



Commande active des structures flexibles : applications spatiales et aéronautiques

**Notes de cours
Février 2000**

D. Alazard - J. P. Chrétien

3ème Année CSE/AU - Mastère AAIS

Sommaire

Préambule	7
1 Généralités : CASF et robustesse	9
1.1 Maîtrise des problèmes posés par les vibrations	9
1.2 « Au-delà de l'amortissement actif »	10
1.3 Modélisation pour la commande et robustesse	11
1.3.1 Incertitudes fréquentielles, incertitudes paramétriques	11
1.3.2 Contrôle en gain, contrôle en phase	12
1.4 De la modélisation à l'expérimentation	13
2 Éléments de modélisation	15
2.1 Quelques rappels	15
2.1.1 Modèles discrets	15
2.1.2 Discrétisation : les éléments finis	18
2.1.3 Détermination des équations dynamiques	18
2.1.4 Modèle dominé par la masse et la raideur : l'analyse modale réelle	20
2.1.4.1 Pulsations et modes propres réels	20
2.1.4.2 Propriétés asymptotiques du modèle	22
2.2 Exemples de modélisation	25
2.2.1 Le lanceur	25
2.2.1.1 Notations	25
2.2.1.2 Hypothèses	26
2.2.1.3 Équations	26
2.2.1.4 Représentation d'état	29
2.2.2 La satellite muni de panneaux ou d'antennes	30
2.2.2.1 Introduction	30
2.2.2.2 Rappel sur la modélisation par masses effectives	31

2.2.2.3	Connexion à la base	33
2.2.2.4	Équations hybrides générales	37
2.2.2.5	Conclusion : modèles analytiques en attitude	40
2.3	Modélisation unificatrice sous forme d'état	40
2.3.1	Équations dynamiques d'un système linéaire sous forme d'état	40
2.3.2	Valeurs propres et vecteurs propres	41
2.3.3	Expression des équations dans la base modale	43
3	Méthodes de réduction des représentations d'état[18]	45
3.1	Manipulation des représentations d'état	45
3.1.1	Changement de base	45
3.1.2	Troncature	46
3.1.3	Projection	46
3.1.4	Résidualisation	47
3.1.4.1	Perturbations singulières	47
3.1.4.2	Une solution approchée	47
3.1.4.3	Résidualisation	48
3.1.4.4	Propriétés	48
3.2	Méthodes de réduction algébriques	49
3.2.1	Dominance modale	49
3.2.2	Projection de DeVillemagne et Skelton	51
3.3	Méthodes basées sur la notion de gouvernabilité et d'observabilité	52
3.3.1	Définitions	52
3.3.1.1	Gramiens	52
3.3.2	Réduction équilibrée	53
3.3.2.1	Réalisation équilibrée	53
3.3.2.2	Réduction	55
3.4	Conclusions	55
4	La positivité	57
4.1	Bref historique des notions	57
4.1.1	Introduction	57
4.1.2	Hyperstabilité et positivité	57
4.1.3	Rebouclage des systèmes hyperstables	59
4.2	Application aux structures flexibles	60
4.3	Test de positivité d'un mode isolé	63
4.4	Limitations du théorème général	64

4.4.1	Cas particulier des modes rigides	64
4.4.2	Modes multiples sur l'axe imaginaire	65
4.4.3	Filtrage de l'entrée et de la sortie	66
5	Outils de la robustesse et CASF	67
5.1	Problème du « spill-over »	67
5.2	Maîtrise de l'inversion du système	68
5.2.1	Mise sous forme $M - \Delta$	69
5.2.2	Synthèse robuste paramétriquement- méthode PRLQG	73
5.2.2.1	Désensibilisation asymptotique du LQR	76
5.2.2.2	Introduction d'un observateur de KALMAN	77
5.2.2.3	Dualité et analogie avec le LTR	78
5.3	Synthèse multi-objectifs	79
5.3.1	La forme standard de passage	80
5.3.2	Utilisation pratique	82
6	CAT: Contrôle d'Attitude de Télescope	83
6.1	La maquette CAT	83
6.2	Modélisation	85
6.2.1	Modèle de structure	85
6.2.2	Mise sous forme standard	87
6.3	Synthèse de correcteur	88
6.3.1	Synthèse sur l'axe d'élévation	89
6.3.1.1	Synthèse en performance - système statique	89
6.3.1.2	Synthèse robuste	90
6.3.2	Synthèse sur l'axe d'azimut	94
6.3.3	Synthèse sur le système à deux axes	96
7	COVAS: Commande de Vol d'un Avion Souple	101
7.1	Introduction	101
7.2	Modèles et spécifications	102
7.3	Analyse du modèle et réduction	104
7.4	Synthèse H_2 multi-objectifs	106
7.4.1	La forme standard de passage	106
7.4.2	Synthèse minimaliste	108
7.4.3	Synthèse active	109
7.5	Synthèse par forme LQG équivalente	112

7.6 Conclusions	113
Références	125

Préambule

La CASF (Commande Active des Structures Flexibles) a fait l'objet de recherches nombreuses au sein du Département de Commande des Systèmes et de Dynamique du vol de l'Onera, Centre de Toulouse depuis le début des années 80. Ces notes de cours sont constituées d'éléments sélectionnés dans les nombreux documents rédigés à cette occasion, et visent à couvrir les divers aspects : modélisation dynamique, réduction de modèle, méthodologie de synthèse, applications spatiales et aéronautiques. Plus précisément, les éléments retenus proviennent des thèses de Calixte CHAMPETIER ([4]) et de Béatrice MADELAINE([18]) et de rapports d'études DRET, CNES et SPAE des auteurs, qui figurent en bibliographie et auxquelles le lecteur pourra se référer pour approfondir tel ou tel point.

Le premier chapitre est un chapitre de synthèse qui décrit les défis méthodologiques auquel l'ingénieur est confronté s'il ambitionne de « contrôler activement » une structure flexible (i.e. de mettre au moins un mode flexible dans le modèle utilisé lors de la synthèse d'un correcteur). Les notions introduite ici seront précisées dans les chapitres suivants.

Le second chapitre est consacré à la modélisation, point sur lequel l'automaticien doit s'arrêter s'il veut comprendre les propriétés particulières des systèmes proches de la limite de stabilité.

On se rendra compte que l'on doit manipuler des modèles d'ordre élevé : la détermination d'un modèle d'ordre adéquat pour la synthèse est un problème récurrent qui est abordé dans le chapitre suivant.

Avant de considérer la méthodologie de la robustesse en général, le problème particulier de la positivité fait l'objet du quatrième chapitre.

Les deux derniers chapitres développent respectivement une application spatiale (problème de pointage de précision) et une application aéronautique (problème de l'avion souple) pour illustrer en détail les principes développés dans les chapitres précédents.

Chapitre 1

Généralités : CASF et robustesse

1.1 Maîtrise des problèmes posés par les vibrations

Les vibrations des structures posent des problèmes critiques de performances et de stabilité pour le pilotage ou la stabilisation de véhicules, d'engins et de systèmes, en particulier dans le domaine aérospatial : leur effet dominant est l'adjonction de modes mal amortis qui limitent les performances de la commande usuelle fondée sur un modèle rigide, ou qui exposent le système à des instabilités s'ils sont explicitement corrigés dans les lois de commande embarquées

La maîtrise de ces problèmes passe par une collaboration harmonieuse entre les différentes spécialités qui concourent à l'obtention des performances recherchées : génie mécanique pour l'architecture générale des systèmes, dynamique des structures pour l'évaluation des charges statiques et dynamiques et la caractérisation fréquentielle, physique des matériaux pour la recherche de solutions « passives », physique des écoulements pour la modélisation des interactions, mesures physiques pour le choix et l'optimisation des détecteurs, électromécanique ou électrohydraulique pour les actionneurs,...

Au sein de ce concert de spécialistes, le rôle de l'automaticien est de déterminer les réglages des lois de commande et de proposer une amélioration des performances par le biais du calcul et de la compensation : l'architecture des lois de commande (nature et localisation des capteurs), la synthèse et la validation de lois en présence d'erreurs de modélisation et de variations paramétriques constituent l'essentiel de son apport, et les systèmes mal amortis motivent le développement de la plupart des techniques de synthèse de lois de commande dans le cadre linéaire, que l'on peut regrouper sous le vocable générique de *commande robuste*.

Nous insistons sur l'emploi du terme *commande* pour éviter l'utilisation abusive de l'anglicisme *contrôle* qui conduit souvent à la confusion des concepts. Nous réservons ce dernier terme pour désigner l'ensemble des moyens mis en œuvre pour

atteindre un but (impliquant détecteurs, actionneurs,... quand l'épithète « actif » est présent), et le mot « commande » désignera clairement la relation quantitative établie entre ces éléments pour atteindre ce but. On parlera ainsi d'un « système de contrôle d'attitude » de satellite, qui sera constitué en général d'actionneurs à jets de gaz, de roues de réaction, de bobines magnétiques, d'un bloc gyrométrique et de suiveurs d'étoiles, et de « lois de commande d'attitude » qui seront différentes suivant les axes et les modes de pilotage : en tangage et en mode pointage fin, une loi de commande sera constituée par exemple d'un retour proportionnel-dérivé sur la roue de réaction et d'un « trim » par bobines magnétiques.

1.2 « Au-delà de l'amortissement actif »

Pour préciser la contribution de l'automaticien à la résolution des problèmes posés par le contrôle actif des vibrations, nous ferons une distinction suivant les objectifs recherchés :

- si l'objectif est d'empêcher la structure de vibrer en augmentant l'amortissement naturel, le résultat fondamental est celui de la commande dite *positive* : le rebouclage de mesures de vitesse sur des commandes d'effort localisées au même endroit (co-localisation) est stabilisant. Ce résultat dicte la méthode à employer : il faut exprimer la physique de fonctionnement des détecteurs et des actionneurs de façon à se ramener à cette situation de bon sens où la fonction dissipative est implantée sous forme d'un frottement visqueux. Une fois les co-localisations choisies, le problème du réglage de la commande revient alors à déterminer des gains de retour pour optimiser la dissipation ; suivant le degré d'avancement des méthodes théoriques ou numériques de modélisation de la structure dans la bande de fréquences concernée, cette optimisation peut se faire sur calculateur à partir d'un modèle théorique ou d'un modèle identifié sur le site s'il est disponible, ou directement sur le site par essais/erreurs. La connaissance des propriétés de la structure, des matériaux et des éléments actifs est déterminante pour ce réglage. Cette technique peut être mise en échec pour deux raisons :
- les conditions d'application de la commande positive ne sont pas vérifiées, par exemple parce que la dynamique des détecteurs/actionneurs est insuffisante dans la bande utile, ou parce que la structure reçoit un apport d'énergie extérieure (le théorème suppose que le système piloté soit lui-même positif, et les systèmes instables par exemple ne sont pas positifs) : des risques d'instabilité de cette commande boucle fermée existent ;
- l'amortissement actif, même parfaitement réalisé, ne suffit pas à atteindre les objectifs fixés.

En revanche, si la colocalisation est réalisée correctement dans la bande de fréquences utile, le théorème sur la commande positive *garantit la stabilité* quelle que soit la structure et les erreurs de modèle ne se traduisent que par une perte de performances.

- si l’amortissement actif ne convient pas pour les raisons ci-dessus, parce que la co-localisation ne peut être obtenue, ou parce que l’objectif est différent (raidissement dynamique par exemple), on est *au-delà de l’amortissement actif* et il faut envisager d’avoir une commande
 - non colocalisée, c’est-à-dire faisant intervenir le transfert entre action et détection en deux points distincts de la structure ;
 - dynamique, c’est-à-dire possédant un contenu informationnel lié aux fréquences caractérisant la structure.

La loi de commande est dans ce cas beaucoup plus dépendante de la modélisation. La distinction boucle ouverte/boucle fermée intervient à ce niveau, dans la mesure où seule la boucle fermée, qui implique une ré-injection de puissance dans le système avec une possibilité d’erreur de signe si le modèle est mal connu, fait courir le risque de l’instabilité et du pompage ; en contrepartie, la robustesse aux perturbations sera bien meilleure que par une commande boucle ouverte.

1.3 Modélisation pour la commande et robustesse

1.3.1 Incertitudes fréquentielles, incertitudes paramétriques

Les analyses et les synthèses des lois de commande utilisent des modèles traduisant les relations actions-mesures (pour la stabilité), actions-critères et perturbations-critères (pour les performances). Ces modèles peuvent être non paramétriques et identifiés pour quelques points en fréquence, dans le cas par exemple d’une excitation harmonique sur une structure large bande, ou plus riches en information sous forme de transferts ou de représentation d’état.

Les sources d’incertitudes sont de deux ordres dont les conséquences sont assez différentes : la première résulte du risque d’excitation par la commande de termes non modélisés lors de la synthèse, qui peut mettre en cause la stabilité : c’est la contamination (*spillover* en anglais) ; la seconde résulte de l’inadéquation du modèle du point de vue paramétrique : erreurs sur les fréquences et les amortissements dans la bande de fréquence « contrôlée ». L’incertitude paramétrique existe aussi dans la bande non contrôlée, mais elle se confond alors avec la modélisation générale de l’incertitude fréquentielle : la forme la plus commune de la contamination est celle dans laquelle les modes sont d’autant plus mal connus que la fréquence augmente,

et elle conduit donc à tronquer le modèle de connaissance au delà d'une certaine fréquence pour effectuer la synthèse ; dans le cas le plus simple, la contamination s'exprime par le couplage entre la commande du système rigide et les modes flexibles.

Le cadre de la commande robuste tel qu'il s'est développé depuis quelques années propose une mise en forme systématique des problèmes de commande : cette « forme standard » quadripolaire fait apparaître comme entrées les perturbations (ou les consignes) et les commandes, comme sorties les variables contrôlées et les mesures, et permet d'unifier l'expression des problèmes de performance et de robustesse par une pondération relative *fréquentielle* des différents signaux. Le complémentarité entre la recherche des performances en basse fréquence et l'expression des incertitudes en haute fréquence s'exprime particulièrement bien dans ce cadre sous le nom de « sensibilité mixte ».

Dans le cas où les incertitudes fréquentielles sont bien découplées de la bande passante désirée pour le système en boucle fermée, cette technique offre un moyen systématique pour effectuer un « contrôle en gain » en haute fréquence, en augmentant l'atténuation sans perdre de phase dans la bande utile. Elle se prête beaucoup moins bien aux situations dans lesquelles les plages fréquentielles se resserrent, et pour lesquelles un contrôle précis de la phase se révèle indispensable.

1.3.2 Contrôle en gain, contrôle en phase

Ces termes issus de l'application des méthodes fréquentielles classiques des asservissements (diagramme de Black/Nichols en particulier) expriment en effet d'une autre manière les deux moyens que l'on peut utiliser pour garantir la stabilité :

- si le signal de retour a une amplitude inférieure à 1 dans la bande de fréquences considérée, la stabilité est garantie quelle que soit la phase,
- si le signal de retour a une amplitude supérieure à 1, il faut qu'il ait le bon signe pour éviter l'instabilité.

Il est clair que la seconde solution est potentiellement beaucoup plus performante puisqu'elle permet de garder un gain de boucle élevé, et donc un suivi de consigne ou une réjection de perturbation efficace, dans toute la bande contrôlée. Le contrôle en gain s'interprète alors comme un sacrifice des performances à la robustesse.

Dans le cas des structures flexibles, pour lesquelles les résonances et anti-résonances s'accompagnent de variations de phase brutales, ces concepts sont très opérationnels pour obtenir des performances satisfaisantes à condition d'avoir confiance dans le modèle et d'être dans le cas monovisible (mono-entrée ou mono-sortie) : en utilisant interactivement les diagrammes fréquentiels, il est possible de « placer » les résonances des modes aux bons endroits pour garder du gain.

La situation est plus complexe en multivariable, les normes manipulées « disséquant » moins finement la phase ; le cadre moderne de la commande robuste propose précisément une méthode systématique de réglage du compromis performances/robustesse, et nous discuterons plus en détail ce point plus loin.

1.4 De la modélisation à l'expérimentation

Si l'on a confiance dans le modèle utilisé pour la synthèse de la loi de commande parce qu'il a été identifié sur le site dans une configuration immuable (modèle boîte noire), le problème de la robustesse paramétrique passe donc au second plan, et d'ailleurs la très grande majorité des lois de commandes actives à fort contenu fréquentiel qui aient été validées expérimentalement ont été synthétisées sur des modèles de ce type.

L'avenir nous laisse percevoir une complexité croissante des modèles dynamiques allant de pair avec des exigences accrues en performances, nécessitant une méthodologie de synthèse de lois fondées sur une modélisation paramétrique « a priori » du dispositif. Les couplages dynamiques entre axes entraîneront le recours à des lois effectivement multivariables, et la commande devra être synthétisée à partir de modèles qui n'auront pas pu faire l'objet de validations par une campagne d'essais. La modélisation dynamique devra donc s'accompagner d'un ensemble d'informations exploitables au moment de la synthèse pour guider celle-ci et éviter des simplifications trop précises du système.

C'est dans ce contexte qu'est lancé le défi dont il est question dans le titre. Si le premier type d'incertitude se modélise en effet correctement comme une norme fréquentielle et se traite donc assez aisément par la formulation moderne des problèmes de commande, le second pose des problèmes beaucoup plus ardues, surtout en ce qui concerne la synthèse (c'est-à-dire la détermination directe d'une loi de commande à partir d'une expression convenable du problème) pour des systèmes dans lesquels l'information est très localisée en fréquence : les modélisations de l'incertitude par des normes de fonctions de la variable complexe sont très conservatives (c'est-à-dire qu'elles induisent une perte de performances importante), et les artifices pour pallier cette difficulté conduisent à alourdir de façon inacceptable actuellement les algorithmes de synthèse et la complexité des correcteurs, dont l'implantation efficace sur un calculateur de commande devient délicate.

Les techniques de synthèse de lois de commande conduisent toutes à une inversion approximative d'un modèle réduit adéquat : il n'est pas surprenant que la robustesse de la commande soit d'autant plus mauvaise que cet inverse est « pointu », et le défi majeur consiste donc à contrôler la précision de cette inversion compte tenu de la confiance que l'on peut exprimer dans le modèle. Cela suppose des progrès significatifs tant dans la maîtrise de l'inversion par la mise en forme du problème

que dans l'expression des incertitudes paramétriques au plus près de la physique du système : une voie de recherche intéressante consiste à exprimer cette incertitude sur la « forme du second ordre » qui préserve les notions de masse, de raideur et d'amortissement. La compréhension du compromis entre instrumentation et calcul, au sens où l'adjonction d'un détecteur supplémentaire peut être mis en balance avec la modélisation du transfert entre cette mesure et les actionneurs disponibles, est également essentielle. Dans le cas multivariable en effet, la part relative de l'amortissement actif, du aux co-localisations souvent présentes, et des performances dues à la partie non-colocalisée des lois, est à mesurer soigneusement, car le niveau de performances atteint est intimement lié à la robustesse : pour des systèmes stables en boucle ouverte, la commande nulle est une commande stabilisante très robuste... La validation elle-même des méthodologies de synthèse robuste en performances est un problème délicat pour ces systèmes présentant des modes mal amortis.

Chapitre 2

Éléments de modélisation

2.1 Quelques rappels

2.1.1 Modèles discrets

Nous entendons par « modèles discrets » les modèles décrivant des systèmes mécaniques vibratoires dans lesquels la flexibilité est localisée, ainsi que les éléments dynamiques (masse et inertie). Un système masse-ressort est un exemple élémentaire du type de système décrit. L'analyse des vibrations de ces systèmes fait l'objet d'une partie de la mécanique rationnelle ; nous rappellerons brièvement les résultats en suivant [19], dans le but d'introduire une classification entre systèmes vibrants que nous retrouverons dans la suite au niveau de systèmes où la flexibilité est répartie.

Un modèle discret est caractérisé par un certain nombre de degrés de liberté $q_i, i = 1 \cdots n$. Les équations obtenues par la méthode de LAGRANGE nécessitent l'évaluation :

- de l'énergie cinétique T que l'on décompose en trois termes

$$T = T_0 + T_1 + T_2$$

de sorte que

- T_0 ne dépend pas des \dot{q}_i ,
- T_1 est linéaire en \dot{q}_i ,
- T_2 est quadratique en \dot{q}_i .

et on écrit

$$T_1 = \sum_{i=1}^n f_i \dot{q}_i$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

- de l'énergie potentielle (gravitationnelle et de déformation qui ne dépend que des q_i , soit V)
- de la fonction de dissipation : sous l'hypothèse de viscosité (hypothèse de RAYLEIGH) :

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

- des forces généralisées (ni inertielles, ni dérivant d'un potentiel, ni dissipatives) Q_i obtenues par le théorème des travaux virtuels.

Les équations de LAGRANGE permettent d'écrire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad \text{avec} \quad L = T - V$$

formule dont la dérivation conduit à un système d'équations différentielles non linéaires.

La linéarisation de ces équations autour de points d'équilibre permet d'obtenir un ensemble d'équations différentielles linéaires, équations dont l'analyse permet une classification entre systèmes introduits plus loin.

Un point d'équilibre tel que :

$$\dot{q}_i = 0 \quad q_i = \text{constantes}$$

est dit trivial si les constantes sont toutes nulles, non trivial dans le cas contraire, auquel cas, les valeurs des constantes sont obtenues par la solution du système d'équations

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (T - V_0) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

La linéarisation des équations autour des points d'équilibre se traduit par les conséquences suivantes

- les coefficients de masse $m_{ij} = m_{ji}$ sont constants dans l'expression de T_2 ,
- les coefficients f_i intervenant dans T_1 sont linéaires par rapport aux coordonnées généralisées :

$$f_i = \sum f_{ij} q_j \quad \text{avec} \quad f_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right|_{q=0}$$

d'où

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

- la partie utile du potentiel dynamique $U = V - T_0$ est quadratique en $q_i q_j$, puisque en développant au voisinage d'un point d'équilibre, l'extrémalité de ce potentiel rend nuls les termes en dérivée première :

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = U(0, 0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j$$

On ne garde donc du potentiel que les termes quadratiques en q_i

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j$$

avec $k_{ij} = k_{ji}$.

Les équations de LAGRANGE linéarisées s'écrivent dans ces conditions

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij} \ddot{q}_j + (g_{ij} + c_{ij}) \dot{q}_j + k_{ij} q_j] = Q_j \quad i = 1, \dots, n$$

où l'on introduit les coefficients g_{ij} tels que

$$g_{ij} = f_{ij} - f_{ji} = -g_{ji}$$

appelés coefficients gyroscopiques.

Pour que les équations soient complètes, il convient de rajouter des forces qui ne dérivent pas d'un potentiel, de la forme $h_{ij} q_j$ avec :

$$h_{ij} = -h_{ji}$$

qui complètent le terme symétrique en k_{ij} par un terme antisymétrique en h_{ij} .

Sous forme matricielle, il vient

$$M \ddot{q} + (G + C) \dot{q} + (K + H) q = Q$$

(toutes les matrices sont réelles) avec

- G et H antisymétriques,
- C et K symétriques,
- M symétrique définie positive.

Par rapport à la forme générale

$$\mathcal{M} \ddot{q} + \mathcal{C} \dot{q} + \mathcal{K} q = \mathcal{Q}$$

on a donc distingué dans \mathcal{C} et \mathcal{K} leur partie symétrique et leur partie antisymétrique.

On appelle

- M la matrice de masse (inertie),

- C la matrice d'amortissement,
- K la matrice de raideur,
- G la matrice gyroscopique,
- H la matrice « circulatoire ».

Il convient de noter que l'on peut introduire H à partir d'une fonction du type de celle de RAYLEIGH, mais de la forme

$$\dot{q}^T H \dot{q} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{1}{2} \dot{q}^T C \dot{q}$$

La forme indiquée ci-dessus permet dans le cas général l'analyse dynamique des vibrations et de leur stabilité par l'analyse des équations libres :

$$M \ddot{q} + (G + C) \dot{q} + (K + H) q = 0$$

Dans l'espace d'état, la matrice d'évolution A du système autonome s'écrit :

$$A = - \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G + C & K + H \\ -I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1}(G + C) & -M^{-1}(K + H) \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

et les propriétés du système résultent de celles des valeurs propres de A . On ne peut rien dire de plus de ce cas général dissipatif avec forces « circulatoires ». Par contre, deux cas particuliers peuvent être individualisés : le cas des systèmes conservatifs non gyroscopiques, qui permet l'analyse modale réelle décrite plus loin (2.1.4) et celui des systèmes conservatifs gyroscopiques, que nous ne discuterons pas plus avant car il donne naissance à une analyse modale complexe particulière qui dépasse le cadre de ce document.

Les systèmes conservatifs non gyroscopiques correspondent au cas $G = H = 0$.

2.1.2 Discrétisation : les éléments finis

Les éléments détaillés concernant cette partie peuvent être trouvés dans tous les cours de base de statique et de dynamique des structures, par exemple [14]. Nous reprendrons ici l'introduction du chapitre consacré à une revue des techniques de réduction dans la thèse de Béatrice MADELAINE, par homogénéité avec le chapitre 3.

2.1.3 Détermination des équations dynamiques

Le point de départ de l'ensemble des approches de modélisation est l'application du *principe de HAMILTON*. Dans le cas de systèmes non conservatifs¹, il s'écrit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(\mathcal{T} - \mathcal{U}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta\tau dt = 0 \quad (2.1)$$

1. On appelle conservatif le système non amorti.

τ est le travail des forces non conservatives. \mathcal{T} est l'énergie cinétique et \mathcal{U} l'énergie de déformation, elles s'expriment de la manière suivante :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_v \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dv \quad (2.2)$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv \quad (2.3)$$

avec v le volume, discrétisé en unités de volume dv ,

ρ masse volumique,

u_i composantes des déplacements,

σ_{ij} composantes du tenseur des contraintes,

ϵ_{ij} composantes du tenseur des déformations.

On cherche à obtenir une solution approchée du problème continu en le réduisant à un problème discret à un nombre fini de degrés de liberté. La structure est discrétisée en éléments de dimension finie qui sont réunis en n points situés sur leur contour, appelés point nodaux ou nœuds. On définit une approximation des déplacements en séparant les variables d'espace et de temps en écrivant pour chaque composante de déplacement :

$$u_j(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x, y, z) q_i(t) \quad (2.4)$$

avec $q_i(t)$ coordonnées généralisées,

$\eta_i(x, y, z)$ fonctions de base de l'approximation définies dans le domaine v .

On peut prendre les déplacements des nœuds, comme coordonnées généralisées q_i ; on parle alors de méthode des déplacements. La reformulation du principe d'Hamilton (2.1) en tenant compte de l'approximation (2.4) conduit à un problème variationnel classique à n fonctions arguments $\{q_i, i = 1 \text{ à } n\}$ de la variable temps. Les conditions d'extremum de cette fonctionnelle sont les équations suivantes, appelées *équations de LAGRANGE* :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} = \mathcal{F}_i \quad i = 1 \text{ à } n \quad (2.5)$$

avec \mathcal{F}_i force généralisée correspondant à la coordonnée q_i et définie par le travail virtuel des forces extérieures :

$$\delta \tau = \mathcal{F}_i \delta q_i \quad (2.6)$$

Dans le cas des petits mouvements de systèmes élastiques, les énergies cinétique et de déformation s'expriment comme formes quadratiques symétriques des vitesses

et des déplacements aux nœuds respectivement, soient :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i^T \mathcal{M}_{ij} \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathcal{M} \dot{q} \quad (2.7)$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i^T \mathcal{K}_{ij} q_j = \frac{1}{2} q^T \mathcal{K} q \quad (2.8)$$

L'équation de LAGRANGE (2.5) devient alors :

$$\mathcal{M} \ddot{q}(t) + \mathcal{K} q(t) = \mathcal{F}(t) \quad (2.9)$$

Dans le cas d'un système avec amortissement visqueux, il faut ajouter au second membre le terme additionnel de force de dissipation visqueuse $\mathcal{F}_c = -\mathcal{C} \dot{q}$. D'où les équations du mouvement :

$$\boxed{\mathcal{M} \ddot{q}(t) + \mathcal{C} \dot{q}(t) + \mathcal{K} q(t) = \mathcal{F}(t)} \quad (2.10)$$

avec \mathcal{M} matrice de masse, réelle, symétrique, définie positive

\mathcal{K} matrice de raideur, réelle, symétrique, positive,

\mathcal{C} matrice d'amortissement visqueux,

\mathcal{F} forces généralisées.

On distinguera deux classes de structures :

- les structures isostatiques pour lesquelles la matrice \mathcal{K} est définie positive,
- les structures hypostatiques, pouvant subir des déplacements d'ensemble.

2.1.4 Modèle dominé par la masse et la raideur : l'analyse modale réelle

2.1.4.1 Pulsations et modes propres réels

Pour caractériser le comportement dynamique d'une structure, les dynamiciens procèdent généralement à l'*analyse modale réelle* du modèle. Elle consiste à déterminer les pulsations et modes propres réels du système conservatif.

Les modes propres correspondent aux solutions des équations en mouvement libre du système non amorti :

$$\mathcal{M} \ddot{q}(t) + \mathcal{K} q(t) = 0 \quad (2.11)$$

Les solutions sont de la forme :

$$q(t) = \phi_i e^{j\omega_i t} \quad (2.12)$$

En remplaçant $q(t)$ dans (2.11) par sa valeur donnée en (2.12) on obtient :

$$-\omega_i^2 \mathcal{M} \phi_i e^{j\omega_i t} + \mathcal{K} \phi_i e^{j\omega_i t} = 0 \quad (2.13)$$

$$\mathcal{K} \phi_i = \omega_i^2 \mathcal{M} \phi_i \quad (2.14)$$

qui est équivalent à :

$$(\mathcal{K} - \omega_i^2 \mathcal{M}) \phi_i = 0 \quad (2.15)$$

Les pulsations propres ω_i sont réelles positives et les modes propres associés ϕ_i sont réels.

Pour les structures hypostatiques, il existe autant de modes propres à fréquence nulle que de degrés de liberté décrivant les mouvements d'ensemble de la structure : ce sont les *modes rigides*. Les modes flexibles de telles structure sont appelés *modes libres*.

À partir de (2.15) on obtient n solutions que l'on met sous forme matricielle :

$$(\mathcal{K} - \Omega \mathcal{M}) \Phi = 0$$

avec $\Omega = \text{diag}\{\omega_i^2\}$ et $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$

(2.16)

Les modes propres ϕ_i ont la propriété d'être orthogonaux entre eux par rapport à \mathcal{K} et \mathcal{M} , si leurs fréquences sont différentes :

$$\phi_i^T \mathcal{M} \phi_j = 0 \quad \text{si} \quad \omega_i \neq \omega_j \quad (2.17)$$

$$\phi_i^T \mathcal{K} \phi_j = 0 \quad \text{si} \quad \omega_i \neq \omega_j \quad (2.18)$$

Les modes flexibles sont donc orthogonaux entre eux et orthogonaux aux modes rigides. De plus on a :

$$\phi_i^T \mathcal{K} \phi_i = k_i \quad (2.19)$$

$$\phi_i^T \mathcal{M} \phi_i = m_i \quad (2.20)$$

k_i est appelée *raideur généralisée* du mode i et m_i *masse généralisée* du mode i . Elles sont liées par la relation :

$$k_i = \omega_i^2 m_i \quad (2.21)$$

Les matrices $\Phi^T \mathcal{M} \Phi$ et $\Phi^T \mathcal{K} \Phi$ sont donc diagonales. Il existe une infinité de matrices de modes propres Φ vérifiant l'équation (2.16). En général on choisit de la normer par rapport à \mathcal{M} , tel que :

$$\Phi^T \mathcal{M} \Phi = I_{nn} \quad (2.22)$$

On a alors :

$$\Phi^T \mathcal{K} \Phi = \Omega \quad (2.23)$$

2.1.4.2 Propriétés asymptotiques du modèle

En se plaçant toujours dans le cas où il n'y a pas de modes rigides, si on effectue une projection des équations de la dynamique (2.10), en mouvement libre, dans la base modale :

$$\mathcal{M}\ddot{\tilde{q}}(t) + \mathcal{C}\dot{\tilde{q}}(t) + \mathcal{K}\tilde{q}(t) = 0 \quad (2.24)$$

$$q(t) = \Phi\tilde{q}(t) \quad (2.25)$$

$$\ddot{\tilde{q}}(t) + (\Phi^T \mathcal{C} \Phi)\dot{\tilde{q}}(t) + \text{diag}\{\omega_i^2\}\tilde{q}(t) = 0 \quad (2.26)$$

on voit que ces équations sont couplées par l'amortissement.

Il existe certaines conditions sur l'amortissement qui permettent d'assurer un caractère diagonal à la matrice d'amortissement modal, c'est-à-dire $\Phi^T \mathcal{C} \Phi = \text{diag}\{2\xi_i \omega_i\}$ avec ξ_i facteur d'amortissement modal :

- condition introduite par RAYLEIGH : l'amortissement doit pouvoir être exprimé sous la forme

$$\mathcal{C} = a_0 \mathcal{M} + a_1 \mathcal{K} \quad (2.27)$$

- série de CAUGHEY : l'amortissement s'exprime sous la forme d'une série

$$\mathcal{C} = \mathcal{M} \sum_{j=0}^{m-1} a_j [\mathcal{M}^{-1} \mathcal{K}] \quad (2.28)$$

- la méthode la plus utilisée cependant consiste à ne garder que les termes diagonaux de $\Phi^T \mathcal{C} \Phi$. Cette méthode s'appuie sur l'hypothèse de BASILE :

Hypothèse 2.1 Hypothèse de BASILE

Même en présence de couplage modal par l'amortissement, les équations modales du mouvement sont dynamiquement découplées pour les structures faiblement amorties si la séparation des modes en fréquence est satisfaisante.

Des critères de découplage ont été formulés :

$$\sqrt{2 \frac{\xi_j}{\zeta_{kj}} \left| \frac{\mathcal{C}_{kj}}{\mathcal{C}_{jj}} \right|} \ll 1 \quad (\text{HASSELMAN [13]}) \quad (2.29)$$

$$2\xi_j < \varepsilon \left| \frac{\mathcal{C}_{jj}}{\mathcal{C}_{kj}} \right|_{\min k} \quad (\text{WARBURTON [23]}) \quad (2.30)$$

avec

$$\zeta_{kj} = \left(\frac{\omega_k}{\omega_j} \right)^2 - 1 \quad \text{facteur de séparation en fréquence pour deux modes } k \text{ et } j$$

ε paramètre d'erreur ($\varepsilon = 0.05$)

Sous ces conditions l'équation (2.26) devient :

$$\boxed{\ddot{\tilde{q}}(t) + \text{diag}\{2\xi_i\omega_i\}\dot{\tilde{q}}(t) + \text{diag}\{\omega_i^2\}\tilde{q}(t) = 0} \quad (2.31)$$

À partir de cette équation, on peut en déduire un certain nombre d'informations sur la stabilité du système :

- dans le cas où l'amortissement est nul (système conservatif) :
 - si les modes sont simples et différents de zéros, la stabilité simple du système est assurée ;
 - si les modes sont multiples, la stabilité simple du système n'est pas acquise ;
- si la matrice d'amortissement visqueux est diagonalisable et les éléments diagonaux positifs, le système est asymptotiquement stable ;
- si la matrice d'amortissement visqueux n'est pas diagonalisable, on ne peut pas conclure sur la stabilité ; il faut alors étudier la décomposition en modes complexes du système amorti ; la formalisation des équations sous forme d'état est alors nécessaire.

2.2 Exemples de modélisation de véhicules présentant des vibrations

2.2.1 Le lanceur

2.2.1.1 Notations

A	matrice dynamique de la représentation d'état
B	vecteur de commande de la représentation d'état
C	matrice d'observation de la représentation d'état
F	foyer
G	centre de gravité total du lanceur
G_E	centre de gravité du lanceur rigide déséquipé (sans tuyère)
G_T	centre de gravité de la tuyère
G_{T_r}	centre de gravité de la tuyère pour le lanceur rigide
i	incidence
J	inertie totale du lanceur autour de G
I_E	inertie du lanceur déséquipé autour de G_E
I_T	inertie de la tuyère autour de G_T
l_E	distance du centre de gravité G_E au point d'articulation tuyère O
l_F	distance du foyer au point d'articulation tuyère O
l_T	distance du centre de gravité G_T au point d'articulation tuyère O
M	masse totale du lanceur
M_E	masse du lanceur déséquipé
M_T	masse de la tuyère
M_i	masse généralisée associée au i ^e mode de flexion
N_α	coefficient de portance
O	point d'articulation tuyère
P	poussée totale
P_o	poussée pivotante
T	énergie cinétique
V	vitesse du lanceur le long de sa trajectoire nominale
$V_{x/y}$	vitesse relative du point x par rapport au point y
W	vitesse du vent latéral
X_A	traînée
Y_{x_i}	amplitude normalisée du i ^e mode de flexion à l'abscisse x
Y'_{x_i}	pente de i ^e mode de flexion à l'abscisse x , $Y'_{x_i} = \partial Y_{x_i} / \partial x$
Z	déplacement latéral du centre de gravité total
β	angle de braquage de la tuyère
η_i	i ^e mode de flexion
θ	angle entre la verticale et l'axe longitudinal du lanceur rigide
ω_T	fréquence propre du servomoteur
ξ_T	amortissement du servomoteur
ω_i	fréquence du i ^e mode de flexion
ξ_i	amortissement du i ^e mode de flexion

Variables d'état du modèle (2 modes de flexion)

$$X^t = [\dot{Z} \ \theta \ \dot{\theta} \ \beta \ \dot{\beta} \ W \ W_1 \ \dot{\eta}_1 \ \dot{\eta}_2 \ \dot{\eta}_2]$$

2.2.1.2 Hypothèses

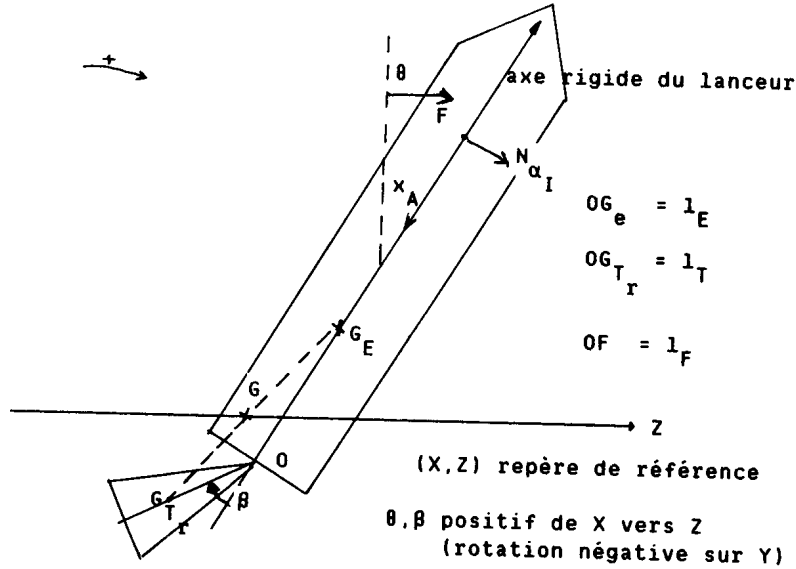


FIG. 2.1 – Représentation schématique du lanceur rigide

Une modélisation du lanceur est obtenue par l'écriture des équations de Lagrange sous les hypothèses suivantes :

- mouvement plan autour de la trajectoire de référence supposée plane et rectiligne,
- petits mouvements autour du centre de gravité,
- lanceur flexible,
- propulseurs à poudre (ou ballottements des liquides négligés).

2.2.1.3 Équations

L'énergie cinétique totale du système s'exprime par la relation suivante :

$$2T = M\dot{Z}^2 + (I_E + I_T + \frac{M_E M_T}{M}(l_E + l_T)^2) \theta^2 + \sum_i M_i \dot{\eta}_i^2$$

$$\begin{aligned}
& + (I_T + \frac{M_E M_T}{M} l_T^2) \dot{\beta}^2 + 2(I_T + \frac{M_E M_T}{M} l_T (l_E + l_T)) \dot{\beta} \dot{\theta} \\
& + \sum_i (I_T Y'_{O_i} - M_T l_T (Y_{O_i} - l_T Y'_{O_i})) \dot{\eta}_i \dot{\beta}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

L'énergie potentielle et l'énergie dissipative ont la formulation suivante :

$$2 E_p = \sum_i M_i \omega_i^2 \eta_i^2 \tag{2.33}$$

$$2 E_d = \sum_i 2 M_i \omega_i \xi_i \eta_i^2 \tag{2.34}$$

Les forces agissant sur le système sont, compte tenu de l'approximation des petits angles :

- la poussée $\vec{P} = P \vec{x} + (P(\theta + \sum_i Y'_{O_i} \eta_i) + P_o \beta) \vec{z}$,
- les forces aérodynamiques $\vec{A} = -X_A \vec{x} + (X_A \theta + N_\alpha i) \vec{z}$,
- le couple de la servogouverne $\vec{\Gamma}$

avec P poussée totale, P_o poussée pivotante, X_A traînée, N_α coefficient de portance, i incidence.

Les coordonnées généralisées choisies pour décrire le mouvement du lanceur sont les suivantes :

$$(Z, \theta, \beta, \eta_i) \tag{2.35}$$

Les forces généralisées associées à chaque coordonnée s'expriment par

$$Q_z = P(\theta + \sum_i Y_{O_i} \eta_i) + P_o \beta - X_A \theta + N_\alpha (\theta - \frac{\dot{Z} - W}{V}) \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
Q_\theta = & [-(P - P_o - X_A) \beta + X_A \sum_i Y'_{O_i}] \frac{M_T l_T}{M} - P \sum_i Y_{O_i} \eta_i \\
& - (P \sum_i Y'_{O_i} \eta_i + P_o \beta) \frac{M_E l_E}{M} \\
& + N_\alpha (\frac{M_T l_T}{M} - \frac{M_E l_E}{M} + l_F) (\theta - \frac{\dot{Z} - W}{V})
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
Q_\beta = & [-(P - P_o - X_A) \beta + X_A \sum_i Y'_{O_i}] \frac{M_T l_T}{M} \\
& + N_\alpha \frac{M_T l_T}{M} (\theta - \frac{\dot{Z} - W}{V}) + \Gamma
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\eta_i} = & (P(\sum_i Y'_{O_i} \eta_i + P_o \beta) Y_{O_i} + [-(P - P_o - X_A) \beta \\
& + X_A \sum_i Y'_{O_i} + N_\alpha (\theta - \frac{\dot{Z} - W}{V})] \frac{M_T l_T}{M} Y'_{O_i}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Les équations de LAGRANGE s'écrivent alors conformément à 2.41 en posant :

$$M_\alpha = N_\alpha \left(\frac{M_T l_T}{M} - \frac{M_E l_E}{M} + l_F \right) \quad (2.40)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.41)$$

On en déduit les équations du mouvement :

$$M \ddot{Z} = (P - X_A + N_\alpha) \theta + P \sum_i Y'_{O_i} \eta_i + P_o \beta - N_\alpha \frac{\dot{Z} - W}{V} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} J \ddot{\theta} + \left(I_T + \frac{M_T M_E}{M} l_T (l_E + l_T) \right) \ddot{\beta} = \\ M_\alpha \theta + \left(X_A \frac{M_T l_T}{M} - P \frac{M_E l_E}{M} \right) \sum_i Y'_{O_i} \eta_i - P \sum_i Y_{O_i} \eta_i \\ - \left(\frac{M_T l_T}{M} (P - P_o - X_A) + P_o \frac{M_E l_E}{M} \right) \beta - M_\alpha \frac{\dot{Z} - W}{V} \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} M_i \ddot{\eta}_i + [I_T Y'_{O_i} - M_T l_T (Y_{O_i} - l_T Y'_{O_i})] \ddot{\beta} + 2 M_i \xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + M_i \omega_i^2 \eta_i = \\ (N_\alpha \frac{M_T l_T}{M} Y'_{O_i}) \theta + (P Y_{O_i} + X_A \frac{M_T l_T}{M} Y'_{O_i}) Y_{O_i} \eta_i \\ + (P_o Y_{O_i} - (P - P_o X_A) \frac{M_T l_T}{M} Y'_{O_i}) \beta - N_\alpha \frac{M_T l_T}{M} Y'_{O_i} \frac{\dot{Z} - W}{V} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} (I_T + \frac{M_T M_E}{M} l_T^2) \ddot{\beta} + (I_T + \frac{M_T M_E}{M} l_T (l_E + l_T)) \ddot{\theta} + \sum_i (I_T Y'_{O_i} - Y_{O_i}) \ddot{\eta}_i = \\ N_\alpha \frac{M_T l_T}{M} \theta + X_A \frac{M_T l_T}{M} \sum_i Y'_{O_i} \eta_i - (P - P_o - X_A) \frac{M_T l_T}{M} \beta \\ - N_\alpha \frac{M_T l_T}{M} \frac{\dot{Z} - W}{V} + \Gamma \end{aligned} \quad (2.45)$$

On remarquera que l'effet du vent se traduit dans toutes les équations par le terme de « vent apparent » $\frac{\dot{Z} - W}{V}$.

La dernière équation peut s'écrire formellement comme suit :

$$I_0 \ddot{\beta} = \Gamma_r + \Gamma \quad (2.46)$$

Γ_r représentant tous les termes de couplage inertiel entre le lanceur et la tuyère et Γ le couple appliqué par les vérins sur la tuyère. Or, du fait de la faible compressibilité des vérins hydrauliques utilisés sur les lanceurs, on peut émettre l'hypothèse simplificatrice suivante :

$$\Gamma = -\Gamma_r + \Gamma_s \quad (2.47)$$

avec Γ_s couple déterminé par la servocommande.

Sous cette hypothèse, l'équation 2.45 est alors remplacée par l'équation représentant la dynamique du servomoteur que nous supposons ici du deuxième ordre, soit :

$$\ddot{\beta} + 2\xi_T \omega_T \dot{\beta} + \omega_T^2 \beta = \omega_T^2 \beta_c \quad (2.48)$$

Équation simplifiée : lanceur rigide L'équation 2.43 peut se simplifier en posant :

$$\begin{aligned} K &= (I_T + \frac{M_T M_E}{M} l_T (l_E + l_T)) / J \\ A_6 &= M_\alpha / J \\ C_1 &= (\frac{M_T l_T}{M} (P - P_o - X_A) + P_o \frac{M_E l_E}{M}) / J \end{aligned}$$

On obtient une forme « classique » en négligeant les modes de flexion :

$$\ddot{\theta} + K \ddot{\beta} = A_6 \dot{i} - C_1 \beta \quad (2.49)$$

Si on confond en plus l'incidence et l'assiette en négligeant la vitesse transverse et le vent, on trouve une équation reliant β à θ qui fait apparaître le mode aérodynamique à la pulsation $\sqrt{A_6}$ (divergent ou juste oscillant suivant le signe de A_6) et un zéro de transmission imaginaire pur à la « fréquence d'étouffement » $\sqrt{C_1/K}$.

2.2.1.4 Représentation d'état

On complète d'abord les équations précédentes par un modèle stochastique de vent du second ordre de la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{W} \\ \dot{W}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_0 \\ -\alpha_0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ W_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} W_b \quad (2.50)$$

avec W_b variable gaussienne de densité spectrale unité.

On schématise ensuite les mesures gyroscopiques θ_m et gyrométrique $\dot{\theta}_m$ par les équations :

$$\theta_m = \sum_i Y'_{c_i} \eta_i + w_1 \quad (2.51)$$

$$\dot{\theta}_m = \sum_i Y'_{G_i} \dot{\eta}_i + w_2 \quad (2.52)$$

où Y'_{c_i} et Y'_{G_i} sont les pentes des déformées respectivement au droit de la centrale inertielle et au droit du gyromètre (cette distinction, importante autrefois, a tendance à disparaître car la mesure gyrométrique – quand elle est explicite – est fournie par la centrale).

Le système d'équations précédentes s'exprime alors aisément sous la forme d'état suivante :

$$X = A(t) X + B(t) U + V_b \text{ avec } E[V_b V_b^t] = M_b \delta(\tau) \quad (2.53)$$

$$Y = C(t) X + W_m \text{ avec } E[W_m W_m^t] = N \delta(\tau) \quad (2.54)$$

avec dans le cas de deux modes flexibles

$$X = (\dot{Z}, \dot{\theta}, \dot{\theta}, \dot{\beta}, \dot{\beta}, W, W_1, \dot{\eta}_1, \eta_2, \dot{\eta}_2)^t \quad (2.55)$$

et

$$U = \beta_c \quad ; \quad Y = (\theta, \dot{\theta}) \quad (2.56)$$

La discrétisation de ce modèle à la période T, période choisie en fonction de la dynamique désirée en boucle fermée, donne les équations récursives cherchées :

$$X_{k+1} = F_k X_k + G_k U_k + V_k \text{ avec } E[V_k V_k^t] = M_k \quad (2.57)$$

$$Y_k = H_k X_k + W_k \text{ avec } E[W_k W_k^t] = N_k \quad (2.58)$$

avec

$$F_k = e^{A(t_k) t_k} \quad ; \quad G_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t) t} B(t) dt \quad ; \quad H_k = C(t_k) \quad (2.59)$$

$$M_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t) t} M_b e^{A^t(t) t} dt \quad ; \quad N_k \text{ approx. discrète de } N \quad (2.60)$$

2.2.2 La satellite muni de panneaux ou d'antennes

2.2.2.1 Introduction

La connexion d'un appendice flexible (antenne et surtout générateur solaire ou G.S.) est en exemple très instructif de modélisation car il conduit à manipuler une représentation modale de l'appendice et une représentation classique du véhicule.

On examinera dans un premier temps la notion de masse effective, très utile pour représenter l'appendice quand on ne désire pas connaître précisément son mouvement et que l'on ne s'intéresse qu'aux réactions qu'il produira à l'encastrement sur le véhicule, et on interprétera ce concept par des modélisations simplifiées masses-ressort.

On reprendra dans un second temps les modélisations classiques dites hybrides, qui permettront de raffiner l'analyse du modèle en termes de modes encastrés et de modes libres.

Du fait que le modèle d'appendice est linéarisé, on fera de même pour le modèle du corps en attachant une importance particulière aux notions d'opérateur de transport des modèles d'un point à un autre.

2.2.2.2 Rappel sur la modélisation par masses effectives

Sous-structuration Une version simplifiée de la sous-structuration (c'est-à-dire de la description dynamique d'un ensemble structural par assemblage de sous-ensembles caractérisés séparément) consiste à réduire un appendice à des propriétés dynamiques en un interface *ponctuel* sous l'hypothèse encastree : on représente ainsi la dynamique vue du point d'encastrement par un généralisation de la loi fondamentale de la dynamique $F = M\gamma$ où on remplace M par une « masse dynamique » $M(s)$. Les vecteurs F et γ ont six composantes dans le cas général où l'on traite simultanément les translations et les rotations.

On appelle « représentation par masses effectives » une telle simplification, qui permet de limiter à six paramètres par fréquence de vibration la représentation dynamique conservative de la sous-structure (dans l'hypothèse où les modes sont réels) et qui est analogue à une idéalisation par masses-ressorts du sous-ensemble structural.

Le développement du modèle dynamique vu de l'interface s'écrit en effet en limitant la représentation à N modes

$$M(s) = M_r + \sum_{k=1}^N M_k \frac{\omega_k^2}{s^2 + \omega_k^2} \quad (2.61)$$

avec la relation fondamentale de définition des masses effectives comme des matrices de rang 1, qui sont obtenues en effectuant les carrés extérieurs des facteurs de participation modale L_k :

$$M_k = L_k L_k^t \quad (2.62)$$

Le modèle statique correspondant s'écrit donc

$$M(0) = M_0 = M_r + \sum_{k=1}^N M_k \quad (2.63)$$

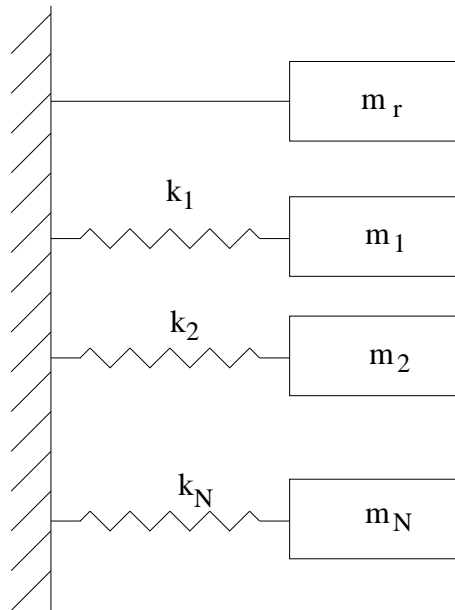
la matrice M_0 étant la matrice modélisant la sous-structure réduite à l'interface ponctuel P :

$$\begin{bmatrix} F \\ M_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m1 & m(*GP) \\ -m(*GP) & I_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = M_0 \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

et la matrice M_r la matrice « résiduelle » représentant la sous-structure en haute fréquence au même point.

Une représentation d'état possible de cette matrice de transfert est obtenue par somme directe de sous-espaces de dimension 2 associés à chacun des modes, la matrice M_r apparaissant comme transmission directe :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A_N \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

FIG. 2.2 – *Analogie masses-ressorts de la sous-structuration*

$$\begin{bmatrix} F \\ M_P \end{bmatrix} = [C_1 \dots C_N] X + M_r \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix}$$

avec

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega_k^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} L_k^t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_k = [0 \ L_k] \quad (2.66)$$

Nous appellerons dans la suite « modèle dynamique linéarisé inverse » la matrice M apparaissant dans la relation généralisée $F = M \gamma$. Le modèle dynamique linéarisé inverse de l'appendice rigidifié réduit au point d'encastrement (équation 2.64) est donc retrouvé à partir de la forme d'état par la formule :

$$M_0 = M_r - C A^{-1} B \quad (2.67)$$

Une forme soustractive existe qui permet de faire apparaître explicitement M_0 dans le développement.

Analogie masses-ressorts Dans le cas très simplifié de la mobilisation dans une seule direction, l'analogie avec un système de masses est utile : la figure 2.2 illustre cette simplification. Les équations s'en déduisent facilement : dans le cas d'un seul mode, en notant \ddot{x}_B l'accélération à l'interface, F la réaction à l'interface, k la raideur du ressort, x_1 la position relative de la masse, $l_1^2 = m_1$ la masse mobile et m_r la masse résiduelle, on a une généralisation de la relation $F = m_r \ddot{x}_B$ sous la forme

$$\begin{aligned} F &= m_r \ddot{x}_B - k x_1 \\ l_1^2 (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_B) &= -k x_1 \end{aligned} \quad (2.68)$$

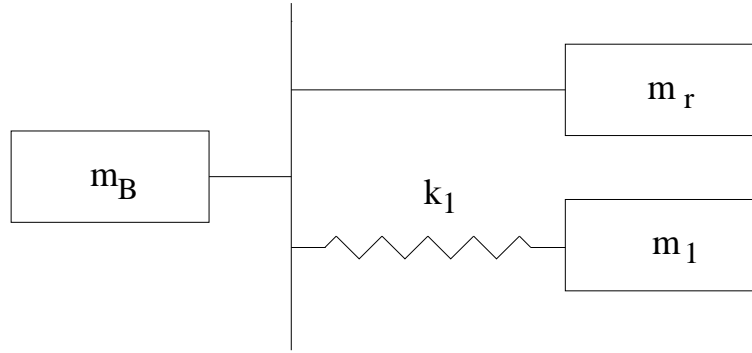


FIG. 2.3 – Connexion à la base (1 mode encastré)

D'où en passant en transformées de Laplace :

$$x_1 = -\frac{l_1^2}{l_1^2 s^2 + k} \ddot{x}_B \quad (2.69)$$

et

$$F = \left(m_r + \frac{k l_1^2}{l_1^2 s^2 + k}\right) \ddot{x}_B \quad (2.70)$$

soit en faisant apparaître la fréquence encastrée $\omega_1 = \sqrt{k/m_1}$

$$M(s) = m_r + l_1^2 \frac{\omega_1^2}{s^2 + \omega_1^2} \quad (2.71)$$

2.2.2.3 Connexion à la base

Nous poursuivons tout d'abord le traitement du cas simplifié mono-axial, avant d'examiner la généralisation aux 6 degrés de liberté du corps rigide et à la représentation d'état. Ceci nous permettra d'introduire la représentation hybride de façon naturelle.

Cas simplifié Dans le cas simplifié mono-axe/mono-mode, la connexion à la base, soumise par ailleurs à des forces extérieures F_e , est immédiate en écrivant le modèle dynamique de la sous-structure « base » constituée d'un simple masse m_B (cf. figure 2.2.2.3). On a

$$m_B \ddot{x}_B = -F + F_e \quad (2.72)$$

ce qui est analogue à une mise « en série » des deux masses m_B et $M(s)$:

$$(m_B + M(s)) \ddot{x}_B = F_e \quad (2.73)$$

Le calcul classique de la fréquence libre en découle, puisque le modèle dynamique linéarisé exprimant les accélérations de la base en fonction des forces extérieures résulte du calcul de l'inverse de $m_B + M(s)$, soit

$$\frac{s^2 + \omega_1^2}{l_1 \omega_1^2 + (m_B + m_r)(s^2 + \omega_1^2)} \quad (2.74)$$

et la fréquence libre est égale à

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{l_1^2 + m_B + m_r}{m_B + m_r}} \omega_1 \quad (2.75)$$

On retrouve bien le rapport entre fréquence libre et fréquence encastree

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_B + m_r}} \quad (2.76)$$

toujours supérieur à 1, et d'autant plus grand que la masse mobile est supérieure à la masse « fixe » $m_B + m_r$. Le fait que λ soit supérieur à 1 traduit la co-localisation du paramétrage de la position du corps central et du couple externe appliqué.

Écriture directe des équations simplifiées Si l'on évite le passage par la sous-structuration, on établit directement les équations différentielles du mouvement à partir de la figure 2.2.2.3 sous la forme :

$$\begin{aligned} (m_B + m_r) \ddot{x}_B &= k x_1 + F_e \\ m_1 (\ddot{x}_B + \ddot{x}_1) &= -k x_1 \end{aligned} \quad (2.77)$$

soit en substituant la seconde équation dans la première, une forme « hybride » (équations différentielles faisant intervenir le mode rigide et le mode flexible) « encastree » (la fréquence de vibration apparaissant dans la seconde équation est la fréquence de vibration $\sqrt{k/m_1}$ de la masse seule connectée au ressort quand \ddot{x}_B est forcé à zéro) :

$$\begin{aligned} (m_B + m_r + m_1) \ddot{x}_B + m_1 \ddot{x}_1 &= F_e \\ m_1 \ddot{x}_1 + k x_1 &= -m_1 \ddot{x}_B \end{aligned} \quad (2.78)$$

Cette forme hybride correspond à l'écriture des équations sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} M_{rr} & M_{rf} \\ M_{rf}^t & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r \\ q_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

dans laquelle on partitionne, avec des notations évidentes, les matrices de masse et de raideur pour faire apparaître la partie rigide, la partie flexible et les couplages.

Le passage à la forme hybride « libre » (qui correspond à l'analyse modale de la forme 2.79) se fait en éliminant le terme en accélération de la base dans la seconde équation de 2.77 :

$$m_1 \ddot{x}_1 + k x_1 = -m_1 \frac{-m_1}{m_B + m_r + m_1} \ddot{x}_1 - \frac{m_1}{m_B + m_r + m_1} F_e \quad (2.80)$$

soit

$$m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_B + m_r + m_1}\right) \ddot{x}_1 + k x_1 = -\frac{m_1}{m_B + m_r + m_1} F_e \quad (2.81)$$

La fréquence libre est donnée ici par la formule :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{m_1}{m_B + m_r + m_1}}} \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \frac{1}{\lambda'} \omega_1 \quad (2.82)$$

qui fait apparaître le rapport λ' entre la fréquence encastrée et la fréquence libre, inverse du rapport λ précédent :

$$\lambda' = \sqrt{1 - \frac{m_1}{m_B + m_r + m_1}} \quad (2.83)$$

Généralisation sous forme d'état La représentation d'état de la sous-structure se combine facilement au modèle dynamique général de la base, réduit au point d'encastrement, pour établir une représentation d'état linéarisée du système dynamique couplé. En effet, le modèle dynamique linéarisé de la base au point d'encastrement s'écrit :

$$M_B \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_B & m_B (*G_B P) \\ -m_B (*G_B P) & I_{B/P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ext} - F \\ M_{ext/P} - M_P \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

On retrouve l'addition de la masse de base et de la masse résiduelle, généralisée aux modèles dynamiques 6×6 :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A X + B \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext/P} \end{bmatrix} &= C X + (M_r + M_B) \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.85)$$

Les équations du mouvement expriment les accélérations en fonction des forces, il faut donc inverser cette représentation d'état (ce qui suppose que la masse $M_r + M_B$ soit inversible, hypothèse toujours vérifiée), d'où la représentation :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (A - B (M_r + M_B)^{-1} C) X + B (M_r + M_B)^{-1} \begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext/P} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} &= -(M_r + M_B)^{-1} C X + (M_r + M_B)^{-1} \begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext/P} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.86)$$

On peut bien sûr transporter cette représentation de P en G_B en utilisant les équations de transport linéarisées :

$$\begin{aligned}\gamma_{G_B} &= \gamma_P + (*G_B P) \dot{\omega} \\ M_{ext/G_B} &= M_{ext/P} - (*G_B P) F_{ext}\end{aligned}\quad (2.87)$$

Plus formellement, introduisons l'opérateur

$$\mathcal{T}_{PG_B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & (*PG_B) \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

qui transporte la partie linéaire du torseur cinématique T^a (i.e. le torseur des accélérations) par

$$T_P^a = \mathcal{T}_{PG_B} T_{G_B}^a \quad (2.89)$$

Son inverse est simplement \mathcal{T}_{G_BP} . Une transformation similaire, mais exacte, notée \mathcal{U}_{PG_B} transporte le torseur dynamique T^d par

$$T_P^d = \mathcal{U}_{PG_B} T_{G_B}^d \quad (2.90)$$

et on a

$$\mathcal{U}_{PG_B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ (*PG_B) & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

On remarquera la relation très simple qui résulte du caractère antisymétrique de l'opérateur $*$:

$$\mathcal{U}_{PG_B} = \mathcal{T}_{G_BP}^t \quad (2.92)$$

En utilisant uniquement la transformation \mathcal{T} , il vient la représentation d'état :

$$\dot{X} = A_l X + B (M_r + M_B)^{-1} \mathcal{T}_{G_BP}^t \begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext/G_B} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{G_B} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = -\mathcal{T}_{PG_B} (M_r + M_B)^{-1} C X + \mathcal{T}_{G_BP} (M_r + M_B)^{-1} \mathcal{T}_{G_BP}^t \begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext/G_B} \end{bmatrix}$$

L'équation de transport du modèle dynamique linéarisé est donc

$$M_{G_B}^{-1} = \mathcal{T}_{G_BP} (M_P)^{-1} \mathcal{T}_{G_BP}^t \quad (2.94)$$

tandis que le transport du modèle dynamique linéarisé inverse est bien sûr

$$M_{G_B} = \mathcal{T}_{PG_B}^t M_P \mathcal{T}_{PG_B} \quad (2.95)$$

Ce changement de point de référence ne modifie pas les modes libres puisque la matrice A_l est invariante dans la transformation.

On notera enfin que l'on dispose d'une expression explicite du modèle dynamique linéarisé du corps rigide 2.64 sous la forme :

$$\begin{bmatrix} m & m(*GP) \\ -m(*GP) & I_{/G} - m(*GP)^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \mathbf{1} - (*GP) I_{/G}^{-1} (*GP) & -(*GP) I_{/G}^{-1} \\ I_{/G}^{-1} (*GP) & I_{/G}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

2.2.2.4 Équations hybrides générales

Si l'on néglige l'effet du mécanisme d'entraînement (M.E.), on se trouve en présence des mêmes équations canoniques du couplage entre un corps central et des appendices flexibles. On peut en effet reconnaître le modèle « hybride » linéarisé (en se restreignant aux termes linéaires en rotation) bien connu dans la littérature, sous la forme

$$M_{ext} = I_P \dot{\Omega} + L \ddot{\eta} \quad (2.97)$$

$$\ddot{\eta} + \text{diag}(2\xi_i \omega_i) \dot{\eta} + \text{diag}(\omega_i^2) \eta = -L^T \dot{\Omega} \quad (2.98)$$

à ceci près que les participations modales sont des vecteurs lignes au lieu de vecteurs colonnes (la matrice L est de dimension $6 \times N$).

Cette réduction des équations aux seuls termes en rotation n'est licite que si le point de référence de l'écriture des équations est le centre de masse global : ne retenir qu'un sous-ensemble de lignes dans un système d'équations tel que 2.97 est équivalent en effet à annuler les accélérations suivant les autres axes, ou si l'on veut à « encastrier » les degrés de liberté correspondant aux accélérations négligées ; cette simplification est très incorrecte pour les translations si le point de réduction est éloigné du centre de rotation. C'est précisément le cas du point d'encastrement P de l'appendice sur le corps central : toute simplification des équations aux seules rotations doit être précédée du transfert des équations au centre de masse global, ou à défaut en un point où négliger les translations du point de réduction des équations globales est admissible.

Reprenant donc les équations complètes dont est extrait le modèle hybride ci-dessus, réduit au point P d'encastrement de l'appendice, et séparant les translations et les rotations, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} m_T & m_T (*GP) \\ -m_T (*GP) & I_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_t \\ L_r \end{bmatrix} \ddot{\eta} = \begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext/P} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

$$\ddot{\eta} + \text{diag}(2\xi_i \omega_i) \dot{\eta} + \text{diag}(\omega_i^2) \eta = - \begin{bmatrix} L_t^t & L_r^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

Le déplacement en G de ces équations linéarisées conduit à effectuer les substitutions décrites plus haut (équations 2.87). De façon équivalente, on peut chercher à éliminer directement les translations dans la première équation du modèle linéarisé 2.99. On tire des trois premières lignes :

$$\gamma_P = \frac{1}{m_T} [-L_t \ddot{\eta} + F_{ext}] - (*GP) \dot{\Omega} \quad (2.101)$$

et en reportant dans les trois lignes suivantes et en tenant compte de l'équation de transport des moments :

$$(*GP) L_t \ddot{\eta} - (*GP) F_{ext} + m_T (*GP)^2 \dot{\Omega} + I_P \dot{\Omega} = M_{ext/G} - F_{ext} (*GP) \quad (2.102)$$

On en déduit les équations en rotation pure autour du centre de masse global, couplées aux variables modales par un facteur de participation « transporté » $L_r + (*GP) L_t$:

$$I_G \dot{\Omega} + [L_r + (*GP) L_t] \ddot{\eta} = M_{ext/G} \quad (2.103)$$

Lorsqu'on effectue les mêmes opérations sur les équations modales, on constate que le modèle canonique hybride n'est pas respecté. En effet, la substitution de l'accélération γ_P conduit d'une part à remettre en cause l'analyse modale puisque les translations couplent les équations en η entre elles et d'autre part à introduire des termes d'excitation par les forces extérieures :

$$\ddot{\eta} + \text{diag}(2\xi_i \omega_i) \dot{\eta} + \text{diag}(\omega_i^2) \eta = \frac{1}{m_T} (L_t^t L_t \ddot{\eta} - L_t F_{ext}) - (L_r^t - L_t^t (*GP)) \dot{\Omega} \quad (2.104)$$

soit

$$\left(\mathbf{1} - \frac{L_t^t L_t}{m_T} \right) \ddot{\eta} + \text{diag}(2\xi_i \omega_i) \dot{\eta} + \text{diag}(\omega_i^2) \eta = -\frac{1}{m_T} L_t F_{ext} - (L_r^t - L_t^t (*GP)) \dot{\Omega} \quad (2.105)$$

On a en fait une représentation hybride libre en translation, encastrée en rotation. Elle n'apparaît sous la forme hybride encastrée que si les participations en translation sont nulles. Pour obtenir un modèle hybride libre, il conviendrait d'éliminer les accélérations modales de l'équation rigide, ce que l'on peut faire globalement en calculant le modèle d'état complet par connexion entre le modèle de sous-structure réduit en P et le modèle de la base, conformément aux équations générales vues plus haut (qui requièrent *aussi* d'effectuer la ré-analyse modale des modes libres pour faire apparaître les équations hybrides libres découplées, comme on l'a vu sur l'exemple simplifié à deux modes). Cette élimination des translations en un point arbitraire n'est donc pas très satisfaisante.

Le calcul par la représentation d'état (valeurs propres de A_l dans 2.93) donne aisément les fréquences libres, mais si on désire établir une formulation hybride libre correcte, il faut effectuer les étapes suivantes : à partir des équations hybrides encastrees établies à partir du modèle hybride encastré de l'appendice seul, formellement semblables aux équations 2.99 :

$$\begin{bmatrix} m_P & m_P (*CP) \\ -m_P (*CP) & I_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} + L \ddot{\eta} = \begin{bmatrix} F \\ M_P \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

$$\ddot{\eta} + \text{diag}(2\xi_i \omega_i) \dot{\eta} + \text{diag}(\omega_i^2) \eta = -L^t \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

connectées au modèle dynamique de la base 2.84 par la mise en série de la masse de la base et de la masse de l'appendice, on obtient le modèle hybride encastré :

$$(M_B + M_0) \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} + L \ddot{\eta} = \begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext/P} \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

$$\ddot{\eta} + \text{diag}(2\xi_i\omega_i)\dot{\eta} + \text{diag}(\omega_i^2)\eta = -L^t \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

On remarquera qu'il faut cette fois inverser $M_T = M_B + M_0$ (au lieu de $M_B + M_r$ dans le calcul sous forme d'état) pour calculer les accélérations et les substituer dans les équations modales, et on a alors le modèle modal suivant :

$$\ddot{\eta} + \text{diag}(2\xi_i\omega_i)\dot{\eta} + \text{diag}(\omega_i^2)\eta = L^t M_T^{-1} L \ddot{\eta} - L^t M_T^{-1} \begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext/P} \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

soit :

$$(\mathbf{1} - L^t M_T^{-1} L) \ddot{\eta} + \text{diag}(2\xi_i\omega_i)\dot{\eta} + \text{diag}(\omega_i^2)\eta = -L^t M_T^{-1} \begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext/P} \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

La matrice en facteur de $\ddot{\eta}$ joue le rôle d'une matrice de masse ; soit Φ la matrice diagonalisant simultanément cette matrice et la matrice de « raideur » $\text{diag}(\omega_i^2)$, on peut écrire

$$\eta = \Phi \zeta \quad (2.112)$$

et en déduire un modèle hybride libre :

$$(M_B + M_0) \begin{bmatrix} \gamma_P \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} + L \Phi \ddot{\zeta} = \begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext/P} \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

$$\ddot{\zeta} + D\dot{\zeta} + \text{diag}(\Omega_i^2)\zeta = -\Phi^t L^t M_T^{-1} \begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext/P} \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

La matrice de dissipation D n'est pas nécessairement diagonalisable par la transformation Φ .

Comme on l'a vu plus haut, ces calculs effectués en un point quelconque ne se réduisent simplement aux seules rotations que si les accélérations et les moments sont évalués en un point encastré en translation, c'est-à-dire le centre de masse global si aucune force extérieure n'est appliquée. L'équivalent du transport décrit par les équations 2.93 sur la représentation d'état s'écrit à partir de l'équation 2.108 :

$$(M_B + M_0) \mathcal{T}_{PG} \begin{bmatrix} \gamma_G \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} + L \ddot{\eta} = \mathcal{T}_{GP}^t \begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext/G} \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

$$\ddot{\eta} + \text{diag}(2\xi_i\omega_i)\dot{\eta} + \text{diag}(\omega_i^2)\eta = -L^t \mathcal{T}_{PG} \begin{bmatrix} \gamma_G \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix}$$

soit en pré-multipliant la première équation par l'inverse de \mathcal{T}_{GP}^t ,

$$(M_{B/G} + M_{0/G}) \begin{bmatrix} \gamma_G \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} + \mathcal{T}_{PG}^t L \ddot{\eta} = \begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext/G} \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

$$\ddot{\eta} + \text{diag}(2\xi_i\omega_i)\dot{\eta} + \text{diag}(\omega_i^2)\eta = -L^t \mathcal{T}_{PG} \begin{bmatrix} \gamma_G \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix}$$

On voit donc que l'on peut noter à juste titre $L_G = \mathcal{T}_{PG}^t L$ et appeler « participation modale en G » le résultat du transport en G qui donne une forme 2.116 formellement analogue à 2.108. L'invariance constatée sur les modes libres est vérifiée puisque le facteur de $\ddot{\eta}$ dans 2.111 s'écrit

$$(\mathbf{1} - L^t \mathcal{T}_{PG} \mathcal{T}_{GP} M_T^{-1} \mathcal{T}_{GP}^t \mathcal{T}_{PG}^t L) = (\mathbf{1} - L^t M_T^{-1} L) \quad (2.117)$$

au point G.

2.2.2.5 Conclusion : modèles analytiques en attitude

On peut donc retenir des considérations qui précèdent trois formes différentes de la modélisation analytique du composite satellite-appendice autour du centre de masse global :

- la représentation d'état issue de 2.93

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_l X + \left[B (M_r + M_B)_{/G}^{-1} \mathcal{T}_{GP}^t \right]_{(:,4:6)} M_{ext/G} \\ \dot{\Omega} &= \left[-\mathcal{T}_{PG} (M_r + M_B)^{-1} C \right]_{(4:6,:)} X + \left[\mathcal{T}_{GP} (M_r + M_B)_{/G}^{-1} \mathcal{T}_{GP}^t \right]_{(4:6,4:6)} M_{ext/G} \end{aligned} \quad (2.118)$$

restreinte aux trois dernières colonnes de B et aux trois dernières lignes de C , comme la notation Matlab l'indique,

- la représentation hybride encastrée issue de 2.116

$$\begin{aligned} (I_{B/G} + I_{0/G}) \dot{\Omega} + [L_G]_{(4:6,:)} \ddot{\eta} &= M_{ext/G} \\ \ddot{\eta} + \text{diag}(2\xi_i \omega_i) \dot{\eta} + \text{diag}(\omega_i^2) \eta &= \left[-L_G^t \right]_{(:,4:6)} \dot{\Omega} \end{aligned} \quad (2.119)$$

- la représentation hybride libre obtenue à partir de la forme précédente par une analyse modale similaire à 2.113

$$(I_B + I_0)_G \dot{\Omega} + [L_G \Phi]_{4:6,:)} \ddot{\zeta} = M_{ext/G} \quad (2.120)$$

$$\ddot{\zeta} + D \dot{\zeta} + \text{diag}(\Omega_i^2) \zeta = \left[-\Phi^t L^t M_{TG}^{-1} \right]_{(:,4:6)} M_{ext/G} \quad (2.121)$$

2.3 Modélisation unificatrice sous forme d'état

2.3.1 Équations dynamiques d'un système linéaire sous forme d'état

Aux équations de la dynamique (2.24), on peut ajouter les notions d'entrée et de sortie. On note u le vecteur des entrées, b la matrice d'application de ces entrées sur les nœuds du système et y le vecteur des sorties composé de mesures de déplacements

des nœuds, de mesures de vitesses des nœuds et de mesures d'accélérations des nœuds. On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{M}\ddot{q}(t) + \mathcal{C}\dot{q}(t) + \mathcal{K}q(t) = b u(t) \\ y(t) = c_d q(t) + c_v \dot{q}(t) + c_a \ddot{q}(t) \end{cases} \quad (2.122)$$

Sous la condition que \mathcal{M} soit non singulière, on peut écrire :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{q}(t) = -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C}\dot{q}(t) - \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}q(t) + \mathcal{M}^{-1}b u(t) \\ y(t) = (c_d - c_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K})q(t) + (c_v - c_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C})\dot{q}(t) + c_a\mathcal{M}^{-1}b u(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \ddot{q}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} & \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{M}^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [c_v - c_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} \quad c_d - c_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}] \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + c_a\mathcal{M}^{-1}b u(t) \end{cases} \quad (2.123)$$

On obtient donc une modélisation des équations de la dynamique sous forme d'état :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}} \quad (2.124)$$

avec

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix} && \text{vecteur d'état,} \\ A &= \begin{bmatrix} -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} & \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} \\ I & 0 \end{bmatrix} && \text{matrice dynamique du système,} \\ B &= \begin{bmatrix} \mathcal{M}^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} && \text{matrice d'application de la commande,} \\ C &= [c_v - c_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} \quad c_d - c_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}] && \text{matrice d'observation,} \\ D &= c_a\mathcal{M}^{-1}b && \text{matrice d'application directe de la commande.} \end{aligned}$$

Le quadruplet (A, B, C, D) est une représentation d'état du système. Elle n'est pas unique, il en existe une infinité qui sont équivalentes. Nous reviendrons en 3.1 sur la manipulation des représentations d'état.

Remarque :

Nous utiliserons souvent la notation suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

2.3.2 Valeurs propres et vecteurs propres

Les vecteurs propres correspondent aux solutions de l'équation (2.124) en mouvement libre ($u(t) = 0$) :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.126)$$

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = 0 \quad (2.127)$$

Soit $x(s)$ le transformé de Laplace de $x(t)$, alors :

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sx(s) - x_0 \quad (2.128)$$

Si $x_0 = 0$ (2.127) devient :

$$sx(s) - Ax(s) = 0 \quad (2.129)$$

$$(sI - A)x(s) = 0 \quad (2.130)$$

Si $x(s) \neq 0$ alors (2.130) revient à :

$$\det(sI - A) = 0 \quad (2.131)$$

Les valeurs propres du système sont donc les valeurs λ_i de s qui annulent le déterminant. En posant $s = \lambda_i$ dans (2.130) on obtient :

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0 \quad (2.132)$$

avec v_i vecteur propre correspondant à λ_i . Les vecteurs propres associés à une valeur propre nulle caractérisent le comportement rigide du système.

On obtient donc $N = 2n$ équations que l'on assemble pour donner :

$$\boxed{\begin{array}{l} (\Lambda - A)V = 0 \\ \text{avec } \Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\} \text{ et } V = [V_1, V_2, \dots, V_N] \end{array}} \quad (2.133)$$

Les modes propres correspondant à des valeurs propres non nulles différentes sont orthogonaux entre eux. Donc si on considère le cas où les valeurs propres sont distinctes, on a :

$$V^{-1}V = I \Rightarrow \Lambda = V^{-1}AV \quad (2.134)$$

L'observation des valeurs propres λ_i permet de conclure sur la stabilité du système.

Définition 2.2 Stabilité asymptotique

Un système linéaire à temps invariant d'ordre N et de réalisation (A, B, C, D) est asymptotiquement stable si une des conditions suivantes est vérifiée :

1. $\Re(\lambda_i(A)) < 0 \quad \forall i \in [1 : N]$,
2. $\exists Q = Q^* > 0$ tel que $AX + XA^* + Q = 0$ ait une solution définie positive : $X = X^* > 0$.

2.3.3 Expression des équations dans la base modale

En se plaçant toujours dans le cas où les valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres étant orthogonaux entre eux, le système d'équations (2.124) projeté sur la base des vecteurs propres donne donc un système d'équations où les équations dynamiques sont découplées :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

$$x = V\tilde{x} \quad (2.135)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= \Lambda\tilde{x} + V^{-1}Bu \\ y &= CV\tilde{x} + Du \end{cases} \quad (2.136)$$

On note que d'un système d'ordre n , on est passé à un système d'équations d'ordre $N = 2n$. Pour la représentation "second ordre", on obtenait n fréquences propres ω_i . Pour la représentation d'état, chaque mode ω_i correspond à deux valeurs propres complexes conjuguées λ_i :

$$\boxed{\lambda_i = -\xi_i\omega_i \pm j\omega_i\sqrt{1 - \xi_i^2}} \quad (2.137)$$

Les vecteurs propres correspondants sont eux aussi complexes conjugués.

Dans la pratique il est préférable de toujours manipuler des matrices d'état réelles². Ainsi, on utilise plutôt une représentation d'état faisant apparaître la matrice dynamique sous forme bloc-diagonale : nous appelons cette nouvelle base « *base modale réelle* ». On part des équations dynamiques du système exprimées dans la base modale (cf. équation (2.31)) :

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{q}}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{\tilde{q}}_i + \omega_i^2\tilde{q}_i = \tilde{b}_i u & \text{pour } i = 1 \text{ à } n \\ y = \sum_{i=1}^n (\tilde{c}_{d_i}\tilde{q}_i + \tilde{c}_{v_i}\dot{\tilde{q}}_i + \tilde{c}_{a_i}\ddot{\tilde{q}}_i) \end{cases} \quad (2.138)$$

avec $\tilde{b}_i = \phi_i^T b$, $\tilde{c}_{d_i} = c_d \phi_i$, $\tilde{c}_{v_i} = c_v \phi_i$, $\tilde{c}_{a_i} = c_a \phi_i$ et ϕ_i mode propre associé à la pulsation propre ω_i . Le système d'équations (2.138) peut être mis sous forme d'état :

$$\boxed{\begin{cases} \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{q}}_i \\ \dot{\tilde{q}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\xi_i\omega_i & -\omega_i^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_i \\ \tilde{q}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_i \\ 0 \end{bmatrix} u & \text{pour } i = 1 \text{ à } n \\ y = \sum_{i=1}^n \left([\tilde{c}_{v_i} - 2\xi_i\omega_i\tilde{c}_{a_i} \quad \tilde{c}_{d_i} - \omega_i^2\tilde{c}_{a_i}] \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_i \\ \tilde{q}_i \end{bmatrix} + \tilde{c}_{a_i}\tilde{b}_i u \right) \end{cases}} \quad (2.139)$$

2. Dans la suite de l'étude, on supposera que les matrices d'états sont réelles ; on rappelle que pour une matrice M réelle on a $M^* = M^T$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i &= \tilde{A}_i \tilde{x}_i + \tilde{B}_i u & \text{pour } i = 1 \text{ à } n \\ y &= \sum_{i=1}^n (\tilde{C}_i \tilde{x}_i + \tilde{D}_i u) \end{cases} \quad (2.140)$$

En assemblant les équations on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= \text{diag}\{\tilde{A}_i\} \tilde{x} + \tilde{B} u \\ y &= \sum_{i=1}^n (\tilde{C}_i \tilde{x}_i + \tilde{D}_i u) \end{cases} \quad (2.141)$$

avec $\tilde{x} = [\dot{\tilde{x}}_1, \tilde{x}_1, \dots, \dot{\tilde{x}}_n, \tilde{x}_n]^T$ et $\tilde{B} = [\tilde{B}_1^T, \dots, \tilde{B}_n^T]^T$.

Chapitre 3

Méthodes de réduction des représentations d'état[18]

Les méthodes de réduction développées par les automaticiens sont basées sur l'expression des équations de la dynamique sous forme d'état. Nous décrivons dans un premier temps les manipulations de cette représentation qui sont la base des méthodes de réduction. Nous présentons ensuite les différentes méthodes de réduction que nous avons classées en trois groupes : les méthodes fondées sur des critères fréquentiels, les méthodes fondées sur les notions de gouvernabilité et d'observabilité, et les méthodes optimales.

3.1 Manipulation des représentations d'état

3.1.1 Changement de base

Il existe une infinité de représentations d'état d'un système. On passe par exemple d'une représentation d'état (A_1, B_1, C_1, D_1) , de vecteur d'état x_1 , d'un système à une autre représentation d'état (A_2, B_2, C_2, D_2) , de vecteur d'état x_2 , du même système par un changement de base caractérisé par une matrice de passage M . On a :

$$x_1 = Mx_2 \quad (3.1)$$

En appliquant (3.1) au système d'équations d'état

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= A_1x_1 + B_1u \\ y &= C_1x_1 + D_1u \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 &= M^{-1}A_1Mx_2 + M^{-1}B_1u \\ y &= C_1Mx_2 + D_1u \end{cases} \quad (3.2)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A_2 &= M^{-1} A_1 M \\ B_2 &= M^{-1} B_1 \\ C_2 &= C_1 M \\ D_2 &= D_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Remarque :

Le passage des équations d'état dans la base modale se fait en utilisant le changement de base $M = V$ matrice des vecteurs propres.

3.1.2 Troncature

Le système d'ordre n , de représentation d'état $(A, B, C, D)_n$, que l'on désire réduire à l'ordre r est partitionné de manière à différencier les r états que l'on désire conserver, contenus dans x_1 , et ceux que l'on veut tronquer, contenus dans x_2 :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Du \end{cases} \quad (3.4)$$

Le modèle réduit de représentation d'état $(A_r, B_r, C_r, D_r)_r$ obtenu par troncature est alors défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_r &= A_{11} = \Gamma_r A \Gamma_r^T \\ B_r &= B_1 = \Gamma_r B \\ C_r &= C_1 = C \Gamma_r^T \\ D_r &= D \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \Gamma_r = [I_r \quad 0_{r \times n-r}]_{r \times n} \quad (3.5)$$

3.1.3 Projection

Une projection est la combinaison d'un changement de base de matrice M et d'une troncature de matrice Γ_r . Le modèle réduit d'ordre r de représentation d'état $(A_r, B_r, C_r, D_r)_r$ obtenu par projection du modèle d'ordre n de représentation d'état $(A, B, C, D)_n$ est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_r &= L A R \\ B_r &= L B \\ C_r &= C R \\ D_r &= D \end{aligned} \quad \text{avec} \quad L_{r \times n} R_{n \times r} = I_r \quad (3.6)$$

On peut facilement vérifier que :

$$L_{r \times n} = \Gamma_r M^{-1} = [I_r \quad 0_{r \times n-r}]_{r \times n} M^{-1} \quad (3.7)$$

$$R_{n \times r} = M \Gamma_r^T = M \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{n-r \times r} \end{bmatrix}_{n \times r} \quad (3.8)$$

satisfont la condition d'orthogonalité $L_{r \times n} R_{n \times r} = I_r$.

3.1.4 Résidualisation

3.1.4.1 Perturbations singulières

Afin d'introduire la résidualisation, nous allons considérer le cas particulier d'un système singulièrement perturbé, c'est-à-dire un système dont les équations d'état, linéaires ou non, peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \varepsilon) \end{cases} \quad (3.9)$$

avec ε très petit. Ceci implique donc que le système ait deux dynamiques nettement séparées.

On calcule une solution approchée au système en posant $\varepsilon = 0$, ce qui revient à négliger la dynamique rapide, et donc, dans le cas d'un système d'équations linéaires, à partitionner les équations de manière à faire apparaître une dynamique lente x_1 et une dynamique rapide x_2 . La représentation d'états devient :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Du \end{cases} \quad (3.10)$$

En posant $\dot{x}_2 = 0$ on obtient :

$$x_2 = -A_{22}^{-1}[A_{21}x_1 + B_2u] \quad (3.11)$$

et en remplaçant x_2 par sa valeur dans (3.10) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u \\ y &= (C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (D - C_2A_{22}^{-1}B_2)u \end{cases} \quad (3.12)$$

Kokotovic [15] donne la condition suffisante suivante pour que le système soit singulièrement perturbé :

$$\|A_{22}^{-1}\| \ll (\|A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\| + \|A_{12}\|\|A_{22}^{-1}A_{21}\|)^{-1} \quad (3.13)$$

3.1.4.2 Une solution approchée

Dans le cas général où le système n'apparaît pas sous la forme du système (3.9), une méthode consiste à utiliser les valeurs propres et vecteurs propres afin de partitionner le vecteur d'état en deux parties. Les valeurs propres sont ordonnées selon

les modules croissants de la plus petite à la plus grande et la matrice des vecteurs propres correspondants normalisés V est partitionnée telle que $V = [V_1 \ V_2]$. La transformation suivante sépare les modes propres lents contenus dans \tilde{x}_1 et les modes propres rapides contenus dans \tilde{x}_2 :

$$x = [V_1 \ V_2] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Pour chaque composante x_i du vecteur d'état initial, le rapport des composantes lentes aux composantes rapides peut être exprimé par :

$$R_i = \frac{\|V_1^{(i)}\|}{\|V_2^{(i)}\|} \quad (3.15)$$

Le vecteur x_1 des états correspondant à la « dynamique lente » dans (3.10) peut être composé des états associés aux r plus grandes valeurs de R_i car ils sont les plus représentatifs de la participation des modes lents. Il est préférable d'observer une séparation nette entre les r premières valeurs de R_i et les autres si on veut se rapprocher le plus possible d'un système singulièrement perturbé.

3.1.4.3 Résidualisation

L'application de cette méthode au cas de systèmes où le vecteur d'état est simplement partitionné en une partie que l'on désire conserver et une partie que l'on désire tronquer, sans distinction particulière de dynamiques, est appelée *résidualisation*. Cette procédure permet de restituer le gain statique du système, celui-ci n'étant pas conservé par simple troncature.

3.1.4.4 Propriétés

- L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de conserver la structure physique du système si celui-ci se présente naturellement sous la forme (3.9).
- Le modèle réduit est stable si le modèle initial est stable.
- La troncature se fait sur les états (équations couplées dans le cas général). Ceci a pour conséquence la non restitution des modes propres.
- Dans le cas particulier où le système est exprimé dans une base telle que $A_{12} = A_{21} = [0]$ (c'est le cas pour les bases modale et modale réelle) alors le système d'équations (3.12) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + B_1u \\ y &= C_1x_1 + (D - C_2A_{22}^{-1}B_2)u \end{cases} \quad (3.16)$$

La résidualisation revient alors à la combinaison d'une troncature et d'une correction du gain statique.

- Cette méthode a l'avantage de restituer parfaitement le gain statique.

3.2 Méthodes de réduction algébriques

3.2.1 Dominance modale

Pour la méthode de réduction par Dominance Modale, décrite dans [24, 10], on s'intéresse à la représentation du système par sa matrice de transfert $G(s)$:

$$y = C(sI - A)^{-1}Bu(s) = G(s)u \quad (3.17)$$

On s'intéresse maintenant au transfert entre une entrée u_j et une sortie y_k , que l'on peut représenter sous forme d'une somme :

$$y_k = G_{kj}(s)u_j = \left[\sum_{i=1}^n G_{kj}(s)^{(i)} \right] u_j \quad (3.18)$$

$G_{kj}^{(i)}$ représente la contribution du mode i au transfert entre l'entrée u_j et la sortie y_k .

- Pour une entrée impulsionnelle unitaire à $t = 0$, $u_j(s) = 1$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} y_k(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n s G_{kj}^{(i)}(s) = \sum_{i=1}^n R_{kj}^{(i)} \quad (3.19)$$

$R_{kj}^{(i)}$ est un résidu. Il représente la contribution du mode i à la réponse vue de la sortie j à une impulsion sur l'entrée k .

$$\begin{aligned} \text{Si } G_{kj}^{(i)}(s) &= \frac{A}{s + \lambda_i} & \text{alors } R_{kj}^{(i)} &= A \\ \text{Si } G_{kj}^{(i)}(s) &= \frac{A + Bs}{s^2 + 2s\xi_i\omega_i + \omega_i^2} & \text{alors } R_{kj}^{(i)} &= B \end{aligned} \quad (3.20)$$

- Pour une entrée en échelon unitaire, $u_j(s) = 1/s$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_k(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n G_{kj}^{(i)}(s) = \sum_{i=1}^n R_{kj}^{(i)} \quad (3.21)$$

$R_{kj}^{(i)}$ est un gain statique. Il représente la contribution du mode i à la réponse vue de la sortie j à un échelon unitaire sur l'entrée k .

$$\begin{aligned} \text{Si } G_{kj}^{(i)}(s) &= \frac{A}{s + \lambda_i} & \text{alors } R_{kj}^{(i)} &= \frac{A}{\lambda_i} \\ \text{Si } G_{kj}^{(i)}(s) &= \frac{A + Bs}{s^2 + 2s\xi_i\omega_i + \omega_i^2} & \text{alors } R_{kj}^{(i)} &= \frac{A}{\omega_i^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

On définit le paramètre de dominance modale D_i associé au mode i comme la valeur maximale sur toutes les relations entrée/sortie du résidu (resp. gain statique) associé au mode i :

$$D_i = \max_{k,j} |R_{kj}^{(i)}| \quad (3.23)$$

Pour réduire le modèle, on garde les modes i pour lesquels D_i est grand. Ceci revient donc à effectuer une troncature modale. On peut utiliser le critère $\frac{D_i}{D_1} > 10^{-1}$ pour sélectionner les modes à conserver. On peut aussi vérifier que $\frac{D_r}{D_{r+1}}$ est suffisamment « grand », r étant le nombre de modes retenus.

On peut généraliser la procédure en prenant en compte directement les contributions des modes aux transferts entre toutes les entrées et toutes les sorties. À partir des équations sous forme bloc-diagonale (2.139) :

$$y = [\sum_{i=1}^n G^{(i)}(s)]u = [\sum_{i=1}^n \tilde{C}_i(sI - \tilde{A}_i)^{-1} \tilde{B}_i]u \quad (3.24)$$

$$\text{avec } \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} -2\xi_i\omega_i & -\omega_i^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} \tilde{b}_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{C}_i = [\tilde{c}_{v_i} - 2\xi_i\omega_i\tilde{c}_{a_i} \quad \tilde{c}_{d_i} - \omega_i^2\tilde{c}_{a_i}]$$

Le paramètre de dominance modale correspond donc ici à :

$$D_i = \|R^{(i)}\| \quad (3.25)$$

– Pour une entrée impulsionnelle :

$$D_i = \|\tilde{C}_i\tilde{B}_i\| = \|(\tilde{c}_{v_i} - 2\xi_i\omega_i\tilde{c}_{a_i})\tilde{b}_i\| \quad (3.26)$$

– Pour une entrée en échelon :

$$D_i = \|- \tilde{C}_i\tilde{A}_i^{-1}\tilde{B}_i\| = \|\frac{\tilde{b}_i(\tilde{c}_{d_i} - \omega_i^2\tilde{c}_{a_i})}{\omega_i^2}\| \quad (3.27)$$

Remarques :

- On notera que dans le cas où $R_{kj}^{(i)}$ est un résidu, le critère contient des informations sur la gouvernabilité et l'observabilité du mode, indépendamment de sa dynamique.
- Si on considère les gains statiques, le critère intègre la notion de dynamique (cf. équations (3.22)).
- La méthode de réduction par Dominance Modale ne s'applique que dans le cas où il n'y a pas de modes multiples et de modes instables.
- Cette méthode effectue une troncature dans la base modale (dans le cas de modes flexibles, on préférera la base modale réelle), ce qui a pour conséquence la restitution exacte d'un certain nombre de modes du modèle initial dans le modèle réduit.
- Les deux derniers points impliquent que le modèle réduit obtenu soit stable.

3.2.2 Projection de DeVillemagne et Skelton

La méthode développée par DeVillemagne et Skelton (1974) [7] consiste à réaliser une approximation de la matrice de transfert du système par son développement limité aux basses ou aux hautes fréquences (ou même à une fréquence particulière).

Au voisinage de la fréquence nulle, la matrice de transfert $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ a le développement limité suivant :

$$G(s) = - \sum_{i=1}^{\infty} s^{i-1} C A^{-i} B \quad (3.28)$$

Les termes $M_i(s=0) = C A^{-i} B$ sont les *moments à fréquence nulle*.

De même, au voisinage de la fréquence infinie :

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{s^{i+1}} C A^i B \quad (3.29)$$

$M(s=\infty) = C A^i B$ sont les *moments à fréquence infinie* aussi appelés *paramètres de Markov*.

La méthode proposée par DeVillemagne et Skelton consiste donc à restituer dans le modèle réduit un certain nombre de moments du modèle initial par projection de celui-ci.

Si nous prenons l'exemple de la restitution dans le modèle réduit de représentation $(A_r, B_r, C_r, D_r)_r$ des $2r$ premiers moments basse fréquence du système mono-entrée/mono-sortie de représentation $(A, B, C, D)_n$, ils proposent de réaliser la projection suivante :

$$\begin{aligned} A_r &= L A R \\ B_r &= L B \\ C_r &= C R \end{aligned} \quad (3.30)$$

avec

$$\begin{aligned} L &= \begin{bmatrix} C A^{-r} \\ \vdots \\ C A^{-1} \end{bmatrix} \\ Z &= [A^{-r} B \cdots A^{-1} B] \\ R &= Z (L Z)^{-1} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dans le cas multivariable, ces matrices de projection doivent parfois être modifiées afin de respecter les contraintes de rang.

Remarques :

- La méthode s'applique sur des systèmes asymptotiquement stables.
- Les modes du système ne sont pas restitués de manière exacte.
- La signification physique des états n'est pas non plus conservée.

- L'approximation par développement limité en $s = 0$ a l'avantage de conserver le gain statique.
- Ces projections ne garantissent en aucun cas la stabilité du modèle réduit obtenu, cependant des modifications ont été proposées pour assurer cette propriété.

3.3 Méthodes basées sur la notion de gouvernabilité et d'observabilité

3.3.1 Définitions

3.3.1.1 Gramiens

Des mesures de gouvernabilité et d'observabilité d'un système asymptotiquement stable (c'est-à-dire tel que les valeurs propres de la matrice d'état A sont à partie réelle strictement négative) sont données par les grammiens.

1. Gramien de gouvernabilité

Le gramien de gouvernabilité X permet d'exprimer, pour une condition initiale $x(t) = x_0$ en $t = 0$ donnée, la plus petite quantité d'énergie à apporter en entrée du système sur l'horizon $t \in]-\infty, 0]$ pour atteindre cette condition initiale. On a l'égalité suivante :

$$\min_u \{J(u) = \int_{-\infty}^0 u^T(t)u(t)dt \mid x(0) = x_0\} = x_0^T X x_0 \quad (3.32)$$

Gramien de gouvernabilité

Le gramien de gouvernabilité X d'un système asymptotiquement stable de représentation (A, B, C, D) est défini par :

$$X = \int_{t=0}^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (3.33)$$

X , symétrique et semi-définie positive, est solution de l'équation de Lyapunov :

$$AX + XA^T + BB^T = 0 \quad (3.34)$$

Le système est gouvernable si et seulement si X est définie positive.

2. Gramien d'observabilité

Le gramien d'observabilité Y permet d'exprimer, pour une condition initiale $x(t) = x_0$ en $t = 0$ donnée et une commande nulle, l'énergie de la sortie y du système sur l'horizon $t \in]0, +\infty]$. Cette énergie s'exprime par le critère :

$$J = \int_{t=0}^{\infty} y^T(t)y(t)dt \quad (3.35)$$

En posant $y = Cx$ le critère devient :

$$J = \int_{t=0}^{\infty} x^T(t) C^T C x(t) dt \quad (3.36)$$

On exprime le vecteur d'état du système en fonction de la condition initiale :

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_{\tau=0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \Rightarrow x(t) = e^{At} x_0 \quad (3.37)$$

Le critère (3.36) devient donc :

$$J = x_0^T \int_{t=0}^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt x_0 = x_0^T Y x_0 \quad (3.38)$$

Gramien d'observabilité

Le gramien d'observabilité Y d'un système asymptotiquement stable de représentation (A, B, C, D) est défini par :

$$Y = \int_{t=0}^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (3.39)$$

Y , symétrique et semi-définie positive, est solution de l'équation de Lyapunov :

$$A^T Y + Y A + C^T C = 0 \quad (3.40)$$

Le système est gouvernable si et seulement si X est définie positive.

3.3.2 Réduction équilibrée

3.3.2.1 Réalisation équilibrée

1. Définition

Rappelons que le gramien de gouvernabilité X et le gramien d'observabilité Y d'un système asymptotiquement stable, de réalisation minimale $(A, B, C, D)_n$, sont les solutions uniques des équations de Lyapunov suivantes :

$$AX + XA^T + BB^T = 0 \quad (3.41)$$

$$A^T Y + Y A + C^T C = 0 \quad (3.42)$$

Les gramiens dépendent de la base dans laquelle ils sont exprimés. Par conséquent pour ne pas privilégier ni la gouvernabilité, ni l'observabilité, on choisit de les représenter dans une base dite « équilibrée ».

Réalisation équilibrée

Une réalisation est dite équilibrée si et seulement si :

$$X = Y = \Sigma = \text{diag}\{\check{\sigma}_i\} \quad \text{avec} \quad \check{\sigma}_i = \sqrt{\lambda_i(XY)} \quad (3.43)$$

Les $\check{\sigma}_i$, appelées *valeurs singulières de Hankel*, sont alors des mesures de la gouvernabilité et de l'observabilité jointes. En général, on les classe dans l'ordre décroissant :

$$\check{\sigma}_1 \geq \check{\sigma}_2 \geq \dots \geq \check{\sigma}_i \geq \dots \geq \check{\sigma}_n \quad (3.44)$$

La représentation $(A, B, C, D)_n$ d'un système, dont les gramiens sont notés X et Y , peut donc être transformée en une représentation équilibrée $(\check{A}, \check{B}, \check{C}, \check{D})_n$ par un changement de base de matrice \check{M} vérifiant :

$$\check{M}^{-1} X \check{M}^{-T} = \check{M}^T Y \check{M} = \Sigma \quad (3.45)$$

Des détails sur les algorithmes utilisés pour déterminer la matrice de passage \check{M} sont présentés dans l'annexe de [18].

2. Cas particulier

Gregory (1984) [12], puis Gawronski et Williams [11], ont étudié les relations entre la base modale et la base équilibrée. Ils ont montré que dans le cas où l'amortissement est faible et les modes propres bien séparés en fréquence, on peut exprimer directement les valeurs singulières à partir de l'expression des équations sous forme bloc diagonale, sans passer par la formulation équilibrée. On part d'un sous-système modal (2.139) :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{x}}_i \\ \dot{\tilde{x}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\xi_i\omega_i & -\omega_i^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_i \\ \tilde{x}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_i \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y^{(i)} = [\tilde{C}_{1i} \quad \tilde{C}_{2i}] \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_i \\ \tilde{x}_i \end{bmatrix} \end{cases}$$

On le met sous forme équilibrée avec

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \check{\sigma}_{1i} & 0 \\ 0 & \check{\sigma}_{2i} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Il a été montré que si $\xi_i \ll 1$ alors $\check{\sigma}_{1i} \approx \check{\sigma}_{2i} \approx \sigma_i$ et

$$\check{\sigma}_i \approx \frac{[\tilde{b}_i \tilde{b}_i^T (\tilde{C}_{2i}^T \tilde{C}_{2i} + \omega_i^2 \tilde{C}_{1i}^T \tilde{C}_{1i})]^{\frac{1}{2}}}{4\xi_i \omega_i^2} \quad (3.47)$$

On considère maintenant l'ensemble des modes. Il a aussi été montré que si le critère

$$\frac{\max(\xi_i, \xi_j) \max(\omega_i, \omega_j)}{|\omega_i - \omega_j|} \ll 1 \quad i \neq j \quad (3.48)$$

est vérifié (modes suffisamment séparés), alors le système équilibré correspondant aux n modes conserve la forme bloc-diagonale avec

$$\Sigma \approx \begin{bmatrix} \check{\sigma}_1 I_2 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \check{\sigma}_n I_2 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

3.3.2.2 Réduction

Une fois le système mis sous forme équilibrée, on n'a plus qu'à tronquer les états correspondant aux valeurs singulières les plus faibles. Ces valeurs singulières étant la mesure de la gouvernabilité et de l'observabilité jointes, on élimine les états qui sont les moins gouvernables et observables.

Les propriétés de cette méthode en terme de norme¹ de l'erreur $G - G_r$ sont :

- norme H_∞ :

$$\|G(j\omega) - G_r(j\omega)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \check{\sigma}_i \quad (3.50)$$

avec $\|G(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega(\overline{\sigma}(G(j\omega)))$

- norme de Hankel :

$$\check{\sigma}_{r+1} \leq \|G(j\omega) - G_r(j\omega)\|_H \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \check{\sigma}_i \quad (3.51)$$

Remarques :

- On note que le système réduit ainsi obtenu est sous forme équilibrée.
- Dans le cas général, la base équilibrée ne correspondant pas à la base modale, il n'y a pas restitution exacte des modes.
- La signification physique des états n'est pas non plus préservée.
- Le gain statique du modèle réduit n'est pas exact.
- Le modèle réduit est stable si le modèle complet est stable.
- Le calcul des grammiens n'étant possible que pour des systèmes asymptotiquement stables, la réduction équilibrée ne peut pas être appliquée directement dans le cas où le système comporte des modes instables. Dans ce cas, on sépare la partie instable $G^-(s)$ et la partie stable $G^+(s)$ du système $G(s) = G^-(s) + G^+(s)$ et on ne réduit que la partie stable, la partie instable étant conservée intacte. Ainsi on a :

$$G_r(s) = G^-(s) + G_r^+(s) \quad (3.52)$$

3.4 Conclusions

Nous venons de voir diverses méthodes pour *classer* les modes selon certains critères. Par ailleurs, les modèles de structures flexibles sont caractérisés par des phénomènes dynamiques de natures différentes :

- des modes rigides situés près de l'origine dans le plan complexe,

1. La définition des différentes normes est classique, voir le cours de commande robuste.

- des modes flexibles situés le long de l'axe imaginaire,
- des modes secondaires ou parasites issus de la dynamique des capteurs, actionneurs, filtres anti-repliement,... de la modélisation des retards aérodynamiques dans le cas d'un avion, ...

Nous voulons souligner ici que d'une façon générale, il n'y a aucune raison de *classer* ces différents modes selon le même critère. Il faut donc souvent *jongler* entre les différents représentations d'état, exprimer une partie de l'état dans la base bloc diagonale réelle, l'autre partie dans la base équilibrée, effectuer la troncature en deux étapes, Le chapitre relatif à l'avion souple met en évidence ce type d'approche.

Chapitre 4

La positivité des structures flexibles : principe et limites

4.1 Bref historique des notions

4.1.1 Introduction

Les travaux menés à Stanford au début des années 70 par GEVARTER, puis MARTIN, étudiaient dans un contexte applicatif les conséquences de la présence (ou de l'absence) d'alternances régulières de pôles et de zéros le long de l'axe imaginaire sur la stabilité naturelle de la commande rigide : dans le cas de l'alternance régulière, la stabilité intrinsèque, indépendante des valeurs numériques, était assurée. De fait, un cadre théorique existait (notions d'hyperstabilité et de positivité) et son application à la commande des structures flexibles a été mis en évidence par BENHABIB et al. Nous rappelons ci-dessous ce cadre théorique, avant de développer plus en détail l'application à notre problème.

4.1.2 Hyperstabilité et positivité

La notion d'hyperstabilité a été développée par POPOV au début des années 60 pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires. Elle généralise celle de « stabilité absolue ».

Rappelons qu'un système est dit absolument stable s'il est stable quelle que soit la caractéristique non linéaire située dans une région du type secteur, c'est-à-dire de la forme

$$-k_1 < \frac{u(t)}{y(t)} < -k_2$$

(autrement dit, il est stable pour tous les gains de retour compris entre k_1 et k_2).

Définition 1 *Un système linéaire décrit par ses équations d'état*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

ayant le même nombre d'entrées et de sorties, est dit hyperstable ssi, pour toute entrée u vérifiant

$$\delta \geq 0 \quad \forall T \geq 0 \quad \int_0^T u^t(t)y(t)dt < \delta \sup_{0 < t < T} x(t) \quad (4.1)$$

il existe $K > 0$ tel que

$$x(t) < K (\|x(0) + \delta\|) \quad (4.2)$$

Le système est asymptotiquement hyperstable si pour toute entrée bornée satisfaisant la contrainte 4.1, 4.2 est vérifiée, avec en plus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Comme on peut facilement le vérifier, les propriétés d'hyperstabilité et d'hyperstabilité asymptotique ne dépendent pas de la base choisie dans l'espace d'état. En fait, ce sont des propriétés de la matrice de transfert

$$Z(s) = C(Is - A)^{-1}B$$

qui sont indépendantes de sa réalisation. On est donc amené à étudier la version fréquentielle de l'hyperstabilité, et il se trouve que la notion correspondante est celle de positivité; dans tout ce qui suit, les matrices de transfert sont des matrices carrées.

Définition 2 *Une matrice de transfert rationnelle $Z(s)$ est dite positive réelle si elle vérifie les propriétés suivantes*

1. $Z(s)$ est réelle lorsque s est réel,
2. les éléments de $Z(s)$ n'ont pas de pôles instables,
3. $Z(s) + Z^*(-s)$ est hermitienne semi-définie positive pour $\text{Re}(s) > 0$ ($Z^* = Z^t$).

Une définition équivalente à celle-ci définit la notion sur l'axe imaginaire; donnons la dans le cas de la positivité stricte:

Définition 3 *La matrice de transfert rationnelle $Z(s)$ est strictement positive réelle si et seulement si*

1. les éléments de $Z(s)$ sont réels pour s réel,

2. ils n'ont pas de pôles pour $Re(s) > 0$,
3. $Z(j\omega) + Z^*(j\omega)$ est hermitien défini-positif pour tout réel ω .

On démontre que les notions de (stricte) hyperstabilité et (stricte) positivité réelle sont équivalentes, faisant ainsi un lien entre temporel (l'hyperstabilité vue comme une restriction de la définition classique de la stabilité) et fréquentiel (propriétés de la matrice de transfert, restriction du test de stabilité fréquentiel classique).

Dans le cas monovarié, la positivité est très facile à vérifier : une fonction de transfert rationnelle $F(s)$ est positive si et seulement si elle n'a pas de pôles instables et si $Re(F(s)) > 0$ quand $Re(s) > 0$ ou, ce qui est équivalent, si elle n'a pas de pôles instables et si le lieu de NYQUIST associé est situé entièrement dans le demi-plan droit.

Mais le concept de positivité tel qu'il est présenté ci-dessus serait inexploitable pratiquement dans le cas multivariable sans le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit $Z(s)$ une matrice de transfert rationnelle telle que $Z(\infty) = 0$ et Z n'a de pôles que dans le plan $Re(s) < 0$, les pôles sur l'axe imaginaire étant simples.*

Soit A, B, C une réalisation minimale de Z .

Alors, Z est positive réelle si et seulement si il existe une matrice symétrique définie positive P et une matrice L telles que

$$\begin{aligned} PA + A^t P &= -LL^t \\ C^t &= PB \end{aligned} \tag{4.3}$$

Z est strictement positive réelle si et seulement si on a 4.3 avec L non singulière.

4.1.3 Rebouclage des systèmes hyperstables

Il nous reste enfin à exposer un résultat tout aussi important, qui nous permettra de définir une large classe de commandes admissibles pour les structures hyperstables. Sa validité s'étend au cas non linéaire.

Soient deux systèmes S_1, S_2 de matrices de transfert Z_1, Z_2 , toutes deux carrées et de même dimension. On suppose que ces systèmes sont montrés en contre-réaction.

Théorème 2 *Si, dans le système bouclé S , S_1 est hyperstable et S_2 asymptotiquement hyperstable, alors S est asymptotiquement stable.*

Comme tout résultat très général, il paraît tenu puisqu'il exprime simplement qu'un compensateur hyperstable ne peut pas déstabiliser un système hyperstable et qu'au contraire, il assure la stabilité asymptotique d'un système simplement hyperstable. Nous allons voir qu'il conduit à un résultat essentiel quand il est question de structures flexibles.

4.2 Application du théorème aux modèles de structures flexibles

Le modèle canonique des structures flexibles à n modes, m entrées et p sorties :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i\omega_i \end{bmatrix} & B_i &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_i(\zeta_1) & \cdots & \varphi_i(\zeta_m) \end{bmatrix} \\ C_i &= \begin{bmatrix} C_{11}^i & C_{12}^i \\ \vdots & \vdots \\ C_{p1}^i & C_{p2}^i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que l'on supposera minimal (aucun mode ingouvernable ou inobservable) et tel que les fréquences ω_k soient distinctes, possède la propriété d'être positif réel lorsque les trois conditions suivantes sont réalisées :

- il y a autant d'entrées que de sorties, c'est à dire autant d'actionneurs que de capteurs. ($m = p$),
- les capteurs sont des capteurs de vitesse, c'est à dire que

$$C_{j1}^i = 0 \quad \forall j \quad \text{et} \quad C_{j2}^i = \varphi_i(\eta_j)$$

- les capteurs et les actionneurs sont au même endroit, c'est à dire que

$$\eta_j = \zeta_j \quad \text{ce qui se traduit par} \quad B^t = C$$

On notera que la forme de la matrice B est issue de l'hypothèse d'actionneurs de force (ou de couple) localisés aux points $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$.

Ces trois conditions peuvent se résumer en une seule : l'ensemble des capteurs et actionneurs n'est constitué que de bipôles, si l'on appelle bipôle un couple capteur de vitesse/actionneur de force localisé ponctuellement sur la structure.

En effet, les conditions ci-dessus permettent une application simple du théorème 1 sous la forme temporelle. Il faut trouver une matrice P symétrique définie positive telle que

$$\begin{aligned} PA + A^t P &\leq 0 && \text{condition principale} \\ C^t &= PB && \text{condition subsidiaire} \end{aligned}$$

Il paraît judicieux de partitionner les matrices P en blocs de dimension 2×2 et même de les chercher sous forme diagonale de blocs

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_n \end{bmatrix}$$

Les matrices P_k doivent alors vérifier

$$P_k A_k + A_k^t P_k \leq 0$$

Soit en posant

$$P_k = \begin{bmatrix} p_{1k} & p_{2k} \\ p_{2k} & p_{3k} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad p_{1k}, p_{3k} < 0, p_{1k}p_{3k} - p_{2k}^2 > 0$$

$$\begin{bmatrix} p_{1k} & p_{2k} \\ p_{2k} & p_{3k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_k^2 & -2\xi_k \omega_k \end{bmatrix} + \text{sym} \leq 0$$

d'où l'équation

$$\begin{bmatrix} -2p_{2k}\omega_k^2 & p_{1k} - 2p_{2k}\xi_k\omega_k - p_{3k}\omega_k^2 \\ \text{sym} & 2(p_{2k} - 2\xi_k\omega_k p_{3k}) \end{bmatrix} \leq 0$$

Premier cas : $\xi_k = 0$ (structure conservative)

La condition

$$\begin{bmatrix} -2p_{2k}\omega_k^2 & p_{1k} - p_{3k}\omega_k^2 \\ \text{sym} & 2p_{2k} \end{bmatrix} \leq 0$$

conduit à une solution unique en P_k à un coefficient multiplicatif positif près.

En effet, les termes diagonaux étant de signe opposé la seule possibilité est $p_{2k} = 0$. Cette condition impose à son tour $p_{1k} - p_{3k}\omega_k^2 = 0$.

P_k devant être définie positive, on peut choisir

$$P_k = \alpha_k \begin{bmatrix} \omega_k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_k > 0$$

On a alors $P_k A_k + A_k^t P_k = 0$ exactement, on a trouvé une solution juste suffisante.

Second cas $\xi_k > 0$ (structure dissipative)

Le résultat ci-dessus reste satisfaisant puisqu'alors

$$P_k A_k + A_k^t P_k = \alpha_k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4\xi_k \omega_k \end{bmatrix} \quad \alpha_k > 0$$

matrice semi-définie positive.

Il convient cependant de noter que, A_k étant stable strictement, l'équation de LYAPUNOV

$$P_k A_k + A_k^t P_k = Q \quad Q < 0$$

admet une solution définie positive en P_k et qu'il existe donc d'autres conditions suffisantes.

Cependant, avec le choix de P_k correspondant à $\xi_k = 0$ (i.e. la solution correspondant à la structure conservative associée) le résultat devient indépendant d'hypothèses sur l'amortissement structural. D'autre part, la vérification de la condition subsidiaire :

$$C^t = PB$$

conduit à une interprétation identique dans le cas avec et sans amortissement. En effet pour le bloc k la condition s'écrit

$$\begin{aligned} C_k^t = P_k B_k &= \alpha_k \begin{bmatrix} \omega_k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_k(\zeta_1) & \cdots & \varphi_k(\zeta_m) \end{bmatrix} \\ &= \alpha_k \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_k(\zeta_1) & \cdots & \varphi_k(\zeta_m) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le choix $\alpha_k = 1$ conduit par conséquent à $C = B$, c'est à dire à des capteurs de vitesse localisés aux mêmes endroits que les actionneurs de force.

Remarque 1 : Les conditions imposées sont clairement des conditions suffisantes de positivité puisque l'on a successivement introduit des hypothèses simplificatrices sur le choix de P . Il n'est par conséquent pas impossible que, avec une configuration non bipolaire de capteurs et actionneurs, on puisse trouver une matrice P qui donne le résultat. Il n'en reste pas moins que cette condition suffisante peut être considérée comme sous-jacente à la plupart des résultats « généraux » en matière de commande active des structures flexibles. La seule condition restrictive pour que la positivité puisse être testée est que le nombre d'entrées soit égal au nombre de sorties.

Remarque 2 : Le résultat général obtenu est issu en fait de l'application du test de positivité mode par mode et résulte des propriétés des matrices A_k, B_k, C_k décrivant un mode

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_k^2 & -2\xi_k\omega_k \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{2k} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & c_{2k} \end{bmatrix} x_k \end{aligned}$$

Remarque 3 : La vérification des conditions suffisantes pour le bloc k est assurée même si $c_{2k} = b_{2k} \equiv 0$: cependant dans ce cas le mode « n'existe » pas dans le modèle fréquentiel, la représentation d'état n'étant plus minimale.

Il est clair cependant que le bloc élémentaire peut représenter structurellement tous les systèmes 2×2 stables avec action en « accélération » et mesure de « vitesse ». Ce qui fait la *spécificité* des structures flexibles, c'est par conséquent

- au niveau du bloc élémentaire 2×2 , le *faible amortissement* qui conduit à prendre comme condition de positivité celle correspondant au système conservatif associé « proche » ;
- au niveau global, l'obtention du modèle par juxtaposition des blocs élémentaires de structure identique.

Le choix des P_k conduit à vérifier que le modèle est positif réel : lorsque l'amortissement est non nul, il est en fait strictement positif réel et le choix de P_k vérifie donc les conditions de façon un peu trop « lâche », avec en contrepartie un résultat indépendant des amortissements.

En conclusion, les conditions introduites au début du paragraphe conduisent à la positivité le modèle de la structure, positivité indépendante en particulier.

- des valeurs des fréquences,
- des allures des déformées,
- des valeurs d'amortissement,
- du nombre de modes pris pour représenter la structure.

Sous réserve des hypothèses de modélisation physique du phénomène vibratoire, on peut dire que la structure elle-même est positive (ou hyperstable).

4.3 Test de positivité d'un mode isolé

Lorsque la condition suffisante dérivée de la condition subsidiaire

$$C^t = PB$$

n'est pas vérifiée naturellement car la localisation des capteurs et actionneurs est fixée par des considérations extérieures, on ne peut plus tester la positivité que spécifiquement ; cependant, dans le cas monovariable il subsiste une notion de positivité *par mode* sous la forme suivante ; on a

$$C_k^t = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_k \varphi_k(\zeta) \end{bmatrix}$$

Si η est la localisation du capteur, il suffit de choisir

$$\alpha_k \varphi_k(\zeta) = \varphi_k(\eta)$$

soit

$$\alpha_k = \frac{\varphi_k(\eta)}{\varphi_k(\zeta)} \quad \alpha_k > 0$$

pour garantir la positivité du mode seul.

En fait, il suffit pour vérifier cette condition que la déformée soit du *même signe* aux endroits où sont localisés le capteur et l'actionneur. Le résultat est obtenu mode par mode, et par conséquent les modes « positifs » sont ceux dont la déformée possède cette propriété.

La positivité de l'ensemble de la structure n'est plus garantie : quelle que soit la configuration du capteur et de l'actionneur, l'augmentation des « fréquences spatiales » avec la fréquence (temporelle) des modes, c'est à dire l'augmentation du nombre de passages par zéro des déformées, rend les modes supérieurs non positifs.

Un exemple historique d'application de ce test de positivité « par mode » est fourni par la détermination des positionnements possibles du gyromètre de pilotage dans les lanceurs : ce gyromètre mesure la vitesse angulaire et l'on sait qu'il convient de le placer le long de l'axe longitudinal de manière à satisfaire une condition sur le signe du produit de la valeur de la déformée du mode au droit de l'axe d'articulation tuyère (où est appliqué la force de commande) par la valeur de la pente de la déformée au droit du gyromètre (qui effectue la mesure de vitesse angulaire). Le couplage de la flexion avec le mode rigide complique cependant la formulation et on est amené à analyser en fait le bloc 4×4 juxtaposant le mode rigide et le mode flexible considéré.

4.4 Limitations du théorème général

4.4.1 Cas particulier des modes rigides

Le raisonnement précédent conduit aux matrices

$$P_k = \alpha_k \begin{bmatrix} \omega_k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui ne sont définies positives que pour $\omega_k \neq 0$.

Le résultat ne s'applique donc pas au cas des modes rigides : on notera d'autre part que dans ce cas particulier, le bloc d'indice k

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_k(\zeta_1) & \varphi_k(\zeta_m) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \varphi_k(\eta_1) \\ 0 & \varphi_k(\eta_m) \end{bmatrix}$$

conduit à l'inobservabilité du mode rigide par mesure de vitesse, puisque tous les produits CA, CA^2, \dots sont nuls.

Supprimons alors dans le vecteur d'état la position des modes rigides: il ne subsistera pour les modes rigides que des blocs 1×1 qui s'écrivent

$$\begin{bmatrix} [0] \\ \varphi_k(\eta_1) \\ \varphi_k(\eta_m) \end{bmatrix} \quad [\varphi_k(\zeta_1) \quad \varphi_k(\zeta_m)]$$

La sous-équation à vérifier pour le bloc correspondant est donc

$$p_k \times 0 + 0 \times p_k \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{égalité vérifiée}$$

$$C^t = p_k B_k$$

et par conséquent le choix de $p_k > 0$ permet de satisfaire le théorème.

La propriété générale s'étend donc aux systèmes avec modes rigides à condition d'éliminer du vecteur d'état les positions de ces modes.

4.4.2 Modes multiples sur l'axe imaginaire

Le lemme exprimant le test de positivité à partir d'une représentation d'état minimale est établi pour des valeurs propres simples de la matrice A . Dans le cas des modes multiples sur l'axe imaginaire, deux cas se présentent

- ou bien les modes multiples appartiennent à des blocs diagonaux indépendants (cas par exemple de modes de vibrations de même fréquence dans des directions orthogonales). Le modèle canonique général reste structurellement convenable, deux ou plusieurs blocs A_k étant simplement égaux. La minimalité de la représentation d'état impose une condition de gouvernabilité sur le couple (A, B) (en supposant que $C^t = B$);
- ou bien les modes multiples le sont vraiment (on peut distinguer par exemple une dynamique en $s^2 + \omega^2$ et une dynamique en $(s^2 + \omega^2)^2$).

Dans ce dernier cas on revient à la difficulté soulevée dans le cas des modes rigides: la condition $C^t = B$ implique l'inobservabilité du mode multiple.

En effet, soit la matrice A associée à un mode imaginaire pur double. On peut l'écrire

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

le 1 en position $A(2,3)$ couple les deux blocs diagonaux pour les cascader convenablement. Le couple (A, B) est gouvernable, alors que le couple (A^t, B) ne l'est pas du tout.

Par conséquent, la propriété ne s'étend pas aux structures présentant des modes « vraiment » multiples : on pouvait le prévoir puisque la réponse impulsionnelle de tels modes comporte un terme fonction polynomiale du temps ; ils sont donc réellement *instables* en boucle ouverte, et la matrice de transfert incluant de tels modes ne saurait être positive réelle.

4.4.3 Filtrage de l'entrée et de la sortie

Le théorème fondamental n'est plus vérifié non plus dès que l'action (resp. la mesure) n'est par parfaite. Supposons en effet que, pour le bloc 2×2 élémentaire l'actionneur n'agisse qu'à travers un filtre du premier ordre de constante de temps T ; les équations d'état s'écrivent

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_2 & 0 & b \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T} \end{bmatrix} v = A'x + B'v$$

La mesure est toujours une mesure de vitesse, soit :

$$y = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \end{bmatrix} x$$

pour respecter le $C^t = B$ du mode « idéal ».

La condition $C^t = PB$ entraîne alors

$$\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_4 & p_5 \\ p_3 & p_5 & p_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T} \end{bmatrix}$$

d'où $p_3 = p_6 = 0$, $p_5 = bT$ et on ne pourra pas trouver de matrice P définie positive qui satisfasse $C^t = PB'$. On ne pourra donc pas démontrer la positivité dans ce cas (très réaliste, soulignons-le bien).

Chapitre 5

Méthodologie d'utilisation des outils de la robustesse pour la CASF

On décrit dans ce chapitre les problèmes liés à la Commande Active des Structures Flexibles (CASF). Il découle de ces problèmes des spécifications de natures différentes (temporelle, fréquentielle, paramétrique, ...), si bien que la CASF se pose toujours comme un problème multi-objectifs. On propose alors des éléments de solution fondés sur la représentation du problème de commande sous forme dite standard pour l'utilisation des techniques de commandes optimales (H_∞ , H_2 ou LQG) et de synthèses paramétriquement robustes (PRLQG, ...).

5.1 Problème du « spill-over »

Ce problème est étroitement lié au problème de la réduction. Le problème du « spill-over » ou de la contamination désigne le fait que la synthèse effectuée sur le modèle réduit ne stabilise pas le modèle complet : les modes flexibles hautes fréquences négligés dans le modèle de synthèse sont déstabilisés par la commande. Il s'agit donc d'un problème de robustesse à des dynamiques négligés sauf que dans ce cas précis ces dynamiques se traduisent par des pics sur les réponses fréquentielles qui vont engendrer des gabarits particulièrement contraignants pour majorer cette incertitude non-structurée et appliquer les techniques de synthèse adaptée (H_∞).

La solution consiste à introduire une spécification de « roll-off » afin de réduire l'activité de la commande à la fréquence des modes flexibles négligés dans le modèle de synthèse. Cette spécification sera d'autant plus sévère que l'on aura négligé, tôt en fréquence, les modes flexibles sensibles au niveau de commande requis pour satisfaire les performances sur les modes rigides et éventuellement sur les premiers modes flexibles.

Illustration : L'illustration élémentaire repose sur un modèle à un mode rigide

et un mode flexible tel le modèle du lanceur utilisé lors du premier B.E. ou plus académiquement le système masses-ressort. La synthèse effectuée sur le modèle rigide déstabilise le modèle muni d'un mode flexible.

L'utilisation de la forme standard pour décrire les problèmes de commande se prête bien à l'introduction de spécifications de « roll-off ». Il suffit de compléter la forme standard par une pondération de type passe-haut sur le signal de commande selon la figure 5.1.

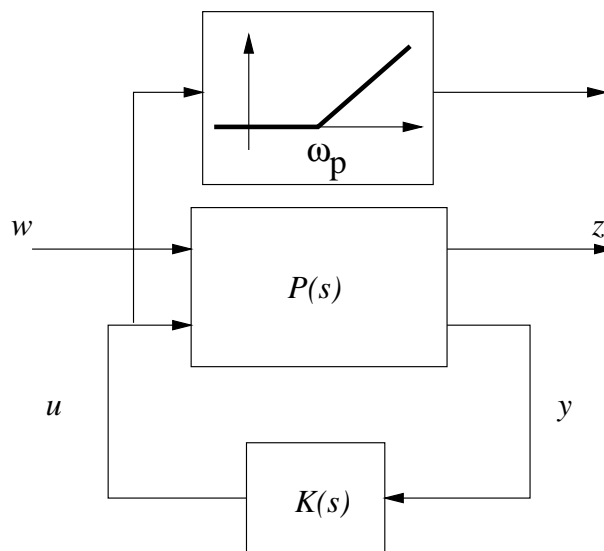


FIG. 5.1 – Pondération de la commande en haute fréquences pour le « roll-off ».

Une alternative consiste à colorer le bruit de mesure par un filtre passe-haut selon la figure 5.2 qui permettra de spécifier que les mesures sont peu fiables aux fréquences élevées. Pour les systèmes qui ont plus de mesures que de commandes on préférera la première solution (figure 5.1) car elle sera moins pénalisante sur l'ordre du correcteur obtenu.

5.2 Maîtrise de l'inversion du système

Lorsque l'écart en fréquence entre les premiers modes flexibles et la dynamique rigide désirée en boucle fermée est trop faible, la solution dite *passive* qui consiste à faire la synthèse sur le modèle rigide complétée par une spécification sévère de « roll-off » n'est plus réaliste. Il faut alors prendre en compte quelques modes flexibles dans le modèle de synthèse. Ce pose alors la question « que fait on des modes flexibles en boucle fermée ? ». L'application directe du réglage rigide sur le modèle

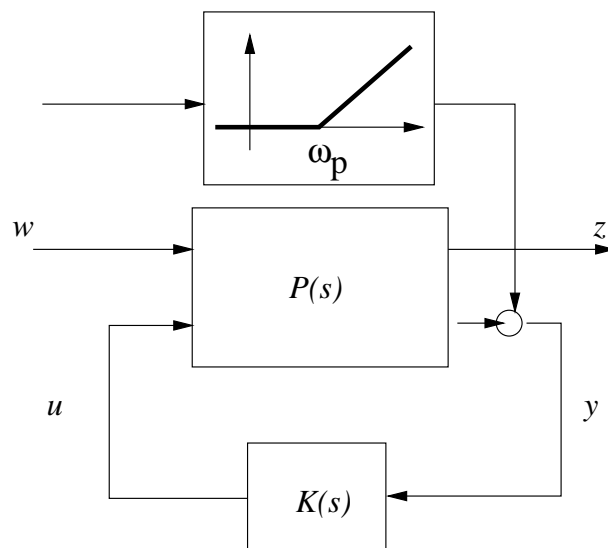


FIG. 5.2 – Coloration haute fréquence du bruit de mesure pour le « roll-off ».

flexible et l'utilisation des techniques de commande optimales conduisent souvent à un correcteur qui inverse localement la dynamique des modes flexibles (voir. B. E. lanceur). C'est souvent en effet la solution optimale sur le modèle nominal mais on sait par expérience que cette solution n'est pas robuste pour deux raisons :

- d'une part, des perturbations non pris en compte dans la forme standard peuvent exciter ces modes flexibles qui sont du fait, de la compensation, quasi-ingouvernables en boucle fermée. On ne pourra donc pas rejeter correctement ces perturbations (problème de robustesse en performance),
- d'autre part, ce modèle nominal est une approximation et les fréquences et amortissement caractéristiques de la dynamique flexible sont mal connus ou sont susceptibles de changer. Si les cancellations pôles/zéros ne se font plus correctement, il y a risque d'instabilité.

Il faut donc spécifier dans la forme standard que ces modes sont susceptibles de varier. Il s'agit d'un problème de robustesse paramétrique.

L'utilisation de la forme standard pour décrire les problèmes de commande se prête également bien à l'introduction de spécifications de robustesse paramétrique si l'on dispose d'une modélisation des incertitudes paramétriques sous forme $M - \Delta$.

5.2.1 Mise sous forme $M - \Delta$

Cette étape est sans doute la plus délicate et soulève de nombreux problèmes de modélisation. La forme $M - \Delta$ est représentée sur la figure 5.3 où la matrice Δ contient les incertitudes de modèle. La matrice de transfert $M(s)$ contient le modèle

nominal et les effets des incertitudes.

Nous nous intéressons brièvement ici à une méthode d'obtention du schéma d'interconnection standard dans le cas particulier d'incertitudes purement paramétriques de modèle.

Supposons que les incertitudes paramétriques δ_i entrent de façon affine dans les équations d'état du processus à commander :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A_0 + \sum_i A_i \delta_i)x + (B_0 + \sum_i B_i \delta_i)u \\ y &= (C_0 + \sum_i C_i \delta_i)x + (D_0 + \sum_i D_i \delta_i)u .\end{aligned}\quad (5.1)$$

$\delta_i \in [-1,1]$ représente la variation *normalisée* du $i^{\text{ième}}$ paramètre incertain. La méthode de MORTON permet de mettre le processus à commander sous la forme d'une LFT $y = F_l(M(s), \Delta)u$, où u et y sont les entrées et sorties du processus (voir Figure 5.3).

Δ est alors une matrice diagonale de la forme :

$$\Delta = \text{diag}(\delta_i I_{q_i}) \quad (5.2)$$

le scalaire δ_i est donc répété q_i fois, où q_i est le rang de la matrice augmentée P_i :

$$P_i = \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array} \right] . \quad (5.3)$$

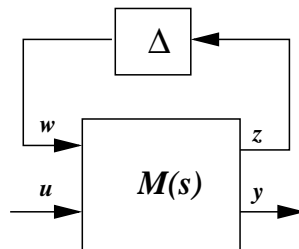


FIG. 5.3 – *Forme $M - \Delta$.*

La problème est de trouver une formulation $M - \Delta$ avec Δ de rang minimal (il faut répéter les paramètres le moins de fois possible) afin d'alléger le problème de synthèse en robustesse paramétrique qui en découlera.

Exemple : Dans cet exemple, on considère les systèmes du second ordre généralisés décrits par l'équation différentielle :

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = Gu . \quad (5.4)$$

On sait que ce type de représentation caractérise le comportement dynamique d'un système mécanique linéaire. Notre but est d'obtenir une forme LFT de ce système lorsque la matrice d'inertie M est soumise à des incertitudes additives Δ ($M \leftarrow M + \Delta$). On veut donc isoler Δ sous une forme LFT. Il, ne faut surtout pas chercher à modéliser la dépendance paramétrique (5.1) sur la représentation d'état du système qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}G \end{bmatrix} u$$

car l'inversion de la matrice M « diffuse » l'information paramétrique dans de nombreux coefficients de cette représentation d'état. Il faut mieux ici utiliser la modélisation 5.4 plus proche de la physique du système.

En effet, dans ce cas simple, on peut décrire l'équation différentielle (5.4) par un schéma fonctionnel faisant apparaître l'incertitude Δ sur la matrice M de façon unique (afin d'éviter des incertitudes répétées); soit :

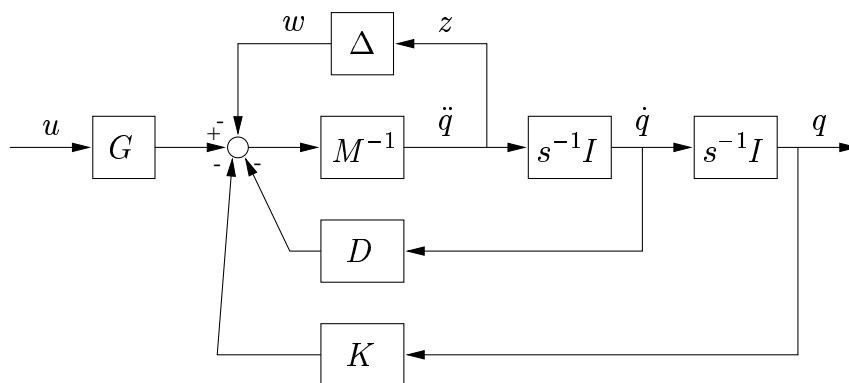


FIG. 5.4 – Schéma fonctionnel du modèle incertain.

On déduit directement la LFT :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}G \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1} \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + M^{-1}Gu - M^{-1}w \\ w &= \Delta z \end{aligned}$$

Sur des applications plus réalistes, une telle approche n'est pas toujours possible :

- la dépendance paramétrique en fonction du nombre de Mach et de la vitesse pour les modes de structures d'un avion ne peut pas s'exprimer analytiquement. On dispose alors d'une collection de modèle en différents point de l'es-

pace paramétrique et le problème s'énonce plutôt alors comme un problème de synthèse multi-modèle,

- un autre exemple est représenté sur la figure 5.5. Il s'agit d'une maquette de télescope qui fera l'objet du prochain chapitre. La figure 5.5 représente l'évolution de la réponse fréquentielle lorsque l'on change de support ce télescope. Ici également on ne sait pas exprimer la dépendance du modèle en fonction de l'impédance du support.

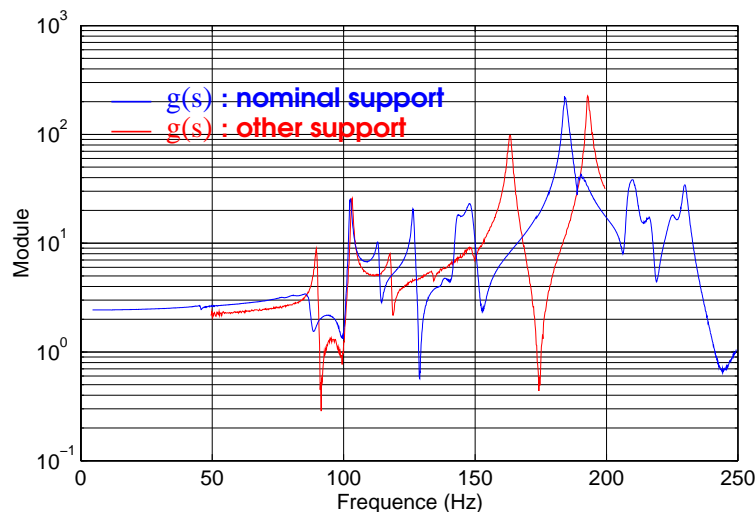


FIG. 5.5 – Variation sur le paysage modal en fonction de l'impédance du support.

D'un façon générale, on sera donc contraint d'utiliser une modélisation grossière pour obtenir un modèle sous forme $M - \Delta$ et avoir accès aux algorithmes de commande robuste qui utilise ce formalisme. On se contentera souvent de modéliser des variations sur les fréquences et les amortissements des modes flexibles. Dans le cas de variations sur les amortissements on utilisera la forme $M - \Delta$ suivante :

Soit A_i , B_i , C_i les blocs élémentaires relatifs au mode flexible numéro i dans la représentation bloc diagonale réelle normalisée¹ du modèle :

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i\omega_i \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} B_i^1 \\ B_i^2 \end{bmatrix}, C_i = [C_i^1 \ C_i^2]. \quad (5.5)$$

Une variation additive $\delta\xi_i$ sur l'amortissement ξ_i du mode i peut être modélisé par

1. normalisée signifie ici que parmi toutes les représentations blocs diagonales réelles, on choisit celle qui normalise la matrice B_i à $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dans le cas monovarié. Dans le cas multivarié, on choisit $B_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ où B_{ij} désigne la colonne de la matrice B_i relative à l'entrée j qui domine la gouvernabilité du mode i .

et nous noterons la forme $M - \Delta$ de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} A & M & B \\ \hline N & 0 & 0 \\ \hline C & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$w = \Delta z$$

Remarque : Cette dernière hypothèse ne réduit en rien la généralité du raisonnement. De fait, dans le cas où la i^e colonne, notée b_i , de la matrice B est soumise à des incertitudes paramétriques, on peut toujours se ramener à un problème où l'incertitude paramétrique est uniquement centrée sur la matrice dynamique en construisant un système augmenté de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b_i \\ 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o \\ b_o \end{bmatrix} u, \quad (5.8)$$

avec :

- $B_o = B - [0 \ 0 \ \dots \ b_i \ \dots \ 0]$,
- $b_o = [0 \ 0 \ \dots \ \tau \ \dots \ 0]$,
- τ représente une dynamique d'actionneur fictive que l'on choisira suffisamment élevée par rapport aux modes du système afin que l'état introduit x_b suive la commande u_i avec une dynamique négligeable, le transfert entre ces deux variables étant :

$$\frac{X_b(s)}{U_i}(s) = \frac{\tau}{s + \tau}. \quad (5.9)$$

Une démarche analogue peut être faite pour les incertitudes sur la matrice C en introduisant une dynamique capteur suffisamment rapide par rapport à celle du système.

Nous rappelons ici un théorème fondamental qui est à la base des démonstrations des propriétés asymptotiques des régulateurs LQ.

Théorème général : Considérons un système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x \in \mathcal{R}^n; u \in \mathcal{R}^m \\ z(t) = Nx(t) & z \in \mathcal{R}^q. \end{cases} \quad (5.10)$$

La commande par retour d'état qui minimise le critère LQ :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (z^T(t)z(t) + \rho u^T(t)Ru(t))dt \\ &= \int_0^\infty (x^T N^T N(t)x(t) + \rho u^T(t)Ru(t))dt \end{aligned} \quad (5.11)$$

avec $R > 0$ et ρ un scalaire positif, s'écrit³ :

$$u(t) = -K_c x(t) \text{ avec } K_c = \frac{1}{\rho} R^{-1} B^T P \text{ et } P = \text{Ric} \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{\rho} B R^{-1} B^T \\ -N^T N & -A^T \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Nous avons alors :

- $\lim_{\rho \rightarrow 0}(P) = P_0$ existe et $\lim_{\rho \rightarrow 0}(J) = x^T(0)P_0 x(0)$
- enfin, si les hypothèses suivantes sont vérifiées :
 - * $\dim(z) \leq \dim(u)$ ($q \leq m$),
 - * le transfert $Z/U(s) = N(sI_n - A)^{-1}B$ n'a pas de zéros dans le demi-plan droit,

$$\text{alors } P_0 = 0.$$

La dernière hypothèse illustre le fait que, dans le cas de système à déphasage non minimal (c'est-à-dire avec des zéros « instables »), on ne peut pas « pousser » indéfiniment les performances même si l'on s'autorise des commandes sans aucune limitation ; ceci est tout à fait logique puisque les zéros (du système comme du correcteur) attirent les pôles en boucle fermée quand le gain de boucle augmente (où lorsque la pondération sur u diminue dans le critère (5.11)).

Désignons par λ une valeur propre de la boucle fermée et par v (de norme unitaire) son vecteur propre à droite associé, soit :

$$(A - BK_c - \lambda I_n)v = (A - \frac{1}{\rho} B R^{-1} B^T P - \lambda I_n)v = 0 \quad (5.16)$$

alors λ et $\begin{bmatrix} v \\ P v \end{bmatrix}$ sont valeur et vecteur propres de la matrice hamiltonienne (d'après (5.14) et (5.12)) :

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I_n & -\frac{1}{\rho} B R^{-1} B^T \\ -N^T N & -A^T - \lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ P v \end{bmatrix} = 0. \quad (5.17)$$

Plaçons-nous dans le cas où les hypothèses (5.15) sont satisfaites, alors $\lim_{\rho \rightarrow 0}(P) = 0$.

3. Pour rappel, $X = \text{Ric}[H]$ désigne la solution symétrique définie positive de l'équation de RICCATI :

$$X A + A^T X - X R_x X + Q_x = 0 \quad (5.12)$$

associée à la matrice hamiltonienne :

$$H = \begin{bmatrix} A & -R_x \\ -Q_x & -A^T \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Pour que la seconde composante de l'égalité vectorielle (5.17) soit vérifiée quand ρ tend vers 0 :

- soit λ est rejeté à l'infini : $\lim_{\rho \rightarrow 0}(|\lambda|) = \infty$; avec λ, v, P vérifiant asymptotiquement $(N^T N + \lambda P)v = 0$
- soit λ est fini : $\lim_{\rho \rightarrow 0}(\lambda) = \lambda_0$ et $\lim_{\rho \rightarrow 0}(v) = v_0$; avec v_0 tel que $Nv_0 = 0$.

Ce résultat montre que, asymptotiquement, la commande LQ découple du critère les modes qu'elle n'a pu accélérer indéfiniment. Ces modes sont placés sur les zéros stables (ou l'image stable par rapport à l'axe imaginaire des zéros instables) du transfert $Z/U(s)$ puisque λ_0 et v_0 vérifient :

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_0 I_n & B \\ N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ -\frac{1}{\rho} R^{-1} B^T P v_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.18)$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} A - BK_c - \lambda_0 I_n \\ N \end{bmatrix} v_0 = 0. \quad (5.19)$$

5.2.2.1 Désensibilisation asymptotique du LQR

On déduit de la dernière égalité (5.19) que les valeurs propres finies de la boucle fermée sont asymptotiquement inobservables par la sortie contrôlée. Si cette sortie z correspond à la sortie auxiliaire introduite pour modéliser les variations paramétriques (voir équation (5.7)), alors ces valeurs propres finies seront insensibles à tout rebouclage de cette sortie et notamment à la perturbation Δ .

Le modèle perturbé corrigé s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c & M \\ N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

soit :

$$\frac{Z}{W}(s) = N(sI_n - A + BK_c)^{-1} M. \quad (5.21)$$

Si l'on décompose ce transfert sur les différentes valeurs propres λ_i , nous obtenons :

$$\frac{Z}{W}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{N v_i u_i^T M}{s - \lambda_i} \quad (5.22)$$

où u_i et v_i désignent respectivement le vecteur propre à gauche et le vecteur propre à droite associés à λ_i .

Il est alors facile de montrer que ce transfert tend asymptotiquement vers 0 avec ρ puisque :

- soit $\lambda_i \rightarrow \infty$,
- soit $N v_i \rightarrow 0$.

$$\text{Donc : } \frac{Z}{W}(s) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \rho \rightarrow 0 .$$

D'un point de vue pratique, cette propriété sera utilisée de la façon suivante : à partir d'un réglage de pondérations Q_x et R du critère LQ satisfaisant les spécifications de performance, on robustifiera la solution obtenue, en prenant compte d'une pondération selon la sortie auxiliaire $z = Nx$ par le biais d'un paramètre de réglage q :

$$Q_x \rightarrow Q_x + qN^T N \quad (5.23)$$

et on augmentera ce paramètre jusqu'à l'obtention d'un compromis satisfaisant entre les performances et la robustesse aux variations paramétriques construites autour de z .

Le problème de désensibilisation asymptotique de la méthode LQ peut se résoudre de la manière suivante :

Méthodologie PRLQ : Pour un système incertain défini par (5.7) et vérifiant les propriétés (5.15), la loi de commande LQ, $u = -K_c x$, issu d'un certain choix de pondérations Q_{x0} et R_0 , peut être désensibilisée asymptotiquement en ajustant la constante q du nouveau problème LQ défini par :

$$\begin{aligned} G_1 &= R^{-1} B^T P \quad \text{et} \\ P A_0 + A_0^T P + (Q_{x0} + qN^T N) - P B R_0^{-1} B^T P &= 0 . \end{aligned} \quad (5.24)$$

5.2.2.2 Introduction d'un observateur de KALMAN

Si l'on considère maintenant que seules les sorties $y = Cx$ sont accessibles à la mesure, par analogie avec la méthode LQG, on synthétisera un observateur de KALMAN pour estimer l'état et appliquer sur cet état estimé, noté \hat{x} , le gain K_c calculé précédemment. La représentation d'état du correcteur dynamique ainsi obtenu s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ u \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A - BK_c - K_f C & K_f \\ \hline -K_c & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

où K_f désigne le gain de l'observateur de KALMAN. On peut alors montrer que le transfert entre w et z , de la boucle fermée par la commande $u = -K_c \hat{x}$ s'écrit maintenant :

$$Z/W(s) = N(sI_n - A + K_f C)^{-1} M \quad (5.26)$$

c'est-à-dire que de la perturbation Δ , on ne « voit » que les modes d'observation (valeurs propres de $A - K_f C$). Ces modes sont donc sensibles aux variations paramétriques mais les modes de commande (valeurs propres de $A - BK_c$), comme dans le cas du retour d'état, y sont insensibles. Il faut donc que le réglage du filtre

de KALMAN permette d'obtenir une dynamique d'estimation aussi peu sensible que possible aux variations paramétriques pour que l'ensemble de la dynamique de la boucle fermée présente de bonnes propriétés de robustesse.

Première formulation de la méthodologie PRLQG : Pour un système incertain défini par (5.7) et vérifiant les propriétés (5.15), il est possible de retrouver, par la synthèse LQG, la robustesse paramétrique du filtre de KALMAN en ajustant la constante q dans le critère LQ défini par :

$$Q_x = Q_{x0} + q_1 N^T N \quad \text{et} \quad R = R_0$$

où Q_{x0} et R_0 sont les matrices de pondération réglées pour satisfaire la performance sur le système nominal.

5.2.2.3 Dualité et analogie avec le LTR

Nous avons vu dans les sections précédentes comment robustifier la commande LQ en pondérant le critère dans la direction de z ($Q_x \rightarrow N^T N$) ; on peut aussi, par dualité, robustifier l'observateur de KALMAN en injectant un bruit d'état dans la direction de w ($W_x \rightarrow M M^T$).

Dans ce dernier cas, le transfert en boucle fermée vu de la perturbation devient :

$$Z/W(s) = N(sI_n - A + BK_c)^{-1} M . \quad (5.27)$$

Les modes d'observation sont donc maintenant insensibles aux variations paramétriques et ce transfert répond comme celui que l'on obtiendrait par une commande LQ qui supposerait tout l'état mesurable.

Seconde formulation de la méthodologie PRLQG : Pour un système incertain défini par (5.7) et vérifiant les propriétés (5.15), il est possible de retrouver, par la synthèse LQG, la robustesse paramétrique du retour d'état LQ en ajustant la constante q dans le réglage du filtre de KALMAN défini par :

$$W_x = W_{x0} + q_2 M M^T \quad \text{et} \quad V = V_0$$

où W_{x0} et V_0 sont les matrices de covariance réglées sur le système nominal. Cette synthèse PRLQG force la partie « filtre de KALMAN » à être asymptotiquement insensible aux variations paramétriques. Nous l'appellerons donc, par abus d'écriture, synthèse PRG.

D'un point de vue pratique, c'est cette dernière formulation du PRLQG qui est la plus utilisée, car les systèmes sont généralement plus riches en mesures qu'en commandes et l'hypothèse (5.15), qui limite le nombre de paramètres incertains indépendants au nombre de commandes (cas du PRLQ) ou au nombre de mesures

(cas du PRG), est donc moins restrictive dans le cas du PRG que dans le cas du PRLQ.

Une autre alternative consiste à robustifier le gain de retour d'état vis-à-vis de certains paramètres et l'observateur vis-à-vis d'autres paramètres selon l'interprétation physique de ces paramètres et selon le savoir-faire du concepteur.

Enfin, on remarquera que le LQG/LTR est un cas particulier du PRLQG où l'on a choisi :

$$M = B \text{ et } N = C, \quad (5.28)$$

c'est-à-dire que la perturbation Δ correspond alors à un gain statique entre l'entrée et la sortie du système. C'est donc pour cette dernière raison que le LTR tend asymptotiquement à restaurer la marge de gain infinie du LQ.

Enfin, dans le cadre d'une approche par *forme standard*, on retrouvera les mêmes propriétés asymptotiques par une synthèse H_2 sur une forme standard dans laquelle on pris en compte des entrées w et/ou des sorties z , issues de la mise sous forme $M - \Delta$ des variations paramétriques, que l'on pondérera par des gains statiques (respectivement $\sqrt{q_1}$ et $\sqrt{q_2}$) selon la figure suivante :

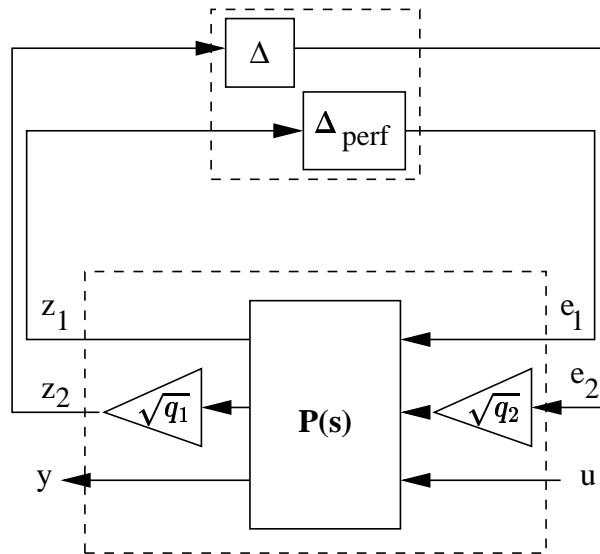


FIG. 5.6 – *Prise en compte des incertitudes paramétriques dans le forme standard.*

5.3 Synthèse multi-objectifs

Nous avons vu que l'on pouvait enrichir une forme standard pour prendre en compte des spécifications de « roll-off » pour prévenir le phénomène de *spillover* et pour désensibiliser la synthèse aux variations sur les caractéristiques des modes

flexibles (amortissement). Il faut pouvoir traduire, dans cette mise en forme, les spécifications du cahier des charges sur la dynamique rigide. S'il s'agit de spécifications fréquentielles alors la forme standard est adaptée pour les prendre en compte. Dans le cas de spécifications temporelles ou modales, par exemple des spécifications de temps de réponse ou de découplage des chaînes de roulis et lacet pour les commandes de vol latéral d'un avion, la *forme standard de passage* que nous présentons dans la section suivante permet de prendre en compte un gain de retour d'états rigides préalablement calculé par des techniques modales adaptées à ces spécifications.

5.3.1 La forme standard de passage

La *forme standard de passage* que nous détaillons dans cette section exploite les données du correcteur LQG et plus généralement des correcteurs utilisant un observateur de l'état du système (par le biais d'un gain d'estimation K_f) et un retour de l'état estimé (par le biais d'un gain de commande K_c). Cette structure classique de commande est rappelée Figure 5.7 dans laquelle la transmission directe D a été supprimée pour des raisons de clarté.

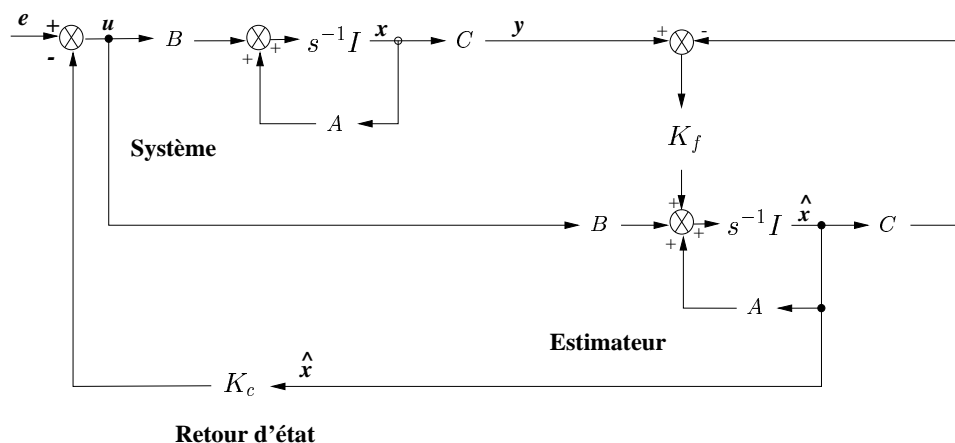


FIG. 5.7 – La structure observateur et retour d'état ou LQG.

Considérons donc un système défini par la représentation d'état générale (n états, m commandes, p sorties) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

et la forme standard $P_p(s)$ dite *de passage* associée à ce système :

$$P_p(s) \quad / \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & K_f & B \\ K_c & 0 & I_m \\ C & I_p & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

où K_c et K_f désignent respectivement un gain de retour d'état et un gain de KALMAN synthétisés pour satisfaire certaines spécifications par une technique appropriée (modale, LQG, ...). Nous supposons de plus que $A - BK_c$ et $A - K_fC$ sont stables.

Alors, les synthèses H_2 et H_∞ menées sur la forme standard $P_p(s)$ fournissent la même solution. Cette solution coïncide avec le correcteur LQG (noté : $K_{LQG}(s)$) construit sur K_c et K_f et s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ u \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A - BK_c - K_fC + K_fDK_c & K_f \\ \hline -K_c & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Justification : La représentation d'état de la forme standard $P_p(s)$ rebouclée sur le correcteur $K_{LQG}(s)$, c'est-à-dire $F_l(P_p(s), K_{LQG}(s))$, s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \\ z \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A & -BK_c & K_f \\ K_fC & A - BK_c - K_fC & K_f \\ \hline K_c & -K_c & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \\ w \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Effectuons le changement de variable qui fait apparaître dans le vecteur d'état l'erreur d'estimation $\varepsilon = x - \hat{x}$ liée au filtre de KALMAN :

$$\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^{-1} = \mathcal{M}. \quad (5.33)$$

La nouvelle représentation de $F_l(P_p(s), K_{LQG}(s))$ s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \\ z \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A - BK_c & BK_c & K_f \\ 0 & A - K_fC & 0 \\ \hline 0 & K_c & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \\ w \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Nous pouvons donc constater que les états ε associés à l'erreur d'estimation sont ingouvernables par w et que les états x du système sont inobservables par z . Le transfert entre w et z est donc nul :

$$F_l(P_p(s), K_{LQG}(s)) = 0 \quad (5.35)$$

et, par conséquent :

$$\|F_l(P_p(s), K_{LQG}(s))\|_2 = \|F_l(P_p(s), K_{LQG}(s))\|_\infty = 0 \quad (5.36)$$

Ce correcteur est donc bien la solution optimale à ce problème de commande au sens de la norme 2 et au sens de la norme infinie.

5.3.2 Utilisation pratique

Ce résultat peut être considéré comme une généralisation, aux cas des critères H_2 et H_∞ , de la solution au problème dit *LQ inverse* soulevé dans les années 60 et 70 et qui consistait à retrouver le critère LQ dont la minimisation permettait de restituer un retour d'état donné. Cette *forme standard de passage* utilisée en tant que telle ne présente aucun intérêt puisqu'il faut connaître les gains K_c et K_f pour mettre en forme le problème de commande et retrouver finalement le correcteur LQG équivalent. Par contre, partant d'un retour d'état K_c satisfaisant certaines spécifications temporelles relatives à certains états du système, elle peut être très utile pour amorcer une mise en forme qui sera complétée par des pondérations fréquentielles complémentaires des précédentes spécifications temporelles.

Par exemple, si le gain de KALMAN introduit dans la démonstration précédente n'est pas exploité pour satisfaire les spécifications sur la dynamique rigide, on pourra synthétiser le filtre d'estimation des états par une approche fréquentielle et prendre en compte une spécification de type « roll-off », par exemple. Une illustration de ce type de *synthèse mixte modale*/ H_∞ est proposée dans la référence [1].

Les deux chapitres suivants exploitent les éléments de solutions que nous venons de présenter et permettront d'illustrer les différents problèmes soulevés :

- le premier concerne un problème de réjection de perturbations ou plus exactement d'isolation dynamique. Il s'agit d'une maquette de télescope spatial sur laquelle il faut isoler les mouvements de la ligne de visée des mouvements de la plate-forme porteuse (le satellite),
- le second concerne la synthèse de lois de commande de vol latéral d'un avion type gros porteur dans lequel la flexibilité a volontairement été dégradée pour éprouver et évaluer diverses méthodologies de synthèses de lois de commande.

Chapitre 6

CAT : Contrôle d'Attitude de Télescope

Nous décrivons dans ce chapitre l'application de la méthode de synthèse PRLQG, introduite dans le chapitre précédent, à un modèle d'une maquette de télescope spatial. Cet exemple est très représentatif des problèmes de réduction du fait de la grande flexibilité du système ; les modes de structure interagissant avec la bande passante de commande, il est indispensable de les prendre en compte lors de la synthèse des lois.

Dans une première partie, nous donnons une description de la maquette de télescope. Puis nous présentons un modèle de cette structure obtenu par identification, ainsi que la mise sous forme standard pour la synthèse. Nous appliquons enfin la méthode de synthèse PRLQG sur chaque axe de ce système à deux axes, puis sur les deux.

6.1 La maquette CAT

La maquette C.A.T. (Contrôle d'Attitude de Télescope) est une maquette de télescope, utilisée par le C.N.E.S. pour étudier la stabilisation de la ligne de visée de systèmes optiques de pointage de grande précision embarqués sur satellite. Les exigences concernant la stabilité des instruments optiques de pointage embarqués devenant de plus en plus rigoureuses, les lois de commandes de la ligne de visée doivent être efficaces sur une large bande passante. Une des principales limitations aux performances vient des modes flexibles des instruments.

La maquette C.A.T., présentée Figure 6.1, est constituée d'une tourelle montée sur un cardan, pouvant pivoter avec de faibles débattements par rapport au bâti selon deux axes (élévation et azimuth). Les paliers sont équipés de pivots souples flexibles (Bendix) réalisant une isolation passive du télescope par rapport à son

support. Le comportement de ces pivots est caractérisé sur la Figure 6.2 présentant la réponse fréquentielle du transfert entre mouvements du satellite porteur et ceux du télescope. En parallèle à ces pivots, sont montés des moteurs permettant d'appliquer un couple sur chaque axe. Nous disposons d'accéléromètres placés sur la tourelle donnant une mesure non colocalisée avec la commande. La mesure de la position inertielle de la ligne de visée du télescope (proximètre) est réalisée par la réflexion d'un faisceau laser sur un miroir disposé sur le CAT vers une caméra CCD. Nous disposons également de codeurs articulaires pour la mesure de la position relative du télescope par rapport au support. Pour la mesure expérimentale des performances nous disposons d'une mesure micro-champ, large bande, des mouvements de la ligne de visée.

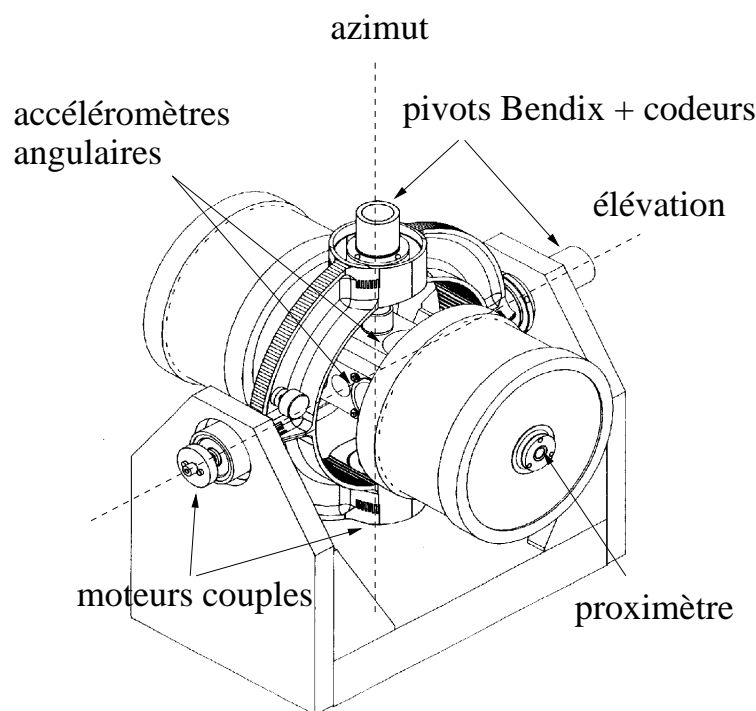


FIG. 6.1 – *Maquette CAT*

L'idée de départ était de piloter le CAT à l'aide de deux solutions complémentaires en fréquence, illustrées sur la Figure 6.2 :

- l'isolation dynamique par augmentation de l'inertie apparente à l'aide des accéléromètres et réduction de la raideur apparente des pivots Bendix par un retour positif sur les codeurs articulaires ; cette solution permet de rejeter les perturbations moyennes fréquences (jusqu'à 200 rad/s) du mouvement du véhicule porteur et soulève le problème de l'interaction commande/modes flexibles,

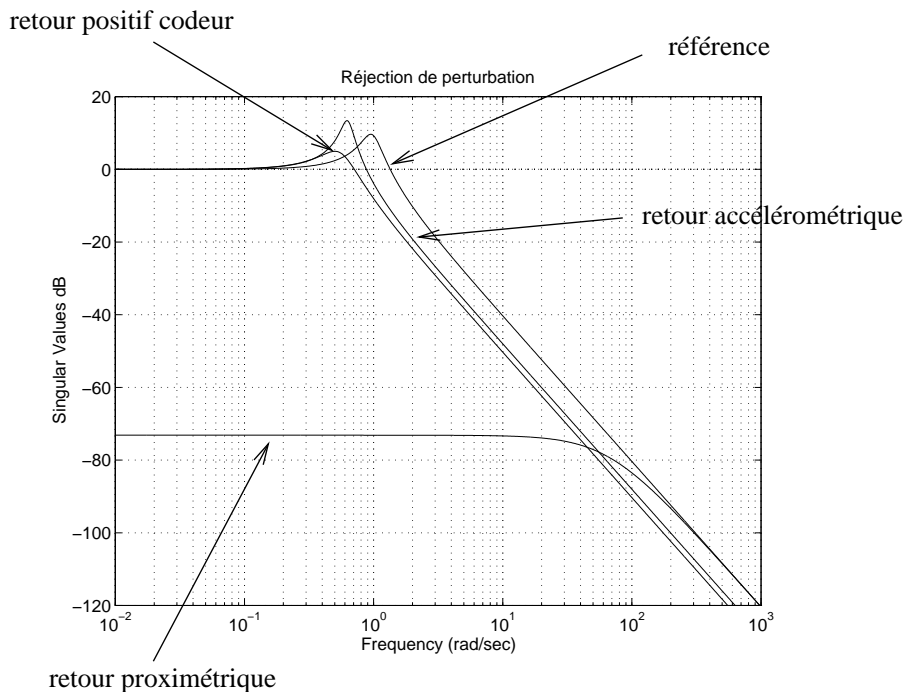


FIG. 6.2 – Analyse des différents gains sur la fonction de réjection θ_p/θ_s

le premier mode flexible se situant à environ 300 rad/s ;

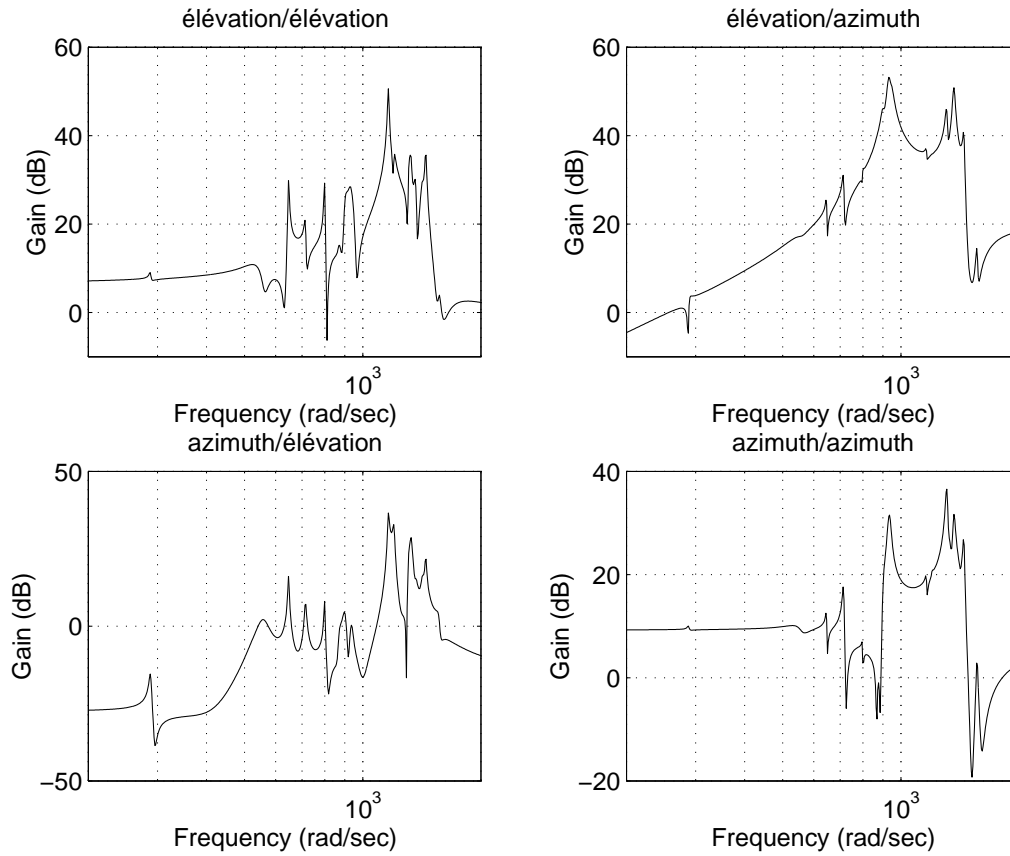
- la réjection de perturbation par l'intermédiaire d'un asservissement de position sur la référence inertielle ; cette solution permet de rejeter les composantes du mouvement du véhicule porteur ayant une dynamique inférieure à la bande passante de l'asservissement (environ 100 rad/s).

Une solution optimale peut être obtenue en mélangeant isolation et réjection. Cependant, une limitation importante provient des modes flexibles de l'instrument.

6.2 Modélisation

6.2.1 Modèle de structure

Nous disposons d'un modèle de structure identifié d'ordre 40, noté $g(s)$, représentant la matrice de transfert entre les deux couples de commande C et les deux mesures de l'accélération angulaire sur le corps principal du télescope $\ddot{\theta}_p$. La réponse fréquentielle de ce système est donnée Figure 6.3. Notons la présence de nombreux modes flexibles faiblement amortis entre 280 et 1600 rad/s, dont les pulsations et amortissement sont donnés Tableau 6.1.

FIG. 6.3 – *Modèle identifié de CAT $g(s)$*

N^o	$\omega_i(rad/s)$	ξ_i	N^o	$\omega_i(rad/s)$	ξ_i
1	288	0.006	11	1162	0.004
2	536	0.098	12	1175	0.015
3	558	0.038	13	1200	0.005
4	647	0.003	14	1309	0.006
5	714	0.002	15	1329	0.007
6	799	0.002	16	1364	0.008
7	870	0.010	17	1418	0.009
8	901	0.011	18	1447	0.005
9	933	0.011	19	1563	0.012
10	943	0.013	20	1563	0.005

TAB. 6.1 – *Modes flexibles du modèle identifié*

6.2.2 Mise sous forme standard

Le principal objectif de commande sur cet exemple est la réjection des perturbations provenant du véhicule porteur. Pour atteindre cet objectif, un modèle augmenté, noté $P(s) = P(g(s))$ est construit à partir du modèle identifié $g(s)$. Cette mise en forme, présentée Figure 6.4 pour un axe, est du type standard utilisé dans les méthodes de synthèse modernes. L'objectif de commande est, sur cette mise en forme, exprimé comme la minimisation du transfert entre les perturbations (position et vitesse du véhicule porteur : θ_s et $\dot{\theta}_s$) et les sorties contrôlées (position et vitesse du télescope : θ_p et $\dot{\theta}_p$). Trois mesures sont disponibles : θ_p^m , $\ddot{\theta}_p^m$ (angle iner-

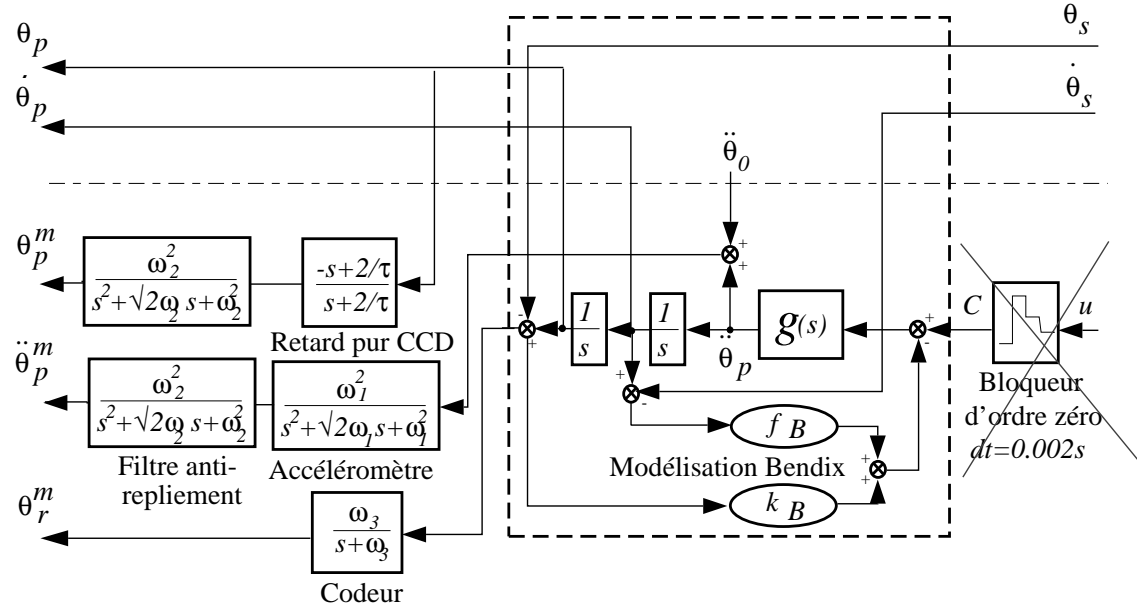


FIG. 6.4 – Mise sous forme standard $P(s)$

tiel d'élévation et accélération angulaire) et $\theta_r^m \approx \theta_p - \theta_s$ (angle relatif d'élévation). La mesure de la position inertielle est perturbée par un retard pur ($\tau = 0.06s$) dû au rafraîchissement de la matrice de la caméra CCD et modélisé par une approximation de Padé du premier ordre. La dynamique de l'accéléromètre est également introduite dans le modèle sous la forme d'un système du second ordre et la mesure accélérométrique est perturbée par un biais ($\ddot{\theta}_0$) qui est inconnu et peut varier avec la température. La mesure de position relative introduit dans le modèle une dynamique codeur modélisée par un système du premier ordre. Les pivots Bendix sont représentés par un retour de raideur et d'amortissement k_B et f_B .

Le système augmenté est discrétisé à 500 Hz par un bloqueur d'ordre 0. Il est nécessaire d'introduire des filtres anti-repliement, modélisés par des systèmes du second ordre, sur les sorties correspondant aux mesures de la position inertielle

et de l'accélération angulaire. Dans ce qui suit, nous ne tiendrons cependant pas compte du bloqueur et nous travaillerons sur le système augmenté continu. Nous avons été en effet amenés à effectuer des μ -analyses sur le système bouclé dont les outils sont développés pour des systèmes continus. Avec le souci de rester le plus proche possible du système physique, nous conserverons les filtres anti-repliement dans le modèle augmenté.

Le Tableau 6.2 donne les pulsations et amortissements des modes rajoutés aux modes flexibles.

	axe d'élévation		axe d'azimut	
	$\omega_i(rad/s)$	ξ_i	$\omega_i(rad/s)$	ξ_i
Bendix	0.978	0.167	1.813	0.037
Accéléromètre	1244	0.795	1269	0.759
Codeurs	63	réel	63	réel
Proximètre	33	réel	33	réel
FAR	628	0.707	628	0.707

TAB. 6.2 – Modes Bendix et capteurs

Le système augmenté $P(g(s))$ est donc d'ordre 40 (modes flexibles) + 1 (retard pur CCD) + 2 (accéléromètre) + 1 (codeur) + 2 (Bendix) + 4 (filtres anti-repliement) = 50 dans le cas mono-axe et le cas deux axes. L'intérêt de la forme standard est de regrouper dans un schéma comme celui de la Figure 6.4 l'ensemble de la dynamique à piloter (on pourrait y rajouter aussi bien des spectres de bruit).

Remarque :

Nous noterons $G(s) = G(g(s))$, le système augmenté entre la commande u et les trois sorties mesurées y .

6.3 Synthèse de correcteur

La méthodologie choisie pour résoudre ce problème de commande est de type H_2 avec insensibilisation aux variations paramétriques, présentée au chapitre précédent.

Nous procéderons à l'étude de ce système axe par axe dans un premier temps, pour ensuite généraliser les résultats sur le système à deux axes. Nous insisterons plus particulièrement sur l'étude de l'axe d'élévation étant donné que ce transfert identifié mono-entrée/mono-sortie pose le plus de problèmes en ce qui concerne la réduction.

6.3.1 Synthèse sur l'axe d'élévation

6.3.1.1 Synthèse en performance - système statique

Dans un premier temps nous limitons le système $g(s)$ à son gain statique g_0 afin de commander le système en performance sans tenir compte des modes flexibles. La mise en forme du problème de commande, notée $\mathcal{S}(P_0(s)) = \mathcal{S}(P(g_0))$, est présentée Figure 6.5. Par rapport à la mise sous forme standard, nous avons rajouté une

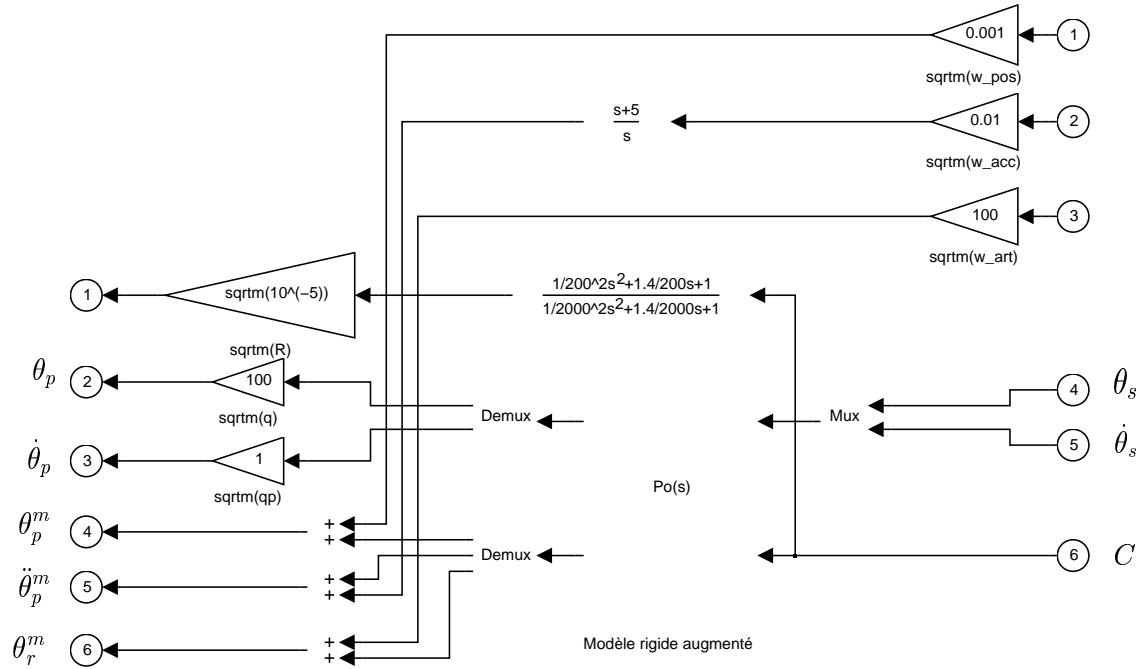


FIG. 6.5 – Mise en forme pour la synthèse en performance sur l'axe d'élévation $\mathcal{S}(P_0(s))$

sortie (sortie 1) pondérant la commande à l'aide du gain R , afin de désingulariser le problème. Les entrées 1 à 3 introduisent des bruits de mesure caractérisés par leurs pondérations statiques. Nous pouvons remarquer que la mesure articulaire est très bruitée, ce qui équivaut à l'ignorer. La position relative (mesure articulaire) n'est pas utilisée car un retour positif sur cette mesure introduit un couplage entre les mouvements du véhicule porteur et ceux du télescope qui peut affecter la fonction de réjection de perturbation. Une pondération basse fréquence du premier ordre est introduite pour spécifier que la loi de commande doit éliminer le biais accélérométrique. Enfin, un filtre passe-haut du second ordre est ajouté à la pondération de la commande afin d'atténuer les modes flexibles (« roll-off »).

La Figure 6.6 présente les fonctions de réjection θ_p/θ_s du système $P_0(s) = P(g_0)$ et du système rebouclé sur le correcteur $\mathcal{F}_l(P_0(s), K_0(s))$, et le lieu de Black du gain

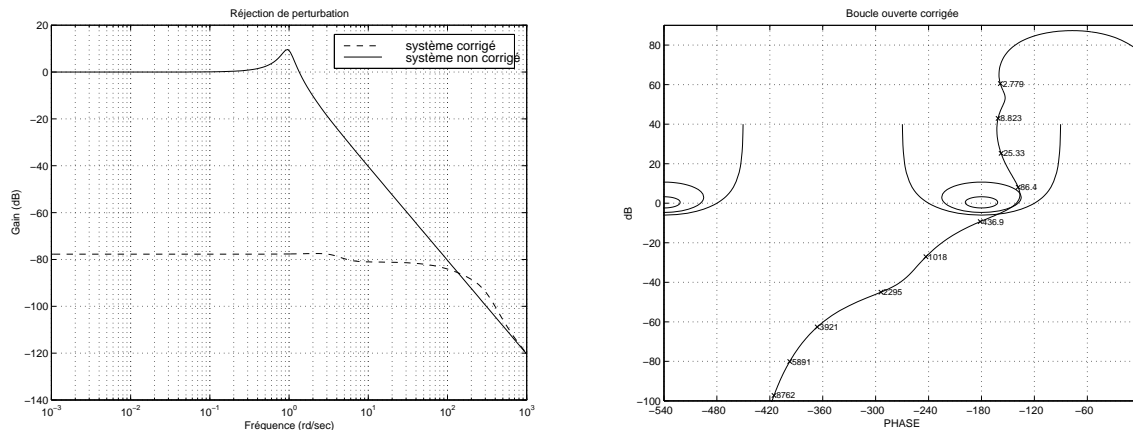


FIG. 6.6 – Synthèse en performance - axe d'élévation

de boucle $L_0(s) = K_0(s)G_0(s)$. Les pondérations ont été réglées de manière à ce que :

- le gain statique de la fonction de réjection θ_p/θ_s soit inférieur -70dB,
- la marge de gain soit supérieure ou égale 3dB et la marge de phase supérieure ou égale 40° ,
- la bande passante soit environ 200 rad/s.

La pondération sur la commande R est ici fixée à $R = 10^{-5}$. Une variation du niveau de performance requis sera traduit par une variation de R . Les autres pondérations seront supposées fixes dans toute la suite de l'étude.

6.3.1.2 Synthèse robuste

La Figure 6.7 présente l'application du correcteur déterminé précédemment sur le système complet. Le correcteur ne stabilise pas le modèle complet. Il convient donc de prendre en compte les modes flexibles dans la synthèse et ceci en conservant les résultats en performance.

Le modèle de structure identifié étant d'ordre 40, il est nécessaire de le réduire pour qu'il soit utilisable dans la synthèse de loi de commande. Les modes à conserver ont été jusqu'ici déterminés à partir d'essais successifs. Pour une synthèse mono-axiale sur l'axe d'élévation, trois modes sont apparus indispensables : le mode numéro 11 à 1162 rad/s qui présente la plus grande amplitude et les deux modes numéro 4 et 6 à 647 et 799 rad/s. En effet, l'absence d'un zéro de transmission entre ces deux fréquences entraîne deux résonances d'amplitude équivalente, mais séparées de 180° de phase. La Figure 6.8 présente le modèle $g_r(s)$ réduit à ces 3 modes qui sera utilisé pour la commande. Le schéma de synthèse de la Figure 6.5 appliqué au modèle identifié réduit (avec les trois modes flexibles) augmenté $P(g_r(s))$ entraîne une simplification des modes flexibles du système à 647 et 799 rad/s par les pôles

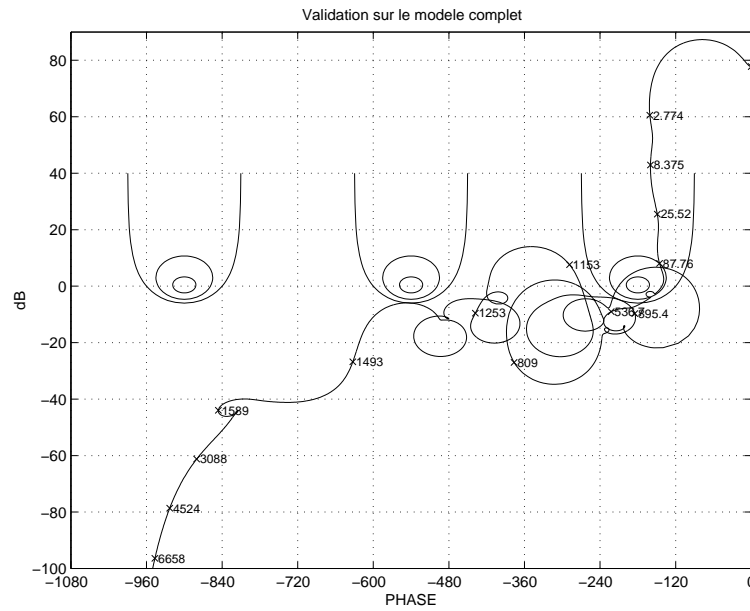


FIG. 6.7 – Application du correcteur "rigide" sur le modèle complet - axe d'élévation

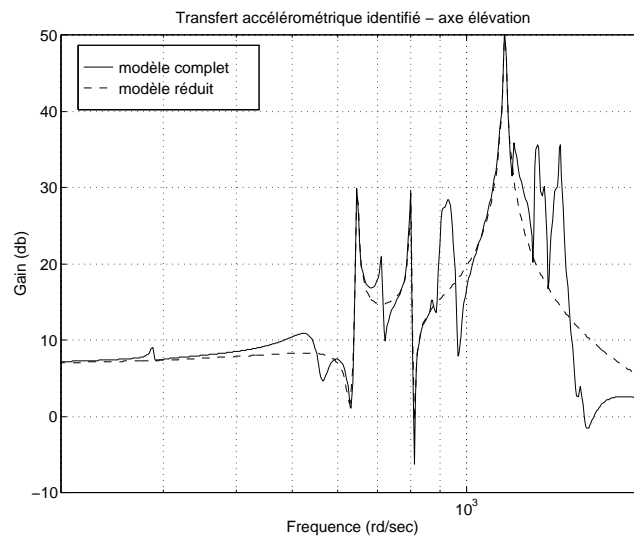


FIG. 6.8 – Transfert accélérométrique identifié - axe d'élévation

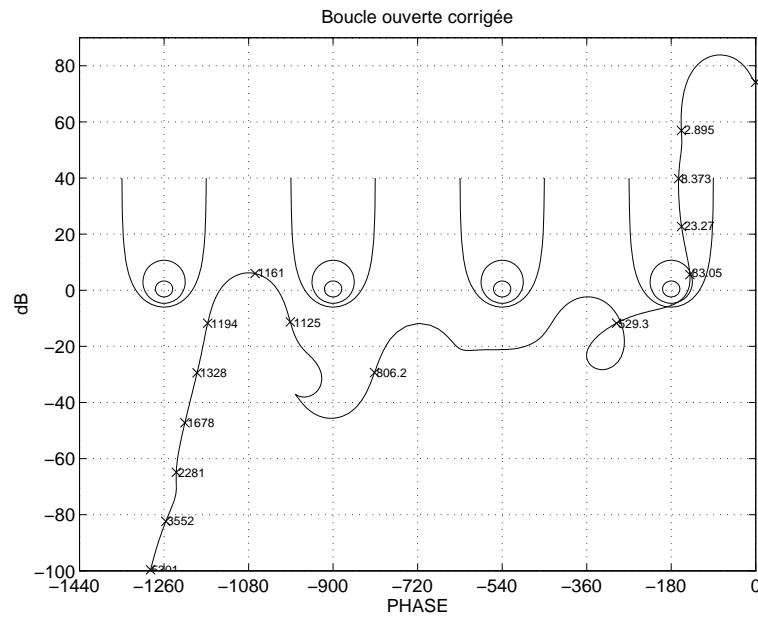


FIG. 6.10 – Synthèse robuste - axe d'élévation

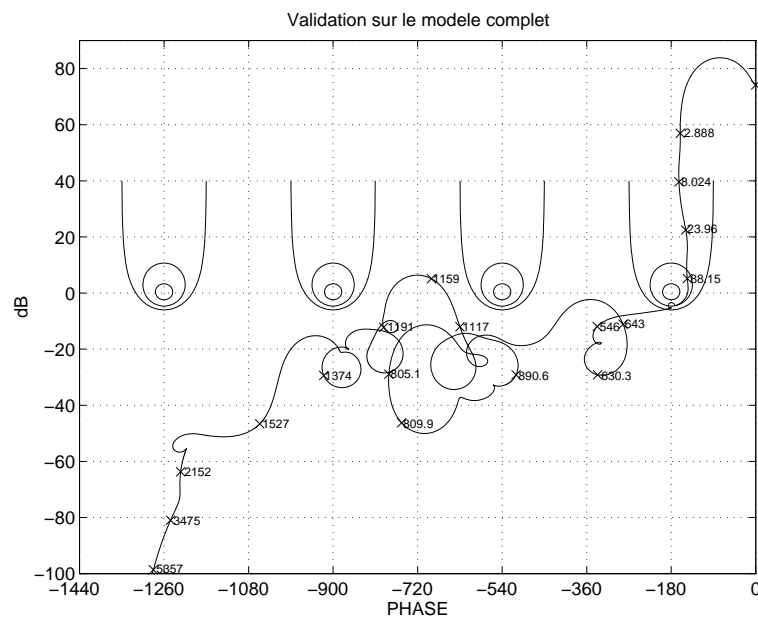


FIG. 6.11 – Validation de la synthèse sur le modèle complet - axe d'élévation

dérations statiques sont ajustées sur le modèle rigide et le filtre passe-haut est déterminé une fois pour toutes. Donc seul le nombre d'entrées auxiliaires et leurs pondérations respectives changent avec l'ordre du modèle réduit.

6.3.2 Synthèse sur l'axe d'azimut

La même méthodologie de synthèse est appliquée sur l'axe d'azimut (cf. Figure 6.12).

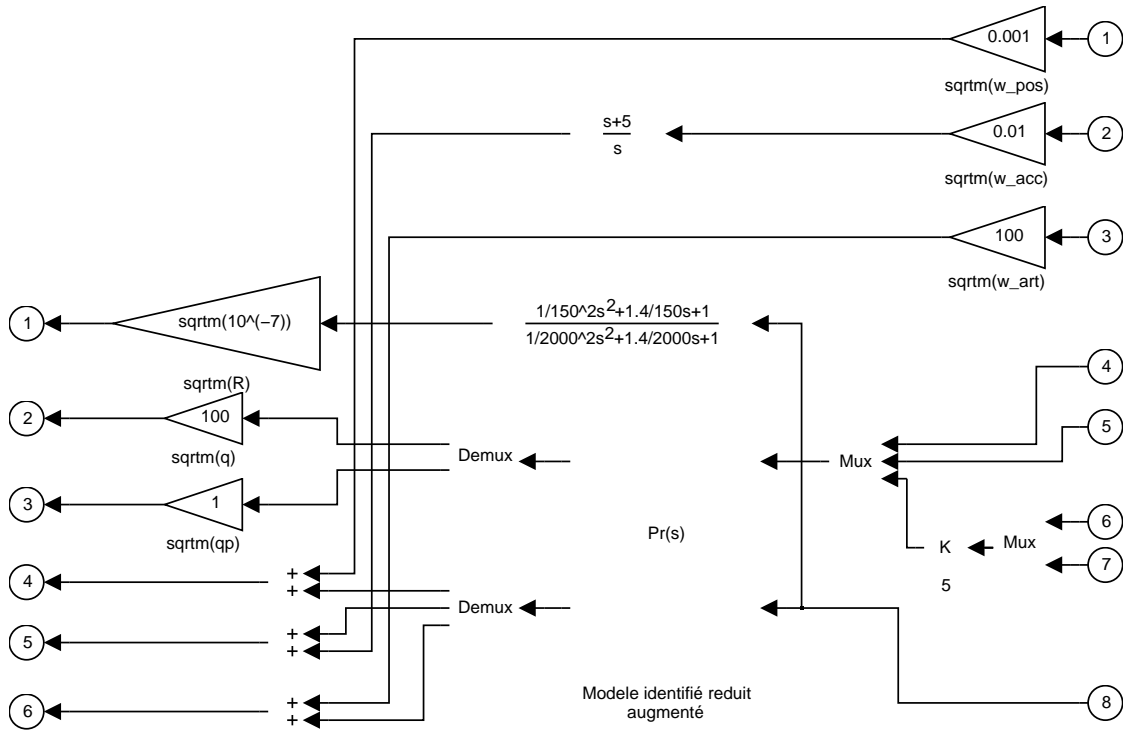
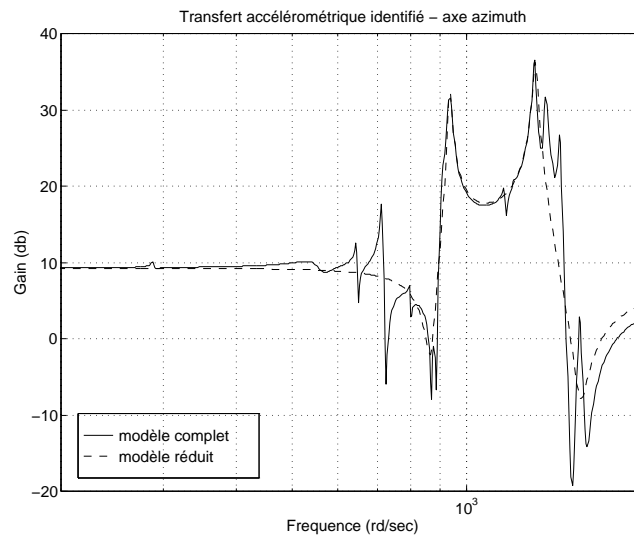
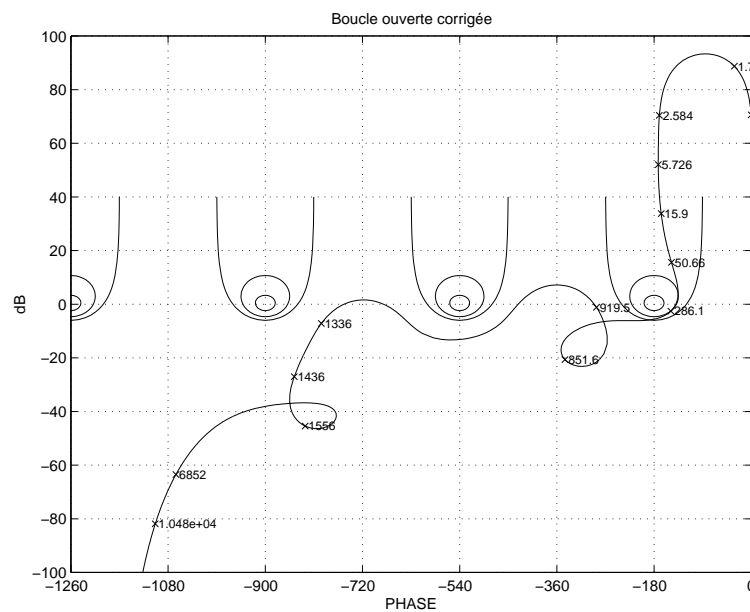


FIG. 6.12 – Mise en forme pour la synthèse robuste - axe d'azimut

Le modèle flexible réduit est d'ordre 4 : les modes numéros 9 et 14 à 933 et 300 rad/s sont conservés (cf. Figure 6.13).

La Figure 6.14 montre la boucle ouverte correcteur/modèle réduit et la Figure 6.15, la validation sur le modèle complet.

Nous remarquons deux changements par rapport au réglage proposé sur l'axe d'élévation : la valeur de la pondération sur la commande $R = 10^{-7}$ et la valeur du gain pour le réglage de l'insensibilité de la loi de commande aux modes flexibles $K = 5I$. Ces modifications vont toutes les deux dans le sens d'une augmentation des performances et de la robustesse aux variations paramétriques sur les modes flexibles et montrent que le compromis performance/robustesse est beaucoup plus

FIG. 6.13 – *Transfert accélérométrique identifié - axe d'azimut*FIG. 6.14 – *Synthèse robuste - axe d'azimut*

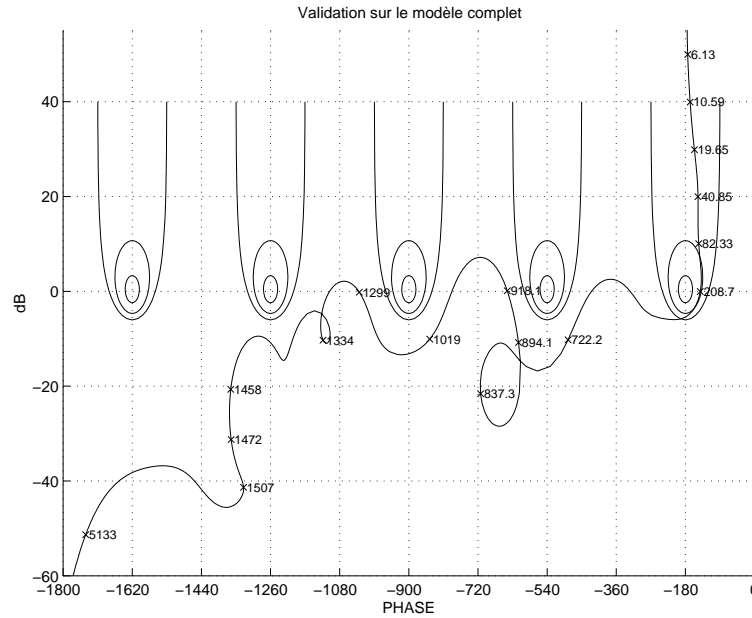


FIG. 6.15 – Validation de la synthèse sur le modèle complet - axe d'azimut

facile à réaliser sur l'axe d'azimut que sur l'axe d'élévation.

6.3.3 Synthèse sur le système à deux axes

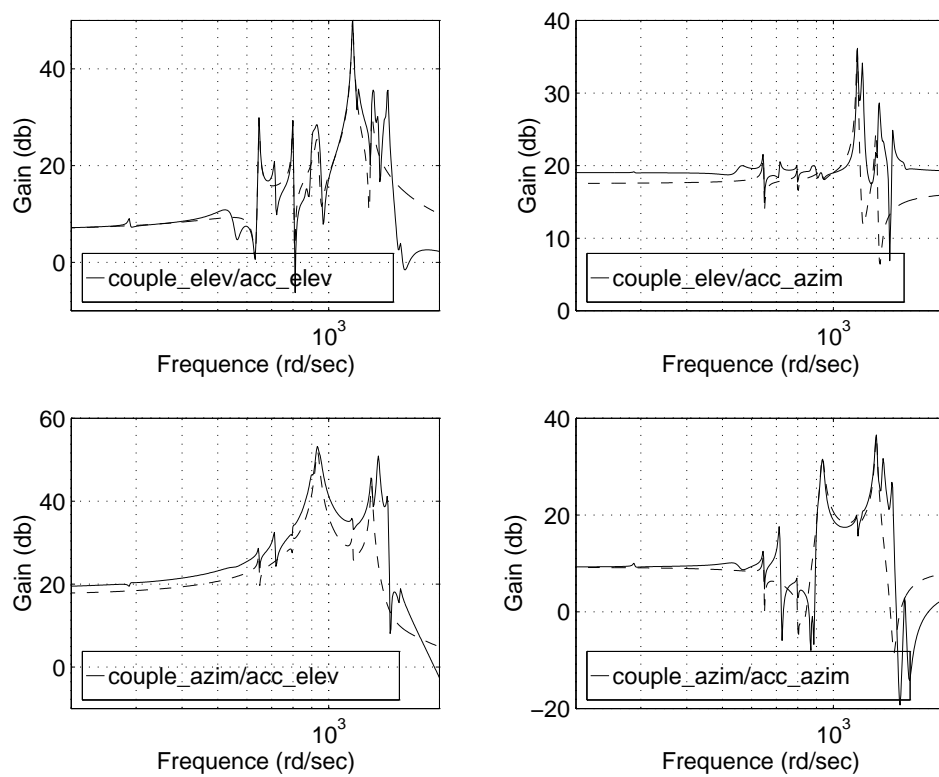
La mise en forme du problème de synthèse multivariable présentée Figure 6.17 est obtenue par parallélisation des deux mises en forme mono-axiales.

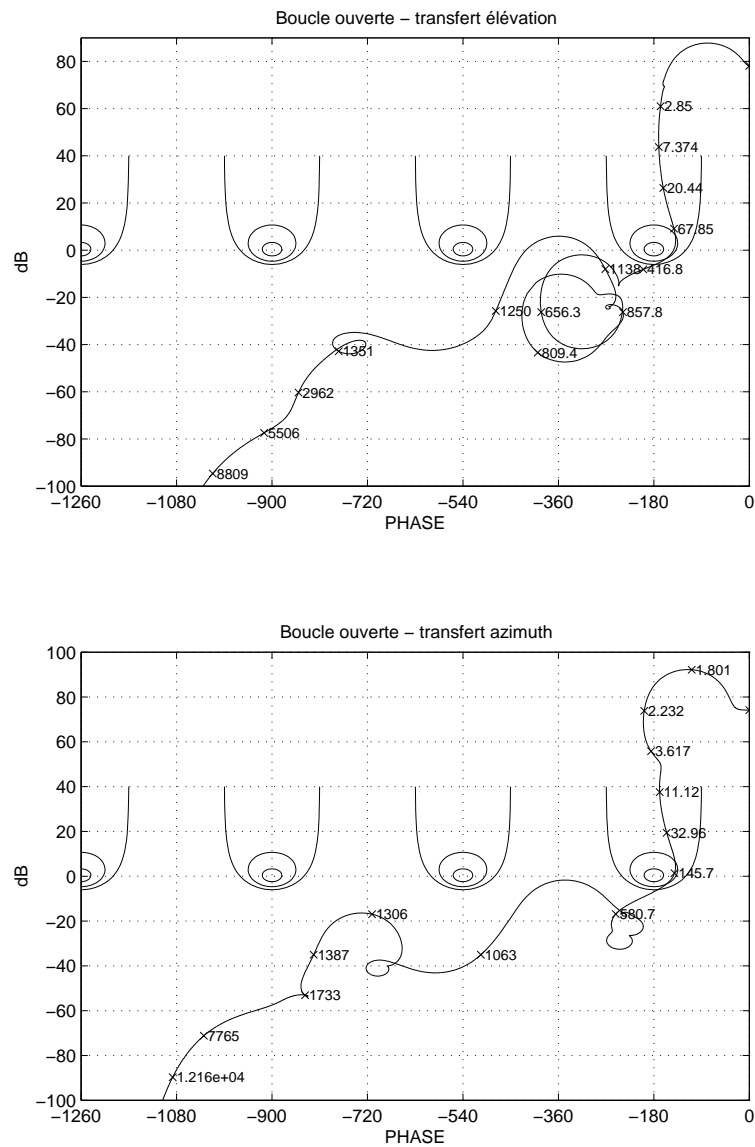
Nous considérons donc un modèle réduit contenant les trois modes retenus dans le modèle réduit d'élévation et les deux modes de celui d'azimut (cf. Figure 6.16).

Le gain K est maintenant relatif au réglage de l'insensibilité de la loi de commande multivariable aux cinq modes flexibles; il a donc fallu uniformiser ce réglage sur les deux axes. Nous avons choisi d'uniformiser par rapport à l'axe d'élévation ($K = I$): les pondérations d'entrée sur l'axe d'azimut ont toutes été multipliées par 0.2.

Il a aussi été nécessaire de réduire les performances demandées sur l'axe d'azimut en prenant $R = 10^{-5}$. En effet, les performances sur l'axe d'azimut qui avaient été poussées sans difficulté dans le cas monovariable, conduisent, en présence de couplages dynamiques, à un correcteur instable.

Les Figures 6.18 et 6.19 montrent les diagrammes de Black relatifs à la synthèse multivariable; ils correspondent à la réponse fréquentielle d'une des deux chaînes ouverte lorsque l'autre est fermée.

FIG. 6.16 – *Transfert accélérométrique identifié - modèle deux axes*

FIG. 6.18 – *Synthèse robuste - modèle deux axes*

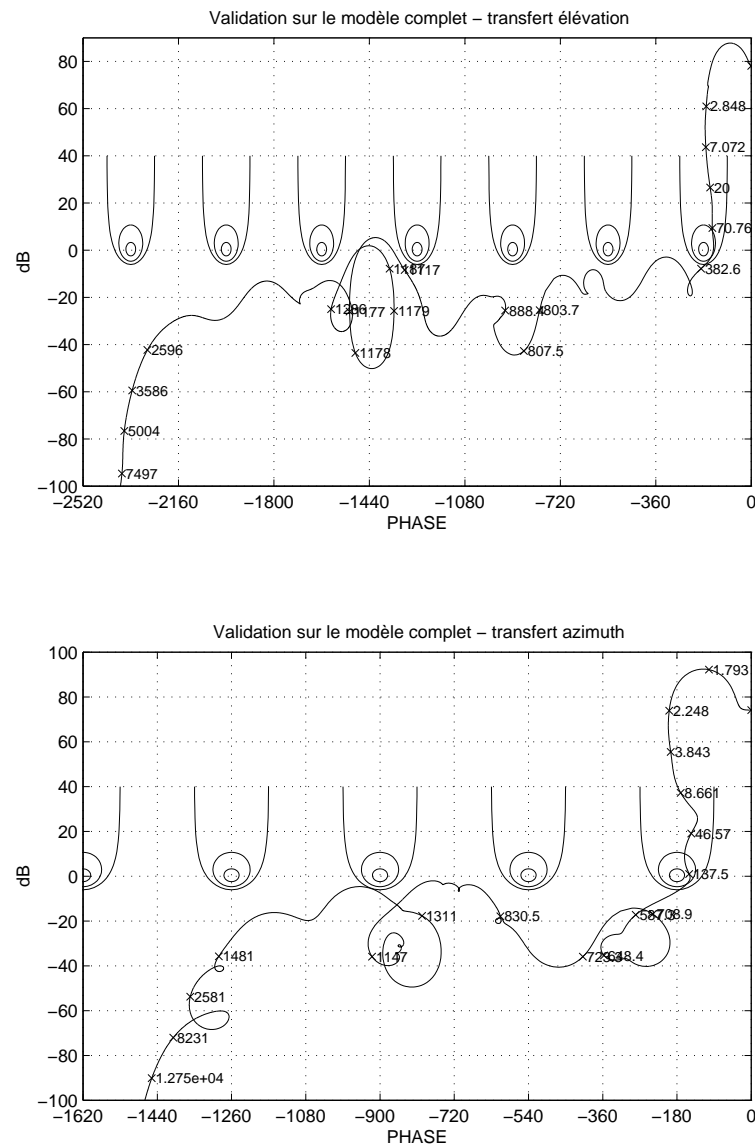


FIG. 6.19 – Validation de la synthèse sur le modèle complet - modèle deux axes

Chapitre 7

COVAS : COmmande de Vol d'un Avion Souple

La démarche proposée dans ce chapitre relatif aux commandes de vol latéral d'un avion souple est récurrente de celle présentée dans le chapitre précédent et repose donc en grande partie sur la forme standard et la synthèse PRLQG. l'intérêt de cette application est l'aspect multivariable, car la spécification de découplage des chaînes de roulis et de lacet est particulièrement dimensionnante pour les commandes de vol.

Enfin un autre point important abordé dans ce chapitre est celui des précommandes. Alors que dans l'exemple précédent, le problème s'énonçait en termes de réjection de perturbations, les réponses aux ordres du pilote et l'allure des transitoires sont ici très importantes. Nous proposons une approche novatrice de synthèse de précommandes dynamiques fondée sur la forme LQG équivalente ([1]). Le lecteur trouvera également dans [8] une technique de synthèse de précommande qui a donné sur cette application des résultats très intéressants.

7.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre une approche en deux étapes pour la synthèse de lois de commande de vol latéral d'un avion souple : la première concerne la synthèse H_2 d'un retour dynamique de sortie satisfaisant les spécifications modales sur le placement des modes rigides (amortissement du roulis hollandais, découplage, ...), les spécifications de stabilité de la structure (stabilité des modes flexibles, voire amortissement des modes flexibles pour accroître le confort passager et la réjection de perturbations) et la spécification de robustesse de ces performances aux différents cas de chargement. L'originalité dans la mise en forme du problème de commande (mise sous forme standard) réside dans le fait que les différents réglages sont in-

dépendants des mesures utilisées. Ceci permet de remettre en cause le choix et le positionnement des capteurs sur le fuselage sans retoucher le réglage de la mise en forme et d'étudier ainsi l'influence de ces mesures sur les performances et la robustesse du système en boucle fermée. La seconde étape utilise un résultat théorique récemment obtenu qui permet de transformer le correcteur obtenu à l'étape précédente en un correcteur LQG exploitant un modèle embarqué judicieusement choisi. Le correcteur à deux degrés de liberté ainsi obtenu permet de satisfaire les spécifications temporelles en réponse aux ordres pilotes.

La seconde section de ce chapitre rappelle brièvement les modèles utilisés et les spécifications du cahier des charges. la troisième aborde les problèmes de réduction de modèles. Les deux dernières parties sont consacrées aux synthèses du retour de sortie et de la précommande respectivement.

7.2 Modèles et spécifications

Les modèles utilisés pour cette étude sont des modèles linéarisés du mouvement latéral de l'avion souple autour de l'équilibre. Il s'agit d'un avion type gros porteur dans lequel la flexibilité a été volontairement dégradée pour évaluer la pertinence des techniques de synthèse de lois de commande sur un cas particulièrement critique. Les modèles se présentent sous forme de représentations d'état d'ordre 68 avec 3 entrées : 2 commandes (braquage des ailerons d_p et braquage de la gouverne de direction d_r) et 1 entrée vent w (perturbation) et 44 mesures : 4 mesures (accélération latérale n_{y_i} , vitesse de roulis p_i , vitesse de lacet r_i , assiette latérale ϕ_i) en 11 points de mesures régulièrement espacés sur le fuselage ($i = 1, \dots, 11$). Le vecteur d'état x se compose de :

- 4 états rigides (angle de lacet β , vitesse de roulis p , vitesse de lacet r , angle de roulis ϕ),
- 36 états représentatifs des 18 modes souples modélisés entre 8 et 80 rd/s (coordonnées généralisées q_j et \dot{q}_j , ($j = 1, \dots, 18$)),
- 20 états secondaires représentatifs de la dynamique des servo-gouvernes et des retards aérodynamiques (couplages aéro-élastiques),
- 8 états sur l'entrée vent introduits pour modéliser la turbulence.

Les modèles sont disponibles en 3 points de vol différents et 6 cas de chargement différents (correspondant à 6 répartitions de la masse à l'intérieur de l'avion), soit 18 modèles. Les différents résultats présentés ici ne porteront que sur 2 modèles en 1 point de vol (modèle « léger » noté G_1 et modèle « lourd » noté G_2). Nous ferons également référence aux modèles rigides correspondants (G_1^r et G_2^r) dans lesquels seuls les 4 états rigides ($x_r = [\beta, p, r, \phi]^T$) ont été conservés. La représentation

d'état d'un modèle $G_i^j(s)$ est notée :

$$G_i^j(s) \equiv \left[\begin{array}{c|c} A_i^j & B_i^j \\ \hline C_i^j & D_i^j \end{array} \right]. \quad (7.1)$$

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, les spécifications sont très complètes et de natures différentes (temporelles, fréquentielles, modales). La liste suivante résume ces différentes spécifications :

- amortissement du roulis hollandais > 0.5 (**S1**),
- gabarit imposé sur la réponse temporelle à un échelon de consigne en β (**S2**),
- gabarit imposé sur la réponse temporelle à un échelon de consigne en p (**S3**),
- découplage des chaînes de roulis et de lacet (**S4**),
- aucune dégradation des amortissements des modes flexibles (**S5**),
- réduire autant que possible les pics de la réponse fréquentielle de l'accélération latérale à l'entrée vent ($w \rightarrow n_{y_i}$) pour accroître le confort des passagers (**S6**),
- les performances précédentes doivent être robuste au cas différents cas de chargement (**S7**),
- utiliser un nombre de mesures raisonnable (entre 4 et 10) (**S8**).

Les spécifications modales et temporelles (**S1**) à (**S4**) sont relatives à la dynamique rigide de l'avion. Si l'on suppose le système rigide, les techniques modales sont particulièrement efficaces pour satisfaire ces spécifications, d'autant plus que nous disposons d'un nombre de sorties (≥ 4) suffisant pour restituer un retour d'état rigide idéal par un retour de sortie statique. Nous ne détaillerons pas ici les techniques modales permettant de calculer un retour d'état assurant le placement exact des modes rigides. Le lecteur pourra examiner la référence [5] pour plus de détail. Un retour d'état rigide K_{x_r} sur les 4 états rigides (x_r) a donc été calculé sur le modèle G_1^r afin de satisfaire les spécifications modales suivantes :

- le mode de roulis hollandais est placé en $-1 + 1.3i$ et est découplé de ϕ ,
- le mode de roulis pur est placé en -1.1 et est découplé de β ,
- le mode spiral est placé en -1 et est découplé de β .

La réponse temporelle présentée figure 7.6 (en noir) relative au modèle rigide G_1^r satisfait (**S1**) à (**S4**) et servira de référence pour apprécier les solutions proposées sur les modèles complets. Il s'agit des réponses des états rigides $\beta(t)$, $\phi(t)$, $p(t)$ et $r(t)$ à des échelons de consignes β_{ref} et p_{ref} ¹. On peut également vérifier sur cette figure que les réponses obtenues sur G_2^r (en gris) sont satisfaisantes (spécification de

1. la commande réellement appliquée s'écrit :

$$\begin{bmatrix} dp \\ dr \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \beta_{ref} \\ \frac{1}{s} p_{ref} \end{bmatrix} - K_{x_r} x_r \quad (7.2)$$

robustesse (S7)). Il n'y a donc pas vraiment de problèmes de robustesse si l'on se borne aux spécifications et aux modèles relatifs au comportement rigide de l'avion.

Nous utiliserons également pour évaluer les différentes synthèses :

- le lieu des racines du transfert de boucle $L(s) = K(s)G(s)$ obtenu en faisant varier le gain de boucle de 0 à 1 simultanément sur les deux chaînes de commandes dp et dr (voir figure 7.7 par exemple),
- les réponses fréquentielles en boucle fermée entre l'entrée turbulence w et les accélérations à l'avant (n_{y1}), au milieu (n_{y6}) et à l'arrière (n_{y11}) de l'avion pour évaluer le critère de confort passager par comparaison avec les réponses en boucle ouverte (voir figure 7.19 par exemple).

Le problème peut donc être maintenant reformulé de la façon suivante : synthétiser une loi de commande satisfaisant les spécifications fréquentielles et modales sur les modes flexibles (S5) et (S6) et permettant de conserver au mieux les performances sur les modes rigides obtenues par le gain modal K_{x_r} , le tout sous la contrainte de robustesse (S7) et la contrainte matérielle (S8).

7.3 Analyse du modèle et réduction

Le nombre de mesures étant supérieur au nombre d'états rigides, il est facile de calculer le retour statique de sortie K_y équivalent, au sens des moindres carrés, au retour d'état K_{x_r} :

$$K_y = K_{x_r}(C_1^r - D_1^r K_{x_r})^+ \quad (7.4)$$

avec la notation de la pseudo-inverse :

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T . \quad (7.5)$$

C_1^r et D_1^r sont les matrices de sorties et de transmission directe du modèle G_1^r restreintes aux seules mesures utilisées. Si l'on ne considère que les 4 mesures n_{y_i} , p_i , r_i et ϕ_i au point de mesure i , on notera ces matrices C_{1i}^r et D_{1i}^r et le gain résultant K_{y_i} .

On peut alors évaluer les couplages entre la dynamique rigide et la dynamique flexible en traçant le lieu des racines de la boucle obtenue lorsque l'on applique ce retour de sortie K_y sur le modèle complet G_1 ou G_2 . Ainsi les figures 7.7 à 7.10 représentent les lieux obtenus lorsque l'on utilise le point de mesure 6 (au centre de l'avion) et le point de mesure 1 (au nez de l'avion) pour les deux configurations massiques (G_1 et G_2). Ces figures mettent en évidence que, dans les deux cas, le retour

où H est une matrice statique de précommande calculée pour assurer en régime permanent la contrainte :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{ref} \\ \frac{1}{s} p_{ref} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

statique de sortie calculé pour placer les modes rigides déstabilise les modes flexibles, mais aussi que les couplages dynamiques *rigide / flexible* sont moins prononcés si l'on utilise les mesures au centre de l'avion :

- les branches issues des modes flexibles sont moins importantes²,
- le placement spécifié sur les modes rigides est nettement plus dégradé par les couplages dynamiques dans le cas des mesures prises au nez de l'avion (K_{y_1}), notamment dans le cas du modèle $G_2(s)$ (cas « lourd ») où le mode de roulis hollandais devient instable (figure 7.10) alors que dans le cas des mesures prises au centre de l'avion, les branches issues des modes rigides sont insensibles au cas de chargement. On retrouve donc ici que la position du point de mesure par rapport aux nœuds de vibrations est déterminante vis-à-vis de la stabilité des différents modes flexibles et des modes rigides.

On notera également que certains modes, notamment le mode flexible numéro 2³, sont insensibles au retour K_y : ce sont des modes locaux quasiment ingouvernables par les commandes dp et dr qui devront être réduits dans le modèle de synthèse.

Enfin, pour évaluer la représentativité des modèles réduits vis à vis des problèmes de commande, nous nous appuierons également sur cette analyse des couplages *rigide / flexible* : le modèle sera réduit tant que l'allure du lieu des racines obtenu avec le modèle réduit sera conservée.

Il est important de réduire de façon découplée les modes flexibles et les modes secondaires. À partir d'une représentation bloc-diagonale réelle, les modes flexibles sont réduits par simple sélection, le sous-espace relatif aux modes secondaires est équilibré et tronqué. Les 4 modes rigides x_r sont systématiquement conservés et les 8 états de turbulence sont éliminés car ingouvernables par les deux commandes dp et dr . Le modèle réduit de synthèse ainsi obtenu est noté $G(s)$. La figure 7.11 donne le lieu des racines obtenu après une réduction à l'ordre 2 de la dynamique secondaire (les états correspondants sont notés $x_p = [x_p^1, x_p^2]^T$) et l'élimination des modes flexibles 2, 14, 15, 16, 17 et 18 du modèle G_1 . Le modèle obtenu $G(s)$ est donc d'ordre 30 associé au vecteur d'état :

$$x = [x_r^T, x_p^T, \dots, q_j, \dot{q}_j, \dots]^T, i = 1, 3, 4, \dots, 13 \quad (7.6)$$

À titre de comparaison, on donne figure 7.12 le lieu obtenu après une réduction équilibrée directe du modèle complet G_1 à l'ordre 30. On peut constater, par comparaison avec les figures 7.11 et 7.7, que la nature des couplages *rigide / flexible* est perturbée par cette réduction alors que le modèle réduit nominal $G(s)$ est bien représentatif des phénomènes dynamiques jusqu'à la pulsation de $18rd/s$, pulsation au delà de laquelle des modes sensibles ont été négligés et devront être contrôlés

2. Sur les lieux des racines, les \times et les $+$ désignent les pôles en boucle ouverte et en boucle fermée respectivement.

3. Les modes flexibles sont classés par pulsations croissantes.

en gain. Il faudra donc adjoindre au cahier des charges une spécifications de *roll-off* pour prévenir le phénomène de *spill-over* sur ces modes négligés.

Le nombre de modes sensibles basse-fréquence que l'on souhaite conservés dans le modèle de synthèse dépend fortement des objectifs de la loi de commande :

- dans le cas d'une loi peu active sur les modes flexibles, on ne conservera que les premiers modes flexibles, voire aucun (voir section 7.4.2),
- dans le cas d'une loi très active qui vise à amortir les modes flexibles situés dans une bande de fréquence donnée, il faudra conserver tous les modes sensibles dans cette bande plus quelques-uns pour les effets de bord (voir section 7.4.3).

7.4 Synthèse H_2 multi-objectifs d'un retour dynamique de sortie

7.4.1 La forme standard de passage

La *forme standard de passage* a été introduite dans la section 5.3.1. Nous rappelons ici la propriété principale de cette forme standard particulière.

Considérons donc un système défini par la représentation d'état générale (n états, m commandes, p sorties) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

et la forme standard $P_p(s)$ dite *de passage*, associée à ce système :

$$P_p(s) \quad / \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} A & K_f & B \\ \hline K_c & 0 & I_m \\ \hline C & I_p & D \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

où K_c et K_f désignent respectivement un gain de retour d'état et un gain d'estimation synthétisés pour satisfaire certaines spécifications par une technique appropriée (modale, LQG, ...). Nous supposons de plus que $A - BK_c$ et $A - K_f C$ sont stables.

Alors, **les synthèses H_2 et H_∞ menées sur la forme standard $P_p(s)$ fournissent la même solution. Cette solution coïncide avec le correcteur LQG (noté : $K_{LQG}(s)$) construit sur K_c et K_f et s'écrit :**

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ u \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A - BK_c - K_f C + K_f D K_c}{-K_c} & K_f \\ \hline & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$

Cette *forme standard de passage* utilisée en tant que telle ne présente aucun intérêt puisqu'il faut connaître les gains K_c et K_f pour mettre en forme le problème

de commande et retrouver finalement le correcteur LQG initial. Par contre, partant d'un retour d'état K_c satisfaisant certaines spécifications temporelles relatives à certains états du système, elle peut être très utile pour amorcer une mise en forme qui sera complétée par des pondérations fréquentielles complémentaires des précédentes spécifications temporelles.

Dans notre application on dispose en fait d'un gain de retour d'état :

$$K = [K_{x_r}, 0, \dots, 0] \quad (7.10)$$

relatif à l'état x du modèle réduit G (équation 7.6) et calculé pour placer les quatre modes rigides. Le gain de Kalman n'est pas spécifié. La forme standard que nous allons exploiter est présentée figure 7.1 et se décompose de la façon suivante :

- une sortie contrôlée $z_1 = u + Kx$ pour orienter la synthèse vers la solution rigide de référence,
- une sortie contrôlée z_2 qui permet de spécifier un « roll-off » d'ordre i à partir de la pulsation ω ,
- des bruits de mesure w_1 réglés marginalement faibles ($\varepsilon = 0.001$) car les mesures sont suffisantes pour estimer correctement les états rigides. Ce réglage entraîne des pôles rapides dans le correcteur que l'on peut réduire après la synthèse,
- des conditions initiales w_2 sur les 4 états rigides ($V = [I_{4 \times 4}, 0, \dots, 0]$).

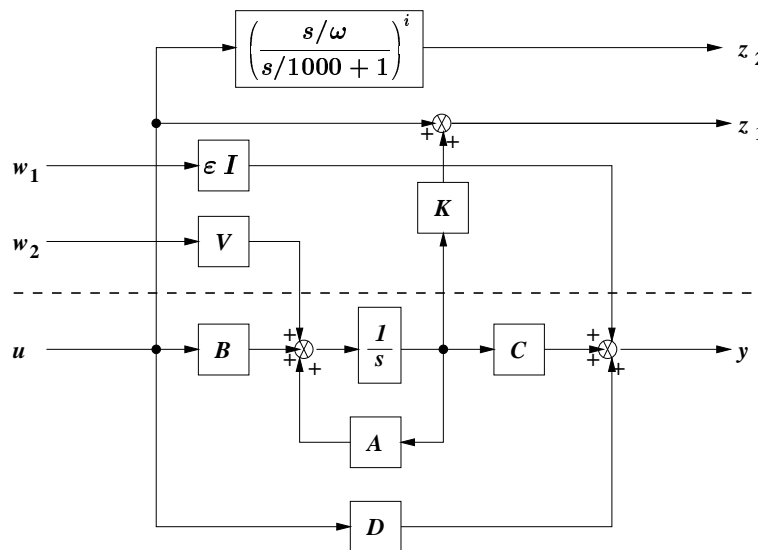


FIG. 7.1 – Mise en forme pour les performances rigides et le « roll-off ».

La sortie z_2 pondère en fait la dérivée à l'ordre i de la commande u . Cette formulation du « roll-off » présente l'intérêt de ne pas avoir à spécifier l'allure de la

coupure comme cela est le cas avec les filtres passe-haut habituellement introduits sur le signal de commande : le transfert *direct* en boucle ouverte entre u et $[z_1 \ z_2]^T$ s'écrit⁴ $[1 \ (s/\omega)^i]^T$ dont le tracé de la valeur singulière présente bien les caractéristiques de « roll-off » recherchées c'est-à-dire un gain de 1 en basse fréquence et une pente de 20 dB/dec au delà de la pulsation ω . Enfin, on peut également se demander pourquoi la spécification de « roll-off » n'a pas été introduite sur les bruits de mesures, ce qui aurait permis de ne conserver que la sortie régulée z_1 et d'assurer *parfaitement* les spécifications modales sur les modes rigides (propriété de la *forme standard de passage*). La raison est simple : étant donné qu'il y a plus de mesures que de commandes et que le jeu de mesures utilisées peut être éventuellement modifié (4 à 10 mesures parmi 44), nous avons choisi d'introduire la spécification de « roll-off » sur les commandes⁵ plutôt que sur les mesures afin :

- de réduire l'ordre de la forme standard (et donc du correcteur),
- d'avoir un réglage indépendant du jeu de mesures utilisées, puisque le seul paramètre de réglage de la forme standard qu'il faudrait adapter à un éventuel nouveau jeu de mesures est la taille du bruit de mesure w_1 dont le réglage est marginal (εI) et dont l'influence sur la synthèse est masquée par la réduction a posteriori des modes rapides du correcteur.

7.4.2 Synthèse minimaliste

La synthèse minimaliste consiste à appliquer la forme standard précédente (figure 7.1) au modèle rigide $G_1^r(s)$, soit :

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1^r & B_1^r \\ \hline C_1^r & D_1^r \end{array} \right], K = K_{x_r}, V = I_{4 \times 4}$$

et à augmenter i et réduire ω jusqu'à ce que le correcteur obtenu stabilise le modèle complet $G_1(s)$. En fait on réduit ω tant que les performances rigides ne sont pas trop dégradées puis on augmente i si la valeur de ω obtenue est trop proche de la pulsation naturelle des modes rigides. Le choix :

$$i = 3, \omega = \pi \text{ rad/s} \quad (0.5 \text{ Hz}).$$

conduit à une solution intéressante. Le correcteur obtenu est d'ordre 10 ($4+2 \times 3$) et exhibe 4 valeurs propres très rapides (voir section précédente) que l'on réduit dans la base modale du correcteur (on adapte alors la transmission directe pour que le gain statique du correcteur soit conservé). Les valeurs singulières du correcteur d'ordre

4. Ce calcul de principe ne tient pas compte des pôles rapides (-1000 rad/s) introduits dans la pseudo-dérivation pour des questions de réalisabilité.

5. Sur la figure 7.1, il y a autant de filtres que $\left(\frac{s/\omega}{s/1000+1}\right)^i$ de signaux de commande (soit 2).

6 finalement obtenu, noté $K_0(s)$, sont représentées figure 7.2 et confirment que la spécification de « roll-off » est bien satisfaite. Les analyses de ce correcteur sur le lieu des racines et en simulation sur les modèles complets sont présentées figures 7.13 et 7.14 respectivement :

- sur le lieu des racines (figure 7.13), nous pouvons constater que la stabilité des modes flexibles est assurée. Les pôles du correcteur, repérés par des \times grises, sont proches des pôles rigides du système,
- sur les réponses temporelles (figure 7.14), les performances rigides obtenues sont encore satisfaisantes. On notera toutefois, sur le modèle G_2 , une réponse de ϕ à déphasage non-minimal en réponse à un échelon de β_{ref} qui devra être corrigée par une précommande dynamique (voir section 7.5) pour améliorer les qualités de vol.

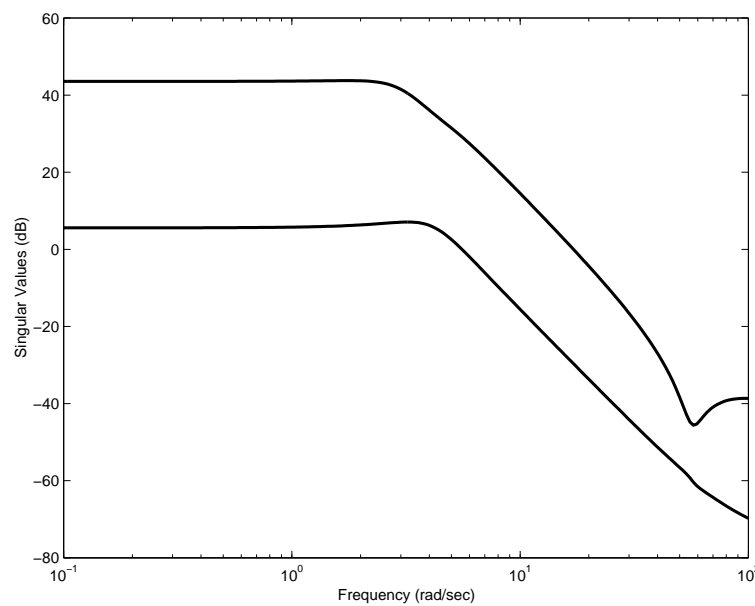


FIG. 7.2 – Valeurs singulières de $K_0(s)$.

7.4.3 Synthèse active

La synthèse précédente n'a aucune action sur les modes flexibles, cela se traduit sur le lieu des racines par l'absence de branches issues des modes flexibles : ils sont à la même place en boucle ouverte et en boucle fermée. La synthèse minimaliste ne permet donc pas de réduire les pics sur la réponse fréquentielle du transfert entre la turbulence w et les mesures accélérométriques et donc d'améliorer le critère de confort. Dans cette section, nous allons chercher à agir sur les modes flexibles ou plus

exactement à amortir ces modes en boucle fermée. Nous allons pour cela relâcher la spécification de « roll-off » afin d'obtenir une commande *active* jusqu'à 3 Hz ; soit :

$$i = 2, \omega = 6\pi \text{ rad/s}.$$

et prendre en compte, dans le modèle de synthèse, les modes flexibles sensibles dans cette bande de fréquences. Le modèle de synthèse correspond donc maintenant au modèle réduit $G(s)$ d'ordre 30 issue de l'étape de réduction et dans lequel 12 modes flexibles ont été pris en compte (voir équation 7.6).

L'application directe de la forme standard 7.1 ne permet pas d'amortir les modes flexibles car les états flexibles (q_j et \dot{q}_j , $i = 1, 3, 4, \dots, 13$) ne sont pas pondérés dans les sorties contrôlées z_1 et z_2 étant donné la structure du gain K (équation 7.10). Il faut pour cela enrichir la forme standard selon la figure 7.3 dans laquelle la sortie vectorielle z_3 permet de pondérer directement les états dérivés \dot{q}_j des 12 modes flexibles et d'agir directement sur l'amortissement des modes flexibles par le biais d'une pondération statique ρ_s ⁶.

$$\text{A.N. } \rho_s = \text{diag}(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 0, 0).$$

On peut alors constater que la solution ainsi obtenue n'est pas robuste aux différents cas de chargement et ne supporte pas les variations sur les caractéristiques (fréquences, amortissements) des modes flexibles : le correcteur présente en fait des zéros sur les pôles flexibles du système. Cela traduit la tendance naturelle des techniques de synthèse optimales à inverser localement le système. Il faut donc spécifier dans la forme standard que le modèle est incertain par la prise en compte d'entrées perturbatrices w_3 et d'une pondération ρ_e . Nous avons choisi pour cela de prendre en compte des variations sur les amortissements des modes flexibles : les 12 entrées w_3 et les 12 sorties z_3 sont en fait le résultat de la modélisation sous forme LFT de ces variations paramétriques complétées respectivement des pondérations statiques ρ_e (identique sur tous les modes) et ρ_s .

$$\text{A.N. } \rho_e = 0.2.$$

La représentation sous forme LFT des variations additives δ_{ξ_j} sur les amortissements des modes flexibles est donnée par l'équation générale 5.6 introduite au chapitre 5 :

On reconnaît ici la méthode PRLQG ([20], [2]), exprimée sous forme standard, qui consiste à désensibiliser en entrée la synthèse en augmentant ρ_e tant que les performances ne sont pas trop dégradées. Afin d'illustrer l'effet de ce paramètre de désensibilisation ρ_e , nous proposons les analyses suivantes :

- les lieux des racines présentés figures 7.15 (cas léger) et 7.16 (cas lourd) correspondent au réglage nominal. On note $K_1(s)$ le correcteur obtenu.

6. Les modes flexibles en dessous de la pulsation ω spécifiée pour le « roll-off » sont pondérés de façon identique, les modes juste au-delà de cette pulsation ne sont pas pondérés.

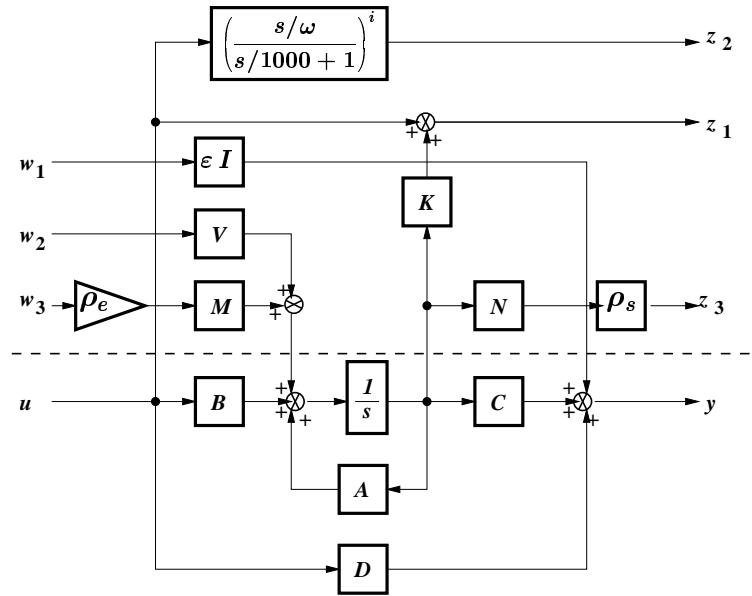


FIG. 7.3 – Mise en forme pour la commande active.

- les lieux des racines présentés figures 7.17 (cas léger) et 7.18 (cas lourd) correspondent au réglage $\rho_e = 0.02$ (soit un dixième de la valeur nominale). On note $K_2(s)$ le correcteur obtenu.

On peut constater que dans le premier cas on introduit effectivement de l'amortissement sur les modes flexibles et que cette propriété est robuste au cas de chargement alors que dans le second, elle est vérifiée sur le cas de masse de synthèse (G_1) mais ne l'est plus sur le modèle G_2 où la solution obtenue est en limite de stabilité autour des modes flexibles 1 et 3.

Les réponses en confort de la solution nominale K_1 sont présentées figures 7.19 et 7.20. On peut également constater que l'atténuation en boucle fermée des pics dominants est robuste au cas de chargement.

Enfin nous rappelons que le réglage de la forme standard obtenue (figure 7.3) est indépendant des mesures utilisées. Cette propriété est particulièrement intéressante pour ce problème où le jeu de mesures doit pouvoir être remis en cause. Les résultats qui sont présentés ici (figures 7.15 à 7.22) ont été obtenus avec un jeu de 6 mesures ($n_{y7}, n_{y9}, p_6, r_1, r_{11}, \phi_6$) sélectionnées par une analyse de la sensibilité au chargement des participations modales sur les mesures [3].

7.5 Synthèse d'un correcteur à 2 ddl par la forme LQG équivalente

La solution précédente est particulièrement intéressante pour ces propriétés de robustesse en performance relatives à l'amortissement introduit sur les modes flexibles. Par contre les réponses temporelles présentées figures 7.21 ne sont plus admissibles du fait du dépassement en β et du déphasage non-minimal sur ϕ en réponse à un échelon de β_{ref} . Il faut donc synthétiser une précommande dynamique permettant de corriger ces défauts. Ce dernier point est un aspect important et revêt une importance toute particulière dans le domaine des commandes de vol.

La démarche que nous proposons ici consiste à reformuler le retour de sortie calculé précédemment comme un correcteur LQG sur un modèle dit *embarqué* puisqu'il sera intégré en vol selon la structure du correcteur présenté figure 7.4 (voir aussi [1]). Nous avons choisi d'utiliser ici le modèle rigide comme modèle embarqué. L'ingouvernabilité des modes d'estimation des états rigides par l'entrée e propre à la structure LQG entraîne une effet de précommande dynamique⁷. Il n'est donc pas nécessaire d'introduire des dynamiques supplémentaires tel que nous aurions du le faire avec une structure de commande où la partie précommande et la partie retour de sortie sont découplées. La structure que nous obtenons est dite à 2 degrés de liberté.

Le calcul des paramètres K_c , K_f et $Q(s)$ qui définissent entièrement le correcteur est détaillé dans [1]. Nous rappelons qu'il existe plusieurs solutions selon le choix de la répartition des valeurs propres de la boucle fermée entre la dynamique de commande ($\text{spec}(A - BK_c)$), la dynamique d'estimation ($\text{spec}(A - K_fC)$) et la dynamique du paramètre de Youla ($\text{spec}(A_Q)$). Le transfert entre e et u , c'est-à-dire la précommande, dépend directement de ce choix. L'éventail de solutions peut-être réduite selon les considérations suivantes :

- choisir une ensemble de valeurs propres auto-conjugées pour trouver une paramétrisation réelle,
- une valeur propre ingouvernable dans le système doit être sélectionnée dans la dynamique de commande,
- une valeur propre inobservable dans le système doit être sélectionnée dans la dynamique d'estimation,
- enfin, on choisit couramment la dynamique d'estimation ($\text{spec}(A - K_fC)$) plus rapide que la dynamique de commande ($\text{spec}(A - BK_c)$).

⁷. le signal e réellement appliqué s'écrit :

$$e = H \begin{bmatrix} \beta_{ref} \\ \frac{1}{s} p_{ref} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

où H est la matrice statique de précommande calculée pour assurer le régime permanent désiré

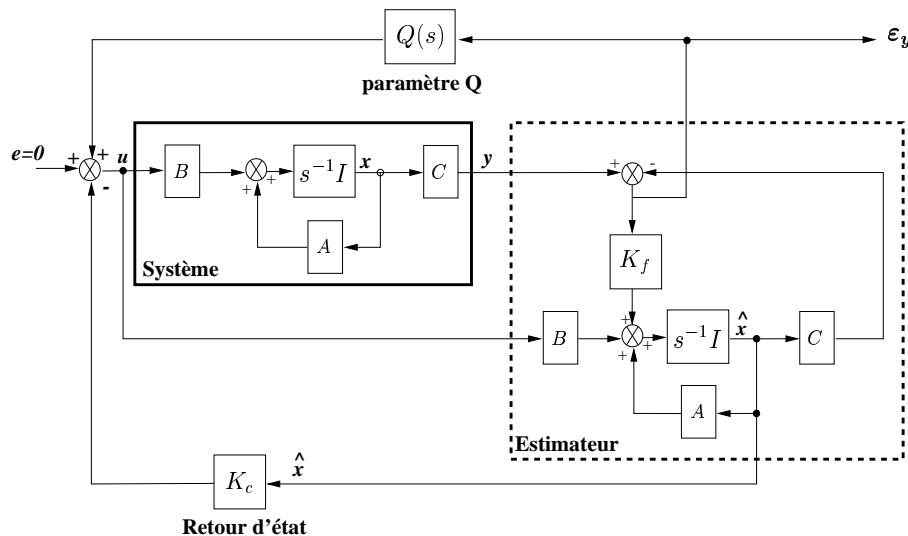


FIG. 7.4 – La paramétrisation de YOULA sur la structure LQG.

Le correcteur nominal $K_1(s)$ a été préalablement réduit à l'ordre 20 (troncature dans la base équilibrée) puis mis sous forme LQG sur le modèle rigide d'ordre 4 (le paramètre de Youla est donc d'ordre 16). La répartition des valeurs propres que nous avons choisie est présentée sur la figure 7.5. La simulation obtenue est présentée figure 7.22 : nous pouvons constater que le dépassement sur β est maintenant moins important, mais surtout que le déphasage non-minimal sur ϕ a maintenant disparu. Le transitoire est maintenant conforme aux exigences requises pour les qualités de vol.

7.6 Conclusions

Nous avons présenté dans ce chapitre une approche fondée sur la forme standard pour la synthèse de lois de commande de vol latéral d'un avion souple. Les propriétés de la forme standard ont été utilisées pour faire apparaître des paramètres de réglage haut-niveau permettant de maîtriser les compromis entre les différentes spécifications du cahier des charges en termes de robustesse et de performances. La notion de *forme standard de passage* a permis de prendre en compte les spécification de découplage des chaînes de roulis et de lacet dans cette approche fréquentielle de la forme standard telle qu'elle est couramment utilisée pour les synthèses H_2 et H_∞ .

La technique de mise sous forme LQG a permis de reformuler le correcteur obtenu comme un correcteur à 2 ddls à structure LQG sur le modèle rigide (modèle embarqué). La précommande dynamique associée à cette structure permet de maî-

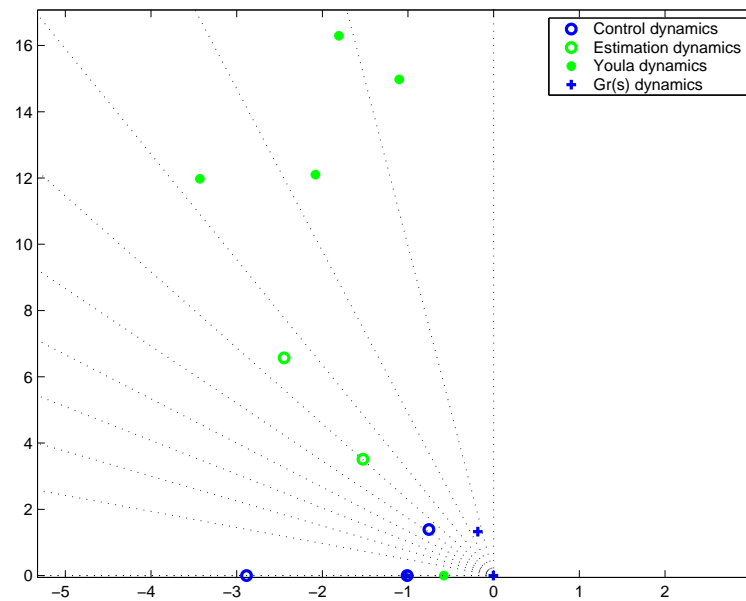


FIG. 7.5 – *Distribution des valeurs propres (autour des modes rigides).*

triser les transitoires des modes rigides sur les réponses temporelles aux ordres du pilotes. La participation des modes souples sur les réponses, bien que les réponses en confort soient satisfaisantes, est encore trop importante (voir figure 7.22) mais ces premiers résultats sont encourageants pour appliquer cette technique sur des modèles embarqués plus représentatifs que le modèle rigide.

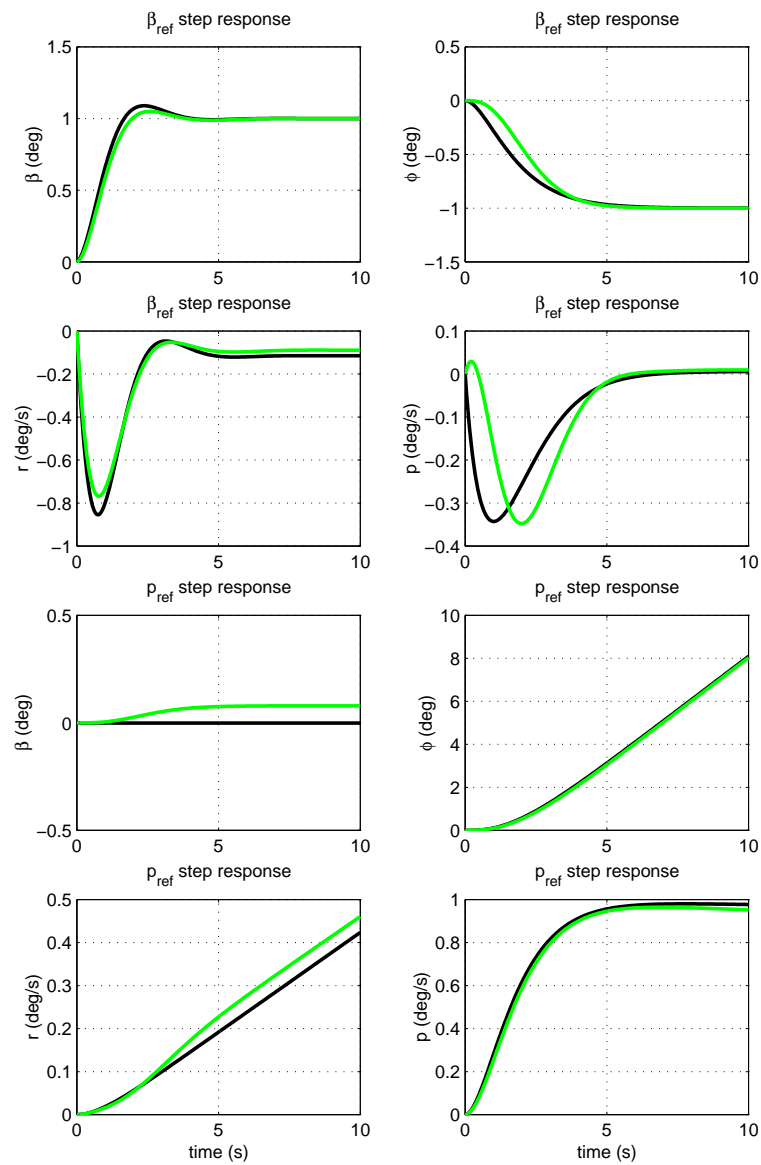
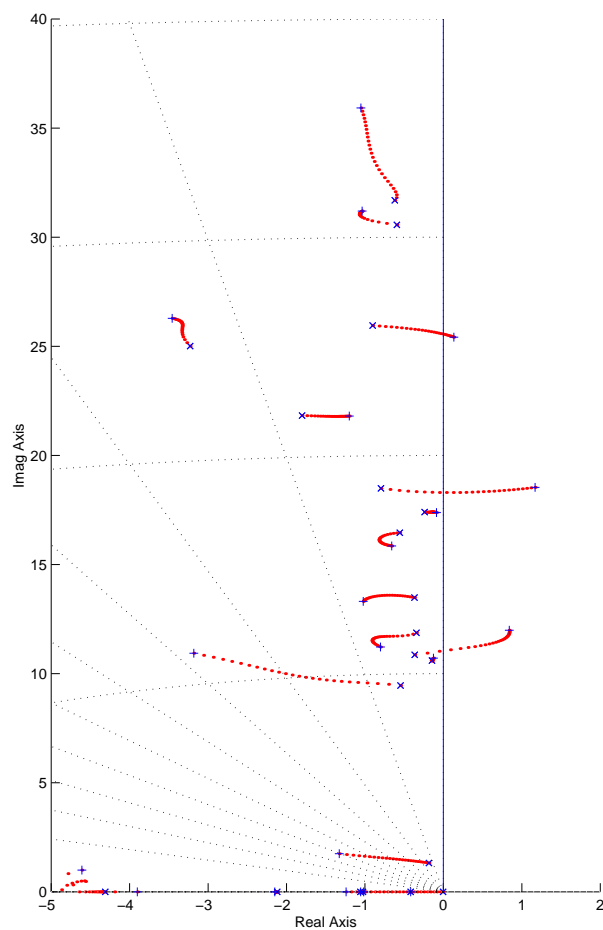
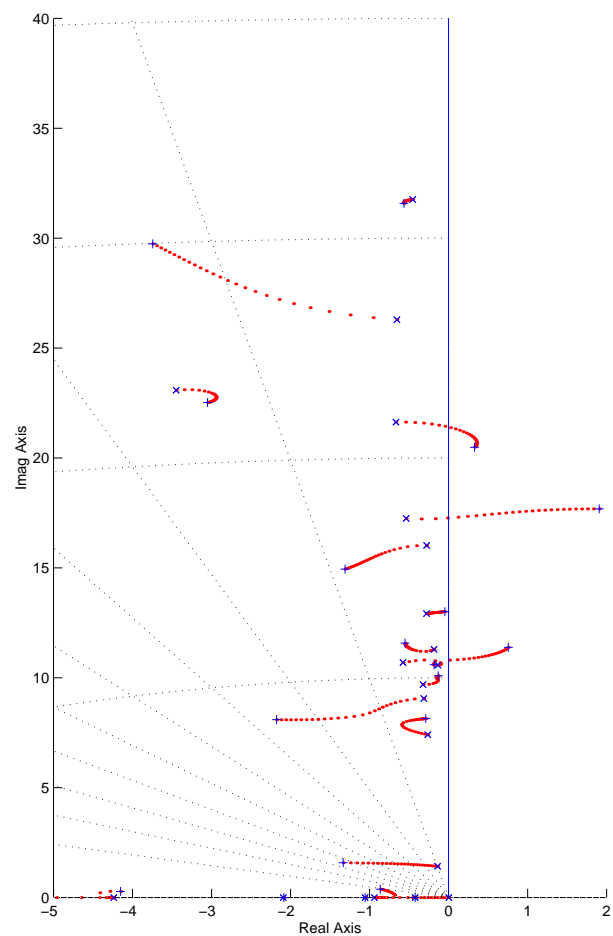
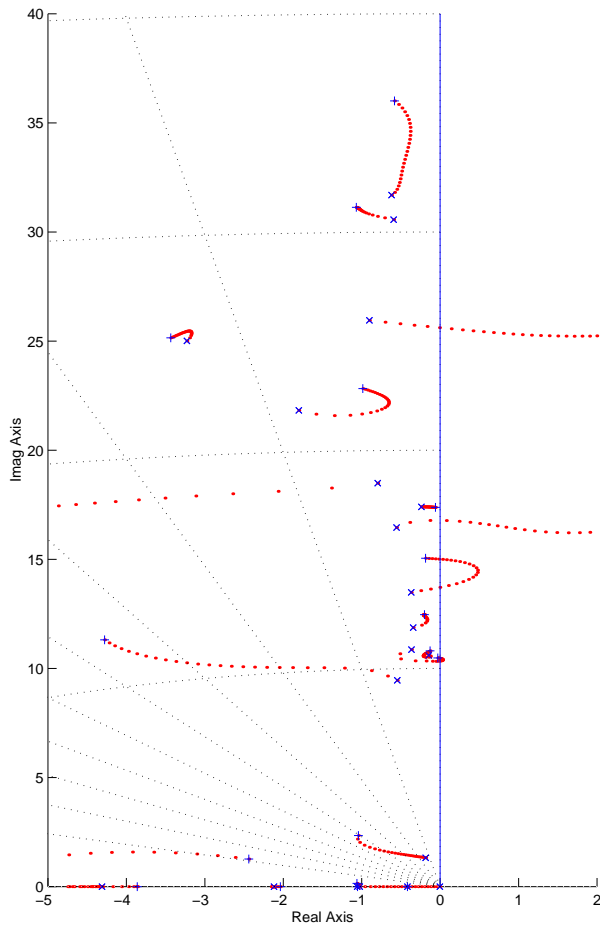
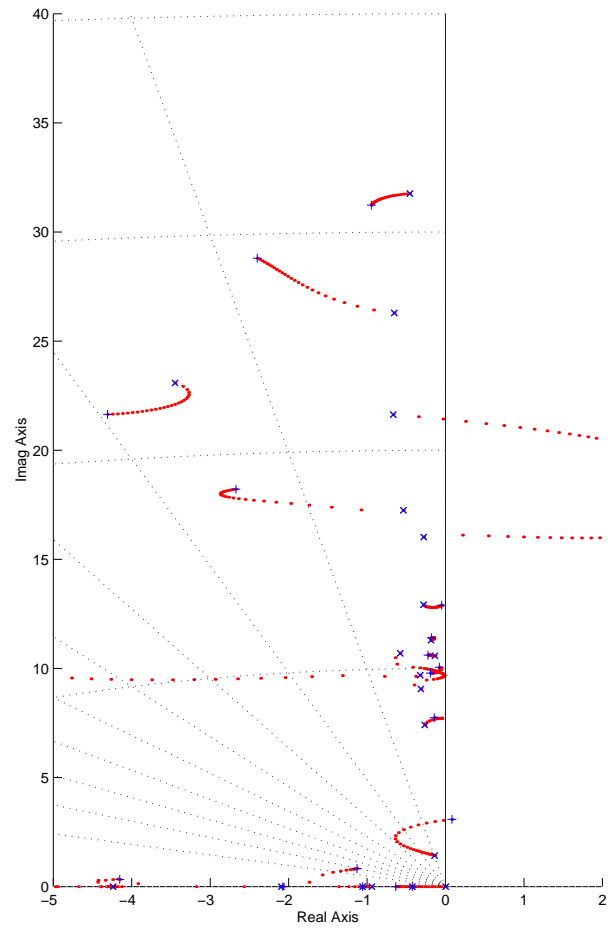
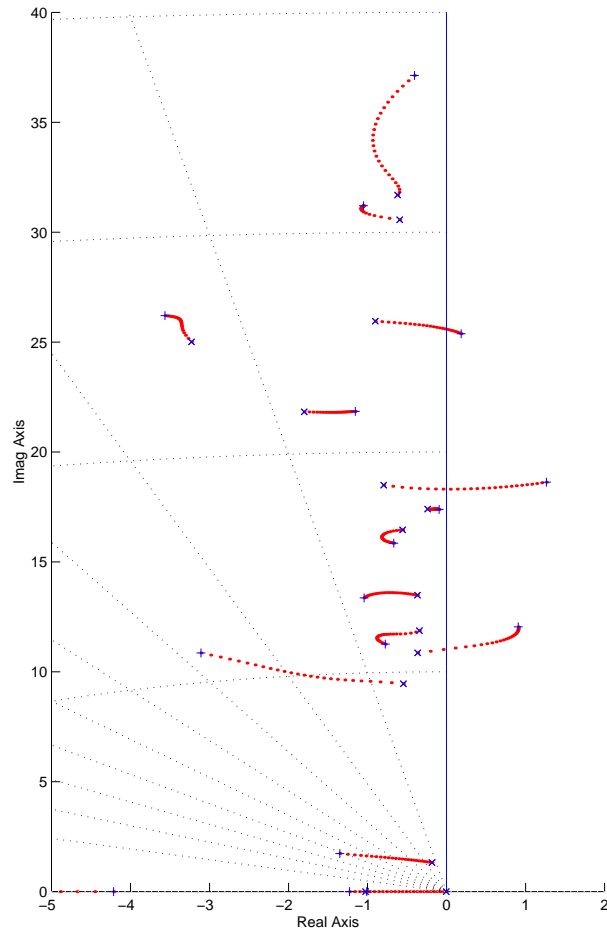
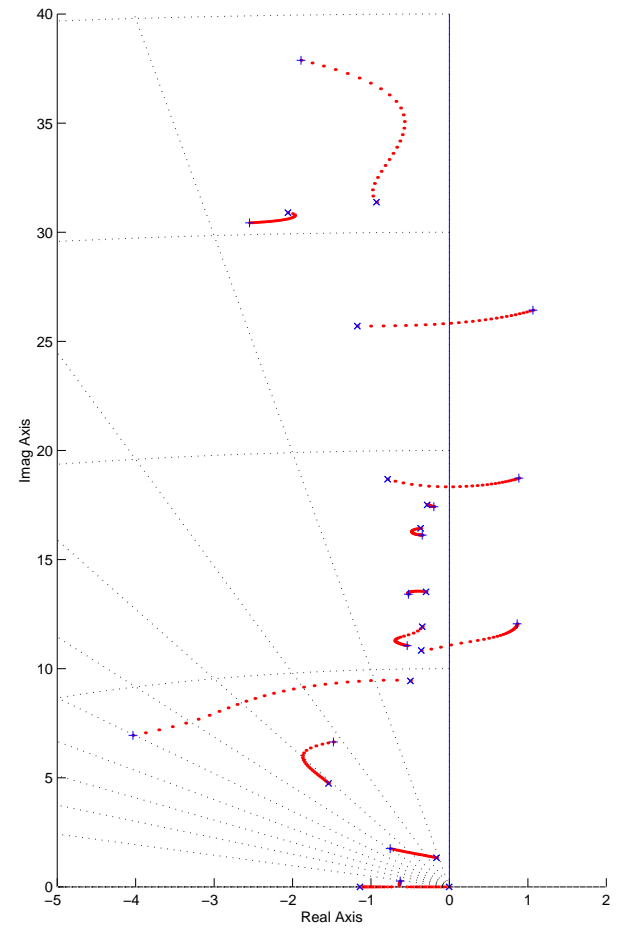
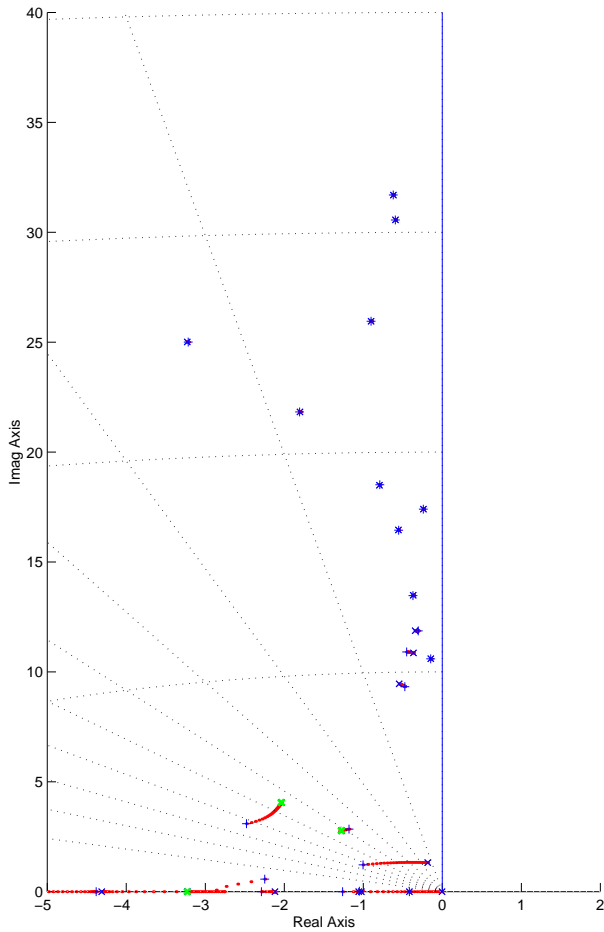
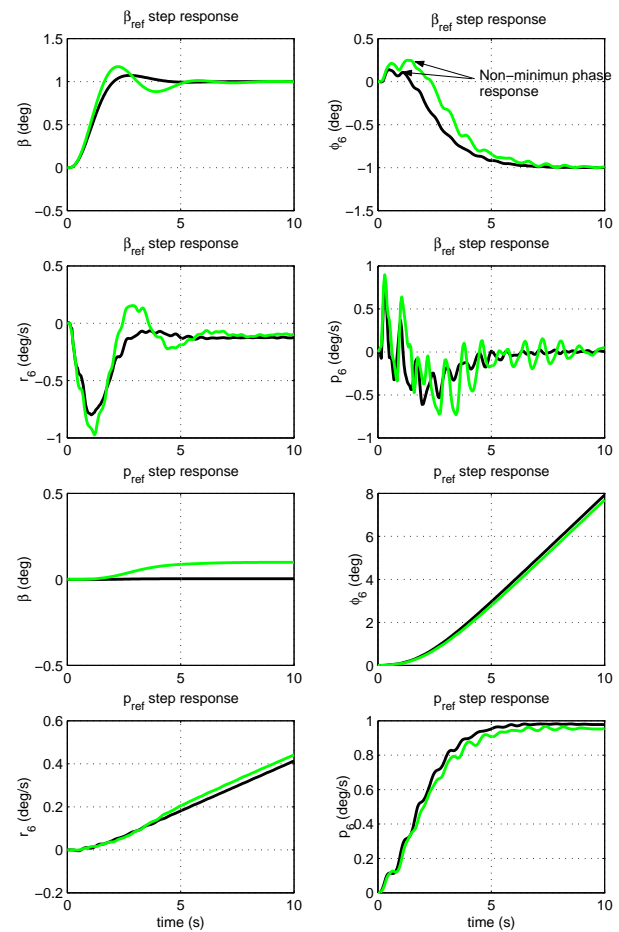


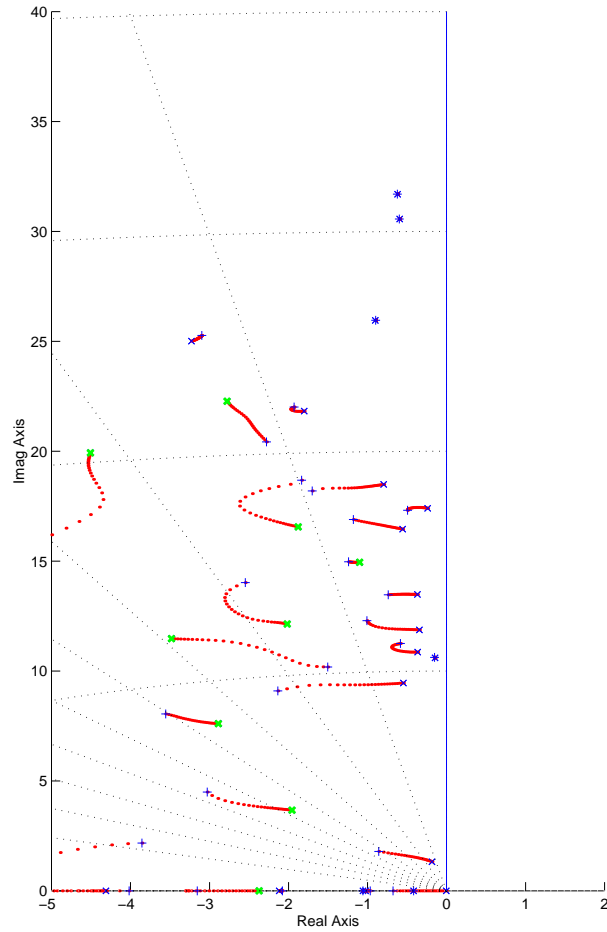
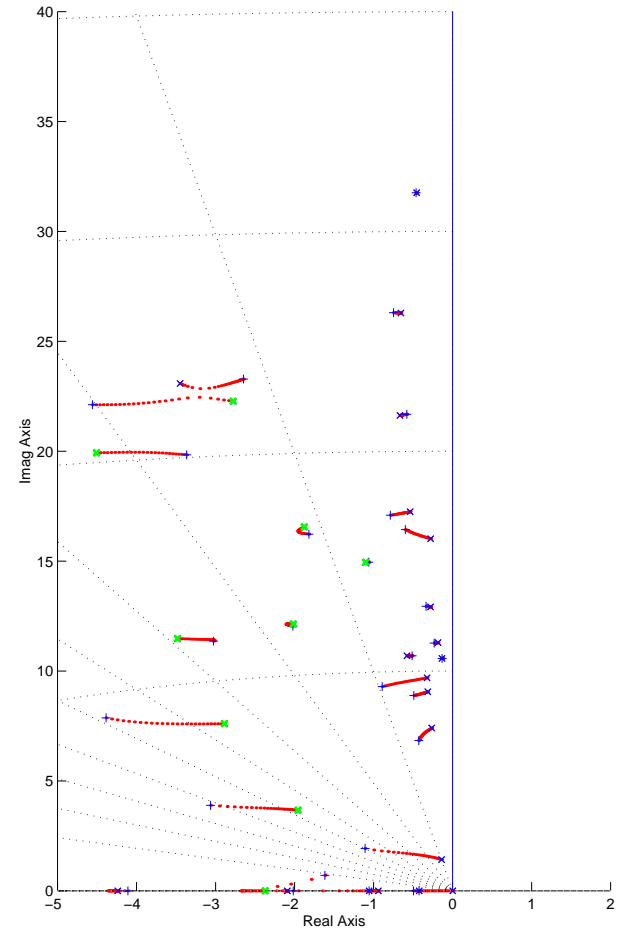
FIG. 7.6 – Simulation « rigide » de référence : G_1^r (noir), G_2^r (gris).

FIG. 7.7 – *Lieu de racines de $K_{y_6} G_1(s)$.*FIG. 7.8 – *Lieu de racines de $K_{y_6} G_2(s)$.*

FIG. 7.9 – *Lieu de racines de $K_{y_1} G_1(s)$.*FIG. 7.10 – *Lieu de racines de $K_{y_1} G_2(s)$.*

FIG. 7.11 – *Lieu de racines de $K_{y6} G(s)$.*FIG. 7.12 – *Réduction équilibrée directe à l'ordre 30.*

FIG. 7.13 – Lieu de racines de $-K_0(s)G_1(s)$.FIG. 7.14 – Simulation: $K_0(s)$ sur G_1 (noir) et G_2 (gris).

FIG. 7.15 – *Lieu de racines de $-K_1(s)G_1(s)$.*FIG. 7.16 – *Lieu des racines de $-K_1(s)G_2(s)$.*

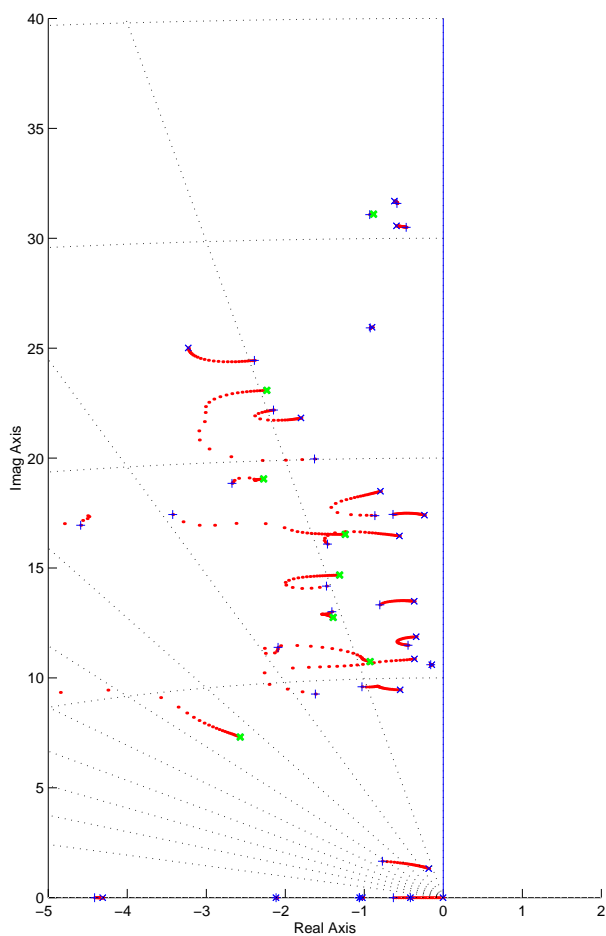


FIG. 7.17 – *Lieu de racines de $-K_2(s)G_1(s)$ ($\rho_e = 0.02$).*

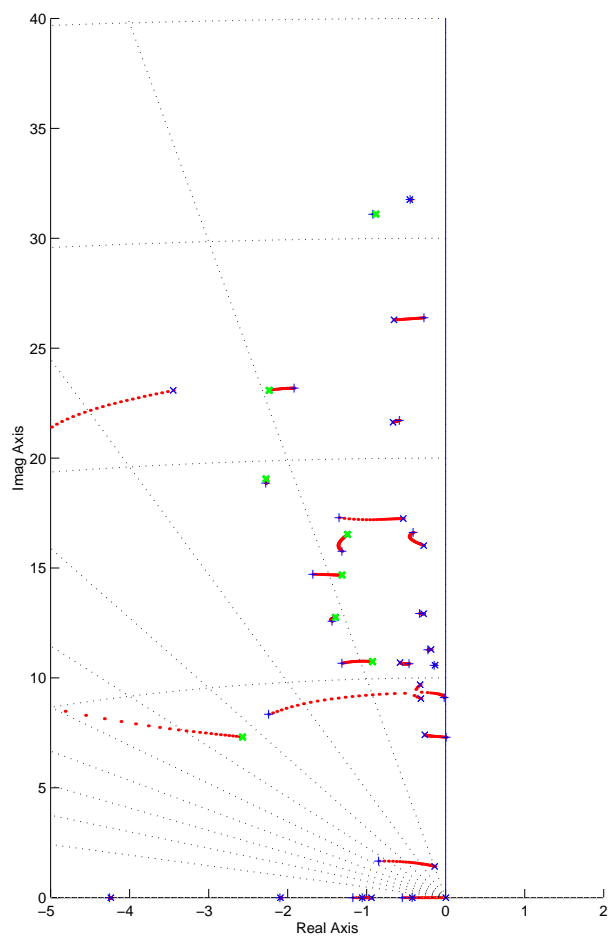


FIG. 7.18 – *Lieu des racines de $-K_2(s)G_2(s)$ ($\rho_e = 0.02$).*

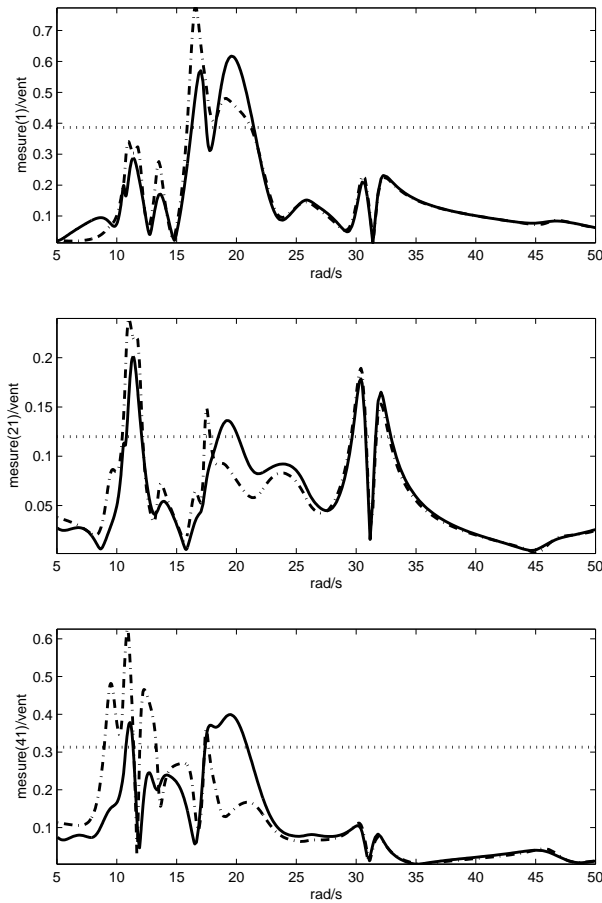


FIG. 7.19 – Réponse en confort de $K_1(s)$ sur $G_1(s)$ - boucle ouverte (- -) et boucle fermée (-).

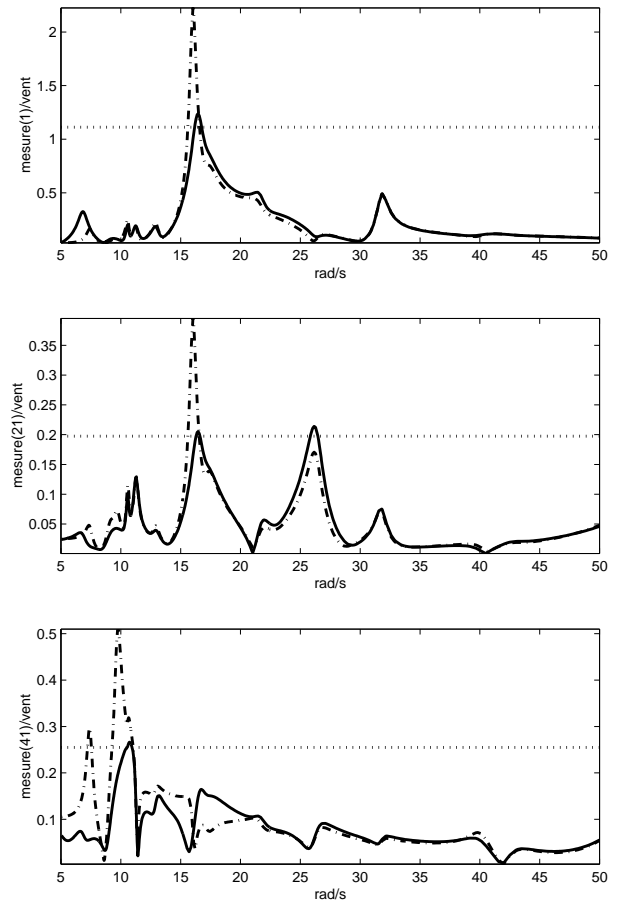


FIG. 7.20 – Réponse en confort de $K_1(s)$ sur $G_2(s)$ - boucle ouverte (- -) et boucle fermée (-).

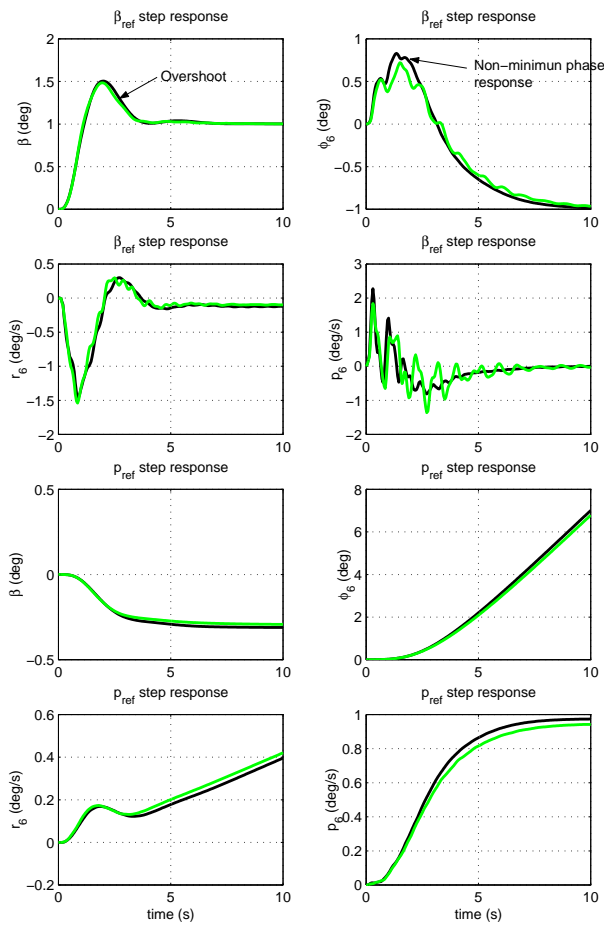


FIG. 7.21 – Simulation: $K_1(s)$ sur G_1 (noir) et G_2 (gris).

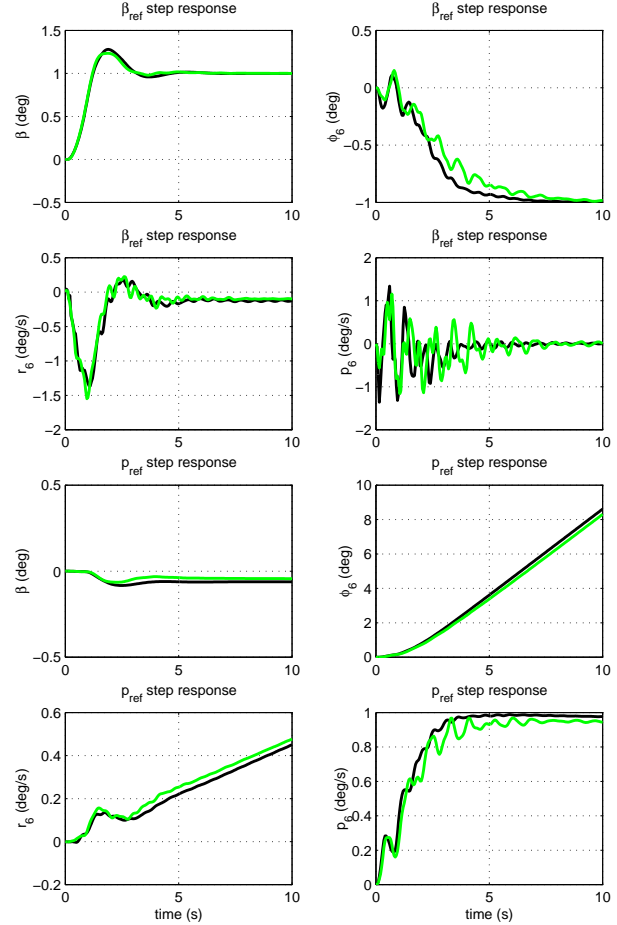


FIG. 7.22 – Réponse du correcteur LQG équivalent à 2ddl.

Références

- [1] D. ALAZARD et P. APKARIAN.
« Exact observer-based structures for arbitrary compensators ».
International Journal of Robust and Non-Linear Control, 9:101–118, 1999.
- [2] D. ALAZARD, C. CUMER, P. APKARIAN, M. GAUVRIT, et F. FERRERES.
Robustesse et Commande Optimale.
Cépaduès Editions, 1999.
- [3] M. ALAZARD, A. BUCHARLES, G. FERRERES, J. F. MAGNI, et S. PRUDHOMME.
« Towards a global methodology for flexible aircraft control ».
Dans *Structural aspect of flexible aircraft control*, Ottawa (CANADA), 18-20
October 1999. RTO-AVT.
- [4] C. CHAMPETIER.
« *Commande optimale et commande positive des structures flexibles* ».
Thèse de docteur-ingénieur, Supaéro, 1982.
- [5] C. CHAMPETIER et J.F. MAGNI.
« Analysis and synthesis of modal control laws ».
Rech. Aéronautique, No. 6:17–35, 1989.
- [6] R. Lane DAILEY.
« Lecture notes for the workshop: \mathcal{H}_∞ and μ methods for robust control ».
American Control Conference, 1990.
- [7] C. DEVILLEMAGNE et R.E. SKELTON.
« Model reductions using a projection formulation ».
International Journal of Control, 46(6):2141–2169, 1987.
- [8] G. FERRERES et I. DARDENNE.
« LP synthesis of a lateral flight control system for a transport aircraft ».
Dans *Guidance, Navigation and Control Conference*, New-Orleans, 11-13 Au-
gust 1997. AIAA.
- [9] G. F. FRANKLIN et C. Richard Johnson JR..
« A condition for full zero assignment in linear control systems ».
IEEE. Transactions on Automatic Control, vol. AC-26., No. 2.:519–521, 1981.

- [10] M. GAUVRIT et N. IMBERT.
« Influence du choix d'une méthode de réduction de modèle sur les performances de la commande ».
Rapport Final 1, DRET-DERA, déc 1993.
- [11] W. GAWRONSKI et T. WILLIAMS.
« Model Reduction for Flexible Space Structures ».
AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, 14(1), jan-feb 1991.
- [12] C.Z. GREGORY JR..
« Reduction of Large Spacecraft Models Using Internal Balancing Theory ».
AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, 7(6), nov-dec 1984.
- [13] T.K. HASSELMAN.
« Modal coupling of lightly damped structures ».
AIAA Journal, 14:1627–1628, 1976.
- [14] J.F. IMBERT.
Analyse des Structures par Eléments Finis.
ENSAE. Cépaduès, seconde édition, 1984.
- [15] P.V. KOKOTOVIC, R.E. O'MALLEY JR., et P. SANNUTI.
« Singular Perturbation and Order Reduction in Control Theory - An Overview ».
Automatica, 12(2):123–132, 1976.
- [16] F. KUBICA.
« Design of flight control laws for a flexible aircraft ».
Dans *Colloque INFAUTOM*, Toulouse, 1995. ENSAE.
- [17] T. LIVET, D. FATH, et F. KUBICA.
« Robust autopilot design for a highly flexible aircraft ».
Dans *13th IFAC World Congres*, San Francisco (USA), July 1996. IFAC.
- [18] B. MADELAINE.
« Détermination d'un modèle dynamique pertinent pour la commande : de la réduction à la construction ».
Thèse de doctorat, Supaéro, 1998.
- [19] L. MEIROVITCH.
Elements of Vibration Analysis.
Mc Graw-Hill, 1986.
- [20] M.TAHK et J.L. SPEYER.
« Modeling of parameter variations and asymptotic LQG synthesis ».
IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-32, No. 9:793–801, 1987.
- [21] M.TAHK et J.L. SPEYER.
« Parameter robust Linear-Quadratic-Gaussian design synthesis with flexible structure control applications ».

- AIAA - Journal of Guidance*, Vol. 12, No. 3:460–468, 1989.
- [22] M. SATO et M. SUZUKI.
 « Vibration control of flexible structures using a combined \mathcal{H}_∞ filter approach ».
Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 19, No. 5, 1996.
- [23] G.B. WARBURTON et S.R. SONI.
 « Errors in response calculations for non-classically damped structures ».
Earth. Eng. Struct., 5:365–376, 1977.
- [24] P.Van WOERKOM.
 « Mathematical Models for Flexible Spacecraft Dynamics: a Survey of Order Reduction Approaches ».
 Dans J-P. CHRÉTIEN, éditeur, *Proceedings of Automatic Control in Space*, Toulouse, France, jun 1985.

