Лекция 2

❖ <u>Линейные ДУ 1 порядка</u>

это уравнения вида $y' + p(x) \cdot y = q(x)$,

где $p(x)$ и $q(x)$ известные функции (или константы).

Особенность: искомая функция y и её производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

Рассмотрим два метода решения линейных ДУ:

метод Бернулли и метод Лагранжа.

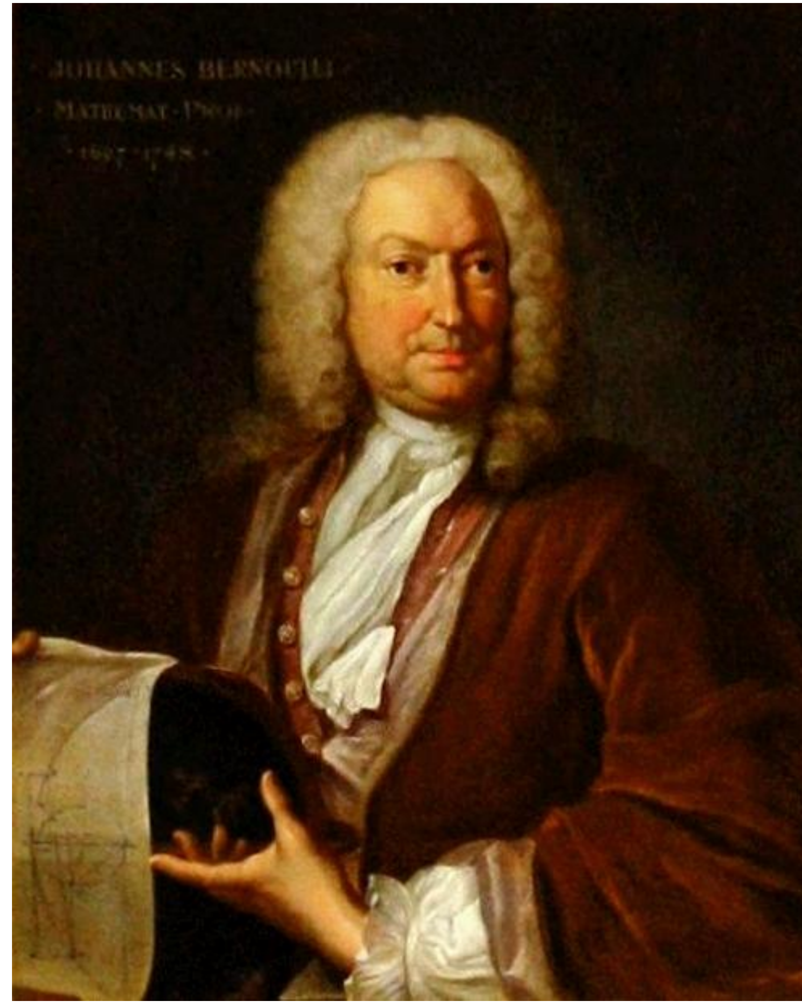
Швейцарский математик, механик, врач и филолог-классицист, самый знаменитый представитель семейства Бернулли (из 30 - 9 крупных, 3 великих) один из первых разработчиков математического анализа.

После смерти Ньютона и Лейбница - лидер европейских математиков.

Один из создателей теории дифференциальных уравнений. Учитель Эйлера.

«Его ум видел истину,
Его сердце познало справедливость.
Он — гордость Швейцарии
И всего человечества.»

Вольтер



Иоганн 1 Бернулли
1667 - 1748

Жозеф Луи Лагранж
1736 - 1813

Французский математик, астроном и механик. Наряду с Эйлером - крупнейший математик 18 века. Особенно прославился исключительным мастерством в области обобщения и синтеза накопленного научного материала.

Автор классического трактата «Аналитическая механика», в котором завершил математизацию механики. Внёс огромный вклад в математический анализ, теорию чисел, теорию вероятностей, численные методы, создал вариационное исчисление. В его честь названы астероид, кратер на Луне, улицы в Париже и Турине.

- Метод Бернулли

делаем подстановку $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - неизвестные функции, одна из которых выбирается из соображений удобства решения. Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Получаем $u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = q(x)$

или $u' \cdot v + u \cdot \left(v' + p(x) \cdot v\right) = q(x)$ *

Выберем (!) функцию $v(x)$ так, чтобы $v' + p(x) \cdot v = 0$

Тогда $\frac{dv}{dx} + p(x) \cdot v = 0 \Rightarrow dv = -p(x) \cdot dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln v = -\int p(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx}$$

Подставим найденную функцию v в уравнение *

Получим уравнение (УРП) и решаем его

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x) \quad \Rightarrow \quad du = q(x) \cdot e^{+\int p(x)dx} dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c$$

Итак

$$y = u \cdot v = \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c \right) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Пример. Решить задачу Коши:

$$y' + \frac{y}{x} = 3x \; ; \quad y(1) = 2.$$

Решение. Делаем замену $y = u \cdot v$. Тогда

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{uv}{x} = 3x \, .$$

Найдём функцию $v(x)$ из условия $v' + \frac{v}{x} = 0$

Это УРП.

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \Rightarrow \quad \ln v = -\ln x; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{x}$$

Теперь, подставляя v в исходное уравнение, найдём функцию $u(x)$:

$$u' \cdot \frac{1}{x} + u \cdot 0 = 3x; \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 3x^2; \quad \Rightarrow \quad u = x^3 + c$$

Итак, общее решение $$y = \left(x^3 + c\right) \cdot \frac{1}{x} = x^2 + \frac{c}{x};$$

По начальному условию найдём частное решение

$$2 = 1 + c; \quad \Rightarrow \quad c = 1;$$

Ответ: $$y = x^2 + \frac{1}{x}.$$

- Метод Лагранжа

(метод вариации произвольной постоянной)

Сначала решается уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$ - без правой части. Это УРП:

$$\frac{dy}{u} = -p(x)dx \Rightarrow \ln y = -\int p(x)dx + \ln C \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Теперь будем варьировать постоянную $C = C(x)$, чтобы получить решение искомого уравнения.

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$y' = C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x))$$

Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим

$$C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} \cancel{+C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\left(-p(x)\right)+}$$

$$\cancel{+p(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}} = q(x)$$

Уравнение примет вид $C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$

Отсюда

$C'(x) = q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$ и $C(x) = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + c$

Окончательно

$$y = \left(\int\left(q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\right)dx + c\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Пример. Решить уравнение $y' + 2xy = 2x$

Решаем сначала уравнение $y' + 2xy = 0$

$$\frac{dy}{y} = -2x \cdot dx \qquad y = c \cdot e^{-x^2}$$

Ищем решение исходного ДУ в виде $y = c(x) \cdot e^{-x^2}$

Имеем $y' = c'(x) \cdot e^{-x^2} + c(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$

Подставляя в уравнение, получим $c'(x) \cdot e^{-x^2} = 2x$

$$c(x) = \int 2xe^{x^2} \cdot dx \qquad c(x) = \int 2xe^{x^2} \cdot dx = e^{x^2} + c$$

Ответ $y = \left(e^{x^2} + c\right) \cdot e^{-x^2} = 1 + ce^{-x^2}$

Некоторые уравнения приводятся к линейным после подходящей замены.

Например: $(x+y)\cdot y'=1$. Учитывая, что $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$

получим $x'=x+y$ - линейное относительно x.

Решение: подстановка $x=u\cdot v$ $\quad x'=u'\cdot v+u\cdot v'$

Получаем $u'\cdot v+u(v'-v)=y$.

Находим v: $v'-v=0$ $\quad v=e^{y}$

Находим u: $u'=y\cdot e^{-y}$ $\quad u=-y\cdot e^{-y}-e^{-y}+c$

Получаем общее решение:

$$x=u\cdot v=\left(-y\cdot e^{-y}-e^{-y}+c\right)\cdot e^{y}=-y-1+c\cdot e^{y}$$

❖ Уравнение Бернулли

это уравнение вида $y' + p(x)\cdot y + q(x)\cdot y^n$,

где $n \in R,\ n \neq 0,\ n \neq 1$

Уравнение приводится к линейному: разделим на y^n

Получим $y^{-n}\cdot y' + p(x)\cdot y^{-n+1} = q(x)$

Делаем замену: $z = y^{-n+1}$ и $z' = \left(1-n\right)\cdot y^{-n}\cdot y'$

Отсюда находим $y^{-n}\cdot y' = \dfrac{z'}{1-n}$

Уравнение примет вид $\dfrac{1}{1-n}\cdot z' + p(x)\cdot z = q(x)$

Это линейное уравнение.

❖ Уравнение в полных дифференциалах

это уравнение вида $P(x;y)\,dx+Q(x;y)\,dy=0$, если левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x;y)$, т.е. $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=du(x;y)$

В этом случае решение (общий интеграл) имеет вид

$$u(x;y)=c.$$

Условие, что имеем такое уравнение: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Решение: $u(x;y)=\int P(x;y)dx+\varphi(y)$ (y - фиксировано)

а функцию $\varphi(y)$ ищем по формуле

$$\varphi(y)=\int\left(Q(x;y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x;y)\,dx\right)\right)dy+c$$

Пример. Решить уравнение $y' = \dfrac{5 - 2xy}{3y^2 + x^2}$

Запишем в дифференциальной форме:

$$\left(2xy - 5\right)dx + \left(3y^2 + x^2\right)dy = 0$$

Условие Грина выполнено: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$

Решение:

$$u\left(x; y\right) = \int \left(2xy - 5\right)dx = x^2 y - 5x + \varphi\left(y\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2 y - 5x + \varphi\left(y\right)\right)'_y = x^2 + \varphi'\left(y\right) \quad \Rightarrow \quad \varphi'\left(y\right) = 3y^2$$

Общий интеграл уравнения: $x^2 y - 5x + y^3 = c$

Задача 2 (для самостоятельного решения)

Решить дифференциальное уравнение

$$y(x) = \int_0^x y(t)dt + x + 1$$

Задача 3 (для самостоятельного решения)

За 30 дней распалось 50% первоначального количества радия. Через сколько времени останется 1% от начальной массы?

(скорость распада радия пропорциональна его количеству)