число». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 6

Задание 1. Пусть Q — множество студентов в группе. Подмножества: Д — девушки; Ю — юноши; Q = Д $\cup$ Ю. Подмножества: О — отличники; Т — троечники. Дать определение (Ю\О) $\cup$ (Д $\cap$ Т); (Д $\cap$ О) $\cup$ (Ю $\cap$ Т). Построить диаграмму Венна.

Задание 2. Доказать тождество: $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$.

Задание 3. Из пункта A в пункт B можно добраться самолетом, поездом и автобусом, причем между этими пунктами существует два авиамаршрута, один железнодорожный и три автобусных. Сколькими числом способов можно добраться из пункта A в пункт B?

Задание 4. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности?

Задание 5. Фирма направила распоряжения двум своим филиалам: $Ф_1$ и $Ф_2$. Первый филиал $Ф_1$ отдал распоряжение отделу рекламы, второй филиал $Ф_2$ — отделу рекламы и бухгалтерии. Ввести бинарное отношение T «...отдать распоряжения...». Построить граф и матрицу смежности для T, определить свойства T.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой составное высказывание: «Сумма цифр делится на 3 тогда и только тогда, когда число делится на 9 или число делится на 3».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A \to B$, $C \to B, B \to A, A \to C \models B \sim C$.

Задание 9. Для булевой функции $\overline{(z \to x) \leftrightarrow (y|x)}$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 59).

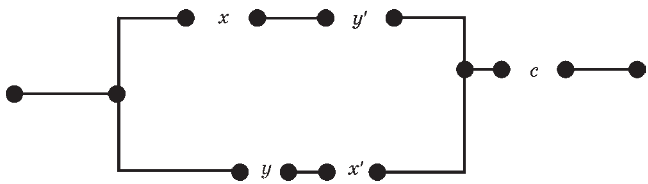


Рис. 59

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 0, 0) = (f(0, 0, 1) = f(0, 1, 0) = f(1, 1, 0) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Некоторые телевизоры не являются транзисторными. Некоторые телевизоры — цветные. Следовательно, некоторые цветные телевизоры не являются транзисторными.

Задание 13. Пусть предметная область D — множество людей, на котором определены такие предикаты: $E(x, y)$ — «x и y — один и тот же человек», $P(x, y)$ — «х родитель y», $Ch(x, y)$ — «x ребенок y», $S(x, y)$ — «x — сын y», $D(x, y)$ — «x — дочь y», $Wf(x, y)$ — «x — жена y», $M(x)$ — «x — мужчина», $W(x)$ — «x — женщина».

Записать формулы, выражающие следующие утверждения: 1) у каждого есть дедушка; 2) x — свекор; 3) некоторые супруги имеют детей только женского пола.

ВАРИАНТ 7

Задание 1. Пусть Ф — множество фирм в городе. Подмножества: К — крупные; С — средние; М — мелкие фирмы; П — фирмы, выпускающие продукты питания; Б — строительные фирмы; Г — государственные предприятия; Ч — частные фирмы. Что означает запись К $\cap$ Г\С $\cap$ Ч; К $\cap$ Г\(С $\cap$ Ч) $\cup$ (М $\cap$ Г); (М\Б) $\cap$ Ч? Построить диаграмму Венна.

Задание 2. Доказать тождество: $A\backslash(B \cup C) = (A\backslash C)\backslash C$.

Задание 3. Сколькими различными способами можно распределить четыре шара по двум лункам, в которые помещается ровно один шар?

Задание 4. Сколько различных аккордов можно взять на 10 выбранных клавишах рояля, если каждый аккорд может содержать от трех до пяти звуков?

Задание 5. Германия имеет дипломатические отношения с Россией и Китаем. Германия и Китай поставляют в Россию автомобили. Ввести бинарное отношение T «поставщик — потребитель». Построить граф и матрицу смежности для T. Определить свойства бинарного отношения.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой составное высказывание: «Если в четырехугольнике две противоположные стороны параллельны и они же равны, то этот четырехугольник — параллелограмм».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A \to (B \to C), C \to (B \to \bar{A}), A \to B \models B\bar{A} \vee A\bar{B}$.

Задание 9. Для булевой функции $(x|\bar{y}) \oplus (\bar{z} \to x)$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 60).

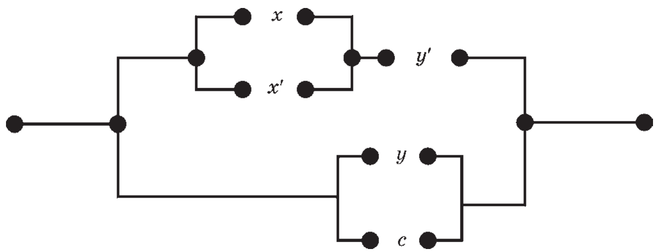


Рис. 60

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 0, 0) = f(0, 0, 1) = f(1, 0, 1) = f(1, 1, 0) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Некоторые писатели — женщины. Все женщины любят цветы. Следовательно, среди тех, кто любит цветы, есть писатели.

Задание 13. Пусть предметная область $D = N$, $Q(x, y) =$ «$x < y$». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 8

Задание 1. Пусть множество A состоит из чисел вида $2n$, а множество B состоит из чисел вида $3n$. Из чисел какого вида состоит множество $M = A \cap B$?

Задание 2. Доказать тождество: $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap$ $\cap (A \backslash C)$.

Задание 3. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору, а потом спуститься с нее, если спуск и подъем происходит по разным дорогам?

Задание 4. Из десяти кандидатов на одну и ту же должность должны быть выбраны трое кандидатов. Сколько может быть разных случаев выборов?

Задание 5. В порту Новороссийска были загружены два танкера. Первый танкер был разгружен в Адлере, а второй — в Феодосии. Ввести бинарное отношение T «поставщик — получатель». Построить граф и матрицу смежности для T. Определить свойства бинарного отношения.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой составное высказывание: «Если прямые a и b скрещиваются, то они не лежат в одной плоскости».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A \to (B \to \bar{C}), \bar{A} \to B, \bar{A} \to (\bar{B} \to C) \models B \vee C$.

Задание 9. Для булевой функции $(\bar{z} \to x) \leftrightarrow (\bar{x} | y)$ построить таблицу истинности, привести функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 61).

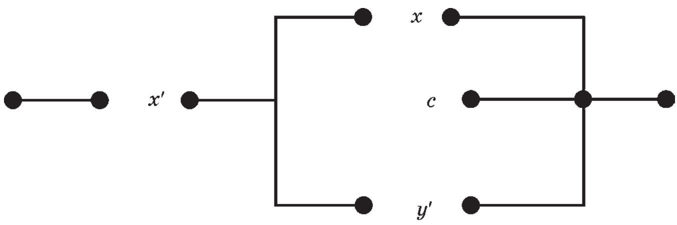


Рис. 61

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(1, 1, 1) = f(1, 0, 1) = f(0, 1, 0) = f(0, 0, 0) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

«Жмурки» — детская игра. Некоторые детские игры небезопасны. Следовательно, «Жмурки» не являются безопасной игрой.

Задание 13. Пусть предметная область $D = Z$, $Q(x, y) =$ $=$ «$x < y$». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 9

Задание 1. Пусть A — множество чисел вида $3n$, а B — множество чисел вида $2n$. Из чисел какого вида состоит множество $M = A \cap B$?

Задание 2. Доказать тождество: $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (C \backslash A)$.

Задание 3. Сколько может быть номеров телефона, если известно, что они пятизначные? (Считается, что номера 00000 и 99999 возможны.)

Задание 4. В ирургическом отделении работают 40 врачей. Сколькими способами из них можно организовать бригаду в составе хирурга и ассистента?

Задание 5. Сотрудники фирмы: директор, главный инженер, главный механик, главный бухгалтер, начальник отдела, кассир. Введено отношение «начальник — подчиненный». Задать отношение на графе и матрице смежности. Определить свойства бинарного отношения.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Если диагонали данного четырехугольника не взаимно перпендикулярны, то он не является квадратом».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $\bar{C}, A \to (\bar{B} \to C), B(A \vee C) \models A \to C$.

Задание 9. Для булевой функции $(z \to x) \oplus (x \mid \bar{y})$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 62).

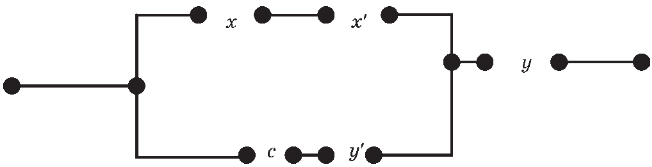


Рис. 62

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 0, 0) = f(0, 0, 1) = f(0, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Каждый честный человек выполняет свои обещания. Этот человек не выполняет свои обещания. Следовательно, этот человек — бесчестный.

Задание 13. Пусть предметная область D — это булеан некоторого непустого множества B, $Q(x, y)$ = «множество x — подмножество множества y». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 10

Задание 1. Пусть $U = \{a, b, c, d\}$; $X = \{a, c\}$; $Y = \{a, b, d\}$; $Z = \{b, c\}$.

Что означает запись $X \cap \bar{Y}$; $(X \cap Z) \cup \bar{Y}$; $X \cup (Y \cap Z)$; $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; $X \cup Y$; $\bar{X} \cap \bar{Y}$; $\overline{X \cap Y}$; $(X \cup Y) \cup Z$; $X \cup (Y \cup Z)$; $X \setminus Z$; $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$?

Задание 2. Доказать тождество: $(A \setminus B) \bigcup (A \setminus C) = A \setminus \setminus (B \bigcap C)$.

Задание 3. Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр 0; 1; 2; 3; 4; 5, содержат цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?

Задание 4. Сколько можно набрать комбинаций из 6 карт, каждая из которых содержит два короля, одну даму, если в колоде 36 карт?

Задание 5. В структуру завода входят: администрация, бухгалтерия, механический цех, автотранспортный цех. Введено бинарное отношение T «руководящая структура — подчиненное звено». Задать бинарное отношение T на матрице смежности и определить его свойства.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой составное высказывание: «Если сумма цифр делится на 3 и число делится на 3, то оно делится на 9».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $(A \to C) \to \bar{A}B \models A \vee B$.

Задание 9. Для булевой функции $((x \downarrow y) \to z) \oplus y$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 63).

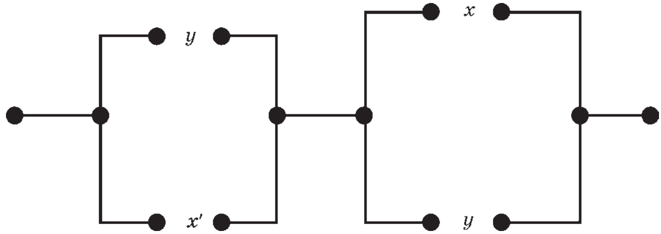


Рис. 63

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 1, 1) = f(0, 0, 0) = f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Все солдаты умеют маршировать. Некоторые маленькие дети не умеют маршировать. Следовательно, некоторые маленькие дети не являются солдатами.

Задание 13. Пусть предметная область D — это булеан некоторого непустого множества B, $Q(x, y)$ = «множество x имеет непустое пересечение с множеством y». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 11

Задание 1. Пусть даны множества $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 3, 5, 6\}$; $C = \{4, 5, 6\}$. Найти множества $A \setminus C$; $B \setminus C$; $C \setminus B$; $A \setminus B$; $\overline{A} \cup B$; $B \cap \overline{A}$; $A \cap C$; $(C \cup A) \setminus (B \cap A)$.

Задание 2. Доказать тождество: $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap (B \setminus C)$.

Задание 3. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0; 3; 4; 5; 7; 8, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

Задание 4. В группе 25 студентов. Из них шесть человек надо посадить на первый ряд. Сколько имеется таких способов, если не обращать внимания на порядок, в котором студенты сидят на скамейке, а только на их фамилии?

Задание 5. Каждый из двух банков $Б_1$ и $Б_2$ кредитует каждый из трех заводов $З_1$, $З_2$, $З_3$. Завод $З_1$ поставляет продукцию на завод $З_2$, а завод $З_2$ — на завод $З_3$. Ввести отношение T_1 «кредитор — заемщик» и T_2 «поставщик — получатель продукции». Определить эти бинарные отношения на графе и матрице смежности.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Если дифференцируемая функция непрерывна, то невозможно, чтобы функция была дифференцируема и разрывна».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A \vee B, \bar{C} \models B \vee C$.

Задание 9. Для булевой функции $\overline{((x \leftrightarrow \bar{y}) \rightarrow \bar{z})}|y$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 64).

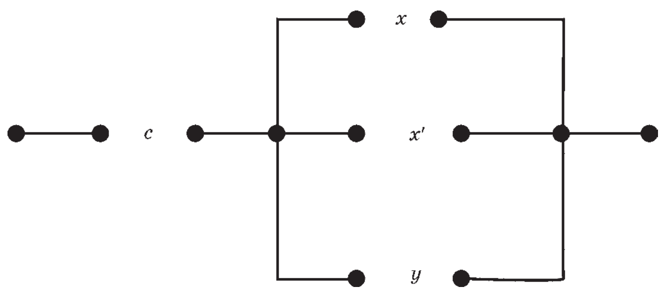


Рис. 64

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 1) = f(0, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Некоторые хорошие начальники падают с неба. Все плохие начальники поют. Значит, ни один поющий человек не упал с неба.

Задание 13. Пусть предметная область D — это множество студентов одной группы, $Q(x, y)$ = «x знаком с y». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 12

Задание 1. Даны множества $U = \{a, b, c, d, e\}$; $A = \{a, b\}$; $B = \{a, c, d\}$; $C = \{b, c, d, e\}$. Что означают множества $A \cap (B \cup C)$; $(A \cap B) \cup (A \cap C)$; $(A \cup B) \setminus C$; $(C \setminus B) \cup A$; $(C \setminus B) \cup (C \cap B)$? Показать на диаграмме Венна.

Задание 2. Доказать тождество: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup$ $\cup (A \cap C)$.

Задание 3. Укротителю диких зверей предстоит выпустить на арену одного за другим 5 львов и 4 тигра. Сколькими способами он это может сделать?

Задание 4. Шесть человек рассаживаются на скамейке. Скольким числом способов это можно сделать так, чтобы два определенных человека оказались рядом?

Задание 5. Пусть $M = \{m\}$ — множество книг в библиотеке. Введено отношение T «две книги находятся в отношении T, если цвет переплета первой книги совпадает с цветом переплета второй книги». Проверить, является ли T отношением эквивалентности.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Если в треугольнике любая его медиана не является высотой и биссектрисой, то этот четырехугольник не равнобедренный и не равносторонний».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A, C \vee B \models (B \to \overline{A}) \to (B \to C)$.

Задание 9. Для булевой функции $\overline{((x \leftrightarrow y) \mid \bar{z}) \oplus y}$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 65).

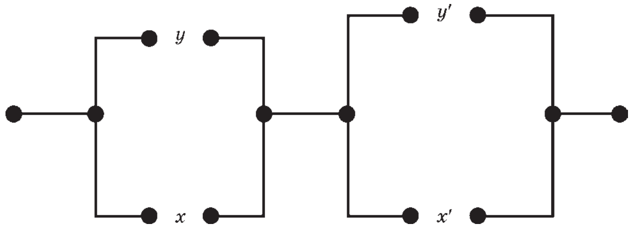


Рис. 65

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 1) = f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Ни один эгоист не нравится окружающим. Все обязательные люди окружающим нравятся. Значит, ни один обязательный человек не является эгоистом.

Задание 13. Пусть предметная область D — множество людей, на котором определены такие предикаты: $E(x, y)$ — «x и y — один и тот же человек», $F(x, y)$ — «x предок y», $H(x, y)$ — «x муж y», $M(x)$ — «x — мужчина», $W(x)$ — «x — женщина».

Записать формулы, выражающие следующие утверждения: 1) у каждого есть отец и мать; 2) x — тетя; 3) x — внебрачный сын y.

ВАРИАНТ 13

Задание 1. Пусть даны множества $X = \{0, 1\}$; $Y = \{a, b\}$. Найти $X \times Y$; $Y \times X$; X^2; $X \times Y \times X$; $Y \times X \times Y$.

Задание 2. Доказать тождество: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap \cap (A \cup C)$.

Задание 3. Сколько существует трехзначных номеров студенческих билетов, не содержащих цифры 8?

Задание 4. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить различных букетов?

Задание 5. Дано множество книг в библиотеке. Введено отношение T «Две книги стоят рядом, если они обе по математике». Проверить, является ли T отношением эквивалентности.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Логарифм некоторого положительного числа будет положительным, если основание логарифма и логарифмируемое число будут больше 1 или если основание логарифма и логарифмируемое число будут заключены между 0 и 1».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $\bar{A} \sim B, B \to C \models (C \to B) \to (B \to A)$.

Задание 9. Для булевой функции $(\bar{x} \vee y) \to \overline{(\bar{z} \leftrightarrow x)}$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 66).

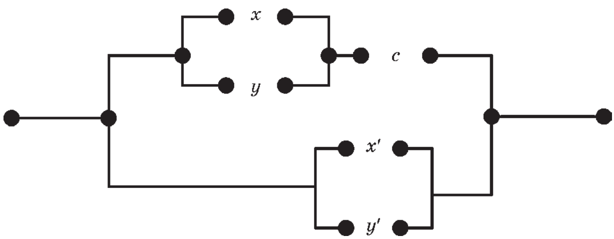


Рис. 66

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(1, 1, 1) = f(0, 1, 1) = f(0, 0, 0) = f(1, 0, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

У каждого судьи есть честолюбие. Тот, кто честолюбив, ищет пути для самоутверждения. Следовательно, каждый судья ищет пути для самоутверждения.

Задание 13. Пусть предметная область D — это множество людей, $Q(x, y)$ = «x любит y». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 14

Задание 1. Пусть даны множества A, B, C, такие, что $A \bigcup B \bigcup C = U$, где U — универсальное множество; A, B и C попарно не пересекаются. Доказать справедливость равенств $\overline{A} = B \cup C$; $\overline{B} = A \cup C$; $\overline{C} = A \cup B$; $A \bigcup B = U \setminus C$; $A \bigcup C = U \setminus B$; $B \bigcup C = U \setminus A$.

Задание 2. Доказать тождество: $A \bigcap (B \setminus C) = (A \bigcap B) \setminus C$.

Задание 3. Шесть пассажиров наудачу рассаживаются в трех вагонах. Скольким числом способов это можно сделать?

Задание 4. Вам надо выбрать два факультатива из шести. Скольким числом способов это можно сделать?

Задание 5. Два механических завода $З_1$ и $З_2$ поставляют оборудование на склад С. Со склада С продукция поступает в магазины $М_1$, $М_2$, $М_3$. Ввести бинарное отношение T «поставщик — потребитель». Построить граф и матрицу смежности для T, определить его свойства.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой составное высказывание: «Если число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A \to B$, $B \vee C$, $C \to A$, $B \to C \models AB$.

Задание 9. Для булевой функции $\overline{((x \downarrow y) \to z)} \leftrightarrow x$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 67).

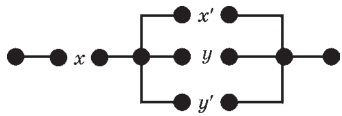


Рис. 67

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(1, 1, 1) = f(0, 1, 0) = f(1, 0, 1) = f(0, 0, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Взятка — уголовное преступление. Всякое уголовное преступление — наказуемо. Следовательно, взятка — наказуема.

Задание 13. Пусть предметная область D — это множество людей, $Q(x, y)$ = «x есть родитель y». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 15

Задание 1. Пусть М — множество машин в автопарке. Подмножества: Л — легковые; Г — грузовые, причем М = Л $\cup$ Г; И — импортные; З — машины завода «ЗиЛ»; К — машины завода «КамАЗ»; Р — машины на ремонте. Что означает запись Л $\cap$ И; Л $\cup$ (И\Р); (Г $\cap$ И) $\cup$ (Л\Р); (Л $\cap$ Р) $\cup$ (Г\К); (Г\З) $\cup$ (Л\И)?

Задание 2. Доказать тождество: $A \setminus (B \cup C) = A \cap (\overline{B \setminus C})$.

Задание 3. В учебном плане десять учебных дисциплин и три разные дисциплины можно назначить в день. Сколькими способами могут быть распределены дисциплины в день?

Задание 4. Скольким числом способов можно выбрать три красных и два черных шара, если в коробке находится семь красных и пять черных шаров?

Задание 5. Дано множество чисел $M = \{2, 3, 6, 8, 9\}$. Для этого множества задано отношение T: $(a, \delta) \in T$, если «$\delta - a$» — четное число. Построить граф и матрицу смежности для T. Определить свойства T.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Для успешной работы специалисту необходимо иметь высокую квалификацию и проявить настойчивость. Следствием высоких результатов работы может стать карьерный рост и повышение заработной платы».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A \vee B$, B, C, $A \sim \mathrm{C} \models AB$.

Задание 9. Для заданной булевой функции трех переменных построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

$$\overline{(x|y) \oplus (\bar{z} \to y)}.$$

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 68).

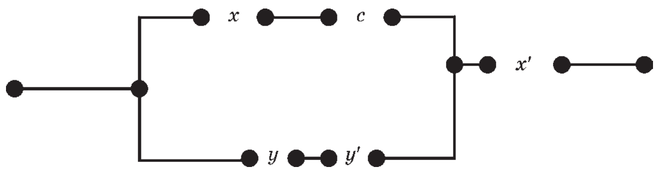


Рис. 68

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(1, 1, 1) = f(0, 1, 1) = f(0, 1, 0) = f(0, 1, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Все хорошие начальники падают с неба. Некоторые плохие начальники поют. Значит, некоторые упавшие с неба люди не умеют петь.

Задание 13. Пусть предметная область D — это множество людей, $Q(x, y)$ = «x живет в одном городе с y». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 16

Задание 1. Пусть Q — множество студентов группы. Подмножества: Д — девушки; Ю — юноши, Д $\cup$ Ю = Q. Подмножества: В — высокие; Б — брюнеты; Р — рыжеволосые; О — отличники; Т — троечники. Дать определение (Ю\Б) $\cup$ Д; (Д\Т) $\cup$ (Ю\Т); (Ю\О) $\cup$ (Д $\cap$ Т); (Ю\Б) $\cup$ $\cup$ (Д\Р).

Задание 2. Доказать тождество: $A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = (A \setminus B) \cap$ $\cap (A \setminus C)$.

Задание 3. Буквы азбуки Морзе образуются как последовательности точек и тире. Сколько различных букв можно образовать, если использовать 5 символов?

Задание 4. Из колоды, содержащей 36 карт, наугад вытаскивают пять карт. Сколько существует таких наборов, в которых содержится три туза?

Задание 5. Банки $Б_1$ и $Б_2$ дают кредиты заводам $З_1$, $З_2$, $З_3$. Завод $З_1$ поставляет продукцию на завод $З_3$, $З_2$ — на завод $З_1$. Ввести отношение T_1 «кредитор — заемщик» и T_2 «поставщик — получатель продукции». Определить эти бинарные отношения на графе и матрице смежности.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Для успешного поступления в институт школьник должен старательно учиться в школе и делать домашнее задание или заниматься с репетитором».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $C \to (A \vee B), A \to (B \vee C) \models A \vee B \vee \overline{C}$.

Задание 9. Для булевой функции $(x \vee y) \to (\overline{z} \leftrightarrow y)$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 69).

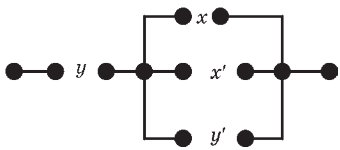


Рис. 69

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы:

$$f(0, 0, 0) = f(0, 1, 1) = f(0, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 1.$$

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Все актеры тщеславны. Тщеславные люди стремятся к успеху. Следовательно, все актеры стремятся к успеху.

Задание 13. Пусть предметная область D — это множество людей, на котором определены такие предикаты: $E(x, y)$ — «x и y — один и тот же человек», $Dc(x, y)$ — «x потомок y», $H(x, y)$ — «x муж y», $M(x)$ — «x — мужчина», $W(x)$ — «x — женщина».

Записать формулы, выражающие следующие утверждения: 1) x — свекор; 2) x — теща; 3) у некоторых людей нет братьев.

ВАРИАНТ 17

Задание 1. Даны множества $U = \{a, b, c, d, e\}$ — универсальное множество; $A = \{a, c\}$; $B = \{a, b, d\}$; $C = \{b, c\}$. Что означает запись $A \cap \overline{B}$; $\underline{(A \cap C)} \cup \overline{B}$; $A \cup (B \cap C)$; $(A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cup B$; $\overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B}$; $(A \cup B) \cup C$; $A \cup (B \cup C)$; $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$?

Задание 2. Доказать тождество: $A \cap B = (\bar{A} \cup B) \cap A$.

Задание 3. Сколько существует различных семизначных номеров телефона? (Телефонный номер может начинаться с нуля.)

Задание 4. На собрании присутствуют 40 человек. Необходимо избрать председателя, секретаря и двух членов президиума. Скольким числом способов это можно сделать?

Задание 5. Дано множество книг в библиотеке. Введено отношение T «Две книги стоят рядом, если они обе по математике». Проверить, является ли T отношением эквивалентности.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Для улучшения качества продукции необходимы модернизация производства и контроль качества закупаемого сырья, а также соблюдение технологической дисциплины».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A, (B \vee C) \models AC \vee B\bar{C}$.

Задание 9. Для булевой функции $(\overline{(x \downarrow y) \to \bar{z}}) \oplus y$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 70).

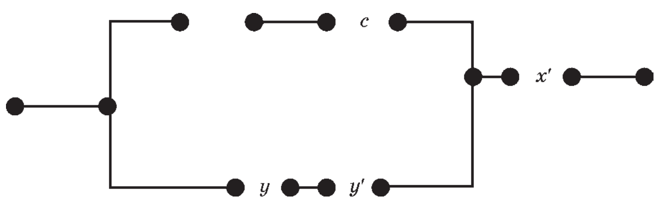


Рис. 70

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 1, 1) = f(0, 1, 0) = f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Некоторые учебники содержат схемы и графики. Ни одна книга, содержащая схемы и графики, мне не интересна. Следовательно, некоторые учебники мне не интересны.

Задание 13. Пусть предметная область D — это множество людей, $Q(x, y)$ = «x — ребенок y». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 18

Задание 1. Даны множества $U=\{a, b, c, d\}$ — универсальное; $X=\{a, c\}$; $Y=\{a, b, d\}$; $Z=\{b, c\}$. Найти $X \cap \bar{Y}$; $(X \cap Z) \cup \bar{Y}$; $X \cup (Y \cap Z)$; $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; $X \cup Y$; $\bar{X} \cup \bar{Y}$; $\overline{X \cup Y}$; $(X \cup Y) \cup Z$; $X \cup (Y \cup Z)$; $X \setminus \bar{Z}$; $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.

Задание 2. Доказать тождество: $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus C) \setminus B$.

Задание 3. Сколько различных трехзначных чисел может быть составлено из цифр 1; 2; 3; 4; 5, если в каждом числе нет одинаковых цифр?

Задание 4. Вам надо выбрать два факультатива из шести. Скольким числом способов это можно сделать, если занятия на двух факультативах начинаются с 10 часов, еще двух других — с 12 часов, а остальные не пересекаются во времени?

Задание 5. Пусть дано множество $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Составить графы и матрицы отношений T_1, T_2, если:

а) T_1 — «быть делителем»;

б) T_2 — «иметь общий делитель, отличный от единицы».

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Чем больше работаешь над проектом и анализируешь варианты, тем быстрее справишься с заданием и выберешь лучший вариант».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A \to B$, $C \to A$, $(AB) \to C$, $A \models \bar{C}$.

Задание 9. Для булевой функции $((x \downarrow y) \to \bar{z}) \leftrightarrow y$ построить таблицу истинности, привести функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 71).

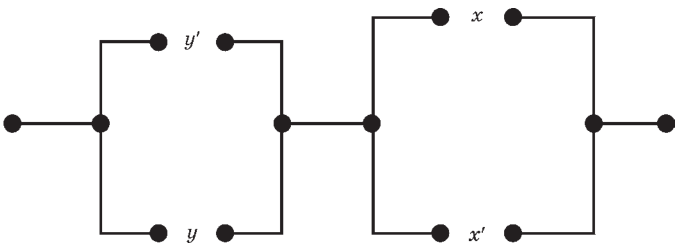


Рис. 71

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 1, 1) = f(0, 0, 0) = f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Не всякий, кто умеет писать, может написать книгу. Этот ребенок не может написать книгу. Следовательно, этот ребенок не умеет писать.

Задание 13. Пусть предметная область D — это множество людей, $Q(x, y)$ = «x — ровесник y, оба не старше 90 лет». Рассмотреть все варианты одновременной квантификации переменных двухместного предиката $Q(x, y)$. Определить истинность получаемых выражений.

ВАРИАНТ 19

Задание 1. Пусть Q — множество рабочих цеха. Подмножества: В — ветераны завода; С — рабочие со средним образованием; Т — рабочие, окончившие техникум; К — квалифицированные рабочие. Что означает запись К $\cap$ В; (К $\cap$ В)\С; (К $\cap$ С) $\cup$ (В $\cap$ Т); (В $\cap$ С) $\cup$ (К $\cap$ Т)? Построить диаграмму Венна.

Задание 2. Доказать тождество: $A \cap B = (\bar{A} \cup \bar{B})$.

Задание 3. Сколько существует натуральных чисел, меньших 10^4, в записи которых в десятичной системе все числа различны?

Задание 4. Из слова «дом» перестановками букв можно получить слова «дмо», «одм», «мдо», «омд», «мод», которые называют аннаграммами. Сколько анаграмм можно получить из слова «полдень»?

Задание 5. Дано множество чисел $Q = \{1, 3, 6, 7, 8, 9\}$. Для этого множества задано отношение T: $(a, b) \in T$, где b делится без остатка на a. Построить граф и матрицу смежности для T и определить свойства T.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Для получения прибыли фирме необходимо добиться снижения затрат и повышения производительности труда».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A \vee B, \bar{C} \to \bar{A} \models C \vee \bar{A}B$.

Задание 9. Для булевой функции $(\overline{(x \downarrow y)} \to \bar{z}) \leftrightarrow y$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 72).

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 1, 1) = f(0, 1, 0) = f(1, 0, 0) = f(1, 1, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

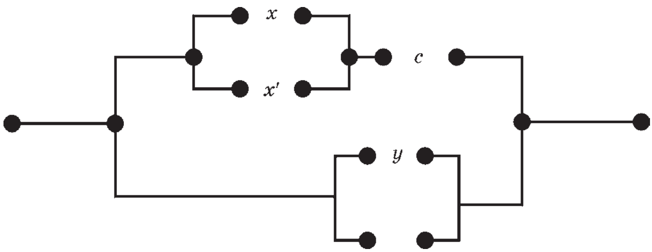


Рис. 72

Цветы — зеленые звери. Все цветы пьют водку. Значит, все зеленые звери пьют водку.

Задание 13. Пусть предметная область $D = \{a, b, c\}$, а двухместному предикату $Q(x, y)$ поставлена в соответствие логическая функция, заданная таблицей истинности (табл. 18).

Таблица 18

x	a	a	a	b	b	b	c	c	c
y	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$Q(x, y)$	Л	И	И	Л	И	И	Л	И	И

Установить, истинны или нет формулы $\forall x Q(x, a)$, $\exists x Q(x, a)$, $\forall x Q(a, x)$, $\exists x Q(a, x)$, $\forall x \forall y Q(x, y)$, $\exists x \exists y Q(x, y)$, $\forall y \exists x Q(x, y)$, $\exists y \forall x Q(x, y)$.

ВАРИАНТ 20

Задание 1. Даны множества $M = \{a, b, d, e, f, k\}$; $K = \{a, b, e, f\}$; $Q = \{b, e, f, h\}$. Найти $M \cup K$; $K \cup Q$; $M \cap K$; $M \setminus K$; $(M \cup K) \cap Q$; $(M \cap Q) \cup K$.

Задание 2. Доказать тождество: $(\bar{A} \cup B) = (\overline{A \cap \bar{B}})$.

Задание 3. Сколько существует различных трехцветных флагов с тремя вертикальными полосами одинаковой ширины, если можно использовать материю семи цветов?

Задание 4. Вам надо выбрать два факультатива из шести. Скольким числом способов это можно сделать, если два факультатива совпадают по времени?

Задание 5. Пусть дано множество чисел $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Для этого множества дано отношение $T : (a, b) \in T$, если «$a - b$» — четное число. Построить граф и матрицу смежности для T и определить свойства T.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Для получения прибыли фирме необходимо изменить ассортимент продукции и повысить качество или снизить цены на продукцию».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $\bar{A}, B \models$ $\models ((A\bar{B} \to C) \sim \bar{A}) \vee (B \sim AC)$.

Задание 9. Для булевой функции $\overline{((x \downarrow y) \to \bar{z}) \oplus y}$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 73).

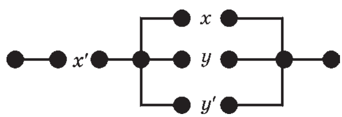


Рис. 73

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 1, 1) = f(0, 1, 0) = f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Некоторые люди — европейцы. Европейцы имеют три ноги. Значит, люди с двумя ногами — не европейцы.

Задание 13. Пусть предметная область $D = \{a, b, c\}$, а двухместному предикату $Q(x, y)$ поставлена в соответствие логическая функция, заданная таблицей истинности (табл. 19):

Таблица 19

x	a	a	a	b	b	b	c	c	c
y	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$Q(x, y)$	Л	И	И	Л	И	И	Л	И	И

Установить, истинны или нет формулы $\forall x Q(x, b)$, $\exists x Q(x, b)$, $\forall x Q(c, x)$, $\exists x Q(c, x)$, $\forall y \forall y x Q(x, y)$, $\exists y \exists x Q(x, y)$, $\forall x \exists y Q(x, y)$, $\exists x \forall y Q(x, y)$.

ВАРИАНТ 21

Задание 1. Пусть М — множество машин в автотранспортном предприятии. Подмножества: Л — легковые; Г — грузовые, причем М = Л $\bigcup$ Г. Подмножества: И — импортные машины; К — машины «КамАЗ»; С — самосвалы; Р — машины на ремонте; Ж — машины марки «Жигули». Что означает запись (Л $\bigcap$ И) $\bigcup$ К; (Г $\bigcap$ И) $\bigcup$ (Л\Р); (Л $\bigcap$ Ж) $\bigcup$ (К $\bigcup$ С)?

Задание 2. Доказать тождество: (A $\bigcap$ B)\C = (A\C) $\bigcap$ (B\C).

Задание 3. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, если каждое из них можно использовать не более одного раза?

Задание 4. В ящике 12 деталей, из которых четыре окрашены. Скольким числом способов можно из ящика выбрать три детали таким образом, чтобы среди них было две окрашенных?

Задание 5. Карьер поставляет камень на два камнедробильных предприятия $К_1$ и $К_2$, а предприятия $К_1$ и $К_2$ поставляют свою продукцию на три ДСК. Ввести бинарное отношение T «поставщик — потребитель», построить граф и матрицу смежности для T, определить его свойства.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой составное высказывание: «Для создания нового продукта и успешного продвижения его на рынок необходимо овладеть точными технологиями производства и провести анализ рынка».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $C \to A$, $B \vee C, B \to A \models A$.

Задание 9. Для заданной булевой функции трех переменных построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

$$\overline{((x|y) \to z)} \oplus y.$$

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 74).

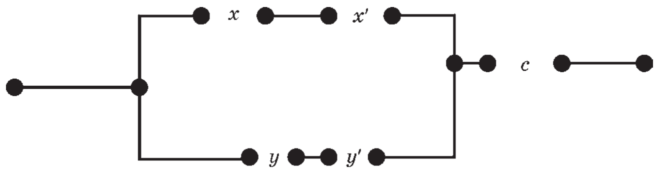


Рис. 74

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 1) = f(1, 0, 0) = f(1, 1, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Все студенты нашей группы — члены клуба «Спартак». Некоторые члены клуба «Спартак» занимаются спортом. Следовательно, некоторые студенты нашей группы занимаются спортом.

Задание 13. Пусть предметная область D — множество людей, на котором определены такие предикаты: $E(x, y)$ — «x и y — один и тот же человек», $P(x, y)$ — «x — родитель y», $C(x, y)$ — «x и y — супруги», $M(x)$ — «x — мужчина», $W(x)$ — «x — женщина».

Записать формулы, выражающие следующие утверждения: 1) у каждого есть отец и мать; 2) x — тетя; 3) x — внебрачный сын y.

ВАРИАНТ 22

Задание 1. Пусть С — множество студентов в группе. Подмножества: Ю — юноши; Д — девушки; С = Ю $\bigcup$ Д. Подмножества: О — отличники; Т — троечники; Ш — хорошо играющие в шахматы; Ц — занимающиеся танцами. Дать определения (Ю\О) $\bigcup$ (Д $\bigcap$ Т); (Д $\bigcap$ О)\Ш; (Д $\bigcup$ Ю)\Т; (Д\Ц) $\bigcup$ Ш; (Ю\Т) $\bigcap$ Ш.

Задание 2. Доказать тождество: $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \bigcup C)$.

Задание 3. Сколько можно образовать целых чисел, из которых каждое изображалось бы тремя различными цифрами?

Задание 4. На станке должны быть последовательно обработаны пять различных деталей. Сколько вариантов должен проанализировать технолог для выбора наилучшей очередности их обработки?

Задание 5. Германия имеет дипотношения с Россией и Китаем. Германия и Китай поставляют в Россию точное оборудование. Ввести бинарное отношение T_1 «иметь дипотношения», а также T_2 «поставщик — потребитель». Построить граф и матрицу смежности для T_1 и T_2. Определить свойства бинарных отношений.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой составное высказывание: «Если в четырехугольнике две противоположные стороны параллельны и они же равны, то этот четырехугольник — параллелограмм».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A \to (B \vee C), A \vee B, B \to A \models B \vee C$.

Задание 9. Для булевой функции $(x|\bar{y}) \oplus (\bar{z} \to x)$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 75).

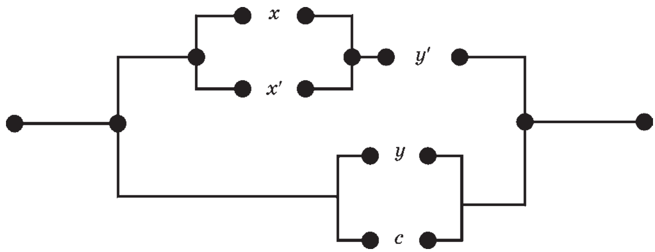


Рис. 75

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 1, 0) = f(0, 0, 0) = f(0, 1, 1) = f(1, 1, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Только плохие люди обманывают или крадут. Марина — хорошая. Значит, Марина не крадет.

Задание 13. Пусть предметная область D — множество людей, на котором определены такие предикаты: $E(x, y)$ — «x и y — один и тот же человек», $P(x, y)$ — «x родитель y», $H(x, y)$ — «x — муж y», $M(x)$ — «x — мужчина», $W(x)$ — «x — женщина».

Записать формулы, выражающие следующие утверждения: 1) у каждого есть бабушка; 2) x — кузен; 3) у некоторых людей есть сестры.

ВАРИАНТ 23

Задание 1. Пусть Q — множество чисел вида $2n$, а R — множество чисел вида $3n$. Из чисел какого вида состоит множество $S = Q \cap R$?

Задание 2. Доказать тождество: $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cap B) \cap (A \cup \bar{B})$.

Задание 3. Сколько различных «слов», состоящих из трех букв, можно образовать из слова «лето»?

Задание 4. В ящике 15 деталей, среди которых 6 бракованных. Наудачу выбирается комплект из пяти деталей.

Сколько всего комплектов, в каждом из которых две детали бракованные?

Задание 5. В структуру завода входят: администрация, бухгалтерия, механический цех, литейный цех, автотранспортный цех, отдел главного конструктора. Введено бинарное отношение T «руководящая структура — подчиненное подразделение». Задать бинарное отношение T на графе и матрице смежности и определить его свойства.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Если прямые a и b скрещиваются, то они не лежат в одной плоскости».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A, B \to C, \models A\bar{B} \vee CB$.

Задание 9. Для булевой функции $(\bar{z} \to x) \leftrightarrow (\bar{x} | y)$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 76).

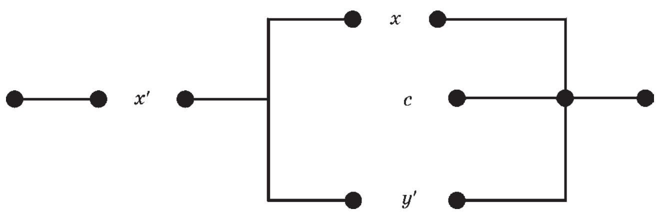


Рис. 76

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(1, 0, 1) = f(0, 1, 0) = f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Некоторые улитки — горы. Все горы любят кошек. Значит, все улитки любят кошек.

Задание 13. Пусть предметная область D — множество людей, на котором определены такие предикаты: $E(x, y)$ — «x и y — один и тот же человек», $P(x, y)$ — «x — родитель y», $Wf(x, y)$ — «x — жена y», $M(x)$ — «x — мужчина», $W(x)$ — «x — женщина».

Записать формулы, выражающие следующие утверждения: 1) x — шурин; 2) x — тесть; 3) x — сноха.

ВАРИАНТ 24

Задание 1. Даны множества $A = \{a, b, c, d, e, f, k\}$; $B = \{a, b, d, k\}$; $C = \{b, c, e, f\}$. Найти $(A\backslash B) \cup C$; $(A\backslash C) \cap B$; $(A \cup B)\backslash C$; $(B\backslash C)\backslash(A\backslash B)$. Построить диаграммы Венна.

Задание 2. Доказать тождество: $(A \setminus \bar{B}) \cap (A \cap C) = A \setminus (B \cup C)$.

Задание 3. Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на пять?

Задание 4. Десять книг расставляются на одной полке. Сколькими способами их можно расставить так, чтобы при этом две определенные книги оказались рядом?

Задание 5. Дано множество чисел $Q = \{2, 3, 6, 8, 9\}$. Для этого множества задано отношение T: $(a, \delta) \in T$, если «$\delta - a$» — нечетное число. Построить граф и матрицу смежности для T. Определить свойства T.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Если диагонали данного четырехугольника не взаимно перпендикулярны, то он не является квадратом».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A \to B$, $A \to C, \models B \to (C \to A)$.

Задание 9. Для булевой функции $(z \to x) \oplus (x|\overline{y})$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 77).

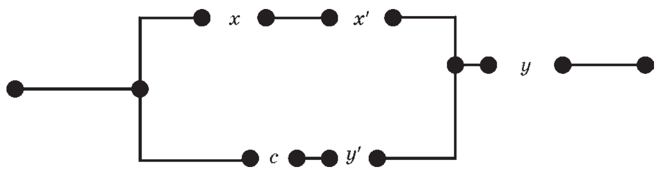


Рис. 77

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(0, 0, 0) = f(0, 0, 1) = f(0, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Все крокодилы умеют летать. Все великаны — крокодилы. Значит, все великаны умеют летать.

Задание 13. Пусть предметная область D — множество людей, на котором определены такие предикаты: $E(x, y)$ — «x и y — один и тот же человек», $Ch(x, y)$ — «x — ребенок y», $C(x, y)$ — «x и y — супруги», $M(x)$ — «x — мужчина», $W(x)$ — «x — женщина».

Записать формулы, выражающие следующие утверждения: 1) x — кузен; 2) x — теща; 3) некоторые супруги бездетны.

ВАРИАНТ 25

Задание 1. Пусть A — множество чисел вида $3n$, а B — множество чисел вида $2n$. Из чисел какого вида состоит множество $M = A \cap B$?

Задание 2. Доказать тождество: $((A \backslash B) \cup (B \backslash A)) \cup (A \cap B) = A \cup B$.

Задание 3. На вершину горы ведут семь дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и вернуться назад?

Задание 4. Вратарь десять раз выбрасывает мяч в игру. Предположим, что тренер рекомендовал подавать мяч каждый раз другому игроку своей команды. Сколько возможных вариантов может выбрать вратарь?

Задание 5. Сотрудники фирмы: директор, главный инженер, главный механик, главный бухгалтер, начальник отдела, кассир. Введено отношение «начальник–подчиненный». Задать отношение на графе и матрице смежности. Определить свойства отношения.

Задание 6. Для орграфа, представленного матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, определите матрицу инцидентности, задайте его списком дуг и изобразите графически.

Задание 7. Представить логической формулой высказывание: «Чем больше работаешь над проектом и анализируешь варианты, тем быстрее справишься с заданием и выберешь лучший вариант».

Задание 8. Доказать или опровергнуть клаузу: $A \to (B \to C), A \to (C \vee B) \models A \to C$.

Задание 9. Для булевой функции $((x \downarrow y) \to \bar{z}) \leftrightarrow y$ построить таблицу истинности, записать функцию к СДНФ и СКНФ.

Задание 10. Провести анализ π-схемы (рис. 78).

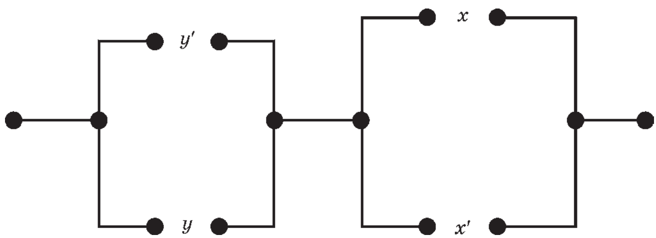


Рис. 78

Задание 11. Синтезировать π-схему по заданным условиям работы: $f(1, 1, 0) = f(0, 1, 1) = f(0, 0, 0) = f(1, 0, 1) = 1$.

Задание 12. Ввести необходимые обозначения и записать каждое из высказываний как формулу исчисления предикатов. Обосновать справедливость (ложность) заключения при помощи диаграмм Эйлера — Венна.

Все вороны собирают картины. Некоторые собиратели картин сидят в птичьей клетке. Значит, некоторые вороны сидят в птичьей клетке.

Задание 13. Пусть предметная область D — множество людей, на котором определены такие предикаты: $E(x, y)$ — «x и y — один и тот же человек», $Ch(x, y)$ — «x — ребенок y», $Wf(x, y)$ — «x — жена y», $M(x)$ — «x – мужчина», $W(x)$ — «x — женщина».

Записать формулы, выражающие следующие утверждения: 1) x — золовка; 2) x — дядя; 3) x — внебрачная дочь y. «Некоторые ромбы не являются параллелограммами».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Акимов, О. Е.* Дискретная математика : логика, группы, графы / О. Е. Акимов. — М. : Лаб. баз. знаний, 2001. — 376 с.

2. *Аляев, Ю. А.* Дискретная математика и математическая логика : учебник / Ю. А. Аляев, С. Ф. Тюрин. — М. : Финансы и статистика, 2006. — 368 с.

3. *Бабичева, И. В.* Справочник по математике (в формулах, таблицах, рисунках) : учеб. пособие / И. В. Бабичева, Т. Е. Болдовская. — Омск : Изд-во СибАДИ, 2008. — 123 с.

4. *Бабичева, И. В.* Дискретная математика : курс лекций / И. В. Бабичева, В. Ф. Гавловская, А. И. Исакова. — Омск : Изд-во СибАДИ, 2009. — 204 с.

5. *Галушкина, Ю. И.* Конспект лекций по дискретной математике / Ю. И. Галушкина. — М. : Айрис-пресс, 2007. — 176 с.

6. *Емеличев, В. А.* Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников. — М. : Наука, 1990. — 384 с.

7. *Игошин, В. И.* Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов : учеб. пособие / В. И. Игошин. — М. : Издат. центр «Академия», 2006. — 304 с.

8. *Кочетков, П. А.* Введение в дискретную математику : учеб. пособие / П. А. Кочетков. — М. : МГИУ, 2007. — 88 с.

9. *Кузнецов, О. П.* Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов. — СПб. : Лань, 2005. — 400 с.

10. *Москинова, Г. И.* Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях : учеб. пособие / Г. И. Москинова. — М. : Унив. кн. ; Логос, 2007. — 108 с.

11. *Оре, О.* Теория графов / О. Оре. — М. : Наука, 1980. — 336 с.

12. *Палий, И. А.* Дискретная математика : курс лекций. — М. : Эксмо, 2008. — 206 с.

13. *Плотников, А. Д.* Дискретная математика : учеб. пособие / А. Д. Плотников. — М. : Новое знание, 2006. — 304 с.

14. *Сечкина, И. В.* Математическая логика : конспект лекций / И. В. Сечкина. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 2007. — 48 с.

15. *Соболева, Т. С.* Дискретная математика : учебник / Т. С. Соболева, А. В. Чечкин. — М. : Изд. центр «Академия», 2006. — 256 с.

16. *Судоплатов, С. В.* Дискретная математика : учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — М. : ИНФРА-М ; Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. — 256 с.

17. *Шапорев, С. Д.* Дискретная математика : курс лекций и практ. занятий / С. Д. Шапорев. — СПб. : БХВ–Петербург, 2007. — 400 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ирина Владимировна БАБИЧЕВА

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА. КОНТРОЛИРУЮЩИЕ МАТЕРИАЛЫ К ТЕСТИРОВАНИЮ

Учебное пособие

Издание второе, исправленное

Зав. редакцией физико-математической литературы *О. Ю. Краснокутская*
Ответственный редактор *А. Д. Пузовик*
Технический редактор *Е. С. Жукович*
Корректор *Ю. Н. Теплова*
Подготовка иллюстраций *М. О. Мотыгина*
Верстка *Д. А. Петров*
Выпускающие *Т. С. Симонова, Е. П. Королькова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com;
192029, Санкт-Петербург,Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

ГДЕ КУПИТЬ

по России и зарубежью
«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967; www.lanpbl.spb.ru/price.htm

в Москве и в Московской области
«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@lanbook.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае
«ЛАНЬ-ЮГ». 350072, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазины:
Издательство «Лань»: http://www.lanbook.com
«Сова»: http://www.symplex.ru; «Ozon.ru»: http://www.ozon.ru
«Библион»: http://www.biblion.ru

Подписано в печать 7.06.2013.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 8,40. Тираж 1000 экз.
Заказ № .
Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru