1Точечное оценивание; Оценка среднего значения; Оценка матожидания;Ст. отклонение и ошибка; Несмещённая оценка дисперсии; Оценка по максимальному правдоподобию; 2Байесова статистика

1. **Точечное оценивание**

Общая теория и терминология

Математическая статистика

Проверка гипотез

Оценка параметров
- точечное оценивание
- интервальное оценивание

Во всех задачах исходным материалом является выборка, которая в математической статистике рассматривается как набор независимых одинаково распределённых случайных величин, а на практике представляет собой набор чисел (выборка из генеральной совокупности или результаты экспериментов).
Вместо «выборка» часто говорят «наблюдения».
Выборка может быть как-то структурирована, например состоять из пар чисел, или делиться на две подвыборки и т. д.

Точечное оценивание

Предполагается, что выборка происходит из распределения, зависящего от параметра θ.

Например:
- из экспоненциального распределения с неизвестным средним θ;
- из нормального распределения с неизвестным средним θ;
- из нормального распределения с известным средним (например, 0), но неизвестной дисперсией θ;
- …

Результатом является **оценка** θ' — функция от наблюдений, значение которой принимается за предполагаемое значение параметра θ.

В мат. статистике оценка рассматривается как функция от случайных величин, поэтому сама является случайной величиной с распределением, зависящим от θ.

•Оценка θ' называется **состоятельной**, если θ' сходится к θ с ростом числа наблюдений.

•Оценка θ' называется **несмещённой**, если математическое ожидание θ' равно θ.

•**Эффективностью** оценки θ' (неформально) называется то, насколько хорошо θ' приближает θ. Мерой эффективности обычно служит среднее квадратичное отклонение θ' от θ: $E(\theta' - \theta)^2$.
Для несмещённой оценки эта мера равна дисперсии θ'.

*В мат. статистике оценка называется **эффективной**, если она несмещённая и её дисперсия **при любом θ** наименьшая среди всех оценок.*

Оценка среднего значения

Эффективной (в любом смысле) оценкой среднего значения генеральной совокупности почти всегда служит среднее по выборке.

В математической статистике среднему значению генеральной совокупности соответствует матожидание случайной величины.

Бывают экзотические случаи, когда среднего по генеральной совокупности просто нет, например, если измерять расстояние от центра мишени при равномерном распределении угла стрельбы в интервале (0°, 90°)

Но и, например, для равномерного распределения на интервале с известной левой, но неизвестной правой границей оценивать матожидание как среднее по выборке не всегда хорошо. Действительно, разумно предполагать, что оценка правой границы должна быть такой, чтобы оценка среднего оказалась посредине между левой границей и оценкой правой границы. Но вполне может получиться, что часть наблюдений вылезет за оценённую так правую границу.

Оценка матожидания

Эффективной оценкой математического ожидания большинства распределений является среднее по выборке.

Для выборки из нормального распределения среднее по выборке тоже распределено нормально с тем же матожиданием и с дисперсией $D(\theta') = D/n$, где D — дисперсия исходного распределения, а n — число наблюдений.

Для выборки из другого распределения (с конечной дисперсией) среднее по выборке для больших n распределено почти нормально
(распределение среднего по выборке стремится к нормальному с ростом n)

Квадратный корень из дисперсии среднего по выборке принято называть **стандартной ошибкой.**

Стандартное отклонение и стандартная ошибка

Стандартное отклонение = корень квадратный из дисперсии исходного распределения
(то есть среднее квадратичное отклонение от среднего значения по генеральной совокупности).
Ст. отклонение не зависит от выборки, это свойство генеральной совокупности.

Стандартная ошибка = корень квадратный из дисперсии среднего по выборке
Ст. ошибка равна ст. отклонению, деленному на квадратный корень из размера выборки

Несмещённая оценка дисперсии

При **известном** матожидании μ несмещённой (и эффективной) оценкой дисперсии является
$D' = \sum(x_i - \mu)^2/n$
что неудивительно, ведь дисперсия — это среднее значение величины $Y = (X - \mu)^2$

При **неизвестном** матожидании сначала оцениваем его средним по выборке: $\bar{x} = \sum x_i /n$,
после этого оцениваем дисперсию как $s^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2/(n-1)$

Если вместо $(n - 1)$ поставить n, получится смещённая оценка: её матожидание будет несколько меньше реального значения дисперсии σ^2. Это происходит потому, что x_i всегда в среднем ближе к $\bar{x}$, чем к μ.

Стандартное отклонение и стандартная ошибка оцениваются из этих оценок дисперсии как квадратный корень из s^2 и квадратный корень из s^2/n, соответственно.

Эти оценки — смещённые, но достаточно эффективные, ими все пользуются.

Обычно именно эти оценки называются стандартным отклонением и стандартной ошибкой выборки.

Оценка частоты

Введём случайную величину, принимающую значение 1 в случае успеха и 0 в случае неуспеха.
Тогда (-) — это математическое ожидание этой случайной величины.
Поэтому самая разумная оценка (-) — среднее значение по проведённым испытаниям, то есть **отношение числа успехов к числу испытаний**.
(Что, конечно, совсем не удивительно :))

Оценка по максимальному правдоподобию

Что делать, если нужно оценить какую-нибудь не вполне стандартную величину?
Есть универсальный подход: принцип максимального правдоподобия.
Этот принцип гласит: из конкурирующих гипотез выбираем ту, что дала бы максимальную вероятность того, что мы наблюдаем.

Оценка по максимальному правдоподобию: дискретный случай

Пусть сначала наши наблюдения $X_1, X_2, \ldots, X_n$ происходят из дискретного распределения.

Это значит, что каждое X может принимать лишь значения из какого-то дискретного множества, и каждое такое значение имеет ненулевую вероятность $P_\theta(X)$

Вероятность каждого значения зависит от θ, которого мы не знаем и хотим оценить.

Посчитаем (зависящую от θ) вероятность наших наблюдений:

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n \mid \theta) = \prod_i P_\theta(X_i)$$

Получилась функция от θ.

Если мы можем найти такое $\theta = \theta'$, при котором данная вероятность достигает максимума, то это значение и будет максимально правдоподобной оценкой θ.

Правдоподобием (likelihood) называется вероятность сделанных наблюдений.

2. Байесова статистика
Оценки по максимуму апостериорной вероятности

Байесовские оценки

Предположим, у нас есть какое-то априорное знание о параметре θ, выраженное в виде вероятностей разных его значений.
Тогда стоит оценивать θ исходя из формулы Байеса:

$$P(\theta \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) = P(X_1, X_2, \ldots, X_n \mid \theta) \cdot P(\theta) / P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Пусть сначала всё дискретно
(включая априорное распределение параметра θ, например, параметр задаётся выбором из конечного числа объектов).

Тогда справа в числителе — вероятность наблюдений при заданном θ, умноженная на **априорную** вероятность данного θ, в знаменателе — **полная** вероятность наблюдений, которую в дискретном случае можно посчитать как сумму $P(X_1, X_2, \ldots, X_n \mid \theta_k) \cdot P(\theta_k)$ по всем возможным значениям θ_k параметра θ.

Слева получается **апостериорная** (то есть посчитанная на основе наблюдений) вероятность каждого значения θ.

Апостериорная вероятность:
$P(\theta \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) = P(X_1, X_2, \ldots, X_n \mid \theta) \cdot P(\theta) / P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

В дискретном случае единственной байесовской оценкой является MAP (maximum of a posterior probability) — в качестве оценки берётся значение θ, максимизирующее апостериорную вероятность

Если все априорные вероятности $P(\theta)$ равны между собой, то MAP-оценка превращается в ML-оценку
(ML = maximum likelihood = максимальное правдоподобие)