Chapitre 3

Analyse hilbertienne

L'analyse Hilbertienne joue un rôle majeur dans l'étude des EDPs linéaires, car elle offre un cadre théorique généralisant à la dimension infinie nombre de notions d'algèbre linéaire valables dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. Il y a cependant une différence fondamentale par rapport au cas de la dimension finie : dans les espaces de Hilbert toutes les normes ne sont pas équivalentes. Ceci explique l'importance de la topologie quand on travaille dans ces espaces. Le lecteur désireux d'approfondir les thèmes abordés dans ce chapitre pourra consulter [17, chap.4], [4, chap.5] ou [3, chap.2].

3.1 Définitions et résultats élémentaires

Sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel H, une application continue $\ell : \mathrm{H} \to \mathbb{C}$ sera dite anti-linéaire si elle vérifie la condition suivante : pour tout $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\ell(\boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{v}) = \ell(\boldsymbol{u}) + \overline{\lambda}\, \ell(\boldsymbol{v}).$$

Une forme $a(\cdot,\cdot) : \mathrm{H} \times \mathrm{H} \to \mathbb{C}$ sera dite sesquilinéaire si elle est linéaire par rapport à sa première variable et anti-linéaire par rapport à sa seconde variable, c'est-à-dire : pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathrm{H}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned} &i)\ \ a(\boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \lambda\, a(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \\ &ii)\ \ a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{w}) = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \overline{\lambda}\, a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Definition 3.1.
Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel H *est dit pré-hilbertien si il est muni d'une forme sequilinéaire* $(\cdot,\cdot) : \mathrm{H} \times \mathrm{H} \to \mathbb{C}$ *(appelée produit scalaire) qui, en plus de (3.1), vérifie les conditions suivantes : pour tout* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}$,

i) $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}$
ii) $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}_+$
iii) $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{u} = 0$.

Une forme sesquilinéaire vérifiant les trois conditions de la définition ci-dessus est dite symétrique définie positive. Comme conséquence immédiate de cette définition, on voit que l'application $\boldsymbol{u} \mapsto (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est linéaire pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}$. On a de plus $(0, \boldsymbol{v}) = 0$, et $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} + \lambda \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \overline{\lambda}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Le produit scalaire étant défini, on considère également :

$$\|\boldsymbol{u}\| := \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}. \tag{3.2}$$

Lemme 3.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

$$|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\| \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}.$$

Démo :
Posons $A = \|\boldsymbol{u}\|^2$, $B = |(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|$ et $C = \|\boldsymbol{v}\|^2$. Soit également $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = 1$ et $\alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = B$. Alors pour tout $r \in \mathbb{R}$ on a $\|\boldsymbol{u}-\alpha r\boldsymbol{v}\|^2 = (\boldsymbol{u}-\alpha r\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\alpha r\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}\|^2 - r\alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) - r\overline{\alpha}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + r^2\|\boldsymbol{v}\|^2 = A - 2rB + Cr^2 \geq 0$. Si $C = 0$ alors l'inégalité annoncée est trivialement vérifiée puisqu'alors $\boldsymbol{v} = 0$. Sinon on prend $r = B/C$ et on obtient $B^2 \leq AC$. □

L'application (3.2) vérifie bien $\|\boldsymbol{u}\| = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = 0$ et $\|\lambda\boldsymbol{u}\| = |\lambda|\,\|\boldsymbol{u}\|$. Le résultat suivant montre qu'elle vérifie en outre systématiquement l'inégalité triangulaire si bien qu'il s'agit d'une norme.

Lemme 3.3 (Inégalité triangulaire).

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\| \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}.$$

Démo :

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 &= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}\|^2 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\ &= \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\Re e\{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\} + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2 = (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2.\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.4.
l'application $\boldsymbol{u} \mapsto \|\boldsymbol{u}\|$ est continue.

Démo :
$\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}'\| \leq \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'\| + \|\boldsymbol{u}'\| \Rightarrow \|\boldsymbol{u}\| - \|\boldsymbol{u}'\| \leq \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'\|$, et de même $\|\boldsymbol{u}'\| - \|\boldsymbol{u}\| \leq \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'\|$ de sorte que finalement $|\|\boldsymbol{u}\| - \|\boldsymbol{u}'\|| \leq \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'\|$. □

L'application $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \mapsto \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$ définit une distance sur H. Un espace préhilbertien est donc un cas particulier d'espace métrique. Rappelons qu'un espace métrique est dit complet lorsque toute suite de Cauchy (pour cette métrique) converge.

Definition 3.5.
Un espace pré-hilbertien H *muni du produit scalaire* $(\cdot, \cdot)$ *est appelé un espace de Hilbert si il est complet pour la norme* $\|\cdot\|$ *associée au produit scalaire.*

Exemple 1 $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := u_1\overline{v}_1 + \cdots + u_n\overline{v}_n$ pour tout $\boldsymbol{u} = (u_j)_{j=1}^n, \boldsymbol{v} = (v_j)_{j=1}^n$ est un Hilbert.

Exemple 2 Supposons donnés $\mathrm{H}_j, j = 1\ldots, n$ espaces de Hilbert, chacun muni du produit scalaire $(\ ,\ )_{\mathrm{H}_j}$. Alors l'espace produit $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 \times \cdots \times \mathrm{H}_n$ est un Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1)_{\mathrm{H}_1} + \cdots + (\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_n)_{\mathrm{H}_n}$ pour $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_j)_{j=1}^n \in \mathrm{H}$ et $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_j)_{j=1}^n \in \mathrm{H}$.

Exemple 3 En notant I un intervalle de $\mathbb{R}$, l'espace $\mathrm{L}^2(\mathrm{I})$ des fonctions de carré intégrable (modulo l'égalité presque partout au sens de la mesure de Lebesgue) est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire $f, g \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(t)\,\overline{g}(t)dt$.

Exemple 4 $\mathscr{C}^0(\bar{\mathrm{I}})$ n'est *pas* un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire $f, g \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(t)\,\overline{g}(t)dt$, car il n'est pas complet pour la norme associée.

3.2 Continuité des applications multi-linéaires

Nous examinons ici un critère permettant de montrer facilement la continuité de certaines applications rencontrées couramment dans la théorie variationnelle des EDPs. Étant donnés des espaces vectoriels $\mathrm{F}, \mathrm{E}_j, j = 1, \dots, n$, nous dirons qu'une application $\Phi : \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n \to \mathrm{F}$ est multi-linéaire/antilinéaire si elle est linéaire ou antilinéaire par rapport à chacune de ses variables c'est-à-dire que, pour toute pour toute famille $\boldsymbol{u}_j \in \mathrm{E}_j, j \neq p$, l'application $\boldsymbol{v} \mapsto \Phi(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{p-1}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_{p+1}, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ est soit linéaire soit antilinéaire. On a le critère de continuité général suivant.

Proposition 3.6.
Étant donnés des espaces vectoriels $\mathrm{F}, \mathrm{E}_j, j = 1 \dots n$ *munis des normes* $\|\ \|_{\mathrm{F}}$ *et* $\|\ \|_{\mathrm{E}_j}$, *soit* $\Phi : \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n \to \mathrm{F}$ *une application multi-linéaire/antilinéaire. Alors* $\Phi : \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n \to \mathrm{F}$ *est continue si et seulement si il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|\Phi(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)\|_{\mathrm{F}} \leq C\|\boldsymbol{u}_1\|_{\mathrm{E}_1} \cdots \|\boldsymbol{u}_n\|_{\mathrm{E}_n} \quad \forall \boldsymbol{u}_j \in \mathrm{E}_j, j = 1 \dots n. \tag{3.3}$$

Démo:
Supposons dans un premier temps que Φ est continue. Par définition de la continuité en $(0, \dots 0)$, on a $\|\Phi(\boldsymbol{v})\|_{\mathrm{F}} < 1$ dès que $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ vérifie $\|\boldsymbol{v}\|^2 := \|\boldsymbol{v}_1\|^2_{\mathrm{E}_1} + \cdots + \|\boldsymbol{v}_n\|^2_{\mathrm{E}_n} < \rho^2$ pour un $\rho > 0$ assez petit. Pour tout $\boldsymbol{u}_j \in \mathrm{E}_j, j = 1 \dots n$, choisissons $\boldsymbol{v}_j := (\rho \boldsymbol{u}_j)/(\sqrt{2n}\|\boldsymbol{u}_j\|_{\mathrm{E}_j})$ et notons $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$, de sorte que $\|\boldsymbol{v}_j\|^2_{\mathrm{E}_j} = \rho^2/(2n)$ et $\|\boldsymbol{v}\|^2 \leq \rho^2/2 < \rho^2$. On a donc $\|\Phi(\boldsymbol{v})\|_{\mathrm{F}} < 1$ et, par multi-linéarité, on tire $\|\Phi(\boldsymbol{u})\|_{\mathrm{F}}(\rho/\sqrt{2n})^n/(\|\boldsymbol{u}_1\|_{\mathrm{E}_1} \dots \|\boldsymbol{u}_n\|_{\mathrm{E}_n}) < 1$ c'est à dire

$$\|\Phi(\boldsymbol{u})\|_{\mathrm{F}} < (\sqrt{2n}/\rho)^n \|\boldsymbol{u}_1\|_{\mathrm{E}_1} \dots \|\boldsymbol{u}_n\|_{\mathrm{E}_n}.$$

Supposons maintenant (3.3) vérifié, et montrons la continuité de Φ en $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$ arbitraire. On a $\Phi(\boldsymbol{a}) - \Phi(\boldsymbol{u}) = \sum_{j=1\dots n} \Phi(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{j-1}, \boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{a}_{j+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ pour tout $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$, d'où l'on tire

$$\|\Phi(\boldsymbol{a}) - \Phi(\boldsymbol{u})\|_{\mathrm{F}} \leq C \sum_{j=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{u}_j\|_{\mathrm{E}_j} \prod_{k \neq j} \max(\|\boldsymbol{a}_k\|_{\mathrm{E}_k}, \|\boldsymbol{u}_k\|_{\mathrm{E}_k}) \tag{3.4}$$

grâce à (3.3). Soit $\epsilon > 0$. Si $\boldsymbol{u}_j \in \mathrm{E}_j$ vérifie $\|\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{a}_j\|_{\mathrm{E}_j} \leq \delta$ avec $\delta \leq 1$, on a $\|\Phi(\boldsymbol{a}) - \Phi(\boldsymbol{u})\|_{\mathrm{F}} < C'\delta$ où $C' := n\,\Pi_{j=1}^n(1 + \|\boldsymbol{a}_j\|_{\mathrm{E}_j})$. En choisissant $\delta = \min(1, \epsilon/C')$, on a donc $\max_{j=1\dots n} \|\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{u}_j\|_{\mathrm{E}_j} \leq \delta \Rightarrow \|\Phi(\boldsymbol{a}) - \Phi(\boldsymbol{u})\|_{\mathrm{F}} < \epsilon$ ce qui démontre la continuité en $\boldsymbol{a}$. $\square$

L'existence d'une constante $C > 0$ satisfaisant la condition (3.3) est équivalente à la condition suivante

$$\|\Phi\| := \sup_{\boldsymbol{u}_j \in \mathrm{E}_j \setminus \{0\}, j=1\dots n} \frac{\|\Phi(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)\|_{\mathrm{F}}}{\|\boldsymbol{u}_1\|_{\mathrm{E}_1} \dots \|\boldsymbol{u}_n\|_{\mathrm{E}_n}} < +\infty.$$

La quantité $\|\Phi\|$ définie ci-dessus, appelée module de continuité de Φ, est la meilleure constante possible pour laquelle (3.3) est vrai. Voyons comment le critère de continuité de la proposition 3.6 se traduit sur des cas simples.

Corollaire 3.7.
☞ *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels munis de normes notées* $\| \|_{\mathrm{E}}$ *et* $\| \|_{\mathrm{F}}$.

i) une forme linéaire (resp. antilinéaire) $\ell : \mathrm{E} \to \mathbb{C}$ *est continue si et seulement si il existe* $C > 0$ *telle que* $|\ell(\boldsymbol{u})| \leq C\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{E}}\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathrm{E}$.

ii) une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) $a(\cdot,\cdot) : \mathrm{E}\times\mathrm{E} \to \mathbb{C}$ *est continue si et seulement si il existe* $C > 0$ *telle que* $|a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \leq C\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{E}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{E}}\ \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathrm{E}$.

iii) une application linéaire $\mathrm{A} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *est continue si et seulement si il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $\|\mathrm{A}(\boldsymbol{u})\|_{\mathrm{F}} \leq C\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{E}}\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathrm{E}$.

Les critères de continuité ci-dessus seront d'un usage constant dans la suite. On voit par exemple grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz que, pour tout élément $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}$ d'un Hilbert, l'application linéaire $\boldsymbol{u} \mapsto (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ et l'application antilinéaire $\boldsymbol{u} \mapsto (\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$ sont toutes deux continues, de module de continuité égal à $\|\boldsymbol{v}\|$.

Rappelons qu'un sous-ensemble $\mathrm{E}' \subset \mathrm{E}$ d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \| \|_{\mathrm{E}})$ est dit dense si, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathrm{E}$, il existe une suite $\boldsymbol{x}_k \in \mathrm{E}', k \geq 0$ telle que $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k\|_{\mathrm{E}} = 0$. Le résultat suivant montre que les applications multi-linéaires/antilinéaires n'ont besoin d'être spécifiées que sur des sous-espaces denses pour être bien définies partout.

Proposition 3.8.
Soient E, F *deux espaces vectoriels munis des normes* $\| \|_{\mathrm{E}}, \| \|_{\mathrm{F}}$. *On suppose* $(\mathrm{F}, \| \|_{\mathrm{F}})$ *complet. Soit* $\Phi' : \mathrm{E}' \to \mathrm{F}$ *une application linéaire (resp. antilinéaire) continue où* $\mathrm{E}' \subset \mathrm{E}$ *est un sous-ensembles dense pour* $\| \|_{\mathrm{E}}$. *Alors il existe une unique application* $\Phi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *linéaire (resp. antilinéaire) continue prolongeant* Φ' *c'est-à-dire satisfaisant*

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \Phi'(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{E}'.$$

Démo :

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathrm{E}$ choisissons une suite $\boldsymbol{x}_k \in \mathrm{E}', k \geq 0$ vérifiant $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k\|_{\mathrm{E}} = 0$. Quitte à prendre k suffisamment grand, on peut supposer $\|\boldsymbol{x}_k\|_{\mathrm{E}} \leq 2\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{E}}$. On a $\|\Phi'(\boldsymbol{x}_k) - \Phi'(\boldsymbol{x}_l)\|_{\mathrm{F}} \leq \|\Phi'\|\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l\|_{\mathrm{E}}$ si bien que la suite $(\Phi'(\boldsymbol{x}_k))_{k\geq 0}$ est de Cauchy pour $\| \|_{\mathrm{F}}$ et converge donc puisque F est complet. On pose alors

$$\Phi(\boldsymbol{x}) := \lim_{k\to\infty} \Phi'(\boldsymbol{x}_k). \tag{3.5}$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ convergeant vers $\boldsymbol{x}$. En effet si $\boldsymbol{y}_k \in \mathrm{E}', k \geq 0$ est une autre suite convergeant vers $\boldsymbol{x}$, on aura $\|\Phi'(\boldsymbol{x}_k) - \Phi'(\boldsymbol{y}_k)\|_{\mathrm{F}} \leq \|\Phi'\|\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{y}_k\|_{\mathrm{E}}$ pour k suffisamment grand, de sorte que $\lim_{k\to\infty} \Phi'(\boldsymbol{x}_k) = \lim_{k\to\infty} \Phi'(\boldsymbol{y}_k)$.

Le caractère linéaire (resp. antilinéaire) de Φ provient de la linéarité de la limite et du fait que Φ' est elle-même linéaire (resp. antilinéaire). Pour démontrer que Φ est continue, il suffit d'écrire (3.3) pour $\boldsymbol{x}_k \in \mathrm{E}'$ et de faire $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x} \in \mathrm{E}$ en utilisant (3.5). Enfin un tel prolongement continue Φ de Φ' est unique, car si Ψ est un autre prolongement continue de Φ' vérifiant les même propriétés alors $\Phi(\boldsymbol{x}) = \Psi(\boldsymbol{x})\forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{E}'$, et donc $\Phi(\boldsymbol{x}) = \Psi(\boldsymbol{x})\forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{E}$ par continuité et densité de E′ dans E. □

3.3 Projection sur un sous-espace fermé

Definition 3.9.
Un sous-ensemble $\mathrm{M} \subset \mathrm{H}$ *d'un espace de Hilbert est un sous-espace vectoriel si pour tout* $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathrm{M}$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{C}$ *on a* $\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v} \in \mathrm{M}$.

La norme $\| \ \|$ sur H associée au produit scalaire induit une norme sur M. Si M est fermé pour cette norme, alors il est complet (un fermé dans un complet est lui-même complet), et c'est donc un sous-espace qui est lui-même un espace de Hilbert (pour le produit scalaire induit).

Théorème 3.10.
Soit H *un espace de Hilbert et* $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ *un sous-espace fermé non vide. Alors pour tout* $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}$ *il existe un unique* $\boldsymbol{f} \in \mathrm{F}$ *tel que*

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}\| = \min_{\boldsymbol{v}\in\mathrm{F}} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|.$$

Démo :
A l'aide de calculs élémentaires, on montre facilement l'identité suivante (dite identité du trapèze) :

$$\|\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}'\|^2 + \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}'\|^2 = 2\|\boldsymbol{w}\|^2 + 2\|\boldsymbol{w}'\|^2 \qquad \forall \boldsymbol{u}, y \in \mathrm{H}. \tag{3.6}$$

Notons $\delta := \inf_{\boldsymbol{v}\in\mathrm{F}} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$. Prenons $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \mathrm{F}$ et appliquons (3.6) avec $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}'$. On obtient $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'\|^2 = 2\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}'\|^2 - \|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' - 2\boldsymbol{u}\|^2$. Si $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}' \in \mathrm{F}$ vérifient tous les deux $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}\| = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}'\| = \delta$ alors on obtient

$$\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}'\|^2 = 4\delta^2 - 4\underbrace{\|\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}')/2\|^2}_{\geq \delta^2} \leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$

d'où $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}'$. Il y a donc unicité de $\boldsymbol{f} \in \mathrm{F}$ vérifiant $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}\| = \delta$. Vérifions qu'un tel $\boldsymbol{f}$ existe. Soit $\boldsymbol{v}_k \in \mathrm{F}, k \geq 0$ une suite telle que

$$\|\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{u}\|^2 \leq \inf_{\boldsymbol{v}\in\mathrm{F}} \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|^2 + 1/k^2 \tag{3.7}$$

De ceci on tire en particulier que $\|\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}\|^2 \leq 1/k^2$ pour tout $\boldsymbol{w} \in \mathrm{F}$. Montrons que la suite $(\boldsymbol{v}_k)$ est de Cauchy pour la norme $\| \ \|$. On applique pour cela (3.6) à $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_m$ et $\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_k$ et, puisque $\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}_m)/2 \in \mathrm{F}$, on en tire

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_k\|^2 &\leq 2\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_m\|^2 + 2\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_k\|^2 - 4\|\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{v}_m + \boldsymbol{v}_k)/2\|^2 \\
&\leq 2(\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_m\|^2 - \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{h}\|^2) + 2(\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_k\|^2 - \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{h}\|^2) \\
&\leq 2/k^2 + 2/m^2.
\end{aligned}$$

Donc $(\boldsymbol{v}_k)$ est de Cauchy et comme F est complet, cette suite converge dans F vers une limite $\boldsymbol{f} \in \mathrm{F}$. Par continuité, on peut alors passer à la limite dans (3.7) pour $k \to \infty$, et on en tire $\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{u}\| \leq \inf_{\boldsymbol{v}\in\mathrm{F}} \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|$. □

Corollaire 3.11.
Avec les hypothèses du théorème précédent, on a $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) = 0 \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{F}$.

Démo :
Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} + t\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}\|^2 + 2t\,\Re e\{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})\} + t^2\|\boldsymbol{v}\|^2$. Puisque $\boldsymbol{f} - t\boldsymbol{v} \in \mathrm{F}$, la propriété de minimisation satisfaite par $\boldsymbol{f}$ implique $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}\|^2 \leq \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} + t\boldsymbol{v}\|^2$. On en tire alors $2t\Re e\{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})\} + t^2\|\boldsymbol{v}\|^2 \geq 0$. En divisant cette dernière inégalité par $|t|$, et en faisant $t \to 0, t > 0$ on en tire : $\Re e\{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})\} \geq 0$. De même, en faisant $t \to 0, t < 0$ on obtient $\Re e\{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})\} \leq 0$. On a donc finalement

$$\Re e\{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})\} = 0.$$

ceci vaut pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathrm{F}$. On peut donc considérer $\imath \boldsymbol{v}$ au lieu de $\boldsymbol{v}$ (où $\imath = \sqrt{-1}$), on obtient $0 = \Re e\{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f}, \imath\boldsymbol{v})\} = \Re e\{-\imath(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})\} = \Im m\{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})\} = 0$. Finalement on conclut que $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) = 0$. $\square$

Rappelons que si E, F sont deux sous-espaces d'un espace vectoriel H alors on dit qu'il sont en somme directe lorsque $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \{0\}$. On convient alors d'écrire $\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}$ au lieu de $\mathrm{E} + \mathrm{F}$.

Proposition 3.12.
Soit F *un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert* H *muni du produit scalaire* (,). *On note* $\mathrm{F}^{\perp} := \{\boldsymbol{u} \in \mathrm{H},\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{F}\}$. *Alors* $\mathrm{F}^{\perp}$ *est lui-même un sous-espace fermé et on a* $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$.

Démo :
Il est élémentaire de vérifier que $\mathrm{F}^{\perp}$ est un espace vectoriel. Étant donné un $\boldsymbol{v} \in \mathrm{F}$, notons $\varphi_{\boldsymbol{v}} : \mathrm{H} \to \mathbb{C}$ l'application linéaire $\varphi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}) := (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. L'application $\varphi_{\boldsymbol{v}}$ est continue d'après le corollaire 3.7 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, si bien que $\mathrm{Ker}(\varphi_{\boldsymbol{v}}) = \varphi_{\boldsymbol{v}}^{-1}(\{0\})$ est fermé. Puisque $\mathrm{F}^{\perp} = \cap_{\boldsymbol{v} \in \mathrm{F}} \mathrm{Ker}(\varphi_{\boldsymbol{v}})$ et que toute intersection de fermés est fermée, on en déduit que $\mathrm{F}^{\perp}$ est fermé.
Si $\boldsymbol{u} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{F}^{\perp}$ alors $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$ d'après la définition de $\mathrm{F}^{\perp}$, d'où $\boldsymbol{u} = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^{\perp} = \{0\}$. Autrement dit F et $\mathrm{F}^{\perp}$ sont en somme directe.
Enfin si $\boldsymbol{u}$ désigne un élément arbitraire de H, soit $\boldsymbol{f} \in \mathrm{F}$ l'unique élément de F vérifiant $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}\| = \inf_{\boldsymbol{v} \in \mathrm{F}} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$, l'existence d'un tel élément étant garantie par le théorème 3.10. Si l'on pose par ailleurs $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}$, on a $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$. D'après le corollaire 3.11, on a $\boldsymbol{g} \in \mathrm{F}^{\perp}$. Comme $\boldsymbol{u}$ était arbitrairement choisi dans H, nous venons d'établir que $\mathrm{H} = \mathrm{F} + \mathrm{F}^{\perp}$. $\square$

3.4 Résultats d'existence-unicité

Pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}$ l'application $\boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est anti-linéaire, c'est-à-dire $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \alpha z) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \overline{\alpha}(\boldsymbol{u}, z) \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, z \in \mathrm{H}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, et continue d'après le lemme 3.4. Le théorème suivant, fondamental en analyse hilbertienne, nous dit que c'est en fait la forme que prennent toutes les fonctionnelles antilinéaires continues.

Théorème 3.13 (Représentation de Riesz).
Soit H *un espace de Hilbert muni du produit scalaire* $(\cdot, \cdot)$ *et de la norme* $\|\cdot\|$ *correspondante. Pour toute forme anti-linéaire continue* $\ell : \mathrm{H} \to \mathbb{C}$ *il existe un unique* $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}$ *tel que*

$$\ell(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}.$$

De plus cette correspondance est isométrique :

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sup_{\boldsymbol{v} \in \mathrm{H} \setminus \{0\}} \frac{|\ell(\boldsymbol{v})|}{\|\boldsymbol{v}\|}. \tag{3.8}$$

Démo :
Vérifions d'abord l'unicité. Supposons que, pour un $\ell(\cdot)$ donné, il existe $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \mathrm{H}$ tels que $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \ell(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}) \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}$. Alors $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}) = 0 \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}$ et en choisissant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'$ on obtient $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'\|^2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$.
On vérifie maintenant l'existence. Soit $\mathrm{F} := \mathrm{Ker}(\ell) = \ell^{-1}(\{0\})$. C'est un sous-espace fermé de H car ℓ est continue. On peut supposer que $\mathrm{F} \neq \mathrm{H}$, sinon $\ell = 0$ et le théorème est

trivialement vérifié avec $\boldsymbol{u} = 0$. Donc, d'après la proposition 3.12, on a $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$ avec $\mathrm{F}^{\perp} \neq \{0\}$. Choisissons $\boldsymbol{w} \in \mathrm{F}^{\perp} \setminus \{0\}$ avec $\|\boldsymbol{w}\| = 1$, et posons $\boldsymbol{u} = \ell(\boldsymbol{w})\, \boldsymbol{w}$. On a alors pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= (\ell(\boldsymbol{w})\, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = \ell(\boldsymbol{w})(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w}, \overline{\ell(\boldsymbol{w})}\boldsymbol{v}) \\ &= (\boldsymbol{w}, \underbrace{\overline{\ell(\boldsymbol{w})}\boldsymbol{v} - \overline{\ell(\boldsymbol{v})}\boldsymbol{w}}_{\in \mathrm{Ker}(\ell) = \mathrm{F}}) + \ell(\boldsymbol{v})\underbrace{(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})}_{=1} = \ell(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

ce qui démontre la partie existence de l'énoncé. De ceci on tire que $|\ell(\boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{u}\|\, \|\boldsymbol{v}\|$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}$ par Cauchy-Schwarz. Donc en divisant par $\|\boldsymbol{v}\|$, et en prenant la borne sup en $\boldsymbol{v}$, on obtient

$$\sup_{\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}\setminus\{0\}} \frac{|\ell(\boldsymbol{v})|}{\|\boldsymbol{v}\|} \leq \|\boldsymbol{u}\| = \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|} = \frac{|\ell(\boldsymbol{u})|}{\|\boldsymbol{u}\|} \leq \sup_{\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}\setminus\{0\}} \frac{|\ell(\boldsymbol{v})|}{\|\boldsymbol{v}\|}.$$

□

Une application immédiate et très utile permet d'associer à toute forme sesquilinéaire un opérateur continu.

Lemme 3.14.
Soit H *un espace de Hilbert muni du produit scalaire* $(\cdot,\cdot)$. *Pour toute forme sesquilinéaire continue* $a(\cdot,\cdot) : \mathrm{H} \times \mathrm{H} \to \mathbb{C}$ *il existe une unique application linéaire continue* $\mathrm{A} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ *tel que* $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\mathrm{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *pour tout* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}$.

Démo:
Pour un $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}$ fixé, l'application $\boldsymbol{v} \mapsto a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est anti-linéaire. Donc d'après le théorème de Riesz, il existe un unique $\mathrm{A}(\boldsymbol{u}) \in \mathrm{H}$ tel que $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\mathrm{A}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}$. Comme $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}$ était choisi arbitrairement on a même

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\mathrm{A}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}. \tag{3.9}$$

Vérifions que l'application $\mathrm{A} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ ainsi construite est linéaire et continue. Tout d'abord pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathrm{H}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $(\mathrm{A}(\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{w}), \boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \lambda a(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = (\mathrm{A}(\boldsymbol{u}) + \lambda\mathrm{A}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{v})$, c'est-à-dire $(\mathrm{A}(\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{w}) - \mathrm{A}(\boldsymbol{u}) - \lambda\mathrm{A}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{v}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}$. En choisissant $\boldsymbol{v} = \mathrm{A}(\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{w}) - \mathrm{A}(\boldsymbol{u}) - \lambda\mathrm{A}(\boldsymbol{w})$ dans cette dernière identité, on trouve $\|\mathrm{A}(\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{w}) - \mathrm{A}(\boldsymbol{u}) - \lambda\mathrm{A}(\boldsymbol{w})\|^2 = 0$ d'où l'on tire finalement

$$\mathrm{A}(\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{w}) = \mathrm{A}(\boldsymbol{u}) + \lambda\mathrm{A}(\boldsymbol{w}) \;\; \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \mathrm{H},\; \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.10}$$

Par ailleurs, en choisissant $\boldsymbol{v} = \mathrm{A}(\boldsymbol{u})$ dans (3.9), en utilisant la continuité de $a(\cdot,\cdot)$ et le corollaire 3.7 *ii)*, on trouve une constante $C > 0$ telle que $\|\mathrm{A}(\boldsymbol{u})\|^2 = a(\boldsymbol{u}, \mathrm{A}(\boldsymbol{u})) \leq C\|\boldsymbol{u}\|\, \|\mathrm{A}(\boldsymbol{u})\|$. On en tire donc $\|\mathrm{A}(\boldsymbol{u})\| \leq C\|\boldsymbol{u}\| \forall \boldsymbol{u} \in \mathrm{H}$ et, en appliquant le corollaire 3.7 on en tire finalement la continuité de A. □

Voici maintenant un théorème charnière qui est la base de beaucoup de résultats d'existence/unicité pour les EDP elliptique.

Théorème 3.15 (Lax-Milgram).
Soit V *un espace de Hilbert muni du produit scalaire* $(\cdot,\cdot)$. *Soit* $a(\cdot,\cdot) : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{C}$ *une forme sesquilinéaire continue telle qu'il existe* $\alpha > 0$ *et*

$$\textit{coercivité :} \qquad |a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})| \geq \alpha\|\boldsymbol{v}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}. \tag{3.11}$$

Alors pour toute forme anti-linéaire continue $\ell : \mathrm{V} \to \mathbb{C}$ *il existe un unique* $\boldsymbol{u} \in \mathrm{V}$ *tel que* $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \ell(\boldsymbol{v})\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}$. *De plus on a* $\|\boldsymbol{u}\| \leq \|\ell\|/\alpha$ *où* $\|\ell\| := \sup_{\boldsymbol{v}\in \mathrm{V}\setminus\{0\}} |\ell(\boldsymbol{v})|/\|\boldsymbol{v}\|$.

Démo :

Montrons d'abord l'unicité. Si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \mathrm{V}$ sont deux élements vérifiant $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}) = \ell(\boldsymbol{v})\forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}$, on en déduit $a(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathrm{V}$. En choisissant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'$ et en utilisant (3.11), on en déduit que $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' = 0$.

Notons maintenant $\mathrm{A} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ l'unique application linéaire continue vérifiant $(\mathrm{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ dont l'existence est garantie par le lemme 3.14. D'après (3.11) on a $\alpha\|\boldsymbol{u}\|^2 \leq \Re e\{(\mathrm{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\} \leq |(\mathrm{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})| \leq \|\mathrm{A}\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{u}\|$, c'est-à-dire

$$\alpha\|\boldsymbol{u}\| \leq \|\mathrm{A}\boldsymbol{u}\| \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathrm{V}. \tag{3.12}$$

Cette inégalité montre que A est injectif. Elle implique aussi que le sous-espace $\mathrm{F} := \mathrm{Im}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{V}$ est fermé. En effet si $\boldsymbol{f}_n = \mathrm{A}(\boldsymbol{u}_n) \in \mathrm{F}$ est une suiste convergeant vers un $\boldsymbol{f} \in \mathrm{V}$, cette suite est de Cauchy, et comme $\|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_m\| \leq \|\boldsymbol{f}_n - \boldsymbol{f}_m\|/\alpha$, on en déduit que $(\boldsymbol{u}_n)$ est de Cauchy également donc converge vers un $\boldsymbol{u} \in \mathrm{V}$ car V est complet (c'est un espace de Hilbert), et on déduit finalement que $\boldsymbol{f} = \mathrm{A}(\boldsymbol{u}) \in \mathrm{Im}(\mathrm{A})$ par continuité de A.

Pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathrm{F}^\perp$, d'après (3.11), on a $\|\boldsymbol{u}\|^2 \leq |(\mathrm{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})|/\alpha = 0$. Ce qui montre que $\mathrm{F}^\perp = \{0\}$ et donc $\mathrm{V} = \mathrm{F}$ par application de la proposition 3.12. Ceci montre que $\mathrm{A} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ est surjectif et donc c'est une bijection, et (3.12) implique que A^{-1} est continue puisque

$$\|\mathrm{A}^{-1}(\boldsymbol{f})\| \leq \|\boldsymbol{f}\|/\alpha \quad \forall \boldsymbol{f} \in \mathrm{V}. \tag{3.13}$$

D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $\boldsymbol{f} \in \mathrm{V}$ tel que $\ell(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}$. Soit $\boldsymbol{u} = \mathrm{A}^{-1}(\boldsymbol{f})$. Alors pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathrm{V}$ on a $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\mathrm{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) = \ell(\boldsymbol{v})$. De plus (3.13) et (3.8) impliquent $\|\boldsymbol{u}\| \leq \|\boldsymbol{f}\|/\alpha = \|\ell\|/\alpha$. □

Le théorème précédent est d'un usage constant tant sur le plan théorique que numérique. Il donne des conditions suffisantes les problèmes de la forme suivante admettent une unique solution

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathrm{V} \text{ tel que} \\ a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in \mathrm{V}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Un problème écrit sous cette forme est dit variationnel. C'est la forme type sous laquelle nous allons ramener les problèmes que nous étudierons dans ce cours, y compris quand il s'agira de résolution numérique effective. Notez bien que le théorème 3.15 comporte quatre hypothèses :

Hypothèse 1 : complétude de H (Hilbert),
Hypothèse 2 : continuité de $\ell(\cdot)$,
Hypothèse 3 : continuité de $a(\cdot, \cdot)$,
Hypothèse 4 : coercivité de $a(\cdot, \cdot)$.

Une forme sesquilinéaire vérifiant (3.11) est dite coercive. En pratique, c'est la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ qui est la plus délicate à vérifier. A noter que le théorème précédent s'accompagne d'un résultat de dépendance continue de la solution $\boldsymbol{u}$ par rapport à la donnée ℓ.

3.5 Fonctions de carré intégrable

Nous discutons à présent l'exemple le plus important d'espace fonctionnel admettant une structure hilbertienne. Il s'agit des fonctions de carré intégrable. Dans toute la suite de ce cours, nous considérerons systématiquement la mesure de Lebesgue notée $d\boldsymbol{x}$ lorsqu'il s'agira d'intégrer sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$. L'intégration sur une surface, telle que définie au §2.5, constitue une exception à cette règle qui ne devrait cependant pas générer d'ambiguité. Toujours est-il que, lorsque nous écrirons "presque partout" ou "mesurable", ces expressions renverront systématiquement à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Structure hilbertienne

Étant donné un ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, nous noterons $\mathrm{L}^2(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables $u : \Omega \to \mathbb{C}$ définies presque partout et de carré intégrable $\int_\Omega |u(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} < +\infty$. Cet espace est muni du produit scalaire et de la norme associés

$$\begin{aligned} (u,v)_{\mathrm{L}^2(\Omega)} &:= \int_\Omega u(\boldsymbol{x})\overline{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \\ \|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} &:= (\int_\Omega |u(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x})^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Théorème 3.16.
Pour tout ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, l'espace $\mathrm{L}^2(\Omega)$ muni du produit scalaire (3.15) est un espace de Hilbert.

Démo :
On sait déjà que c'est un espace pré-hilbertien, il s'agit uniquement de démontrer la complétude pour la norme (3.15). Soit $u_n \in \mathrm{L}^2(\Omega), n \geq 0$ une suite de Cauchy : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que $\|u_n - u_m\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} < \epsilon$ dès que $n, m \geq N$. On peut donc trouver une suite strictement croissante $n_0 < n_1 < \dots$ telle que $\|u_{n_k} - u_{n_{k-1}}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq 1/2^k$. Définissons $f_k(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^k |u_{n_j}(\boldsymbol{x}) - u_{n_{j-1}}(\boldsymbol{x})|$. D'après l'inégalité triangulaire on a $\|f_k\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^k 1/2^j \leq 1$,

$$\int_\Omega |f_k(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} \leq 1 \quad \forall k \geq 1. \tag{3.16}$$

La fonction $f(\boldsymbol{x}) := \sum_{k=1}^\infty |u_{n_k}(\boldsymbol{x}) - u_{n_{k-1}}(\boldsymbol{x})| = \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})$ définie presque partout est mesurable. Par le théorème de convergence monotone appliqué à la suite croissante $|f_k(\boldsymbol{x})|^2$, on a $\int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} \leq 1$. Par convergence dominée on obtient alors $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f(\boldsymbol{x}) - f_k(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} = 0$. Par ailleurs $|f(\boldsymbol{x})| < +\infty$ pour presque tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$ puisque la fonction $|f|^2$ est intégrable. On en déduit que la série $\sum_{k\geq 1}(u_{n_k}(\boldsymbol{x}) - u_{n_{k-1}}(\boldsymbol{x}))$ est absolument convergente pour presque tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$ et donc que la suite

$$u_{n_k}(\boldsymbol{x}) = u_{n_0}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^k u_{n_j}(\boldsymbol{x}) - u_{n_{j-1}}(\boldsymbol{x}) \tag{3.17}$$

converge presque partout vers une fonction mesurable définie presque partout que nous noterons $u(\boldsymbol{x}) = \lim_{k\to\infty} u_{n_k}(\boldsymbol{x})$. Pour tout $k, m \geq 0$ on a $|u(\boldsymbol{x}) - u_m(\boldsymbol{x})| \leq |u(\boldsymbol{x}) - u_{n_k}(\boldsymbol{x})| +$

$|u_{n_k}(\boldsymbol{x}) - u_m(\boldsymbol{x})| \leq |f(\boldsymbol{x}) - f_k(\boldsymbol{x})| + |u_{n_k}(\boldsymbol{x}) - u_m(\boldsymbol{x})|$ presque partout. En intégrant sur Ω, on tire

$$\int_\Omega |u(\boldsymbol{x}) - u_m(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} \leq 2\|f - f_k\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + 2\|u_{n_k} - u_m\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \tag{3.18}$$

Cette inégalité montre que $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Montrons maintenant $\lim_{m\to\infty} \|u - u_m\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 0$. Fixons un $\epsilon > 0$ arbitraire. La suite (u_n) étant de Cauchy, pour $\epsilon > 0$ il existe $N \geq 0$ tel que $\|u_p - u_q\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \epsilon^2/4$ dès que $p, q \geq N$. Pour m tel que $m \geq N$, l'inégalité (3.18) fournit alors $\|u - u_m\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq 2\epsilon^2/4 + 2\epsilon^2/4 = \epsilon^2$ en choisissant k tel que $n_k \geq N$ et $\|f - f_k\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} < \epsilon^2/4$. $\square$

On peut proposer de nombreuses variantes de l'espace des fonctions de carré intégrable. Étant donné un entier $k \geq 1$, nous serons par exemple amenés à considérer l'espace $\mathrm{L}^2(\Omega)^k := \{\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{C}^k \text{ mesurable }, \int_\Omega |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} < +\infty\}$ des fonctions de carré intégrables à valeur dans $\mathbb{C}^k$ (à valeur vectorielle donc) muni du produit scalaire

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\mathrm{L}^2(\Omega)^k} := \int_\Omega \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})^\top \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

En revenant sur la notion de fonction intégrable sur $\partial\Omega$ considérée à la fin de la section 2.5, nous serons également amené à considérer l'espace $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$ des fonctions $u : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ de carré intégrable muni du produit scalaire

$$(u, v)_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)} := \int_{\partial\Omega} u\overline{v}\, d\sigma$$

où l'intégrale ci-dessus doit être comprise comme au paragraphe 2.5. En reprenant les arguments du théorème précédent (modulo le recours à des cartes locales éventuellement), on démontre encore que $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Régularisation et densité

Nous allons montrer que les fonctions de carré intégrable peuvent être approchées par des fonctions infiniment régulières. Nous nous appuierons sur la technique de régularisation par convolution illustrée par le lemme suivant.

Lemme 3.17.
Soit $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et posons $u \star \rho_\delta(\boldsymbol{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} u(\boldsymbol{y})\rho_\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$ où $\rho_\delta(\boldsymbol{x}) = \delta^{-d}\rho(\boldsymbol{x}/\delta)$ et $\rho(\boldsymbol{x})$ est la fonction définie par (1.12). Alors on a :
i) $u \star \rho_\delta \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$,
ii) $\|u \star \rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$,
iii) $\lim_{\delta\to 0} \|u - u \star \rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = 0$.

Démo :
On obtient tout d'abord $u \star \rho_\delta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ par le théorème de dérivation sous le signe intégral. Ensuite un simple changement de variable nous montre que $u \star \rho_\delta(\boldsymbol{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} u(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\rho_\delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$ et, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l'intégrale en $\boldsymbol{y}$ et le théorème

de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} |u \star \rho_\delta(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\rho_\delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\Big)^2 d\boldsymbol{x} \le \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|^2\rho_\delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\int_{\mathbb{R}^d}\rho_\delta(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z}d\boldsymbol{x} \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|^2 d\boldsymbol{x}\Big)\rho_\delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} \le \|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}\int_{\mathbb{R}^d}\rho_\delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

De ce premier calcul on tire que $\|u\star\rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \le \|u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty$ et donc $u\star\rho_\delta \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Pour démontrer le dernier point *iii)*, on se donne un $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et un $\epsilon > 0$. On sait par un théorème classique de théorie de l'intégration [17, thm.3.14], qu'il existe une fonction continue à support borné $\tilde{u} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|u-\tilde{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \le \epsilon/3$. On applique ensuite un calcul similaire à ce qui précède à la différence $\tilde{u} - \tilde{u}\star\rho_\delta$ ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{u}(\boldsymbol{x}) - \tilde{u}\star\rho_\delta(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} &\le \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{u}(\boldsymbol{x}) - \tilde{u}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\rho_\delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\Big)^2 d\boldsymbol{x} \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{u}(\boldsymbol{x}) - \tilde{u}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|^2\rho_\delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\int_{\mathbb{R}^d}\rho_\delta(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z}d\boldsymbol{x} \qquad (3.19)\\
&\le \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{u}(\boldsymbol{x}) - \tilde{u}(\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{y})|^2\rho(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

Pour tout $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d, \boldsymbol{y}\in\overline{\mathrm{B}}(0,1)$ on a $\lim_{\delta\to 0}|\tilde{u}(\boldsymbol{x}) - \tilde{u}(\boldsymbol{x}-\delta\boldsymbol{y})| = 0$ par continuité de $\tilde{u}$. D'après le théorème de convergence dominée, il existe donc $\delta > 0$ tel que $\|\tilde{u}-\tilde{u}\star\rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \le \epsilon/3$. Pour conclure on a donc $\|u-u\star\rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \le \|u-\tilde{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} + \|\tilde{u}-\tilde{u}\star\rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} + \|(\tilde{u}-u)\star\rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \le \epsilon/3 + 2\|u-\tilde{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \le \epsilon$. □

Théorème 3.18.
☞ *Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ un ouvert. Alors l'espace $\mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ pour la norme $\|\ \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ i.e. pour tout $u\in\mathrm{L}^2(\Omega)$, il existe une suite $\varphi_n\in\mathscr{C}^\infty_0(\Omega)$ à support borné telle que $\lim_{n\to\infty}\|u-\varphi_n\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 0$.*

Démo :
On choisit $u\in\mathrm{L}^2(\Omega)$ fixé et $\epsilon > 0$ arbitraire. Nous allons montrer qu'il existe $\varphi\in\mathscr{C}^\infty_0(\Omega)$ tel que $\|u-\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \epsilon$. Définissons $d_\Omega(\boldsymbol{x}) := \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d\setminus\Omega}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ dont on montre facilement qu'il s'agit d'une fonction 1-Lipschitzienne $|d_\Omega(\boldsymbol{x}) - d_\Omega(\boldsymbol{x}')| \le |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ et donc continue. On considère ensuite la suite croissante d'ensembles compacts $\mathrm{K}_n := \{\boldsymbol{x}\in\Omega, |\boldsymbol{x}|\le n \text{ et } d_\Omega(\boldsymbol{x}) \ge 1/n\}$ satisfaisant $\Omega = \cup_{n=1}^\infty \mathrm{K}_n$. Par convergence dominée on a donc $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x})1_{\mathrm{K}_n}(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} = 0$. On choisit $n\ge 0$ suffisament grand pour que

$$\|u-\tilde{u}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \epsilon/2 \quad \text{avec} \quad \tilde{u}(\boldsymbol{x}) := u(\boldsymbol{x})1_{\mathrm{K}_n}(\boldsymbol{x}). \qquad (3.20)$$

Quitte à étendre $\tilde{u}$ par zéro de sorte que $\tilde{u}\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, et en considérant la fonction convolée $\tilde{u}\star\rho_\delta$ comme définie au lemme 3.17, on remarque que, pour $3\delta < 1/n$, on a $\mathrm{supp}(\tilde{u}\star\rho_\delta) \subset \mathrm{supp}(\tilde{u}) + \mathrm{supp}(\rho_\delta) \subset \mathrm{K}_n + \mathrm{B}(0,\delta) \subset \Omega$ si bien que $\tilde{u}\star\rho_\delta \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega)$. D'après le lemme 3.17, on peut donc choisir $\varphi = \tilde{u}\star\rho_\delta$ avec $\delta > 0$ assez petit pour que $\|\tilde{u}-\tilde{u}\star\rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \epsilon/2$. On obtient finalement $\|u-\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \|u-\tilde{u}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{u}-\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \epsilon/2+\epsilon/2 = \epsilon$. □

On dit que l'espace $\mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ pour la norme $\|\ \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$. Ce résultat, très utile, permettra dans certains cas d'étendre à tout $\mathrm{L}^2(\Omega)$, des résultats dont on aura démontré qu'ils sont vrais dans $\mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)$. Voici en particulier une conséquence intéressante.

Corollaire 3.19.
Si $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ *vérifie* $\int_\Omega u(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0 \forall \varphi \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)$ *alors* $u = 0$.

Démo :
En appliquant le théorème 3.18, on choisit une suite $\varphi_n \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega)$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|u - \varphi_n\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 0$. Comme l'application $\ell : \mathrm{L}^2(\Omega) \to \mathbb{C}$ définie par $\ell(v) := \int_\Omega u\overline{v}d\boldsymbol{x}$ est continue d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le corollaire 3.7, on en déduit que $0 = \lim_{n\to\infty} \ell(\varphi_n) = \ell(\lim_{n\to\infty} \varphi_n) = \|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$. □

3.6 Bases hilbertiennes

Rappelons tout d'abord qu'un espace est dit séparable lorsqu'il admet un sous-ensemble dénombrable dense. La grande majorité des espaces fonctionnels que l'on rencontre dans la pratique sont séparables. En particulier on admettra le résultat suivant dont on pourra trouver la démonstration dans [4, Thm.4.13 & Prop.9.1].

Proposition 3.20.
Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *l'espace* $\mathrm{L}^2(\Omega)$ *est séparable.*

Rappelons par ailleurs que, si H est un Hilbert et $\mathcal{E} \subset \mathrm{H}$ un sous-ensemble, l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{E}$ est défini par $\mathrm{vect}(\mathcal{E}) := \{\sum_{\boldsymbol{e}\in\mathcal{F}} \lambda_{\boldsymbol{e}}\, \boldsymbol{e} \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{E}, \mathrm{card}(\mathcal{F}) < +\infty, \lambda_{\boldsymbol{e}} \in \mathbb{C}\}$ c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires *finies* d'éléments de $\mathcal{E}$.

Definition 3.21.
Soit H *un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire* $(\ ,\ )$. *On appelle base hilbertienne de* H *une famille* $\boldsymbol{e}_j \in \mathrm{H}, j \geq 0$ *telle que*
i) $\mathrm{vect}_{j\geq 0}\{\boldsymbol{e}_j\}$ *est dense dans* H,
ii) $(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = 0\ \forall j, k \geq 0, j \neq k$,
iii) $\|\boldsymbol{e}_j\| = 1\ \forall j \geq 0$.

Une base hilbertienne joue en dimension infinie le même rôle que les base orthonormale en dimension finie. Ici la complétude des espaces de Hilbert est une propriété capitale. Tout élément d'un espace de Hilbert se décompose sur une telle base.

Proposition 3.22.
Soit H *un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire* $(\ ,\ )$ *et d'une base hilbertienne* $\{\boldsymbol{e}_j\}_{j\geq 0}$. *Alors pour tout* $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}$, *notons* $u_j := (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_j) \in \mathbb{C}$. *Alors on a*
- $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{u} - (u_0\boldsymbol{e}_0 + \cdots + u_k\boldsymbol{e}_k)\| = 0$
- $\|\boldsymbol{u}\|^2 = \sum_{j=0}^\infty |u_j|^2$ *(identité de Bessel)*

Démo :
Définissons un opérateur linéaire $\mathrm{S}_k : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ par $\mathrm{S}_k(\boldsymbol{u}) := (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_0)\boldsymbol{e}_0 + \cdots + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k$. On commence par démontrer que $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{u} - \mathrm{S}_k(\boldsymbol{u})\| = 0$. Les éléments $\boldsymbol{e}_j$ étant orthonormés entre eux, on a $\|\mathrm{S}_k(\boldsymbol{u})\|^2 = |u_0|^2 + \cdots + |u_k|^2 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_0)\overline{u}_0 + \cdots + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_k)\overline{u}_k = (\boldsymbol{u}, \mathrm{S}_k(\boldsymbol{u}))$, d'où l'on tire que $\|\mathrm{S}_k(\boldsymbol{u})\|^2 \leq \|\mathrm{S}_k(\boldsymbol{u})\|\, \|\boldsymbol{u}\|$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et finalement

$$\|\mathrm{S}_k(\boldsymbol{u})\| \leq \|\boldsymbol{u}\| \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathrm{H}. \tag{3.21}$$

Observons par ailleurs que, pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathrm{vect}_{j\geq 0}\{\boldsymbol{e}_j\}$, on a $\mathrm{S}_k(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ pour k assez grand. Considérons un $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}$ et soit $\epsilon > 0$. On sait par densité (i.e. *i)* de la définition 3.21) qu'il existe $\boldsymbol{u}' \in \mathrm{vect}_{j\geq 0}\{\boldsymbol{e}_j\}$ tel que $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'\| \leq \epsilon$. Soit $N \geq 0$ tel que $\mathrm{S}_N(\boldsymbol{u}') = \boldsymbol{u}'$. Alors en utilisant (3.21), on obtient $\|\boldsymbol{u} - \mathrm{S}_k(\boldsymbol{u})\| = \|(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}') - \mathrm{S}_k(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}')\| \leq 2\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'\| \leq 2\epsilon$ pour tout $k \geq N$. Ceci démontre que $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{u} - \mathrm{S}_k(\boldsymbol{u})\| = 0$. Ensuite, par continuité du produit scalaire, on a

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = \lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{u}, \mathrm{S}_k(\boldsymbol{u})) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} |u_j|^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} |u_j|^2.$$

□

Corollaire 3.23.
Soit H *un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire* (,) *et d'une base hilbertienne* $\{\boldsymbol{e}_j\}_{j\geq 0}$*. si une suite* $v_j \in \mathbb{C}, j \geq 0$ *est de carré intégrable* $\sum_{j=0}^{\infty} |v_j|^2 < +\infty$*, alors il existe* $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}$ *tel que* $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{v} - (v_0\boldsymbol{e}_0 + \cdots + v_k\boldsymbol{e}_k)\| = 0$ *et on a* $\|\boldsymbol{v}\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |v_j|^2$.

Démo :
Supposons donné une suite $v_j \in \mathbb{C}, j \geq 0$ de carré intégrable $\sum_{j=0}^{+\infty} |v_j|^2 < +\infty$. Posons $\boldsymbol{w}_k := v_0\boldsymbol{e}_0 + \cdots + v_k\boldsymbol{e}_k$ et montrons que les $\boldsymbol{w}_k$ forment une suite de Cauchy dans H. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \geq 0$ tel que $\sum_{j=N+1}^{\infty} |v_j|^2 \leq \epsilon$. En utilisant le fait que les $\boldsymbol{e}_j$ sont orthonormés, on obtient

$$\|\boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{w}_p\|^2 = \sum_{j=k+1}^{p} |v_j|^2 \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |v_j|^2 \leq \epsilon \quad \forall k, p \text{ avec } p \geq k \geq N.$$

Puisque H est complet, on en tire l'existence d'un $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}$ tel que $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_k\| = 0$. Par continuité du produit scalaire on obtient ensuite $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j) = \lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{e}_j) = v_j$. On conclut en appliquant l'identité de Bessel de la proposition 3.22 à $\boldsymbol{v}$. □

Proposition 3.24.
Tout espace de Hilbert séparable H *admet une base hilbertienne.*

Démo :
Soit $\{\boldsymbol{u}_n\}_{n\geq 0}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans H. On construit une autre suite $\boldsymbol{v}_n \in \mathrm{H}$ par récurrence. On pose $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{u}_{k_0}$ où $k_0 = \min\{k \geq 0, \boldsymbol{u}_k \neq 0\}$. Ensuite on suppose $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ déjà construits et on définit $\boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{u}_{k_{n+1}}$ où $k_{n+1} = \min\{k \geq 0 \mid \boldsymbol{u}_k \notin \mathrm{vect}\{\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}\}$. Alors par construction $\{\boldsymbol{u}_j\}_{j=0\ldots n} \in \mathrm{vect}_{k=0\ldots n}\{\boldsymbol{v}_k\}$, de sorte que $\mathrm{vect}_{n\geq 0}\{\boldsymbol{v}_n\}$ est dense dans H et les $\boldsymbol{v}_n$ sont linéairement indépendants. On obtient alors une base hilbertienne en appliquant un procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n\geq 0}$. □

Nous terminerons ce chapitre en examinant une application concrète de la notion de base hilbertienne à l'espace $\mathrm{L}^2(]-\pi, \pi[)$ que l'on s'autorisera à noter $\mathrm{L}^2(-\pi, \pi)$ (notation anglo-saxonne).

Proposition 3.25.
La famille $\{\mathfrak{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *des harmoniques de Fourier définie par* $\mathfrak{e}_n(x) := \exp(\imath n x)/\sqrt{2\pi}, n \in \mathbb{Z}$*,* $-\pi < x < \pi$ *forme une base hilbertienne de* $\mathrm{L}^2(-\pi, \pi)$ *muni de son produit scalaire usuel* (3.15).

Démo :
Il est clair que la famille $(\mathfrak{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée au sens de (3.15). Nous devons donc établir que $\mathrm{vect}_{n\in\mathbb{Z}}\{\mathfrak{e}_n\}$ est dense dans $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$. D'après le théorème 3.18, il suffit de montrer que toute fonction $u\in\mathscr{C}_0^\infty(]-\pi,\pi[)$ peut être approchée au sens de la norme $\|\ \|_{\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)}$ par des éléments de $\mathrm{vect}_{n\in\mathbb{Z}}\{\mathfrak{e}_n\}$. Quitte à prolonger par périodicité $u(x+2n\pi)=u(x)\forall n\in\mathbb{Z},\forall x\in[-\pi,\pi]$, on se ramène à considérer le cas où u est 2π-périodique et appartient à $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Étant donné $k\geq 0$, nous allons approcher u par la fonction $\mathrm{P}_k(u)$ définie par

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_k(u)(x):=\int_{-\pi}^{\pi}u(y)\mathrm{Q}_k(x-y)dy\\&\text{avec}\quad \mathrm{Q}_k(x):=c_k\cos^{2k}\Big(\frac{x}{2}\Big)\end{aligned}\tag{3.22}$$

avec $c_k>0$ choisi pour garantir $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Q}_k(x)dx=1$. Un calcul simple en fournit une estimation : $2/(2k+1)=\int_0^\pi\cos^{2k}(x/2)\sin(x/2)dx\leq\int_0^\pi\cos^{2k}(x/2)dx=1/(2c_k)$. La fonction Q_k est clairement décroissante sur $[0,\pi]$ et $\mathrm{Q}_k(-x)=\mathrm{Q}_k(x)$, si bien que, pour tout $0<\delta\leq\pi$, on a la limite

$$\sup_{\delta\leq|x|\leq\pi}|Q_k(x)|\leq Q_k(\delta)\leq\Big(\frac{2k+1}{4}\Big)\cos^{2k}\Big(\frac{\delta}{2}\Big)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0.\tag{3.23}$$

Rappelons que $2\cos^2(x/2)=\cos(x)+1$ de sorte qu'il existe $a_{k,n}\in\mathbb{C},n=-k,\dots,k$ tels que $\mathrm{Q}_k(x)=\sum_{|n|\leq k}a_{k,n}\mathfrak{e}_n(x)$. Puisque par ailleurs $\mathfrak{e}_n(x-y)=\sqrt{2\pi}\,\mathfrak{e}_n(x)\mathfrak{e}_n(-y)$, on déduit $\mathrm{P}_k(u)=\sqrt{2\pi}\sum_{|n|\leq k}a_{k,n}(u,\mathfrak{e}_n)_{\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)}\mathfrak{e}_n$ d'où l'on tire finalement que $\mathrm{P}_k(u)\in\mathrm{vect}_{n\in\mathbb{Z}}\{\mathfrak{e}_n\}$. Il nous reste à montrer que $\mathrm{P}_k(u)$ tend vers u dans la norme de l'espace $\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$. On a

$$\begin{aligned}\|u-\mathrm{P}_k(u)\|^2_{\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)}&=\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi}(\,u(x-y)-u(x)\,)\mathrm{Q}_k(y)dy\Big|^2dx\\&\leq\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|u(x-y)-u(x)|^2dx\Big)\mathrm{Q}_k(y)dy\\&\leq 4\,\mathrm{Q}_k(\delta)\sup_{[-\pi,\pi]}|u|+\int_{-\delta}^{\delta}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|u(x-y)-u(x)|^2dx\Big)\mathrm{Q}_k(y)dy\end{aligned}$$

Choisissons un $\epsilon>0$ arbitrairement petit. La fonction u étant uniformément continue sur $[-2\pi,2\pi]$, il existe $\delta>0$ tel que $|u(x-y)-u(x)|^2\leq\epsilon$ dès que $|y|\leq\delta$. D'après (3.23), il existe $k_0\geq 0$ tel que $4\,\mathrm{Q}_k(\delta)\sup_{[-\pi,\pi]}|u|\leq\epsilon$ dès que $k\geq k_0$. On en tire donc finalement $\|u-\mathrm{P}_k(u)\|^2_{\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)}\leq 2\epsilon\ \forall k\geq k_0$. Comme ϵ était arbitraire, on a donc finalement établi $\lim_{k\to\infty}\|u-\mathrm{P}_k(u)\|_{\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)}=0$. □

On peut maintenant combiner le résultat précédent avec la proposition 3.22 et le corollaire 3.23, ce qui fournit un résultat de base de la théorie de Fourier à savoir une correspondance bi-univoque entre les fonctions de carré intégrable sur $]-\pi,\pi[$, et les suites de carré sommable.

Corollaire 3.26.
Soit $\ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace des suites de carré sommable muni de la norme $\|(v_n)\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}:=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|v_n|^2$. Pour tout $u\in\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$ notons $(\hat{u}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier

$$\hat{u}(n):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\exp(-\imath nx)dx.$$

Alors l'application $u \mapsto \hat{u}$ *réalise un isomorphisme de* $\mathrm{L}^2(-\pi, \pi)$ *dans* $\ell^2(\mathbb{Z})$ *et c'est une isométrie i.e.* $\|u\|_{\mathrm{L}^2(-\pi,\pi)} = \|\hat{u}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$ *pour tout* $u \in \mathrm{L}^2(-\pi, \pi)$*.*