**РАЗДЕЛ 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

**3.1. Прямая линия на плоскости**

***1. Уравнение произвольной линии в декартовых и полярных координатах***

***Уравнение произвольной линии в декартовых координатах***

Уравнением линии относительно фиксированной системы координат называют такое, уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на данной линии.

Уравнение линии в декартовых координатах в общем виде записывается так:

***F(x,y) = 0***

Где ***F(x,y)—*** функция переменных х и у.

Пример 1.9. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точекhttp://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-134.png

Пусть ***M(x,y)*** - произвольная точка данного геометрического места. По условиюhttp://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-136.pngПо формуле (1.9) получаем

http://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-137.png

Подставляя эти выражения в равенство http://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-138.png находим уравнение данного множества точек:

http://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-139.png

Упростим это уравнение. Возведем в квадрат обе части уравнения и раскроем скобки в подкоренных выражениях:

http://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-140.png

Произведя преобразования, получим ***3x+y–1=0***. Это уравнение прямой линии.

Пример 1.10. Составить уравнение окружности радиуса R с центром в точкеhttp://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-143.png

Пусть ***M(x,y)*** — произвольная точка данной окружности. По определению

Окружности (как множества точек, равноудаленных от данной точки) для любой ее

Точки имеемhttp://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-145.pngВыражая расстояние между точками ***M*** и ***C.*** По формуле

http://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-148.pngИ подставляя его в левую часть данного равенства, получим уравнениеhttp://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-149.pngКоторое можно записать так:

http://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-150.png(1.16)

Уравнение (1.16) является уравнением окружности радиуса R с центром в точке C (a, b)

Если точка С совпадает с началом координат, то уравнение (1.16) принимает вид

http://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-153.png(1.17)

Замечание. Если точка ***N(x,y)*** лежит внутри круга радиуса R с центром в начале координат, то ее координаты удовлетворяют неравенствуhttp://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-156.png если вне указанного круга, то неравенствуhttp://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-157.png

Пример 1.11. Точка М движется так, что в любой момент времени ее расстояние до точки A(4,0) вдвое больше расстояния до точки В(1,0). Найти уравнение траектории движения точки М.

Текущие координаты точки М в прямоугольной декартовой системе координат обозначим через x,y. По условию ***|MA|=2|MB|.*** Выразим длины отрезков МА и MB через координаты соответствующих точек с помощью формулы (1.9):

http://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-165.png

Подставляя эти выражения в равенство ***|MA|=2|MB|*** получаем уравнение траектории движения точки М:http://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-167.pngУпростим это уравнение, для чего возведем в квадрат обе части и приведем подобные члены

http://matica.org.ua/images/stories/Gusak/0-168.png

Итак, траекторией движения точки М является окружность радиуса R=2 с центром в начале координат.

***Уравнение произвольной линии в полярных координатах***

Уравнением прямой в полярных координатах называется уравнение вида

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/SYASINA/WEBUMK/frame/2_1_2.files/image314.gif

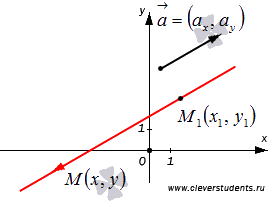
 где http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/SYASINA/WEBUMK/frame/2_1_2.files/image316.gif расстояние от полюса http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/SYASINA/WEBUMK/frame/2_1_2.files/image318.gif до данной прямой; http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/SYASINA/WEBUMK/frame/2_1_2.files/image320.gif угол между полярной осью http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/SYASINA/WEBUMK/frame/2_1_2.files/image322.gif и осью http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/SYASINA/WEBUMK/frame/2_1_2.files/image324.gif, проходящей через полюс http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/SYASINA/WEBUMK/frame/2_1_2.files/image326.gif перпендикулярно данной прямой; http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/SYASINA/WEBUMK/frame/2_1_2.files/image328.gif и http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/SYASINA/WEBUMK/frame/2_1_2.files/image330.gif координаты точки лежащей на прямой M(http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/SYASINA/WEBUMK/frame/2_1_2.files/image328.gif, http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/SYASINA/WEBUMK/frame/2_1_2.files/image332.gif).

***2. Прямая на плоскости: каноническое уравнение, уравнение в угловым коэффициентом, уравнение прямой, проходящей через данную точку (перпендикулярно вектору, параллельно вектору, с заданным угловым коэф.), уравнение прямой, проходящей через 2 точки.***

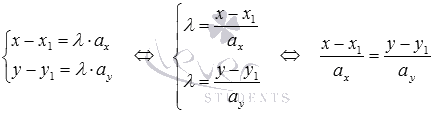
***Прямая на плоскости: каноническое уравнение***

Пусть на плоскости зафиксирована [прямоугольная декартова система координат](http://www.cleverstudents.ru/vectors/cartesian_rectangular_coordinates.html) *Oxy*. Поставим себе задачу: получить уравнение прямой *a*, если формула - некоторая точка прямой *a* и формула - направляющий вектор прямой *a*.

Пусть М(х,у) - плавающая точка прямой *a*. Тогда вектор формула является направляющим вектором прямой *a* и имеет координаты формула (при необходимости смотрите статью нахождение координат вектора через координаты точек). Очевидно, что множество всех точек М(х,у)  на плоскости определяют прямую, проходящую через точку формула и имеющую направляющий вектор формула тогда и только тогда, когда векторы формула и формула коллинеарны.



Запишем необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов формула и формула: формула. Последнее равенство в координатной форме имеет вид формула.

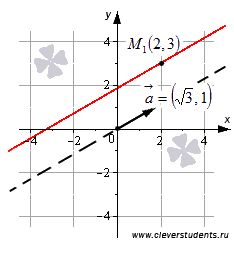
Если формула и формула, то мы можем записать  


Полученное уравнение вида формула называют **каноническим уравнением прямой на плоскости** в прямоугольной системе координат *Oxy*.

Итак, каноническое уравнение прямой на плоскости вида формула задает в прямоугольной системе координат *Oxy* прямую линию, проходящую через точку формула и имеющую направляющий вектор формула.

Приведем пример канонического уравнения прямой на плоскости.

К примеру, уравнение формула является уравнением прямой в каноническом виде. Прямая, соответствующая этому уравнению, проходит через точку формула, а формула - ее направляющий вектор. Ниже приведена графическая иллюстрация.



*Пример.*

Прямая в прямоугольной системе координат *Oxy* на плоскости проходит через точку формула и формула - направляющий вектор этой прямой. Напишите каноническое уравнение этой прямой.

*Решение.*

Каноническое уравнение прямой на плоскости в прямоугольной системе координат *Oxy* в общем случае имеет вид формула. В нашем примере формула, тогда формула. Последнее равенство и дает нам искомое каноническое уравнение прямой на плоскости.

*Ответ:*

формула

***Уравнение прямой с угловым коэффициентом***

**Угловым коэффициентом прямой** называется тангенс угла наклона этой прямой.

Угловой коэффициент прямой обычно обозначают буквой *k*. Тогда по определению

формула

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид формула, где k - угловой коэффициент прямой, b – некоторое действительное число. Уравнением прямой с угловым коэффициентом можно задать любую прямую, не параллельную оси Oy (для прямой параллельно оси ординат угловой коэффициент не определен).

Давайте разберемся со смыслом фразы: «прямая на плоскости в фиксированной системе координат задана уравнением с угловым коэффициентом вида формула». Это означает, что уравнению формула удовлетворяют координаты любой точки прямой и не удовлетворяют координаты никаких других точкек плоскости. Таким образом, если при подстановке координат точки формула в уравнение прямой с угловым коэффициентом формула получается верное равенство, то прямая проходит через эту точку. В противном случае точка не лежит на прямой.

**Пример**. Прямая задана уравнением с угловым коэффициентом формула. Принадлежат ли точки формула и формула этой прямой?

Решение. Подставим координаты точки формула в исходное уравнение прямой с угловым коэффициентом: формула. Мы получили верное равенство, следовательно, точка М1 лежит на прямой.

При подстановке координат точки формула получаем неверное равенство: формула. Таким образом, точка М2 не лежит на прямой.

Ответ: точка М1 принадлежит прямой, М2 – не принадлежит.

***Уравнение прямой, проходящей через данную точку   
перпендикулярно данному вектору.***

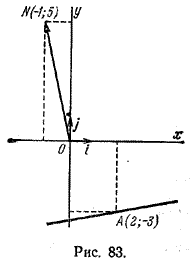
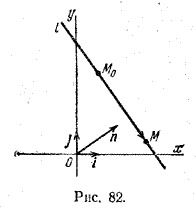
Пусть дана некоторая точка М0 и вектор ***n***. Проведем через точку М0 прямую *l* перпендикулярно вектору ***п*** (рис. 82).

Пусть М — произвольная точка. Точка М лежит на прямой *l* в том и только в том случае, когда вектор **M**0**M**> перпендикулярен вектору ***n***, а для этого необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение векторов ***п*** и **M**0**M**> равнялось нулю:

***п*** • **M**0**M**>  = 0.              (1)

Чтобы выразить последнее равенство в координатах, введем прямоугольную декартову систему координат. Пусть точки М0 и М имеют координаты (*х*0 *; у*0 ) и (*х; у*).   
Тогда    **M**0**M**> = (*х* — *х*0; *у* — *у*0).   Обозначим координаты нормального вектора ***п***через (А; В). Теперь равенство (1) можно записать так:

А(*х* — *х*0) + В(*у* — *у*0) = 0.                     (2)

Уравнение (2) *есть уравнение прямой l, проходящей через данную точку*М0(*х*0 *; у*0 )  *перпендикулярно данному вектору* ***n*** = (А; В).

**Задача 1.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку А (2; —3) перпендикулярно вектору ***n*** = (—1;5) (рис.83). Пользуясь формулой (2), находим уравнение данной прямой: -1 • (*x* - 2) + 5 • (у + 3) = 0 или, окончательно, *x* - 5*у* - 17 = 0.

**Уравнение прямой, проходящей через заданную точку плоскости параллельно заданной прямой.**

Чтобы составление уравнения прямой, проходящей через заданную точку плоскости параллельно заданной прямой, не вызвало затруднений, вспомним важные факты.

*Аксиома параллельных прямых гласит:* на плоскости через точку, не лежащую на заданной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной. Таким образом, мы можем определить конкретную прямую *a* на плоскости, указав прямую линию *b*, которой параллельна прямая *a*, и точку *М1*, не лежащую на прямой *b*, через которую проходит прямая *a*.

Поставим перед собой следующую задачу.

Пусть на плоскости зафиксирована прямоугольная декартова система координат *Oxy*. Пусть в этой системе координат задана точка формула и прямая *b*, которой соответствует некоторое уравнение прямой на плоскости. Требуется написать уравнение прямой *a*, которая проходит через точку *М1* и параллельна прямой *b*.

Решим поставленную задачу.

Из условия мы знаем координаты точки *М1*, через которую проходит прямая *a*. Этих данных не достаточно, чтобы написать уравнение прямой *a*.

Нам еще нужно знать

* или координаты направляющего вектора прямой *a* (тогда мы сможем записатьканоническое уравнение прямой на плоскости и параметрические уравнения прямой на плоскости),
* или координаты нормального вектора прямой *a* (тогда мы сможем составитьобщее уравнение прямой *a*),
* или угловой коэффициент прямой *a* (в этом случае мы сможем написатьуравнение прямой с угловым коэффициентом).

Как же их найти?

По условию прямая *a* параллельна прямой *b*, тогда, на основании необходимого и достаточного [условия параллельности двух прямых](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/parallel_lines.html#samples) на плоскости, в качестве направляющего вектора прямой *a* мы можем принять направляющий вектор прямой *b*, в качестве нормального вектора прямой *a* мы можем взять нормальный вектор прямой *b*, а угловой коэффициент прямой *a* равен угловому коэффициенту прямой *b*(или они оба бесконечны).

Таким образом, чтобы в прямоугольной системе координат на плоскости написать уравнение прямой *a*, проходящей через заданную точку формула параллельно заданной прямой *b*, нужно определить

* или координаты направляющего вектора прямой *b* (формула),
* или координаты нормального вектора прямой *b* формула,
* или угловой коэффициент прямой *b* (формула),

принять их соответственно в качестве

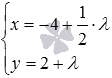
* координат направляющего вектора прямой *a* (формула),
* координат нормального вектора прямой *a* (формула),
* углового коэффициента прямой *a* (формула),

и записать требуемое уравнение прямой *a* соответственно в виде

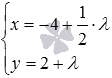
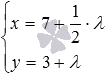
* формула или формула,
* формула,
* формула.

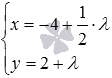
Внесем ясности – приведем примеры с подробными решениями на каждый случай.

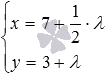
*Пример.*

Напишите уравнение прямой, которая в прямоугольной системе координат *Oxy*на плоскости проходит через точку формула параллельно прямой .

*Решение.*

Из параметрических уравнений прямой  нам сразу видны координаты ее направляющего вектора формула. Этот вектор является направляющим вектором прямой, уравнение которой нам требуется составить. Уравнение прямой, проходящей через точку формула и имеющей направляющий вектор с координатами формула, имеет вид .

Это и есть искомые уравнения прямой, проходящей через заданную точку формула параллельно заданной прямой .

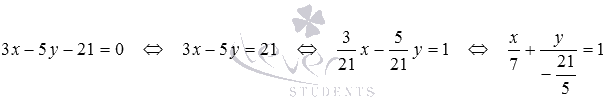
*Ответ:* 

Иногда требуется составить уравнение прямой определенного вида, проходящей через заданную точку плоскости параллельно заданной прямой. В этом случае сначала записываем уравнение прямой, которое проще всего получить, после чего приводим его к нужному виду.

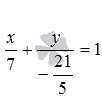
*Пример.*

Составьте уравнение прямой в отрезках, если эта прямая в прямоугольной системе координат *Oxy* проходит через точку плоскости с координатами формулапараллельно прямой формула.

*Решение.*

Очевидно, нормальным вектором прямой, общее уравнение которой имеет вид формула, является вектор формула. Этот вектор также является нормальным вектором прямой, уравнение которой мы ищем. Общее уравнение прямой, проходящей через точку с координатами формула и имеющей нормальный вектор формула имеет вид формула. Это общее уравнение прямой, проходящей через точку с координатами формула параллельно прямой формула. Осталось перейти от полученного уравнения прямой формула к требуемому уравнению прямой в отрезках: .

*Ответ:*

.

*Пример.*

Напишите уравнение прямой, которая в прямоугольной системе координат *Oxy*на плоскости проходит через точку формула и параллельна прямой формула.

*Решение.* Мы знаем, что угловые коэффициенты параллельных прямых равны (или бесконечны), тогда формула - угловой коэффициент прямой, уравнение которой нам требуется составить. По условию эта прямая проходит через точку формула, следовательно, ее уравнение имеет вид формула.

*Ответ:* формула

.

***Уравнение прямой, проходящей через точку, с заданным угловым коэффициентом***

На плоскости дана точка http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image072.gif.  Прямая, угловой коэффициент http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image012.gif которой задан, проходит через эту точку http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image072.gif (рис. 6).  Уравнение ее имеет вид: Подпись:  

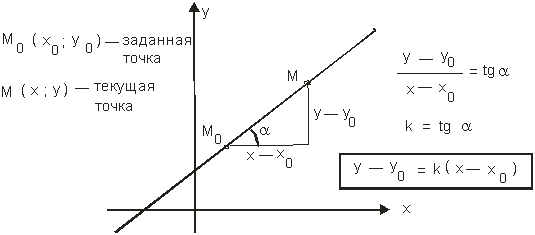


Рис. 6. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image072.gif, с заданным угловым коэффициентом  k

***Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки***

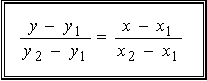
На плоскости даны две точки http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image080.gif и http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image082.gif. Уравнение прямой, проходящей через эти точки, очень легко написать. На прямой возьмем текущую, т. е. любую, точку http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image084.gif. Построим два вектора http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image086.gif и http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image088.gif. По построению эти векторы коллинеарны. Условие коллинерности – это пропорциональность одноименных координат векторов:http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image090.gif. Это и есть искомое уравнение.

Преобразуем полученное равенство:

http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image092.gif

Заметим, что отношение http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image094.gif  есть ни что иное  как угловой коэффициент http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image012.gif (рис. 7), т. е.  http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image096.gif.

***Уравнение прямой, проходящей через две точки http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image080.gif  и  http://edu.dvgups.ru/metdoc/enf/prmatem/v_matem/metod/ushakova/frame/6.files/image082.gif, имеет вид***



|  |
| --- |
|  |

***3. Прямая на плоскости: общее уравнение прямой на плоскости, неполные уравнения прямой, уравнение в отрезках и параметрические уравнения.***

***Общее уравнение прямой на плоскости***

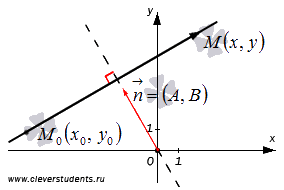
Всякое уравнение первой степени вида формула, где А, В и С – некоторые действительные числа, причем А и В одновременно не равны нулю, задает прямую линию в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости, и любая прямая в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости задается уравнением вида формула при некотором наборе значений A, B и C.

*Доказательство.*

Докажем сначала, что уравнение вида формула задает прямую на плоскости.

Пусть координаты точки формула удовлетворяют уравнению формула, то есть, формула.Вычтем из левой и правой частей уравнения формула соответственно левую и правую части равенства формула, при этом получаем уравнение вида формула, которое эквивалентно формула.

Уравнение формула представляет собой необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов формула и формула. То есть, множество всех точек формула определяет в прямоугольной системе координат Oxy прямую линию, перпендикулярную направлению вектора формула. Если бы это было не так, то векторы формула и формула не были бы перпендикулярными и равенствоформула не выполнялось бы.



Таким образом, уравнение формула задает прямую линию в прямоугольной декартовой системе координат Oxy на плоскости, следовательно, эквивалентное ему уравнение вида формула задает эту же прямую. На этом первая часть теоремы доказана.

Теперь докажем, что всякая прямая в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости определяется уравнением первой степени вида формула.

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости задана прямая a, проходящая через точку формула, формула - нормальный вектор прямой a, и пусть формула - плавающая точка этой прямой. Тогда векторы формула и формула перпендикулярны, следовательно, их скалярное произведение равно нулю, то есть, формула. Полученное равенство можно переписать в виде формула. Если принять формула, то получим уравнение формула, которое соответствует прямой a.

На этом доказательство теоремы завершено.

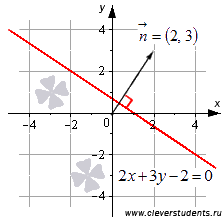
Уравнение вида формула есть общее уравнение прямой на плоскости в прямоугольной системе координат Oxy.

Из доказанной теоремы следует, что в фиксированной прямоугольной декартовой системе координат Oxy на плоскости прямая линия и ее общее уравнение прямой неразделимы. Иными словами, заданной прямой соответствует ее общее уравнение прямой, а этому общему уравнению прямой соответствует заданная прямая.

Из доказательства теоремы также видно, что коэффициенты А и В при переменных xи y являются соответствующими координатами нормального вектора прямой, заданной общим уравнением прямой вида формула.

Приведем пример общего уравнения прямой.

Уравнению формула соответствует прямая линия в заданной прямоугольной декартовой системе координат Oxy. Ее изображение представлено на чертеже. Нормальным вектором этой прямой линии является вектор формула.



С другой стороны, прямая линия, изображенная на рисунке, в прямоугольной системе координат Oxy задается общим уравнением прямой вида формула, так как координаты любой точки этой прямой удовлетворяют записанному уравнению.

Следует заметить, что уравнение вида формула, полученное из общего уравнения прямой умножением его обеих частей на отличное от нуля число формула, эквивалентно уравнению формула, следовательно, определяет ту же самую прямую на плоскости в фиксированной прямоугольной системе координат.

***Неполные уравнения прямой***

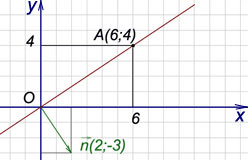
Рассмотрим особенности расположения прямой на плоскости в тех случаях, когда те или иные коэффициенты общего уравнения прямой равны нулю.

1. При http://function-x.ru/line/l082.gif уравнение http://function-x.ru/line/l083.gif определяет прямую, проходящую через начало координат, так как кординаты точки http://function-x.ru/line/l084.gif удовлетворяют этому уравнению.

2. При http://function-x.ru/line/l085.gif уравнение http://function-x.ru/line/l086.gif определяет прямую, параллельную оси Ox, поскольку вектор нормали http://function-x.ru/line/l087.gif этой прямой перпендикулярен оси Ox. Аналогично при http://function-x.ru/line/l088.gif уравнение http://function-x.ru/line/l089.gif определяет прямую, параллельную осиOy.

3. При http://function-x.ru/line/l090.gif уравнение http://function-x.ru/line/l091.gif определяет ось Ox, так как эта прямая одновременно параллельна оси Ox и проходит через начало координат. Аналогично, при http://function-x.ru/line/l092.gif уравнение http://function-x.ru/line/l093.gif определяет ось Oy.

Пример 8. Построить в прямоугольной системе координат на плоскости прямую, заданную общим уравнением http://function-x.ru/line/l094.gif.

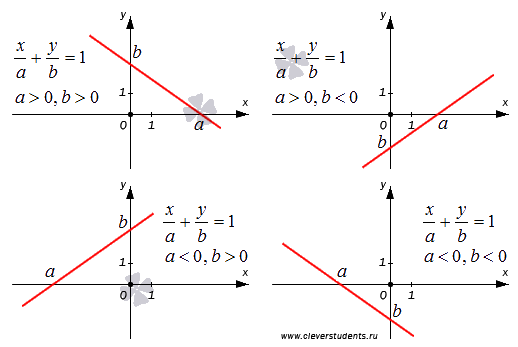


Решение. В данном уравнении свободный член равен нулю, поэтому оно определяет прямую, проходящую через начало координат. Следовательно, в точкеhttp://function-x.ru/line/l095.gif прямая пересекает обе координатные оси. Для построения прямой нужно знать ещё какую-либо её точку. Для этого дадим одной из переменных в заданном уравнении произвольное значение, например, http://function-x.ru/line/l096.gif, и найдём соответствующее значение x: http://function-x.ru/line/l097.gif. Теперь строим прямую, проходящую через начало координат и точку http://function-x.ru/line/l098.gif(рисунок слева).

***Уравнение прямой в отрезках*** на плоскости в прямоугольной системе координат*Oxy* имеет вид формула, где *a* и *b* - некоторые отличные от нуля действительные числа.

Уравнение прямой в отрезках не случайно получило такое название - абсолютные величины чисел *a* и *b* равны длинам отрезков, которые отсекает прямая на координатных осях *Ox* и *Oy*, считая от начала координат.

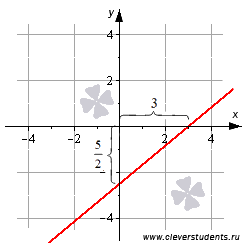
Поясним этот момент. Мы знаем, что координаты любой точки прямой удовлетворяют уравнению этой прямой. Тогда отчетливо видно, что прямая, заданная уравнением прямой в отрезках, проходит через точки формула и формула, так как формула иформула. А точки формула и формула как раз расположены на координатных осях *Ox* и *Oy* соответственно и удаленны от начала координат на *a* и *b* единиц. Знаки чисел *a* и *b* указывают направление, в котором следует откладывать отрезки. Знак «+» означает, что отрезок откладывается в положительном направлении координатной оси, знак «-» означает обратное.

Изобразим схематический чертеж, поясняющий все вышесказанное. На нем показано расположение прямых относительно фиксированной прямоугольной системы координат *Oxy* в зависимости от значений чисел *a* и *b* в уравнении прямой в отрезках.

Теперь стало понятно, что уравнение прямой в отрезках позволяет легко производить построение этой прямой линии в прямоугольной системе координат *Oxy*. Чтобы построить прямую линию, которая задана уравнением прямой в отрезках вида формула, следует отметить в прямоугольной системе координат на плоскости точки формула и формула, после чего соединить их прямой линией с помощью линейки.

Приведем пример.

*Пример.*

Постройте прямую линию, заданную уравнением прямой в отрезках вида .

*Решение.*

По заданному уравнению прямой в отрезках видно, что прямая проходит через точки формула. Отмечаем их и соединяем прямой линией.

***Параметрические уравнения прямой на плоскости***

Параметрические уравнения прямой элементарно получаются из канонического уравнения этой прямой, имеющей вид http://function-x.ru/line/l153.gif. Примем за параметр http://function-x.ru/line/l154.gifвеличину, на которую можно умножить левую и правую части канонического уравнения.

Так как один из знаменателей обязательно отличен от нуля, а соответствующий числитель может принимать какие угодно значения, то областью изменения параметраhttp://function-x.ru/line/l154.gif является вся ось вещественных чисел: http://function-x.ru/line/l155.gif.

Мы получим http://function-x.ru/line/l156.gif или окончательно

http://function-x.ru/line/l157.gif.   (1)

Уравнения (1) и есть искомые параметрические уравнения прямой. Эти уравнения допускают механическую интерпретацию. Если считать, что параметр http://function-x.ru/line/l154.gif - это время, отсчитываемое от некоторого начального момента, то параметрические уравнения определяют закон движения материальной точки по прямой линии с постоянной скоростью http://function-x.ru/line/l158.gif (такое движение происходит по инерции).

**Пример 1.** Составить на плоскости параметрические уравнения прямой, проходящей через точку http://function-x.ru/line/l159.gif и имеющей направляющий вектор http://function-x.ru/line/l160.gif.

Решение. Подставляем данные точки и направляющего вектора в (1) и получаем:

http://function-x.ru/line/l161.gif

Часто в задачах требуется преобразовать параметрические уравнения прямой в другие виды уравнений, а из уравнений других видов получить параметрические уравнения прямой. Разберём несколько таких примеров. Для преобразования параметрических уравнений прямой в общее уравнение прямой сначала следует привести их к каноническому виду, а затем из канонического уравнения получить общее уравнение прямой

**Пример 2.** Записать уравнение прямой

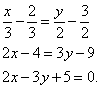
http://function-x.ru/line/l162.gif

в общем виде.

Решение. Сначала приводим параметрические уравнения прямой к каноническому уравнению:

http://function-x.ru/line/l163.gif.

Дальнейшими преобразованиями приводим уравнение к общему виду:



Несколько более сложно преобразование общего уравнения в параметрические уравнения прямой, но и для этого действия можно составить чёткий алгоритм. Сначала можно преобразовать общее уравнение в уравнение с угловым коэффициентом и найти из него координаты какой-либо точки, принадлежащей прямой, придавая одной из координат произвольное значение. Когда известны координаты точки и направляющего вектора (из общего уравнения), можно записать параметрические уравнения прямой.

**Пример 3.** Записать уравнение прямойhttp://function-x.ru/line/l165.gif в виде параметрических уравнений.

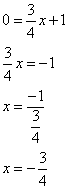
Решение. Приводим общее уравнение прямой в уравнение с угловым коэффициентом:



Находим координаты некоторой точки, принадлежащей прямой. Придадим одной из координат точки произвольное значение

http://function-x.ru/line/l167.gif.

Из уравнения прямой с угловым коэффициентом получаем другую координату точки:



Таким образом, нам известны точка http://function-x.ru/line/l169.gif и направляющий вектор http://function-x.ru/line/l170.gif. Подставляем их данные в (1) и получаем искомые параметрические уравнения прямой:



**Пример 4.** Найти угловой коэффициент прямой, заданной параметрическими уравнениями

http://function-x.ru/line/l172.gif

Решение. Параметрические уравнения прямой сначала следует преобразовать в каноническое, затем в общее и, наконец, в уравнение с угловым коэффициентом.

Шаг 1:

http://function-x.ru/line/l173.gif

Шаг 2:

.

Шаг 3:

. Таким образом, угловой коэффициент заданной прямой: http://function-x.ru/line/l176.gif

.

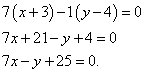
**Пример 5.** Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку http://function-x.ru/line/l177.gif и перпендикулярной прямой

http://function-x.ru/line/l178.gif.

Решение. Cначала найдём из данных параметрических уравнений координаты вектора нормали искомой прямой. Если направляющий вектор http://function-x.ru/line/l179.gif, тоhttp://function-x.ru/line/l180.gif. Из данного уравнения получаем

http://function-x.ru/line/l181.gif

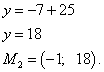
Составим общее уравнение искомой прямой по формуле http://function-x.ru/line/l182.gif:



Преобразуем полученное уравнение в уравнение с угловым коэффициентом:

http://function-x.ru/line/l184.gif.

Находим какую-либо точку, принадлежащую этой прямой. Для этого одной из координат этой точки придадим произвольное значение http://function-x.ru/line/l185.gif. Тогда



Искомые параметрические уравнения прямой: http://function-x.ru/line/l187.gif

***4. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых (через угловой коэффициент, через нормальные и направляющие вектора)***

***Угол между двумя прямыми на плоскости***

Пусть две прямые http://function-x.ru/line/l207.gif и http://function-x.ru/line/l208.gif заданы общими уравнениями

http://function-x.ru/line/l209.gif и http://function-x.ru/line/l210.gif.

Так как нормальным вектором прямой http://function-x.ru/line/l207.gifявляется вектор http://function-x.ru/line/l211.gif, а нормальным вектором прямой http://function-x.ru/line/l208.gif является векторhttp://function-x.ru/line/l212.gif, то задача об определении угла между прямыми http://function-x.ru/line/l207.gif и http://function-x.ru/line/l208.gif сводится к определению угла http://function-x.ru/line/l213.gif между векторами http://function-x.ru/line/l214.gif и http://function-x.ru/line/l215.gif.

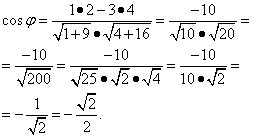
Из определения скалярного произведения http://function-x.ru/line/l216.gif и из выражения в координатах длин векторов http://function-x.ru/line/l214.gif и http://function-x.ru/line/l215.gif и их скалярного произведения получим

http://function-x.ru/line/l217.gif.  (1)

Итак, угол между прямыми, заданными общими уравнениями, определяется с помощью формулы (1).

**Пример 1.** Найти угол между прямыми, заданными общими уравнениямиhttp://function-x.ru/line/l230.gif и http://function-x.ru/line/l231.gif.

Решение. Используя формулу (1), получаем:



Получаем угол http://function-x.ru/line/l233.gif.

**Прямые заданы каноническими уравнениями**

Пусть две прямые http://function-x.ru/line/l207.gif и http://function-x.ru/line/l208.gif заданы каноническими уравнениями

http://function-x.ru/line/l218.gif и http://function-x.ru/line/l219.gif.

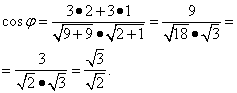
Так как направляющими векторами прямых http://function-x.ru/line/l207.gif и http://function-x.ru/line/l208.gif служат векторы http://function-x.ru/line/l220.gif и http://function-x.ru/line/l221.gif, то в полной аналогии со случаем, разобранным в предыдущем параграфе, мы получим следующую формулу для определения угла между прямыми:

http://function-x.ru/line/l222.gif.   (2)

Итак, угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями, определяется с помощью формулы (2).

**Пример 2.** Найти угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями http://function-x.ru/line/l234.gif и http://function-x.ru/line/l235.gif.

Решение. По формуле (2) находим:



**Прямые заданы уравненями с угловым коэффициентом**

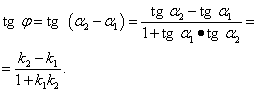
Пусть две прямые http://function-x.ru/line/l207.gif и http://function-x.ru/line/l208.gif заданы уравнениями с угловым коэффициентом

http://function-x.ru/line/l223.gif и http://function-x.ru/line/l224.gif.

Если http://function-x.ru/line/l225.gif и http://function-x.ru/line/l226.gif - углы наклона прямых http://function-x.ru/line/l207.gif и http://function-x.ru/line/l208.gif к оси *Ox*, то из элементарных соображений следует, что

http://function-x.ru/line/l227.gif.

Таким образом,

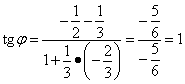


Получаем следующую формулу для определения угла между прямыми:

http://function-x.ru/line/l229.gif.   (3)

**Пример 3.** Найти угол между прямыми, заданными уравнениями с угловым коэффициентом http://function-x.ru/line/l237.gif и http://function-x.ru/line/l238.gif.

Решение. По формуле (3) находим:

.

Искомый угол

http://function-x.ru/line/l240.gif

***Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых через угловой коэффициент***

Уравнение http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_004.gif называется уравнением прямой с угловым коэффициентом; k - угловой коэффициент, b - величина отрезка, который отсекает прямая на оси Оу, считая от начала координат.

Если прямая задана общим уравнением

http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_005.gif,

то ее угловой коэффициент определяется по формуле

http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_006.gif.

Уравнение http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_007.gif является уравнением прямой, которая проходит через точку и имеет угловой коэффициент k.

Если прямая проходит через точки http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_011.gif(http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_012.gif, http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_013.gif), http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_014.gif(http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_015.gif, http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_016.gif), то ее угловой коэффициент определяется по формуле

http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_017.gif.

Уравнение

http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_018.gif

является уравнением прямой, проходящей через две точки  и .

Если известны угловые коэффициенты http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_025.gif и http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_026.gif двух прямых, то один из углов http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_027.gif между этими прямыми определяется по формуле

http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_028.gif.

*Признаком параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов*: http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_029.gif

*Признаком перпендикулярности двух прямых является соотношение*

http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_030.gif, или http://a-geometry.narod.ru/theory/img_12/img_12_031.gif.

Иначе говоря, угловые коэффициенты перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

***Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых через нормальные вектора***

Пусть прямые заданы общими уравнениями:

http://ok-t.ru/studopediaru/baza12/272085932556.files/image195.gif и http://ok-t.ru/studopediaru/baza12/272085932556.files/image197.gif .

Вектор http://ok-t.ru/studopediaru/baza12/272085932556.files/image199.gif прямой http://ok-t.ru/studopediaru/baza12/272085932556.files/image195.gif .

Вектор http://ok-t.ru/studopediaru/baza12/272085932556.files/image201.gif прямой http://ok-t.ru/studopediaru/baza12/272085932556.files/image197.gif .

Угол между данными прямыми равен углу между нормальными векторами прямых: http://ok-t.ru/studopediaru/baza12/272085932556.files/image203.gif

Окончательно, получаем http://ok-t.ru/studopediaru/baza12/272085932556.files/image205.gif .

***Прямые будут параллельны, если их нормальные векторы параллельны. Условие параллельности двух прямых будет иметь вид:***

http://ok-t.ru/studopediaru/baza12/272085932556.files/image207.gif

Если http://ok-t.ru/studopediaru/baza12/272085932556.files/image209.gif , то прямые совпадают.

***Условие перпендикулярности двух прямых есть условие перпендикулярности нормальных векторов***

http://ok-t.ru/studopediaru/baza12/272085932556.files/image211.gif

***Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых через*** ***направляющие вектора***

Пусть в пространстве даны две прямые:

http://stu.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_msh/files.book&file=msh_86.files/image1.gif

и

http://stu.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_msh/files.book&file=msh_86.files/image2.gif

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых равносильны условиям параллельности и перпендикулярности их направляющих векторов.

**Условие параллельности**. Две прямые параллельны друг другу тогда и только тогда, когда их соответствующие направляющие коэффициенты пропорциональны, т. е.

http://stu.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_msh/files.book&file=msh_86.files/image5.gif

**Условие перпендикулярности**. Две прямые перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда сумма парных произведений одноименных направляющих коэффициентов равна нулю, т. е.

http://stu.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_msh/files.book&file=msh_86.files/image6.gif