Lorsque p désigne le prédicat pion de Edukera, la phrase « *il existe au plus un pion* » peut être exprimée par les deux formules équivalentes suivantes :

$$F_1 = \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)) \qquad \text{et} \qquad F_2 = \forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))$$

où eq désigne le prédicat d'égalité. Dans les exercices qui suivent nous allons montrer l'équivalence entre ces deux formules.

Exercice 1 (Preuve de $F_1 \Rightarrow F_2$)
Dans cet exercice les preuves demandées devront être obtenues en utilisant les règles de la déduction naturelle et les règles dérivées du formulaire. Si vous n'avez pas réussi à construire une preuve B_i vous pouvez quand même l'utiliser dans les questions qui suivent.

1. Prouver la formule $\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))$ à partir de l'hypothèse h_2 : $\forall x\, \neg p(x)$. On note B_1 la preuve obtenue :

   $\langle 1_{B_1} \rangle$ supposons $h_2 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))$
   à compléter
   $\langle 1_{B_1} \rangle$ CQFD $(\cdots)$ **preuve B_1**

2. Soit B une preuve de $\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))$ dans un contexte d'hypothèse contenant une unique hypothèse $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y))$. Dans la preuve B, quelle règle de la déduction naturelle faut-il appliquer pour pouvoir utiliser directement la preuve B_1 (remarquer que dans la preuve B_1 l'hypothèse h_1 n'est pas disponible) ? On note B_2 la preuve correspondant à la boîte 1_{B_2} :

   $\langle 1_B \rangle$ supposons $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y))$, montrons $\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))$
   $\ddots$
   $\langle 1_{B_2} \rangle$ supposons $h_2 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))$
   $\langle 1_{B_1} \rangle$ montrons $\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))$
   sans utiliser : nom de l'hypothèse à compléter
   $\ldots$
   $\langle 1_{B_1} \rangle$ CQFD $(\cdots)$ **preuve B_1**
   $\langle 1_{B_2} \rangle$ CQFD (nom de la règle à trouver) **preuve B_2**
   $\therefore$
   $\langle 1_B \rangle$ CQFD $(\cdots)$

3. Prouver la formule $\exists x\, \neg\neg p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$. On note B_3 la preuve obtenue :

   $\langle 1_{B_3} \rangle$ montrons $\exists x\, \neg\neg p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$
   à compléter
   $\langle 1_{B_3} \rangle$ CQFD $(\cdots)$ **preuve B_3**

4. Soit B_6 une preuve de $\exists x\, p(x)$ dans un contexte d'hypothèse contenant une unique hypothèse h_3 : $\neg \forall x\, \neg p(x)$. Dans la preuve B_6, on souhaite prouver la formule $\exists x\, \neg\neg p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$. Quelle règle de la déduction naturelle faut-il appliquer pour pouvoir utiliser directement la preuve B_3 pour prouver cette formule (remarquer que dans la preuve B_3 aucune hypothèse n'est disponible) ? On note B_4 la preuve correspondant à la boîte 1_{B_4} :

$\langle 1_{B_6} \rangle$ supposons $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$, montrons $\exists x\, p(x)$

$\ddots$

$\langle 1_{B_4} \rangle$ montrons $\exists x\, \neg\neg p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$

$\langle 1_{B_3} \rangle$ montrons $\exists x\, \neg\neg p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$

sans utiliser : nom de l'hypothèse à compléter

...

$\langle 1_{B_3} \rangle$ CQFD $(\cdots)$ **preuve** B_3

$\langle 1_{B_4} \rangle$ CQFD (nom de la règle à trouver) **preuve** B_4

$\iddots$

$\langle 1_{B_6} \rangle$ CQFD $(\cdots)$ **preuve** B_6

5. Prouver la formule $\exists x\, \neg\neg p(x)$ à partir de l'hypothèse $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$. On note B_5 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_5} \rangle$	supposons $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$, montrons $\exists x\, \neg\neg p(x)$	
	à compléter	
$\langle 1_{B_5} \rangle$	CQFD $(\cdots)$	**preuve** B_5

6. Prouver la formule $\exists x\, p(x)$ à partir de l'hypothèse $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$. On note B_6 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_6} \rangle$	supposons $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$, montrons $\exists x\, p(x)$	
	à compléter	
$\langle 1_{B_6} \rangle$	CQFD $(\cdots)$	**preuve** B_6

Indication : on pourra utiliser les preuve B_4 et B_5.

7. Soit B_{10} une preuve de $\exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$ dans un contexte d'hypothèse contenant une unique hypothèse $h_1 : \forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$. Dans la preuve B_{10}, quelle règle de la déduction naturelle faut-il appliquer pour pouvoir utiliser directement la preuve B_6 (remarquer que dans la preuve B_6 l'hypothèse h_1 n'est pas disponible) ? On note B_7 la preuve correspondant à la boîte 1_{B_7} :

$\langle 1_{B_{10}} \rangle$ supposons $h_1 : \forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$, montrons $\exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$

$\ddots$

$\langle 1_{B_7} \rangle$ supposons $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$, montrons $\exists x\, p(x)$

$\langle 1_{B_6} \rangle$ montrons $\exists x\, p(x)$

sans utiliser : nom de l'hypothèse à compléter

...

$\langle 1_{B_1} \rangle$ CQFD $(\cdots)$ **preuve** B_6

$\langle 1_{B_7} \rangle$ CQFD (nom de la règle à trouver) **preuve** B_7

$\iddots$

$\langle 1_{B_{10}} \rangle$ CQFD $(\cdots)$ **preuve** B_{10}

8. A partir des hypothèses $h_1 : \forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$, $h_4 : p(z)$ et $h_5 : p(w)$, prouver la formule $\mathrm{eq}(z,w)$. On note B_8 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_8} \rangle$	supposons $h_1 : \forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)), h_4 : p(z), h_5 : p(w)$, montrons $\mathrm{eq}(z,w)$	
	à compléter	
$\langle 1_{B_8} \rangle$	CQFD $(\cdots)$	**preuve** B_8

9. A partir des hypothèses $h_1 : \forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$ et $h_4 : p(z)$, prouver la formule $\exists x(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$. On note B_9 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_9}\rangle$	supposons $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)), h_4 : p(z)$, montrons $\exists x (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$ à compléter	
$\langle 1_{B_9}\rangle$	CQFD $(\cdots)$	**preuve** B_9

Indication : on pourra utiliser la preuve B_8.

10. Prouver la formule $\exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$ à partir des hypothèses $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$ et $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$. On note B_{10} la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_{10}}\rangle$	supposons $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)), h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$ montrons $\exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$ à compléter	
$\langle 1_{B_{10}}\rangle$	CQFD $(\cdots)$	**preuve** B_{10}

Indication : on pourra utiliser les preuves B_7 et B_9.

11. Prouver la formule :

$$(\forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))) \Rightarrow (\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))))$$

$\langle 1\rangle$	montrons $(\forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))) \Rightarrow (\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))))$ à compléter
$\langle 1\rangle$	CQFD $(\cdots)$

Indication : on pourra utiliser les preuves B_2 et B_{10}.

Exercice 2 (Preuve de $F_2 \Rightarrow F_1$)

Dans cet exercice les preuves demandées devront être obtenues en utilisant les règles de la déduction naturelle et les règles dérivées du formulaire. Si vous n'avez pas réussi à construire une preuve B_i vous pouvez quand même l'utiliser dans les questions qui suivent. Dans cet exercice, afin de s'affranchir de l'utilisation de la règle d'affaiblissement lors de la construction de preuves à partir de preuves déjà établies, dans chaque preuve on fait uniquement figurer explicitement les hypothèses utilisées dans la preuve (les autres hypothèses éventuellement présentes sont omises).

1. Prouver la formule $\forall x\, \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$ à partir de l'hypothèse $h_1 : \forall x\, \neg p(x)$. On note B_1 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_1}\rangle$	supposons $h_1 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\forall x\, \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$ à compléter	
$\langle 1_{B_1}\rangle$	CQFD $(\cdots)$	**preuve** B_1

2. Quelles sont les deux propriétés de l'égalité qui sont nécessaires pour établir $\mathrm{eq}(x_1, y_1)$ à partir des hypothèses $\mathrm{eq}(z, x_1)$ et $\mathrm{eq}(z, y_1)$. On note h^1_{eq} et h^2_{eq} ces deux propriétés. Construire la preuve de la formule $(\mathrm{eq}(z, x_1) \wedge \mathrm{eq}(z, y_1)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1, y_1)$ à partir des hypothèses h^1_{eq} et h^2_{eq}. On note B_2 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_2}\rangle$	supposons h^1_{eq} : à compléter, h^2_{eq} : à compléter montrons $(\mathrm{eq}(z, x_1) \wedge \mathrm{eq}(z, y_1)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1, y_1)$ à compléter	
$\langle 1_{B_2}\rangle$	CQFD $(\cdots)$	**preuve** B_2

3. A partir des hypothèses $h_3 : p(z) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(z, y))$ et $h_{pxy} : p(x_1) \wedge p(y_1)$, prouver la formule $\mathrm{eq}(z, x_1) \wedge \mathrm{eq}(z, y_1)$. On note B_3 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_3} \rangle$	supposons $h_3 : p(z) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(z, y)), h_{pxy} : p(x_1) \wedge p(y_1)$, montrons $\mathrm{eq}(z, x_1) \wedge \mathrm{eq}(z, y_1)$
	à compléter
$\langle 1_{B_3} \rangle$	CQFD $(\cdots)$ **preuve** B_3

4. Prouver la formule $\forall x\, \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y))$ à partir des hypothèses h^1_{eq}, h^2_{eq} et $h_2 : \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))$. On note B_4 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_4} \rangle$	supposons h^1_{eq} : à compléter, h^2_{eq} : à compléter, $h_2 : \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))$
	montrons $\forall x\, \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y))$
	à compléter
$\langle 1_{B_4} \rangle$	CQFD $(\cdots)$ **preuve** B_4

Indication : on pourra utiliser les preuves B_2 et B_3.

5. Prouver la formule :

$$(\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))) \Rightarrow (\forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))$$

à partir de hypothèses h^1_{eq} et h^2_{eq}.

$\langle 1 \rangle$	supposons h^1_{eq} : à compléter, h^2_{eq} : à compléter,
	montrons $(\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))) \Rightarrow (\forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))$
	à compléter
$\langle 1 \rangle$	CQFD $(\cdots)$

Indication : on pourra utiliser les preuves B_1 et B_4.

▶ Corrigé de l'exercice 1.

1.

> $\langle 1_{B_1}\rangle$ supposons $h_2 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$
>
> > $\langle 2_{B_1}\rangle$ montrons $\forall x\, \neg p(x)$
> >
> > $\langle 2_{B_1}\rangle$ CQFD (Ax avec h_2)
>
> $\langle 1_{B_1}\rangle$ CQFD ($I^g_\vee$) **preuve** B_1

2. Utilisation de la règle d'affaiblissement

> $\langle 1_B\rangle$ supposons $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$, montrons $\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$
>
> $\ddots$
>
> > $\langle 1_{B_2}\rangle$ supposons $h_2 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$
> >
> > > $\langle 1_{B_1}\rangle$ montrons $\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$
> > >
> > > <u>sans utiliser h_1</u>
> > >
> > > $\dots$
> > >
> > > $\langle 1_{B_1}\rangle$ CQFD ($I^g_\vee$) **preuve** B_1
> >
> > $\langle 1_{B_2}\rangle$ CQFD (Af) **preuve** B_2
>
> $\cdot^{\cdot^{\cdot}}$
>
> $\langle 1_B\rangle$ CQFD $(\cdots)$

3.

> $\langle 1_{B_3}\rangle$ montrons $\exists x\, \neg\neg p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$
>
> > $\langle 2_{B_3}\rangle$ supposons $h_{B_3} : \exists x\, \neg\neg p(x)$, montrons $\exists x\, p(x)$
> >
> > > $\langle 3_{B_3}\rangle$ soit une nouvelle variable w, supposons $h'_{B_3} : \neg\neg p(w)$, montrons $\exists x\, p(x)$
> > >
> > > > $\langle 4_{B_3}\rangle$ montrons $p(w)$
> > > >
> > > > > $\langle 5_{B_3}\rangle$ supposons $h''_{B_3} : \neg p(w)$, montrons false
> > > > >
> > > > > $\langle 5_{B_3}\rangle$ CQFD ($D^1_\perp$ avec h''_{B_3}, h'_{B_3})
> > > >
> > > > $\langle 4_{B_3}\rangle$ CQFD (Abs)
> > >
> > > $\langle 3_{B_3}\rangle$ CQFD ($I_\exists$)
> >
> > $\langle 2_{B_3}\rangle$ CQFD ($D_\exists$ avec h_{B_3})
>
> $\langle 1_{B_3}\rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$) **preuve** B_3

4. Utilisation de la règle d'affaiblissement

> $\langle 1_{B_6}\rangle$ supposons $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$, montrons $\exists x\, p(x)$
>
> $\ddots$
>
> > $\langle 1_{B_4}\rangle$ montrons $\exists x\, \neg\neg p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$
> >
> > > $\langle 1_{B_3}\rangle$ montrons $\exists x\, \neg\neg p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$
> > >
> > > <u>sans utiliser h_3</u>
> > >
> > > $\dots$
> > >
> > > $\langle 1_{B_3}\rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$) **preuve** B_3
> >
> > $\langle 1_{B_4}\rangle$ CQFD (Af) **preuve** B_4
>
> $\cdot^{\cdot^{\cdot}}$
>
> $\langle 1_{B_6}\rangle$ CQFD $(\cdots)$ **preuve** B_6

5.

$\langle 1_{B_5} \rangle$ supposons $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$, montrons $\exists x\, \neg\neg p(x)$

$\langle 2_{B_5} \rangle$ supposons $h_{B_5} : \neg\exists x\, \neg\neg p(x)$, montrons false

$\langle 3_{B_5} \rangle$ montrons $\neg\forall x\, \neg p(x)$

$\langle 3_{B_5} \rangle$ CQFD (Ax avec h_3)

$\langle 4_{B_5} \rangle$ montrons $\forall x\, \neg p(x)$

$\langle 5_{B_5} \rangle$ soit une nouvelle variable z, montrons $\neg p(z)$

$\langle 6_{B_5} \rangle$ supposons $h'_{B_5} : \neg\neg p(z)$, montrons false

$\langle 7_{B_5} \rangle$ montrons $\neg\exists x\, \neg\neg p(x)$

$\langle 7_{B_5} \rangle$ CQFD (Ax avec h_{B_5})

$\langle 8_{B_5} \rangle$ montrons $\exists x\, \neg\neg p(x)$

$\langle 9_{B_5} \rangle$ montrons $\neg\neg p(z)$

$\langle 9_{B_5} \rangle$ CQFD (Ax avec h'_{B_5})

$\langle 8_{B_5} \rangle$ CQFD ($I_\exists$)

$\langle 6_{B_5} \rangle$ CQFD ($E_\neg$)

$\langle 5_{B_5} \rangle$ CQFD (Abs)

$\langle 4_{B_5} \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

$\langle 2_{B_5} \rangle$ CQFD ($E_\neg$)

$\langle 1_{B_5} \rangle$ CQFD (Abs) **preuve** B_5

6.

$\langle 1_{B_6} \rangle$ supposons $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$, montrons $\exists x\, p(x)$

$\langle 1_{B_4} \rangle$ montrons $\exists x\, \neg\neg p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$

...

$\langle 1_{B_4} \rangle$ CQFD (Af) **preuve** B_4

$\langle 1_{B_5} \rangle$ montrons $\exists x\, \neg\neg p(x)$

...

$\langle 1_{B_5} \rangle$ CQFD (Abs) **preuve** B_5

$\langle 1_{B_6} \rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$) **preuve** B_6

7. Utilisation de la règle d'affaiblissement

$\langle 1_{B_{10}} \rangle$ supposons $h_1 : \forall x \forall y\, ((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y))$, montrons $\exists x\, (p(x) \wedge \forall y\, (p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x, y)))$

$\ddots$

$\langle 1_{B_7} \rangle$ supposons $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$, montrons $\exists x\, p(x)$

$\langle 1_{B_6} \rangle$ montrons $\exists x\, p(x)$

<u>sans utiliser h_1</u>

...

$\langle 1_{B_6} \rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$) **preuve** B_6

$\langle 1_{B_7} \rangle$ CQFD (Af) **preuve** B_7

$\iddots$

$\langle 1_{B_{10}} \rangle$ CQFD $(\cdots)$ **preuve** B_{10}

8.

$\langle 1_{B_8} \rangle$ supposons $h_1 : \forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)), h_4 : p(z), h_5 : p(w)$, montrons $\mathrm{eq}(z,w)$

$\langle 2_{B_8} \rangle$ montrons $p(z) \wedge p(w)$

$\langle 3_{B_8} \rangle$ montrons $p(z)$

$\langle 3_{B_8} \rangle$ CQFD (Ax avec h_4)

$\langle 4_{B_8} \rangle$ montrons $p(w)$

$\langle 4_{B_8} \rangle$ CQFD (Ax avec h_5)

$\langle 2_{B_8} \rangle$ CQFD ($I_\wedge$)

$\langle 3_{B_8} \rangle$ montrons $(p(z) \wedge p(w)) \Rightarrow \mathrm{eq}(z,w)$

$\langle 4_{B_8} \rangle$ montrons $\forall y\,(p(z) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(z,y)$

à compléter

$\langle 4_{B_8} \rangle$ CQFD ($D_\forall$ avec h_1)

$\langle 3_{B_8} \rangle$ CQFD ($E_\forall$)

$\langle 1_{B_8} \rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$) **preuve** B_8

9.

$\langle 1_{B_9} \rangle$ supposons $h_1 : \forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)), h_4 : p(z)$, montrons $\exists x (p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$

$\langle 2_{B_9} \rangle$ montrons $p(z) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(z,y))$

$\langle 3_{B_9} \rangle$ montrons $p(z)$

$\langle 3_{B_9} \rangle$ CQFD (Ax avec h_4)

$\langle 4_{B_9} \rangle$ montrons $\forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(z,y))$

$\langle 5_{B_9} \rangle$ soit une nouvelle variable w, montrons $p(w) \Rightarrow \mathrm{eq}(z,w)$

$\langle 6_{B_9} \rangle$ supposons $h_5 : p(w)$, montrons $\mathrm{eq}(z,w)$

...

$\langle 6_{B_9} \rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$) **preuve** B_8

$\langle 5_{B_9} \rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$)

$\langle 4_{B_9} \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

$\langle 2_{B_9} \rangle$ CQFD ($I_\wedge$)

$\langle 1_{B_9} \rangle$ CQFD ($I_\exists$) **preuve** B_9

10.

$\langle 1_{B_{10}} \rangle$ supposons $h_1 : \forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)), h_3 : \neg \forall x\, \neg p(x)$
montrons $\exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$

$\langle 1_{B_7} \rangle$ montrons $\exists x\, p(x)$

...

$\langle 1_{B_7} \rangle$ CQFD (Af) **preuve** B_7

$\langle 1_{B_9} \rangle$ soit une nouvelle variable z, supposons $h_4 : p(z)$
montrons $\exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$

...

$\langle 1_{B_9} \rangle$ CQFD (Af) **preuve** B_9

$\langle 1_{B_{10}} \rangle$ CQFD ($E_\exists$) **preuve** B_{10}

11.

$\langle 1\rangle$ montrons $(\forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))) \Rightarrow (\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))))$

$\langle 2\rangle$ supposons $h_1 : \forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$

montrons $\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$

$\langle 1_{B_2}\rangle$ supposons $h_2 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$

...

$\langle 1_{B_2}\rangle$ CQFD (Af) **preuve** B_2

$\langle 3\rangle$ supposons $h_3 : \neg\forall x\, \neg p(x)$, montrons $\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$

$\langle 1_{B_{10}}\rangle$ montrons $\exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$

...

$\langle 1_{B_{10}}\rangle$ CQFD $(E_\exists)$ **preuve** B_{10}

$\langle 3\rangle$ CQFD $(I_\vee^d)$

$\langle 2\rangle$ CQFD (D_{TE})

$\langle 1\rangle$ CQFD $(I_\Rightarrow)$

▶ Corrigé de l'exercice 2.

1.

$\langle 1_{B_1}\rangle$ supposons $h_1 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\forall x\, \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$

$\langle 2_{B_1}\rangle$ soit une nouvelle variable x_1, montrons $\forall y\,(p(x_1) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1,y)$

$\langle 3_{B_1}\rangle$ soit une nouvelle variable y_1, montrons $(p(x_1) \wedge p(y_1)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1,y_1)$

$\langle 4_{B_1}\rangle$ supposons $h_{B_1} : p(x_1) \wedge p(y_1)$, montrons $\mathrm{eq}(x_1,y_1)$

$\langle 5_{B_1}\rangle$ montrons $p(x_1)$

$\langle 5_{B_1}\rangle$ CQFD ($D_\wedge^g$ avec h_{B_1})

$\langle 6_{B_1}\rangle$ montrons $\neg p(x_1)$

$\langle 6_{B_1}\rangle$ CQFD ($D_\forall$ avec h_1)

$\langle 4_{B_1}\rangle$ CQFD $(D_\bot^2)$

$\langle 3_{B_1}\rangle$ CQFD $(I_\Rightarrow)$

$\langle 2_{B_1}\rangle$ CQFD $(I_\forall)$

$\langle 1_{B_1}\rangle$ CQFD $(I_\forall)$ **preuve** B_1

2. Les propriétés de symétrie et de transitivité de l'égalité sont nécessaires pour construire la preuve.

$\langle 1_{B_2}\rangle$ supposons $h_{eq}^1 : \forall x\, \forall y\,(\mathrm{eq}(x,y) \Rightarrow \mathrm{eq}(y,x)), h_{eq}^2 : \forall x\, \forall y\, \forall w\,((\mathrm{eq}(x,y) \wedge \mathrm{eq}(y,w)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,w))$

montrons $(\mathrm{eq}(z,x_1) \wedge \mathrm{eq}(z,y_1)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1,y_1)$

$\langle 2_{B_2}\rangle$ supposons $h_{xy} : \mathrm{eq}(z,x_1) \wedge \mathrm{eq}(z,y_1)$, montrons $\mathrm{eq}(x_1,y_1)$

$\langle 3_{B_2}\rangle$ montrons $(\mathrm{eq}(x_1,z) \wedge \mathrm{eq}(z,y_1)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1,y_1)$

$\langle 4_{B_2}\rangle$ montrons $\forall w\,(\mathrm{eq}(x_1,z) \wedge \mathrm{eq}(z,w)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1,w)$

$\langle 5_{B_2}\rangle$ montrons $\forall y\, \forall w\,(\mathrm{eq}(x_1,y) \wedge \mathrm{eq}(y,w)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1,w)$

$\langle 5_{B_2}\rangle$ CQFD ($D_\forall$ avec h_{eq}^2)

$\langle 4_{B_2}\rangle$ CQFD $(E_\forall)$

$\langle 3_{B_2}\rangle$ CQFD $(E_\forall)$

$\langle 4_{B_2}\rangle$ montrons $\mathrm{eq}(x_1,z) \wedge \mathrm{eq}(z,y_1)$

$\langle 5_{B_2}\rangle$ montrons $\mathrm{eq}(x_1,z)$

$\langle 6_{B_2}\rangle$ montrons $\mathrm{eq}(z,x_1) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1,z)$

$\langle 7_{B_2}\rangle$ montrons $\forall y\,(\mathrm{eq}(z,y) \Rightarrow \mathrm{eq}(y,z))$

$\langle 7_{B_2}\rangle$ CQFD ($D_\forall$ avec h_{eq}^1)

$\langle 6_{B_2}\rangle$ CQFD $(E_\forall)$

$\langle 7_{B_2}\rangle$ montrons $\mathrm{eq}(z,x_1)$

$\langle 7_{B_2}\rangle$ CQFD ($D_\vee^g$ avec h_{xy})

$\langle 5_{B_2}\rangle$ CQFD $(E_\Rightarrow)$

$\langle 6_{B_2}\rangle$ montrons $\mathrm{eq}(z,y_1)$

$\langle 6_{B_2}\rangle$ CQFD ($D_\vee^d$ avec h_{xy})

$\langle 4_{B_2}\rangle$ CQFD $(I_\wedge)$

$\langle 2_{B_2}\rangle$ CQFD $(E_\Rightarrow)$

$\langle 1_{B_2}\rangle$ CQFD $(I_\Rightarrow)$ **preuve** B_2

3.

$\langle 1_{B_3}\rangle$ supposons $h_3 : p(z) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(z,y)), h_{pxy} : p(x_1) \wedge p(y_1)$, montrons $\mathrm{eq}(z,x_1) \wedge \mathrm{eq}(z,y_1)$
$\langle 2_{B_3}\rangle$ montrons $\mathrm{eq}(z,x_1)$
$\langle 3_{B_3}\rangle$ montrons $p(x_1) \Rightarrow \mathrm{eq}(z,x_1)$
$\langle 4_{B_3}\rangle$ montrons $\forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(z,y))$
$\langle 4_{B_3}\rangle$ CQFD ($D^d_\wedge$ avec h_3)
$\langle 3_{B_3}\rangle$ CQFD ($E_\forall$)
$\langle 4_{B_3}\rangle$ montrons $p(x_1)$
$\langle 4_{B_3}\rangle$ CQFD ($D^g_\wedge$ avec h_{pxy})
$\langle 2_{B_3}\rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$)
$\langle 3_{B_3}\rangle$ montrons $\mathrm{eq}(z,y_1)$
$\langle 4_{B_3}\rangle$ montrons $p(y_1) \Rightarrow \mathrm{eq}(z,y_1)$
$\langle 5_{B_3}\rangle$ montrons $\forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(z,y))$
$\langle 5_{B_3}\rangle$ CQFD ($D^d_\wedge$ avec h_3)
$\langle 4_{B_3}\rangle$ CQFD ($E_\forall$)
$\langle 5_{B_3}\rangle$ montrons $p(y_1)$
$\langle 5_{B_3}\rangle$ CQFD ($D^d_\wedge$ avec h_{pxy})
$\langle 3_{B_3}\rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$)
$\langle 1_{B_3}\rangle$ CQFD ($I_\wedge$) **preuve** B_3

4.

$\langle 1_{B_4}\rangle$ supposons $h^1_{eq} : \forall x\,\forall y\,(\mathrm{eq}(x,y) \Rightarrow \mathrm{eq}(y,x)), h^2_{eq} : \forall x\,\forall y\,\forall w\,((\mathrm{eq}(x,y) \wedge \mathrm{eq}(y,w)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,w))$,
$h_2 : \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$, montrons $\forall x\,\forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$
$\langle 2_{B_4}\rangle$ soit une nouvelle variable z, supposons $h_3 : p(z) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(z,y))$
montrons $\forall x\,\forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$
$\langle 3_{B_4}\rangle$ soit une nouvelle variable x_1, montrons $\forall y\,((p(x_1) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1,y))$
$\langle 4_{B_4}\rangle$ soit une nouvelle variable y_1, montrons $(p(x_1) \wedge p(y_1)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1,y_1)$
$\langle 5_{B_4}\rangle$ supposons $h_{pxy} : p(x_1) \wedge p(y_1)$, montrons $\mathrm{eq}(x_1,y_1)$
$\langle 1_{B_2}\rangle$ montrons $(\mathrm{eq}(z,x_1) \wedge \mathrm{eq}(z,y_1)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x_1,y_1)$
...
$\langle 1_{B_2}\rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$) **preuve** B_2
$\langle 1_{B_3}\rangle$ montrons $\mathrm{eq}(z,x_1) \wedge \mathrm{eq}(z,y_1)$
...
$\langle 1_{B_3}\rangle$ CQFD ($I_\wedge$) **preuve** B_3
$\langle 5_{B_4}\rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$)
$\langle 4_{B_4}\rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$)
$\langle 3_{B_4}\rangle$ CQFD ($I_\forall$)
$\langle 2_{B_4}\rangle$ CQFD ($I_\forall$)
$\langle 1_{B_4}\rangle$ CQFD ($D_\exists$ avec h_2) **preuve** B_4

5.

$\langle 1\rangle$ supposons $h^1_{eq} : \forall x\,\forall y\,(\mathrm{eq}(x,y) \Rightarrow \mathrm{eq}(y,x)), h^2_{eq} : \forall x\,\forall y\,\forall w\,((\mathrm{eq}(x,y) \wedge \mathrm{eq}(y,w)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,w))$,
montrons $(\forall x\,\neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))) \Rightarrow (\forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$
$\langle 2\rangle$ supposons $h_0 : \forall x\,\neg p(x) \vee \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$, montrons $\forall x \forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$
$\langle 1_{B_1}\rangle$ supposons $h_1 : \forall x\,\neg p(x)$, montrons $\forall x\,\forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$
...
$\langle 1_{B_1}\rangle$ CQFD ($I_\forall$) **preuve** B_1
$\langle 1_{B_4}\rangle$ supposons $h_2 : \exists x\,(p(x) \wedge \forall y\,(p(y) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y)))$, montrons $\forall x\,\forall y\,((p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow \mathrm{eq}(x,y))$
...
$\langle 1_{B_4}\rangle$ CQFD ($E_\exists$) **preuve** B_4
$\langle 2\rangle$ CQFD ($D_\vee$ avec h_0)
$\langle 1\rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$)