

Chapitre 6

La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est peut-être la plus importante des méthodes d'approximation variationnelle. Nous allons la décrire en détail dans le contexte de l'approximation variationnelle du problème aux limites du second ordre avec conditions de Dirichlet, en dimension un d'espace. Mais elle est d'une grande souplesse et est très souvent employée dans la pratique dans des contextes très variés (en particulier, pas seulement pour les problèmes aux limites du second ordre, pas seulement pour les conditions de Dirichlet et pas seulement en dimension un d'espace !).

6.1 Définition de la méthode dans le cas dit \mathbb{P}_1

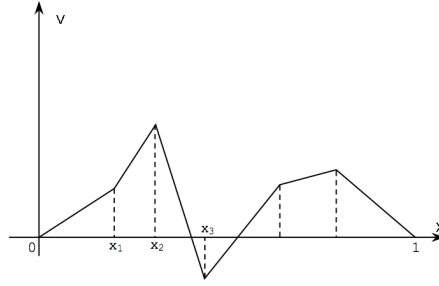
Pour la méthode des éléments finis, plutôt que d'indexer les sous-espaces vectoriels sur lesquels on va travailler par un entier naturel n , on les indexe traditionnellement par un réel h , qui représente un pas d'espace (en dimension 2, la mesure d'une surface, en dimension 3 d'un volume). Pour l'analyse de convergence, on conviendra que h prend ses valeurs dans une suite qui tend vers 0.

Pour construire la "méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 ", on se donne un entier $m \geq 1$ et un *maillage* de l'intervalle $]0, 1[$, c'est-à-dire un découpage de l'intervalle en sous-intervalles, appelés *éléments*, délimités par des sommets $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < x_{m+1} = 1$. Les sommets ne sont pas forcément équidistants. On pose $h = \max_i |x_{i+1} - x_i|$ et on l'appelle le *pas du maillage*.

Il faut noter que bien que ces données soient de même nature que dans le cas de la méthode des différences finies, on emploie ici un vocabulaire différent. En effet, dans la méthode des différences finies, on s'intéressait à des valeurs prises sur les points de la grille. Ici, on va s'intéresser à ce qui se passe dans les éléments, *i.e.*, entre les sommets du maillage. Cette différence de vocabulaire pour désigner des objets analogues n'est qu'un artefact de la dimension un. En dimension deux, par exemple, la méthode des éléments finis va fonctionner sur des maillages formés d'éléments triangulaires ou quadrangulaires, alors que la méthode des différences finies travaillera toujours sur une grille formée de points.

On introduit donc l'espace

$$V_h = \{v \in C^0([0, 1]), v|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ est affine}, v(0) = v(1) = 0\}$$

FIGURE 6.1 – Un élément de V_h

des fonctions continues, affines par morceaux sur le maillage et satisfaisant les conditions de Dirichlet. On l'appelle espace d'éléments finis. D'après les résultats du chapitre III, on voit que $V_h \subset V = H_0^1(\Omega)$. Attention quand même à la notation qui est ambiguë : l'espace V_h ne dépend pas uniquement de h , mais bien du maillage tout entier. Deux maillages de même pas h vont donner naissance à deux espaces V_h différents. Nous conserverons quand même cette notation traditionnelle. Enfin les points x_i dépendent évidemment du maillage au sens où on sera amené à prendre des suites de maillages, dont la finesse qui tend vers 0, et alors on explicitera la dépendance des points $x_i = x_i^n$ pour le n -ème maillage de la suite, mais pas lorsqu'on travaille avec un maillage donné, lorsqu'il n'y en a qu'un. Par exemple, dans le cas de subdivision uniformes on a

$$x_i^n = \frac{i}{n+1},$$

et $h_n = \frac{1}{n+1}$. Attention aussi au fait que V désigne désormais l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 6.1.1 *L'espace V_h est de dimension finie m . Le problème variationnel discret associé, trouver $u_h \in V_h$ tel que*

$$\forall v_h \in V_h, \quad \int_{\Omega} (u_h' v_h' + c u_h v_h) = \int_{\Omega} f v_h$$

admet une solution et une seule.

Démonstration. Il est évident que V_h est un sous-espace vectoriel de V . Considérons l'application $L: V_h \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui à v associe le vecteur $(v(x_i))_{i=1,\dots,m}$. C'est visiblement une application linéaire injective, car $L(v) = 0$ implique que $v(x_i) = 0$ pour tout $i = 0, 1, \dots, m+1$, et comme v est affine sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, elle s'annule sur cet intervalle, donc sur $[0, 1]$ tout entier. Elle est aussi surjective, car pour n'importe quel vecteur $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^m$, il existe une fonction de V_h qui prend la valeur λ_i en x_i (il suffit d'interpoler linéairement sur chaque intervalle). L'application L est donc un isomorphisme entre V_h et \mathbb{R}^m . Ces deux espaces ont par conséquent même dimension, c'est-à-dire que $\dim V_h = m$.

L'existence et l'unicité de u_h découlent alors de l'étude abstraite effectuée dans le chapitre précédent. \square

Remarque 6.1.1 *La solution $u \in V$ du problème variationnel continu est également solution du problème aux limites (cf. proposition 4.4.1). Il faut bien noter qu'il n'en va pas de même*

pour u_h . Le problème variationnel résolu par u_h sur V_h n'admet en effet aucune interprétation en termes d'équation différentielle.

On va maintenant exhiber une base de V_h bien adaptée pour la suite.

Théorème 6.1.1 *Les fonctions $w_i \in V_h$, $1 \leq i \leq m$, définies par $w_i(x_j) = \delta_{i,j}$, forment une base de V_h . De plus, on a pour tout $v \in V_h$,*

$$v(x) = \sum_{i=1}^m v(x_i) w_i(x).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que $w_i \in V_h$ est bien définie. C'est en effet l'image par L^{-1} du i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^m (le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ vaut 1 si $j = i$, 0 sinon). La famille des w_i étant l'image d'une base par un isomorphisme est donc une base de V_h .

Soit $v \in V_h$, on note μ_i ses composantes dans la base (w_i) . Pour tout $x \in [0, 1]$, on a donc

$$v(x) = \sum_{i=1}^m \mu_i w_i(x).$$

En particulier, en $x = x_j$, on obtient

$$v(x_j) = \sum_{i=1}^m \mu_i w_i(x_j) = \sum_{i=1}^m \mu_i \delta_{i,j} = \mu_j,$$

d'où l'expression annoncée des composantes. □

Les fonctions de base w_i sont parfois appelées *fonctions chapeau*, étant donnée l'allure de leur graphe. On utilise aussi le terme de base *nodale*, chaque fonction w_i étant naturellement associée à un noeud x_i qui est ici un sommet du maillage. La base $(w_i)_{i=1,\dots,m}$ a une propriété particulière : les composantes d'une fonction de V_h dans cette base sont les valeurs que prend la fonction aux noeuds. Une fois résolu le système linéaire, on aura donc directement des informations exploitables sur la solution discrète en lisant ses composantes, sans autre calcul supplémentaire. Dans le langage des éléments finis, ces valeurs sont appelées *degrés de liberté*.

Remarque 6.1.2 *De façon plus générale, la méthode des éléments finis part d'une partition d'un domaine Ω en fermés d'intérieurs disjoints. En dimension 1 il s'agit d'intervalles, en dimension 2 de triangles ou de quadrangles, en dimension 3 de prismes, tétraèdres ou polyèdres. Chacun de ces fermés, avec ses degrés de liberté, est un élément fini. Les fonctions de l'espace de dimension finie V_h sont polynomiales par morceaux et globalement continues, donc H^1 . Cet espace est muni d'une base nodale indexée par les degrés de liberté, qui généralise la base des fonctions chapeau.*

Si v est une fonction continue quelconque et qui s'annule en 0 et 1, on peut l'approcher de manière naturelle par une fonction de V_h en définissant l'unique fonction de V_h qui admet les mêmes valeurs que v aux points du maillage : c'est l'interpolation de Lagrange.

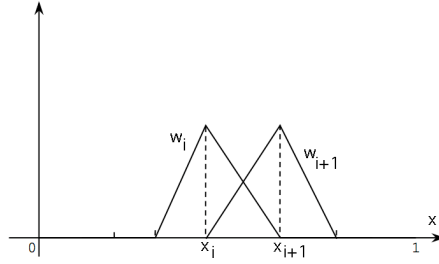


FIGURE 6.2 – Deux fonctions de base successives

Définition 6.1.1 On appelle fonction interpolée de v dans V_h la fonction $\Pi_h v$ définie par :

$$\Pi_h v \in V_h \quad \text{et} \quad \Pi_h v(x_i) = v(x_i), 1 \leq i \leq m.$$

Il est facile de voir que Π_h est un opérateur linéaire (appelé interpolant ou opérateur d'interpolation) que l'on peut exprimer par

$$\Pi_h v = \sum_{i=1}^m v(x_i) w_i.$$

On voit aussi que l'image de Π_h est V_h et que $\Pi_h v = v$ pour tout $v \in V_h$. En ce sens Π_h est un projecteur (qu'il ne faut pas confondre avec le projecteur orthogonal pour un produit scalaire).

Pour aborder les questions de convergence, il faut considérer une suite de maillages dont le pas tend vers 0. Les espaces V_h correspondants ne sont pas forcément emboîtés, sauf si les maillages successifs sont obtenus par *raffinement* les uns des autres.

Proposition 6.1.2 Soit $(x_i^n)_{i=1, \dots, m_n}$ une suite de maillages avec $h_n = \max |x_{i+1}^n - x_i^n| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Soit u_{h_n} l'approximation variationnelle de u dans V_{h_n} . Alors $\|u_{h_n} - u\|_{H^1} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. On a vu dans le chapitre précédent qu'il suffit de montrer que l'on peut approcher tout élément v de $V = H_0^1(\Omega)$ par une suite $v_n \in V_{h_n}$. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, il suffit d'approcher en norme H^1 n'importe quel élément v de $\mathcal{D}(\Omega)$ par une suite $v_n \in V_{h_n}$ (par un argument d'extraction diagonale, exercice !). On va plus précisément montrer que si $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors son interpolation

$$v_n = \Pi_{h_n} v,$$

converge vers v en norme H^1 .

On montre tout d'abord la convergence en norme L^2 . Pour cela il suffit de remarquer que pour tout $x \in [x_i^n, x_{i+1}^n]$ on a d'une part par le théorème des accroissements finis

$$|v(x) - v(x_i^n)| \leq M_1 |x - x_i^n| \leq M_1 h_n,$$

où $M_1 = \|v'\|_{L^\infty}$, et d'autre part puisque v_n est affine sur cet intervalle

$$|v_n(x) - v_n(x_i^n)| \leq |v_n(x_{i+1}^n) - v_n(x_i^n)| = |v(x_{i+1}^n) - v(x_i^n)| \leq M_1 h_n.$$

Il vient par conséquent

$$|v(x) - v_n(x)| \leq 2M_1 h_n$$

ce qui montre la convergence uniforme de v_n vers v , et entraîne la convergence en norme L^2 .

On montre ensuite la convergence en norme L^2 de v'_n vers v' . La dérivée faible v'_n est donnée sur chaque intervalle $]x_i^n, x_{i+1}^n[$ par la valeur constante

$$v'_n(x) = \frac{v(x_{i+1}^n) - v(x_i^n)}{x_{i+1}^n - x_i^n}.$$

Le théorème des accroissements finis indique qu'il existe $y_i^n \in]x_i^n, x_{i+1}^n[$ tel que cette valeur coïncide avec $v'(y_i^n)$. Pour $x \in]x_i^n, x_{i+1}^n[$, on a donc

$$|v'_n(x) - v'(x)| = |v'(y_i^n) - v'(x)| \leq M_2 |y_i^n - x| \leq M_2 h_n,$$

où $M_2 = \|v''\|_{L^\infty}$. Ceci montre la convergence uniforme de v'_n vers v' , et entraîne la convergence en norme L^2 . Au final on a montré que v_n converge vers v en norme H^1 . \square

Donnons la forme matricielle de la méthode des éléments finis dans la base des w_i (à maillage fixé). On a vu que $(A_h)_{ij} = a(w_j, w_i) = \int_{\Omega} (w'_j w'_i + c w_j w_i)$. On remarque d'abord que dès que $|i - j| > 1$, $w_i w_j = w'_i w'_j = 0$ car dans ce cas les supports des fonctions de base sont disjoints ou leur intersection est réduite à un point. On va donc obtenir une matrice au plus tridiagonale. Comme elle est symétrique, il suffit de considérer le cas $i \leq j$, c'est-à-dire soit $i = j$, soit $i + 1 = j$. Supposons pour simplifier que le maillage est uniforme, i.e., $x_i = ih$, avec $h = \frac{1}{m+1}$. On a alors

$$w_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \\ \frac{x - x_{i-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \end{cases}$$

et

$$w'_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \\ \frac{1}{h} & \text{si } x \in]x_{i-1}, x_i[, \\ -\frac{1}{h} & \text{si } x \in]x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Pour $i = j$, il vient donc

$$\int_{\Omega} (w'_i)^2 = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} = \frac{2}{h}$$

et

$$\int_{\Omega} c(x) (w_i)^2 = \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x) (x - x_{i-1})^2 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} c(x) (x_{i+1} - x)^2 \right].$$

Dans le cas où c est une fonction constante, on obtient

$$\int_{\Omega} c(w_i)^2 = \frac{2ch}{3}.$$

Pour $i + 1 = j$, toujours à cause des supports, $w_i w_{i+1} = w'_i w'_{i+1} = 0$ si $x \notin]x_i, x_{i+1}[$. On obtient alors

$$\int_{\Omega} w'_i w'_{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h^2}\right) = -\frac{1}{h}$$

et

$$\int_{\Omega} c(x) w_i w_{i+1} = \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} c(x) (x_{i+1} - x)(x - x_i).$$

Dans le cas où c est une fonction constante, il vient

$$\int_{\Omega} c w_i w_{i+1} = \frac{ch}{6}.$$

On obtient par conséquent une matrice A_h de la forme (pour c constante)

$$A_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 + \frac{2ch^2}{3} & -1 + \frac{ch^2}{6} & 0 & \dots & 0 \\ -1 + \frac{ch^2}{6} & 2 + \frac{2ch^2}{3} & -1 + \frac{ch^2}{6} & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 + \frac{ch^2}{6} & 2 + \frac{2ch^2}{3} \end{pmatrix}$$

Pour le second membre, il faut évaluer les intégrales $\int_{\Omega} f w_i$. Quand $f = \bar{f}$ est une fonction constante, ces intégrales valent $h\bar{f}$. On remarque que quand la fonction c est constante, la matrice obtenue pour le maillage uniforme ressemble beaucoup à celle de la méthode des différences finies. Cela dit, il n'est pas difficile d'écrire la matrice du système linéaire pour un maillage non uniforme.

Remarque 6.1.3 Dans le cas où c ou f ne sont pas constantes, il se peut que l'on sache calculer exactement les diverses intégrales qui apparaissent dans le système linéaire, mais la règle générale est que l'on ne puisse pas y arriver. Il faut alors recourir à des méthodes d'intégration numérique pour obtenir des valeurs numériques pour les coefficients de la matrice et pour le second membre. On introduit ainsi une approximation supplémentaire, qu'il faut justifier à part, par exemple à l'aide des résultats de la section 5.3. Il faut bien sûr que cette approximation soit d'ordre suffisamment élevé pour ne pas trop perturber l'erreur commise par la méthode des éléments finis elle-même. Notons pour l'anecdote qu'il arrive ainsi, pour certains problèmes et certaines intégrations numériques, que l'on retombe exactement sur une matrice de différences finies.

Remarque 6.1.4 On a choisi des fonctions de base qui produisent une matrice tridiagonale. En dimension supérieure, de bonnes numérotations des éléments d'un maillage produisent des matrices creuses dont les éléments non nuls sont regroupés autour de la diagonale (mais c'est plus compliqué qu'en dimension un).

Pour terminer cette section, arrêtons nous sur le conditionnement de la matrice A_h donnée ci-dessus dans le cas de sommets équidistants $x_i = ih = i/(m+1)$ et c constant. Dans ce cas il est facile d'exhiber la base de vecteur propres qui est donnée par les vecteurs s_k pour $k = 1, \dots, m$, dont les coordonnées sont données par

$$s_{k,j} = \sin(\pi k j h).$$

On voit en effet que

$$(A_h s_k)_j = \frac{1}{h} \left(\left(2 + \frac{2ch^2}{3}\right) s_{k,j} - \left(1 - \frac{ch^2}{6}\right) (s_{k,j-1} + s_{k,j+1}) \right) = \left(\frac{1}{h} - \frac{ch}{6}\right) (2s_{k,j} - s_{k,j-1} - s_{k,j+1}) + ch s_{k,j}.$$

En appliquant l'identité

$$2\sin(x) - \sin(x-t) - \sin(x+t) = (2 - 2\cos t)\sin(x) = 4\sin(t/2)^2\sin(x),$$

à $x = \pi k j h$ et $t = \pi k h$, on trouve ainsi

$$A_h s_k = \lambda_k s_k, \quad \lambda_k = ch + \left(\frac{1}{h} - \frac{ch}{6}\right) 4\sin(\pi k h/2)^2.$$

Lorsque h devient petit, la valeur minimale est $\lambda_1 \approx ch + \frac{4}{h} \sin(\pi h/2)^2 \sim (\pi^2 + c)h$ et la valeur maximale est $\lambda_m \approx \frac{4}{h}$.

Ceci nous indique que lorsque $h \rightarrow 0$ on a

$$\kappa(A_h) \approx \frac{4}{(\pi^2 + c)h^2} = O(h^{-2})$$

Une telle augmentation du nombre de conditionnement de la matrice de rigidité lorsque $h \rightarrow 0$ est typique de la méthode des éléments finis. Ceci constitue un problème lorsque l'on désire calculer la solution avec une grande précision puisque l'on est alors amené à prendre une maille h très petite, et le système à résoudre devient ainsi mal conditionné. En particulier, comme observé dans la remarque 5.2.2, les méthodes itératives classiques convergeront plus lentement. Ceci justifie le développement de méthodes dites de *préconditionnement* telles que les méthodes multigrilles qui dépassent le cadre de ce cours.

6.2 Analyse de la convergence dans le cas \mathbb{P}_1

Nous avons déjà vu (Proposition 6.1.2) que la méthode d'éléments finis \mathbb{P}_1 converge. Nous souhaitons estimer l'erreur en fonction de la taille du maillage. Pour analyser la convergence d'une méthode d'éléments finis, dont on rappelle que c'est un cas particulier de méthode d'approximation variationnelle, on sait qu'il convient d'étudier la distance de la solution à l'espace d'éléments finis, c'est-à-dire que l'on se ramène à un problème d'approximation. L'idée générale est très simple : si on connaît une projection $P_h : V \rightarrow V_h$, alors évidemment, $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \leq \|u - P_h u\|_V$, et si cette projection est bien choisie, alors on saura calculer des estimations de la quantité $\|u - P_h u\|_V$ en fonction de u et de h . (Attention, une projection P_h est un opérateur linéaire de V sur V_h , qui vérifie $P_h \circ P_h = Id$ mais qui n'a aucune raison d'être la projection orthogonale).

Dans le cas des éléments finis, l'opérateur de projection naturel est l'interpolant Π_h associé aux degrés de liberté que nous avons déjà utilisé dans la démonstration de la proposition 6.1.2. On rappelle qu'en une dimension $V = H_0^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$, ce qui permet de définir $\Pi_h v$ pour tout fonction $v \in V$ puisque les valeurs ponctuelles de v en x_i sont bien définies sans ambiguïté.

Les espaces H^1 sont donc des espaces de nature *locale* au sens où la norme est donnée par une intégrale sur Ω qui peut se décomposer en sous-domaines. Il est en particulier facile de voir que pour $v \in H^1(\Omega)$ et pour tout intervalle ouvert $T \subset \Omega$, la restriction de v à T , notée $v|_T$, appartient à $H^1(T)$, avec $(v|_T)' = (v')|_T$. Dans la suite, on ne distinguera plus les restrictions des fonctions à un intervalle des fonctions elles-mêmes, pour alléger la notation. On notera aussi les éléments du maillages par

$$T_i =]x_i, x_{i+1}[.$$

Proposition 6.2.1 Pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=0}^m \|v\|_{H^1(T_i)}^2 \right)^{1/2}.$$

Démonstration. En effet, on a

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (v^2 + (v')^2) = \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v^2 + (v')^2) = \left(\sum_{i=0}^m \|v\|_{H^1(T_i)}^2 \right).$$

ce qui prouve le résultat □

Ce résultat est bien entendu aussi valable pour les normes $H^k(\Omega)$. Il nous suffit par conséquent d'estimer les quantités $\|u - \Pi_h u\|_{H^1(T_i)}$. On note que sur T_i , la fonction $\Pi_h u$ est affine et coïncide avec l'interpolé affine $\Pi_i u$ aux points x_i et x_{i+1} .

Théorème 6.2.1 (Erreur d'interpolation locale) Soit $h_i = |T_i| = x_{i+1} - x_i$, soit $v \in H^2(T_i)$ et $\Pi_i v \in \mathbb{P}_1$ son interpolée affine en x_i et x_{i+1} . On a alors

$$\|v - \Pi_i v\|_{L^2(T_i)} \leq h_i^2 \|v''\|_{L^2(T_i)},$$

et

$$\|v' - (\Pi_i v)'\|_{L^2(T_i)} \leq h_i \|v''\|_{L^2(T_i)},$$

Démonstration. Notons $g = v - \Pi_i v$. La fonction g s'annule donc aux points x_i et x_{i+1} et sa dérivée seconde (au sens faible) est donnée par

$$g'' = v'' \in L^2(T_i).$$

Nous allons montrer que $h_i g = \tilde{g}$ où

$$\tilde{g}(x) = \int_{x_i}^x (x - x_{i+1})(t - x_i)v''(t)dt + \int_x^{x_{i+1}} (t - x_{i+1})(x - x_i)v''(t)dt.$$

Pour cela, on remarque d'abord que $\tilde{g}(x_i) = \tilde{g}(x_{i+1}) = 0$. On dérive ensuite \tilde{g} en écrivant

$$\tilde{g}(x) = (x - x_{i+1}) \int_{x_i}^x (t - x_i)v''(t)dt + (x - x_i) \int_x^{x_{i+1}} (t - x_{i+1})v''(t)dt,$$

et en appliquant la règle de Leibniz. Les termes issus de la dérivation des intégrales s'annulent et on obtient

$$\tilde{g}'(x) = \int_{x_i}^x (t - x_i)v''(t)dt + \int_x^{x_{i+1}} (t - x_{i+1})v''(t)dt.$$

Puis en dérivant à nouveau

$$\tilde{g}''(x) = (x - x_i)v''(x) - (x - x_{i+1})v''(x) = h_i v''(x) = h_i g''(x).$$

Par conséquent la fonction $\tilde{g} - h_i g \in H^2(T_i)$ vaut 0 en x_i et x_{i+1} et sa dérivée seconde est nulle, ce qui entraîne sa nullité.

On a donc

$$|g(x)| = h_i^{-1} |\tilde{g}(x)| \leq h_i^{-1} \int_{x_i}^x |(x - x_{i+1})(t - x_i)v''(t)| dt + h_i^{-1} \int_x^{x_{i+1}} |(t - x_{i+1})(x - x_i)v''(t)| dt,$$

et pour $x \in T_i$, on peut majorer $|(x - x_{i+1})(t - x_i)|$ et $|(t - x_{i+1})(x - x_i)|$ par h_i^2 ce qui donne

$$|g(x)| \leq h_i \int_{T_i} |v''(t)| dt.$$

En élevant au carré et en appliquant Cauchy-Schwarz, il vient

$$|g(x)|^2 \leq h_i^3 \int_{T_i} |v''(t)|^2 dt.$$

En intégrant sur T_i par rapport à x , on trouve

$$\|g\|_{L^2(T_i)}^2 \leq h_i^4 \|v''\|_{L^2(T_i)}^2,$$

qui est l'estimation annoncée de $\|v - \Pi_i v\|_{L^2(T_i)}$

Pour l'estimation de g' en norme $L^2(T_i)$, on utilise le calcul précédent en écrivant

$$|g'(x)| = h_i^{-1} |\tilde{g}'(x)| \leq h_i^{-1} \left(\int_{x_i}^x |(t - x_i)v''(t)| dt + \int_x^{x_{i+1}} |(t - x_{i+1})v''(t)| dt \right) \leq \int_{T_i} |v''(t)| dt.$$

Puis par un calcul similaire au précédent, on arrive à

$$\|g'\|_{L^2(T_i)}^2 \leq h_i^2 \|v''\|_{L^2(T_i)}^2,$$

qui est l'estimation annoncée de $\|v' - (\Pi_i v)'\|_{L^2(T_i)}$. □

On peut déduire de ces estimations locales un résultat d'approximation global pour l'interpolant.

Théorème 6.2.2 *Soit $v \in H^2(\Omega)$ s'annulant en 0 et 1, et soit $h = \max h_i$. On a alors*

$$\|v - \Pi_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq h^2 \|v''\|_{L^2(\Omega)},$$

et

$$\|v' - (\Pi_h v)'\|_{L^2(\Omega)} \leq h \|v''\|_{L^2(\Omega)}.$$

On a aussi

$$\|v - \Pi_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|v''\|_{L^2(\Omega)},$$

avec $C = \sqrt{2}$.

Démonstration. On écrit

$$\|v - \Pi_h v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^m \|v - \Pi_i v\|_{L^2(T_i)}^2,$$

par décomposition de l'intégrale sur les sous-domaine T_i . Par application de l'estimation locale du théorème précédent, il vient

$$\|v - \Pi_h v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{i=1}^m h_i^4 \|v''\|_{L^2(T_i)}^2 \leq h^4 \|v''\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ce qui donne la première estimation. La deuxième estimation est obtenue de la même manière. La troisième est obtenue en combinant les deux estimations et en observant que $h^2 \leq h$ puisque $h < 1$. \square

Remarque 6.2.1 Dans la preuve du théorème 6.2.1, on a en fait obtenu des majoration ponctuelles sur g et g' avec $g = v - \Pi_h v$. Un calcul similaire (exercice) nous montre que pour toute fonction $v \in C^2([0, 1])$ s'annulant en 0 et 1 on a alors les estimations en norme sup

$$\|v - \Pi_h v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq h^2 \|v''\|_{L^\infty(\Omega)},$$

et

$$\|v' - (\Pi_h v)'\|_{L^\infty(\Omega)} \leq h \|v''\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Théorème 6.2.3 Supposons que la solution u du problème variationnel appartienne à $H^2(\Omega)$, et soit $u_h \in V_h$ la solution obtenue par la méthode de Galerkin. Il existe une constante C indépendante de u et du maillage telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch \|u''\|_{L^2}, \quad (6.1)$$

Démonstration. La théorie abstraite de l'approximation variationnelle - Théorème 5.1.2 - nous indique que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq (C_a/\alpha)^{1/2} \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1},$$

avec dans le cas présent $C_a = \max\{1, \|c\|_{L^\infty}\}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$. On a en particulier

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq (C_a/\alpha)^{1/2} \|u - \Pi_h u\|_{H^1},$$

et en appliquant le théorème 6.2.2, on obtient l'estimation (6.1) avec $C = 2 \max\{1, \|c\|_{L^\infty}^{1/2}\}$ \square

Remarque 6.2.2 Sous une hypothèse de régularité H^2 sur la solution, on a obtenu une convergence en $O(h)$ en norme H^1 , d'où a fortiori, en $O(h)$ en norme de la convergence uniforme par l'injection continue $H^1 \hookrightarrow C^0$.

Remarque 6.2.3 On a vu dans le théorème 4.4.1 que si $f \in L^2(\Omega)$ et $c \in L^\infty(\Omega)$, la solution u appartient en effet à H^2 et sa dérivée seconde faible est donnée par $u'' = cu - f$. La norme L^2 de u'' qui apparaît dans l'estimation d'erreur (6.1) s'estime par

$$\|u''\|_{L^2} \leq \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} \leq \|c\|_{L^\infty} \|u\|_V + \|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} (2\|c\|_{L^\infty} + 1),$$

d'après le Théorème 4.4.1.

6.3 Eléments finis de degré et régularité plus élevés

Jusqu'ici, les degrés de liberté étaient associés à l'interpolation de Lagrange aux sommets du maillage, c'est-à-dire comme il y a deux sommets par élément, de l'interpolation \mathbb{P}_1 . Pour définir des méthodes d'éléments finis utilisant des polynômes de degré plus élevé, on va utiliser de façon analogue de l'interpolation utilisant ces polynômes. On part à nouveau d'un maillage de sommets

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m < x_{m+1} = 1.$$

Comme dans la section précédente, nous noterons parfois

$$T_i =]x_i, x_{i+1}[,$$

l'élément i et

$$h = \max_{i=0, \dots, m} |x_{i+1} - x_i|$$

la finesse du maillage.

Commençons par des polynômes du second degré. On peut encore faire de l'interpolation de Lagrange, mais on a besoin de trois points, par exemple les sommets x_i , x_{i+1} et leur milieu $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$. On parle alors d'éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_2 . On prend comme espace

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_{T_i} \in \mathbb{P}_2, v(0) = v(1) = 0\}.$$

Les degrés de liberté associés à cet espace sont donc les valeurs aux points x_i pour $i = 1, \dots, m$ et $x_{i+1/2}$ pour $i = 0, \dots, m$. On peut dans cet espace construire la base nodale pour cet espace en prenant les fonctions w_i et $w_{i+1/2}$ respectivement associés à ces degrés de liberté. Ces fonctions ont des formes différentes. La fonction w_i vaut 1 au point x_i et 0 à tous les autres points x_j et $x_{j+1/2}$, son support est l'intervalle $\overline{T_{i-1}} \cup \overline{T_i} = [x_{i-1}, x_{i+1}]$. La fonction $w_{i+1/2}$ vaut 1 au point $x_{i+1/2}$ et 0 à tous les autres points x_j et $x_{j+1/2}$, son support est l'intervalle $\overline{T_i}$. On pourra à titre d'exercice écrire l'expression exacte de ces fonctions. Au final on voit que la base de V_h est constituée par les fonctions

$$w_{j/2}, \quad j = 1, \dots, 2m+1,$$

l'espace étant donc de dimension $2m+1$.

Cette construction se généralise de manière naturelle aux polynômes de degré $k \geq 1$ arbitraire, et on parle d'éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_k : on définit

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_{T_i} \in \mathbb{P}_k, v(0) = v(1) = 0\};$$

et on introduit les noeuds intermédiaires

$$x_{i+j/k} = x_i + \frac{j}{k}(x_{i+1} - x_i), \quad j = 1, \dots, k-1, \quad i = 0, \dots, m,$$

ce qui correspond à subdiviser chaque intervalle T_i en k sous-intervalles de même taille. Les fonctions de V_h sont alors caractérisées par les valeurs en l'ensemble des sommets du maillage et de ces points intermédiaires.

Théorème 6.3.1 *L'application linéaire*

$$v \rightarrow (v(x_{j/k}))_{j=1,\dots,km+k-1},$$

définit un isomorphisme entre l'espace V_h des éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_k et \mathbb{R}^{km+k-1} .

Démonstration. Soit $v \in V_h$ telle que $v(x_{j/k}) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, km+k-1$. Ceci signifie que pour tout $i = 0, \dots, m$, la fonction v s'annule aux points $x_{i+j/k}$ pour $j = 0, \dots, k$ qui sont $k+1$ points distincts dans l'intervalle $\overline{T_i}$. Or v est un polynôme de degré k sur cet intervalle, et par conséquent v est nulle. L'application est donc injective.

Réciproquement soit un vecteur arbitraire $(y_{j/k})_{j=1,\dots,km+k-1}$ et posons $y_0 = y_{m+1} = 0$. Pour chaque $i = 0, \dots, m$, il existe un unique polynôme $p_i \in \mathbb{P}_k$ tel que

$$p_i(x_{i+j/k}) = y_{i+j/k}, \quad j = 0, \dots, k,$$

que l'on obtient par interpolation. On définit une fonction polynomiale par morceaux v par

$$v|_{T_i} = p_i, \quad i = 0, \dots, m.$$

Cette fonction vérifie ainsi les propriétés

$$v(x_{j/k}) = y_{j/k}, \quad j = 1, \dots, km+k-1.$$

Sur les sommets x_i du maillage on voit que

$$p_{i-1}(x_i) = p_i(x_i) = y_i,$$

ce qui montre la continuité globale de v sur $[0, 1]$. On a par ailleurs $v(0) = v(1) = 0$ puisqu'on a pris $y_0 = y_{m+1} = 0$, et par conséquent $v \in V_h$. L'application est donc surjective. \square

Le théorème qu'on vient de démontrer nous indique que

$$\dim(V_h) = km+k-1.$$

La base nodale est constituée des fonctions $(w_{j/k})_{j=1,\dots,km+k-1}$ qui vérifient les conditions

$$w_{j/k}(x_{l/k}) = \delta_{j,l}.$$

Les fonctions w_i associées aux sommets du maillage ont pour support l'intervalle $\overline{T_{i-1}} \cup \overline{T_i}$, et les fonctions $w_{i+j/k}$ pour $j = 1, \dots, k-1$ associées aux noeuds intermédiaires sont supportées dans $\overline{T_i}$. Toute fonction $v_h \in V_h$ se décompose suivant

$$v_h = \sum_{j=1}^{km+k-1} v_h(x_{j/k}) w_{j/k},$$

et on peut définir, comme pour les éléments \mathbb{P}_1 , l'opérateur d'interpolation Π_h qui agit sur toute fonction $v \in C^0(\overline{\Omega})$ telle que $v(0) = v(1) = 0$ - et donc en particulier sur toute fonction de $H_0^1(\Omega)$ - suivant

$$\Pi_h v = \sum_{j=1}^{km+k-1} v(x_{j/k}) w_{j/k}.$$

On note que $\Pi_h v$ coïncide avec v en tous les noeuds $x_{j/k}$ et que $\Pi_h v_h = v_h$ pour tout $v_h \in V_h$. On note aussi que sur l'élément T_i on a

$$\Pi_h v = \Pi_i v,$$

où $\Pi_i v$ est l'interpolation polynomiale de degré k de v aux points $(x_{i+j/k})_{j=0,\dots,k}$.

Notons que dans la construction des éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_k que l'on vient de décrire, on a assuré le caractère globalement continu des fonctions de V_h , mais ces espaces contiennent des fonctions qui ne sont pas de classe C^1 . On peut vouloir construire un espace de fonctions C^1 , en effet, si l'on veut approcher une solution qui est régulière, il est dommage de le faire avec des fonctions qui ne le sont pas (mais ce n'est pas toujours nécessaire). On voit aisément que dans le cas des éléments de Lagrange \mathbb{P}_1 , la seule fonction C^1 contenue dans V_h est la fonction identiquement nulle. En revanche, l'espace

$$V_h = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v|_{T_i} \in \mathbb{P}_2, v(0) = v(1) = 0\},$$

appelé espaces des *splines* quadratiques, contient des fonctions non-triviales et peut sembler un bon candidat pour approcher avec des fonctions régulières. Cependant, pour cet espace il n'existe plus de base qui ait à la fois les propriétés d'interpolation et une forme simple avec des petits supports.

On passe alors à l'étape suivante, à savoir des fonctions \mathbb{P}_3 par morceaux. Dans ce cas il est facile d'assurer la classe C^1 globale grâce à l'interpolation d'Hermite. En effet, pour toute fonction v de classe C^1 et chaque indice i , il existe un unique polynôme p_i de \mathbb{P}_3 tel que $p_i(x_i) = v(x_i)$, $p_i(x_{i+1}) = v(x_{i+1})$, $p_i'(x_i) = v'(x_i)$, $p_i'(x_{i+1}) = v'(x_{i+1})$. Sur l'espace

$$V_h = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v|_{T_i} \in \mathbb{P}_3, v(0) = v(1) = 0\},$$

on peut donc définir une bonne base avec des propriétés d'interpolation correspondant à des éléments finis dont les degrés de liberté sont les valeurs de la fonction et de sa dérivée aux sommets. Il suffit de définir $w_i^0, w_i^1 \in V_h$ par

$$\begin{cases} w_i^0(x_j) = \delta_{i,j}, (w_i^0)'(x_j) = 0, & 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq m+1, \\ w_i^1(x_j) = 0, (w_i^1)'(x_j) = \delta_{i,j}, & 0 \leq i \leq m+1, 0 \leq j \leq m+1. \end{cases}$$

Ces fonctions sont construites en recollant de façon C^1 les polynômes de base de l'interpolation d'Hermite sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, voir figure 6.3.

On peut généraliser cette construction pour obtenir des éléments de classe C^k avec des polynômes de degré $2k+1$ sur chaque maille T_i : ce sont les éléments finis de Hermite \mathbb{P}_{2k+1} , pour lesquels l'espace V_h est défini par

$$V_h = \{v \in C^k(\bar{\Omega}) : v|_{T_i} \in \mathbb{P}_{2k+1}, v(0) = v(1) = 0\},$$

Les degrés de liberté sont alors donnés par les valeurs de la fonction et de ses dérivées jusqu'à l'ordre k aux sommets du maillage comme l'indique le résultat suivant dont la preuve est laissée en exercice car elle est similaire à celle du théorème 6.3.1.

Théorème 6.3.2 *L'application linéaire*

$$v \rightarrow (v(x_1), \dots, v(x_m), v'(x_0), \dots, v'(x_{m+1}), \dots, v^{(k)}(x_0), \dots, v^{(k)}(x_{m+1})),$$

définit un isomorphisme entre l'espace V_h des éléments finis de Hermite \mathbb{P}_{2k+1} et $\mathbb{R}^{(k+1)m+2k}$.

Notons l'absence des degrés de liberté $v(x_0)$ et $v(x_m)$ puisqu'on a imposé la nullité en ces points dans la définition de V_h . Cet espace est donc de dimension $(k+1)m+2k$. On définit des fonctions de bases w_i^l associées aux degrés de liberté par les propriétés

$$(w_i^l)^{(p)}(x_j) = \delta_{i,j} \delta_{l,p}, \quad 0 \leq i, j \leq m+1, \quad 0 \leq l, p \leq k,$$

en enlevant les fonctions w_0^0 et w_{m+1}^0 qui correspondent aux degrés de liberté $v(x_0)$ et $v(x_m)$ inactifs.

Toute fonction $v_h \in V_h$ se décompose suivant

$$v_h = \sum_{i=1}^m v_h(x_i) w_i^0 + \sum_{l=1}^k \sum_{i=0}^{m+1} v_h^{(l)}(x_i) w_i^l$$

et on définit l'opérateur d'interpolation Π_h qui agit sur toute fonction $v \in C^k(\overline{\Omega})$ telle que $v(0) = v(1) = 0$ - et donc en particulier sur toute fonction de $H_0^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega)$ - suivant

$$\Pi_h v = \sum_{i=1}^m v(x_i) w_i^0 + \sum_{l=1}^k \sum_{i=0}^{m+1} v^{(l)}(x_i) w_i^l.$$

On note que $\Pi_h v$ coïncide avec v en tous les noeuds x_i ainsi que toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k , et que $\Pi_h v_h = v_h$ pour tout $v_h \in V_h$. On note aussi que sur l'élément T_i on a

$$\Pi_h v = \Pi_i v,$$

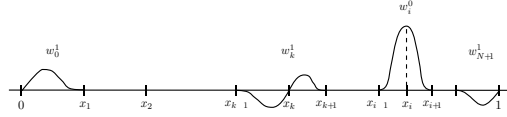
où $\Pi_i v$ est l'interpolation polynomiale de Hermite degré $2k+1$ de v entre les points x_i et x_{i+1} , c'est-à-dire l'unique polynôme p_i de degré $2k+1$ tel que

$$p^{(l)}(x_i) = v^{(l)}(x_i), \quad p^{(l)}(x_{i+1}) = v^{(l)}(x_{i+1}), \quad l = 0, \dots, k.$$

Remarque 6.3.1 *Lorsqu'on utilise les éléments \mathbb{P}_k de Lagrange ou \mathbb{P}_{2k+1} de Hermite pour la discrétisation du problème aux limites, on aboutit ainsi à un système où les éléments de la matrice de rigidité sont donnés par l'application de la forme bilinéaire à tous les couples de fonctions de base. Pour que les éléments non nuls de cette matrice soient situés près de la diagonale, il faut s'assurer que les fonctions de base soient arrangées dans un ordre qui assure que deux fonctions éloignées l'une de l'autre dans la numérotation ont une intersection de supports vide. Dans le cas des éléments \mathbb{P}_k de Lagrange, l'ordre naturel $w_{j/k}$ pour $j = 1, 2, \dots$ convient. Pour les éléments \mathbb{P}_{2k+1} de Hermite, on peut choisir l'ordre*

$$w_0^1, w_0^2, \dots, w_0^k, w_1^0, \dots, w_1^k, \dots, w_m^0, \dots, w_m^k, w_{m+1}^1, \dots, w_{m+1}^k.$$

On peut en guise d'exercice calculer la matrice pour un maillage uniforme et une fonction c constante dans le cas des éléments de Lagrange \mathbb{P}_2 ou des éléments de Hermite \mathbb{P}_3 .

FIGURE 6.3 – Fonctions de base des éléments C^1 Hermite- \mathbb{P}_3

6.4 Analyse générale de convergence

Les espaces V_h des éléments de Lagrange \mathbb{P}_k et de Hermite \mathbb{P}_{2k+1} que l'on vient de définir sont tous des sous-espaces de $V = H_0^1(\Omega)$ et on peut donc les utiliser pour l'approximation variationnelles du problème aux limites : trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad v_h \in V_h.$$

Le lemme de Cea - Théorème 5.1.2 - nous assure que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1}, \quad C = (C_a/\alpha)^{1/2}.$$

Comme pour les éléments de Lagrange \mathbb{P}_1 , l'analyse de convergence de la méthode se ramène donc à la recherche d'une borne de l'erreur de meilleure approximation dans V_h . On a en particulier

$$\min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1} \leq \|u - \Pi_h u\|_{H^1},$$

où Π_h est l'opérateur d'interpolation défini précédemment pour l'espace V_h que l'on a choisi d'utiliser.

Nous nous ramenons ainsi à l'étude de l'erreur d'interpolation $u - \Pi_h u$, qui comme dans le cas des éléments de Lagrange \mathbb{P}_1 peut se faire élément par élément, en estimant l'erreur $u - \Pi_i u$ sur T_i , où Π_i est l'interpolant de Lagrange de degré k ou l'interpolant de Hermite de degré $2k + 1$. Mais contrairement au cas des éléments de Lagrange \mathbb{P}_1 , cette erreur locale n'admet pas une expression simple permettant de faire des calculs directs. Nous allons l'estimer par une technique plus générale, qui a en particulier l'avantage de bien se généraliser aux éléments finis en plus grande dimension.

L'idée fondamentale est de se ramener au cas où T_i est l'intervalle $]0, 1[$ tout entier, que l'on qualifie d'*élément de référence* et que l'on notera ici \hat{T} plutôt que Ω . On note $\hat{\Pi}$ l'interpolant correspondant à cet élément. Dans le cas des éléments de Lagrange \mathbb{P}_k il s'agit donc de l'opérateur d'interpolation de Lagrange de degré k aux noeuds j/k pour $j = 0, \dots, k$. Dans le cas des éléments de Hermite \mathbb{P}_{2k+1} il s'agit de l'opérateur d'interpolation de Hermite de degré $2k + 1$ utilisant les valeurs de la fonctions et de ses dérivées jusqu'à l'ordre k aux points 0 et 1. Nous utiliserons le résultat fondamental suivant.

Théorème 6.4.1 *Soit $k \geq 1$. Pour l'interpolation de Lagrange de degré k sur \hat{T} , on a pour tout $1 \leq r \leq k + 1$ et pour toute fonction $v \in H^r(\hat{T})$,*

$$\|v - \hat{\Pi}v\|_{H^r(\hat{T})} \leq C|v|_{H^r(\hat{T})}, \quad (6.2)$$

où la constante C ne dépend que de k et r . Pour l'interpolation de Hermite de degré $2k + 1$ sur \hat{T} on a la même estimation pour tout $k + 1 \leq r \leq 2k + 2$

La preuve de ce théorème utilise des résultats avancés d'analyse fonctionnelle, et pour cette raison nous décalons son exposition à la fin de ce chapitre. Constatons simplement à ce stade que ce résultat est "raisonnable" au sens suivant : si le second membre de l'inégalité (6.2) est nul, cela signifie que $v^{(r)} = 0$, c'est à dire que v est un polynôme de degré $r - 1$. Puisqu'on a supposé $r \leq k + 1$ dans le cas de l'interpolation de Lagrange, cela signifie que $v \in \mathbb{P}_k$ et par conséquent le membre de gauche de (6.2) est nul puisque $v = \hat{\Pi}v$. De même, dans le cas de l'interpolation de Hermite cela signifie que $v \in \mathbb{P}_{2k+1}$ et on arrive à la même conclusion. On remarque aussi qu'il est raisonnable d'imposer $r \geq 1$ pour l'interpolation de Lagrange puisque ceci assure que $v \in C^0(\hat{T})$ et $r \geq k + 1$ pour l'interpolation de Hermite puisque ceci assure que $v \in C^k(\hat{T})$.

En admettant provisoirement ce théorème, nous allons estimer l'erreur d'interpolation locale $v - \Pi_i v$ sur T_i en fonction de la régularité de v sur T_i et de la longueur de l'élément

$$h_i = |T_i| = x_{i+1} - x_i,$$

par une technique de changement de variable. En effet pour tout $x \in T_i$, on peut écrire

$$x = \phi_i(\hat{x}) := x_i + h_i \hat{x},$$

où \hat{x} appartient à \hat{T} . L'application affine ϕ_i est une bijection entre \hat{T} et T_i . Toute fonction v définie sur T_i peut être "transportée" par ce changement de variable vers une fonction $\hat{v} = v \circ \phi_i$ définie sur \hat{T} par

$$\hat{v}(\hat{x}) = v(x).$$

Attention : la notation \hat{v} n'a rien à voir avec la transformée de Fourier de v ! On peut facilement relier les normes L^2 de v et \hat{v} puisqu'on a

$$\int_{T_i} |v(x)|^2 dx = \int_{\hat{T}} |\hat{v}(\hat{x})|^2 h_i d\hat{x},$$

et par conséquent

$$\|v\|_{L^2(T_i)} = h_i^{1/2} \|\hat{v}\|_{L^2(\hat{T})}.$$

On peut en faire autant pour les semi-normes H^l : en dérivant l fois $v(x_i + h_i \hat{x}) = \hat{v}(\hat{x})$, on trouve

$$\hat{v}^{(l)}(\hat{x}) = h_i^l v^{(l)}(x_i + h_i \hat{x}) = h_i^l v^{(l)}(x).$$

On peut ainsi écrire

$$h_i^{2l} \int_{T_i} |v^{(l)}(x)|^2 dx = \int_{\hat{T}} |\hat{v}^{(l)}(\hat{x})|^2 h_i d\hat{x},$$

et par conséquent

$$|v|_{H^l(T_i)} = h_i^{1/2-l} |\hat{v}|_{H^l(\hat{T})}. \quad (6.3)$$

Une propriété essentielle est que ce changement de variable permet aussi de ramener l'interpolation de v à celle de \hat{v} . Prenons par exemple l'interpolation de Lagrange de degré k : si $p_i = \Pi_i v \in \mathbb{P}_k$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de v aux points $x_{i+j/k}$ pour $j = 0, \dots, k$, on note $\hat{p}_i = p_i \circ \phi_i$ le transport de p_i . On remarque d'abord que \hat{p}_i est aussi un polynôme de degré k . D'autre part, en remarquant que $x_{i+j/k} = x_i + h_i j/k = \phi_i(j/k)$, on obtient

$$\hat{p}_i(j/k) = p_i(\phi_i(j/k)) = p_i(x_{i+j/k}) = v(x_{i+j/k}) = \hat{v}(j/k), \quad j = 0, \dots, k,$$

ce qui nous montre que \hat{p}_i est aussi le polynôme d'interpolation de Lagrange de \hat{v} aux points j/k pour $j = 0, \dots, k$, c'est à dire

$$\hat{p}_i = \hat{\Pi} \hat{v},$$

où $\hat{\Pi}$ est l'opérateur d'interpolation sur l'élément de référence. Ceci peut aussi s'écrire

$$\Pi_i v \circ \phi_i = \hat{\Pi}(v \circ \phi_i).$$

En d'autre termes : il est équivalent d'interpoler une fonction puis de la transporter sur l'intervalle de référence, ou de la transporter sur l'intervalle de référence puis de l'interpoler. Cette propriété de commutation est aussi valable pour l'interpolation de Hermite de degré $2k + 1$ (exercice).

Munis de ces remarques, nous sommes à présent en mesure d'établir une estimation de l'erreur d'interpolation sur l'intervalle T_i .

Théorème 6.4.2 *Soit $k \geq 1$. Pour l'interpolation de Lagrange de degré k sur T_i , on a pour tout $1 \leq r \leq k + 1$, $l = 0, \dots, r$, et pour toute fonction $v \in H^r(T_i)$,*

$$|v - \Pi_i v|_{H^l(T_i)} \leq C h_i^{r-l} |v|_{H^r(T_i)}, \quad (6.4)$$

où la constante C ne dépend que de k et r , et est indépendante de l'élément T_i . Pour l'interpolation de Hermite de degré $2k + 1$ sur \hat{T} on a la même estimation pour tout $k + 1 \leq r \leq 2k + 2$ et $l = 0, \dots, r$.

Démonstration. Notons $p_i = \Pi_i v$ et introduisons la fonction $\hat{v} = v \circ \phi_i$ et son interpolé $\hat{p}_i = \hat{\Pi} \hat{v}$. Puisque $\hat{v} - \hat{p}_i = (v - p_i) \circ \phi_i$, on peut appliquer (6.3) pour obtenir.

$$|v - \Pi_i v|_{H^l(T_i)} = |v - p_i|_{H^l(T_i)} = h_i^{1/2-l} |\hat{v} - \hat{p}_i|_{H^l(\hat{T})} = h_i^{1/2-l} |\hat{v} - \hat{\Pi} \hat{v}|_{H^l(\hat{T})}$$

Par application du Théorème 6.2.2, on sait que

$$|\hat{v} - \hat{\Pi} \hat{v}|_{H^l(\hat{T})} \leq \|\hat{v} - \hat{\Pi} \hat{v}\|_{H^r(\hat{T})} \leq C |\hat{v}|_{H^r(\hat{T})},$$

où C ne dépend que de k et de r . On a ainsi

$$|v - \Pi_i v|_{H^l(T_i)} \leq C h_i^{1/2-l} |\hat{v}|_{H^r(\hat{T})} \leq C h_i^{r-l} |v|_{H^r(T_i)},$$

en appliquant à nouveau (6.3). □

Comme nous l'avons fait dans le cas simple des éléments de Lagrange \mathbb{P}_1 , il nous faut maintenant agréger ces estimations afin d'obtenir une estimation globale sur l'erreur d'interpolation $v - \Pi_h v$.

Théorème 6.4.3 *Soit $k \geq 1$. Pour les éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_k , on a pour tout $1 \leq r \leq k + 1$, $l = 0, 1$, et pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^r(\Omega)$,*

$$|v - \Pi_h v|_{H^l(\Omega)} \leq C h^{r-l} |v|_{H^r(\Omega)}, \quad (6.5)$$

où la constante C ne dépend que de k et r . Pour les éléments finis de Hermite \mathbb{P}_{2k+1} , on a la même estimation pour tout $k + 1 \leq r \leq 2k + 2$ et $l = 0, 1, \dots, k + 1$.

Démonstration. Dans le cas des éléments de Lagrange, lorsque $v \in H_0^1(\Omega)$, on a aussi $\Pi_h v \in H_0^1(\Omega)$ et on peut écrire

$$\|v - \Pi_h v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=0}^m \|v - \Pi_i v\|_{L^2(T_i)}^2,$$

ainsi que

$$\|v' - (\Pi_h v)'\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=0}^m \|v' - (\Pi_i v)'\|_{L^2(T_i)}^2.$$

En d'autres termes, pour $l = 0, 1$, on a

$$|v - \Pi_h v|_{H^l(\Omega)}^2 = \sum_{i=0}^m |v - \Pi_i v|_{H^l(T_i)}^2,$$

et par application du théorème 6.4.2 il vient

$$|v - \Pi_h v|_{H^l(\Omega)}^2 \leq C \sum_{i=0}^m h_i^{2(r-l)} |v|_{H^r(T_i)}^2 \leq Ch^{2(r-l)} |v|_{H^r(\Omega)}^2,$$

qui est l'estimation (6.5). Dans le cas des éléments de Hermite, si de plus $v \in H^{k+1}(\Omega)$, on a aussi $\Pi_h v \in H^{k+1}(\Omega)$ et on peut ainsi écrire, pour $l = 0, \dots, k+1$,

$$\|v^{(l)} - (\Pi_h v)^{(l)}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=0}^m \|v^{(l)} - (\Pi_i v)^{(l)}\|_{L^2(T_i)}^2.$$

Ceci nous permet d'obtenir l'estimation (6.5) pour les valeurs $l = 0, \dots, k+1$. \square

Nous pouvons à présent revenir à l'approximation variationnelle du problème aux limites dans les espaces V_h . On a vu que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C \|u - \Pi_h u\|_{H^1},$$

avec $C = (C_a/\alpha)^{1/2}$. En appliquant le théorème précédent, on obtient ainsi immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 6.4.4 *Soit $k \geq 1$. Pour les éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_k , pour tout $1 \leq r \leq k+1$, si la solution u appartient à $H^r(\Omega)$, on a*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch^{r-1} |u|_{H^r}, \quad (6.6)$$

où la constante C ne dépend que de C_a , α , k et r . Pour les éléments finis de Hermite \mathbb{P}_{2k+1} , on a la même estimation pour tout $k+1 \leq r \leq 2k+2$.

Remarque 6.4.1 *Il est possible de démontrer par une approche plus sophistiquée que la limitation $k+1 \leq r$ pour les éléments de Hermite, nécessaire pour obtenir l'estimation de l'erreur d'interpolation, n'est en fait pas requise pour la validité de (6.6) qui reste vérifiée pour $1 \leq r \leq 2k+2$.*

Remarque 6.4.2 *La technique des estimations d'erreur via l'élément de référence se généralise en dimension supérieure. Le fait d'introduire un élément fini de référence est également intéressant pour la construction de la matrice de rigidité. En effet, les fonctions de base dans un élément générique se déduisent aussi des fonctions de base de l'interpolation de Lagrange sur l'élément de référence par le changement de variable.*

En conclusion, plus la solution est régulière, plus on aura une convergence rapide quand h tend vers zéro, à condition d'utiliser des éléments finis de degré suffisamment élevé, et donc au prix de plus de calculs. D'après les résultats de régularité indiqués dans la remarque 4.4.4, on obtiendra en particulier l'appartenance de u à $H^r(\Omega)$, et donc la vitesse de convergence $O(h^{r-1})$, si $f \in H^{r-1}(\Omega)$ et $c \in C^{r-1}(\Omega)$. *A contrario*, si la solution n'est pas régulière, il est probablement inutile de dépenser beaucoup d'efforts à utiliser des éléments de haut degré.

Terminons cette section par le schéma général d'étude que nous avons suivi pour établir les estimations d'erreur.

$$\begin{aligned} \text{erreur de la méthode} &\leq C \text{ erreur d'approximation} \leq C \text{ erreur d'interpolation} \\ &\leq Ch^{m-1} \text{ norme de la dérivée d'ordre } m \text{ de } u \end{aligned}$$

où la constante C change de valeur, mais ne dépend pas de h ni de u .

6.5 Compléments

Le lemme de Cea conduit naturellement une estimation en norme H^1 pour l'erreur $u - u_h$. On a bien entendu

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq \|u - u_h\|_{H^1},$$

et donc la même estimation en $O(h^{r-1})$ en norme L^2 lorsque $u \in H^r(\Omega)$. Il est cependant assez naturel de penser que la fonction doit converger plus rapidement dans cette norme. Le théorème suivant, aussi appelé Lemme de Aubin-Nitsche, donne un contenu concret à cette intuition.

Théorème 6.5.1 *Sous les mêmes hypothèses que celle du corollaire 6.4.4, on a aussi l'estimation*

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^r |u|_{H^r}, \quad (6.7)$$

où la constante C ne dépend que de $\|c\|_{L^\infty}$, C_a , α , k et r .

Démonstration. Notons $g = u - u_h \in H_0^1(\Omega)$ et considérons le problème auxiliaire

$$-w''(x) + c(x)w(x) = g(x), \quad x \in \Omega, \quad w(0) = w(1) = 0.$$

Comme $g \in L^2(\Omega)$ on sait que $w \in H^2(\Omega)$ avec

$$\|w\|_{H^2} = \|w''\|_{L^2} \leq \|c\|_{L^\infty} \|w\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} \leq C_0 \|g\|_{L^2}, \quad C_0 = 1 + 2\|c\|_{L^\infty}.$$

On peut ensuite écrire en intégrant par partie

$$\|g\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} g(x)(-w''(x) + c(x)w(x))dx = a(g, w) = a(u - u_h, w).$$

Puisque u_h est la solution de Galerkin, on sait par ailleurs que $a(u - u_h, w_h) = 0$ pour tout $w_h \in V_h$. En prenant $w_h = \Pi_h w$, on peut donc écrire

$$\|g\|_{L^2}^2 = a(g, w - w_h) \leq C_a \|g\|_{H^1} \|w - \Pi_h w\|_{H^1}.$$

D'après le théorème 6.4.3, on a

$$\|w - \Pi_h w\|_{H^1} \leq C_1 h \|w\|_{H^2} \leq C_0 C_1 h \|g\|_{L^2},$$

où C_1 ne dépend que de k . On a ainsi

$$\|g\|_{L^2}^2 \leq C_0 C_1 C_a h \|g\|_{H^1} \|g\|_{L^2},$$

soit

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C_0 C_1 C_a h \|u - u_h\|_{H^1}.$$

En appliquant l'estimation en norme H^1 du corollaire 6.4.4, on obtient finalement (6.7). \square

Afin d'illustrer l'utilité des éléments finis de Hermite, examinons rapidement un autre exemple de formulation variationnelle construite à partir d'un problème aux limites d'ordre 4 (modélisation d'un fil rigide encastré). Le problème aux limites s'écrit : soit $c \geq 0$ et f données dans $C^0(\Omega)$, on cherche $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$ telle que

$$(P) \quad \begin{cases} u^{(4)}(x) + c(x)u(x) = f(x) \text{ dans } \Omega, \\ u(0) = u(1) = 0, u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

En multipliant par une fonction v suffisamment régulière et vérifiant les mêmes conditions aux limites que u , puis en effectuant deux intégration par partie, on aboutit à la formulation variationnelle

$$a(u, v) = \ell(v),$$

où la forme linéaire est encore donnée par $\ell(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$ et la forme bilinéaire est du type

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (u''(x)v''(x) + c(x)u(x)v(x))dx.$$

L'espace de Hilbert naturel pour cette formulation variationnelle est

$$V = H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) : v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0\}.$$

A titre d'exercice, on pourra montrer que toutes les hypothèses de Lax-Milgram sont vérifiées avec ce choix d'espace V dès que $f \in L^2$ et $c \in L^\infty$. Il existe donc une unique solution $u \in V$ et on peut aussi montrer que $u \in H^4(\Omega)$.

Si on veut appliquer la méthode d'approximation variationnelle, il nous faut utiliser un espace d'élément fini V_h contenu dans $H^2(\Omega)$, ce qui n'est pas le cas des éléments finis de Lagrange. Un choix naturel est celui des éléments de Hermite, par exemple \mathbb{P}_3 . Le problème discret est donc : trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad v_h \in V_h.$$

D'après le lemme de Cea, on peut écrire

$$\|u - u_h\|_V \leq C \|u - \Pi_h v\|_V,$$

où Π_h est l'opérateur d'interpolation agissant de V dans V_h et $C = (C_a/\alpha)^{1/2}$. Finalement, le théorème d'approximation 6.4.3 nous donne l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch^2 |u|_{H^4}.$$

Annexe : preuve du théorème 6.4.1

Le point de départ est un résultat de base liant les polynômes et les espaces de Sobolev, appelé théorème de Deny-Lions.

Théorème 6.5.2 *Soit $r > 0$ un entier et I un intervalle ouvert borné. Il existe une constante C qui ne dépend que de r et I telle que*

$$\|v\|_{H^r(I)} \leq C |v|_{H^r(I)},$$

pour toute fonction v telle que $\int_I v(x)p(x)dx = 0$ quelque soit $p \in \mathbb{P}_{r-1}$.

Démonstration. On procède par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas de constante C telle que ceci soit vrai. Autrement dit, pour tout entier $n \geq 1$, il existe une fonction v_n orthogonale dans $L^2(I)$ à tous les polynômes de degré $r-1$ et telle que

$$\|v_n\|_{H^r(I)} \geq n |v_n|_{H^r(I)}.$$

En posant $w_n = v_n / \|v_n\|_{H^r(I)}$, on obtient

$$\|w_n\|_{H^r(I)} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |w_n|_{H^r(I)} = 0.$$

et w_n vérifie aussi que $\int_I v_n(x)p(x)dx = 0$ pour tout $p \in \mathbb{P}_{r-1}$.

La suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est bornée dans $H^r(I)$. Rappelons que le théorème de Rellich nous indique que l'injection de $H^1(I)$ dans $L^2(I)$ est compacte lorsque I est borné. On en déduit aisément par récurrence que l'injection de $H^r(I)$ dans $H^{r-1}(I)$ est compacte. Par conséquent quitte à en extraire une sous-suite, on obtient que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ converge dans $H^{r-1}(I)$ vers une limite $w \in H^{r-1}(I)$.

La suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est donc de Cauchy dans $H^{r-1}(I)$ c'est à dire

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|w_m - w_n\|_{H^{r-1}(I)} = 0.$$

D'autre part, en écrivant $|w_m - w_n|_{H^r(I)} \leq |w_m|_{H^r(I)} + |w_n|_{H^r(I)}$, on voit qu'on a aussi

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} |w_m - w_n|_{H^r(I)} = 0.$$

Ceci nous montre que $(w_n)_{n \geq 1}$ est aussi de Cauchy dans $H^r(I)$ et converge donc dans cet espace vers une limite qui est forcément égale (presque partout) à w puisque c'est aussi une limite dans $H^{r-1}(I)$.

Par continuité de la norme au passage à la limite, on voit que

$$\|w\|_{H^r(I)} = 1 \quad \text{et} \quad |w|_{H^r(I)} = 0.$$

La deuxième propriété signifie que w est un polynôme de degré inférieur ou égal à $r - 1$. Ce fait n'est pas complètement évident car il s'agit de l'annulation de la dérivée faible d'ordre r . On peut le montrer par récurrence sur r . On a déjà démontré au lemme 4 (chapitre 3) que cette propriété est vraie pour $r = 0$ (si $v' = 0$ alors v est constante). Supposons la vraie pour $r - 1$. Et soit $v \in H^r(I)$ tel que $|v|_{H^{r-1}} = 0$, donc tel que $v^{(r)} = 0$. Clairement, $v' \in H^{r-1}(I)$ est tel que $(v')^{(r-1)} = 0$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe $q \in \mathbb{P}_{r-2}$ tel que $v' = q$. Soit $Q \in \mathbb{P}_{r-1}$ une primitive de q (au sens classique). Alors $v - Q \in H^1(I)$ est tel que $(v - Q)' = 0$. Il existe donc une constante c telle que $v - Q = c$, soit encore $v = Q + c \in \mathbb{P}_{r-1}$.

On remarque finalement que puisque

$$\left| \int_I p(x) w_n(x) dx - \int_I p(x) w(x) dx \right| \leq \|p\|_{L^2} \|w_n - w\|_{L^2},$$

on a aussi par passage à la limite la propriété $\int_I w(x) p(x) dx = 0$ pour tout $p \in \mathbb{P}_{r-1}$ et en particulier pour $p = w$. Ceci entraîne que w est le polynôme nul et est en contradiction avec le fait que $\|w\|_{H^r(I)} = 1$. \square

Pour démontrer le théorème 6.4.1, on se place dans le cas $I = \hat{T}$. Pour toute fonction $v \in H^r(\hat{T})$ on note q sa projection $L^2(\hat{T})$ -orthogonale sur \mathbb{P}_{r-1} . On a ainsi

$$\int_{\hat{T}} (v(x) - q(x)) p(x) dx = 0,$$

et on peut donc appliquer le théorème de Deny-Lions à la fonction $v - q$, ce qui nous donne

$$\|v - q\|_{H^r(\hat{T})} \leq C |v - q|_{H^r(\hat{T})},$$

En remarquant que $q^{(r)} = 0$, on obtient ainsi le résultat d'approximation pour toute fonction $v \in H^r(\hat{T})$

$$\min_{p \in \mathbb{P}_{r-1}} \|v - p\|_{H^r(\hat{T})} \leq C |v|_{H^r(\hat{T})},$$

où C ne dépend que de r . On note ensuite que pour tout l tel que $r \leq l + 1$ on a $\mathbb{P}_{r-1} \subset \mathbb{P}_l$ et par conséquent

$$\min_{p \in \mathbb{P}_l} \|v - p\|_{H^r(\hat{T})} \leq C |v|_{H^r(\hat{T})}.$$

Dans le cas de l'interpolation de Lagrange de degré k , puisqu'on a supposé $r \leq k + 1$, on a ainsi

$$\min_{p \in \mathbb{P}_k} \|v - p\|_{H^r(\hat{T})} \leq C |v|_{H^r(\hat{T})}, \quad (6.8)$$

D'autre part puisque $r \geq 1$ l'espace $H^r(\hat{T})$ s'injecte continuellement dans $C^0(\overline{\hat{T}})$. En écrivant

$$\hat{\Pi}v = \sum_{j=0}^k v(j/k) \hat{w}_{j/k},$$

on voit que $\widehat{\Pi}$ est un opérateur continu de $C^0(\overline{\hat{T}})$ dans \mathbb{P}_k et donc de $H^r(\hat{T})$ dans \mathbb{P}_k muni de n'importe quelle norme puisque c'est un espace de dimension finie. On note ainsi

$$M = \|\widehat{\Pi}\|_{\mathcal{L}(H^r)} = \max_{\|v\|_{H^r(\hat{T})}=1} \|\widehat{\Pi}v\|_{H^r(\hat{T})} < \infty.$$

La constante M ne dépend que de k et r . Pour toute fonction $p \in \mathbb{P}_k$ on peut écrire

$$\|v - \widehat{\Pi}v\|_{H^r(\hat{T})} \leq \|v - p\|_{H^r(\hat{T})} + \|p - \widehat{\Pi}v\|_{H^r(\hat{T})} = \|v - p\|_{H^r(\hat{T})} + \|\widehat{\Pi}p - \widehat{\Pi}v\|_{H^r(\hat{T})},$$

et par conséquent

$$\|v - \widehat{\Pi}v\|_{H^r(\hat{T})} \leq (1 + M)\|v - p\|_{H^r(\hat{T})}.$$

Puisque le choix de p est arbitraire, on obtien

$$\|v - \widehat{\Pi}v\|_{H^r(\hat{T})} \leq (1 + M) \min_{p \in \mathbb{P}_k} \|v - p\|_{H^r(\hat{T})},$$

qui combiné à (6.8) nous conduit à l'estimation (6.2) annoncée.

Dans le cas de l'interpolation de Hermite de degré $2k + 1$, puisqu'on a supposé $r \leq 2k + 2$, on a cette fois

$$\min_{p \in \mathbb{P}_{2k+1}} \|v - p\|_{H^r(\hat{T})} \leq C|v|_{H^r(\hat{T})}. \quad (6.9)$$

Puisque $r \geq k + 1$ l'espace $H^r(\hat{T})$ s'injecte continuellement dans $C^k(\overline{\hat{T}})$, et l'expression de l'interpolation de Hermite permet de montrer que $\widehat{\Pi}$ est continu de $H^r(\hat{T})$ dans \mathbb{P}_{2k+1} . On obtient de la même façon que

$$\|v - \widehat{\Pi}v\|_{H^r(\hat{T})} \leq (1 + M) \min_{p \in \mathbb{P}_{2k+1}} \|v - p\|_{H^r(\hat{T})},$$

et on conclut en combinant avec (6.9).

