Билет 3.3

1.Различные уравнения прямой в пространстве

### **Канонические уравнения прямой**

**Если известна некоторая точка пространства http://www.mathprofi.ru/d/uravnenija_pryamoi_v_prostranstve_clip_image002.gif, принадлежащая прямой, и направляющий вектор http://www.mathprofi.ru/d/uravnenija_pryamoi_v_prostranstve_clip_image004.gif данной прямой, то  канонические уравнения этой прямой выражаются формулами**:

Канонические уравнения прямой в пространстве

Приведённая запись предполагает, что координаты направляющего вектора http://www.mathprofi.ru/d/uravnenija_pryamoi_v_prostranstve_clip_image008.gif **не равны нулю**. Что делать, если одна или две координаты нулевые, мы рассмотрим чуть позже.

Как и в статье [**Уравнение плоскости**](http://www.mathprofi.ru/uravnenie_ploskosti.html), для простоты будем считать, что во всех задачах урока действия проводятся в ортонормированном базисе пространства.

### **Параметрические уравнения прямой в пространстве**

Параметрические уравнения, конечно, не альфа и омега пространственной геометрии, но рабочий муравей многих задач. Причём, этот вид уравнений часто применяется неожиданно, и я бы сказал, изящно.

**Если известна точка http://www.mathprofi.ru/d/uravnenija_pryamoi_v_prostranstve_clip_image002_0006.gif, принадлежащая прямой, и направляющий вектор http://www.mathprofi.ru/d/uravnenija_pryamoi_v_prostranstve_clip_image004_0000.gif данной прямой, то параметрические уравнения этой прямой задаются системой**:



## Уравнение прямой на плоскости

Любую прямую на плоскости можно задать **уравнением прямой** первой степени вида

A x + B y + C = 0

где A и B не могут быть одновременно равны нулю.

### *Уравнение прямой с угловым коэффициентом*

Общее уравнение прямой при B≠0 можно привести к виду

y = k x+ b

где k - **угловой коэффициент** равный тангенсу угла, образованного данной прямой и положительным направлением оси ОХ

### *Уравнение прямой в отрезках на осях*

Если прямая пересекает оси OX и OY в точках с координатами (a, 0) и (0, b), то она может быть найдена используя формулу **уравнения прямой в отрезках**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | + | y | = 1 |
| a | b |

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки на плоскости

Если прямая проходит через две точки A(x1, y1) и B(x2, y2), такие что x1 ≠ x2 и y1 ≠ y2 то уравнение прямой можно найти, используя следующую формулу

x - x1 y - y1

--------- = ---------

x2 - x1 y2 - y1

**Нормальное векторное уравнение прямой:**



где n — вектор нормали к прямой.

Это уравнение также можно записать в форме

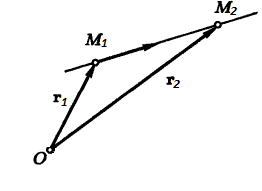


причём если вектор n — единичный, то величина **D=(r0,n)** есть расстояние от точки **O**до прямой. Вообще говоря, это уравнение имеет следующий смысл:проекция радиус-вектора любой точки прямой на нормаль к этой прямой постоянна.

Векторное **уравнение прямой, проходящей через две различные точки**:



где r1 и r2 — радиус-векторы данных точек.



Это уравнение легко получается из векторного уравнения прямой в параметрической форме, если в качестве направляющего вектора прямой **a** взять вектор **r2-r1**

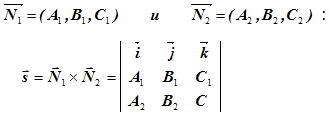
2.Общее уравнение прямой в пространстве

## Уравнение прямой на плоскости

Любую прямую на плоскости можно задать **уравнением прямой** первой степени вида

A x + B y + C= 0

где A и B не могут быть одновременно равны нулю.

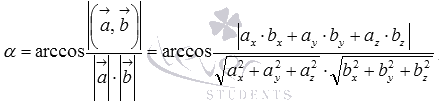
Чтобы перейти от общих уравнений прямой к каноническим, нужно найти какую-либо точку M1(x1,y1,z1) на прямой.   
  
Пусть прямая L задана общим уравнением   
https://otvet.imgsmail.ru/download/2125d37c0b0d9c7ee0e88d1203aef2c0_i-629.gif  
Координаты точки М1 находятся как решение системы уравнения, задав одной из координат произвольное значение. За направляющий вектор можно взять вектор произведения нормальных векторов.   
  
  
ПРИМЕР. Написать уравнения прямой, проходящей через две несовпадающие точки M0(x0,y0,z0) и M1(x1,y1,z1).   
Решение: За направляющий вектор прямой можно принять   
  
https://otvet.imgsmail.ru/download/2125d37c0b0d9c7ee0e88d1203aef2c0_i-631.gifИ https://otvet.imgsmail.ru/download/2125d37c0b0d9c7ee0e88d1203aef2c0_i-632.gif

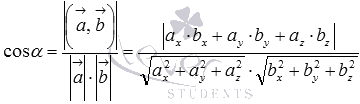
3.Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

## *Взаимное расположение двух прямых в пространстве*

      Все возможные случаи ***взаимного расположения двух прямых в пространстве*** представлены в следующей таблице.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Фигура** | **Рисунок** | **Определение** |
| Две ***пересекающиеся прямые*** | Пересекающиеся прямые | Две прямые называют ***пересекающимися прямыми***, если они имеют **единственную общую точку**. |
| Две ***параллельные прямые*** | Параллельные прямые | Две прямые называют ***параллельными прямыми***, если они **лежат в одной плоскости** и **не имеют общих точек** |
| Две ***скрещивающиеся прямые*** | Скрещивающиеся прямые | Две прямые называют ***скрещивающимися прямыми***, если **не существует плоскости, содержащей обе прямые**. |

**Угол между двумя скрещивающимися прямыми *a* и *b* вычисляется по формуле** , где формула и формула - направляющие векторы прямых *a* и *b* соответственно.

**Формула для нахождения косинуса угла между скрещивающимися прямыми***a* и *b* имеет вид .

[Основное тригонометрическое тождество](http://www.cleverstudents.ru/trigonometry/basic_trigonometric_identities.html) позволяет найти синус угла между скрещивающимися прямыми, если известен косинус: формула.

Параллельность и ортогональность(перпендикулярность)

Следует обратить внимание на то, что в числителе дроби из углового коэффициента второй прямой вычитается угловой коэффициент первой прямой.

Если уравнения прямой заданы в общем виде

*A*1*x* + *B*1*y* + *C*1 = 0,

*A*2*x* + *B*2*y* + *C*2 = 0,     (6)

угол между ними определяется по формуле

http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01163.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02163.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z03163.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z04163.JPG     (7)

**4.** Условия параллельности двух прямых:

а) Если прямые заданы уравнениями (4) с угловым коэффициентом, то необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в равенстве их угловых коэффициентов:

*k*1 = *k*2.     (8)

б) Для случая, когда прямые заданы уравнениями в общем виде (6), необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в том, что коэффициенты при соответствующих текущих координатах в их уравнениях пропорциональны, т. е.

http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01164.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02164.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z03164.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z04164.JPG     (9)

**5.** Условия перпендикулярности двух прямых:

а) В случае, когда прямые заданы уравнениями (4) с угловым коэффициентом, необходимое и достаточное условие их перпендикулярности заключается в том, что их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, т. е.

http://www.pm298.ru/reshenie/Math/z01165.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z02165.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z03165.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Math/z04165.JPG     (10)

Билет 3.4

1.Взаимное расположение прямой и плоскости. Пересечение прямой и плоскости.

**Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.**

   Прямая может лежать на данной плоскости, быть параллельна данной плоскости или пересекать ее в одной точке, см. следующие рисунки.

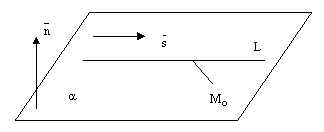


                                           рис.6.

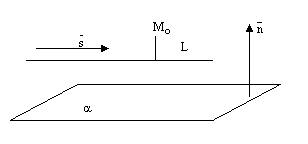


                                           рис.7.

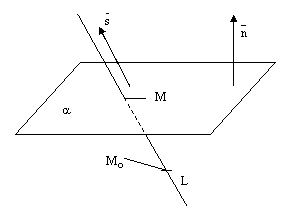


                                          рис.8.

Теорема. Пусть [плоскость](http://fxdx.ru/page/kompleksnaja-ploskost) http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image002.gif задана общим уравнением

http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image094.gif,

а прямая L задана каноническими уравнениями

http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image095.gif

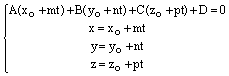
или параметрическими уравнениями

http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image096.gif,   http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image097.gif,

в которых http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image098.gif – [координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) нормального [вектора](http://fxdx.ru/page/orientacija-vektora-lezhashhego-na-osi) плоскости http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image002.gif, http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image099.gif – [координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) произвольной фиксированной точки прямой L,  http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image100.gif –

координаты направляющего [вектора](http://fxdx.ru/page/orientacija-vektora-lezhashhego-na-osi) прямой L. Тогда:

1) если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image101.gif, то прямая L пересекает [плоскость](http://fxdx.ru/page/kompleksnaja-ploskost) http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image002.gif в точке, [координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) которой http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image102.gif можно найти из [системы](http://fxdx.ru/page/delenie-otrezka-v-dannom-otnoshenii-geometricheskij-centr-tjazhesti-sistemy-iz-dvuh-materialnyh-tochek) уравнений

;           (7)

2) если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image104.gif и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image105.gif, то прямая лежит на плоскости;

3) если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image104.gif и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image106.gif, то прямая параллельна плоскости.

   Доказательство. Условие http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image107.gif говорит о том, что вектроры http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image108.gif и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image109.gif не ортогональны, а значит прямая не параллельна плоскости и не лежит в плоскости, а значит пересекает ее в некоторой точке М. [Координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk)точки М удовлетворяют как уравнению плоскости, так и уравнениям прямой, т.е. системе (7). Решаем первое [уравнение](http://fxdx.ru/page/uravnenie-linii-i-poverhnosti-1) [системы](http://fxdx.ru/page/delenie-otrezka-v-dannom-otnoshenii-geometricheskij-centr-tjazhesti-sistemy-iz-dvuh-materialnyh-tochek) (7) относительно неизвестной t и затем, подставляя найденное значение t в остальные [уравнения](http://fxdx.ru/page/parametricheskie-i-kanonicheskie-uravnenija-prjamoj) системы, находим [координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) искомой точки.

   Если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image110.gif, то это означает, что http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image111.gif. А такое возможно лишь тогда, когда прямая лежит на плоскости или параллельна ей. Если прямая лежит на плоскости, то любая точка прямой является точкой плоскости и [координаты](http://fxdx.ru/page/dekartovye-koordinaty-vektora-v-pdsk) любой точки прямой удовлетворяют уравнению плоскости. Поэтому достаточно проверить, лежит ли на плоскости точка http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image099.gif. Если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image105.gif, то точка http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image112.gif – лежит на плоскости, а это означает, что и сама прямая лежит на плоскости.

   Если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image110.gif, а http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag13/image106.gif, то точка на прямой не лежит на плоскости, а это означает, что прямая параллельна плоскости.

Теорема доказана.

## Точка пересечения прямой и плоскости – определение.

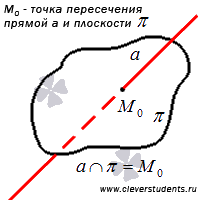
В заголовке статьи фигурируют слова «точка», «прямая» и «плоскость». Поэтому, для понимания темы необходимо иметь четкое представление о точке, прямой линии и плоскости в пространстве. Освежить в памяти эти понятия Вы можете, обратившись к статьям [прямая в пространстве](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/straight_line_in_the_space.html) и [плоскость в пространстве](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/plane_in_the_space.html).

Возможны три варианта взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:

* прямая лежит в плоскости;
* прямая параллельна плоскости;
* прямая пересекает плоскость.

Нас интересует третий случай. Напомним, что означает фраза: «прямая и плоскость пересекаются». Говорят, что прямая и плоскость пересекаются, если они имеют только одну общую точку. Это общую точку пересекающихся прямой и плоскости называют **точкой пересечения прямой и плоскости**.

Приведем графическую иллюстрацию.



[К началу страницы](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/intersection_point_of_line_and_plane.html#beginning)

## Нахождение координат точки пересечения прямой и плоскости.

Введем в трехмерном пространстве [прямоугольную систему координат](http://www.cleverstudents.ru/vectors/cartesian_rectangular_coordinates.html) *Oxyz*. Теперь каждой прямой соответствуют уравнения прямой некоторого вида (им посвящена статья [виды уравнений прямой в пространстве](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/forms_of_equations_of_line_in_space.html)), каждой плоскости отвечает уравнение плоскости (можете ознакомиться со статьей [виды уравнения плоскости](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/forms_of_equation_of_plane.html)), а каждой точке соответствует упорядоченная тройка чисел – координаты точки. Дальнейшее изложение подразумевает знание всех видов уравнений прямой в пространстве и всех видов уравнения плоскости, а также умение переходить от одного вида уравнений к другому виду. Но не пугайтесь, по тексту мы будем приводить ссылки на необходимую теорию.

2. Угол между прямой и плоскостью

***Определение.***

**Угол между прямой и плоскостью** — это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

## Формула вычисления угла между прямой и плоскостью

Если в пространстве заданы направляющий вектор прямой L

s = {l; m; n}

и уравнение плоскости

Ax + By + Cz + D = 0,

то угол между этой прямой и плоскостью можно найти используя формулу

|  |  |
| --- | --- |
| sin φ = | | A · l + B · m + C · n | |
| √A2 + B2 + C2 · √l2 + m2 + n2 |

## Вывод формулы для вычисления угла между прямой и плоскостью

Из [уравнения прямой](http://ru.onlinemschool.com/math/library/analytic_geometry/line) можно найти направляющий вектор прямой

s = {l; m; n}

Из [уравнения плоскости](http://ru.onlinemschool.com/math/library/analytic_geometry/plane) вектор нормали плоскости имеет вид

q = {A; B; C}

Из [формул скалярного произведения векторов](http://ru.onlinemschool.com/math/library/vector/multiply/) найдем косинус угла между нормалью к плоскости и направляющим вектором прямой

|  |  |
| --- | --- |
| cos ψ = | | q · s | |
| | s | · |q | |

Так как φ = 90° - ψ, то синус угла между прямой и плоскостью sin φ = cos ψ.

Расписав [скалярное произведение векторов](http://ru.onlinemschool.com/math/library/vector/multiply/) и [модуль векторов](http://ru.onlinemschool.com/math/library/vector/length/) через их координаты, получим формулу для вычисления угла между прямой и плоскостью.

Условие параллельности прямой и плоскости

## Параллельность прямой и плоскости - признак и условия параллельности.

Параллельность прямой и плоскости далеко не всегда является очевидным фактом. Другими словами, параллельность прямой и плоскости приходится доказывать. Существует достаточное условие, выполнение которого гарантирует параллельность прямой и плоскости. Это условие называют **признаком параллельности прямой и плоскости**. Прежде чем ознакомиться с формулировкой этого признака, рекомендуем повторить [определение параллельных прямых](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/parallel_lines.html#definition).

*Теорема.*

Если прямая *a*, не лежащая в плоскости формула, параллельна некоторой прямой *b*, которая лежит в плоскости формула, то прямая *a* параллельна плоскости формула.

Озвучим еще одну теорему, которую можно использовать для установления параллельности прямой и плоскости.

*Теорема.*

Если одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости, то вторая прямая либо также параллельна этой плоскости, либо лежит в ней.

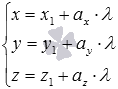
Доказательство признака параллельности прямой и плоскости и доказательство озвученной теоремы приводятся в учебнике геометрии за *10*-*11* классы, который указан в конце статьи в списке рекомендованной литературы.

[Определение направляющего вектора прямой](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/directing_vector_of_line.html#definition) и [определение нормального вектора плоскости](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/normal_vector_of_plane.html#definition) позволяют записать **необходимое и достаточное условие параллельности прямой и плоскости**.

*Теорема.*

Для параллельности прямой *a*, не лежащей в плоскости формула, и плоскости формуланеобходимо и достаточно, чтобы направляющий вектор прямой *a* был перпендикулярен нормальному вектору плоскости формула.

Это условие удобно использовать для доказательства параллельности прямой и плоскости, которые заданы в [прямоугольной системе координат](http://www.cleverstudents.ru/vectors/cartesian_rectangular_coordinates.html) в трехмерном пространстве некоторыми уравнениями.

Пусть прямую *a* в прямоугольной системе координат *Oxyz* задают [канонические уравнения прямой в пространстве](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/canonical_equations_of_line_in_space.html) вида формула или [параметрические уравнения прямой в пространстве](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/parametric_equations_of_line_in_space.html) вида , а плоскости формула соответствует[общее уравнение плоскости](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/general_equation_of_plane.html) формула. Тогда формула - направляющий вектор прямой *a*, а формула - нормальный вектор плоскости формула. Для перпендикулярности векторов формула и формула необходимо и достаточно, чтобы [скалярное произведение](http://www.cleverstudents.ru/vectors/scalar_product_of_vectors.html) формула равнялось нулю (об этом написано в статье [условие перпендикулярности двух векторов](http://www.cleverstudents.ru/vectors/condition_of_vectors_perpendicularity.html)).

Следовательно, **необходимое и достаточное условие параллельности прямой *a* и плоскости** формула (*a* не лежит в плоскости формула) примет вид формула, где формула - направляющий вектор прямой *a*,формула - нормальный вектор плоскости формула.

## Перпендикулярность прямой и плоскости - признак и условия перпендикулярности.

На практике часто возникает вопрос: «Перпендикулярны ли заданные прямая и плоскость»? Для ответа на него существует **достаточное условие перпендикулярности прямой и плоскости**, то есть, такое условие, выполнение которого гарантирует перпендикулярность прямой и плоскости. Это достаточное условие называют признаком перпендикулярности прямой и плоскости. Сформулируем его в виде теоремы.

*Теорема.*

Для перпендикулярности заданных прямой и плоскости достаточно, чтобы прямая была перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

Доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости Вы можете посмотреть в учебнике геометрии за *10*-*11* классы.

При решении задач на установление перпендикулярности прямой и плоскости также часто применяется следующая теорема.

*Теорема.*

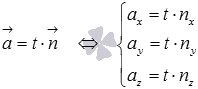
Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна к плоскости.

В школе рассматривается много задач, для решения которых применяется признак перпендикулярности прямой и плоскости, а также последняя теорема. Здесь мы не будем на них останавливаться. В этом пункте статьи основное внимание сосредоточим на применении следующего необходимого и достаточного условия перпендикулярности прямой и плоскости.

*Теорема.*

Для перпендикулярности прямой *a* и плоскости формула необходимо и достаточно, чтобы [направляющий вектор прямой](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/directing_vector_of_line.html) *a* и [нормальный вектор плоскости](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/normal_vector_of_plane.html) формула были коллинеарны.

Это условие можно переписать в следующем виде.

Пусть формула - направляющий вектор прямой *a*, а формула - нормальный вектор плоскости формула. Для перпендикулярности прямой *a* и плоскости формула необходимо и достаточно, чтобы выполнялось [условие коллинеарности векторов](http://www.cleverstudents.ru/vectors/condition_of_vectors_collinearity.html) формула и формула: , где *t* – некоторое действительное число.

Доказательство этого необходимого и достаточного условия перпендикулярности прямой и плоскости основано на определениях направляющего вектора прямой и нормального вектора плоскости.

Очевидно, это условие удобно использовать для доказательства перпендикулярности прямой и плоскости, когда легко находятся координаты направляющего вектора прямой и координаты нормального вектора плоскости в зафиксированной[прямоугольной системе координат](http://www.cleverstudents.ru/vectors/cartesian_rectangular_coordinates.html) в трехмерном пространстве. Это справедливо для случаев, когда заданы координаты точек, через которые проходят плоскость и прямая, а также для случаев, когда прямую определяют некоторые [уравнения прямой в пространстве](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/forms_of_equations_of_line_in_space.html), а плоскость задана [уравнением плоскости](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/forms_of_equation_of_plane.html) некоторого вида.