Chapitre 6

Formulations variationnelles

Nous diposons maintenant des nécessaires à l'étude de toute une gamme d'EDPs elliptiques linéaires. Dans ce chapitre nous examinerons diverses problèmes aux limites elliptiques et chercherons, pour chacun de ces problèmes à répondre aux questions suivantes :

Q1 : Y a-t-il existence d'une solution ?
Q2 : Y a-t-il unicité d'une éventuelle solution ?
Q3 : Quelle est la dépendance d'une éventuelle solution vis-à-vis des données ?

6.1 Problème aux limites modèle

Nous commençons par nous concentrer sur un problème aux limites assez simple. On se place dans un ouvert lipschitzien borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, on considère une constante $\mu \in \mathbb{C}$ satisfaisant la condition

$$\Re e\{\mu^2\} > 0 \tag{6.1}$$

On se donne également un terme source volumique $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et surfacique $g \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)$. Le problème que l'on souhaite examiner s'écrit

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \Delta u - \mu^2 u = -f \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_{\boldsymbol{n}} u = g \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.2}$$

Bien comprendre le problème

Discutons de l'interprétation à donner aux termes apparaissant dans (6.2). Supposer $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ semble une hypothèse minimale : l'espace $\mathrm{H}^1(\Omega)$ offre un cadre hilbertien et autorise à dériver u, il semble a priori difficile de demander moins en terme de régularité. Dans ce contexte, presque tous les termes de (6.2) sont bien définis. Seul le terme "Δu" peut soulever une éventuelle difficulté. Dans le présent contexte, le sens à donner à ce terme est le suivant :

$$\begin{aligned} &\nabla u \in \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega) \quad \text{et} \\ &\mathrm{div}(\nabla u) = \Delta u = \mu^2 u - f \end{aligned} \tag{6.3}$$

Autrement dit, quand on écrit (6.2), on impose quelquechose de plus fort que juste $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$: on impose aussi $\nabla u \in \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega)$. Ceci nous amène naturellement à nous intéresser à un espace adapté à notre problème.

Lemme 6.1.
L'espace $\mathrm{H}^1(\Delta,\Omega) := \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ \nabla u \in \mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)\}$ *est un espace de Hilbert lorqu'il est muni du produit scalaire* $(u,v)_{\mathrm{H}^1(\Delta,\Omega)} := (u,v)_{\mathrm{H}^1(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)}$.

La preuve de ce résultat est laissée au lecteur : elle suit de très près la démonstration de la proposition 4.4 et ne pose pas de difficulté particulière. Pour résumer, quand on écrit (6.2) on impose implicitement $u \in \mathrm{H}^1(\Delta,\Omega)$. Ceci autorise à considérer la trace Dirichlet $u|_{\partial\Omega}$, mais également le flux normal du gradient

$$\partial_{\boldsymbol{n}} u := \boldsymbol{n}^\top \nabla u|_{\partial\Omega}. \tag{6.4}$$

Cette quantité, appelée la trace Neumann, avait déjà été introduite pour des fonctions régulières au §2.4. En combinant le lemme 6.1 et le lemme 5.13, on voit que cet opérateur réalise une application continue $\partial_{\boldsymbol{n}} : \mathrm{H}^1(\Delta,\Omega) \to \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Ré-écriture variationnelle : formule de Green

Le première étape pour l'étude de (6.2) consiste à ré-écrire ce problème sous une forme variationnelle équivalente i.e. une ré-écriture comme (3.14) car c'est un cadre dans lequel nous disposons de résultats d'existence/unicité/continuité. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 6.2.
Une fonction u est solution de (6.2) si et seulement si elle satisfait :

$$\begin{aligned} &u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \quad \textit{et} \quad a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \\ &\textit{avec} \quad a(u,v) := \int_\Omega \nabla u^\top \nabla \overline{v} + \mu^2 u\, \overline{v}\, d\boldsymbol{x} \\ &\qquad\qquad \ell(v) := \int_\Omega f \overline{v}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} g\overline{v}\, d\sigma \end{aligned} \tag{6.5}$$

Démo :
Partons de $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution de (6.2). Choisissons un $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ et appliquons la formule de Green généralisée du lemme 5.14 avec $\boldsymbol{p} = \nabla u \in \mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$. On obtient $\int_\Omega \nabla u^\top \nabla \overline{v} + \overline{v}\Delta u\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \overline{v}\boldsymbol{n}^\top \nabla u\, d\sigma$. En vertu de la 2ème équation de (6.2), on peut remplacer Δu par $\mu^2 u - f$, et $\partial_{\boldsymbol{n}} u = \boldsymbol{n}^\top \nabla u|_{\partial\Omega}$ par g. Ceci fournit finalement $a(u,v) = \ell(v)$ comme ci-dessus.

Réciproquement supposons que $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ satisfait $a(u,v) = \ell(v) \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. Commençons par choisir $v \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega) \subset \mathrm{H}^1_0(\Omega) \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$. Alors l'identité variationnelle $a(u,v) = \ell(v)$ se ré-écrit :

$$\int_\Omega \nabla u^\top \nabla \overline{v} d\boldsymbol{x} = \int_\Omega (f - \mu^2 u)\overline{v} d\boldsymbol{x} \quad \forall v \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega). \tag{6.6}$$

D'après les définitions 4.1 et 5.10, on en conclut que $\nabla u \in \mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$ et que $\Delta u = \mu^2 u - f$ dans Ω ce qui est la 2eme équation de (6.2). A présent nous reprenons l'identité variationnelle $a(u,v) = \ell(v)$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. En appliquant le lemme 5.14, on obtient l'identité $\int_\Omega \nabla u^\top \nabla \overline{v} d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \overline{v}\Delta u d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \overline{v}\partial_{\boldsymbol{n}} u\, d\sigma$. Si l'on reporte ceci dans l'expression de $a(u,v)$

obtient

$$\begin{aligned}
\ell(v) = \int_\Omega f\overline{v} d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} g\overline{v} d\sigma = a(u,v) &= \int_\Omega \nabla u^\top \nabla \overline{v} + \mu^2 u\overline{v}\, d\boldsymbol{x} \\
&= \int_\Omega \overline{v}(\mu^2 u - \Delta u)\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \overline{v}\partial_{\boldsymbol{n}} u\, d\sigma \\
&= \int_\Omega f\overline{v}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \overline{v}\partial_{\boldsymbol{n}} u\, d\sigma \quad \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\int_{\partial\Omega}(g - \partial_{\boldsymbol{n}} u)\overline{v} d\sigma = 0$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. Par surjectivité de l'opérateur de trace (Proposition 5.6), on déduit finalement $\partial_{\boldsymbol{n}} u = g$ dans $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$, ce qui est la 3ème équation de (6.2). □

C'est l'écriture du problème sous la forme "Trouver $u \in \mathrm{V}$ tel que $a(u,v) = \ell(v) \forall v \in \mathrm{V}$" que l'on nomme formulation variationnelle. L'espace V est appelé espace variationnel (dans le cas présent on a $\mathrm{V} = \mathrm{H}^1(\Omega)$). Il est important de bien comprendre la méthodologie employée dans la première partie de la preuve précédente. Une formulation variationnelle est presque toujours obtenue selon les trois même étapes :

Méthode :

Étape 1 On part de l'EDP dans le volume Ω que l'on multiplie par une fonction v choisie dans l'espace variationnel V qui convient (ici $\mathrm{V} = \mathrm{H}^1(\Omega)$).

Étape 2 On intègre sur le domaine de calcul Ω et on applique la formule de Green, ce qui fait apparaitre des termes de bord.

Étape 3 On injecte les conditions aux limites dans les termes de bord apparus à l'étape précédente.

Heuristique de choix de l'espace variationnel Dans le cadre d'une EDP elliptique d'ordre 2 et en l'*absence de condition aux limites de Dirichlet* on peut, en général, choisir $\mathrm{H}^1(\Omega)$ comme espace variationnel. Cette règle n'est cependant qu'une heuristique et il convient, pour chaque problème aux limites étudié, d'établir l'équivalence entre le problème de départ et la formulation variationnel.

Existence-unicité de la solution : Lax-Milgram

Nous avons travaillé pour nous ramener à un problème posé dans un espace de Hilbert. Ceci nous donne accès à tout un arsenal théorique dont le théorème 3.15 (Lax-Milgram) que nous pouvons appliquer à (6.5). Passons soigneusement en revue les hypothèses.

Hypothèse 1 : espace de Hilbert ? Il est clair que l'espace variationnel $\mathrm{H}^1(\Omega)$ intervenant dans la formulation (6.5) est un espace Hilbert : c'est précisément ce que dit la proposition 4.4.

Hypothèse 2 : $\boldsymbol{\ell(\cdot)}$ continue ? D'après le corollaire 3.7, la continuité sera établie si on arrive à montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $|\ell(v)| \leq C\|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$. Si on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Lemme 3.2) dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$, on obtient $|\ell(v)| \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|g\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}$. Il reste à remarquer que $\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ et à appliquer le théorème 5.1 de trace. Si on note $\|\tau_{\partial\Omega}\| > 0$ le module de continuité de la trace en tant qu'application $\mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\partial\Omega)$, on obtient :

$$|\ell(v)| \leq (\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\tau_{\partial\Omega}\| \cdot \|g\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}) \, \|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \quad \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega).$$

Hypothèse 3 : $a(\cdot,\cdot)$ continue ? A nouveau on utilise le corollaire 3.7 : il suffit de démontrer l'existence de $C > 0$ telle que $|a(u,v)| \leq C\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ pour tout $u, v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| \quad & \leq \textstyle\int_\Omega |\nabla u| \cdot |\nabla v| \, d\boldsymbol{x} + |\mu^2| \int_\Omega |u| \cdot |v| \, d\boldsymbol{x} \\ & \leq \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + |\mu^2| \, \|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\ & \leq \max(1, |\mu^2|) \, \|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \qquad \forall u, v \in \mathrm{H}^1(\Omega). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Hypothèse 4 : $a(\cdot,\cdot)$ coercive ? En utilisant l'hypothèse (6.1) on observe que $\min(1, \Re e\{\mu^2\}) > 0$, et par un calcul direct on obtient, pour tout $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |a(v,v)| \geq \Re e\{a(v,v)\} \quad & = \Re e\{\textstyle\int_\Omega |\nabla v|^2 + \mu^2 |v|^2 d\boldsymbol{x}\}, \\ & = \|\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \Re e\{\mu^2\} \|v\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}, \\ & \geq \min(1, \Re e\{\mu^2\}) \|v\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Nous avons vérifié toutes les hypothèses du théorème 3.15 (Lax-Milgram). On en déduit l'existence et l'unicité d'un $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ vérifiant (6.5) et donc (6.2). En bonus le théorème de Lax-Milgram nous fournit la dépendance continue de la solution u par rapport aux données f, g :

Lemme 6.3.
Le problème (6.2) admet une unique solution $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ satisfaisant

$$\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\min(1, \Re e\{\mu^2\})} (\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\tau_{\partial\Omega}\| \cdot \|g\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}). \tag{6.9}$$

Régularité

Nous avons établi l'existence et l'unicité de la solution du problème (6.2). Nous savons que cette solution appartient à $\mathrm{H}^1(\Omega)$ et même à $\mathrm{H}^1(\Delta, \Omega)$. Mais peut-on obtenir des résultats plus précis au sujet de la régularité de cette solution ? Comme le montre la proposition suivante que nous admettrons (voir par exemple [4, §9.6]), la réponse est oui à condition de formuler des hypothèses suffisantes sur la régularité des données du problème.

Proposition 6.4.
On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné de classe $\mathscr{C}^{k+2}$, que $f \in \mathrm{H}^k(\Omega)$ et qu'il existe $v_g \in \mathrm{H}^{k+2}(\Omega)$ tel que $\partial_{\boldsymbol{n}} v_g|_{\partial\Omega} = g$. Alors l'unique solution $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ de (6.2) appartient à $\mathrm{H}^{k+2}(\Omega)$.

6.2 Problème aux limites plus général

Nous examinons maintenant un problème plus général auquel nous allons appliquer le même schéma d'étude que précédemment. Dans la suite on se place sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ lipschitzien borné, on considère des fonctions continues $\mathcal{A} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{d \times d}, \boldsymbol{b} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^d$ et deux fonctions scalaires $\lambda, c : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ continues elles aussi. Étant donnés $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $g \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)$, on veut résoudre

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u) + \boldsymbol{b}^\top\nabla u + cu = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}} u + \lambda u = g \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{6.10}$$

Il s'agit cette fois d'une EDP à coefficients variables, ce qui n'était pas le cas de (6.2). Soulignons à nouveau qu'avec une telle EDP, on ne suppose pas uniquement $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ mais aussi

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}\nabla u \in \mathrm{H}(\operatorname{div}, \Omega) \quad \text{et} \\ &\operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u) = \boldsymbol{b}^\top\nabla u + cu - f \end{aligned} \tag{6.11}$$

ce qui, du coup, donne un sens au terme "$\operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u)$" et autorise à considérer l'opérateur de trace conormale défini par

$$\partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}} u := \boldsymbol{n}^\top\mathcal{A}\nabla u|_{\partial\Omega}. \tag{6.12}$$

Dans le cas où $\mathcal{A} = \mathrm{Id}$ on retrouve l'opérateur de trace Neumann introduit en (2.7). Ce qui précède nous amène naturellement à introduire un espace adapté à notre problème. A nouveau la preuve du résultat suivant est laissé au lecteur car elle suit de très près la preuve de la proposition 4.4.

Lemme 6.5.
L'espace $\mathrm{H}^1(\Delta_{\mathcal{A}}, \Omega) := \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ \mathcal{A}\nabla u \in \mathrm{H}(\operatorname{div}, \Omega)\}$ *est un espace de Hilbert lorqu'il est muni du produit scalaire* $(u, v)_{\mathrm{H}^1(\Delta_{\mathcal{A}},\Omega)} := (u, v)_{\mathrm{H}^1(\Omega)} + (\mathcal{A}\nabla u, \mathcal{A}\nabla v)_{\mathrm{H}(\operatorname{div},\Omega)}$. *De plus l'opérateur de trace conormale* $\partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}}$ *est continue de* $\mathrm{H}^1(\Delta_{\mathcal{A}}, \Omega)$ *dans* $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$.

En suivant le plan d'étude de la section 6.1, commençons par ré-écrire ce problème sous forme variationnelle, ce qui permettra de le faire rentrer dans un cadre hilbertien. C'est l'objet de la proposition suivante.

Lemme 6.6.
Une fonction u est solution de (6.10) si et seulement si elle satisfait :

$$\begin{aligned} &u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \quad \textit{et} \quad a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \\ &\textit{avec} \quad a(u, v) := \int_\Omega \nabla\overline{v}^\top\mathcal{A}\nabla u + \nabla u^\top\boldsymbol{b}\,\overline{v} + cu\,\overline{v}\,d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \lambda\,u\,\overline{v}\,d\sigma \\ &\qquad\quad \ell(v) := \int_\Omega f\overline{v}\,d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} g\overline{v}\,d\sigma \end{aligned} \tag{6.13}$$

Démo :
Pour montrer [u satisfait (6.10)] $\Rightarrow$ [u satisfait (6.13)], nous suivons les trois étapes mentionnée à la fin du §6.1. **Étape 1 :** Le point crucial consiste ici à choisir correctement l'espace variationnel. Il n'y a pas de condition aux limites de Dirichlet, nous choisissons donc $\mathrm{V} = \mathrm{H}^1(\Omega)$ comme espace variationnel. **Étape 2 :** On multiplie l'EDP par une fonction test $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, on intègre sur Ω et on applique une formule de Green,

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\overline{v}\,d\boldsymbol{x} &= \int_\Omega -\operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u)\overline{v}\,d\boldsymbol{x} + \int_\Omega (\boldsymbol{b}^\top\nabla u + cu)\overline{v}\,d\boldsymbol{x} \\ &= \int_\Omega \nabla\overline{v}^\top\mathcal{A}\nabla u\,d\boldsymbol{x} + \int_\Omega (\boldsymbol{b}^\top\nabla u + cu)\overline{v}\,d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} \overline{v}\partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}} u\,d\sigma \end{aligned} \tag{6.14}$$

Étape 3 : On prend en compte les conditions aux limites, ce qui consiste ici à écrire $\partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}} u = g - \lambda u|_{\partial\Omega}$, à injecter cette identité dans (6.14) et à faire passer le terme associé à g de l'autre côté de l'égalité. ceci conduit exactement à (6.13).

Réciproquement supposons que $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ satisfait (6.13). Choisissons un $v \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)$. On a en particulier $v|_{\partial\Omega} = 0$ de sorte que $\int_\Omega \nabla\overline{v}^\top \mathcal{A}\nabla u + \nabla u^\top \boldsymbol{b}\,\overline{v} + cu\,\overline{v}\,d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\overline{v}d\boldsymbol{x}$. En appliquant maintenant la formule de Green généralisée on obtient : $\int_\Omega(-\mathrm{div}(\mathcal{A}\nabla u) + \nabla u^\top \boldsymbol{b}\,\overline{v} + cu - f)\overline{v}\,d\boldsymbol{x} = 0$ pour tout $v \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)$ et, en appliquant le corollaire 3.19,

$$-\mathrm{div}(\mathcal{A}\nabla u) + \boldsymbol{b}^\top \nabla u + cu = f \quad \text{dans } \Omega. \tag{6.15}$$

A présent, nous repartons de (6.13) en choisissant cette fois un $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ arbitraire et donc pas forcément nul sur le bord. On applique à nouveau une formule de Green généralisée et on utilise l'identité (6.15) que nous venons d'établir.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega f\overline{v}d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} g\overline{v}d\sigma \\
&= \int_\Omega \nabla\overline{v}^\top \mathcal{A}\nabla u\,d\boldsymbol{x} + \int_\Omega (\boldsymbol{b}^\top\nabla u + cu)\overline{v}\,d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \lambda u\overline{v}d\sigma \\
&= \int_\Omega (-\mathrm{div}(\mathcal{A}\nabla u) + \boldsymbol{b}^\top\nabla u + cu)\overline{v}\,d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} (\partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}} u + \lambda u)\overline{v}d\sigma \\
&= \int_\Omega f\overline{v}\,d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} (\partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}} u + \lambda u)\overline{v}d\sigma
\end{aligned} \tag{6.16}$$

On obtient donc finalement $\int_{\partial\Omega}(\partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}} u + \lambda u - g)\overline{v}d\sigma = 0$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ et, par surjectivité de l'application trace $\tau_{\partial\Omega} : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$, on obtient $\partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}} u + \lambda u = g$ dans $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$. Nous avons donc établi que u est solution de (6.10). □

Le lemme précédent a permis de mettre le problème aux limites (6.10) sous forme variationnelle. Examinons maintenant dans quelle mesure ce problème admet une unique solution. Nous n'avons supposé que peu de choses sur les coefficients $\mathcal{A}, \boldsymbol{b}, c$ de sorte qu'il est difficile de conclure. On a néanmoins le résultat partiel suivant.

Lemme 6.7.
Si la forme sesquilinéaire $a(,)$ donnée par (6.13) est coercive, alors le problème aux limites (6.10) admet une unique solution.

Démo :
Il suffit de vérifier que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, à l'exception de l'hypothèse de coercivité que l'on suppose d'emblée satisfaite. **Hypothèse 1 :** L'espace $\mathrm{V} = \mathrm{H}^1(\Omega)$ que nous avons choisi comme espace variationnel est bien un espace de Hilbert d'après la proposition 4.4. **Hypothèse 2 :** la forme linéaire $\ell(\cdot)$ est bien continue puisque d'après le théorème 5.2, l'application $\tau_{\partial\Omega} : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\partial\Omega)$ est continue (on notera $\|\tau_{\partial\Omega}\|$ son module de continuité) si bien que, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|\ell(v)| &\le \Big|\int_\Omega f\overline{v}d\boldsymbol{x}\Big| + \Big|\int_{\partial\Omega} g\overline{v}d\sigma\Big| \\
&\le \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|g\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)} \\
&\le (\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\tau_{\partial\Omega}\|\cdot\|g\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)})\|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Hypothèse 3 : Montrons enfin que $a(\cdot,\cdot) : \mathrm{H}^1(\Omega)\times\mathrm{H}^1(\Omega)\to\mathbb{C}$ est bien continue. On a supposé la continuité de $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}), c(\boldsymbol{x})$ sur $\mathbb{R}^d$ et donc ces fonctions sont bornées sur $\overline{\Omega}$ qui est compact (on a supposé Ω borné). En notant $\|\mathcal{A}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{C}^d\setminus\{0\}}|\mathcal{A}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\xi}|/|\boldsymbol{\xi}|$ et de même pour $\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}$ et $\|c\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}$, on a les estimations

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \Big|\int_\Omega \nabla\overline{v}^\top\mathcal{A}\nabla u d\boldsymbol{x}\Big| + \Big|\int_\Omega \nabla u^\top \boldsymbol{b}\overline{v}\,d\boldsymbol{x}\Big| + \Big|\int_\Omega cu\overline{v}\,d\boldsymbol{x}\Big| + \Big|\int_{\partial\Omega}\lambda u\overline{v}\,d\sigma\Big| \\
&\leq \|\mathcal{A}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\
&\quad + \|c\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\lambda\|_{\mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)}\|u\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)} \\
&\leq (\|\mathcal{A}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} + \|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} + \|c\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} + \|\lambda\|_{\mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)}\|\tau_{\partial\Omega}\|^2)\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

où on rappelle que $\|\tau_{\partial\Omega}\|$ renvoie au module de continuité de l'application trace $\tau_{\partial\Omega} : \mathrm{H}^1(\Omega)\to\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$ cf (5.2). Dans ces calculs nous avons également posé $\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}|\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})|$ et de même pour $c(\boldsymbol{x})$ sur Ω et $\lambda(\boldsymbol{x})$ sur $\partial\Omega$. □

Avec le lemme précédent, nous sommes ramenés à la question de savoir si la forme sesquilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ était coercive. Cette question ne peut être tranchée a priori sans plus d'hypothèse sur les coefficients de l'équation $\mathcal{A}, \boldsymbol{b}, c$ et λ, et en particulier sur leur signe. Il n'y a pas de règle générale équivalente à la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$: il faut examiner pour chaque situation concrète si oui ou non la coercivité est vérifiée. En guise d'exemple, nous considérons ci-dessous deux cas de figure pour lesquels on peut établir la coercivité.

✍ **Lemme 6.8.**
On se place dans le cas $\boldsymbol{b}\equiv 0$ et $c\equiv 0$ sur Ω. On suppose qu'il existe $\alpha_\star > 0$ tels que $\Re e\{\boldsymbol{\xi}^\top\mathcal{A}(\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{\xi}}\}\geq\alpha_\star|\boldsymbol{\xi}|^2$ pour tout $\boldsymbol{x}\in\Omega, \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{C}^d$, et $\Re e\{\lambda(\boldsymbol{x})\}>0$ pour tout $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$. Alors la forme sesquilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ définie dans (6.13) est coercive.

Démo :
Puisque $\boldsymbol{b}$ et c sont partout nuls, on a $\Re e\{a(u,u)\} = \int_\Omega\Re e\{\nabla\overline{u}^\top\mathcal{A}\nabla u\}d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega}\Re e\{\lambda\}|u|^2 d\sigma$. Quitte à décomposer les intégrales selon les composantes connexes de Ω, on peut supposer que Ω est connexe. Posons $\Phi(v) = (\frac{1}{\alpha_\star}\int_{\partial\Omega}\Re e\{\lambda\}|v|^2 d\sigma)^{1/2}$. Parceque $\Re e\{\lambda(\boldsymbol{x})\}>0$ pour tout $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$, il est clair que $\Phi(1)\neq 0$, de sorte que $\nabla v = 0$ et $\Phi(v)=0$ implique $v=0$. En appliquant le théorème 4.11 (inégalité de Poincaré) on déduit l'existence de $\beta>0$ tel que

$$
\begin{aligned}
&\beta\|v\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq |\Phi(v)|^2 + \|\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\
\Rightarrow\quad &\alpha_\star\beta\|v\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \int_{\partial\Omega}\Re e\{\lambda\}|v|^2 d\sigma + \alpha_\star\|\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \Re e\{a(v,v)\}, \\
\Rightarrow\quad &\frac{\alpha_\star}{2}\min(1,\beta)\|v\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2}(\alpha_\star\beta\|v\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \alpha_\star\|\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}) \leq \Re e\{a(v,v)\} \leq |a(v,v)|.
\end{aligned}
$$

□

Insistons sur le rôle crucial qu'a joué l'inégalité de Poincaré dans la preuve précédente. Notons par ailleurs que l'hypothèse portant sur $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ peut être ré-écrite $\inf\mathfrak{S}(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{A}(\boldsymbol{x})^*) > \alpha_\star\forall\boldsymbol{x}\in\Omega$ où "$\mathfrak{S}$" désigne le spectre : cette hypothèse signifie que la partie symétrique de $\mathcal{A}$ est définie positive uniformément en $\boldsymbol{x}$. On considère à présent un deuxième cas de figure couvrant le cas d'une condition de "Neumann pure".

Lemme 6.9.
On suppose qu'il existe $\alpha_\star > 0$ *tel que* $\Re e\{\boldsymbol{\xi}^\top \mathcal{A}(\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{\xi}}\} \geq \alpha_\star|\boldsymbol{\xi}|^2$ *pour tout* $\boldsymbol{x} \in \Omega, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d$, *et que* $\boldsymbol{b} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *et à valeurs réelles. Alors les deux conditions suivantes sont suffisantes pour que la forme sesquilinéaire* $a(\cdot,\cdot)$ *définie dans (6.10) soit coercive :*

- $\Re e\{c(\boldsymbol{x}) - \mathrm{div}(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}))/2\} > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,$
- $\Re e\{\lambda(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})/2\} \geq 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$

Démo :
Remarquons tout d'abord que, comme $\boldsymbol{b} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^d$ est de la classe $\mathscr{C}^1$, on a $\boldsymbol{b}v \in \mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, avec $\mathrm{div}(v\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}^\top\nabla v + v\mathrm{div}(\boldsymbol{b})$. En appliquant une formule de Green généralisée Lemma 5.14, on a donc $\int_\Omega \overline{v}\boldsymbol{b}^\top\nabla u d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \mathrm{div}(\overline{v}\boldsymbol{b})u d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} u\overline{v}\boldsymbol{n}^\top\boldsymbol{b}\, d\sigma$, et on en déduit

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega \overline{v}\boldsymbol{b}^\top\nabla u\, d\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \overline{v}\boldsymbol{b}^\top\nabla u d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \mathrm{div}(\overline{v}\boldsymbol{b})u d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} u\overline{v}\boldsymbol{n}^\top\boldsymbol{b}\, d\sigma \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{b}^\top(\overline{v}\nabla u - u\nabla\overline{v})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{b})u\overline{v}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} u\overline{v}\boldsymbol{n}^\top\boldsymbol{b}\, d\sigma \end{aligned}$$

En injectant cette identité dans (6.13), on peut alors obtenir pour $a(\cdot,\cdot)$ l'expression symétrisée suivante

$$\begin{aligned} a(u,v) = \ & \int_\Omega \nabla\overline{v}^\top\mathcal{A}\nabla u + (c - \mathrm{div}(\boldsymbol{b})/2)u\overline{v}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega}(\lambda + \boldsymbol{n}^\top\boldsymbol{b}/2)u\overline{v}\, d\sigma \\ & + \int_\Omega \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^\top(\overline{v}\nabla u - u\nabla\overline{v})d\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Comme $\boldsymbol{b}$ est supposée à valeurs réelles, on a $\Re e\{\boldsymbol{b}^\top(\overline{u}\nabla u - u\nabla\overline{u})\} = 0$. En utilisant les hypothèses du lemme, et en posant $c_r := \Re e\{c - \mathrm{div}(\boldsymbol{b})/2\}/\alpha_\star > 0$, on en tire donc $\Re e\{a(u,u)\} \geq \int_\Omega \Re e\{\nabla\overline{u}^\top\mathcal{A}\nabla u\} + \alpha_\star c_r|u|^2 d\boldsymbol{x} \geq \alpha_\star(\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \int_\Omega c_r|u|^2 d\boldsymbol{x})$. Ensuite en appliquant l'inégalité de Poincaré i.e. théorème 4.11 avec $\Phi(v) := (\int_\Omega c_r|u|^2 d\boldsymbol{x})^{1/2}$, on obtient l'existence de $\beta > 0$ tel que

$$\beta\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \int_\Omega c_r|u|^2 d\boldsymbol{x} + \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \tag{6.20}$$

De sorte que finalement $\alpha_\star\min(1,\beta)\|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq \alpha_\star\beta\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \alpha_\star\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq 2\Re e\{a(u,u)\} \leq 2|a(u,u)|$, ce qui termine la preuve de coercivité. □

Encore une fois, dans la preuve précédente, l'inégalité de Poincaré s'est avéré un résultat clé. Pour clore cette section, nous énonçons un résultat portant sur la régularité des solutions des problèmes de la forme (6.10). On admettra ce résultat (le lecteur pourra consulter [4, §9.6] pour une démonstration détaillée).

Théorème 6.10.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert borné de classe* $\mathscr{C}^{k+2}$. *On suppose par ailleurs que les fonctions* $\mathcal{A}, \boldsymbol{b}, \lambda$ *sont de classe* $\mathscr{C}^{k+1}$ *et que* c *soit de classe* $\mathscr{C}^k$. *On suppose également que* $f \in \mathrm{H}^k(\Omega)$ *et il existe* $v_g \in \mathrm{H}^{k+2}(\Omega)$ *tel que* $\partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}}v_g = g$ *sur* $\partial\Omega$. *Alors l'unique solution* u *de (6.10) appartient à* $\mathrm{H}^{k+2}(\Omega)$.

6.3 Conditions de Dirichlet

Jusqu'à présent nous nous sommes limités à considérer des conditions aux limites de type Neumann et/ou Robin. Ceci nous a conduit à toujours choisir $\mathrm{V} = \mathrm{H}^1(\Omega)$ comme espace variationnel. Les choses changent lorsque l'on impose des conditions de Dirichlet sur une partie du bord. C'est ce que nous détaillons dans cette dernière section.

Un nouveau problème modèle

On se concentre dans ce paragraphe sur un problème spécifique. On suppose $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert lipschitzien borné, et $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, et l'on souhaite résoudre le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.21}$$

La première étape pour analyser ce problème par une méthode variationnelle consiste à en obtenir une formulation variationnelle. Mais avant de nous atteler à cette tâche, remarquons que si u est solution du problème ci-dessus alors la condition aux limites implique que

$$u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) := \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

de sorte que $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^1(\Delta, \Omega)$. Comme nous l'avons annoncé à la fin du §6.1, une heuristique raisonnable consiste à prendre en compte la condition de Dirichlet homogène dans le choix de l'espace variationnel. Nous allons donc choisir $\mathrm{V} = \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ comme espace variationnel, et non pas $\mathrm{H}^1(\Omega)$.

Lemme 6.11.
Une fonction u est solution de (6.21) si et seulement si elle satisfait la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} & u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \quad \textit{et} \quad a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega), \\ & \textit{avec} \quad a(u,v) := \int_\Omega \nabla u^\top \nabla \overline{v}\, d\boldsymbol{x}, \\ & \qquad \ell(v) := \int_\Omega f \overline{v}\, d\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Démo :
Supposons d'abord que $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ soit solution de (6.21). Puisque l'espace variationnel choisi est $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, c'est dans cet espace que l'on choisit la fonction test (**étape 1**). Conformément à la méthodologie décrite au §6.1, on multiplie donc la deuxième ligne de (6.21) par $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, on intègre sur Ω (**étape 2**) puis on applique une formule de Green (**étape 3**). On obtient le calcul suivant

$$\int_\Omega f\overline{v} d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \overline{v}\Delta u d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla u^\top \nabla \overline{v} d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} \overline{v}\partial_{\boldsymbol{n}} u\, d\sigma \quad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

Puisque $v|_{\partial\Omega} = 0$ de par le choix de l'espace variationnel, le terme de bord dans l'identité ci-dessus est nul et on obtient finalement (6.22). Notons que l'usage de la formule de Green était autorisée car, u étant supposée solution de (6.21), on avait en particulier $u \in \mathrm{H}^1(\Delta, \Omega)$ c'est-à-dire $\nabla u \in \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega)$.

Réciproquement, supposons que $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ soit solution de (6.22). Alors pour tout $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)$, on a $\int_\Omega \nabla u^\top \nabla\varphi\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\varphi\, d\boldsymbol{x}$ avec $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ donc, d'après la définition (5.9) de la divergence faible, on a $\nabla u \in \mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$ avec $\Delta u = \mathrm{div}(\nabla u) = -f$ sur Ω. D'autre part on a $u|_{\partial\Omega} = 0$ puisque $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. □

A présent que nous avons mis le problème sous forme variationnelle, nous pouvons examiner l'existence-unicité par des méthodes hilbertiennes.

Proposition 6.12.
Pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ de (6.22). De plus il existe une constante $\alpha > 0$ indépendante de f telle que telle $\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}/\alpha$.

Démo :
Comme auparavant, nous allons appliquer le théorème de Lax-Milgram dont on vérifie les hypothèses une à une. **Hypothèse 1 :** l'espace $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ est bien un espace de Hilbert car c'est un sous-espace fermé (continuité de la trace, proposition 5.1) de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ qui est lui-même un espace de Hilbert (proposition 4.4). **Hypothèse 2 :** la forme anti-linéaire $\ell()$ définie dans (6.22) est bien continue puisque, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, on obtient $|\ell(v)| = |\int_\Omega f\overline{v}d\boldsymbol{x}| \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$. **Hypothèse 3 :** la forme sesquilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ définie dfans (6.22) est elle aussi continue d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puisque $|a(u,v)| = |\int_\Omega \nabla u^\top\nabla\overline{v}d\boldsymbol{x}| \leq \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$. **Hypothèse 4 :** la forme sequilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est bien coercive, c'est une conséquence directe du lemme 5.5 (qui est une variante de l'inégalité de Poincaré, théorème 4.11). □

Et le théorème de régularité qui va avec (et que l'on admettra).

Théorème 6.13.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe $\mathscr{C}^{k+2}$, et $f \in \mathrm{H}^k(\Omega)$. Alors l'unique solution de (6.21) appartient à $\mathrm{H}^{k+2}(\Omega)$.

Conditions de Dirichlet inhomogènes

Nous concluons ce chapitre en examinant un dernier cas de figure. Celui où le problème aux limites à l'étude fait intervenir une condition au bord de Dirichlet non-homogène. Pour fixer les idées, étant donné un ouvert Lipschitzien borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et une portion $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure de surface non nulle, on considère le problème aux limites

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\mathrm{div}(\mathcal{A}\nabla u) + cu = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = g_{\mathrm{D}} \quad \text{sur } \Gamma, \\ \partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}} u = g_{\mathrm{N}} \quad \text{sur } \Sigma := \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{cases} \tag{6.23}$$

Dans ce problème on suppose que les données vérifient $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $g_{\mathrm{N}} \in \mathrm{L}^2(\Sigma)$ et $g_{\mathrm{D}} \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$. Les coefficients de l'équation sont des fonctions continues $\mathcal{A} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{d\times d}$ et $c : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telles qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant les conditions supplémentaires

$$\begin{aligned} &\Re e\{\boldsymbol{\xi}^\top\mathcal{A}(\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{\xi}}\} \geq \alpha|\boldsymbol{\xi}|^2 \\ &\text{et} \quad \Re e\{c(\boldsymbol{x})\} \geq 0 \\ &\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d. \end{aligned} \tag{6.24}$$

La dernière équation de (6.23) portant sur la trace Neumann doit être comprise au sens faible, c'est-à-dire dans l'espace dual $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega) := \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)'$. Dans ce contexte le sens à donner à l'expression "$\partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}} u|_\Sigma = g_{\mathrm{N}}$" n'est pas évidente a priori, à cause de la notion de restriction, puisqu'on a pas dit ce qu'était la restriction d'un élément de $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ sur une partie du bord (ici $\Sigma \subset \partial\Omega$). Le sens de cette équation est le suivant :

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} (\partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}} u - g_{\mathrm{N}}) v \, d\sigma = 0 \quad \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega) \\ &\text{où} \quad \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega) = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ v|_\Gamma = 0\}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Pour traiter la condition de Dirichlet (non-homogène), une possibilité consiste à se ramener au cas d'une condition de Dirichlet homogène. On remarque d'abord que, par définition de $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$, il existe $u_{\mathrm{D}} \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ telle que $u_{\mathrm{D}}|_\Gamma = g_{\mathrm{D}}$ (une telle fonction est appelée un relèvement), de sorte que

$$\tilde{u} = u - u_{\mathrm{D}} \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega). \tag{6.26}$$

Nous allons alors effectuer un changement de fonction inconnue, et reformuler le problème (6.23) portant sur u comme une formulation variationnelle portant sur $\tilde{u}$ qui devra vérifier une condition de Dirichlet homogène sur Γ.

Proposition 6.14.
Une fonction u est solution de (6.23) si et seulement si $u = \tilde{u} + u_{\mathrm{D}}$ où $\tilde{u}$ est solution de la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} &\tilde{u} \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega) \quad \textit{et} \quad a(\tilde{u}, v) = \ell(v) \quad \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega) \\ &\textit{avec} \quad a(w,v) := \int_\Omega \nabla\overline{v}^\top \mathcal{A} \nabla w + c\, w \overline{v}\, d\boldsymbol{x} \\ &\qquad \ell(v) := \int_\Omega f\overline{v} d\boldsymbol{x} + \int_\Sigma g_{\mathrm{N}} \overline{v}\, d\sigma - a(u_{\mathrm{D}}, v) \end{aligned} \tag{6.27}$$

Démo :
Supposons d'abord que u est solution de (6.23). On a donc $u \in \mathrm{H}^1(\Delta_{\mathcal{A}}, \Omega)$ et, en choisissant un $v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$, on peut appliquer la formule de Green généralisée avec $\mathcal{A}\nabla u$ et v. En utilisant la condition aux limites de Neumann dans (6.23) et le fait que $v|_\Gamma = 0$ (par choix de $\mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ comme espace variationnel), on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\overline{v} d\boldsymbol{x} &= \int_\Omega (-\mathrm{div}(\mathcal{A}\nabla u) + cu)\overline{v}\, d\boldsymbol{x} \\ &= \int_\Omega \nabla\overline{v}^\top \mathcal{A}\nabla u + cu\overline{v}\, d\boldsymbol{x} - \int_\Sigma \overline{v}\, \partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}} u\, d\sigma \\ \int_\Sigma g_{\mathrm{N}}\overline{v}\, d\sigma + \int_\Omega f\overline{v} d\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \nabla\overline{v}^\top \mathcal{A}\nabla(\tilde{u} + u_{\mathrm{D}}) + c(\tilde{u} + u_{\mathrm{D}})\overline{v}\, d\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{6.28}$$

Le membre de droite ci-dessus vaut $a(\tilde{u} + u_{\mathrm{D}}, v)$. En faisant passer les termes associés à u_{D} de l'autre côté de l'égalité on obtient donc finalement (6.27). De plus, on a bien $\tilde{u} \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ d'après (6.26).

Réciproquement supposons que $\tilde{u}$ est solution de (6.27) et que $u = \tilde{u} + u_{\mathrm{D}}$. Alors on a $a(u,v) = \int_\Omega f\overline{v} d\boldsymbol{x} + \int_\Sigma g_{\mathrm{N}}\overline{v} d\sigma$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$. Choisissons $v \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega) \subset \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ de sorte que

$v|_{\partial\Omega} = 0$. D'après la formulation variationnelle on a $\int_\Omega \nabla\overline{v}^\top \mathcal{A}\nabla u\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega (f - cu)\overline{v}\, d\boldsymbol{x} \forall v \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)$. En comparant avec la définition 5.9 de la divergence faible, on en déduit que $\mathcal{A}\nabla u \in \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega)$ et que

$$f + \mathrm{div}(\mathcal{A}\nabla u) - c = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{6.29}$$

ce qui fournit la 2ème ligne dans (6.23). Par construction on a $u|_\Gamma = \tilde{u}|_\Gamma + u_{\mathrm{D}}|_\Gamma = u_{\mathrm{D}}|_\Gamma = g_{\mathrm{D}}$ d'où la 3ème ligne de (6.23). Enfin si on choisit un $v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ quelconque, que l'on repart de $a(u, v) = \int_\Omega f\overline{v}d\boldsymbol{x} + \int_\Sigma g_{\mathrm{N}}\overline{v}d\sigma$ et que l'on applique une formule de Green généralisée, on obtient $0 = \int_\Omega (f + \mathrm{div}(\mathcal{A}\nabla u) - cu)\overline{v}\, d\boldsymbol{x} = \int_\Sigma (\partial_{\boldsymbol{n},\mathcal{A}}u - g_{\mathrm{N}})\overline{v}d\sigma$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ ce qui, d'après (6.25), est la dernière équation de (6.23). □

Maintenant que nous avons mis le problème sous forme variationnel, nous pouvons appliquer la théorie hilbertienne pour étudier l'existence et l'unicité de la solution.

Proposition 6.15.
Le problème aux limites (6.23) admet une unique solution $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.

Démo :
Montrons d'abord l'existence et l'unicité de la solution $\tilde{u} \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ de (6.27) en vérifiant que le théorème de Lax-Milgram est applicable. **Hypothèse 1 :** d'après la définition 5.3, $\mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ qui est un Hilbert, de sorte que $\mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ est un Hilbert. **Hypothèse 3 :** la continuité de la forme sesquilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est une conséquence directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz puisqu'on a

$$\begin{aligned}
|a(w, v)| &\leq \Big|\int_\Omega \nabla\overline{v}^\top \mathcal{A}\nabla w d\boldsymbol{x}\Big| + \Big|\int_\Omega cw\overline{v}d\boldsymbol{x}\Big| \\
&\leq \|\mathcal{A}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\|\nabla w\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|c\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\|w\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\
&\leq (\|\mathcal{A}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} + \|c\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)})\|w\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Hypothèse 2 : comme nous venons de démontrer la continuité de $a(\cdot,\cdot)$, on en déduit en particulier la continuité de $v \mapsto a(u_{\mathrm{D}}, v)$. Pour montrer la continuité de $\ell(\cdot)$, il reste donc à montrer la continuité de $v \mapsto \int_\Omega f\overline{v}d\boldsymbol{x} + \int_\Sigma g_{\mathrm{N}}\overline{v}d\sigma$, ce que l'on fait de nouveau par Cauchy-Schwarz et la continuité de l'application trace,

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega f\overline{v}d\boldsymbol{x} + \int_\Sigma g_{\mathrm{N}}\overline{v}d\sigma\Big| &\leq \Big|\int_\Omega f\overline{v}d\boldsymbol{x}\Big| + \Big|\int_\Sigma g_{\mathrm{N}}\overline{v}d\sigma\Big|, \\
&\leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|g_{\mathrm{N}}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}, \\
&\leq (\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\tau_{\partial\Omega}\| \cdot \|g_{\mathrm{N}}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)})\|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Hypothèse 4 : puisque $\Gamma \subset \partial\Omega$ est de mesure de surface non-nulle, d'après le lemme 5.5, il existe une constante $\beta > 0$ tel que $\beta\|v\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq \|\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$. En utilisant les hypothèses (6.24), on obtient donc

$$\begin{aligned}
|a(v, v)| \geq \Re e\{a(v, v)\} &= \int_\Omega \Re e\{\nabla\overline{v}^\top \mathcal{A}\nabla v\} + \Re e\{c\}|v|^2 d\boldsymbol{x} \\
&\geq \alpha\|\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \geq \alpha\beta\|v\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \quad \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega).
\end{aligned} \tag{6.30}$$

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui nous donne l'existence et l'unicité de $\tilde{u}$ solution de (6.27). Ceci implique également l'existence de $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution de (6.23).

Montrons l'unicité de cette solution. Supposons que $u' \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ est une autre solution de (6.23), de sorte que $u|_\Gamma - u'|_\Gamma = g_{\mathrm{D}} - g_{\mathrm{D}} = 0$ c'est-à-dire $u - u' \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$. En reprenant le début de la preuve de la proposition 6.14, on en déduit $a(u-u',v) = 0 \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ donc, en prenant $v = u - u'$ et en utilisant la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ on en déduit $\alpha\beta\|u-u'\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq \Re e\{a(u-u',u-u')\} = 0$ ce qui fournit $u = u'$. $\square$