Зміст

5	Рег	улярні множини і регулярні вирази	1
	5.1	Регулярні множини	1
	5.2	Регулярні вирази	1
		5.2.1 Алгебра регулярних виразів	2
		5.2.2 Лінійні рівняння	3
		5.2.3 Системи рівнянь	3
	5.3	Контрольні запитання	4

5 Регулярні множини і регулярні вирази

5.1 Регулярні множини

Нехай Σ — скінчений алфавіт. Pегулярна множина в алфавіті Σ визначається рекурсивно:

- 1. \varnothing пуста множина це регулярна множина в алфавіті Σ ;
- 2. $\{\varepsilon\}$ пусте слово регулярна множина в алфавіті Σ ;
- 3. $\{a\}$ однолітерна множина регулярна множина в алфавіті Σ ;
- 4. Якщо P та Q регулярні множини, то такими є наступні множини:
 - $P \cup Q$ (операція об'єднання);
 - $P \times Q$ (операція конкатенації);
 - $P^* = \{\varepsilon\} \cup P \cup P^2 \cup \dots$ (операція ітерації).
- 5. Ніякі інші множини, окрім побудованих на основі 1–4 не є регулярними множинами.

Таким чином, регулярні множини можна побудувати з базових елементів 1–3 шляхом скінченого застосування операцій об'єднання, конкатенації та ітерації.

5.2 Регулярні вирази

Регулярні вирази позначають регулярні множини таким чином, що:

- 1. 0 позначає регулярну множину \varnothing ;
- 2. ε познача ε регулярну множину $\{\varepsilon\}$;

- 3. a позначає регулярну множину $\{a\}$;
- 4. Якщо p та q позначають відповідно регулярні множини P та Q, то
 - p+q позначає регулярну множину $P \cup Q$;
 - $p \cdot q$ позначає регулярну множину $P \times Q$;
 - p^* позначає регулярну множину P^* .
- 5. Ніякі інші вирази, окрім побудованих на основі 1–4 не є регулярними виразами.

5.2.1 Алгебра регулярних виразів

Оскільки ми почали вести мову про вирази, нам зручніше перейти до поняття алгебри регулярних виразів. Для кожної алгебри одним з важливих питань є питання еквівалентних перетворень, які виконуються на основі тотожностей у цій алгебрі. Сформулюємо основні тотожності алгебри регулярних виразів:

- 1. a + b + c = a + (b + c) (ліва асоціативність додавання);
- 2. a + b + c = (a + b) + c (права асоціативність додавання);
- 3. a + 0 = 0 + a = a (0 нейтральний елемент за додаванням);
- 4. $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ліва асоціативність множення);
- 5. $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$ (права асоціативність множення);
- 6. a + b = b + a (комутативність додавання);
- 7. $a \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot a = a \ (\varepsilon \text{нейтральний елемент за множенням});$
- 8. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ (0 нульовий елемент за множенням);
- 9. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (ліва дистрибутивність множення відносно додавання);
- 10. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (права дистрибутивність множення відносно додавання).

У алгебри регулярних виразів є і некласичні властивості:

- 1. a + a = a;
- 2. $p + p^* = p^*$;

3.
$$0^* = \varepsilon$$
;

4.
$$\varepsilon^* = \varepsilon$$
.

5.2.2 Лінійні рівняння

За аналогією з класичними алгебрами розглянемо лінійне рівняння в алгебрі регулярних виразів: $X = a \cdot X + b$, де a, b — регулярні вирази.

Взагалі кажучи таке рівняння (в залежності від a та b) може мати безліч розв'язків.

Серед всіх розв'язків рівняння з регулярними коефіцієнтами виберемо найменший розв'язок $X=a^\star \cdot b$, який назвемо найменша нерухома точка.

Щоб перевірити, що $a^* \cdot b$ справді розв'язок рівняння в алгебрі регулярних виразів, підставимо його в початкове рівняння та перевіримо тотожність виразів на основі системи тотожних перетворень:

$$a^*b = aa^*b = (aa^* + \varepsilon)b = (a(\varepsilon + a + a^2 + \ldots) + \varepsilon)b = (\varepsilon a + a^2 + \ldots)b = a^*b.$$

5.2.3 Системи рівнянь

В алгебрі регулярних виразів також розглядають і системи лінійних рівнянь з регулярними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + b_1, \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n + b_2, \\ \dots \\ X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n + b_n. \end{cases}$$

Метод розв'язування системи лінійних рівнянь з регулярними коефіцієнтами нагадує метод виключення Гауса.

1. Для $i=\overline{1..n}$, використавши систему тотожних перетворень, записати i-е рівняння у вигляді: $X_i=aX_i+b$, де a— регулярний вираз в алфавіті Σ , а b— регулярний вираз виду

$$\beta_0 + \beta_{i+1} X_{i+1} + \beta_{i+2} X_{i+2} + \ldots + \beta_n X_n$$

де β_k $(k=0,\overline{i+1..n})$ — регулярні коефіцієнти. Далі, в правих частинах рівнянь зі змінними $X_{i+1},X_{i+2},\ldots,X_n$ в лівій частині рівняння підставити замість X_i значення a^*b .

2. Для $i=\overline{n..1}$ розв'язати i-е рівняння яке зараз має вигляд $X_i=aX_i+b$, де a,b — регулярні вирази в алфавіті Σ , і підставити його розв'язок $a^{\star}b$ у коефіцієнти рівнянь зі змінними $X_{i-1},X_{i-2},\ldots,X_1$.

Приклад. Розв'язати систему 2×2 :

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1, \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2. \end{cases}$$

Розв'язок:

1. З першого рівняння

$$X_1 = a_{11}^{\star}(a_{12}X_2 + b_1).$$

2. Підставляємо у друге рівняння, воно набуває вигляду

$$X_2 = a_{21}(a_{11}^{\star}(a_{12}X_2 + b_1)) + a_{22}X_2 + b_2.$$

Або, після спрощень:

$$X_2 = (a_{21}a_{11}^{\star}a_{12} + a_{22})X_2 + (a_{21}a_{11}^{\star}b_1 + b_2).$$

Звідки знаходимо:

$$X_2 = (a_{21}a_{11}^{\star}a_{12} + a_{22})^{\star}(a_{21}a_{11}^{\star}b_1 + b_2).$$

3. Підставляємо у вираз для X_1 :

$$X_1 = a_{11}^{\star} (a_{12}(a_{21}a_{11}^{\star}a_{12} + a_{22})^{\star} (a_{21}a_{11}^{\star}b_1 + b_2) + b_1).$$

Тут можна розкрити дужки, але зараз у цьому немає потреби.

5.3 Контрольні запитання

- 1. Яка множина називається регулярною (в алфавіті Σ)?
- 2. Як регулярні вирази позначаються регулярні множини?
- 3. Які класичні тотожності алгебри регулярних виразів ви знаєте?
- 4. Які не класичні тотожності алгебри регулярних виразів ви знаєте?

- 5. Який розв'язок лінійного рівняння $X = a \cdot X + b$ називається найменшою нерухомою точкою?
- 6. Доведіть, що згаданий у попередньому рівняння вираз справді ϵ розв'язком.
- 7. Сформулюйте алгоритм Гауса розв'язування систем лінійних регулярних рівнянь.
- 8. Розв'яжіть систему 3×3 :

$$\begin{cases} X_1 = aX_1 + bX_2 + c, \\ X_2 = cX_1 + aX_2 + bX_3, \\ X_3 = b + cX_2 + aX_3. \end{cases}$$