

Chapitre 7

Discrétisation

Dans les chapitres précédents, nous avons vu comment poser proprement une EDP et discuter de l'existence/unicité de la solution. Nous avons eu recours à des formulations variationnelles posées dans des espaces de dimension infinie. Dans ce chapitre nous allons voir comment, au prix d'une (petite) erreur dans le calcul de la solution, nous pouvons réduire ces formulations variationnelles à des systèmes linéaires. Ces systèmes linéaires seront potentiellement de grande taille mais malgré tout de dimension finie et, donc, accessible au calcul scientifique effectif.

7.1 Méthode de Galerkin

Étant donné un espace de Hilbert V muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de la norme associée $\|\cdot\|_V$, supposons que l'on souhaite calculer de manière effective la solution de la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (7.1)$$

où $a(\cdot, \cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont des formes sesquilinéaires et antilinéaires continues, et où $a(\cdot, \cdot)$ est coercive : il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\Re\{a(v, v)\} \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

L'espace V est a priori de dimension infinie ce qui pose problème pour une résolution effective. Pour cette raison, il est en général impossible de calculer u exactement. En revanche on peut espérer pouvoir calculer un $u_h \in V$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0$$

où $h > 0$ est un paramètre qui est d'autant plus petit que l'effort de calcul est grand. Bien souvent (mais pas toujours) h représente la finesse d'un maillage du domaine de calcul. En pratique h n'est jamais nul, mais on veut pouvoir approcher u d'aussi près que l'on souhaite à condition "d'investir" le calcul nécessaire.

Voici une méthode générique, dite méthode de Galerkin, permettant de calculer un tel u_h . On commence par choisir une famille d'espaces $(V_h)_{h>0}$ vérifiant deux conditions :

- 1) V_h est de dimension finie

2) $V_h \subset V$

Les espaces V_h sont parfois désignés comme espaces variationnels discrets. La méthode de Galerkin consiste alors à résoudre la même formulation que (7.1) mais en substituant V_h à V ce qui nous amène à écrire une formulation dite discrète :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (7.2)$$

Comme $V_h \subset V$ est de dimension finie, il s'agit d'un espace complet, c'est donc un espace de Hilbert, et comme $a(\cdot, \cdot)$ est coercive, on peut encore appliquer Lax-Milgram à (7.2). De sorte que (7.2) admet une unique solution que l'on note u_h . **Attention :**

$$\begin{array}{ccc} u_h & \neq & u \\ \text{solution de (7.2)} & \neq & \text{solution de (7.1)} \end{array}$$

Il ne faut pas confondre la solution exacte du problème (que l'on ne connaîtra bien souvent jamais) avec la solution discrète que l'on calcule en pratique. La formulation (7.2) peut se mettre sous la forme d'un système linéaire. En effet soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ une base de V_h de sorte que, par linéarité, (7.2) est équivalente à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, \varphi_j) = \ell(\varphi_j) \quad \forall j = 1 \dots N \end{cases} \quad (7.3)$$

Par ailleurs comme $u_h \in V_h$, elle se décompose sur la base des φ_j comme $u_h = \sum_{k=1}^N u_k \varphi_k$ avec $u_k \in \mathbb{C}$. En injectant cette décomposition dans (7.3) on en déduit : $\sum_{k=1}^N a(\varphi_k, \varphi_j) u_k = \ell(\varphi_j)$ pour tout $j = 1 \dots N$. Ce qui se re-écrit sous forme matricielle comme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathbb{C}^N \text{ tel que} \\ A \cdot U = F \end{cases} \quad (7.4)$$

avec

$$A = (A_{j,k})_{j,k=1 \dots N} \quad A_{j,k} := a(\varphi_k, \varphi_j)$$

$$F = \begin{bmatrix} \ell(\varphi_1) \\ \vdots \\ \ell(\varphi_N) \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}.$$

La consistance de la méthode de Galerkin est assurée par le lemme suivant connue sous le nom de lemme de C  a.

Lemme 7.1 (lemme de C  a).

Soit $u \in V$ l'unique solution de (7.1) et $u_h \in V_h$ l'unique solution de (7.2). Si $\|a\|$ désigne le module de continuité de $a(\cdot, \cdot)$ et α sa constante de coercivité, alors

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\|a\|}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Démo :

Soit $v_h \in V_h \subset V$ arbitraire. D'après (7.1) et (7.2), pour tout $v_h \in V_h$, on a :

$$\begin{aligned} a(u, v_h) &= \ell(v_h) \quad \text{car } v_h \in V \\ a(u_h, v_h) &= \ell(v_h) \quad \text{car } v_h \in V_h \\ \Rightarrow a(u - u_h, v_h) &= 0 \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

En choisissant $w_h \in V_h$ arbitraire, et en appliquant l'identité ci-dessus à $v_h = w_h - u_h \in V_h$, on obtient $a(u - u_h, w_h - u_h) = 0$. Maintenant d'après la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$, pour tout $w_h \in V_h$ on a :

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq |a(u - u_h, u - u_h)| \\ &\leq |a(u - u_h, u - w_h)| + |a(u - u_h, w_h - u_h)| \\ &\leq |a(u - u_h, u - w_h)| \leq \|a\| \|u - u_h\|_V \|u - w_h\|_V \end{aligned}$$

où $\|a\| > 0$ renvoie au module de continuité de $a(\cdot, \cdot)$. En divisant de part et d'autre de l'inégalité par $\|u - u_h\|_V$ obtient finalement $\|u - u_h\|_V \leq (C/\alpha) \|u - w_h\|_V$. Comme $w_h \in V_h$ était choisi arbitrairement, il suffit de prendre la borne inf pour établir le résultat recherché. \square

7.2 Éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange en 1D

Les méthodes d'éléments finis sont des méthodes de résolution de Galerkin correspondant à un choix particulier d'espace discret. Nous allons commencer par décrire en détail ces méthodes dans le cas particulier d'un problème de dimension 1, ce qui nous permettra d'écrire de nombreuses choses explicitement.

Description de la méthode

Pour fixer les idées, nous considérerons le premier problème du chapitre précédent. Nous nous plaçons sur un intervalle $I =]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Étant donné une fonction $f \in L^2(I)$ et une constante $\mu \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re\{\mu^2\} > 0$, on souhaite résoudre (au moins de manière approchée) le problème

$$\begin{cases} u \in H^1(I) \text{ tel que} \\ -\partial_x^2 u + \mu^2 u = f \quad \text{sur } I, \\ \partial_x u(a) = \partial_x u(b) = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

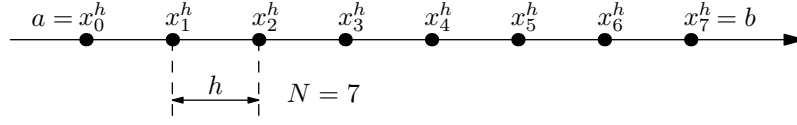
En choisissant $V = H^1(I)$ comme espace variationnel, et en suivant la méthodologie présentée au chapitre 6 (voir en particulier la section 6.1) ce problème admet la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} u &\in H^1(I) \text{ tel que } a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1(I) \\ a(u, v) &:= \int_I \partial_x u \partial_x \bar{v} + \mu^2 u \bar{v} dx \\ \ell(v) &:= \int_I f \bar{v} dx \end{aligned} \quad (7.6)$$

Voyons en détail comment discrétiser ce problème par éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange. Étant donné un paramètre de discrétisation $N \geq 1$ fixé, on commence par se donner une grille de discrétisation uniforme

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \cup_{j=1}^N \bar{I}_j^h \quad \text{avec } I_j^h :=]x_{j-1}^h, x_j^h[\\ x_j^h &= a + jh \quad \text{où } h := (b - a)/N, \\ \mathcal{T}_h(I) &:= \{I_1^h, \dots, I_N^h\}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

La collection $\mathcal{T}_h(I) := \{I_j^h\}_{j=1}^N$ est appelée *maillage*, la quantité " h " est souvent appelée *pas du maillage*, et les I_j^h sont les *mailles*. On définit ensuite l'espace variationnel discret $V_h \subset V$

FIGURE 7.1: exemple de grille régulière à $N + 1 = 8$ noeuds

comme l'ensemble des fonctions globalement continues et affines sur chaque maille, appelé encore espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange

$$\begin{aligned} V_h &:= \{ v \in \mathcal{C}^0(\bar{\mathcal{I}}), v|_{I_j^h} \in \mathbb{P}_1(I_j^h) \} \\ \text{où } \mathbb{P}_1(J) &:= \{ \varphi|_J, \varphi(x) = \alpha + \beta x, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \} \end{aligned} \quad (7.8)$$

En d'autres termes $\mathbb{P}_1(J)$ est l'espace des fonctions affines sur J . Attention, dans la définition de V_h ci-dessus, les fonctions ne sont pas supposées affines, mais seulement affines *par morceaux* i.e. affines sur chaque maille.

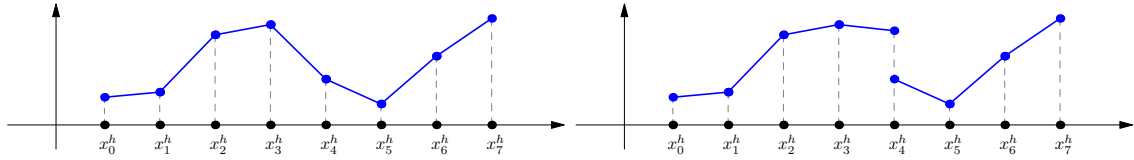


FIGURE 7.2: Deux exemples de fonctions affines par morceaux sur la grille de la figure 7.1. La fonction de gauche est continue et appartient donc à l'espace \mathbb{P}_1 -Lagrange. La fonction de droite est discontinue en x_4^h et n'est donc pas \mathbb{P}_1 -Lagrange.

Lemme 7.2.

Pour tout segment $J =]a_J, b_J[$ avec $a_J, b_J \in \mathbb{R}, a_J < b_J$, l'application $v \mapsto (v(a_J), v(b_J))$ est un isomorphisme de $\mathbb{P}_1(J)$ dans \mathbb{C}^2 .

Démo :

Notons $\Upsilon_J(v) := (v(a_J), v(b_J))$. Pour toute fonction $v \in \mathbb{P}_1(J)$ vérifiant $v(a_J) = v(b_J) = 0$, on a $v \equiv 0$, c'est-à-dire $\ker(\Upsilon_J) = \{0\}$. Pour tout $(v_-, v_+) \in \mathbb{C}^2$, la fonction

$$v(x) = \left(\frac{b_J - x}{b_J - a_J} \right) v_- + \left(\frac{x - a_J}{b_J - a_J} \right) v_+$$

appartient à $\mathbb{P}_1(J)$ et vérifie $v(a_J) = v_-$ et $v(b_J) = v_+$ c'est-à-dire $\Upsilon_J(v) = (v_-, v_+)$. Donc Υ_J est surjective et c'est un isomorphisme. \square

Proposition 7.3.

Pour V_h défini comme en (7.8) ci-dessus, l'application $v \mapsto (v(x_j^h))_{j=0 \dots N}$ est un isomorphisme de V_h dans \mathbb{C}^{N+1} .

Démo :

Notons $\Upsilon(v) := (v(x_j^h))_{j=0\dots N}$ l'application dont il s'agit de démontrer qu'elle est un isomorphisme. Supposons d'abord que $\Upsilon(v) = 0$ pour un $v \in V_h$. Alors il est clair que $(v(x_{j-1}^h), v(x_j^h)) = 0$ pour tout $j = 1 \dots N$ c'est-à-dire $\Upsilon_J(v|_J) = 0$ pour tout $J \in \{I_1^h, \dots, I_N^h\} = \mathcal{T}_h(I)$. On en tire $v|_J = 0 \forall J \in \mathcal{T}_h(I)$ d'après le lemme 7.2 et donc $v = 0$ puisque $\bar{I} = \cup_{j=1}^N \bar{I}_j^h$. D'où finalement $\ker(\Upsilon) = \{0\}$ i.e. $\Upsilon : V_h \rightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ est injective.

A présent, on se donne $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ et on définit une fonction par morceaux $v(x) = \sum_{J \in \mathcal{T}_h(I)} v_J(x) 1_J(x)$ où $1_J(x)$ est la fonction indicatrice de J (i.e. $1_J(x) = 1$ si $x \in J$ et $1_J(x) = 0$ si $x \notin J$) et v_J est l'unique élément de $\mathbb{P}_1(J)$ vérifiant $v_J(x_{j-1}^h) = w_{j-1}$ et $v_J(x_j^h) = w_j$ pour $J = I_j^h =]x_{j-1}^h, x_j^h[$. Puisque $v_{I_j^h}(x_j^h) = w_j = v_{I_{j+1}^h}(x_j^h)$, on en déduit que la fonction v ainsi définie est continue, et donc $v \in V_h$. Par ailleurs cette fonction vérifie $v(x_j^h) = w_j$ par construction c'est-à-dire $\Upsilon(v) = \mathbf{w}$. Donc Υ est surjective. \square

La proposition précédente montre en particulier que $\dim(V_h) < +\infty$. Par ailleurs, la proposition 4.5 garantit que $V_h \subset H^1(I)$. Enfin on verra au chapitre prochain qu'on a bien $\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v_h - v\|_V = 0$ pour tout $v \in V$. Donc l'espace de fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange rentre bien dans le cadre de la méthode de Galerkin décrite à la section 7.1.

La méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange ne consiste pas seulement à prescrire l'espace variationnel V_h défini par (7.8) pour approcher $V = H^1(I)$. Cette méthode consiste également à spécifier une base $V_h = \text{vect}_{j=0,\dots,N} \{\varphi_j^h\}$ pour cet espace. Cette base est définie par

$$\varphi_j^h(x_j^h) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_j^h(x_k^h) = 0 \text{ si } j \neq k. \quad (7.9)$$

L'image de φ_j^h par l'isomorphisme de la proposition 7.3 est un élément de la base canonique de \mathbb{C}^{N+1} , par conséquent c'est une conséquence évidente de cette proposition que la famille $\{\varphi_j^h\}_{j=0}^N$ constitue une base de V_h .

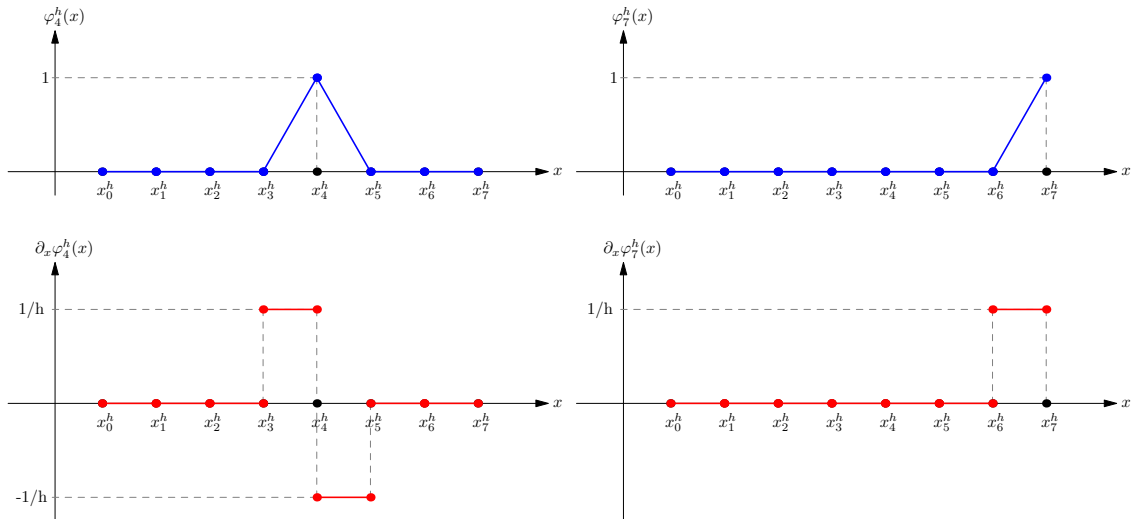


FIGURE 7.3: Deux des 8 fonctions de forme (et leur dérivée) engendrant l'espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange dans le cas de la grille uniforme de la figure 7.1.

Les éléments de cette base sont appelées les fonctions de forme. La fonction φ_j^h est non-nulle uniquement sur les mailles contenant x_j^h si bien que $\text{supp}(\varphi_j^h) = \bar{I} \cap [x_{j-1}^h, x_{j+1}^h]$. Un rapide calcul donne l'expression explicite des fonctions de forme, maille par maille.

$$\begin{aligned} \varphi_j^h(x) &= (x - x_{j-1}^h)/h & \text{si } x \in I \cap]x_{j-1}^h, x_j^h[\\ \varphi_j^h(x) &= (x_{j+1}^h - x)/h & \text{si } x \in I \cap]x_j^h, x_{j+1}^h[\\ \varphi_j^h(x) &= 0 & \text{si } x \in I \setminus]x_{j-1}^h, x_{j+1}^h[\end{aligned} \quad (7.10)$$

Résolution effective

Concrètement, pour résoudre numériquement (et donc de manière approchée) l'équation (7.5) par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange, il faut résoudre le système linéaire (7.4) ce qui fournit les valeurs $U = (u_0, \dots, u_N)$, et donne accès à la solution variationnelle discrète $u_h(x)$ via la formule

$$u_h(x) = u_0 \varphi_0^h(x) + \dots + u_N \varphi_N^h(x) \quad (7.11)$$

fonction que l'on aura tout loisir de décrire par différents procédés de représentation graphique (carte de champs par exemple) puisque tout, dans le membre de droite de (7.11), sera connu.

Avertissement Pour calculer la solution $U \in \mathbb{C}^{N+1}$ du système linéaire (7.4), on pourrait penser naïvement à calculer d'abord l'inverse A^{-1} de la matrice A , et ensuite calculer le produit matrice-vecteur $U = A^{-1}F$. Malheureux ! Surtout pas : inverser une matrice est beaucoup trop cher numériquement. Il ne faut pas oublier que la matrice A est potentiellement de très grande taille. Dans ce contexte, il y a des moyens plus rapides pour calculer la solution U sans avoir à calculer l'inverse A^{-1} . Mais ceci nous emmènerait trop loin (voir l'UE 4MA053 Grand systèmes linéaires).

La méthode de Galerkin que nous avons présenté à la section 7.1 nous montre que la résolution de la formulation discrète (7.2) se réduit à la résolution du système linéaire (7.4) avec une matrice $A \in \mathbb{C}^{(N+1) \times (N+1)}$ donnée par

$$\begin{aligned} A &= K + \mu^2 M \\ K &= (K_{j,k})_{j,k=0,\dots,N} \quad \text{avec} \quad K_{j,k} := \int_I \partial_x \varphi_j^h \partial_x \varphi_k^h dx \\ M &= (M_{j,k})_{j,k=0,\dots,N} \quad \text{avec} \quad M_{j,k} := \int_I \varphi_j^h \varphi_k^h dx \end{aligned} \quad (7.12)$$

La matrice K est appelée habituellement "matrice de rigidité", et la matrice M est appelée "matrice de masse", vocable hérité de la mécanique. Grâce aux expressions (7.10), on peut calculer explicitement les éléments $K_{j,k}$ et $M_{j,k}$. Commençons par observer que, si x_j^h et x_k^h n'appartiennent pas à la même maille, c'est-à-dire si $|j - k| \geq 2$, alors $\text{supp}(\varphi_j^h) \cap \text{supp}(\varphi_k^h) = \emptyset$ si bien que

$$K_{j,k} = M_{j,k} = 0 \quad \text{si } |j - k| \geq 2.$$

Autrement dit les matrices K et M sont tridiagonales. Examinons à présent l'expression de $M_{j,j+1} = M_{j+1,j}$ et $M_{j,j}$. Puisque $\text{supp}(\varphi_j^h) = [x_{j-1}^h, x_{j+1}^h]$ pour $j \neq 0, N$ et $\text{supp}(\varphi_0^h) = [x_0^h, x_1^h]$ et $\text{supp}(\varphi_N^h) = [x_{N-1}^h, x_N^h]$, on déduit $\text{supp}(\varphi_j^h) \cap \text{supp}(\varphi_{j+1}^h) = [x_j^h, x_{j+1}^h]$ pour $j \neq N$.

Par ailleurs, avec (7.10), on voit que $\partial_x \varphi_j^h(x) = 1/h$ pour $x \in]x_{j-1}^h, x_j^h[$ (sauf si $j = 0$), et $\partial_x \varphi_j^h(x) = -1/h$ pour $x \in]x_j^h, x_{j+1}^h[$ (sauf si $j = N$). En combinant ces remarques on obtient

$$\begin{aligned} K_{j,j+1} &= \int_{x_j^h}^{x_{j+1}^h} \partial_x \varphi_j^h \partial_x \varphi_{j+1}^h dx = -h^{-2} \int_{x_j^h}^{x_{j+1}^h} dx = -1/h \quad \text{pour } j \neq N. \\ K_{j,j} &= \int_{x_{j-1}^h}^{x_{j+1}^h} |\partial_x \varphi_j^h(x)|^2 dx = h^{-2} \int_{x_{j-1}^h}^{x_{j+1}^h} dx = 2/h \quad \text{pour } j \neq 0, N, \\ K_{0,0} &= h^{-2} \int_{x_0^h}^{x_1^h} dx = 1/h = K_{N,N} \end{aligned}$$

Pour calculer les éléments de la matrice de masse, on utilise un calcul semblable, mais directement avec les expressions de (7.10), ce qui nous donne

$$\begin{aligned} M_{j,j+1} &= \int_{x_j^h}^{x_{j+1}^h} \varphi_j^h(x) \varphi_{j+1}^h(x) dx = h^{-2} \int_{x_j^h}^{x_{j+1}^h} (x_{j+1}^h - x)(x - x_j^h) dx \\ &= h \int_0^1 (1-t)t dt = h/6 \quad \text{pour } j \neq N. \\ M_{j,j} &= \int_{x_{j-1}^h}^{x_{j+1}^h} |\varphi_j^h(x)|^2 dx = h^{-2} \int_{x_j^h}^{x_{j+1}^h} (x_{j+1}^h - x)^2 dx + h^{-2} \int_{x_{j-1}^h}^{x_j^h} (x - x_{j-1}^h)^2 dx \\ &= h \int_0^1 (1-t)^2 dt + h \int_0^1 t^2 dt = 2h/3 \quad \text{pour } j \neq 0, N, \\ M_{0,0} &= h^{-2} \int_{x_0^h}^{x_1^h} (x_1^h - x)^2 dx = h \int_0^1 (1-t)^2 dt = h/3 = M_{N,N} \end{aligned}$$

Dans les calculs ci-dessus on a écrit que $x = x_j^h + th$ pour $t \in [0, 1]$ lorsque $x \in [x_j^h, x_{j+1}^h]$. Puisque par ailleurs $K_{j+1,j} = K_{j,j+1}$ et $M_{j+1,j} = M_{j,j+1}$ par symétrie provenant des expressions de (7.12), on déduit finalement l'expression complète des matrices de masse et de rigidité

$$K = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad M = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

et ces expressions permettent de calculer A. Pour résoudre le système linéaire (7.4), il reste également à assembler le second membre $F = (\ell(\varphi_j^h))_{j=0,\dots,N}$. Comme ici $\ell(\varphi_j^h) = \int_I f(x) \varphi_j^h(x) dx$, on peut réaliser ce calcul en utilisant (7.10), ce qui donne

$$\begin{aligned} \ell(\varphi_j^h) &= h^{-1} \int_{x_{j-1}^h}^{x_j^h} f(x)(x - x_{j-1}^h) dx + h^{-1} \int_{x_j^h}^{x_{j+1}^h} f(x)(x_{j+1}^h - x) dx \quad \text{pour } j \neq 0, N \\ \ell(\varphi_0^h) &= h^{-1} \int_{x_0^h}^{x_1^h} f(x)(x_1^h - x) dx, \\ \ell(\varphi_N^h) &= h^{-1} \int_{x_{N-1}^h}^{x_N^h} f(x)(x - x_{N-1}^h) dx, \end{aligned}$$

Les différentes intégrales intervenant dans les expressions ci-dessus sont à évaluer, soit explicitement dans le cas où $f(x)$ admet une expression simple (un polynôme par exemple), soit au moyen d'une formule de quadrature (règle de quadrature de Gauss par exemple).

7.3 Éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange en 2D/3D

Nous allons maintenant décrire comment la méthode présentée à la section précédente se généralise en dimension supérieure à 1 en espace. Une difficulté nouvelle apparaît qui provient de ce qu'il est difficile de trouver une grille de discrétisation du domaine de calcul dans lequel les mailles sont ordonnées de façon simple.

Pour expliquer la méthode, nous fixons à nouveau un problème modèle dans lequel $\mu \in \mathbb{C}$ vérifie $\Re\{\mu^2\} > 0$, et $f \in L^2(\Omega)$. Pour simplifier le propos, le domaine de calcul $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sera supposé un ouvert borné à bord polyédral (qui est donc en particulier lipschitzien). On veut résoudre le problème

$$\begin{aligned} u &\in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u + \mu^2 u &= f \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_n u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Nous avons vu à la section 6.1 que ce problème admettait la formulation variationnelle (6.5) avec $H^1(\Omega)$ comme espace variationnel de sorte que, selon la méthode de Galerkin, une formulation discrète adaptée prendra la forme :

$$\begin{aligned} u_h &\in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ \text{avec } a(u_h, v_h) &:= \int_{\Omega} \nabla u_h^\top \nabla \bar{v}_h + \mu^2 u_h \bar{v}_h d\mathbf{x} \\ \ell(v_h) &:= \int_{\Omega} f \bar{v}_h d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Comme nous l'avons vu à la section 7.2, pour décrire la méthode numérique de manière exhaustive, il reste à décrire l'espace V_h des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange, et d'en spécifier une base (fonctions de forme).

Maillage simplicial

L'espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange est basé sur un maillage du domaine de calcul. Nous commençons donc par décrire cette notion. Nous nous restreindrons aux cas de maillages simpliciaux c'est-à-dire dont les briques géométriques de base sont des simplexes.

Definition 7.4.



Pour $n \leq d$, un n -simplexe $e \subset \mathbb{R}^d$ de sommets $\mathbf{s}_j \in \mathbb{R}^d, j = 0 \dots n$ est défini comme l'enveloppe convexe ouverte $e = \{\lambda_0 \mathbf{s}_0 + \dots + \lambda_n \mathbf{s}_n, \lambda_j > 0 \forall j = 0 \dots n \text{ et } \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1\}$. On dit que e est non-dégénéré si $\dim(\text{vect}(e)) = n$ où $\text{vect}(e) := \text{vect}_{j=1 \dots n} \{\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_0\}$.

L'hypothèse de non-dégénérescence signifie que les vecteurs $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_n - \mathbf{s}_0$ sont linéairement indépendants. Ceci suppose en particulier que les sommets $\mathbf{s}_j, j = 0 \dots n$ soient tous disjoints. Dans la suite nous considérerons systématiquement des simplexes non-dégénérés.

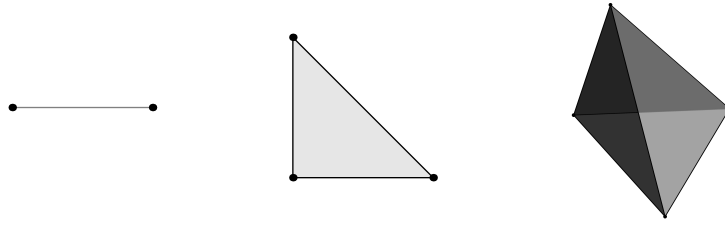


FIGURE 7.4: Segment (1-simplexe), triangle (2-simplexe) et tétraèdre (3-simplexe).

Un 1-simplexe est un segment, un 2-simplexe est un triangle, un 3-simplexe est un tétraèdre. Par exemple un triangle non-dégénéré est un triangle qui n'est pas plat et n'est pas réduit non plus à un point.

Notons que dans la définition 7.4 d'un simplexe, il y a la possibilité que $n < d$. On peut par exemple considérer un triangle (un 2-simplexe) plongé dans \mathbb{R}^3 . C'est la situation que l'on rencontre lorsque l'on considère le bord d'un tétraèdre (un 3-simplexe) qui est constitué de 4 triangles. D'une manière générale, observons que le bord d'un d -simplexe est la réunion de $d + 1$ simplexes de dimension $d - 1$ appelés *faces*.

Un maillage simplicial, encore appelé triangulation, est une partition du domaine de calcul en simplexes. Il existe des maillages non-simpliciaux (maillages cartésiens, ou basé sur des hexaèdres par exemple), mais nous nous limiterons systématiquement au cas des triangulations simpliciales régulières.

Definition 7.5.



Une triangulation simpliciale régulière de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est une collection \mathcal{T}_h de d -simplexes non-dégénérés satisfaisant $\bar{\Omega} = \cup_{e \in \mathcal{T}_h} \bar{e}$, et $e \cap e' = \emptyset$ si $e \neq e'$, et telle que toute face f d'un $e \in \mathcal{T}_h$ soit, ou bien une face complète d'un autre $e' \in \mathcal{T}_h$, ou bien une partie de $\partial\Omega$.

Les simplexes qui composent une triangulation sont appelés *mailles*, *cellules* ou plus souvent *éléments*. Les sommets des éléments s'appellent également *noeuds*.

La définition d'une triangulation régulière proscriit les situations où un noeud d'un élément serait situé à l'intérieur d'une face d'un autre élément, cf figure 7.5. En fait les hypothèses de la définition 7.5 impliquent que, si deux éléments $e, e' \in \mathcal{T}_h, e \neq e'$ sont adjacents $\bar{e} \cap \bar{e}' \neq \emptyset$, alors leur intersection est un $(n - 1)$ -simplexe où n est le nombre de sommets qu'ils ont en commun. Les cas possibles d'adjacence pour une triangulation simpliciale régulière de dimension 1, 2 et 3 sont représentés sur la figure 7.6.

Générer un maillage n'est pas une chose simple et peut s'avérer très couteux. Sur les figures 7.7, 7.8 et 7.9 on représente des exemples de maillages simpliciaux en 2D et 3D. Le maillage de la figure 7.7 a été généré avec le logiciel **gmsh**¹. D'autres logiciels libres existent pour la génération de maillages triangulaires tels que **Triangle**², ainsi que pour les maillages tétraédriques parmi lesquels **CGAL**³ ou **TetGen**⁴. Une liste conséquente de générateurs de maillage est disponible à l'adresse <http://www.robertschneiders.de/meshgeneration/software.html>

1. <http://gmsh.info/>

2. <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>

3. <https://www.cgal.org/>

4. <http://www.wias-berlin.de/software/index.jsp?id=TetGen>



FIGURE 7.5: Deux triangulations 2D : régulière (a) et non-régulière (b).

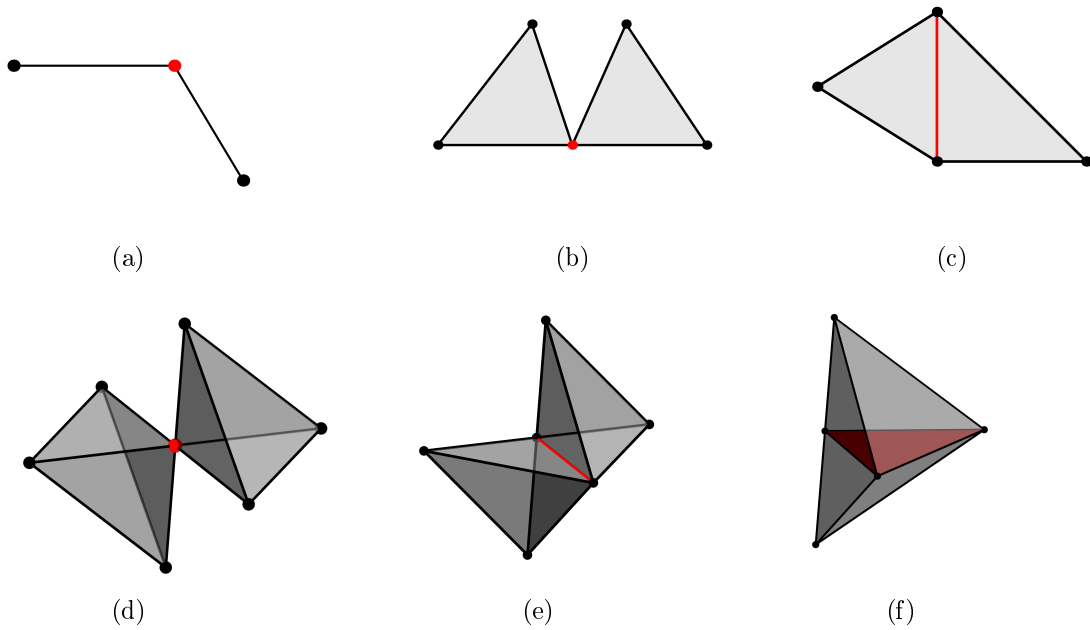


FIGURE 7.6: Cas possibles d'adjacence entre deux éléments dans une triangulation régulière en 1D (a), en 2D (b et c) et en 3D (e,f et g). Les intersections sont en rouge.

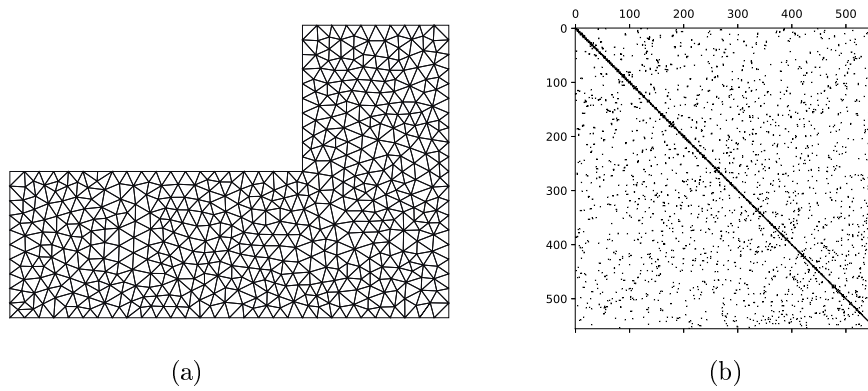


FIGURE 7.7: A gauche (a) un exemple de maillage régulier 2D : 556 noeuds, 1010 triangles. A droite (b) la matrice éléments finis correspondante (sparsity pattern).

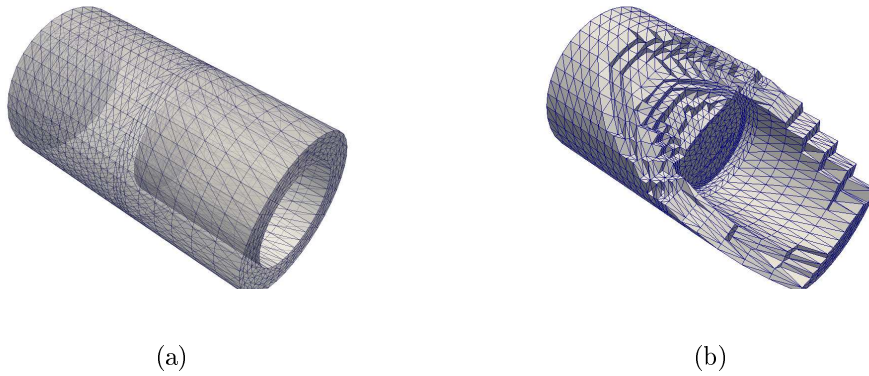


FIGURE 7.8: A gauche (a) maillage 3D tétraédrique d'une pièce de forme cylindrique : 8499 noeuds et 44832 tétraèdres. A droite (b) vue en coupe de ce même maillage.

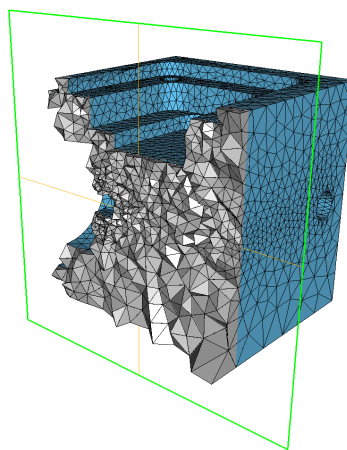


FIGURE 7.9: Vue en coupe d'un autre maillage tétraédrique contenant 28694 noeuds et 150779 tétraèdres.

Espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange

Sur une partie $\omega \subset \mathbb{R}^d$ (pas forcément ouverte!) on rappelle que l'espace des fonctions affines est défini par $\mathbb{P}_1(\omega) := \{v|_\omega \text{ tel que } v(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{x} + \beta, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^d, \beta \in \mathbb{C}\}$. Ce sont les polynômes de degré 1. Étant donné une triangulation régulière \mathcal{T}_h d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, l'espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange est donné par

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}), v|_e \in \mathbb{P}_1(e) \forall e \in \mathcal{T}_h\}. \quad (7.15)$$

D'après la proposition 4.5, on a bien $V_h \subset H^1(\Omega)$. Attention : cette définition nous dit que, si $v_h \in V_h$ alors pour chaque $e \in \mathcal{T}_h$ il existe $\boldsymbol{\alpha}_e \in \mathbb{C}^d, \beta_e \in \mathbb{C}$ tels que $v(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}_e \cdot \mathbf{x} + \beta_e$ pour tout $\mathbf{x} \in e$. Il est important de noter que les coefficients $\boldsymbol{\alpha}_e, \beta_e$ dépendent de e . Ainsi on a, a priori, $\boldsymbol{\alpha}_e \neq \boldsymbol{\alpha}_{e'}$ et $\beta_e \neq \beta_{e'}$ si $e \neq e'$. La fonction v_h est affine seulement par morceaux. Elle n'est pas affine globalement.

Lemme 7.6.

Étant donné un n -simplexe $e \subset \mathbb{R}^d$, pour toute fonction $v \in \mathbb{P}_1(e)$ il existe $\mathbf{a} \in \text{vect}(e), b \in \mathbb{C}$ uniques tels que $v(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b \forall \mathbf{x} \in e$. De plus $\dim \mathbb{P}_1(e) = 1 + \dim(\text{vect}(e))$.

Démo :

Considérons l'application linéaire $\Phi : \text{vect}(e) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}_1(e)$ définie par $\Phi(\mathbf{a}, b)(\mathbf{x}) := \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b$ pour tout $\mathbf{x} \in e$. Il suffit de montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme.

On montre d'abord la surjectivité. Soit $v \in \mathbb{P}_1(e)$ arbitraire prenant donc la forme $v(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{x} + \beta$ pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^d$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Décomposons $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a} + \mathbf{a}_\star$ avec $\mathbf{a} \in \text{vect}(e)$ et $\mathbf{a}_\star \in \text{vect}(e)^\perp$. Par définition d'un simplexe, tout $\mathbf{x} \in e$ se met sous la forme $\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{s}_0 + \dots + \lambda_n \mathbf{s}_n$ où les $\lambda_j \in \mathbb{R}, j = 0, \dots, n$ satisfont $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$. On a $\mathbf{a}_\star^\top \mathbf{x} = \mathbf{a}_\star^\top \mathbf{s}_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{a}_\star^\top (\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_0) = \mathbf{a}_\star^\top \mathbf{s}_0$ pour tout $\mathbf{x} \in e$ puisque $\mathbf{a}_\star \in \text{vect}(e)^\perp$. On a donc $v(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + \mathbf{a}_\star^\top \mathbf{x} + \beta = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + \beta + \mathbf{a}_\star^\top \mathbf{s}_0 \forall \mathbf{x} \in e$, c'est-à-dire $v = \Phi(\mathbf{a}, \beta + \mathbf{a}_\star^\top \mathbf{s}_0)$ d'où la surjectivité.

Soit à présent $\mathbf{a} \in \text{vect}(e), b \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b = 0 \forall \mathbf{x} \in e$, et posons $w(\mathbf{x}) := \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. On a donc $w(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in e$. L'application $\mathbf{x} \mapsto w(\mathbf{x})$ est continue sur \mathbb{R}^d tout entier donc, par passage à la limite, on a $w(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \bar{e}$. Si on note $\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_n \in \mathbb{R}^d$ les sommets de e on a $0 = w(\mathbf{s}_j) - w(\mathbf{s}_0) = \mathbf{a}^\top (\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_0)$ pour tout $j = 1 \dots n$, ce qui implique $\mathbf{a} = 0$ puisque $\mathbf{a} \in \text{vect}(e)$ par hypothèse. On déduit que $b = w(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in e \neq \emptyset$. D'où finalement $(\mathbf{a}, b) = 0$. On a montré que $\ker(\Phi) = \{0\}$. \square

Lemme 7.7 (Unisolvance).

Soit $e \subset \mathbb{R}^d$ un n -simplexe non dégénéré de sommets $\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_n \in \mathbb{R}^d$. Alors l'application $v \mapsto (v(\mathbf{s}_0), \dots, v(\mathbf{s}_n))$ induit un isomorphisme de $\mathbb{P}_1(e) \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$.

Démo :

Comme on sait déjà que $\dim(\mathbb{P}_1(e)) = n + 1$, d'après le théorème de la dimension, il suffit de démontrer que l'application définie par $\Upsilon_e(v) := (v(\mathbf{s}_0), \dots, v(\mathbf{s}_n))$ est injective. Soit $v \in \ker(\Upsilon_e)$. Tout $\mathbf{x} \in e$ se mettant sous la forme $\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{s}_0 + \dots + \lambda_n \mathbf{s}_n$ avec $\lambda_j \in \mathbb{R}, j = 0, \dots, n$ et $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$, on a donc $v(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top (\sum_{j=0}^n \lambda_j \mathbf{s}_j) + \beta (\sum_{j=0}^n \lambda_j) = \sum_{j=0}^n \lambda_j v(\mathbf{s}_j) = 0$. Ce qui établit que $\ker(\Upsilon_e) = \{0\}$. \square

Lemme 7.8.

Soit \mathcal{S}_h l'ensemble des sommets d'une triangulation régulière \mathcal{T}_h de Ω . Soit V_h l'espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange associé défini comme en (7.15). Alors l'application $u \mapsto (u(\mathbf{s}))_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h}$ définit un isomorphisme de V_h dans $\mathbb{C}^{|\mathcal{S}_h|}$ où $|\mathcal{S}_h| = \text{card}(\mathcal{S}_h)$.

Démo :

Notons $\Upsilon(v) := (v(\mathbf{s}))_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h}$. Soit $v \in V_h$ tel que $v(\mathbf{s}) = 0 \forall \mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$. Soit $e \in \mathcal{T}_h$ arbitraire. D'après la définition de V_h on a $v|_e \in \mathbb{P}_1(e)$ et cette fonction vérifie $v(\mathbf{s}) = 0 \forall \mathbf{s} \in \mathcal{S}(e) := \{\text{sommets de } e\}$. En appliquant le lemme 7.7 dans e , on obtient $v|_e \equiv 0$ et donc finalement $v \equiv 0$ sur Ω puisque $\overline{\Omega} = \cup_{e \in \mathcal{T}_h} \overline{e}$. Ceci montre que $\ker(\Upsilon) = \{0\}$.

Montrons à présent la surjectivité de Υ . Soit $\mu_{\mathbf{s}} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$ un jeu de valeurs. D'après le lemme 7.7, pour chaque $e \in \mathcal{T}_h$, il existe un unique $p_e \in \mathbb{P}_1(e)$ tel que $p_e(\mathbf{s}) = \mu_{\mathbf{s}}$ pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(e)$. On définit alors une fonction affine sur chaque élément par

$$u_h(\mathbf{x}) := p_e(\mathbf{x}) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \overline{e}. \quad (7.16)$$

Cette formule fournit, en apparence, plusieurs définitions possibles pour $u(\mathbf{x})$ lorsque $\mathbf{x} \in \overline{e} \cap \overline{e}'$. Vérifions que toutes ces définitions coïncident, ce qui montrera du même coup que u_h définie par (7.16) appartient à $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Soit deux éléments $e, e' \in \mathcal{T}_h$ tels que $\overline{e} \cap \overline{e}' \neq \emptyset$ et notons f le simplexe admettant pour sommets $\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(e) \cap \mathcal{S}(e')$ i.e. les sommets communs à e et e' . On a donc $\overline{f} = \overline{e} \cap \overline{e}'$ (voir figure 7.6). Les deux fonctions $p_e|_f$ et $p_{e'}|_f$ appartiennent toutes deux à $\mathbb{P}_1(f)$ et coïncident en tous les sommets de f . Donc en appliquant le lemme 7.7 dans f , on voit que $p_e|_{\overline{f}} = p_{e'}|_{\overline{f}}$, d'où $u_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et donc finalement $u_h \in V_h$. \square

Fonctions de forme

En notant $|\mathcal{S}_h| = \text{card}(\mathcal{S}_h)$, la proposition précédente affirme que l'application $\Phi_h : V_h \rightarrow \mathbb{C}^{|\mathcal{S}_h|}$ définit par $\Phi_h(u) = (u(\mathbf{s}))_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h}$ est un isomorphisme. Au vu de ce résultat il est donc naturel de considérer la base de V_h qui est mise en correspondance avec la base canonique de $\mathbb{C}^{|\mathcal{S}_h|}$ via cet isomorphisme. On définit donc $\varphi_{\mathbf{s}}^h, \mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$ comme l'unique élément de V_h vérifiant

$$\varphi_{\mathbf{s}}^h(\mathbf{s}') = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{s} = \mathbf{s}', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce qui précède permet alors d'affirmer que toute fonction $u_h \in V_h$ se décompose de la manière suivante

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h} u_h(\mathbf{s}) \varphi_{\mathbf{s}}^h(\mathbf{x})$$

La famille $(\varphi_{\mathbf{s}}^h)_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h}$ constitue une base de V_h que l'on nomme fonctions de forme, et qui engendre l'espace variationnel discret

$$V_h = \text{span}\{\varphi_{\mathbf{s}}^h\}_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h}.$$

Les fonctions de forme $\varphi_{\mathbf{s}}^h$ jouent un rôle central dans l'implémentation de la méthode des éléments finis. Il est important de bien comprendre la forme qu'elles prennent. Ces fonctions sont localisées : le résultat suivant nous dit que leur support est contenu dans un paquet d'éléments ayant un même noeud en commun.

Lemme 7.9.

On a $\text{supp}(\varphi_{\mathbf{s}}^h) = \bigcup_{e \in \mathcal{T}_h(\mathbf{s})} \overline{e}$ où $\mathcal{T}_h(\mathbf{s}) := \{e \in \mathcal{T}_h, \mathbf{s} \in \mathcal{S}(e)\}$.

En effet, pour un $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$ fixé, et pour un $e \in \mathcal{T}_h$ tel que $\mathbf{s} \notin \mathcal{S}(e)$, on a $\varphi_{\mathbf{s}}^h(\mathbf{s}') = 0$ pour tout $\mathbf{s}' \in \mathcal{S}(e)$ par définition de $\varphi_{\mathbf{s}}^h$, et donc $\varphi_{\mathbf{s}}^h = 0$ sur e puisque $\varphi_{\mathbf{s}}^h|_e \in \mathbb{P}_1(e)$. Le corollaire du

lemme ci-dessus est que deux fonctions de forme attachées à des noeuds n'appartenant pas à un même élément ont des supports qui ne s'intersectent pas.

Voyons sur un exemple cf figure 7.10 sur la page suivante. Considérons le maillage en haut à gauche de la figure. Ce maillage comprend huit éléments et huit sommets que l'on note $\mathcal{S}_h = \{\mathbf{s}_j\}_{j=1\dots 8}$. On a donc $\dim(V_h) = 8$. On représente le support de la fonction de forme associée à chacun de ces noeuds.

Système linéaire final

Pour terminer ce chapitre, formulons quelques commentaires sur la forme que prend le système linéaire que l'on considère pour la résolution de (7.14). Pour pouvoir assembler la matrice du problème, il convient d'abord de numérotiser les noeuds du maillage : $\mathcal{S}_h = \{\mathbf{s}_j\}_{j=1\dots N}$ avec $N = \text{card}(\mathcal{S}_h) = \text{nombre de sommets}$. En posant $\varphi_j^h := \varphi_{\mathbf{s}_j}^h$, les éléments de la matrice $A = (A_{j,k})$ du problème prennent la forme

$$A_{j,k} = \int_{\Omega} (\nabla \varphi_j^h)^\top (\nabla \varphi_k^h) + \mu^2 \varphi_j^h \varphi_k^h d\mathbf{x}.$$

Au vu du lemme 7.9, on voit que $A_{j,k} = 0$ à moins que \mathbf{s}_j et \mathbf{s}_k appartiennent à un même élément. De ce fait, la plupart des éléments de la matrice A sont nuls. Pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$, notons $\mathcal{T}(\mathbf{s}) = \{e \in \mathcal{T}_h, \mathbf{s} \in \mathcal{S}(e)\}$, puis $\text{adj}(\mathbf{s}) = \cup_{e \in \mathcal{T}(\mathbf{s})} \mathcal{S}(e)$ qui est l'ensemble des noeuds du maillage reliés à \mathbf{s} par une arête. Alors, sur la ligne (resp. colonne) numérotée j de la matrice A , seuls $\text{card}(\text{adj}(\mathbf{s}_j))$ éléments sont non nuls.

Usuellement, le maillage peut être généré de manière à ce que $\sup_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h} \{\text{card}(\mathcal{T}(\mathbf{s}))\} \leq p$ où p est un entier pas trop grand (exemple $p = 10$). Comme par ailleurs $\text{card}(\text{adj}(\mathbf{s})) \leq (d+1) \times \text{card}(\mathcal{T}(\mathbf{s}))$, on en déduit que chaque colonne de la matrice comporte, au maximum $p \times (d+1)$ éléments non-nul. Et alors la matrice elle-même comporte au plus $p \times (d+1) \times N$ éléments non-nuls, alors qu'elle est de taille $N \times N$. On a donc

$$\frac{\#\{\text{coefficients non nuls}\}}{\#\{\text{coefficients}\}} \leq \frac{p \times (d+1)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

C'est cette situation qui caractérise une matrice creuse. En guise d'illustration, nous représentons sur la figure 7.7 (b) le "sparsity pattern" de la matrice associée au problème (7.14) dans le cas du maillage de la figure 7.7 (a).

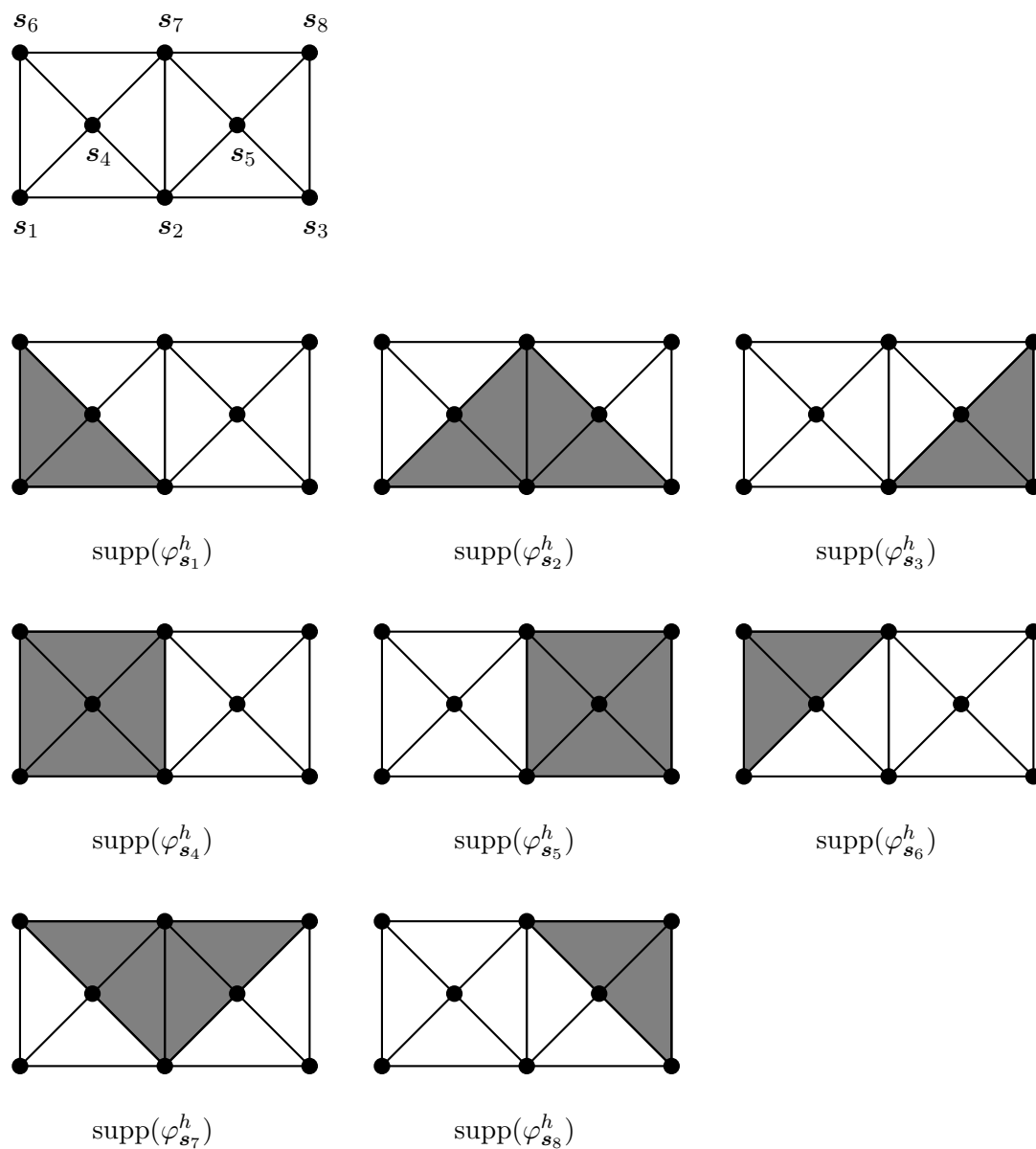


FIGURE 7.10: Support des fonctions de forme dans le cas d'un maillage 2D à 8 éléments.

