Chapitre 5

Formule de Green généralisée

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit l'espace de Sobolev qui est plus grand que les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et dans lequel la notion de gradient avait encore un sens. Nous allons étudier en détail le comportement au bord des éléments de cet espace. Puis nous définirons une variante vectorielle de l'espace de Sobolev, ce qui nous permettra d'écrire des formules de Green telles que vues au chapitre 2 mais dans le cadre fonctionnel des espaces de Sobolev.

5.1 Opérateur de trace Dirichlet

Les espaces de Sobolev constituent un cadre fonctionnel privilégié pour l'analyse des EDP elliptiques. Comme les équations que nous souhaitons étudier comportent des conditions aux limites, il nous faut considérer la restriction de fonctions sur le bord $\partial\Omega$ du domaine de calcul. Mais les éléments de l'espace $\mathrm{H}^1(\Omega)$ sont définis *a priori* partout modulo les ensembles de mesure (de Lebesgue) nulle et, puisque $\partial\Omega$ est de mesure nulle, considérer la restriction $u|_{\partial\Omega}$ n'a pas réellement de sens pour un $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Mais l'opération de trace $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$ prend du sens dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, et nous allons consacrer cette section à préciser cette notion.

Opérateur de trace

Il est clair que la trace sur le bord d'une fonction régulière est bien définie en tant que restriction au sens classique. Mais le résultat suivant donne une information plus fine en montrant une dépendance continue dans la norme de Sobolev.

☞ **Proposition 5.1.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert lipschitzien de frontière borné. Il existe $C > 0$ telle que $\|u\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ pour tout $u \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ à support borné.

Démo :
On introduit un atlas fini $(\mathrm{B}, \Phi_\mathrm{B})_{\mathrm{B}\in\mathscr{B}}$ de $\partial\Omega$, ainsi qu'une partition de l'unité $(\varphi_\mathrm{B})_{\mathrm{B}\in\mathscr{B}}$ subordonnée à cet atlas. Comme la somme dans (2.9) est finie, et $\sup_{\mathbb{R}^{d-1}} \sqrt{1 + |\nabla h_\mathrm{B}|^2} < +\infty$ (cf prop. 2.4), il suffit de démontrer que pour tout $\mathrm{B} \in \mathscr{B}$, il existe $C > 0$ indépendant de u tel que

$$\begin{aligned} &\|u_\mathrm{B} \circ \Phi_\mathrm{B}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C\|u_\mathrm{B}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \quad \forall u \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}) \\ &\text{où} \quad u_\mathrm{B}(\boldsymbol{x}) := \varphi_\mathrm{B}(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Fixons donc $\mathrm{B} \in \mathscr{B}$. Par définition de la carte locale, il existe $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$, $\mathrm{U} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ orthogonale et $h_{\mathrm{B}} : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne, tels que $\Phi_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a} + \mathrm{U}(\boldsymbol{y}, h_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{y}))$. Quitte à multiplier par une fonction de troncature valant 1 sur B, on peut supposer h_{B} à support borné. Posons $\phi(\boldsymbol{y}, z) = \boldsymbol{a} + \mathrm{U}(\boldsymbol{y}, z)$ ainsi que $\Omega_\phi = \phi^{-1}(\Omega)$. On a $u_{\mathrm{B}}(\Phi_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{y})) = u_{\mathrm{B}}(\phi(\boldsymbol{y}, h_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{y})))$. Parce que φ_{B} est à support borné, $\varphi_{\mathrm{B}} \circ \phi$ l'est aussi, et il existe donc un $h_* > 0$ tel que $\sup_{\mathbb{R}^{d-1}} |h_{\mathrm{B}}| \leq h_*$ et $\varphi_{\mathrm{B}} \circ \phi(\boldsymbol{y}, z) = 0$ pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$ dès que $|z| \geq h_*$. Comme $\mathrm{supp}(u_{\mathrm{B}} \circ \phi) \subset \mathrm{supp}(\varphi_{\mathrm{B}} \circ \phi)$, on en tire

$$\begin{aligned}
\|u_{\mathrm{B}} \circ \Phi_{\mathrm{B}}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{d-1})} &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_{\mathrm{B}} \circ \phi(\boldsymbol{y}, h_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{y}))|^2 d\boldsymbol{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big| \int_{-\infty}^{h_{\mathrm{B}}(y)} \partial_z(u_{\mathrm{B}} \circ \phi)(\boldsymbol{y}, z)\, dz \Big|^2 d\boldsymbol{y} \\
&\leq 2h_* \int_{\Omega_\phi} |\nabla(u_{\mathrm{B}} \circ \phi)|^2\, d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, nous avons utilisé le fait que $\mathrm{supp}(u_{\mathrm{B}} \circ \phi) \cap \{(\boldsymbol{y}, z) \in \mathbb{R}^d | \, z < h_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{y})\} \subset \Omega_\phi$. Maintenant notons que $d\phi = \mathrm{U}^\top$ et, comme U est orthogonale, le lemme 1.8 nous donne $|\nabla(u_{\mathrm{B}} \circ \phi)(\boldsymbol{x})| = |(\nabla u_{\mathrm{B}})(\phi(\boldsymbol{x}))|$. Finalement, en utilisant ϕ comme changement de variable dans l'intégrale, on conclut $\|\nabla(u_{\mathrm{B}} \circ \phi)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_\phi)} = \|\nabla u_{\mathrm{B}} \circ \phi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_\phi)} = \|\nabla u_{\mathrm{B}}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ ce qui termine la preuve. □

Le résultat qui précède montre que l'application trace $\varphi \mapsto \varphi|_{\partial\Omega}$ est linéaire continue de $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ dans $\mathrm{L}^2(\Gamma)$, en considérant $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ comme un sous-espace de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ muni de $\| \;\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$. Vu la densité de $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ (Corollaire 4.8), on peut donc appliquer la proposition 3.8 garantissant l'existence/unicité d'un prolongement par continuité.

Théorème 5.2 (Theorème de trace).
Il existe une unique application linéaire continue $\tau_{\partial\Omega} : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\partial\Omega)$ vérifiant $\tau_{\partial\Omega}(\varphi) = \varphi|_{\partial\Omega}$ pour tout $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Dans la suite on écrira à l'occasion "$u|_{\partial\Omega}$" au lieu de "$\tau_{\partial\Omega}(u)$" même lorsque $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ car l'unicité de l'application trace élimine tout ambiguité quant au sens à accorder à cette notation. De plus on notera

$$\|\tau_{\partial\Omega}\| := \sup_{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\tau_{\partial\Omega}(u)\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}}{\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}}. \tag{5.2}$$

Si Γ est un sous-ensemble de $\partial\Omega$ de mesure (de surface) non nulle, l'espace $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$ s'injecte continument dans $\mathrm{L}^2(\Gamma)$ par restriction i.e. $\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma)} \leq \|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)} \forall \varphi \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)$. Et alors le théorème précédent montre que $u \mapsto u|_\Gamma$ peut être prolongé en une application continue de $\mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Gamma)$.

Sobolev à trace nulle

Definition 5.3.
Soit $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure de surface non-nulle. On définit $\mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ comme l'adhérence au sens de la norme $\| \;\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ de l'ensemble des $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_{0,\Gamma}(\overline{\Omega})$ à support borné.

Si $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_{0,\Gamma}(\overline{\Omega})$ est à support borné, alors on a bien $\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, ce qui justifie cette définition. Par construction l'espace $\mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ et, en tant que tel, il peut être muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ ce qui en fait un (sous-)espace de Hilbert (tout sous-ensemble fermé d'un espace complet étant complet). Il est d'usage de noter

$$\mathrm{H}^1_0(\Omega) := \mathrm{H}^1_{0,\partial\Omega}(\Omega). \tag{5.3}$$

En reprenant les notation du théorème 5.2, il est clair que $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \subset \mathrm{Ker}(\tau_{\partial\Omega})$ par continuité de l'application. En réalité cette inclusion est une égalité que l'on peut utiliser pour caractériser $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. La démonstration du résultat suivant, que nous admettrons, est proposée dans [15, Chap.1].

Proposition 5.4.
$\mathrm{H}^1_0(\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega) |\ u|_{\partial\Omega} = 0\} = \mathrm{Ker}(\tau_{\partial\Omega})$.

Si Ω est connexe et $\Gamma \subset \partial\Omega$ est de mesure non nulle, alors une fonction $u \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ constante s'annule nécessairement partout $u = 0$ sur Ω parceque u doit prendre la valeur 0 sur Γ. Cette remarque conduit a une forme particulièrement simple de l'inégalité de Poincaré. Le résultat suivant est une application directe du théorème 4.11 avec le choix $\Phi(u) = \int_\Gamma |u| d\sigma$.

Lemme 5.5.
Soit Ω un ouvert lipschitzien connexe borné et $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure de surface non nulle. Il existe $\alpha > 0$ telle que $\alpha \|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq (\int_\Gamma |u| d\sigma)^2 + \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \forall u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. On a en particulier

$$\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq (1 + 1/\alpha)\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \qquad \forall u \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega). \tag{5.4}$$

5.2 Espace des traces

Nous avons vu que l'application trace $\tau_{\partial\Omega} : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\partial\Omega)$ n'était pas injective. Elle n'est pas surjective non plus. La trace induit donc un sous-espace remarquable de fonctions définies sur le bord auquel il est naturel de s'intéresser. De manière générale, pour $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure de surface non nulle, on définit

$$\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) := \{u|_\Gamma,\ u \in \mathrm{H}^1(\Omega)\}. \tag{5.5}$$

Dans cette définition il faut comprendre "$u|_\Gamma$" comme $\tau_\Gamma(u) := \tau_{\partial\Omega}(u)|_\Gamma$ i.e. la restriction à Γ de la trace de u. Il s'agit bien d'un sous-espace strict de $\mathrm{L}^2(\Gamma)$ et l'application $\tau_\Gamma : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ est surjective. On peut équiper $\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ d'une norme pour laquelle la trace reste continue.

Proposition 5.6.
L'espace $\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$, muni de la norme $\|\tau_{\partial\Omega}(u)\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)} := \inf\{\|u + v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}, v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\}$, est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet) et l'application trace $\tau_{\partial\Omega} : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ est une surjection continue de module unitaire

$$\|\tau_{\partial\Omega}(u)\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \quad \forall u \in \mathrm{H}^1(\Omega). \tag{5.6}$$

Démo :

La continuité annoncée de l'opérateur trace est une évidence au vu de la définition de $\| \|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. Il faut simplement vérifier qu'il s'agit bien d'une norme avec laquelle $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est complet. Comme l'espace $H_0^1(\Omega)$ est fermé, on peut appliquer le théorème 3.10 de projection sur un sous-espace fermé qui donne, pour tout $u \in H^1(\Omega)$, l'existence et l'unicité d'un $\phi_0(u) \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\|u - \phi_0(u)\|_{H^1(\Omega)} = \inf\{\|u + v\|_{H^1(\Omega)}, v \in H_0^1(\Omega)\}$. Posons $\phi(u) := u - \phi_0(u)$ qui vérifie

$$\phi(u) \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \|\phi(u)\|_{H^1(\Omega)} = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \|u + v\|_{H^1(\Omega)} \tag{5.7}$$

pour tout $u \in H^1(\Omega)$. Autrement dit $\|\tau_{\partial\Omega}(u)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|\phi(u)\|_{H^1(\Omega)}$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$. D'après le corollaire 3.11, on voit par ailleurs que $\phi(u) \in H_0^1(\Omega)^\perp$ (où l'orthogonal est à comprendre au sens du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega)}$) si bien que $u = \phi_0(u) + \phi(u)$ fournit la décomposition de u sur la somme directe orthogonale $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_0^1(\Omega)^\perp$. Donc $u \mapsto \phi(u)$ est un projecteur orthogonal qui est donc linéaire.

Vérifions maintenant les propriétés de $\| \|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. Pour $\dot{u}, \dot{v} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, soient $u, v \in H^1(\Omega)$ vérifiant $\tau_{\partial\Omega}(u) = \dot{u}, \tau_{\partial\Omega}(v) = \dot{v}$. Alors, vu la linéarité de ϕ, on a $\|\dot{u} + \lambda\dot{v}\|_{H^{1/2}} = \|\phi(u + \lambda v)\|_{H^1(\Omega)} = \|\phi(u) + \lambda\phi(v)\|_{H^1(\Omega)} \le \|\phi(u)\|_{H^1(\Omega)} + |\lambda| \cdot \|\phi(v)\|_{H^1(\Omega)} = \|\dot{u}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + |\lambda| \cdot \|\dot{v}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. Ensuite si $\|\dot{u}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = 0$, alors $\|\phi(u)\|_{H^1(\Omega)} = 0$ d'où $\phi(u) = 0$ ce qui signifie que $u \in H_0^1(\Omega)$ et donc $\dot{u} = 0$. Donc $\| \cdot \|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ est bien une norme.

Vérifions enfin la complétude de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ pour cette norme. Soit $\dot{u}_n \in H^{1/2}(\partial\Omega), n \ge 0$ une suite de Cauchy pour $\| \cdot \|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. Pour chaque n, il existe $u_n \in H^1(\Omega)$ tel que $\tau_{\partial\Omega}(u_n) = \dot{u}_n$. Alors $\|\phi(u_n) - \phi(u_m)\|_{H^1(\Omega)} = \|\phi(u_n - u_m)\|_{H^1(\Omega)} = \|\dot{u}_n - \dot{u}_m\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$, si bien que $\phi(u_n)$ est une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$ et converge donc vers un $u_\infty \in H^1(\Omega)$. Puisque ϕ est un projecteur continu on a même $\phi(u_n) = \phi(\phi(u_n)) \to \phi(u_\infty) = u_\infty$. En notant $\dot{u}_\infty = \tau_{\partial\Omega}(u_\infty)$, on a $\|\dot{u}_\infty - \dot{u}_n\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|\phi(u_\infty - u_n)\|_{H^1(\Omega)} = \|\phi(u_\infty) - \phi(u_n)\|_{H^1(\Omega)} \to 0$, ce qui conclut la preuve. □

Il est important de comprendre que les normes $\| \|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ et $\| \|_{L^2(\partial\Omega)}$ ne sont pas équivalente. L'une des deux normes est plus forte que l'autre.

Corollaire 5.7.
Pour tout ouvert lipschitzien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ borné, l'injection $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ est dense : pour tout $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$, il existe $\varphi_n \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ tels que $\lim_{n\to+\infty} \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0$. D'autre part cette injection est continue : il existe $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \quad \forall u \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Démo :

Nous admettrons le résultat de densité (on pourra consulter ? ? ?). Pour la continuité, il suffit d'appliquer le théorème 5.2 qui nous dit qu'il existe $C > 0$ telle que $\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\|v + v_0\|_{H^1(\Omega)}$ pour $u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ tel que $v|_{\partial\Omega} = u$ et pour tout $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Il reste ensuite à prendre la borne inférieure sur les $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. □

Nous nous intéresserons également à l'espace dual $H^{-1/2}(\partial\Omega) = H^{1/2}(\partial\Omega)'$ défini comme l'ensemble des formes linéaires $q : H^{1/2}(\partial\Omega) \to \mathbb{C}$ continues par rapport à la norme $\| \|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$.

Nous noterons $\langle q, v\rangle_{\partial\Omega} := q(v)$. Nous verrons un peu plus loin pourquoi cette notation se justifie. Le dual hérite naturellement d'une structure d'espace de Banach.

Lemme 5.8.
L'ensemble $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ *des formes linéaires continues* $q : \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ *est un espace de Banach (espace normé complet) lorsqu'il est muni de la norme suivante*

$$\|q\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)} := \sup_{v\in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|\langle q, v\rangle_{\partial\Omega}|}{\|v\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)}}.$$

Démo :
Des vérifications élémentaires montrent qu'il s'agit bien d'une norme. Il faut simplement de vérifier la complétude. Soit $q_n \in \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega), n \geq 0$ une suite de Cauchy pour $\| \ \|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)}$. Tout d'abord $(\|q_n\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)})_{n\geq 0}$ est de Cauchy donc est bornée par une constante

$$C = \sup_{n\geq 0} \|q_n\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)} < +\infty \tag{5.8}$$

Par ailleurs pour tout $v \in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ la suite $(\langle q_n, v\rangle_{\partial\Omega})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ vu que, par définition de la norme, on a l'estimation

$$\begin{aligned} |\langle q_n, v\rangle_{\partial\Omega} - \langle q_k, v\rangle_{\partial\Omega}| &= |\langle q_n - q_k, v\rangle_{\partial\Omega}| \\ &\leq \|q_n - q_k\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)} \|v\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Donc la suite $(\langle q_n, v\rangle_{\partial\Omega})_{n\geq 0}$ converge vers une limite que nous noterons $q(v) := \lim_{n\to\infty}\langle q_n, v\rangle_{\partial\Omega}$. Il est clair que $v \mapsto q(v)$ est linéaire. De plus on a $|\langle q_n, v\rangle_{\partial\Omega}| \leq C\|v\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)}$ pour tout $n \geq 0$ et tout $v \in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ d'après (5.8). En faisant $n \to +\infty$, on déduit finalement que $|\langle q, v\rangle_{\partial\Omega}| \leq C\|v\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)}$, de sorte que $q \in \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Enfin, puisque q_n est de Cauchy dans $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \geq 0$ tel que $\|q_n - q_k\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \epsilon$ dès que $n, k \geq N$. En reprenant (5.9) et en faisant $k \to \infty$, on obtient $|\langle q_n, v\rangle_{\partial\Omega} - \langle q, v\rangle_{\partial\Omega}| \leq \epsilon\|v\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)}$ pour tout $v \in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$. On en déduit que $\|q - q_n\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$ i.e. $\lim_{n\to\infty} \|q - q_n\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)} = 0$. □

Pour tout $g \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)$, definissons $\iota(g) \in \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ par $\langle \iota(g), v\rangle_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega} gv d\sigma \forall v \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$. D'après le résultat de densité du corollaire 5.7, $\iota(g) = 0 \Rightarrow g = 0$ i.e. l'application $\iota : \mathrm{L}^2(\partial\Omega) \to \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ est une injection. En convenant d'identifier $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$ avec son propre dual topologique, nous confondrons $\iota(g)$ avec g lui-même. Cette identification permet d'abord d'écrire

$$\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega) \subset \mathrm{L}^2(\partial\Omega) \subset \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega) \tag{5.10}$$

chacune de ces injections étant continues. Par ailleurs, identifier $\iota(g)$ avec g amène à écrire $\langle g, v\rangle_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega} gv d\sigma \forall v \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$. Ceci suggère de prolonger l'identification de $\int_{\partial\Omega} \leftrightarrow \langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\Omega}$ à $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega) \times \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ tout entier. Nous adopterons également parfois la notation suivante

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} qv\, d\sigma := \langle q, v\rangle_{\partial\Omega} \\ &\text{pour} \quad q \in \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), v \in \mathrm{H}^{+\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Attention, il ne s'agit pas d'une "vraie" intégrale, mais bien d'une *convention de notation.* Cette convention simplifiera grandement les écritures par la suite.

Avec la norme introduite ci-dessus, et la convention de notation (5.11), on obtient directement l'inégalité $|\int_{\partial\Omega} qv\, d\sigma| \leq \|q\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)}\|v\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)}$ pour tout $q \in \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ et tout $v \in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$, ce qui ressemble de très près à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

5.3 Divergence faible

De même que nous avons défini une notion de gradient faible, on peut définir une divergence faible, en utilisant la formule de Green et des fonctions test régulières s'annulant sur le bord. La définition suivante est à rapprocher de la définition 4.1 du chapitre précédent.

☞ **Definition 5.9.**
Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, on dit qu'un champ de vecteur de carré intégrable $\boldsymbol{p} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^d$ admet une divergence faible, et on écrit "$\mathrm{div}(\boldsymbol{p}) \in \mathrm{L}^2(\Omega)$", lorsqu'il existe $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \boldsymbol{p}^\top \nabla\varphi d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega u\,\varphi\, d\boldsymbol{x} \quad \forall \varphi \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega),$$

où $\mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega) := \{\varphi \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega),\ \mathrm{supp}(\varphi)$ borné$\}$. Si un tel u existe, il est unique. On écrit alors "$\mathrm{div}(\boldsymbol{p})$" pour désigner cette fonction $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

De même que pour le gradient, et en suivant les même arguments (exercice), la divergence faible ainsi définie est unique et généralise la divergence au sens classique telle qu'introduite au paragraphe 1.5. De même que pour le gradient la divergence faible est un opérateur linéaire $\mathrm{div}(\boldsymbol{p}+\alpha\boldsymbol{q}) = \mathrm{div}(\boldsymbol{p})+\alpha\mathrm{div}(\boldsymbol{q})$ si $\mathrm{div}(\boldsymbol{p}), \mathrm{div}(\boldsymbol{q}) \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Cette notion permet donc de définir un espace vectoriel.

☞ **Definition 5.10.**
L'ensemble $\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega) := \{\boldsymbol{p} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^d,\ \mathrm{div}(\boldsymbol{p}) \in \mathrm{L}^2(\Omega)\}$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire et de la norme suivant

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})_{\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)} &:= \int_\Omega \boldsymbol{p}^\top \overline{\boldsymbol{q}} d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{p})\mathrm{div}(\overline{\boldsymbol{q}}) d\boldsymbol{x} \\ \|\boldsymbol{p}\|_{\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)} &:= (\|\boldsymbol{p}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\mathrm{div}(\boldsymbol{p})\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)})^{1/2}.\end{aligned}$$

Cette définition contient un résultat de complétude dont la démonstration est quasiment identique à celle de la proposition 4.4 (exercice à nouveau laissé au lecteur). On définit également des sous-espaces fermés remarquables comme suit.

Definition 5.11.
Étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et un sous-ensemble $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure de surface non-nulle, on définit $\mathrm{H}_{0,\Gamma}(\mathrm{div},\Omega)$ comme l'adhérence pour la norme $\|\ \|_{\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)}$ de l'ensemble des $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty_{0,\Gamma}(\Omega)^d$ à support borné.

Il est d'usage de noter $\mathrm{H}_0(\mathrm{div},\Omega) := \mathrm{H}_{0,\partial\Omega}(\mathrm{div},\Omega)$. Par construction, les espaces $\mathrm{H}_{0,\Gamma}(\mathrm{div},\Omega)$ sont des sous-espaces fermés de $\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$.

5.4 Flux normal sortant au bord

Vu la définition 5.9, par densité de $\mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, on a $\int_\Omega \boldsymbol{p}^\top \nabla u + u\,\mathrm{div}(\boldsymbol{p})d\boldsymbol{x} = 0$ pour tout $\boldsymbol{p} \in \mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$ et tout $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. En revanche cette intégrale n'a aucune raison de s'annuler si $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ car, dans ce cas, des termes de bord supplémentaires doivent être pris en compte. Ceci nous conduit à formaliser la notion de flux sortant. Pour tout champ $\boldsymbol{p} \in \mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$, on définit $\pi_{\partial\Omega}(\boldsymbol{p}) \in \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ (i.e. forme linéaire continue $\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega) \to \mathbb{C}$) par l'identité

$$\langle \pi_{\partial\Omega}(\boldsymbol{p}), u|_{\partial\Omega}\rangle_{\partial\Omega} := \int_\Omega \boldsymbol{p}^\top \nabla u + u\,\mathrm{div}(\boldsymbol{p})d\boldsymbol{x} \quad \forall u \in \mathrm{H}^1(\Omega). \tag{5.12}$$

Cette définition est licite car l'opérateur de trace $\tau_{\partial\Omega} : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ est surjectif et, par ailleurs, le membre de droite dans (5.12) dépend uniquement de $u|_{\partial\Omega}$: en effet si $u'|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$ pour un autre $u' \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, alors $u - u' \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ d'après la proposition 5.4, et donc $\int_\Omega \boldsymbol{p}^\top \nabla(u-u') + (u-u')\,\mathrm{div}(\boldsymbol{p})d\boldsymbol{x} = 0$. Pour bien comprendre cette opérateur $\pi_{\partial\Omega}$, voyons ce que devient cette définition si le champ de vecteur $\boldsymbol{p}$ est régulier.

Lemme 5.12.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert lipschitzien à frontière borné dont la normale sortante au bord est notée $\boldsymbol{n}$. Alors pour tout $\boldsymbol{p} \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ on a

$$\langle \pi_{\partial\Omega}(\boldsymbol{p}), v\rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}^\top \boldsymbol{p}\, v\, d\sigma \quad \forall v \in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega).$$

Démo :
En prenant dans un premier temps $u \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$, il suffit d'appliquer la formule de Green (2.13) pour obtenir $\langle \pi_{\partial\Omega}(\boldsymbol{p}), u|_{\partial\Omega}\rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}^\top \boldsymbol{p}\, u|_{\partial\Omega}\, d\sigma$. Il reste ensuite à utiliser la densité de $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ cf corollaire 4.8, et la surjectivité de la trace Dirichlet $\tau_{\partial\Omega} : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$. □

Le résultat précédent montre que l'opérateur $\pi_{\partial\Omega}$ prolonge la notion de flux normal $\boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{n}^\top\boldsymbol{p}|_{\partial\Omega}$ à tout $\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$ si bien que nous écrirons parfois "$\boldsymbol{n}^\top\boldsymbol{p}|_{\partial\Omega}$" au lieu de $\pi_{\partial\Omega}(\boldsymbol{p})$. Ceci justifie par ailleurs un peu plus la convention de notation (5.11). L'opérateur de flux normal $\pi_{\partial\Omega} : \mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega) \to \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ est un deuxième opérateur de trace, linéaire et continue. Il est contrôlé par la norme $\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$.

Lemme 5.13.
L'application $\pi_{\partial\Omega} : \mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega) \to \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ définie par (5.12) est une surjection linéaire continue de module unitaire $\|\pi_{\partial\Omega}(\boldsymbol{p})\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \|\boldsymbol{p}\|_{\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)}$.

Démo :
Vérifons dans un premier temps la continuité. Fixons un $\boldsymbol{p} \in \mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$. Puisque $\tau_{\partial\Omega}(u + u_0) = \tau_{\partial\Omega}(u)$ pour tout $u \in \mathrm{H}^1(\Omega), u_0 \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (5.12), on obtient $|\langle \pi_{\partial\Omega}(\boldsymbol{p}), \tau_{\partial\Omega}(u)\rangle_{\partial\Omega}| \leq \|\boldsymbol{p}\|_{\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)}\|u + u_0\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$. En prenant l'inf sur les $u_0 \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ ceci conduit à $|\langle \pi_{\partial\Omega}(\boldsymbol{p}), \tau_{\partial\Omega}(u)\rangle_{\partial\Omega}| \leq \|\boldsymbol{p}\|_{\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)}\|\tau_{\partial\Omega}(u)\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)}$ d'après la définition de $\| \quad \|_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)}$ donnée dans la Proposition 5.6. Vu que l'opérateur de trace Dirichlet $\tau_{\partial\Omega} : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ est surjectif, ceci se ré-écrit $|\langle \pi_{\partial\Omega}(\boldsymbol{p}), v\rangle_{\partial\Omega}|/\|v\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)} \leq \|\boldsymbol{p}\|_{\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)}$. Il reste à prendre le sup sur les $v \in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega) \setminus \{0\}$.

Nous vérifions maintenant la surjectivité. Soit $q \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Omega)$. L'application $v \mapsto \langle q, v|_{\partial\Omega}\rangle_{\partial\Omega}$ est une forme linéaire continue sur $\mathrm{H}^1(\Omega)$ d'après la continuité de la trace Dirichlet cf. proposition 5.1. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ tel que $(u,v)_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u^\top \nabla \overline{v} + u\overline{v}\, d\boldsymbol{x} = \langle q, \overline{v}|_{\partial\Omega}\rangle_{\partial\Omega}$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. Posons $\boldsymbol{p} = \nabla u$, et observons que

$$\int_\Omega \boldsymbol{p}^\top \nabla\varphi + u\varphi\, d\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega).$$

De cela on déduit que $\boldsymbol{p} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega)$ avec $\mathrm{div}(\boldsymbol{p}) = u$. Et alors, vu la définition de u, pour tout $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ on a $\int_\Omega \boldsymbol{p}^\top \nabla v + \mathrm{div}(\boldsymbol{p}) v\, d\boldsymbol{x} = \langle q, v|_{\partial\Omega}\rangle_{\partial\Omega}$, c'est-à-dire $\pi_{\partial\Omega}(\boldsymbol{p}) = q$. □

Revenons sur la définition sur l'opérateur de flux normal sortant au bord, et ré-écrivons simplement cette définition en adoptant la convention de notation (5.11). On obtient une généralisation de la formule de Green (2.13) dans le cas de fonctions appartenant à des espaces de Sobolev.

Lemme 5.14 (**Formule de Green généralisée**).

$$\int_\Omega \boldsymbol{p}^\top \nabla v + v\mathrm{div}(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}^\top \boldsymbol{p}\, v\, d\sigma$$
$$\forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ \forall \boldsymbol{p} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega).$$