Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Лабораторная работа №2.2

«Необходимые и достаточные условия существования условного экстремума»

по курсу «Методы оптимизации»

Выполнила:

студентка 4 курса,

группы ИУ9-82

Козлова А. А.

Проверил:

Каганов Ю. Т.

2018 г

Цель работы.

1. Исследование необходимых и достаточных условий существования экстремума функции с учетом ограничений (условный экстремум).
2. Вычисление экстремумов функции.

Постановка задачи:

Дано:

Дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x)$ и функции ограничений $g_j(x) = g_j(x_1,\ldots,x_n) = 0,\ j = \overline{1,m};\quad g_j(x) \le 0,\ j = m+1,\ldots,p.$, определяющие множество допустимых решений $X \in R^n$. Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^e \in R^n$ её локальных минимумов и максимумов на X:

$$f(x^e) = \min_{x \in X} f(x);\ f(x^e) = \max_{x \in X} f(x), \qquad (4)$$

где $X = \left\{ x \middle| \begin{array}{l} g_j(x) = 0,\ j = 1,..,m;\ m < n \\ g_j(x) \le 0,\ j = m+1,\ldots,p \end{array} \right\}$

Задание 1.

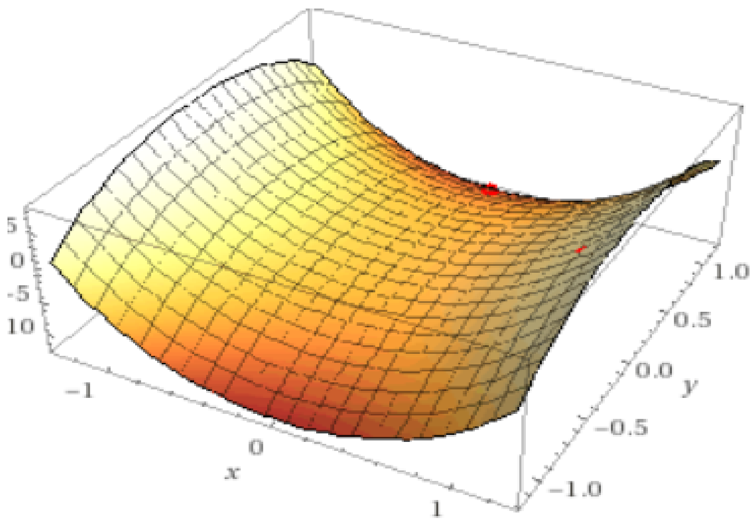
Найти экстремум функции:

$$\begin{cases} f(x)=(x_1^2+3)^2-(x_2^2+2)^2-10 \rightarrow extr \\ g_1(x)=x_1^2+x_2^2-1\leq 0, \\ g_2(x)=-x_1\leq 0, \\ g_3(x)=-x_2\leq 0. \end{cases}$$

на множестве R^2.

Задача представляет собой задачу с ограничениями типа неравенств, так как ограничения вида $g_j(x)=0$ отсутствуют.

График поверхности:



Для решения использовался сервис Wolphram Mathematica.

<u>Глобальные экстремумы:</u>

- Минимум достигается при $(x_1, x_2)=(0,1)$ и равен $min=-10$.
- Максимум достигается при $(x_1, x_2)=(1,0)$ и равен $max=2$.

Задание 2.

Записать необходимые условия экстремума первого порядка.

Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0 f(x)+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j g_j(x)$$

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0\left((x_1^2+3)^2-(x_2^2+2)^2-10\right)+\lambda_1(x_1^2+x_2^2-1)+\lambda_2(-x_1)+\lambda_3(-x_2)$$

<u>Необходимые условия экстремума первого порядка:</u>

Пусть точка $x^e\in R^n$ есть точка локального экстремума . Тогда числа $\lambda^e{}_0,\lambda^e{}_1,\ldots,\lambda^e{}_p$, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются следующие условия:

1) Условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x :

$$\frac{\partial L(x^e,\lambda_0^e,\lambda^e)}{\partial x_i}=0,\ i=1,\ldots,n;$$

Найдем производные обобщенной функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L(x^e,\lambda_0^e,\lambda^e)}{\partial x_1}=\lambda_0*2(x_1^2+3)*2x_1+\lambda_1 2x_1-\lambda_2$$

$$\frac{\partial L(x^e,\lambda_0^e,\lambda^e)}{\partial x_2}=-\lambda_0*2(x_2^2+2)*2x_2+\lambda_1 2x_2-\lambda_3$$

Согласно условию стационарности обобщенной функции Лагранжа по x все точки экстремумов (x_1,x_2) должны являться решением системы уравнений:

$$\begin{cases} 4\lambda_0*(x_1^3+3x_1)+2\lambda_1 x_1-\lambda_2=0\\ -4\lambda_0*(x_2^3+2x_2)+2\lambda_1 x_2-\lambda_3=0\end{cases}$$

2) Условие допустимости решения:

$$g_j(x^e)=0,\quad j=1,\ldots,m;\quad g_j(x^e)\le 0,\ j=m+1,\ldots,p \qquad (6)$$

Если при этом градиенты $\nabla g_1(x^e),\ldots,\nabla g_m(x^e)$ в точке x^e линейно независимы (выполняется условие регулярности), то $\lambda_0^e\ne 0$.

$$\nabla g_1=(2x_1,2x_2)$$

$$\nabla g_2=(-1,0)$$

$$\nabla g_3=(0,-1)$$

$$\begin{cases}2\lambda_1 x_1-\lambda_2=0\\ 2\lambda_1 x_2-\lambda_3=0\end{cases}$$

- Условие неотрицательности для условного минимума:

$$\lambda_j^e\ge 0,\ j=\overline{m+1,p}.$$

- Условие неположительности для условного максимума:

$$\lambda_j^e \le 0,\ j=\overline{m+1,p}.$$

- Условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_j^e g_j(x^e) = 0,\ j = \overline{m+1, p}.$$

$$\begin{cases} \lambda_1(x_1^2+x_2^2-1)=0, \\ \lambda_2(-x_1)=0, \\ \lambda_3(-x_2)=0. \end{cases}$$

Задание 3.

Проверить выполнение достаточных и необходимых условий второго порядка в каждой стационарной точке.

Решим систему уравнений $\begin{cases} 4\lambda_0 * (x_1^3 + 3x_1) + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0 \\ -4\lambda_0 * (x_2^3 + 2x_2) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \\ \lambda_2(-x_1) = 0, \\ \lambda_3(-x_2) = 0. \end{cases}$ при $\lambda_0 = 0$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \\ \lambda_2(-x_1) = 0, \\ \lambda_3(-x_2) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 2\lambda_1 x_1 \\ \lambda_3 = 2\lambda_1 x_2 \\ \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \\ -2\lambda_1 x_1^2 = 0, \\ -2\lambda_1 x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 2\lambda_1 x_1 \\ \lambda_3 = 2\lambda_1 x_2 \\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2 - \lambda_1 = 0, \\ \lambda_1 x_1^2 = 0, \\ \lambda_1 x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 2\lambda_1 x_1 \\ \lambda_3 = 2\lambda_1 x_2 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 x_1^2 = 0, \\ \lambda_1 x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 x_1^2 = 0, \\ \lambda_1 x_2^2 = 0 \end{cases}$$

Решение возможно только при всех $\lambda_i = 0$, но согласно необходимому условию первого порядка числа $\lambda^e{}_0, \lambda^e{}_1, \ldots, \lambda^e{}_p$ должны быть не равны одновременно нулю. Из этого можно сделать вывод, что $\lambda_0 \neq 0$.

При этом совершим замену вида $\frac{\lambda_j^e}{\lambda_o^e} = \lambda_j^{e'}$.

$$\begin{cases} 4*(x_1^3 + 3x_1) + 2\grave{\lambda}_1 x_1 - \grave{\lambda}_2 = 0 \\ -4*(x_2^3 + 2x_2) + 2\grave{\lambda}_1 x_2 - \grave{\lambda}_3 = 0 \\ \grave{\lambda}_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \\ \grave{\lambda}_2(-x_1) = 0, \\ \grave{\lambda}_3(-x_2) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \grave{\lambda}_2 = 4x_1^3 + 12x_1 + 2\grave{\lambda}_1 x_1 \\ \grave{\lambda}_3 = -4x_2^3 - 8x_2 + 2\grave{\lambda}_1 x_2 \\ \grave{\lambda}_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \\ -4*x_1^4 - 12x_1^2 - 2\grave{\lambda}_1 x_1^2 = 0, \\ 4x_2^4 + 8x_2^2 - 2\grave{\lambda}_1 x_2^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \grave{\lambda}_2 = 4x_1^3 + 12x_1 + 2\grave{\lambda}_1 x_1 \\ \grave{\lambda}_3 = -4x_2^3 - 8x_2 + 2\grave{\lambda}_1 x_2 \\ \grave{\lambda}_1 x_1^2 + \grave{\lambda}_1 x_2^2 - \grave{\lambda}_1 = 0, \\ -4*x_1^4 - 12x_1^2 - 2\grave{\lambda}_1 x_1^2 = 0 \\ x_2^2(4x_2 + 8 - 2\grave{\lambda}_1) = 0 \end{cases}$$

В последнем уравнении системы может быть 2 случая: $x_2^2 = 0$ или $4x_2 + 8 - 2\grave{\lambda}_1 = 0$

1) Рассмотрим случай $x_2^2 = 0$:

$$\begin{cases} \grave{\lambda}_2 = 4x_1^3 + 12x_1 + 2\grave{\lambda}_1 x_1 \\ \grave{\lambda}_3 = 0 \\ \grave{\lambda}_1 x_1^2 - \grave{\lambda}_1 = 0, \\ -4*x_1^4 - 12x_1^2 - 2\grave{\lambda}_1 x_1^2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \grave{\lambda}_2 = 4x_1^3 + 12x_1 + 2\grave{\lambda}_1 x_1 \\ \grave{\lambda}_3 = 0 \\ x_1^2 = 1, \\ -16 - 2\grave{\lambda}_1 = 0, \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \grave{\lambda}_2 = 4x_1^3 - 4x_1 \\ \grave{\lambda}_3 = 0 \\ |x_1| = 1 \\ \grave{\lambda}_1 = -8 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Таким образом получены 2 решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ \grave{\lambda}_1 = -8 \\ \grave{\lambda}_2 = 0 \\ \grave{\lambda}_3 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ \grave{\lambda}_1 = -8 \\ \grave{\lambda}_2 = 0 \\ \grave{\lambda}_3 = 0 \end{cases}$$

2) Рассмотрим случай $4x_2 + 8 - 2\grave{\lambda}_1 = 0$

$$\begin{cases} \grave{\lambda}_2 = 4x_1^3 + 12x_1 + 2\grave{\lambda}_1 x_1 \\ \grave{\lambda}_3 = -4x_2^3 - 8x_2 + 2\grave{\lambda}_1 x_2 \\ \grave{\lambda}_1 x_2^2 = -\grave{\lambda}_1 x_1^2 + \grave{\lambda}_1 \\ -4 * x_1^4 - 12x_1^2 - 2\grave{\lambda}_1 x_1^2 = 0 \\ \grave{\lambda}_1 = 2x_2^2 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \grave{\lambda}_2 = 4x_1^3 + 12x_1 + 2\grave{\lambda}_1 x_1 \\ \grave{\lambda}_3 = -4x_2^3 - 8x_2 + 2\grave{\lambda}_1 x_2 \\ x_1^2 = 1 - x_2^2 \\ x_1^2(-4 * x_1^2 - 12 - 2(2x_2^2 + 4)) = 0, \\ \grave{\lambda}_1 = 2x_2^2 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \grave{\lambda}_2 = 4x_1^3 + 12x_1 + 2\grave{\lambda}_1 x_1 \\ \grave{\lambda}_3 = -4x_2^3 - 8x_2 + 2\grave{\lambda}_1 x_2 \\ x_2^2 = 1 - x_1^2 \\ x_1^2(-4 * x_1^2 - 4x_2^2 - 20) = 0, \\ \grave{\lambda}_1 = 2x_2^2 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \grave{\lambda}_2 = 4x_1^3 + 12x_1 + 2\grave{\lambda}_1 x_1 \\ \grave{\lambda}_3 = -4x_2^3 - 8x_2 + 2\grave{\lambda}_1 x_2 \\ x_2^2 = 1 - x_1^2 \\ x_1^2(-4 * x_1^2 - 4(1 - x_1^2) - 20) = 0, \\ \grave{\lambda}_1 = 2x_2^2 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \grave{\lambda}_2 = 4x_1^3 + 12x_1 + 2\grave{\lambda}_1 x_1 \\ \grave{\lambda}_3 = -4x_2^3 - 8x_2 + 2\grave{\lambda}_1 x_2 \\ x_2^2 = 1 - x_1^2 \\ x_1^2(-4 * x_1^2 + 4x_1^2 - 24) = 0, \\ \grave{\lambda}_1 = 2x_2^2 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \grave{\lambda}_2 = 4x_1^3 + 12x_1 + 2\grave{\lambda}_1 x_1 \\ \grave{\lambda}_3 = -4x_2^3 - 8x_2 + 2\grave{\lambda}_1 x_2 \\ x_2^2 = 1 - x_1^2 \\ -24x_1^2 = 0, \\ \grave{\lambda}_1 = 2x_2^2 + 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \grave{\lambda}_2 = 0 \\ \grave{\lambda}_3 = -4x_2^3 - 8x_2 + 2\grave{\lambda}_1 x_2 \\ x_2^2 = 1 \\ x_1 = 0, \\ \grave{\lambda}_1 = 2x_2^2 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \grave{\lambda}_2 = 0 \\ \grave{\lambda}_3 = -4x_2^3 - 8x_2 + 12x_2 \\ x_2^2 = 1 \\ x_1 = 0, \\ \grave{\lambda}_1 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \grave{\lambda}_2 = 0 \\ \grave{\lambda}_3 = -4x_2^3 + 4x_2 \\ |x_2| = 1 \\ x_1 = 0, \\ \grave{\lambda}_1 = 6 \end{cases}$$

Таким образом получены 2 решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ \grave{\lambda}_1 = 6 \\ \grave{\lambda}_2 = 0 \\ \grave{\lambda}_3 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ \grave{\lambda}_1 = 6 \\ \grave{\lambda}_2 = 0 \\ \grave{\lambda}_3 = 0 \end{cases}$$

<u>В итоге были получены 4 стационарные точки:</u>

1) $(x_{1,} x_2) = (0,1)$ при $\begin{cases} \grave{\lambda}_1 = 6 \\ \grave{\lambda}_2 = 0 \\ \grave{\lambda}_3 = 0 \end{cases}$

2) $(x_{1,}x_2)=(0,-1)$ при $\begin{cases} \grave{\lambda}_1=6 \\ \grave{\lambda}_2=0 \\ \grave{\lambda}_3=0 \end{cases}$

3) $(x_{1,}x_2)=(1,0)$ при $\begin{cases} \grave{\lambda}_1=-8 \\ \grave{\lambda}_2=0 \\ \grave{\lambda}_3=0 \end{cases}$

4) $(x_{1,}x_2)=(-1,0)$ при $\begin{cases} \grave{\lambda}_1=-8 \\ \grave{\lambda}_2=0 \\ \grave{\lambda}_3=0 \end{cases}$

Точки $(x_{1,}x_2)=(-1,0)$ и $(x_{1,}x_2)=(0,-1)$ не подходят из-за наложенных ограничений.

Проверим достаточные условия первого порядка:

Для всех стационарных точек

Число ограничений-равенств $m=0$.

Число активных ограничений-неравенств $p=2$.

Так как $m+p<n$ следует проверить достаточные условия второго порядка .

Проверим достаточные условия второго порядка:

Составим матрицу Гессе:

$$H=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 L(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 L(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

$$H=\begin{vmatrix} 12x_1^2+12+2\lambda_1 & 0 \\ 0 & -12x_2^2-8+2\lambda_1 \end{vmatrix}$$

Второй дифференциал классической функции Лагранжа в точке (x^e,λ^e) :

$$d^2L(x^e,\lambda^e)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$$

Условия, накладываемые на первые дифференциалы активных в точке x^e ограничений-неравенств:

$$dg_j(x^e)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial x_i}dx_i=0,\ j=\overline{1,m},\quad и\ j\in J_a;\lambda_j^e>0\ (\lambda_j^e<0);$$

$$dg_j(x^e)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial x_i}dx_i\le 0,\qquad j\in J_a;\lambda_j^e=0;$$

1) Для точки $x^e=(x_{1,}x_2)=(0,1)$ **,** $\grave{\lambda}_1=6,\grave{\lambda}_2=0,\grave{\lambda}_3=0.$

Подставим значение координат в матрицу Гессе:

$$H=\begin{vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix}$$

Следовательно,

$$d^2L(x^e,\lambda^e)=24\,dx_1^2-8\,dx_2^2$$

Активные в точке x^e ограничения-неравенства:

$$\begin{cases} g_1(x)=x_1^2+x_2^2-1\le 0, \\ g_2(x)=-x_1\le 0, \end{cases}$$

Проверим условия, накладываемые на первые дифференциалы активных в точке x^e ограничений-неравенств.

Для $\lambda_1=6$ должно выполняться условие:

$$dg_1(x^e)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_1}{\partial x_i}\,dx_i=0$$

Вычислим $dg_1(x^e)$:

$$dg_1(x^e)=2x_1\,dx_1+2x_2dx_2=0$$

$$dg_1(x^e)=2dx_2=0$$

Для $\lambda_2=0$ должно выполняться условие:

$$dg_2(x^e)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_2}{\partial x_i}\,dx_i\le 0$$

Вычислим $dg_2(x^e)$:

$$dg_2(x^e)=-dx_1\le 0$$

Исследуем знак второго дифференциала функции Лагранжа:

$$d^2L(x^e,\lambda^e)=24\,dx_1^2-8\,dx_2^2$$

$$dg_1(x^e)=2dx_2=0$$

$$dg_2(x^e)=-dx_1\le 0$$

$$d^2L(x^e,\lambda^e)=24\,dx_1^2$$

$$d^2L(x^e,\lambda^e)>0\text{ , } \lambda_j^e\ge 0,\ j=\overline{m+1,p}.$$

Следовательно в точке $x^e=(x_{1,}\,x_2)=(0,1)$ - <u>локальный минимум</u>

2) Для точки $x^e=(x_{1,}\,x_2)=(1,0)$ **,** $\grave{\lambda}_1=-8,\grave{\lambda}_2=0,\grave{\lambda}_3=0.$

Подставим значение координат в матрицу Гессе:

$$H=\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -24 \end{vmatrix}$$

Следовательно,

$$d^2 L(x^e, \lambda^e) = 8\,dx_1^2 - 24\,dx_2^2$$

Активные в точке x^e ограничения-неравенства:

$$\begin{cases} g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \\ g_3(x) = -x_2 \le 0, \end{cases}$$

Проверим условия, накладываемые на первые дифференциалы активных в точке x^e ограничений-неравенств.

Для $\lambda_1 = -8$ должно выполняться условие:

$$dg_1(x^e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_1}{\partial x_i}\, dx_i = 0$$

Вычислим $dg_1(x^e)$:

$$dg_1(x^e) = 2x_1\,dx_1 + 2x_2\,dx_2 = 0$$

$$dg_1(x^e) = 2dx_1 = 0$$

Для $\lambda_3 = 0$ должно выполняться условие:

$$dg_3(x^e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_3}{\partial x_i}\, dx_i \le 0$$

Вычислим $dg_3(x^e)$:

$$dg_3(x^e) = -dx_2 \le 0$$

Исследуем знак второго дифференциала функции Лагранжа:

$$d^2 L(x^e, \lambda^e) = 8\,dx_1^2 - 24\,dx_2^2$$

$$dg_1(x^e) = 2dx_1 = 0$$

$$dg_3(x^e) = -dx_2 \le 0$$

$$d^2 L(x^e, \lambda^e) = -24\,dx_2^2$$

$$d^2 L(x^e, \lambda^e) < 0\,,\ \lambda_j^e \le 0,\ j = \overline{m+1, p}.$$

Следовательно в точке $x^e = (x_{1,}\, x_2) = (1{,}0)$ - <u>локальный максимум</u>

Задание 4.

Найти все стационарные точки и значения функций соответствующие этим точкам.

Как было вычислено в задании 3 стационарная функция имеет 4 стационарные точки:

1) $(x_{1,} x_2)=(0,1)$
2) $(x_{1,} x_2)=(0,-1)$
3) $(x_{1,} x_2)=(1,0)$
4) $(x_{1,} x_2)=(-1,0)$

Значение функции $f(x)=(x_1^2+3)^2-(x_2^2+2)^2-10$:

1) $f(x_1, x_2)=-19$ в точках $(x_{1,} x_2)=(0,1)$ и $(x_{1,} x_2)=(0,-1)$
3) $f(x_1, x_2)=6$ в точках $(x_{1,} x_2)=(1,0)$ и $(x_{1,} x_2)=(-1,0)$