Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Лабораторная работа №2.1

«Необходимые и достаточные условия существования безусловного экстремума»

по курсу «Методы оптимизации»

Выполнила:

студентка 4 курса,

группы ИУ9-82

Козлова А. А.

Проверил:

Каганов Ю. Т.

2018 г

Цель работы.

1. Исследование необходимых и достаточных условий существования экстремума функции без учета ограничений (безусловный экстремум).
2. Вычисление экстремумов функции.

Постановка задачи:

Дано:

Дважды непрерывно дифференцируемая **функция** $f(x)$, определенная на множестве $X \in R^n$.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^e \in R^n$ её локальных минимумов и максимумов на R^n:

$$f(x^e) = \min_{x \in R^n} f(x); f(x^e) = \max_{x \in R^n} f(x)$$

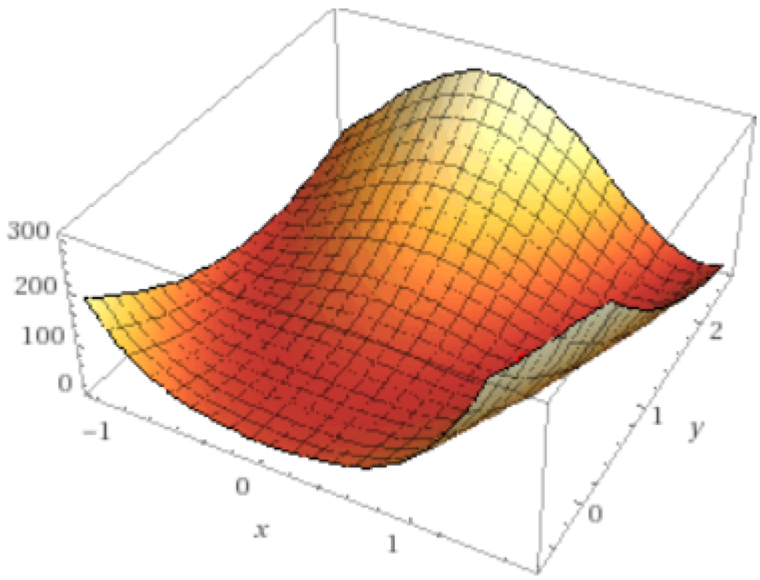
Задание 1.

Найти экстремум функции:

$$f(x)=40(x_1^2-x_2)^2+(x_1-1)^2+10\ ;\ x_1,x_2\in[-10,5].$$

на множестве R^2.

График поверхности:



Для решения использовался сервис Wolphram Mathematica.

Глобальные экстремумы:

- Минимум достигается при $(x_1,x_2)\approx(1,1)$ и равен $min=10$.
- Максимум достигается при $(x_1,x_2)=(-10,-10)$ и равен $max=484131$

Локальные экстремумы:

- Максимум достигается при $(x_1,x_2)=(5,-10)$ и равен $max=49026$.

Задание 2.

Записать необходимые условия экстремума первого порядка.

Необходимые условия экстремума первого порядка:

Пусть точка $x^e \in R^n$ - точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n и $f(x)$ дифференцируема в точке x^e. Тогда градиент функции $f(x)$ в точке x^e равен нулю т.е. $\nabla f(x^e) = 0$.

Найдем первый производные функции $f(x) = 40(x_1^2 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2 + 10$ по x_1 и x_2 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 80(x_1^2 - x_2) * 2x_1 + 2*(x_1 - 1) \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 40*2(x_1^2 - x_2)(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 80(x_1^2 - x_2) * 2x_1 + 2*(x_1 - 1) \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -80 * x_1^2 + 80 * x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 80(x_1^2 - x_2) * 2x_1 + 2*(x_1 - 1) = 0 \\ -80 * x_1^2 + 80 * x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 80(x_1^2 - x_2) * 2x_1 + 2*(x_1 - 1) = 0 \\ x_2 = x_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 80(x_1^2 - x_1^2) * 2x_1 + 2*(x_1 - 1) = 0 \\ x_2 = x_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = x_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

1) Подставив координаты найденной точки экстремума $x^e = (1, 1)$ в систему уравнений, получаем, что:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

Следовательно градиент $\nabla f(x^e) = 0$ и необходимое условие первого порядка выполняется.

Задание 3.

Проверить выполнение достаточных и необходимых условий второго порядка в каждой стационарной точке двумя способами.

1. Необходимое условие экстремума второго порядка.

Пусть точка $x^e \in R^n$ точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n и $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x^e. Тогда матрица Гессе $H(x^e)$ функции $f(x)$, вычисленной в точке x^e является положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной) т.е.

$$H(x^e) \geq 0, \quad (H(x^e) \leq 0) \qquad (3)$$

2. Достаточные условия экстремума.

Пусть функция $f(x)$ в точке $x^e \in R^n$ дважды дифференцируема, её градиент равен нулю, а матрица Гессе является положительно определенной (отрицательно определенной) т.е.

$$\nabla f(x^e) = 0 \; и \; H(x^e) > 0, (H(x^e) < 0) \qquad (4)$$

Тогда точка x^e есть точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n.

Составим матрицу Гессе:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{vmatrix} 160(3x_1^2 - x_2) + 2 & -80 \\ -160x_1 & 80 \end{vmatrix}$$

1 способ: (с помощью угловых и главных миноров).

Главные миноры матрицы получившейся матрицы Гессе:

$$\Delta_1 = 160(3x_1^2 - x_2) + 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 160(3x_1^2 - x_2) + 2 & -80 \\ -160x_1 & 80 \end{vmatrix}$$

Подставим координаты найденной точки экстремума:

$$\Delta_1 = 160(3 * 1^2 - 1) + 2 = 322 \qquad \Rightarrow \Delta_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 322 & -80 \\ -160 & 80 \end{vmatrix} = 322 * 80 - (-80) * (-160) = 12960 \qquad \Rightarrow \Delta_2 > 0$$

Следовательно, точка $x^e = (1,1)$ является точкой локального минимума.

2 способ (с помощью собственных значений матрицы Гессе).

Подставив координаты найденной точки экстремума, найдем собственные значения матрицы Гессе:

$$H=\begin{vmatrix} 322-\lambda & -80 \\ -160 & 80-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(322-\lambda)(80-\lambda)-(-80)*(-160)=0$$

$$25760-322\lambda-80\lambda+\lambda^2-12800=0$$

$$\lambda^2-402\lambda+12960=0$$

$$D=(-402)^2-4*(12960)=161604-51840=109764$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{402+/-\sqrt{109764}}{2}=201+/-\sqrt{27441}=201+/-165{,}65$$

$$\lambda_1=201-165{,}65=35{,}35$$

$$\lambda_2=201+165{,}65=366{,}65$$

Все собственные значения положительны, следовательно точка $x^e=(1,1)$ является точкой <u>локального минимума</u>.

Задание 4.

Найти все стационарные точки и значения функций соответствующие этим точкам.

Как было вычислено в задании 2 стационарная точка только одна — $(1,1)$.

Значение функции $f(x_1, x_2) = 40(x_1^2 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2 + 10$ в этой точке:

$f(1,1) = 10$