

Теоретическое задание 1

ДПО, МО

January 23, 2021

Exercise 1

Рассмотрим задачу линейной регрессии

$$Q(w) = (y - Xw)^T(y - Xw) \rightarrow \min_w$$

1. Найдите $dQ(w)$ и $d^2Q(w)$.
2. Выведите формулу для оптимального w .
3. Выведите формулу для матрицы-шляпницы (hat-matrix), связывающей вектор фактических y и вектор прогнозов $\hat{y} = H \cdot y$.

Exercise 2

Допустим, что обучающая выборка состоит из 2ℓ объектов и верно следующее: $y_i = -y_{\ell+i} \neq 0, i = 1 \dots \ell$. Рассмотрим константное предсказание $a(x) = C$. Найдите оптимальное значение C с точки зрения функционала MAPE.

Exercise 3

Рассмотрим задачу регрессии с одним признаком и без константы, $\hat{y}_i = w \cdot x_i$. Решите в явном виде задачи МНК со штрафом:

1. $Q(w) = (y - \hat{y})^T(y - \hat{y}) + \lambda w^2 //$
2. $Q(w) = (y - \hat{y})^T(y - \hat{y}) + \lambda |w|$

Exercise 4

Рассмотрим две задачи линейной регрессии с L_1 - и L_2 -регуляризацией и одинаковыми коэффициентами $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \|Xw - y\|_2^2 + \lambda \|w\|_1 &\rightarrow \min_w \\ \|Xw - y\|_2^2 + \lambda \|w\|_2 &\rightarrow \min_w \end{aligned}$$

Пусть их решения равны, соответственно, w_1^* и w_2^* . Можно ли утверждать, что $\|w_1^*\|_1 < \|w_2^*\|_1$? А что $\|w_2^*\|_2 < \|w_1^*\|_2$?