Лекция 4

Теорема 4. Структура общего решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 1 .

Если y_1 и y_2 - два линейно независимых частных решения уравнения 1, то общее решение имеет вид $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$,

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Доказательство.

1) по теореме 1 y(x) есть решение уравнения 1

2) Докажем, что это <u>общее</u> решение, т.е. для любых начальных условий можно найти C_1, C_2

Пусть начальные условия $y(x_0)=y_0\,; y'(x_0)=y'_0\,;$

$x_0 \in (a;b)$

Тогда $\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) \end{cases}$

Эта система линейных уравнений с неизвестными C_1, C_2 имеет единственное решение, т.к. определитель системы $\Delta = W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. (теорема Кронекера-Капелли)

Следовательно, задача Коши разрешима, и $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ - общее решение уравнения 1

Фундаментальная система решений уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

это совокупность линейно независимых частных решений (1) такая, что любое другое частное решение есть линейная комбинация этой системы.

Для уравнения (1) любые два линейно независимых частных решения образуют фундаментальную систему решений.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2 порядка

Общий вид: $$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2)$$

Соответствующее ему однородное уравнение:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

Теорема. Структура общего решения уравнения (2).

Общим решением ДУ (2) является сумма общего решения ДУ (1) $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ и какого-либо частного решения y^* ДУ (2), т.е. $y = \bar{y} + y^*$.

Доказательство.

1) Докажем, что $y = \overline{y} + y^*$ - решение ДУ 2

$$\left(\overline{y} + y^*\right)'' + p\left(\overline{y} + y^*\right)' + q\left(\overline{y} + y^*\right) =$$

$$= \underbrace{\left(\overline{y}\right)'' + p\left(\overline{y}\right)' + q\overline{y}}_{0} + \underbrace{\left(y^*\right)'' + p\left(y^*\right)' + qy^*}_{f(x)} = f(x)$$

2) Докажем, что это общее решение. Пусть даны какие-то начальные условия $y(x_0) = y_0\,; y'(x_0) = y'_0\,;$

Тогда
$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y^*(x_0) = y_0 \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + \left(y^*\right)'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Эта система линейных уравнений с неизвестными C_1, C_2 имеет единственное решение, т.к. определитель системы есть не равный нулю определитель Вронского $\Delta = W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$

(следует из теоремы Кронекера–Капелли)

Теорема (о наложении решений)

Пусть y_1^* - частное решение ДУ $y'' + py' + qy = f_1(x)$

и y_2^* - частное решение ДУ $y'' + py' + qy = f_2(x)$

тогда $y^* = y_1^* + y_2^*$ - решение ДУ

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$

(доказать самостоятельно)

Линейные ДУ 2 порядка с постоянными коэффициентами без правой части (однородные)

Общий вид

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

где p, q – постоянные коэффициенты.

Будем искать частные решения в виде $y = e^{kx}$.

Тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$.

Подставим в уравнение:

$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$ или $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$

$$\boxed{k^2 + pk + q = 0}$$

- ***характеристическое уравнение.***

Дискриминант $D = p^2 - 4q$

Возможны 3 случая:

1) $D > 0;$

2) $D = 0;$

3) $D < 0;$

Случай 1. Дискриминант характеристического уравнения больше нуля: $D = p^2 - 4q > 0$.

Тогда это уравнение имеет два различных корня $k_1 \neq k_2$

В этом случае функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$ линейно независимые решения ДУ 1 и они образуют ***фундаментальную систему решений***.

Общее решение запишем в виде: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

Пример. Решить уравнение $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Решение. Выпишем характеристическое уравнение

$k^2 + 5k + 6 = 0$ Дискриминант $D = 25 - 24 = 1 > 0$

Корни $k_1 = -3;\ k_2 = -2.$ Общее решение:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

Случай 2. Дискриминант характеристического уравнения равен нулю: $D = p^2 - 4q = 0$.

Тогда это уравнение имеет два равных корня $k_1 = k_2 = k$

В этом случае функция $y_1 = e^{kx}$ - одно из частных решений. Второе, линейно независимое от первого, будем искать в виде: $y_2 = xe^{kx}$.

Убедимся, что это решение уравнения 1 : подставим

$$y_2' = e^{kx} + kxe^{kx}; \qquad y_2'' = ke^{kx} + ke^{kx} + k^2xe^{kx};$$

$$\left(2ke^{kx} + k^2xe^{kx}\right) + p\left(xe^{kx} + ke^{kx}\right) + qxe^{kx} =$$

$$= e^{kx}\left(2k + k^2x + p + pkx + qx\right) =$$

$$= e^{kx}\left(x\underbrace{\left(k^2 + pk + q\right)}_{0} + \underbrace{\left(p + 2k\right)}_{0}\right) = 0$$

Таким образом, линейно независимые функции

$$y_1 = e^{kx} \quad \text{и} \quad y_2 = xe^{kx}$$

образуют ***фундаментальную систему решений*** уравнения 1 и общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$$

Пример. Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ имеет два равных корня $k_1 = k_2 = 3.$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Случай 3. Дискриминант характеристического уравнения меньше нуля. Корни его – два комплексных сопряженных числа

$$k_1 = \alpha + i\beta\,;\; k_2 = \alpha - i\beta, \quad \text{где} \quad \alpha = -\frac{p}{2};\;\; \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Соответствующие решения

$$y_1 = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right);\; y_2 = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)$$

- это *комплексные* функции.

Найдём два *действительных* частных решения ДУ 1

$$\tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x; \quad \tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Решения $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ образуют **фундаментальную систему решений**, т.к. $W(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \neq 0$

(доказать самостоятельно)

Итак, общее решение уравнения 1 в случае 3:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

Пример. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$

Дискриминант $D = 4 - 20 = -16 < 0$. Корни $k = -1 \pm 4i$

т.е. $\alpha = -1; \beta = 4$ Тогда общее решение имеет вид:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$$

Задача 5(для самостоятельного решения)
Решить дифференциальное уравнение

$$\int_{0}^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos\omega\, d\omega}{16+9\sin^{2}\omega} = \frac{1}{12}\operatorname{arctg} x$$

Линейные ДУ 2 порядка с постоянными коэффициентами с правой частью (неоднородные)

Общий вид: $y'' + py' + qy = f(x)$ 2 где p, q - постоянные коэффициенты, правая часть $f(x)$ - некоторая функция.

По теореме (о структуре) общий вид решения: $y = \overline{y} + y^*$

где $\overline{y}$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, а y^* -какое-либо частное решение ДУ 2

Поиск y^* зависит от правой части (функции $f(x)$).

Рассмотрим случаи, когда $f(x)$ имеет «**специальный вид**»

Случай 1: Правая часть имеет вид $f(x) = ae^{\alpha x}$.

Тогда будем искать частное решение y^* в подобном же виде: $y^* = Ae^{\alpha x}$.

Однако, если один из корней характеристического уравнения равен α, то полагаем $y^* = Axe^{\alpha x}$

Если же оба корня характеристического уравнения равны α: $k_1 = k_2 = \alpha$, то полагаем $y^* = Ax^2e^{\alpha x}$

Коэффициент *A* находится методом неопределенных коэффициентов.

Пример.

$$y'' - 3y' + 2y = 12e^{-x}$$

Случай 2. Правая часть есть многочлен степени *m* от x

$$f(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

Тогда ищем y^* в виде $y^* = R_m(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m$

Однако, если один из корней характеристического уравнения равен нулю, то полагаем

$$y^* = xR_m(x) = A_0 x + A_1 x^2 + \cdots + A_m x^{m+1}$$

Пример. $y'' - 3y' = x + 1; \quad y(0) = 1; \; y'(0) = 1.$

Случай 3. Правая часть есть линейная комбинация тригонометрических функций $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$

Тогда ищем частное решение в виде

$$y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

Однако, если корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm i\beta$, то полагаем $y^* = x\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$

Случай 4. Правая часть $y^* = R_m(x)e^{\alpha x}$

В этом случае $y^* = R_m(x)e^{\alpha x}$

Если же один из корней характеристического уравнения равен α, то , как всегда в этом случае, умножаем y^* на x

$$y^* = xR_m(x)e^{\alpha x}$$

Если оба корня равны α, то умножаем y^* на x^2

$$y^* = x^2R_m(x)e^{\alpha x}$$

Случай 5 (наиболее общий). Правая часть имеет вид:

$$f(x) = \left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x \right) e^{\alpha x}$$

При отсутствии «резонанса» ищем y^* в виде

$$y^* = \left(R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x \right) e^{\alpha x}$$

где $l = \max(m, n)$

Если же корни характеристического уравнения

$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то

$$y^* = x\left(R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x \right) e^{\alpha x}$$