Лекция 3

Дифференциальные уравнения высших порядков

- **Уравнения второго порядка** (общий вид)

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (*)$$

Вид, разрешенный относительно старшей производной

$$y'' = f(x, y, y')$$

Общее решение - функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, где

c_1, c_2 - произвольные постоянные,

обращающая уравнение в тождество

и удовлетворяющая любым начальным условиям:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0\,, \quad y'\big|_{x=x_0} = y'_0$$

Задача нахождения частного решения ДУ, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется ***задачей Коши.***

График всякого решения ДУ - **интегральная кривая**.

Теорема *(существования и единственности решения задачи Коши)*

Если в уравнении $y'' = f(x, y, y')$ функция $\boldsymbol{f}$ и её частные производные f'_y и f''_y непрерывны в области D, то для всякой точки $\left(x_0, y_0, y'_0\right)$ из D существует единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее этим начальным условиям.

Уравнения, допускающие понижение порядка

Расмотрим 3 частных случая ДУ 2 порядка

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0 \quad (*)$$

Случай 1. Уравнение $(*)$ не содержит y и y'.

Пусть тогда $y'' = f(x)$.

Двукратное интегрирование даёт общее решение

$$y = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C_2$$

Пример. $y'' = 6x$; $y' = 3x^2 + c_1$; $y = x^3 + c_1 x + c_2$

Случай 2. Уравнение $(*)$ не содержит y .

Пусть тогда $y'' = f(x, y')$.

Сделаем подстановку $y' = p(x)$; при этом $y'' = p'(x)$;

и уравнение примет вид $p' = f(x, p)$.

Это ДУ 1 порядка.

Пример. Решить уравнение $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$

Решение: после подстановки $y' = p(x)$; $y'' = p'(x)$;

получим $p' + p \operatorname{tg} x = \sin 2x$

Это линейное уравнение 1 порядка. Решим его методом Бернулли.

Представим неизвестную функцию $p(x)$ как

$$p(x) = u \cdot v$$

Тогда получим $v' + v \cdot \operatorname{tg} x = 0$ и отсюда $v = \cos x$

Тогда $u' \cos x = \sin 2x;$ $u' = 2 \sin x;$

$$u = -2\cos x + c_1;$$

Следовательно, $p(x) = -2\cos^2 x + c_1 \cdot \cos x;$

то есть $y' = -2\cos^2 x + c_1 \cdot \cos x;$

интегрируя, получим

$$y = -x - \frac{1}{2}\sin 2x + c_1 \sin x + c_2$$

Случай 3. Уравнение $(*)$ не содержит x:

$$F(y, y', y'') = 0$$

Сделаем подстановку $y' = p(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'_y \cdot p.$$

Уравнение примет вид $F(y, p, p') = 0.$ Это ДУ 1 порядка.

Пример. $y'' \cdot \operatorname{tg} y = 2\left(y'\right)^2.$

Вышеприведенная подстановка приводит к виду

$$p'_y \cdot p \cdot \operatorname{tg} y = 2p^2 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2}{\operatorname{tg} y} dy \Rightarrow$$

$$\ln p = 2\ln\sin y + \ln c_1 \Rightarrow p = c_1 \sin^2 y;$$

то есть $y' = c_1 \sin^2 y$

Решим полученное уравнение.

$$y' = c_1 \sin^2 y; \Rightarrow \frac{dy}{\sin^2 y} = c_1 dx \Rightarrow -\operatorname{ctg} y = c_1 x + c_2;$$

Ответ запишем в виде $y = \operatorname{arcctg}(c_1 x + c_2)$

Замечание. Сократив на *p* в начале преобразований, мы могли потерять так называемое ***особое решение:***

$$p = 0 \Rightarrow y = c$$

Таким образом, общее решение уравнения

$y = \operatorname{arcctg}(c_1 x + c_2)$ и $y = c$.

Пример.

$$1+\left(y'\right)^2-2y\cdot y''=0$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения 2 порядка

Общий вид: $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1),$$

где $p(x)$ и $q(x)$ - известные функции.

Свойства решений уравнения

Теорема 1. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - частные решения (1),

то решением является также и

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad \forall C_1, C_2 \in R$$

Доказательство. Подставим $y(x)$ в (1)

$$\left(C_1 y_1'' + C_2 y_2''\right) + p\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) + q\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) =$$

$$C_1 \underbrace{\left(y_1'' + p y_1'' + q y_1\right)}_{0} + C_2 \underbrace{\left(y_2'' + p y_2'' + q y_2\right)}_{0} = 0$$

что и требовалось доказать.

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ линейно независимы на $[a;b]$, если $c_1 f(x)+c_2 g(x)=0 \;\Rightarrow\; c_1=c_2=0$,

т.е. линейная комбинация $c_1 f+c_2 g$ линейно независимых функций равна нулю тогда и только тогда, когда коэффициенты c_1, c_2 равны нулю.

Если же f и g линейно зависимы, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\mathrm{const}$

Например, e^x, $5e^x$ - линейно зависимы;

e^x, e^{-x} - линейно независимы;

$\sin x$, $\cos x$ - линейно независимы;

x, x^2 - линейно независимы.

Определитель Вронского (**вронскиан**) двух гладких функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$$W\left(y_1, y_2\right)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Имеем

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \ ;$$

$$W'(x) = y_1' y_2' - y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$$

Польский математик, философ-мистик. Окончил артиллерийскую школу, принимал участие в обороне Варшавы, служил в штабе Суворова.

В 21 год вышел в отставку, изучал юридические науки, историю философии и высшую математику.

Его математические работы отмечены широтой охвата материала и общностью постановки задач. Они могли произвести переворот в науке. Но его болезненная гордость, склонность к мистицизму и, наконец, сложность использованных обозначений, помешали этому.

Уже после его смерти обнаружено его авторство многих методов и теорем, открытых позже другими математиками.

Юзеф Мария (Хёне) Вроньский

1776-1853

Теорема 2. Если гладкие функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на $(a;b)$, то

$$W\left(y_1, y_2\right)(x) \equiv 0 \qquad \forall x \in (a;b)$$

Доказательство.

Пусть $y_1(x) = ky_2(x)$, тогда $y_1' = ky_2'$ и

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} ky_2 & y_2 \\ ky_2' & y_2' \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

Теорема 3. Если y_1 и y_2 - линейно независимые на (*a;b*) решения уравнения 1 ,

то $$W(y_1, y_2) \neq 0 \quad \forall x \in (a;b)$$

Доказательство.

Так как y_1 и y_2 - решения ур-я 1 , то

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \text{ и } y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$$

Умножим первое уравнение на y_2 , второе – на y_1 и вычтем из второго уравнения первое уравнение.

Получим $\left(y_1 y_2'' - y_1'' y_2\right) + p\left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right) = 0,$ т.е.

$$W' + pW = 0;$$

решаем полученное дифференциальное уравнение

$$\frac{dW}{dx} = -pW; \quad \frac{dW}{W} = -pdx; \quad \ln W = -\int pdx + \ln C$$

$$W = Ce^{-\int p(x)dx} \quad \langle C > 0 \rangle$$

Т.к. $W > 0 \;\; \forall x \in (a;b)$, и теорема доказана.

$$\boxed{W = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}}$$ - **формула Лиувилля**

Теорема 4 (***Структура общего решения уравнения*** 1).

Если y_1 и y_2 - два линейно независимых частных решения уравнения 1 , то общее решение имеет вид $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$,

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Доказательство.

1) по теореме 1 $y\,(x)$ есть решение уравнения 1

2) Докажем, что это <u>общее</u> решение, т.е. для любых начальных условий можно найти C_1, C_2

Пусть начальные условия $y(x_0) = y_0\,; y'(x_0) = y'_0\,;$

$x_0 \in (a;b)$

Тогда $\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) \end{cases}$

Эта система линейных уравнений с неизвестными C_1, C_2 имеет единственное решение, т.к. определитель системы не равен нулю.

$$\Delta = W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$$

(теорема 3 и теорема Кронекера-Капелли).

Следовательно, задача Коши разрешима, и $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ - общее решение уравнения 1

Задача 4 (для самостоятельного решения)

$$y'' - xy' - y = 0$$