Лекция 1

Специальные главы математического анализа

Семестр 4

Из учебного плана:

Лекций – **17** (34 час.)

Практических занятий - **17** (34 час.)

Самостоятельная работа - 40 час.

Расчетно-графическое задание

Экзамен

Всего часов 144, зачетных единиц 4.

План курса

1. Дифференциальные уравнения
2. Операционное исчисление
3. Основные математические структуры

Саксонский философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент Берлинской Академии наук.

Важнейшие научные достижения:

- Лейбниц, независимо от Ньютона, создал математический анализ — дифференциальное и интегральное исчисления.
- Создал комбинаторику как науку.
- Заложил основы математической логики.
- Описал двоичную систему счисления.
- В механике ввёл понятие кинетической энергии и сформулировал закон сохранения энергии.
- Сформулировал один из важнейших вариационных принципов физики — «принцип наименьшего действия».

Го́тфрид Ви́льгельм **Ле́йбниц** (1646 — 1716)

1. Дифференциальные уравнения

- ***Дифференциальное уравнение*** (ДУ) – это уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и её производные.
- ***Решение*** ДУ – искомая функция, которая при подстановке в уравнение превращает его в тождество.

Общий вид ДУ: $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$

- ***Обыкновенные*** ДУ : искомая функция зависит только от одной переменной.
- ***Уравнения в частных производных:*** искомая функция зависит от нескольких переменных.

- ***Общий интеграл*** уравнения – решение ДУ в неявной форме.

- ***Порядок*** ДУ – наивысший порядок производной, входящей в ДУ.

- Процесс поиска решения – ***интегрирование*** ДУ.
- График решения – ***интегральная кривая***.

Примеры:

1. $y' = y;$ - ДУ 1-го порядка. Решение $y = C \cdot e^x;$

2. $y'' + y = 0;$ - ДУ 2-го порядка. Решение $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x;$

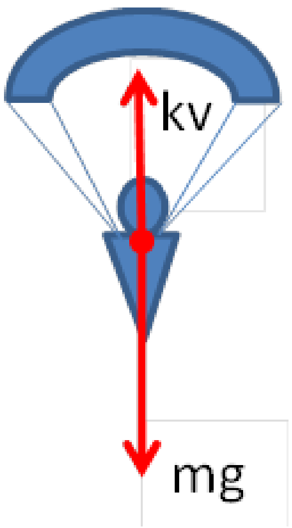
Задачи, приводящие к ДУ

- **Падение тела**

Тело массой m падает с некоторой высоты, причём сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела. Найти зависимость скорости от времени.

Используя закон Ньютона, получим

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv;$$



Решение

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

- **Радиоактивный распад**

Масса радиоактивного вещества уменьшается в результате распада пропорционально имеющейся массе. Найти зависимость массы от времени.

Согласно условию получим уравнение

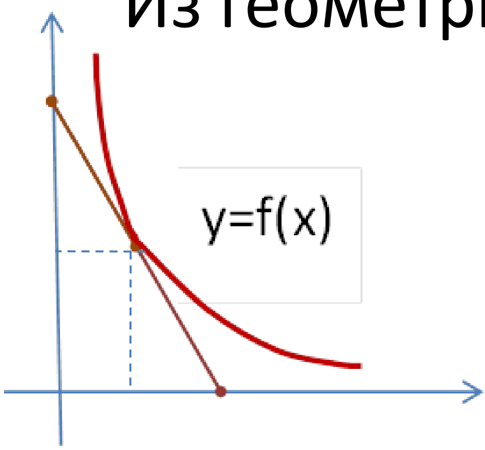
$$\frac{dm}{dt} = -km;$$

Решение

$$m(t) = Ce^{-kt}; \quad (k > 0)$$

- Найти кривую такую, что отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

Из геометрического смысла производной



$$y' = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{y}{x};$$

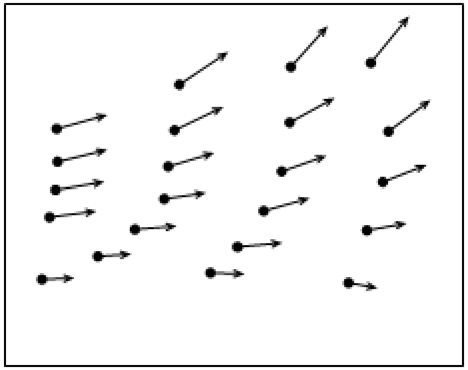
Решение

$$y = \frac{C}{x};$$

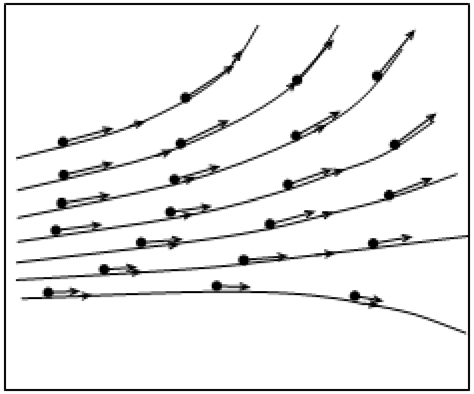
Дифференциальные уравнения первого порядка

В общем виде $F(x;y,y')=0$ или в виде, разрешенном относительно производной $y'=f(x;y)$

Геометрически – это поле направлений на плоскости.



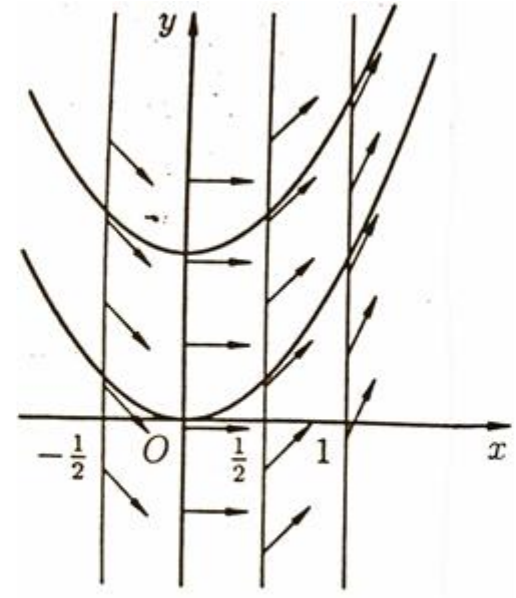
$$y'=f(x;y)$$



поле направлений **интегральные кривые**

Изоклина - кривая, во всех точках которой направление поля одинаково.

Пример: ДУ $y' = 2x$ $y = x^2 + C$



Интегральные кривые – параболы.

Изоклины – вертикальные прямые.

$$y' = const$$

ДУ 1 порядка ***в дифференциальной форме***: $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0.$

где $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ известные функции.

Начальное условие: если $x = x_0$, то $y = y_0$; или

$$y(x_0) = y_0$$

- **Задача 1 (для самостоятельного решения)** Построить поле направлений и изоклины для уравнений

а) $xdx + ydy = 0$

б) $ydx + xdy = 0$

Общее решение ДУ 1 порядка – функция $y = \varphi(x;c)$ такая, что

- при каждом фиксированном значении постоянной C она является решением ДУ;

- для любого начального условия можно найти подходящее значение $c = c_0$, что $y = \varphi(x;c_0)$ будет решением ДУ.

Частное решение ДУ – любая функция $y = \varphi(x;c_0)$, полученная из общего решения при фиксированном значении $c = c_0$.

Задача Коши - задача отыскания решения ДУ 1 порядка, удовлетворяющего заданному начальному условию.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши (Теорема Ковалевской)

Если в уравнении $y' = f(x;y)$ функция $f(x;y)$ и её частная производная $f'_y(x;y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку $(x_0;y_0)$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Идею доказательства используют численные методы решения ДУ 1 порядка – метод Рунге-Кутта, метод Эйлера.

Софья Васильевна Ковалевская
1850 - 1891

русский математик и механик, с 1889 года иностранный член-корреспондент Петербургской Академии наук.

Первая в России и в Северной Европе женщина-профессор и первая в мире женщина - профессор математики.

Участница Парижской Коммуны.

Значительный вклад в теорию вращения твердого тела, дифференциальных уравнений математическую физику, небесную механику. Её имя носит астероид, кратер на Луне, Премия Российской Академии наук.

Методы решения ДУ 1 порядка

❖ <u>Уравнения с разделяющимися переменными</u>

Это уравнения вида $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Для решения следует заменить y' на $\dfrac{dy}{dx}$, разделить переменные $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$

и интегрировать обе части $\displaystyle\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$.

Получим общий интеграл уравнения:

$$F(y) = G(x) + C$$

Уравнение с разделяющимися переменными (УРП) в дифференциальной форме

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)dy = 0.$$

Для решения следует разделить переменные

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$$

и интегрировать $\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C.$

Получим общий интеграл уравнения.

Пример. Решить уравнение

$$\left(x - xy^2\right)dx + \left(y - yx^2\right)dy = 0$$

Решение. Разделяем переменные:

$$x\left(1 - y^2\right)dx + y\left(1 - x^2\right)dy = 0\,; \qquad \frac{xdx}{1-x^2} + \frac{ydy}{1-y^2} = 0\,.$$

Интегрируем: $-\frac{1}{2}\ln\left|1 - x^2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1 - y^2\right| = \frac{1}{2}\ln\left|C\right|$

Окончательно: $\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right) = C.$

Имеет ли это уравнение особые решения?

❖ Однородные ДУ 1 порядка

Это уравнения вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Такое уравнение приводится к УРП заменой $y = tx$.

При этом $y' = t'x + t$ и уравнение приводится к виду

$$t'x + t = f(t) \quad \text{или} \quad \frac{dt}{dx}x = f(t) - t$$

Разделяя переменные, получим $\frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}$

Осталось проинтегрировать обе части уравнения и вернуться к искомой функции заменой $t = \frac{y}{x}$

Однородное уравнение может быть в виде $y' = f\left(x; y\right)$

если функция $f(x; y)$ - однородная порядка 0, т.е.

$$f\left(kx; ky\right) = f(x; y) \quad \forall k \neq 0$$

например,

$$y' = \frac{x - y}{x + y} \quad \text{или} \quad y' = \frac{x^2 - 4xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$$

Метод решения тот же, что и в предыдущем случае, т.е. замена $y = tx$; $y' = t'x + t$.

Пример. Решить уравнение

$$(3x^2 - 2xy) \cdot y' = x^2 + 3xy - y^2$$

Преобразуем:

$$y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy};$$

делаем замену

$$t'x+t=\frac{x^2+3tx^2-t^2x^2}{3x^2-2x^2t}; \qquad t'x+t=\frac{1+3t-t^2}{3-2t};$$

разделяем переменные

$$\frac{dt}{dx}x=\frac{1+3t-t^2}{3-2t}-t=\frac{1+t^2}{3-2t}; \qquad \frac{3-2t}{1+t^2}dt=\frac{dx}{x};$$

интегрируем

$$\int\frac{3-2t}{1+t^2}dt=\int\frac{dx}{x}; \qquad 3\operatorname{arctg}t-\ln(1+t^2)=\ln x+\ln C;$$

упрощаем ответ

$$3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)=\ln Cx;$$

окончательно:

$$\boxed{3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\ln\left(x^2+y^2\right)=\ln\frac{C}{x};}$$

❖ Линейные ДУ 1 порядка

это уравнения вида $y' + p(x) \cdot y = q(x)$,

где $p(x)$ и $q(x)$ известные функции (или константы).

Особенность: искомая функция y и её производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

Рассмотрим два метода решения линейных ДУ:

метод Бернулли и метод Лагранжа.

- Метод Бернулли

делаем подстановку $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - неизвестные функции, одна из которых выбирается из соображений удобства решения. Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Получаем $u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = q(x)$

или $u' \cdot v + u \cdot \left(v' + p(x) \cdot v \right) = q(x)$ *

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы $v' + p(x) \cdot v = 0$

Тогда $\dfrac{dv}{dx} + p(x) \cdot v = 0 \Rightarrow dv = -p(x) \cdot dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln v = -\int p(x) dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x) dx}$$

Подставим найденную функцию v в уравнение *

Получим уравнение (УРП) $u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow$

$\dfrac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow du = q(x) \cdot e^{+\int p(x)dx} dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c$$

Итак $y = u \cdot v = \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c \right) \cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Пример. Решить задачу Коши: $y' + \dfrac{y}{x} = 3x$; $\quad y(1) = 2.$

Решение. Замена $y = u \cdot v \Rightarrow u' \cdot v + u \cdot v' + \dfrac{uv}{x} = 3x$

т.е. $u' \cdot v + u \cdot \left(v' + \dfrac{v}{x} \right) = 3x$. Найдём функцию $v(x)$

из условия $v' + \frac{v}{x} = 0$. Это УРП:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \Rightarrow \quad \ln v = -\ln x; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{x}$$

Теперь, подставляя v в исходное уравнение, найдём функцию $u(x)$:

$$u' \cdot \frac{1}{x} + u \cdot 0 = 3x; \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 3x^2; \quad \Rightarrow \quad u = x^3 + c$$

Итак, общее решение $y = \left(x^3 + c\right) \cdot \frac{1}{x} = x^2 + \frac{c}{x};$

По начальному условию найдём частное решение

$$2 = 1 + c; \Rightarrow c = 1;$$

Ответ: $y = x^2 + \frac{1}{x}.$