# Лекция 7

# Преобразование Лапласа

$$F(p)=\int\limits_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

$\boldsymbol{f(t)}$ - функция-оригинал;

$F(p)=L\ f(t)$ - изображение или трансформанта

Обозначение: $f(t) \risingdotseq F(p)$

# Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность: $\alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \fallingdotseq \alpha \cdot F_1(p) + \beta \cdot F_2(p)$

2. Теорема подобия: $f(at) \fallingdotseq \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{p}{a}\right)$

3. Дифференцирование оригинала

$$f'(t) \fallingdotseq pF(p) - f(0)$$

4. Дифференцирование изображения

$$F'(p) \fallingdotseq (-t) \cdot f(t)$$

# Применение операционного метода для решения дифференциальных уравнений

Решить ДУ $$x'(t) - 4x(t) = 1 - 4t; \quad x(0) = 1$$

**Решение**: пусть $x(t) \risingdotseq X(p);$

тогда $$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p}; \quad 4t \risingdotseq \frac{4}{p^2};$$

Получим ***изображающее уравнение***

$$pX(p) - 1 - 4X(p) = \frac{1}{p} - \frac{4}{p^2};$$

Выразим X(p)

$$X(p)\ \ p-4\ =\frac{1}{p}-\frac{4}{p^2}+1;$$

$$X(p)=\frac{p-4+p^2}{p^2\ \ p-4}=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p-4};$$

Восстановим оригинал $x(t)$

$$x(t)=t+e^{4t}$$

# 5. Интегрирование оригинала

Пусть f(t) $\risingdotseq$ F(p).

Тогда функция $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ также является оригиналом,

при этом $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$.

**Доказательство**. Пусть $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$. Тогда

$$\varphi'(t) = \left(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right)' = f(t).$$

С другой стороны о свойству дифференцирования оригинала

$$\varphi'(t) \risingdotseq p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p).$$

Таким образом, $F(p) = p\Phi(p)$ или $\Phi(p) = \dfrac{F(p)}{p}$.

**Пример 9.** Найти изображение $f(t) = \int_0^t e^{\tau} d\tau$

**Решение.** Известно, что $e^t \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}$. Тогда

$$\int_0^t e^{\tau} d\tau \risingdotseq \frac{1}{p\left(p^2+1\right)}.$$

# 6. Интегрирование изображения

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$ , и пусть интеграл $\int\limits_p^{\infty} F(z)dz$ сходится.

Тогда $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{\infty} F(z)dz$ .

Доказательство:

$$\int\limits_p^{\infty} F(z)dz = \int\limits_p^{\infty}\left(\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-zt}dt\right)dz = \int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_p^{\infty} e^{-zt}dz\right)f(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{\infty}\left(-\frac{1}{t}e^{-zt}\Big|_p^{\infty}\right)f(t)dt = \int\limits_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt \risingdotseq \frac{f(t)}{t}.$$

**Пример 10**.

Найдем изображение функции $\dfrac{\sin t}{t}$.

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

Найдем изображение интегрального синуса

$$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \risingdotseq \frac{\operatorname{arcctg} p}{p} = \frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{arctg} p}{p}.$$

# 7. Теорема смещения (затухания)

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда для любого комплексного числа *a* справедливо соотношение

$$e^{at} f(t) \risingdotseq F(p-a),$$ где $\operatorname{Re}(p-a) > s_0$

Доказательство.

$$e^{at} f(t) \risingdotseq \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a)$$

## Пример 11.

Найдём изображение для оригинала $e^{at}\sin\omega t$

Так как $\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, то $e^{at}\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$

Аналогично, $e^{at}\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p-a}{\left(p-a\right)^2+\omega^2}$

**Обратная задача**.

Найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{2p-5}{p^2-6p+13}$$

**Решение:**

$$\frac{2p-5}{p^2-6p+13} = \frac{2(p-3)+1}{(p-3)^2+4} = 2\frac{p-3}{(p-3)^2+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p-3)^2+4} \risingdotseq$$

$$\fallingdotseq 2e^{3t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{3t}\sin 2t$$

# 8. Теорема сдвига (запаздывания)

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$ и число $\tau > 0$. Тогда

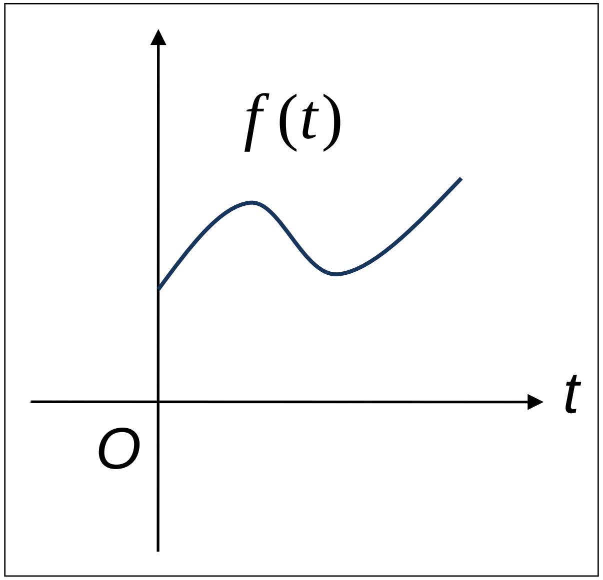
$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$$

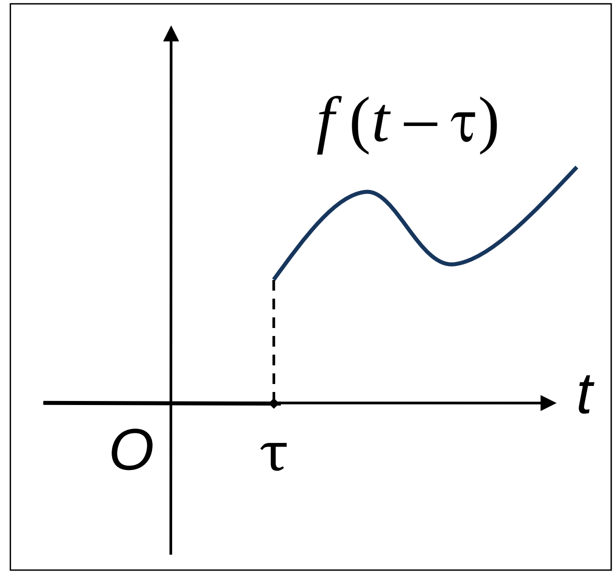
Доказательство.

$$\int_0^{\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt = \left| \begin{matrix} t-\tau = x \\ t = x+\tau \end{matrix} \right| = \int_{-\tau}^{\infty} f(x) e^{-p(x+\tau)} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} e^{-p\tau} dx = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx = e^{-p\tau} F(p)$$

# Что значит «запаздывание»?



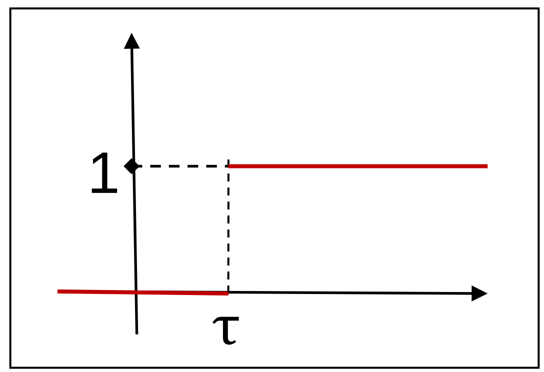




$$f(t) = f(t)\chi(t)$$

$$f(t-\tau) = f(t-\tau)\chi(t-\tau)$$

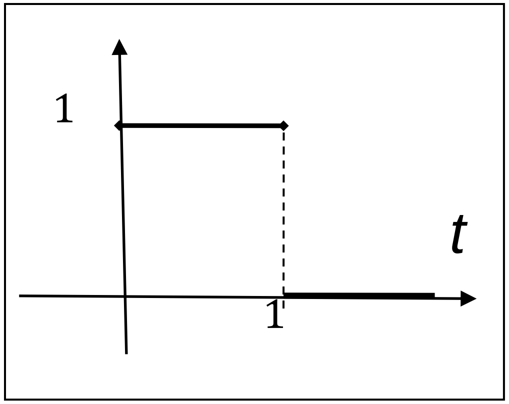
Единичная функция Хевисайда

со сдвигом (запозданием) на $\tau$



Задача 1. Найти изображение единичного импульса

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t\le 1\\ 0 & t>1\end{cases}$$




Решение:

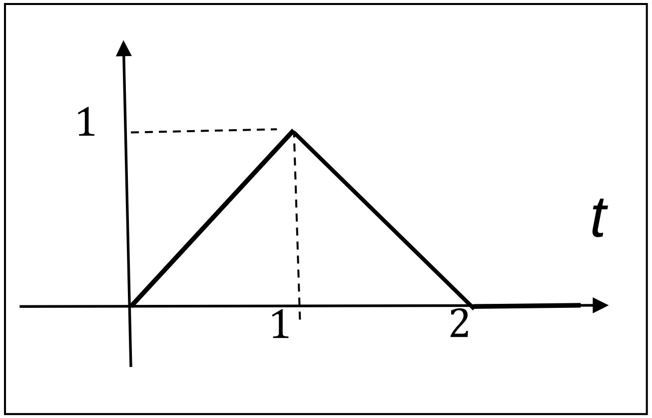
Представим данную функцию с помощью функций Хевисайда

$$f(t)=\chi(t)-\chi(t-1)$$

Тогда

$$f(t)=\chi(t)-\chi(t-1)\risingdotseq\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-p}=\frac{1-e^{-p}}{p}$$

Задача 2. Найти изображение функции, заданной графически




Решение:

$$f(t)=t\chi\left(t\right)-t\chi\left(t-1\right)+(2-t)\chi\left(t-1\right)-(2-t)\chi\left(t-2\right)$$

или (после приведения подобных)

$$f(t)=t\chi\left(t\right)-2(t-1)\chi\left(t-1\right)+(t-2)\chi\left(t-2\right)$$

Тогда

$$F(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p^2}e^{-p}+\frac{1}{p^2}e^{-2p}$$