Основы дискретной математики

Лекция 2: Индукция и комбинаторика

версия для печати
< Лекция 1 || Лекция 2: 1 2 3 || Лекция 3 >

Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, изучающий вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Размещения, перестановки, сочетания

Многие классические задачи *комбинаторики* являются задачами определения числа способов *размещения* некоторых объектов в каком-то количестве "ящиков" так, чтобы выполнялись определенные ограничения. Более формально такие задачи можно сформулировать следующим образом. Даны множества X, Y, причем $|X|=n$, $|Y|=m$. Сколько существует функций $f: X \to Y$, удовлетворяющих заданным ограничениям? Здесь элементы X – объекты, а элементы Y – ящики, а каждая функция $f: X \to Y$ определяет для каждого объекта $x \in X$ в какой ящик $f(x) \in Y$ он помещается.

Рассмотрим вначале простой случай, когда на *размещения* не накладывается никаких ограничений.

Теорема 2.1. Если $|X| = n$, $|Y|=m$, то число всех функций $f: X \to Y$ равно m^n.

Доказательство проведем индукцией по n.

Пусть $X=\{x_1, \dots, x_n\}$, $Y=\{y_1, \dots, y_m\}$. Тогда каждая функция $f: X \to Y$ однозначно определяется последовательностью своих значений $f(x_1), \dots, f(x_n)$. Пусть $F_m(n)$ – число всех таких функций (последовательностей).

Базис индукции. Ясно, что при $n=1$ имеется ровно m различных функций: $f_i(x_1)=y_i$, $i=1,\dots,m$, т.е. $F_m(1)=m$.

Шаг индукции. Предположим, что при $n=k$ выполнено равенство $F_m(k)=m^k$. Докажем, что тогда $F_m(k+1)=m^{k+1}$.

Действительно, при $n=k+1$ каждая функция $f: X \to Y$ – это последовательность $f(x_1), \dots, f(x_k), f(x_{k+1})$. Положив $X'=\{x_1, \dots, x_k\}$, ее можно рассматривать как функцию $f':X' \to Y$, заданную последовательностью $f(x_1), \dots, f(x_k)$, которая дополнена одним новым значением $f(x_{k+1})$. Так как $|X'|=k$, то по предположению число таких различных функций $f':X' \to Y$ равно $F_m(k)=m^k$. Каждая из них имеет ровно m возможных расширений $f(x_{k+1}) = y_i$, $i=1,\dots,m$. Поэтому $F_m(k+1)= F_m(k) \times m =m^{k+1}$.

Следствие 2.1.1. Если $|X|=n$, то число всех подмножеств множества X равно $|2^X|= 2^n$.

Доказательство. Пусть $X=\{x_1, \dots, x_n\}$. Сопоставим каждому подмножеству $X' \subseteq X$ функцию $f_{X'} : X \to \{0,1\}$ следующим образом:

$$f_{X'}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in X' \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$(i=1, \dots, n)$.

Ясно, что это сопоставление взаимно однозначное. Действительно, если $X' \neq X^{\{''\}}$, то имеется элемент $x_i \in X' \dot{-} X''$ и тогда $f_{X'}(x_i) \neq f_{X''}(x_i)$. Таким образом, число всех подмножеств X равно числу всех функций $f : X \to \{0,1\}$. По теореме 2.1 это число равно 2^n.

Следствие 2.1.2. Число всех слов длины n в алфавите $A=\{a_1, \dots, a_m\}$ из m символов равно m^n.

Найдем теперь число *размещений*, для которых каждый ящик содержит не более одного объекта. Такие *размещения* соответствуют 1-1- функциям. Обозначим через A_m^n число всех 1-1-функций из n -элементного множества в m -элементное множество. Это число называется числом *размещений* из m по n.

Теорема 2.2. Если $|X| = n$, $|Y|=m$, то число всех 1-1-функций $f: X \to Y$ равно

$$A_m^n = m(m-1)\dots(m-n+1)$$

Доказательство проведем индукцией по n (для каждого фиксированного m).

Базис индукции. Поскольку при $n=1$ каждая функция является 1-1-функцией, то, как и в предыдущей теореме, число таких функций равно m, т.е. $A_m^1=m$.

Шаг индукции. Предположим, что при $n=k$ выполнено равенство $A_m^k=m(m-1)\dots(m-k+1)$. Докажем, что тогда $A_m^{k+1}=m(m-1)\dots(m-k+1)(m-k)$.

Действительно, как и в предыдущей теореме, каждая 1-1-функция $f: X \to Y$ является расширением некоторой 1-1-функции $f':X' \to Y$ значением $f(x_{k+1})$ (напомним, что $X'= X \setminus \{x_{k+1}\}$). При этом в качестве этого значения можно взять любой элемент Y, не являющийся значением f', т.е. любой элемент из множества $Y \setminus \{f(x_1), \dots, f(x_k)\}$. При $k < m$ таких элементов $(m-k)$. Тогда каждую 1-1-функцию $f':X' \to Y$ можно расширить $(m-k)$ способами и, следовательно, $A_m^{k+1} =A_m^k (m-k)$. При $k >= m$ 1-1-функций $f: X \to Y$ не существует (почему?) и $A_m^{k+1}=0$, но в этом случае доказываемая формула также справедлива, поскольку один из сомножителей в ней равен 0.

В качестве простого следствия теоремы 2.2 получаем формулу для числа *перестановок*.

Теорема 2.3. Если $|X| = n$, то число всех *перестановок* $f: X \to X$ равно $n!$

Число всех k -элементных подмножеств n -элементного множества обозначим через C_n^k (часто используется также обозначение $\binom{n}{k}$).

Это число называется числом *сочетаний* из n по k .

Теорема 2.4. При $n >= k >= 0$

$$C_n^k = A_n^k/k! = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Доказательство. При $n=k=0$ у пустого множества имеется одно (пустое) подмножество. Поэтому $C_0^0 = 1 = \frac{0!}{0!0!}$ (напомним, что по обычному соглашению $0!=1$).

Пусть $|Y| = n >= 1$. Каждая 1-1-функция $f: \{1,\dots,k\} \to Y$ определяет k -элементное подмножество $\rho_f = \{y_i | f(i) = y_i,\ i = 1,\dots,k\} \subseteq Y$. При этом одно и тоже такое подмножество получается при любой *перестановке* элементов ρ_f. Всего таких *перестановок* $k!$ (по теореме 2.3), а 1-1-функций $f: \{1,\dots,k\} \to Y$ - A_n^k . Отсюда, используя теорему 2.2, получаем, что

$$C_n^k = A_n^k/k! = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Непосредственным следствием этой теоремы является свойство "симметричности" *сочетаний*: $C_n^k = C_n^{n-k}$, а также рекурентная формула $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, позволяющая организовать их эффективное вычисление путем последовательного получения элементов *треугольника Паскаля*:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

В n -ой строке этого *треугольника* стоят числа $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^k, \dots, C_n^n$ и каждое из них является суммой двух стоящих над ним чисел предыдущей строки. Эти числа называются ***биномиальными коэффициентами***, так как входят в формулу **бинома Ньютона**, выражающую n -ую степень бинома $x+y$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Справедливость этой формулы следует из того, что коэффициент при $x^k y^{n-k}$ равен числу способов, которыми из n сомножителей $(x+y)(x+y)\dots(x+y)$ можно выбрать k сомножителей.

Укажем несколько простых следствий этой формулы. Положив в ней $x=1,\ y=1$, получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Так как сумма слева определяет число всех подмножеств n -элементного множества, то это еще одно доказательство следствия 2.1.1.

При $x=1,\ y=-1$ *бином Ньютона* дает равенство числа подмножеств четной и нечетной мощности:

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k+1}.$$

Дальше >>

< Лекция 1 || **Лекция 2**: 1 2 3 || Лекция 3 >