

Bibliographie

- [1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Palaiseau : Les Éditions de l'École Polytechnique, 2005.
- [2] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential geometry : manifolds, curves, and surfaces*, volume 115. New York etc. : Springer-Verlag, 1988.
- [3] S.C. Brenner and L.R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*. 3rd ed., volume 15. New York, NY : Springer, 3rd ed. edition, 2008.
- [4] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [5] H. Cartan. Formes différentielles. Applications élémentaires au calcul des variations et à la théorie des courbes et des surfaces. Paris : Hermann & Cie. 185 p. (1967)., 1967.
- [6] H. Cartan. *Cours de calcul différentiel*. Hermann, Paris, 1997.
- [7] P. Ciarlet and E. Lunéville. *La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique. Volume I, Concepts généraux*. Number vol. 1 in Cours (ENSTA). Les Presses de l'ENSTA, 2009.
- [8] P.G. Ciarlet. *The finite element methods for elliptic problems*, volume 40. Philadelphia, PA : SIAM, 2002.
- [9] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements.*, volume 159. New York, NY : Springer, 2004.
- [10] B. Gostiaux. *Cours de mathématiques spéciales. Vol. 1 : Algèbre*. Presses Univ. de France, Paris, 1993.
- [11] B. Gostiaux. *Cours de mathématiques spéciales. Vol. 2 : Topologie, analyse réelle*. Presses Univ. de France, Paris, 1993.
- [12] B. Gostiaux. *Cours de mathématiques spéciales. Vol. 3 : Analyse fonctionnelle et calcul différentiel*. Presses Univ. de France, Paris, 1993.
- [13] B. Gostiaux. *Cours de mathématiques spéciales. Vol. 5 : Géométrie : arcs et nappes*. Presses Univ. de France, Paris, 1995.
- [14] H. Le Dret and B. Lucquin. *Partial differential equations : Modeling, analysis and numerical approximation.*, volume 168. Cham : Birkhäuser/Springer, 2016.
- [15] P.-A. Raviart and J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Paris, Masson. 224 p., 1983.

- [16] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. 3rd ed. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Company. X, 342 p. DM 47.80., 1976.
- [17] W. Rudin. *Real and complex analysis*. 3rd ed. New York, NY : McGraw-Hill, 3rd ed. edition, 1987.
- [18] J. Wloka. *Partial differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

Chapitre 1

Calcul différentiel

Ce cours portant principalement sur les Équations aux Dérivées Partielles (EDP), nous dédions ce premier chapitre à préciser de manière détaillée ce qu'est la différentielle d'une fonction de plusieurs variables, notion dont découle la définition d'une dérivée partielle. Nous introduirons également les opérateurs gradient, divergence et laplacien. Le lecteur désireux d'approfondir les thèmes abordés dans ce chapitre pourra consulter avec profit [12, Chap.16], [6, Chap.6 & 9], ainsi que [16, chap.9].

Dans tout ce chapitre E et F désigneront des espaces vectoriels normés sur \mathbb{R} ou sur \mathbb{C} . On supposera ces espaces de dimension finie. On notera systématiquement $\|\cdot\|$ la norme sur E comme sur F , ce qui ne devrait pas occasionner de confusion. On rappelle d'ailleurs que, dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

1.1 Différentielle

Pour un ouvert $\Omega \subset E$ on dira qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow F$ est différentiable en un point $\mathbf{a} \in \Omega$ s'il existe une application linéaire $df(\mathbf{a}) : E \rightarrow F$ telle que, pour un \mathbf{h} suffisamment petit, on puisse écrire

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}| \epsilon(\mathbf{h}) \quad (1.1)$$

avec $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} |\epsilon(\mathbf{h})| = 0$

Lorsqu'une telle application existe elle est unique, car si $\varphi : E \rightarrow F$ est une autre application linéaire vérifiant les même conditions, on doit avoir $df(\mathbf{a}) \cdot (t\mathbf{h}) = \varphi(t\mathbf{h}) + t|\mathbf{h}|\eta(t\mathbf{h})$ pour tout $\mathbf{h} \in E$, $t > 0$ suffisamment petit, et avec $\lim_{t \rightarrow 0} \eta(t\mathbf{h}) = 0$. Par linéarité de $df(\mathbf{a})$ et φ , en faisant $t \rightarrow 0$ on obtient $df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \varphi(\mathbf{h})$, $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$.

L'application linéaire $df(\mathbf{a})$ est appelée différentielle de f en \mathbf{a} . Introduisons pour tout $L \in \mathcal{L}(E, F) := \{\text{applications linéaires } E \rightarrow F\}$ la norme

$$|L| := \sup_{\mathbf{h} \in E \setminus \{0\}} |L(\mathbf{h})| / |\mathbf{h}|. \quad (1.2)$$

Alors dans (1.1) il est clair que $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} |f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})| \leq \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} (|df(\mathbf{a})| + |\epsilon(\mathbf{h})|) |\mathbf{h}| = 0$. Ceci montre que si f est différentiable en \mathbf{a} alors elle est continue en \mathbf{a} . On dit que f est différentiable sur Ω lorsqu'elle admet une différentielle en chaque point $\mathbf{a} \in \Omega$. Dans ce dernier

cas on aura donc $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ où

$$\mathcal{C}^0(\Omega) := \{\text{fonctions continues sur } \Omega\}.$$

Le domaine Ω étant supposé ouvert, la continuité d'une fonction sur Ω ne l'empêche pas d'exploser au voisinage du bord. Pour certaines fonctions, nous aurons besoin de prescrire un comportement régulier jusqu'au bord ce qui nous amène à introduire des variantes de $\mathcal{C}^0(\Omega)$. Étant donné un sous-ensemble fermé $\Gamma \subset \overline{\Omega}$, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, nous définirons

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) &:= \{\varphi|_{\Omega} \text{ tel que } \varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)\}, \\ \mathcal{C}_{0,\Gamma}^0(\overline{\Omega}) &:= \{\varphi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \varphi|_{\Gamma} = 0\}.\end{aligned}$$

Lorsque $f : \Omega \rightarrow F$ est différentiable sur Ω , l'application $\mathbf{a} \mapsto df(\mathbf{a})$ est à valeur dans $\mathcal{L}(E, F)$ qui est un espace vectoriel de dimension finie. En munissant cet espace de la topologie d'espace métrique induite, par exemple, par la norme (1.2), on peut envisager le cas de figure où $\mathbf{a} \mapsto df(\mathbf{a})$ est continue.

Definition 1.1.

On dit que l'application $f : \Omega \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^1 si f est différentiable sur Ω et l'application $\mathbf{a} \mapsto df(\mathbf{a})$ est continue sur Ω . On notera $\mathcal{C}^1(\Omega, F)$ (ou simplement $\mathcal{C}^1(\Omega)$ si $F = \mathbb{C}$) l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur Ω à valeur dans F .

La notion de différentielle généralise la dérivation "usuelle", c'est-à-dire la dérivation par rapport à une seule variable. En effet dans le cas où $d = 1$, en appliquant la formule de Taylor à une fonction $f : I \rightarrow F$ définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, et en notant $t \in I$ l'unique variable dont dépend $f = f(t)$, on obtient

$$f(a + h) = f(a) + h \partial_t f(a) + h \epsilon(h) \quad (1.3)$$

pour tout $a \in I$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$. Ici $\partial_t f(a) \in F$ est la dérivée de $f(t)$ par rapport à t , c'est un vecteur dont les composantes sont formées des dérivées des composantes de f . La différentielle de f est donc simplement donnée par $df(a) \cdot h = h \partial_t f(a)$.

1.2 Cas particuliers importants

Des vérifications directes montrent la linéarité de la différentielle i.e. $d(f + \lambda g)(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a}) + \lambda dg(\mathbf{a})$ lorsque f et g sont différentiables en \mathbf{a} . Examinons par ailleurs le calcul de la différentielle dans deux cas particuliers.

Transformation affine

Considérons le cas où $E = \mathbb{R}^d, F = \mathbb{R}^p$ et $f : E \rightarrow F$ est application de la forme $f(\mathbf{x}) := A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$ où $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ et $A \in \mathbb{R}^{p \times d}$ est une matrice à coefficients réels. Un rapide calcul $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + A \cdot \mathbf{h}$ nous montre, par identification avec (1.1), que la différentielle est donnée par $df(\mathbf{x}) = A, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

Au passage dans le cas où $d = 1$, la matrice A se réduit à un unique vecteur colonne $A = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ et $f(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$, de sorte que l'on retrouve $\partial_t f(t) = \mathbf{a}$. Dans le cas où $p = 1$ on voit que $A = \mathbf{a}^\top$ pour un certain $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, et $df(\mathbf{x}) = A$.

Fonctionnelle quadratique

On considère également le cas où $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est de la forme $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + c$ où $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ et $c \in \mathbb{R}$. En cherchant à exprimer $f(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ et en développant l'expression, on obtient

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{x}) + ((\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) \mathbf{x} + \mathbf{b})^\top \mathbf{h} + |\mathbf{h}| \epsilon(\mathbf{h}) \\ \text{où } \epsilon(\mathbf{h}) &= \mathbf{h}^\top \mathbf{A} \mathbf{h} / |\mathbf{h}| \end{aligned} \quad (1.4)$$

Alors on a $|\epsilon(\mathbf{h})| \leq |\mathbf{A}| |\mathbf{h}| \rightarrow 0$ pour $\mathbf{h} \rightarrow 0$. Par comparaison avec (1.1) et (1.4) on reconnaît donc que $df(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = (\mathbf{b} + (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) \mathbf{x})^\top \mathbf{h}$ dans ce cas de figure.

Forme bilinéaire

Considérons maintenant une application bilinéaire continue $\beta : E_1 \times E_2 \rightarrow F$, où E_1, E_2 sont deux espaces vectoriels normés. Alors l'espace $E_1 \times E_2$ est naturellement muni de la norme $|\mathbf{h}| = (|\mathbf{h}_1|^2 + |\mathbf{h}_2|^2)^{1/2}$ pour $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) \in E_1 \times E_2$. Évaluons la différentielle de $\beta(\cdot, \cdot)$ en $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \in E_1 \times E_2$. On a

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{a} + \mathbf{h}) &= \beta(\mathbf{a}_1 + \mathbf{h}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{h}_2) \\ &= \beta(\mathbf{a}) + \beta(\mathbf{h}_1, \mathbf{a}_2) + \beta(\mathbf{a}_1, \mathbf{h}_2) + \beta(\mathbf{h}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Le dernier terme $\beta(\mathbf{h})$ admet une décroissance quadratique puisque, par continuité de la forme bilinéaire, $|\beta(\mathbf{h})| \leq |\beta| \cdot |\mathbf{h}_1| \cdot |\mathbf{h}_2| \leq |\beta| \cdot |\mathbf{h}|^2$ où $|\beta|$ désigne le module de continuité de β . Le terme linéaire dans (1.5) est donc donné par les 2eme et 3eme termes et on déduit que

$$d\beta(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \beta(\mathbf{h}_1, \mathbf{a}_2) + \beta(\mathbf{a}_1, \mathbf{h}_2). \quad (1.6)$$

1.3 Dérivées partielles

On se place ici dans le cas où $E = \mathbb{R}^d$, et on notera $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^d, j = 1 \dots d$ les vecteurs de la base canonique. Pour un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ on note $x_j = \mathbf{e}_j^\top \mathbf{x}$ ses coordonnées si bien que $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^d = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_d \mathbf{e}_d$. Alors, pour une fonction différentiable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ comme dans (1.1), en choisissant $\mathbf{h} = t \mathbf{e}_j$, l'existence de la différentielle implique l'existence de la limite

$$\partial_{x_j} f(\mathbf{a}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t \mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})}{t} = df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_j \quad (1.7)$$

appelée encore dérivée partielle de f en \mathbf{a} par rapport à la coordonnée x_j . La définition (1.7) montre assez clairement que si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)^n$ alors f admet des dérivées partielles et $\partial_{x_j} f \in \mathcal{C}^0(\Omega)^n$ pour tout $j = 1 \dots d$. Inversement on a le résultat suivant.

Lemme 1.2.

Si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et admet des dérivées partielles continues $\partial_{x_j} f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ pour tout $j = 1 \dots d$, alors f est différentiable sur Ω et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Démo:

Considérons tout d'abord un point $\mathbf{b} \in \Omega$ arbitraire et notons $\varphi(t) := f(\mathbf{b} + t \mathbf{e}_j)$. La définition des dérivées partielles implique $\partial_t \varphi(t) = \partial_{x_j} f(\mathbf{b} + t \mathbf{e}_j)$. Alors en écrivant $\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t \partial_t \varphi(\tau) d\tau$, on obtient l'identité

$$f(\mathbf{b} + t \mathbf{e}_j) - f(\mathbf{b}) = t \int_0^1 \partial_{x_j} f(\mathbf{b} + s t \mathbf{e}_j) ds \quad \forall f \in \mathcal{C}^1(\Omega). \quad (1.8)$$

Choisissons un $\mathbf{a} \in \Omega$ quelconque. Nous allons montrer que f est différentiable en \mathbf{a} avec $df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} f(\mathbf{a}) h_j$ pour $\mathbf{h} = h_1 \mathbf{e}_1 + \dots + h_d \mathbf{e}_d$. Posons $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}$ et $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_{j-1} + h_j \mathbf{e}_j$, $j = 1, \dots, d$ d'où $\mathbf{a}_d = \mathbf{a} + \mathbf{h}$. On a alors

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} f(\mathbf{a}) h_j \\ &= \sum_{j=1}^d f(\mathbf{a}_j) - f(\mathbf{a}_{j-1}) - \partial_{x_j} f(\mathbf{a}) h_j \\ &= \sum_{j=1}^d f(\mathbf{a}_{j-1} + h_j \mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a}_{j-1}) - \partial_{x_j} f(\mathbf{a}) h_j \\ &= |\mathbf{h}| \sum_{j=1}^d (h_j / |\mathbf{h}|) \int_0^1 (\partial_{x_j} f(\mathbf{a}_{j-1} + sh_j \mathbf{e}_j) - \partial_{x_j} f(\mathbf{a})) ds \end{aligned}$$

Notons $\epsilon(\mathbf{h})$ la somme à la dernière ligne ci-dessus, de sorte que le membre de droite prend la forme $|\mathbf{h}| \epsilon(\mathbf{h})$. On a bien $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{h}) = 0$ puisque $|\mathbf{a}_{j-1} + sh_j \mathbf{e}_j - \mathbf{a}| \leq |\mathbf{h}| \forall s \in [0, 1]$ et donc, par continuité des $\partial_{x_j} f$ en \mathbf{a} , pour tout $\delta > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|\mathbf{h}| < \eta \Rightarrow |\partial_{x_j} f(\mathbf{a}_{j-1} + sh_j \mathbf{e}_j) - \partial_{x_j} f(\mathbf{a})| \leq \delta \forall j = 1 \dots d$. De l'identité $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} f(\mathbf{a}) h_j + |\mathbf{h}| \epsilon(\mathbf{h})$ on déduit $df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} f(\mathbf{a}) h_j$ et comme chaque $\partial_{x_j} f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ cette dernière égalité implique la continuité de $\mathbf{a} \mapsto df(\mathbf{a})$. \square

Dérivées d'ordre supérieur

On peut bien sûr réitérer la définition de l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , ce qui nous amène à définir \mathcal{C}^k de façon récursive, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathcal{C}^k(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega), \partial_{x_j} \varphi \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega) \forall j = 1 \dots d\}. \quad (1.9)$$

L'espace $\mathcal{C}^k(\Omega)$ se présente alors comme l'ensemble des fonctions f admettant des dérivées partielles $\partial_{x_{i_1}} \dots \partial_{x_{i_q}} f$ d'ordre $q \leq k$ selon n'importe quel combinaison i_1, \dots, i_q . Comme précédemment, nous aurons parfois besoin de considérer des fonctions admettant un comportement régulier jusqu'au bord ce qui conduit, pour une portion du bord $\Gamma \subset \partial\Omega$, à définir

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) &:= \{\varphi|_\Omega \text{ tel que } \varphi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)\} \\ \mathcal{C}_{0,\Gamma}^k(\overline{\Omega}) &:= \{\varphi \in \mathcal{C}_{0,\Gamma}^{k-1}(\Omega), \partial_{x_j} \varphi \in \mathcal{C}_{0,\Gamma}^{k-1}(\Omega) \forall j = 1 \dots d\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Les fonctions appartenant à $\mathcal{C}_{0,\Gamma}^k(\overline{\Omega})$ sont supposées s'annuler sur Γ ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k . Dans le cas d'une dérivée partielle d'ordre supérieur, l'ordre dans lequel interviennent les différents opérateurs de dérivation n'a pas d'importance d'après le résultat suivant.

Lemme 1.3.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, on a $\partial_{x_j} \partial_{x_k} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(\mathbf{x})$ pour tout $j, k = 1 \dots d$, $\mathbf{x} \in \Omega$.

Démo:

Choisissons $j, k \in \{1, \dots, d\}$, $j \neq k$ et $\mathbf{a} \in \Omega$ arbitraires. En posant $\varphi(x_1, x_2) := f(\mathbf{a} + x_1 \mathbf{e}_j + x_2 \mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})$, on réduit le problème à démontrer que $\partial_{x_1} \partial_{x_2} \varphi(\mathbf{0}) = \partial_{x_2} \partial_{x_1} \varphi(\mathbf{0})$ avec $\varphi(\mathbf{0}) = 0$. En suivant le même argumentaire que pour établir (1.8), on a tout d'abord

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, 0) - \varphi(0, x_2) &= x_1 \int_0^1 \partial_{x_1} \varphi(sx_1, x_2) - \partial_{x_1} \varphi(sx_1, 0) ds \\ &= x_1 x_2 \int_0^1 \int_0^1 \partial_{x_2} \partial_{x_1} \varphi(sx_1, tx_2) dt ds \end{aligned}$$

Dans le calcul ci-dessus, nous avons d'abord appliqué une formule de Taylor au 1er ordre par rapport à x_1 , puis par rapport à x_2 . On peut procéder différemment en appliquant d'abord une formule de Taylor par rapport à x_2 , puis par rapport à x_1 , ce qui conduit à $\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, 0) - \varphi(0, x_2) = x_1 x_2 \int_0^1 \int_0^1 \partial_{x_1} \partial_{x_2} \varphi(s x_1, t x_2) ds dt$. En appliquant le théorème de Fubini par rapport à s, t , et en divisant par le facteur $x_1 x_2$, on aboutit à

$$\int_0^1 \int_0^1 \partial_{x_2} \partial_{x_1} \varphi(s x_1, t x_2) ds dt = \int_0^1 \int_0^1 \partial_{x_1} \partial_{x_2} \varphi(s x_1, t x_2) ds dt$$

pour tout $x_1, x_2 \neq 0$ suffisamment petit. Il reste à faire tendre x_1, x_2 vers 0. Puisque $\partial_{x_2} \partial_{x_1} \varphi(s x_1, t x_2) \rightarrow \partial_{x_2} \partial_{x_1} \varphi(\mathbf{0})$ et $\partial_{x_1} \partial_{x_2} \varphi(s x_1, t x_2) \rightarrow \partial_{x_1} \partial_{x_2} \varphi(\mathbf{0})$ lorsque $x_1, x_2 \rightarrow 0$, on obtient le résultat voulu par le théorème de convergence dominée. \square

Une dérivée partielle $\partial_{x_{i_1}} \dots \partial_{x_{i_k}} f$ est dite d'ordre k , et d'après le résultat qui précède, quitte à permuter des dérivées partielles, on peut supposer systématiquement que les indices sont rangés par ordre croissant $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$. On notera dans la suite

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} f &:= \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d} f \quad \text{avec } \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \\ &= \underbrace{\partial_{x_1} \dots \partial_{x_1}}_{\alpha_1 \text{ fois}} \underbrace{\partial_{x_2} \dots \partial_{x_2}}_{\alpha_2 \text{ fois}} \partial_{x_3} \dots \partial_{x_d} f \end{aligned}$$

Un vecteur d'entier $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ comme ci-dessus sera appelé par la suite un multi-indice et (au prix d'un léger abus de notation) on notera $|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ si bien que les dérivées partielles d'ordre k d'une fonction f sont donc les fonctions $\partial_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} f$ pour $|\boldsymbol{\alpha}| = k$. On sera amenés à considérer l'espace des fonctions admettant des dérivées partielles à tout ordre

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(\Omega) &:= \cap_{k \geq 0} \mathcal{C}^k(\Omega), \\ \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) &:= \cap_{k \geq 0} \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}), \\ \mathcal{C}_{0,\Gamma}^\infty(\overline{\Omega}) &:= \cap_{k \geq 0} \mathcal{C}_{0,\Gamma}^k(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Nous serons en particulier souvent amenés à manipuler des fonctions s'annulant ainsi que toutes leurs dérivées sur le bord tout entier, et également des fonctions à support borné (compact), c'est pourquoi nous poserons également

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) &:= \mathcal{C}_{0,\partial\Omega}^\infty(\overline{\Omega}) \\ \mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega) &:= \{\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \text{ supp}(\varphi) \text{ borné}\} \end{aligned}$$

Fonctions polynomiales

Les fonctions polynomiales fournissent un premier exemple de fonctions de plusieurs variables infiniment différentiables. Étant donné un multi-indice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ notons $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}$. Alors on a $\mathbb{P}_k(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ avec la définition

$$\mathbb{P}_k(\Omega) := \{\varphi|_\Omega, \varphi(\mathbf{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq k} a_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}, a_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{C}\}.$$

Notons $\boldsymbol{\alpha}! := \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d!$ et, si $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ est un autre multi-indice, convenons que $\boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{\beta}$ signifie $\alpha_j \geq \beta_j \forall j = 1 \dots d$. En guise d'exercice sur les dérivées partielles, on pourra s'amuser à vérifier que $\partial_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\alpha}! / (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})!$ si $\boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{\beta}$, et $\partial_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = 0$ sinon.

1.4 Fonctions composées

Le résultat suivant, connu sous le nom de "règle de la chaîne", permet d'obtenir la différentielle de fonctions composées.

Proposition 1.4.

Si $f : \Omega \rightarrow F$ est une application différentiable sur un ouvert $\Omega \subset E$, et $g : \Omega' \rightarrow G$ est une application différentiable sur un ouvert $\Omega' \subset F$ tel que $f(\Omega) \subset \Omega'$, alors l'application composée $g \circ f : \Omega \rightarrow G$ est différentiable sur Ω et on a

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(\mathbf{a}) &= dg(\mathbf{b}) \cdot df(\mathbf{a}) \\ \text{où } \mathbf{b} &= f(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Démo:

On a $g(\mathbf{b} + \mathbf{k}) = g(\mathbf{b}) + dg(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{k} + |\mathbf{k}| \eta(\mathbf{k})$ et $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}| \epsilon(\mathbf{h})$ avec $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \epsilon(\mathbf{h}) = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \eta(\mathbf{k}) = 0$. En combinant ces deux identités avec le choix $\mathbf{k}(\mathbf{h}) := df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}| \epsilon(\mathbf{h})$, on tire

$$\begin{aligned} g(f(\mathbf{a} + \mathbf{h})) &= g(f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}| \epsilon(\mathbf{h})) \\ &= g \circ f(\mathbf{a}) + dg(\mathbf{b}) \cdot (df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}| \epsilon(\mathbf{h})) + |\mathbf{k}(\mathbf{h})| \eta(\mathbf{k}(\mathbf{h})) \\ &= g \circ f(\mathbf{a}) + dg(\mathbf{b}) \cdot df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}| \delta(\mathbf{h}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

où $\delta(\mathbf{h}) := dg(\mathbf{b}) \cdot \epsilon(\mathbf{h}) + |\mathbf{k}(\mathbf{h})| \eta(\mathbf{k}(\mathbf{h}))/|\mathbf{h}|$. Pour démontrer le résultat il suffit de montrer que $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \delta(\mathbf{h}) = 0$. D'après la définition ci-dessus $|\mathbf{k}(\mathbf{h})| \leq (|df(\mathbf{a})| + |\epsilon(\mathbf{h})|)|\mathbf{h}| \rightarrow 0$ pour $\mathbf{h} \rightarrow 0$, d'où $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \eta(\mathbf{k}(\mathbf{h})) = 0$ et donc $|\eta(\mathbf{k}(\mathbf{h}))| \cdot |\mathbf{k}(\mathbf{h})|/|\mathbf{h}| \leq (|df(\mathbf{a})| + |\epsilon(\mathbf{h})|)|\eta(\mathbf{k}(\mathbf{h}))| \rightarrow 0$. On en tire finalement $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \delta(\mathbf{h}) = 0$ et donc le résultat voulu par identification du terme linéaire dans (1.11). \square

Corollaire 1.5.

Un \mathcal{C}^k -difféomorphisme d'un ouvert $\Omega \subset E$ dans un ouvert $\Omega' \subset F$ est une bijection $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ de classe \mathcal{C}^k sur Ω et dont l'inverse $f^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ est de classe \mathcal{C}^k sur Ω' . On a alors, pour tout $\mathbf{a} \in \Omega$,

$$df(\mathbf{a})^{-1} = d(f^{-1})(\mathbf{b}) \quad \text{où } \mathbf{b} := f(\mathbf{a}).$$

Démo:

Avec $g(\mathbf{x}) = f^{-1}(\mathbf{x})$, il suffit d'écrire que $g \circ f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ est d'appliquer la proposition précédente, ce qui donne $dg(\mathbf{b}) \cdot df(\mathbf{a}) = \text{Id}$. \square

Transformation affine

Dans le cas simple d'une application affine $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ définie par $\Phi(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$, celle-ci est inversible si et seulement si sa matrice \mathbf{A} est inversible, auquel cas $\Phi^{-1}(\mathbf{y}) := \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{b})$. Dans cette situation on aura $d\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ et $d\Phi^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1}$, et alors on retrouve bien ici que $d\Phi(\mathbf{x}) \cdot d\Phi^{-1}(\mathbf{y}) = \text{Id}$.

Fonction à valeur scalaire

Voyons comment la règle de la chaîne s'applique dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et $G = \mathbb{C}$ de sorte que $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une simple fonction d'une seule variable sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$

et à valeur complexe (alors que f est à valeur vectorielle). Notons t l'unique variable dont dépend $g \circ f = g \circ f(t)$. Vu (1.3), on doit avoir $df(a)h = h\partial_t f(a)$. En appliquant la règle de la chaîne, on obtient donc $d(g \circ f)(a)h = dg(\mathbf{b}) \cdot df(a)h = dg(\mathbf{b})(h\partial_t f(a)) = h dg(\mathbf{b}) \cdot \partial_t f(a)$. Comme par ailleurs $d(g \circ f)(a)h = h\partial_t(g \circ f)(a)$ on en tire finalement

$$\partial_t(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \cdot \partial_t f(a) \quad \forall a \in I.$$

Produit de fonctions

Considérons le cas $E = \mathbb{R}^d$ et $F = \mathbb{C}^n$ et où f_1, f_2 sont deux applications différentiables d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{C}^n . On souhaite calculer la différentielle de l'application $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(\mathbf{x}) := f_1(\mathbf{x})^\top f_2(\mathbf{x})$.

Soit l'application bilinéaire $\beta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{u}^\top \mathbf{v}$ et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ définie par $f(\mathbf{x}) := (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))$. Alors on a $g(\mathbf{x}) = \beta \circ f(\mathbf{x})$. Il est clair que $df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = (df_1(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}, df_2(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h})$ et, d'après (1.6), $d\beta(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{k} = \beta(\mathbf{b}_1, \mathbf{k}_2) + \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_1^\top \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1^\top \mathbf{b}_2$ où $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ et $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. La règle de la chaîne $dg(\mathbf{a}) = d\beta(\mathbf{b}) \cdot df(\mathbf{a})$ donne alors

$$\begin{aligned} dg(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} &= f_1(\mathbf{a})^\top df_2(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + (df_1(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h})^\top f_2(\mathbf{a}) \\ &= (f_1(\mathbf{a})^\top df_2(\mathbf{a}) + f_2(\mathbf{a})^\top df_1(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{h} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{C}^n, \end{aligned}$$

ce qui se lit encore $dg(\mathbf{a}) = f_1(\mathbf{a})^\top df_2(\mathbf{a}) + f_2(\mathbf{a})^\top df_1(\mathbf{a})$. Dans le cas où $n = 1$ et $f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, cette formule se réduit à $dg(\mathbf{a}) = f_1(\mathbf{a})df_2(\mathbf{a}) + f_2(\mathbf{a})df_1(\mathbf{a})$.

Régularité des fonctions composées

Revenons à la situation considérée à la proposition 1.4. La règle de la chaîne nous montre aussi que si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $g \in \mathcal{C}^1(\Omega')$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. On peut appliquer en cascade cette observation pour aboutir au corollaire suivant.

Corollaire 1.6.

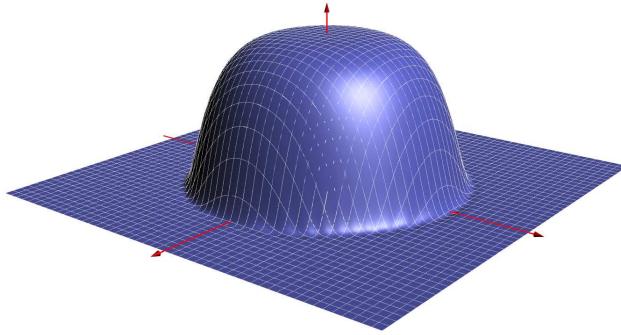
Sous les hypothèses de la proposition 1.4, si $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{C}^k(\Omega', \mathbb{C}^n)$ alors on a $g \circ f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{C}^n)$.

En particulier si g et f sont toutes deux de classe \mathcal{C}^∞ , alors la fonction composée $g \circ f$ sera elle-même de classe \mathcal{C}^∞ i.e. la composée de deux fonctions régulières est régulière.

Considérons le cas où $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(\mathbf{x}) := |\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + \cdots + x_d^2$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $g(t) = \exp(-1/(1-t))$ pour $t < 1$ et $g(t) = 0$ si $t \geq 1$. D'après l'exemple cité plus haut sur les fonctions polynomiales il est clair que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et, par ailleurs, c'est un exercice classique sur le prolongement des fonctions continues de vérifier que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. En appliquant le corollaire ci-dessus, on en déduit que la fonction composée $\varphi := cg \circ f$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, où le coefficient multiplicatif c est choisi comme suit

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= c \exp\left(-\frac{1}{1 - |\mathbf{x}|^2}\right) && \text{si } |\mathbf{x}| < 1, \\ \varphi(\mathbf{x}) &= 0 && \text{si } |\mathbf{x}| \geq 1, \\ \text{avec } 1/c &= \int_{B(0,1)} \exp(-1/(1 - |\mathbf{x}|^2)) d\mathbf{x} \end{aligned} \tag{1.12}$$

avec $B(0, 1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, |\mathbf{x}| < 1\}$ la boule unité (ouverte). Cette définition garantit que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ et $\text{supp}(\varphi) = \overline{B}(0, 1)$ où $\text{supp}(\varphi)$ est le support de la fonction φ i.e. le plus petit fermé K tel que $\varphi|_{\mathbb{R}^d \setminus K} = 0$. Notons par ailleurs que $\varphi(\mathbf{x}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \in B(0, 1)$. Comme on peut le voir sur l'image ci-dessous, la fonction φ consiste simplement en une "bosse" de classe \mathcal{C}^∞ à support localisé dans la boule unité.



Lemme 1.7.

Soient $K \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble compact, et $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné tel que $K \subset \mathcal{O}$. Alors il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle $\psi(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in K$ et $\psi(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$.

Démo:

L'ensemble $F := \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$ est fermé et $K \cap F = \emptyset$. Soit $\delta > 0$ tel que $4\delta = \inf\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{x} \in K, \mathbf{y} \in F\}$. Notons $\text{dist}(\mathbf{x}, K) := \inf_{\mathbf{y} \in K} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Alors l'application $\mathbf{x} \mapsto \text{dist}(\mathbf{x}, K)$ est continue car $|\text{dist}(\mathbf{x}, K) - \text{dist}(\mathbf{y}, K)| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, de sorte que l'ensemble $K_\eta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \text{dist}(\mathbf{x}, K) \leq \eta\}$ est un fermé borné vérifiant $K_\eta \subset \mathcal{O}$ pour tout $\eta < 4\delta$. En choisissant φ comme dans (1.12), vérifions que la fonction

$$\psi(\mathbf{x}) := \int_{K_\delta} \varphi_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \text{où} \quad \varphi_\delta(\mathbf{x}) := \delta^{-d} \varphi(\mathbf{x}/\delta), \quad (1.13)$$

répond au problème. Tout d'abord $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale. Un calcul simple montre que $\text{supp}(\varphi_\delta) \subset B(0, \delta)$ et que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$. Pour $\mathbf{x} \in K$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \setminus K_\delta$, on a $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \geq \text{dist}(\mathbf{y}, K) > \delta$, de sorte que $\mathbf{x} - \mathbf{y} \notin B(0, \delta)$, donc $\varphi_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$ et

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in K.$$

Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus K_{3\delta}$ et $\mathbf{y} \in K_\delta$, on a $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \text{dist}(\mathbf{x}, K) - \text{dist}(\mathbf{y}, K) \geq 3\delta - \delta = 2\delta$ de sorte que, dans ce cas $\mathbf{x} - \mathbf{y} \notin B(0, \delta)$ et $\varphi_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$. On en déduit que $\psi(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus K_{3\delta}$ et donc $\text{supp}(\psi) \subset K_{3\delta} \subset \mathcal{O}$. \square

1.5 Opérateurs différentiels

Les opérateurs que nous présentons en cette fin de chapitre sont d'un usage constant dans l'analyse des équations aux dérivées partielles.

Gradient

Étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ on considère une fonction à valeur scalaire $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ différentiable sur Ω . Sa différentielle est une application linéaire $df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ et il existe donc un vecteur à coefficients complexes $\nabla f(\mathbf{a}) \in \mathbb{C}^d$ tel que



$$df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \nabla f(\mathbf{a})^\top \mathbf{h} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.14)$$

Dans le cas où f à valeur scalaire est différentiable sur tout Ω , l'application $\nabla f : \mathbf{a} \mapsto \nabla f(\mathbf{a})$ est donc à valeur vectorielle, c'est un champ de vecteur. L'opérateur " ∇ " est appelé gradient. D'après le calcul du §1.4, on a

$$\nabla(fg)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})\nabla g(\mathbf{a}) + g(\mathbf{a})\nabla f(\mathbf{a}). \quad (1.15)$$

Le gradient admet une expression explicite en fonction des dérivées partielles : le gradient de $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$ en un point $\nabla f(\mathbf{a})$ étant un vecteur de \mathbb{C}^d par définition, et puisque $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\top + \cdots + \mathbf{e}_d\mathbf{e}_d^\top = \text{Id}$, on a

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{a}) &= \sum_{j=1}^d \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^\top \nabla f(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^d \mathbf{e}_j \nabla f(\mathbf{a})^\top \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^d \mathbf{e}_j df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^d \mathbf{e}_j \partial_{x_j} f(\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

On voit que le gradient est un vecteur dont les coordonnées dans la base \mathbf{e}_j sont les dérivées partielles $\partial_{x_j} f(\mathbf{a})$. Attention : l'expression (1.16) est vrai parce que les vecteurs \mathbf{e}_j sont fixes et ne dépendent pas du point \mathbf{a} en lequel est évalué le gradient. Une expression aussi simple n'est pas vrai dans un système de coordonnées où cette hypothèse n'est pas satisfaite (exemples : systèmes de coordonnées polaires, cylindriques, sphériques).

Lemme 1.8.

Considérons deux ouverts $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^d$, un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$, et une application $f \in \mathcal{C}^1(\Omega', \mathbb{C})$, on a la formule

$$\nabla(f \circ \Phi)(\mathbf{a}) = d\Phi(\mathbf{a})^\top \nabla f(\mathbf{b}) \quad \text{où} \quad \mathbf{b} = \Phi(\mathbf{a}).$$

Démo:

Appliquons simplement la règle de la chaîne à $f \circ \Phi$ ce qui donne $\nabla(f \circ \Phi)(\mathbf{a})^\top \mathbf{h} = d(f \circ \Phi)(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = df(\mathbf{b}) \cdot d\Phi(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \nabla f(\mathbf{b})^\top d\Phi(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$ avec $\mathbf{b} = \Phi(\mathbf{a})$. Puisque ceci est vrai pour \mathbf{h} , il reste à identifier. \square

Lemme 1.9.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert connexe et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ vérifiant $\nabla f(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$. Alors f est constante sur Ω , i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $f(\mathbf{x}) = \lambda$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$.

Démo :

Fixons un point $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. L'ensemble $\mathcal{O} = \{\mathbf{x} \in \Omega, f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ est clairement un ensemble fermé de Ω par continuité de f . Par ailleurs si $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$, alors il existe $\delta > 0$ telle que $B(\mathbf{x}, \delta) \subset \Omega$ et, en appliquant une formule de Taylor au 1er ordre, on a $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \int_0^1 (\mathbf{y} - \mathbf{x})^\top \nabla f(t\mathbf{y} + (1-t)\mathbf{x}) dt = f(\mathbf{x}_0)$ pour tout $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta)$, d'où l'on tire $B(\mathbf{x}, \delta) \subset \mathcal{O}$. Donc \mathcal{O} est un ouvert de Ω : il est à la fois ouvert, fermé et non vide dans Ω . Donc $\mathcal{O} = \Omega$ par connexité de Ω . \square

Divergence

Étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, on considère une application $\mathbf{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$ différentiable sur Ω , et on note $g_j := \mathbf{e}_j^\top \mathbf{g}(\mathbf{x})$ où les $\mathbf{e}_j, j = 1 \dots d$ forment la base canonique de \mathbb{R}^d . On définit alors l'opérateur divergence par la formule



$$\text{div}(\mathbf{g})(\mathbf{x}) := \text{tr}(d\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} g_j(\mathbf{x}). \quad (1.17)$$

Par ailleurs si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction à valeur scalaire différentiable sur Ω , alors $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})$ est encore un champ de vecteur différentiable. Puisque $\partial_{x_j}(fg_j) = f\partial_{x_j}g_j + g_j\partial_{x_j}f$, en sommant sur $j = 1 \dots d$ on obtient

$$\text{div}(f\mathbf{g})(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})\text{div}(\mathbf{g})(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})^\top \mathbf{g}(\mathbf{a}). \quad (1.18)$$

Laplacien

En combinant les opérateurs gradient et divergence, on obtient un nouvel opérateur différentiel, appelé le laplacien, et défini par



$$\Delta u := \text{div}(\nabla u) = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 u \quad \forall u \in \mathcal{C}^2(\Omega). \quad (1.19)$$

C'est un opérateur d'ordre 2 i.e. faisant intervenir des dérivées partielles du second ordre. Le laplacien est central dans de très nombreuses applications qui dépassent de très loin le seul champ de la physique mathématique.

1.6 Quelques EDPs classiques

Les opérateurs différentiels que nous avons introduits au paragraphe précédent sont les briques de base des EDPs les plus classiques. Passons maintenant en revue quelques-unes d'entre elles que nous prendrons comme des problèmes modèles tout au long de ce cours.

Nous considérerons un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et supposerons que les différentes fonctions entrant en jeu (u, f, \dots) sont "suffisamment régulières", notion intuitive pour le moment mais sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir longuement.

Équations elliptiques

Les équations elliptiques sont l'objet principal de ce cours. Du point de vue de la modélisation physique, elles font intervenir uniquement des variables d'espace. Étant donné une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, l'équation de Poisson permet de modéliser des systèmes physiques à l'équilibre et consiste à chercher $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

Poisson :

$$-\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega. \quad (1.20)$$

On se donne ensuite deux champs scalaires $\nu, c : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ et un champ de vecteur $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$, avec $\nu(\mathbf{x}) \geq 0$. La fonction $\nu(\mathbf{x})$ est appelé coefficient de diffusion, et le champ $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ est appelé vitesse de convection. L'équation de convection diffusion permet de modéliser les phénomènes

de transport d'un produit, avec absorption du produit au fil de son trajet. Elle consiste à chercher $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

Convection-diffusion : (1.21)

$$-\nu\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{sur } \Omega.$$

Une variante de l'équation ci-dessus, appelée équation de Helmholtz, permet de modéliser la propagation d'ondes en régime harmonique établi. Pour une constante $\omega > 0$ représentant la pulsation du régime sinusoïdal, et une fonction $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, l'équation de Helmholtz consiste à chercher $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

Helmholtz : (1.22)

$$-\Delta u - (\omega/c)^2 u = f \quad \text{sur } \Omega.$$

Problème bien posé et conditions au bord

A l'instar de ces premiers exemples d'EDP, les équations que nous étudierons dans ce cours seront exclusivement linéaires : elles se présentent sous la forme

$$\mathcal{A}(u) = f \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.23)$$

avec \mathcal{A} un opérateur aux dérivées partielles vérifiant $\mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \lambda \mathcal{A}(u_2)$ pour toutes fonctions u_1, u_2 et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$. Dans ce contexte, la fonction u dans (1.23) est l'*inconnue* du problème, la fonction f est appelée *second membre* et c'est une donnée du problème. On écrit traditionnellement l'EDP à gauche de l'égalité et le second membre à droite.

On dit qu'un problème associé à une équation aux dérivées partielles (ou un système d'EDP) est bien posée lorsqu'il y a existence et unicité de sa solution et que cette solution dépend continuellement du second membre.

Il n'est pas difficile de s'apercevoir que les équations (1.20), (1.21) et (1.22) ne *sont pas* bien posées. Par exemple, avec (1.22) dans le cas où $c : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une constante, si u est solution de l'équation alors $u + \alpha \exp(\omega x_1/c)$ est également solution de l'équation pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. On peut construire des exemples comme celui-ci dans le cas général (nous ne le ferons pas ici). Il manque donc un ingrédient à ces équations pour qu'elles soient bien posées.

Dans le contexte des équations elliptiques, les ingrédients manquants sont des conditions sur l'inconnue u prescrites sur le bord $\partial\Omega$. On parle de conditions aux limites. Elles doivent être imposées sur *tout* $\partial\Omega$ et pas juste sur une partie. Une EDP à laquelle on adjoint des conditions aux bord est appelée un problème aux limites et prend la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u) &= f && \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{B}(u) &= g && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Ici \mathcal{B} est un opérateur linéaire agissant sur les fonctions définies sur le bord, et $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une donnée au bord. Nous donnerons quelques exemples d'opérateurs aux limites \mathcal{B} classiques au prochain chapitre.

Dans tous les cas, il est très important de comprendre qu'une EDP seule n'est pas satisfaisante, et qu'il convient de lui adjoindre des conditions aux bord.

Équations d'évolution

Dans les exemples d'EDP que nous avons donné jusqu'ici, le domaine de calcul ne faisait intervenir que des variables d'espace. Voyons maintenant des équations dites d'évolution faisant également intervenir le temps. Le domaine de calcul est maintenant spatio-temporel et prend la forme $]0, T[\times \Omega$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine ouvert. On suppose ici que le temps initial d'étude de l'EDP est $t = 0$ et que le temps final est $t = T$.

Un premier exemple de problème d'évolution est donné par l'équation décrivant la température dans un volume Ω au cours du temps. Étant donné un coefficient de diffusion $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, et une fonction $f :]0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, cette équation consiste à trouver $u : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{aligned} & \text{Chaleur :} \\ & \partial_t u - \nu \Delta u = f \quad \text{sur }]0, T[\times \Omega. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Comme auparavant, il convient d'assortir cette équation de conditions imposées sur $\partial\Omega$ pour tout temps. Comme il s'agit par ailleurs d'une équation d'évolution que l'on peut voir comme une variante vectorielle abstraite d'une équation différentielle ordinaire par rapport au temps, il convient également d'adoindre une condition au temps initial $t = 0$. Mais nous resterons flou sur ces conditions aux limites et y reviendrons plus précisément plus tard.

L'équation (1.26) est d'ordre 1 par rapport au temps. On peut aussi considérer des équations d'ordre plus élevé en temps comme l'équation des ondes. Étant donné $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et $f :]0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, cette équation consiste à trouver $u : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{aligned} & \text{Ondes :} \\ & \partial_t^2 u(t) - c^2 \Delta u(t) = f(t) \quad \text{sur }]0, T[\times \Omega. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Chapitre 2

Géométrie

Nous avons vu comment définir une notion de régularité pour les fonctions de plusieurs variables. Nous allons développer une notion de régularité pour les domaines géométriques. Ceci nous permettra en particulier de détailler la notion de condition au bord que nous avions évoqué au paragraphe précédent. Nous énoncerons le théorème de Stokes, outil très important en analyse des EDPs. Puisque ce qui nous intéresse ici est la géométrie, on pourra considérer dans tout ce paragraphe que $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{R} . Le lecteur désireux d'approfondir les thèmes abordés dans ce chapitre pourra consulter [13, Chap.9],[5, chap.2-4] ou bien [2, chap.6 & 10].

2.1 Domaine à bord régulier

Rappelons qu'une matrice à coefficients réels $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$ est dite orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée ce qui équivaut à $U^\top U = \text{Id}$.

Definition 2.1.

Un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit de classe \mathcal{C}^k (resp. \mathcal{C}^∞ , resp. lipschitzien) si pour tout point du bord $\mathbf{a} \in \partial\Omega$, il existe une matrice orthogonale $U_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, une boule ouverte $B_{\mathbf{a}}$ centrée en \mathbf{a} , et une fonction $h_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k (resp. \mathcal{C}^∞ , resp. lipschitzienne) telle que, pour $\mathbf{x} = \mathbf{a} + U_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, z)$ avec $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}, z \in \mathbb{R}$, on a :

- $\mathbf{x} \in \partial\Omega \cap B_{\mathbf{a}} \iff z = h_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})$
- $\mathbf{x} \in \Omega \cap B_{\mathbf{a}} \iff z < h_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})$

Un ouvert est de classe \mathcal{C}^k si son bord peut être caractérisé localement en tout point comme le graphe d'une fonction de classe \mathcal{C}^k . Il est important de noter que, dans cette définition, la matrice $U_{\mathbf{a}}$ et la fonction $h_{\mathbf{a}}$ dépendent du point \mathbf{a} . Avec la définition ci-dessus, ce qui caractérise les ouverts de classe \mathcal{C}^k est une propriété de régularité locale, de sorte que ces domaines peuvent prendre globalement des formes très générales. Les domaines à bord polyédrique dont le bord comporte un coin anguleux, des singularités (exemple : un cube) ne sont pas de classe \mathcal{C}^1 mais sont lipschitziens. Précisons enfin que la définition 2.1 suppose que le domaine Ω est (localement) d'un seul côté de son bord, ce qui exclut de nombreux domaines tout à fait pertinents pour les applications.

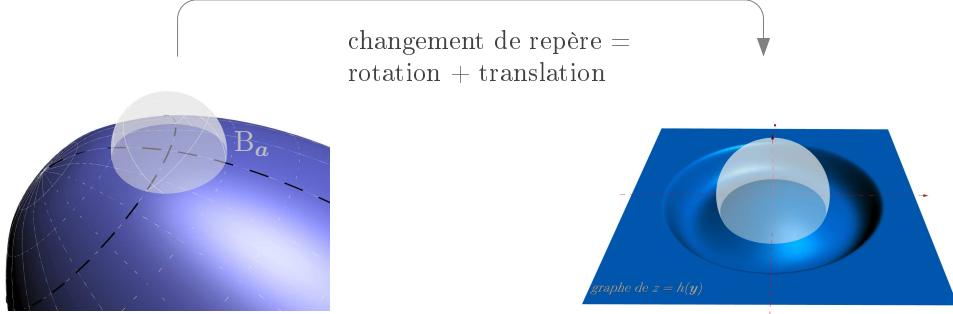


FIGURE 2.1: Un ouvert régulier est localement le graphe d'une fonction régulière

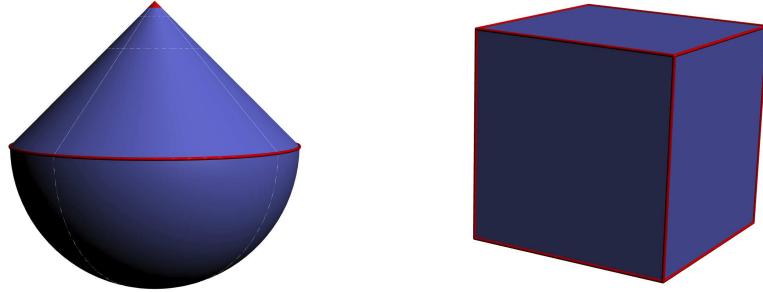


FIGURE 2.2: Deux exemples de domaines lipschitziens qui ne sont pas de classe \mathcal{C}^1 . Les parties singulières de la surface ont été colorées en rouge.

La définition précédente fournit, au voisinage de chaque point $\mathbf{a} \in \partial\Omega$ une paramétrisation du bord, grâce à l'application $\Phi_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ par la formule $\Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}) := \mathbf{a} + \mathbf{U}_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, h_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})) \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$. Ceci nous amène à introduire la terminologie suivante.

Definition 2.2.

Dans la suite on appellera carte locale de $\partial\Omega$ au voisinage de \mathbf{a} un couple $(B_{\mathbf{a}}, \Phi_{\mathbf{a}})$ avec $\Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}) := \mathbf{a} + \mathbf{U}_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, h_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}))$ comme dans la définition 2.1. On appellera atlas de $\partial\Omega$ une famille de cartes locales $\{B_{\mathbf{a}}, \Phi_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \mathcal{F}}$ telle que $\partial\Omega \subset \cup_{\mathbf{a} \in \mathcal{F}} B_{\mathbf{a}}$ pour un certain ensemble de points $\mathcal{F} \subset \partial\Omega$.

En considérant la famille $\{B_{\mathbf{a}}, \Phi_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \partial\Omega}$ on dispose d'emblée d'un atlas du bord (avec $\mathcal{F} = \partial\Omega$). Mais puisqu'on s'intéresse ici uniquement aux domaines bornés Ω , le bord $\partial\Omega$ est compact et $\{B_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \partial\Omega}$ est un recouvrement ouvert de $\partial\Omega$, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini. En pratique on pourra donc toujours supposer que l'atlas $\{B_{\mathbf{a}}, \Phi_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \mathcal{F}}$ comporte un nombre fini de carte locales $\text{card}(\mathcal{F}) < +\infty$, et on dira alors que l'atlas est fini.

Ce qui précède permet également de définir une notion de régularité pour les fonctions définies sur le bord d'un domaine régulier.

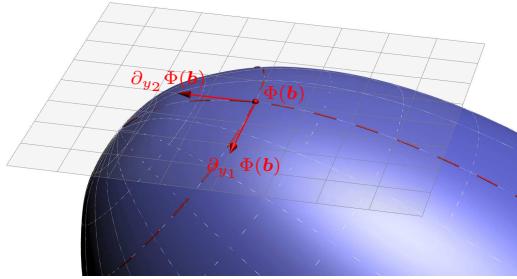
Definition 2.3.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe \mathcal{C}^p et F un espace vectoriel de dimension finie. On dira qu'une fonction $\varphi : \partial\Omega \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^k pour $k \leq p$ si et seulement si, pour toute carte locale (B_a, Φ_a) au voisinage de tout point $a \in \partial\Omega$, la fonction $\varphi \circ \Phi_a$ est de classe \mathcal{C}^k . On notera $\varphi \in \mathcal{C}^k(\partial\Omega, F)$.

En pratique on considérera le plus souvent $F = \mathbb{C}$ ou \mathbb{C}^d . On vérifie sans peine que les $\mathcal{C}^k(\partial\Omega, F)$ sont des espaces vectoriels.

2.2 Hyperplan tangent au bord

Considérons une carte locale (B, Φ) centrée en un point $a \in \partial\Omega$, et pour laquelle on notera $h : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ la paramétrisation associée. Par continuité de Φ , l'ensemble $D := \Phi^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^{d-1}$ vérifie $\Phi(D) \subset \partial\Omega$. Si l'on fixe un point $b \in D$, et que l'on définit des applications $\gamma_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d, j = 1 \dots d-1$ par $\gamma_j(t) := \Phi(b + t e_j)$ on voit que, lorsque t varie au voisinage de 0, le point $\gamma_j(t)$ décrit une courbe tracée sur $\partial\Omega$ qui passe par $\Phi(b)$ en $t = 0$, c'est-à-dire $\gamma_j(\mathbb{R}) \cap B \subset \partial\Omega$. La dérivée $\partial_t \gamma_j(0) = \partial_{y_j} \Phi(b)$ est un vecteur tangent à cette courbe et donc tangent à $\partial\Omega$ en $\Phi(b)$.



Les vecteurs $\{\partial_{y_j} \Phi(b)\}_{j=1}^{d-1}$ fournissent donc une famille de vecteurs tangents à $\partial\Omega$ en $\Phi(b)$. Notons $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^d, j = 1 \dots d$ les vecteurs colonnes de la matrice $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d]$, de sorte que $\Phi(\mathbf{y}) = a + y_1 \mathbf{u}_1 + \dots + y_{d-1} \mathbf{u}_{d-1} + h(y_1, \dots, y_{d-1}) \mathbf{u}_d$. On a donc

$$\begin{aligned} \partial_{y_j} \Phi(b) &= \mathbf{u}_j + \mathbf{u}_d \partial_{y_j} h(b) \\ &= \mathbf{U} \cdot (\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_d \partial_{y_j} h(b)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Les vecteurs $\mathbf{u}_j, j = 1, \dots, d-1$ étant indépendants en tant que vecteurs colonnes d'une matrice inversible, les vecteurs $\partial_{y_j} \Phi(b)$ sont donc eux-mêmes linéairement indépendants. Comme $\text{vect}\{\partial_{y_1} \Phi(b), \dots, \partial_{y_{d-1}} \Phi(b)\} = \text{Im}(d\Phi_b)$, l'hyperplan tangent à $\partial\Omega$ en $\Phi(b)$ est donc $\Phi(b) + \text{Im}(d\Phi_b)$.

Pour définir la notion de plan tangent, nous avons besoin de dériver la paramétrisation dans (2.1). Ceci ne pose pas de problème pour les domaines de classe \mathcal{C}^1 . Ceci se conçoit également pour les domaines lipschitzien grâce au théorème suivant que l'on admettra.

Proposition 2.4.

Soit une fonction $h : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément lipschitzienne c'est-à-dire vérifiant la condition $\sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}} |h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})| / |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < +\infty$. Alors h est différentiable presque partout et son gradient est essentiellement borné i.e. $|\nabla h| \in L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$.

2.3 Champ de vecteur normal

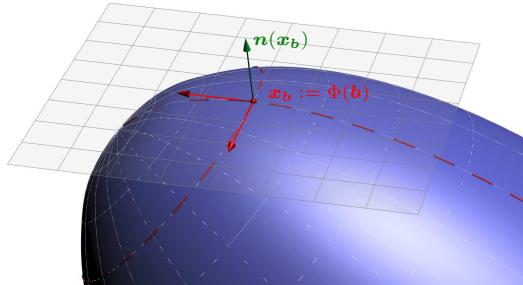
Le vecteur normal à $\partial\Omega$ en $\Phi(\mathbf{b})$ et l'un des deux vecteurs unitaires normaux à l'hyperplan tangent à $\partial\Omega$ en $\Phi(\mathbf{b})$. Il n'y a en effet que deux possibilités pour un tel vecteur normal : il pointe soit vers l'intérieur soit vers l'extérieur de Ω qui est localement d'un seul côté de son bord. Pendant tout ce cours, nous considérerons systématiquement un vecteur normal pointant vers l'extérieur de Ω dont on notera $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ la valeur qu'il prend en le point $\mathbf{x} \in \partial\Omega$.

Toujours en considérant une carte locale (B, Φ) centrée en un point $\mathbf{a} \in \partial\Omega$, avec $h : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ la paramétrisation associée, introduisons la fonction $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(\mathbf{y}, z) = z - h(\mathbf{y})$ pour tout $(\mathbf{y}, z) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^d$, puis $\Psi(\mathbf{x}) := \psi(U^\top(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$. Alors $\Psi(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$ et $\Psi(\Phi(\mathbf{y})) = 0 \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$ par construction. En appliquant la règle de la chaîne en un point $\mathbf{b} \in D := \Phi^{-1}(B)$ (proposition 1.4) et avec le lemme 1.8, il vient

$$0 = \nabla(\Psi \circ \Phi)(\mathbf{b}) = d\Phi(\mathbf{b})^\top \nabla\Psi(\mathbf{x}_b) \quad \text{où } \mathbf{x}_b := \Phi(\mathbf{b}) \quad (2.2)$$

On voit que $\nabla\Psi(\mathbf{x}_b)$ est orthogonal à tout vecteur de $\text{Im } d\Phi(\mathbf{b})$, de sorte que $\nabla\Psi(\mathbf{x}_b)$ est proportionnel au vecteur normal $\mathbf{n}(\mathbf{x}_b)$. D'après la définition du gradient, on a $\Psi(\mathbf{x}_b + \mathbf{k}) = \Psi(\mathbf{x}_b) + \nabla\Psi(\mathbf{x}_b)^\top \mathbf{k} + |\mathbf{k}| \epsilon(\mathbf{k})$ pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ donc, en choisissant $\mathbf{k} = t\nabla\Psi(\mathbf{x}_b)$ avec $t \rightarrow 0$, on obtient $\Psi(\mathbf{x}_b + t\nabla\Psi(\mathbf{x}_b)) = \Psi(\mathbf{x}_b) + t|\nabla\Psi(\mathbf{x}_b)|^2 + t\eta(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \eta(t) = 0$. On en déduit que $\Psi(\mathbf{x}_t) > \Psi(\mathbf{x}_b) = 0$ pour $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_b + t\nabla\Psi(\mathbf{x}_b)$ avec $t > 0$ suffisamment petit. Comme par ailleurs $\Psi(\mathbf{x}) > 0$ pour $\mathbf{x} \in B \setminus \Omega$ (car c'est la zone où $z > h(\mathbf{y})$), on en déduit finalement que $\nabla\Psi(\mathbf{x}_b)$ pointe vers l'extérieur de Ω d'où l'expression de la normale

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) := \frac{\nabla\Psi(\mathbf{x})}{|\nabla\Psi(\mathbf{x})|} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \cap B. \quad (2.3)$$



Avec la formule ci-dessus, on voit que quand Ω est de classe \mathcal{C}^k avec $k \geq 1$, le champ de vecteur $\mathbf{n} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe \mathcal{C}^{k-1} . En appliquant à nouveau la règle de la chaîne, puisque $\nabla\psi(\mathbf{y}, z) = \mathbf{e}_d - \nabla h(\mathbf{y})$, on en déduit que $\nabla\Psi(\mathbf{x}_b) = U \cdot \nabla\psi(\mathbf{b}, h(\mathbf{b})) = U \cdot (\mathbf{e}_d - \nabla h(\mathbf{b}))$. Par ailleurs, la matrice U étant orthogonale, on a $|U\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}|^2 \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$. Comme $\mathbf{e}_d^\top \nabla h(\mathbf{b}) = 0$ car $h(y_1, \dots, y_{d-1})$ ne dépend pas de y_d , on a $|\mathbf{e}_d - \nabla h(\mathbf{b})|^2 = 1 + |\nabla h(\mathbf{b})|^2$, et on obtient finalement

$$|\nabla\Psi(\mathbf{x}_b)|^2 = 1 + |\nabla h(\mathbf{b})|^2 \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{d-1}. \quad (2.4)$$

La quantité ci-dessus, qui interviendra à nouveau dans les paragraphes qui suivent, admet encore une expression simple en fonction de la différentielle de la paramétrisation Φ .

Lemme 2.5.

Si $\Phi : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ est définie par $\Phi(\mathbf{y}) := \mathbf{a} + \mathbf{U}(\mathbf{y}, h(\mathbf{y}))$ avec $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ une matrice orthogonale et $h : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne alors, pour presque tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$, on a

$$1 + |\nabla h(\mathbf{y})|^2 = \det(d\Phi(\mathbf{y})^\top d\Phi(\mathbf{y})).$$

Démo:

On démontre le résultat en un point \mathbf{y} où h est différentiable. Calculons tout d'abord $d\Phi(\mathbf{y})^\top d\Phi(\mathbf{y})$. Définissons $\phi : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ par $\phi(\mathbf{y}) := (\mathbf{y}, h(\mathbf{y}))$ si bien que $\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{a} + \mathbf{U} \cdot \phi(\mathbf{y})$ et, d'après la règle de la chaîne, on a $d\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{U} \cdot d\phi(\mathbf{y})$. Comme \mathbf{U} est orthogonale, $\mathbf{U}^\top \mathbf{U} = \text{Id}$ si bien que $d\Phi(\mathbf{y})^\top d\Phi(\mathbf{y}) = d\phi(\mathbf{y})^\top d\phi(\mathbf{y})$. En reprenant (2.1), on voit que les vecteurs colonnes de la matrice de $d\phi(\mathbf{y})$ sont donnés par $\partial_{y_j} \phi(\mathbf{y}) = \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_d \partial_{y_j} h(\mathbf{y})$. La matrice de cette différentielle est donc $d\phi(\mathbf{y}) = [\text{Id}, \nabla h(\mathbf{y})]^\top \in \mathbb{R}^{d \times (d-1)}$ ce qui fournit finalement

$$d\Phi(\mathbf{y})^\top d\Phi(\mathbf{y}) = \text{Id} + \nabla h(\mathbf{y}) \cdot \nabla h(\mathbf{y})^\top$$

Nous avons donc une matrice de la forme $\text{Id} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\top$ pour $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{d-1}$. Soit $\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{d-1}$ une base du sous-espace de \mathbb{R}^{d-1} orthogonal à \mathbf{v} . On a $(\text{Id} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\top) \mathbf{w}_j = \mathbf{w}_j, j = 2 \dots d-1$ et $(\text{Id} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\top) \mathbf{v} = (1 + |\mathbf{v}|^2) \mathbf{v}$. On conclut donc que $\text{Id} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\top$ admet $1 + |\mathbf{v}|^2$ comme valeur propre de multiplicité 1, et admet 1 comme valeur propre de multiplicité $d-2$. Le déterminant étant le produit des valeurs propres, on en déduit que $\det(\text{Id} + \mathbf{v} \mathbf{v}^\top) = 1 + |\mathbf{v}|^2$. Le choix $\mathbf{v} = \nabla h(\mathbf{y})$ termine la preuve. \square

2.4 Opérateurs de trace

Lorsque l'on considère un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^1 ainsi qu'une partie de son bord $\Gamma \subset \partial\Omega$, un opérateur de trace sur Γ est un opérateur qui fait correspondre à chaque fonction définie dans $\overline{\Omega}$ une fonction définie sur Γ . L'opérateur de trace le plus classique associe simplement à chaque fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ sa restriction à Γ

$$\begin{aligned} &\text{trace Dirichlet :} \\ &\varphi \mapsto \varphi|_\Gamma \end{aligned} \tag{2.5}$$

Il s'agit clairement d'un opérateur linéaire. On considère également fréquemment un opérateur qui fait correspondre à un champ de vecteur régulier $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^d)$ son flux sortant à travers le bord Γ ,

$$\begin{aligned} &\text{flux normal :} \\ &\mathbf{g} \mapsto \mathbf{n}^\top \mathbf{g}|_\Gamma \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ceci est encore un opérateur linéaire. La notion de flux sortant joue bien évidemment un rôle décisif dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques, ce qui explique que cet opérateur intervient souvent dans les EDPs classiques. On peut considérer le flux normal du gradient d'une fonction à valeur scalaire, ce qui conduit à la trace Neumann

$$\begin{aligned} &\text{trace Neumann :} \\ &\varphi \mapsto \partial_{\mathbf{n}} \varphi|_\Gamma \\ &\text{avec } \partial_{\mathbf{n}} \varphi := \mathbf{n}^\top \nabla \varphi|_{\partial\Omega} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dans la définition ci-dessus, nous avons introduit au passage la nouvelle notation " $\partial_n \varphi$ ". On peut combiner ces opérateurs de trace de base pour construire d'autres traces plus sophistiquées. Par exemple pour une fonction continue $\lambda \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$, on peut considérer la trace dite de Robin associée

$$\begin{aligned} & \text{trace Robin :} \\ & \varphi \mapsto \partial_n \varphi|_\Gamma + \lambda \varphi|_\Gamma \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.5 Intégrale de surface

Nous allons fréquemment avoir besoin d'intégrer une fonction sur $\partial\Omega$, en considérant des intégrales de la forme " $\int_{\partial\Omega} u d\sigma$ " où " $d\sigma$ " est une mesure de surface naturellement induite par la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$. Avant de définir ces intégrales de façon explicite, nous avons besoin d'un lemme technique.

Lemme 2.6.

Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble compact, et soit \mathcal{B} une famille finie de boules recouvrant cet ensemble $K \subset \cup_{B \in \mathcal{B}} B$. Alors il existe une famille de fonctions $\{\psi_B\}_{B \in \mathcal{B}}$, appelée partition de l'unité sur K subordonnée à \mathcal{B} , vérifiant $\text{supp}(\psi_B) \subset B$ et $\sum_{B \in \mathcal{B}} \psi_B(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in K$.

Démo:

L'ensemble $\mathcal{O} = \cup_{B \in \mathcal{B}} B$ est un ouvert vérifiant $K \subset \mathcal{O}$. D'après le lemme 1.7, il existe donc une fonction $\varphi' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi'(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in K$ et $\varphi'(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$.

Pour chaque boule $B \in \mathcal{B}$, notons $\mathbf{c}_B \in \mathbb{R}^d$ son centre et $r_B > 0$ son rayon de sorte que $B = B(\mathbf{c}_B, r_B)$. On pose ensuite $\varphi_B(\mathbf{x}) := \varphi((\mathbf{x} - \mathbf{c}_B)/r_B)$ où φ est la fonction construite avec (1.12), de sorte que $\varphi_B \in \mathcal{C}_0^\infty(B)$ et $\varphi_B(\mathbf{x}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \in B$. Remarquons maintenant que, puisque le support $\text{supp}(\varphi')$ est un compact $\subset \mathcal{O}$, il existe $\gamma > 0$ tel que la fonction $\varphi_K(\mathbf{x}) := \sum_B \varphi_B(\mathbf{x})$ vérifie $\varphi_K(\mathbf{x}) > \gamma \forall \mathbf{x} \in \text{supp}(\varphi')$ de sorte que les fonctions $\psi_B(\mathbf{x}) := \varphi'(\mathbf{x})\varphi_B(\mathbf{x})/\varphi_K(\mathbf{x})$ répondent au problème. \square

Considérons un atlas fini $(B, \Phi_B)_{B \in \mathcal{B}}$ de $\partial\Omega$, ce qui implique en particulier $\partial\Omega \subset \cup_{B \in \mathcal{B}} B$. Soit $\{\varphi_B\}_{B \in \mathcal{B}}$ une partition de l'unité sur $\partial\Omega$ subordonnée à \mathcal{B} . Alors l'intégrale d'une fonction $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ sur $\partial\Omega$ est définie par

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u d\sigma &:= \sum_{B \in \mathcal{B}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_B(\Phi_B(\mathbf{y})) \sqrt{1 + |\nabla h_B(\mathbf{y})|^2} d\mathbf{y} \\ \text{avec } u_B(\mathbf{x}) &:= \varphi_B(\mathbf{x})u(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

La fonction h_B est ici la paramétrisation du bord associée à (B, Φ_B) , comme dans la définition 2.1. La définition (2.9) vaut même pour le cas d'un domaine Ω lipschitzien puisqu'alors, en vertu de la proposition 2.4, $\mathbf{y} \mapsto |\nabla h_B(\mathbf{y})|$ est une fonction essentiellement bornée. Cette définition de l'intégrale sur le bord est bien valide car, comme le montre le résultat suivant, le membre de droite de (2.9) ne dépend pas du choix de l'atlas $(B, \Phi_B)_{B \in \mathcal{B}}$.

Proposition 2.7.

On considère une fonction $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$. Si $(B, \Phi_B)_{B \in \mathcal{B}}$ et $(B', \Phi_{B'})_{B' \in \mathcal{B}'}$ sont deux atlas, si $\{\varphi_B\}_{B \in \mathcal{B}}$ et $\{\varphi_{B'}\}_{B' \in \mathcal{B}'}$ sont des partitions de l'unité subordonnées à \mathcal{B} et \mathcal{B}' , alors en posant

$u_B := \varphi_B u$ et $u_{B'} := \varphi_{B'} u$ on a

$$\begin{aligned} & \sum_{B \in \mathcal{B}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_B(\Phi_B(\mathbf{y})) \sqrt{1 + |\nabla h_B(\mathbf{y})|^2} d\mathbf{y} \\ &= \sum_{B' \in \mathcal{B}'} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_{B'}(\Phi_{B'}(\mathbf{y})) \sqrt{1 + |\nabla h_{B'}(\mathbf{y})|^2} d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Démo:

Étant donnés $B \in \mathcal{B}$ et $B' \in \mathcal{B}'$, soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $u(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus B \cap B'$. En posant $\Upsilon := \Phi_B^{-1} \circ \Phi_{B'} : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$, on a $d\Phi_{B'}(\mathbf{y}') = d(\Phi_B \circ \Upsilon)(\mathbf{y}') = d\Phi_B(\mathbf{y}) \cdot d\Upsilon(\mathbf{y}')$ où $\mathbf{y} = \Upsilon(\mathbf{y}')$. De cela on tire

$$\begin{aligned} 1 + |\nabla h_B(\mathbf{y})|^2 &= \det(d\Phi_B(\mathbf{y})^\top d\Phi_B(\mathbf{y})) \\ &= \det(d\Phi_{B'}(\mathbf{y}')^\top d\Phi_{B'}(\mathbf{y}')) \cdot |\det(d\Upsilon(\mathbf{y}')^{-1})|^2 \\ &= (1 + |\nabla h_{B'}(\mathbf{y}')|^2) / |\det(d\Upsilon(\mathbf{y}'))|^2 \quad \text{pour } \mathbf{y} = \Upsilon(\mathbf{y}') \end{aligned} \quad (2.11)$$

Un calcul simple montre que Υ est une bijection affine associée à une matrice inversible. D'après le théorème de changement de variable dans les intégrales multiples (voir par exemple [16, Thm.10.9]), on a donc $\int_{\mathbb{R}^d} v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^d} v(\Upsilon(\mathbf{y}')) |\det d\Upsilon(\mathbf{y}')| d\mathbf{y}'$. En combinant ce changement de variable avec (2.11), on déduit

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(\Phi_B(\mathbf{y})) \sqrt{1 + |\nabla h_B(\mathbf{y})|^2} d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(\Phi_{B'}(\mathbf{y})) \sqrt{1 + |\nabla h_{B'}(\mathbf{y})|^2} d\mathbf{y} \\ & \quad \text{pour } \text{supp}(u) \subset B \cap B' \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pour conclure, considérons le cas général d'une fonction $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$. Pour $B \in \mathcal{B}$ et $B' \in \mathcal{B}'$ on pose $u_B := \varphi_B u$, $u_{B'} := \varphi_{B'} u$ et $u_{B,B'} := \varphi_B \varphi_{B'} u$. Il est clair que $\text{supp}(u_{B,B'}) \subset B \cap B'$. Puisque $\sum_{B \in \mathcal{B}} \varphi_B(\mathbf{x}) = 1$ pour $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, on a $u_{B'}(\Phi_{B'}(\mathbf{y}')) = \sum_{B \in \mathcal{B}} u_B(\Phi_{B'}(\mathbf{y}'))$ pour tout $\mathbf{y}' \in \mathbb{R}^{d-1}$. De même on a $u_B(\Phi_B(\mathbf{y})) = \sum_{B' \in \mathcal{B}'} u_{B,B'}(\Phi_B(\mathbf{y}))$. Puisque \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont finies on peut donc écrire

$$\begin{aligned} & \sum_{B' \in \mathcal{B}'} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_{B'}(\Phi_{B'}(\mathbf{y}')) \sqrt{1 + |\nabla h_{B'}(\mathbf{y}')|^2} d\mathbf{y}' \\ &= \sum_{B' \in \mathcal{B}'} \sum_{B \in \mathcal{B}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_{B,B'}(\Phi_{B'}(\mathbf{y}')) \sqrt{1 + |\nabla h_{B'}(\mathbf{y}')|^2} d\mathbf{y}' \\ &= \sum_{B \in \mathcal{B}} \sum_{B' \in \mathcal{B}'} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_{B,B'}(\Phi_B(\mathbf{y})) \sqrt{1 + |\nabla h_B(\mathbf{y})|^2} d\mathbf{y} \\ &= \sum_{B \in \mathcal{B}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_B(\Phi_B(\mathbf{y})) \sqrt{1 + |\nabla h_B(\mathbf{y})|^2} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

□

Convenons de dire qu'une fonction $u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable si et seulement si $\mathbf{y} \mapsto \varphi_B(\Phi_B(\mathbf{y}))u(\Phi_B(\mathbf{y}))$ est intégrable sur \mathbb{R}^{d-1} pour toute carte d'un atlas $(B, \Phi_B)_{B \in \mathcal{B}}$. Les arguments usuels de la théorie de la mesure montrent que l'intégrale (2.9) garde un sens si l'on suppose seulement u intégrable au sens de la mesure de surface (2.9).

2.6 Formule de Stokes

Nous allons maintenant énoncer le théorème de Stokes. Ce théorème sera d'un usage constant tout au long de ce cours car il s'agit de l'outil principal permettant de reformuler les EDPs sous une forme alternative, dite variationnelle, beaucoup plus commode pour l'analyse et la résolution numérique. Dans tout contexte faisant intervenir des EDPs, il est indispensable de bien comprendre comment utiliser le théorème de Stokes.

Théorème 2.8.

 Soit $\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 à support borné et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert lipschitzien dont on notera $\mathbf{n} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champ de vecteur normal au bord et dirigé vers l'extérieur de Ω . Alors on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{g}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}^\top \mathbf{n} d\sigma.$$

Nous admettrons ce résultat car la preuve s'avère assez élaborée. On pourra en trouver une démonstration par exemple dans [2, §6.2]. Voyons comment on utilise le théorème de Stokes en pratique. Tout d'abord, si $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ et $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^d)$ avec u ou \mathbf{g} à support borné, alors on peut appliquer le théorème de Stokes au champ de vecteur $u\mathbf{g}$. Comme par ailleurs $\operatorname{div}(u\mathbf{g}) = u \operatorname{div}(\mathbf{g}) + \mathbf{g}^\top \nabla u$ d'après (1.18), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\mathbf{g}) + \mathbf{g}^\top \nabla u d\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} u \mathbf{g}^\top \mathbf{n} d\sigma \\ \forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}), \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^d). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Cette formule est une généralisation multi-dimensionnelle de la formule d'intégration par parties quand on intègre sur un intervalle de \mathbb{R} . Cette manière de ré-écrire la formule de Stokes est souvent appelée formule de Green. Notons que si $u \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ de sorte que $u = 0$ sur le bord, ou bien $\mathbf{g} \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^d)$ de sorte que $\mathbf{g} = 0$ sur le bord, alors le terme de bord ci-dessus disparaît. En particulier

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\mathbf{g}) + \mathbf{g}^\top \nabla u d\mathbf{x} &= 0 \\ \forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}), \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^d). \end{aligned} \tag{2.14}$$

On considère également souvent le cas où $\mathbf{g} = \nabla v$ pour un certain $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ à valeur scalaire. On a alors $\operatorname{div}(u\nabla v) = u\Delta v + \nabla u^\top \nabla v$ d'où l'on tire finalement, en appliquant le théorème de Stokes,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u\Delta v d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \nabla u^\top \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u \partial_{\mathbf{n}} v d\sigma \\ \forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}), \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^2(\overline{\Omega}, \mathbb{C}). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dans les formules ci-dessus, on voit apparaître naturellement les opérateurs de trace introduits au §2.4. De même que ci-dessus, si $u \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ ou bien $v \in \mathcal{C}_0^2(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$, alors le terme de bord ddans la formule ci-dessus disparaît.

Chapitre 3

Analyse hilbertienne

L'analyse Hilbertienne joue un rôle majeur dans l'étude des EDPs linéaires, car elle offre un cadre théorique généralisant à la dimension infinie nombre de notions d'algèbre linéaire valables dans \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n . Il y a cependant une différence fondamentale par rapport au cas de la dimension finie : dans les espaces de Hilbert toutes les normes ne sont pas équivalentes. Ceci explique l'importance de la topologie quand on travaille dans ces espaces. Le lecteur désireux d'approfondir les thèmes abordés dans ce chapitre pourra consulter [17, chap.4], [4, chap.5] ou [3, chap.2].

3.1 Définitions et résultats élémentaires

Sur un \mathbb{C} -espace vectoriel H , une application continue $\ell : H \rightarrow \mathbb{C}$ sera dite anti-linéaire si elle vérifie la condition suivante : pour tout $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\ell(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) = \ell(\mathbf{u}) + \bar{\lambda}\ell(\mathbf{v}).$$

Une forme $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ sera dite sesquilinear si elle est linéaire par rapport à sa première variable et anti-linéaire par rapport à sa seconde variable, c'est-à-dire : pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned} i) \quad & a(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{w}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ ii) \quad & a(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \bar{\lambda} a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Definition 3.1.

Un \mathbb{C} -espace vectoriel H est dit pré-hilbertien si il est muni d'une forme sesquilinear $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ (appelée produit scalaire) qui, en plus de (3.1), vérifie les conditions suivantes : pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$,

- i) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$
- ii) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}_+$
- iii) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = 0$.

Une forme sesquilinear vérifiant les trois conditions de la définition ci-dessus est dite symétrique définie positive. Comme conséquence immédiate de cette définition, on voit que l'application $\mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est linéaire pour tout $\mathbf{v} \in H$. On a de plus $(0, \mathbf{v}) = 0$, et $(\mathbf{u}, \mathbf{w} + \lambda\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \bar{\lambda}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Le produit scalaire étant défini, on considère également :

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}. \tag{3.2}$$

Lemme 3.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}.$$

Démo :

Posons $A = \|\mathbf{u}\|^2$, $B = |(\mathbf{u}, \mathbf{v})|$ et $C = \|\mathbf{v}\|^2$. Soit également $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = 1$ et $\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = B$. Alors pour tout $r \in \mathbb{R}$ on a $\|\mathbf{u} - \alpha r \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} - \alpha r \mathbf{v}, \mathbf{u} - \alpha r \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - r\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - r\bar{\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + r^2\|\mathbf{v}\|^2 = A - 2rB + Cr^2 \geq 0$. Si $C = 0$ alors l'inégalité annoncée est trivialement vérifiée puisqu'alors $\mathbf{v} = 0$. Sinon on prend $r = B/C$ et on obtient $B^2 \leq AC$. \square

L'application (3.2) vérifie bien $\|\mathbf{u}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = 0$ et $\|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$. Le résultat suivant montre qu'elle vérifie en outre systématiquement l'inégalité triangulaire si bien qu'il s'agit d'une norme.

Lemme 3.3 (Inégalité triangulaire).

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}.$$

Démo :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\Re e\{(\mathbf{u}, \mathbf{v})\} + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2. \end{aligned}$$

\square

Corollaire 3.4.

l'application $\mathbf{u} \mapsto \|\mathbf{u}\|$ est continue.

Démo :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}' + \mathbf{u}'\| &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\| + \|\mathbf{u}'\| \Rightarrow \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{u}'\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|, \text{ et de même } \|\mathbf{u}'\| - \|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\| \text{ de sorte que finalement } ||\mathbf{u}\| - \|\mathbf{u}'|| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|. \end{aligned} \quad \square$$

L'application $\mathbf{u}, \mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ définit une distance sur \mathbf{H} . Un espace préhilbertien est donc un cas particulier d'espace métrique. Rappelons qu'un espace métrique est dit complet lorsque toute suite de Cauchy (pour cette métrique) converge.

Definition 3.5.

Un espace pré-hilbertien \mathbf{H} muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) est appelé un espace de Hilbert si il est complet pour la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire.

Exemple 1 \mathbb{C}^n muni du produit scalaire $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := u_1\bar{v}_1 + \cdots + u_n\bar{v}_n$ pour tout $\mathbf{u} = (u_j)_{j=1}^n, \mathbf{v} = (v_j)_{j=1}^n$ est un Hilbert.

Exemple 2 Supposons donnés $\mathbf{H}_j, j = 1, \dots, n$ espaces de Hilbert, chacun muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}_j}$. Alors l'espace produit $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \times \cdots \times \mathbf{H}_n$ est un Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)_{\mathbf{H}_1} + \cdots + (\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n)_{\mathbf{H}_n}$ pour $\mathbf{u} = (u_j)_{j=1}^n \in \mathbf{H}$ et $\mathbf{v} = (v_j)_{j=1}^n \in \mathbf{H}$.

Exemple 3 En notant I un intervalle de \mathbb{R} , l'espace $L^2(I)$ des fonctions de carré intégrable (modulo l'égalité presque partout au sens de la mesure de Lebesgue) est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire $f, g \mapsto \int_I f(t)\bar{g}(t)dt$.

Exemple 4 $\mathcal{C}^0(\bar{\mathbb{I}})$ n'est pas un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire $f, g \mapsto \int_{\mathbb{I}} f(t) \bar{g}(t) dt$, car il n'est pas complet pour la norme associée.

3.2 Continuité des applications multi-linéaires

Nous examinons ici un critère permettant de montrer facilement la continuité de certaines applications rencontrées couramment dans la théorie variationnelle des EDPs. Étant donnés des espaces vectoriels $F, E_j, j = 1, \dots, n$, nous dirons qu'une application $\Phi : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ est multi-linéaire/antilinéaire si elle est linéaire ou antilinéaire par rapport à chacune de ses variables c'est-à-dire que, pour toute pour toute famille $\mathbf{u}_j \in E_j, j \neq p$, l'application $\mathbf{v} \mapsto \Phi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{p-1}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_n)$ est soit linéaire soit antilinéaire. On a le critère de continuité général suivant.

Proposition 3.6.

Étant donnés des espaces vectoriels $F, E_j, j = 1 \dots n$ munis des normes $\|\cdot\|_F$ et $\|\cdot\|_{E_j}$, soit $\Phi : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ une application multi-linéaire/antilinéaire. Alors $\Phi : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ est continue si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\Phi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)\|_F \leq C \|\mathbf{u}_1\|_{E_1} \dots \|\mathbf{u}_n\|_{E_n} \quad \forall \mathbf{u}_j \in E_j, j = 1 \dots n. \quad (3.3)$$

Démo:

Supposons dans un premier temps que Φ est continue. Par définition de la continuité en $(0, \dots, 0)$, on a $\|\Phi(\mathbf{v})\|_F < 1$ dès que $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ vérifie $\|\mathbf{v}\|^2 := \|\mathbf{v}_1\|_{E_1}^2 + \dots + \|\mathbf{v}_n\|_{E_n}^2 < \rho^2$ pour un $\rho > 0$ assez petit. Pour tout $\mathbf{u}_j \in E_j, j = 1 \dots n$, choisissons $\mathbf{v}_j := (\rho \mathbf{u}_j) / (\sqrt{2n} \|\mathbf{u}_j\|_{E_j})$ et notons $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, de sorte que $\|\mathbf{v}_j\|_{E_j}^2 = \rho^2 / (2n)$ et $\|\mathbf{v}\|^2 \leq \rho^2 / 2 < \rho^2$. On a donc $\|\Phi(\mathbf{v})\|_F < 1$ et, par multi-linéarité, on tire $\|\Phi(\mathbf{u})\|_F (\rho / \sqrt{2n})^n / (\|\mathbf{u}_1\|_{E_1} \dots \|\mathbf{u}_n\|_{E_n}) < 1$ c'est à dire

$$\|\Phi(\mathbf{u})\|_F < (\sqrt{2n}/\rho)^n \|\mathbf{u}_1\|_{E_1} \dots \|\mathbf{u}_n\|_{E_n}.$$

Supposons maintenant (3.3) vérifié, et montrons la continuité de Φ en $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ arbitraire. On a $\Phi(\mathbf{a}) - \Phi(\mathbf{u}) = \sum_{j=1 \dots n} \Phi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{a}_j - \mathbf{u}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$ pour tout $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, d'où l'on tire

$$\|\Phi(\mathbf{a}) - \Phi(\mathbf{u})\|_F \leq C \sum_{j=1}^n \|\mathbf{a}_j - \mathbf{u}_j\|_{E_j} \prod_{k \neq j} \max(\|\mathbf{a}_k\|_{E_k}, \|\mathbf{u}_k\|_{E_k}) \quad (3.4)$$

grâce à (3.3). Soit $\epsilon > 0$. Si $\mathbf{u}_j \in E_j$ vérifie $\|\mathbf{u}_j - \mathbf{a}_j\|_{E_j} \leq \delta$ avec $\delta \leq 1$, on a $\|\Phi(\mathbf{a}) - \Phi(\mathbf{u})\|_F < C' \delta$ où $C' := n \prod_{j=1}^n (1 + \|\mathbf{a}_j\|_{E_j})$. En choisissant $\delta = \min(1, \epsilon/C')$, on a donc $\max_{j=1 \dots n} \|\mathbf{a}_j - \mathbf{u}_j\|_{E_j} \leq \delta \Rightarrow \|\Phi(\mathbf{a}) - \Phi(\mathbf{u})\|_F < \epsilon$ ce qui démontre la continuité en \mathbf{a} . \square

L'existence d'une constante $C > 0$ satisfaisant la condition (3.3) est équivalente à la condition suivante

$$\|\Phi\| := \sup_{\mathbf{u}_j \in E_j \setminus \{0\}, j=1 \dots n} \frac{\|\Phi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)\|_F}{\|\mathbf{u}_1\|_{E_1} \dots \|\mathbf{u}_n\|_{E_n}} < +\infty.$$

La quantité $\|\Phi\|$ définie ci-dessus, appelée module de continuité de Φ , est la meilleure constante possible pour laquelle (3.3) est vrai. Voyons comment le critère de continuité de la proposition 3.6 se traduit sur des cas simples.

 **Corollaire 3.7.**

Soient E et F deux espaces vectoriels munis de normes notées $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

- i) une forme linéaire (resp. antilinéaire) $\ell : E \rightarrow \mathbb{C}$ est continue si et seulement si il existe $C > 0$ telle que $|\ell(\mathbf{u})| \leq C\|\mathbf{u}\|_E \forall \mathbf{u} \in E$.
- ii) une forme bilinéaire (resp. sesquilinear) $a(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est continue si et seulement si il existe $C > 0$ telle que $|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C\|\mathbf{u}\|_E\|\mathbf{v}\|_E \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$.
- iii) une application linéaire $A : E \rightarrow F$ est continue si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que $\|A(\mathbf{u})\|_F \leq C\|\mathbf{u}\|_E \forall \mathbf{u} \in E$.

Les critères de continuité ci-dessus seront d'un usage constant dans la suite. On voit par exemple grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz que, pour tout élément $\mathbf{v} \in H$ d'un Hilbert, l'application linéaire $\mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et l'application antilinéaire $\mathbf{u} \mapsto (\mathbf{v}, \mathbf{u})$ sont toutes deux continues, de module de continuité égal à $\|\mathbf{v}\|$.

Rappelons qu'un sous-ensemble $E' \subset E$ d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est dit dense si, pour tout $\mathbf{x} \in E$, il existe une suite $\mathbf{x}_k \in E'$, $k \geq 0$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_E = 0$. Le résultat suivant montre que les applications multi-linéaires/antilinéaires n'ont besoin d'être spécifiées que sur des sous-espaces denses pour être bien définies partout.

Proposition 3.8.

Soient E, F deux espaces vectoriels munis des normes $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F$. On suppose $(F, \|\cdot\|_F)$ complet. Soit $\Phi' : E' \rightarrow F$ une application linéaire (resp. antilinéaire) continue où $E' \subset E$ est un sous-ensemble dense pour $\|\cdot\|_E$. Alors il existe une unique application $\Phi : E \rightarrow F$ linéaire (resp. antilinéaire) continue prolongeant Φ' c'est-à-dire satisfaisant

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi'(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in E'.$$

Démo :

Pour tout $\mathbf{x} \in E$ choisissons une suite $\mathbf{x}_k \in E'$, $k \geq 0$ vérifiant $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_E = 0$. Quitte à prendre k suffisamment grand, on peut supposer $\|\mathbf{x}_k\|_E \leq 2\|\mathbf{x}\|_E$. On a $\|\Phi'(\mathbf{x}_k) - \Phi'(\mathbf{x}_l)\|_F \leq \|\Phi'\|\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\|_E$ si bien que la suite $(\Phi'(\mathbf{x}_k))_{k \geq 0}$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|_F$ et converge donc puisque F est complet. On pose alors

$$\Phi(\mathbf{x}) := \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi'(\mathbf{x}_k). \tag{3.5}$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la suite (\mathbf{x}_k) convergeant vers \mathbf{x} . En effet si $\mathbf{y}_k \in E'$, $k \geq 0$ est une autre suite convergeant vers \mathbf{x} , on aura $\|\Phi'(\mathbf{x}_k) - \Phi'(\mathbf{y}_k)\|_F \leq \|\Phi'\|\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|_E$ pour k suffisamment grand, de sorte que $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi'(\mathbf{x}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi'(\mathbf{y}_k)$.

Le caractère linéaire (resp. antilinéaire) de Φ provient de la linéarité de la limite et du fait que Φ' est elle-même linéaire (resp. antilinéaire). Pour démontrer que Φ est continue, il suffit d'écrire (3.3) pour $\mathbf{x}_k \in E'$ et de faire $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x} \in E$ en utilisant (3.5). Enfin un tel prolongement continu Φ de Φ' est unique, car si Ψ est un autre prolongement continu de Φ' vérifiant les mêmes propriétés alors $\Phi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in E'$, et donc $\Phi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in E$ par continuité et densité de E' dans E . \square

3.3 Projection sur un sous-espace fermé

Definition 3.9.

Un sous-ensemble $M \subset H$ d'un espace de Hilbert est un sous-espace vectoriel si pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}$ on a $\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \in M$.

La norme $\| \cdot \|$ sur H associée au produit scalaire induit une norme sur M . Si M est fermé pour cette norme, alors il est complet (un fermé dans un complet est lui-même complet), et c'est donc un sous-espace qui est lui-même un espace de Hilbert (pour le produit scalaire induit).

Théorème 3.10.

Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace fermé non vide. Alors pour tout $\mathbf{u} \in H$ il existe un unique $\mathbf{f} \in F$ tel que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{f}\| = \min_{\mathbf{v} \in F} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Démo :

A l'aide de calculs élémentaires, on montre facilement l'identité suivante (dite identité du trapèze) :

$$\|\mathbf{w} + \mathbf{w}'\|^2 + \|\mathbf{w} - \mathbf{w}'\|^2 = 2\|\mathbf{w}\|^2 + 2\|\mathbf{w}'\|^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{y} \in H. \quad (3.6)$$

Notons $\delta := \inf_{\mathbf{v} \in F} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Prenons $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in F$ et appliquons (3.6) avec $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ et $\mathbf{w}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}'$. On obtient $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2 = 2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}'\|^2 - \|\mathbf{v} + \mathbf{v}' - 2\mathbf{u}\|^2$. Si $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in F$ vérifient tous les deux $\|\mathbf{u} - \mathbf{f}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{f}'\| = \delta$ alors on obtient

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f}'\|^2 = 4\delta^2 - 4\underbrace{\|\mathbf{u} - (\mathbf{f} + \mathbf{f}')/2\|^2}_{\geq \delta^2} \leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$

d'où $\mathbf{f} = \mathbf{f}'$. Il y a donc unicité de $\mathbf{f} \in F$ vérifiant $\|\mathbf{u} - \mathbf{f}\| = \delta$. Vérifions qu'un tel \mathbf{f} existe.

Soit $\mathbf{v}_k \in F$, $k \geq 0$ une suite telle que

$$\|\mathbf{v}_k - \mathbf{u}\|^2 \leq \inf_{\mathbf{v} \in F} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 + 1/k^2 \quad (3.7)$$

De ceci on tire en particulier que $\|\mathbf{v}_k - \mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{w} - \mathbf{u}\|^2 \leq 1/k^2$ pour tout $\mathbf{w} \in F$. Montrons que la suite (\mathbf{v}_k) est de Cauchy pour la norme $\| \cdot \|$. On applique pour cela (3.6) à $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}_m$ et $\mathbf{w}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}_k$ et, puisque $\mathbf{h} = (\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_m)/2 \in F$, on en tire

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_k\|^2 &\leq 2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_m\|^2 + 2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_k\|^2 - 4\|\mathbf{u} - (\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_k)/2\|^2 \\ &\leq 2(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_m\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{h}\|^2) + 2(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_k\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{h}\|^2) \\ &\leq 2/k^2 + 2/m^2. \end{aligned}$$

Donc (\mathbf{v}_k) est de Cauchy et comme F est complet, cette suite converge dans F vers une limite $\mathbf{f} \in F$. Par continuité, on peut alors passer à la limite dans (3.7) pour $k \rightarrow \infty$, et on en tire $\|\mathbf{f} - \mathbf{u}\| \leq \inf_{\mathbf{v} \in F} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$. \square

Corollaire 3.11.

Avec les hypothèses du théorème précédent, on a $(\mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in F$.

Démo :

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a $\|\mathbf{u} - \mathbf{f} + t\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{f}\|^2 + 2t \operatorname{Re}\{(\mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{v})\} + t^2 \|\mathbf{v}\|^2$. Puisque $\mathbf{f} - t\mathbf{v} \in F$, la propriété de minimisation satisfaite par \mathbf{f} implique $\|\mathbf{u} - \mathbf{f}\|^2 \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{f} + t\mathbf{v}\|^2$. On en tire alors $2t \operatorname{Re}\{(\mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{v})\} + t^2 \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$. En divisant cette dernière inégalité par $|t|$, et en faisant $t \rightarrow 0$, $t > 0$ on en tire : $\operatorname{Re}\{(\mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{v})\} \geq 0$. De même, en faisant $t \rightarrow 0$, $t < 0$ on obtient $\operatorname{Re}\{(\mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{v})\} \leq 0$. On a donc finalement

$$\operatorname{Re}\{(\mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{v})\} = 0.$$

ceci vaut pour tout $\mathbf{v} \in F$. On peut donc considérer $i\mathbf{v}$ au lieu de \mathbf{v} (où $i = \sqrt{-1}$), on obtient $0 = \Re e\{(\mathbf{u} - \mathbf{f}, i\mathbf{v})\} = \Re e\{-i(\mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{v})\} = \Im m\{(\mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{v})\} = 0$. Finalement on conclut que $(\mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{v}) = 0$. \square

Rappelons que si E, F sont deux sous-espaces d'un espace vectoriel H alors on dit qu'il sont en somme directe lorsque $E \cap F = \{0\}$. On convient alors d'écrire $E \oplus F$ au lieu de $E + F$.

Proposition 3.12.

Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) . On note $F^\perp := \{\mathbf{u} \in H, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \forall \mathbf{v} \in F\}$. Alors F^\perp est lui-même un sous-espace fermé et on a $H = F \oplus F^\perp$.

Démo :

Il est élémentaire de vérifier que F^\perp est un espace vectoriel. Étant donné un $\mathbf{v} \in F$, notons $\varphi_{\mathbf{v}} : H \rightarrow \mathbb{C}$ l'application linéaire $\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) := (\mathbf{u}, \mathbf{v})$. L'application $\varphi_{\mathbf{v}}$ est continue d'après le corollaire 3.7 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, si bien que $\text{Ker}(\varphi_{\mathbf{v}}) = \varphi_{\mathbf{v}}^{-1}(\{0\})$ est fermé. Puisque $F^\perp = \bigcap_{\mathbf{v} \in F} \text{Ker}(\varphi_{\mathbf{v}})$ et que toute intersection de fermés est fermée, on en déduit que F^\perp est fermé.

Si $\mathbf{u} \in F \cap F^\perp$ alors $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ d'après la définition de F^\perp , d'où $\mathbf{u} = 0$, c'est-à-dire $F \cap F^\perp = \{0\}$. Autrement dit F et F^\perp sont en somme directe.

Enfin si \mathbf{u} désigne un élément arbitraire de H , soit $\mathbf{f} \in F$ l'unique élément de F vérifiant $\|\mathbf{u} - \mathbf{f}\| = \inf_{\mathbf{v} \in F} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$, l'existence d'un tel élément étant garantie par le théorème 3.10. Si l'on pose par ailleurs $\mathbf{g} = \mathbf{u} - \mathbf{f}$, on a $\mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$. D'après le corollaire 3.11, on a $\mathbf{g} \in F^\perp$. Comme \mathbf{u} était arbitrairement choisi dans H , nous venons d'établir que $H = F + F^\perp$. \square

3.4 Résultats d'existence-unicité

Pour tout $\mathbf{u} \in H$ l'application $\mathbf{v} \mapsto (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est anti-linéaire, c'est-à-dire $(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \alpha z) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \bar{\alpha}(\mathbf{u}, z) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, z \in H$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, et continue d'après le lemme 3.4. Le théorème suivant, fondamental en analyse hilbertienne, nous dit que c'est en fait la forme que prennent toutes les fonctionnelles antilinéaires continues.

Théorème 3.13 (Représentation de Riesz).



Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et de la norme $\|\cdot\|$ correspondante. Pour toute forme anti-linéaire continue $\ell : H \rightarrow \mathbb{C}$ il existe un unique $\mathbf{u} \in H$ tel que

$$\ell(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H.$$

De plus cette correspondance est isométrique :

$$\|\mathbf{u}\| = \sup_{\mathbf{v} \in H \setminus \{0\}} \frac{|\ell(\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|}. \quad (3.8)$$

Démo :

Vérifions d'abord l'unicité. Supposons que, pour un $\ell(\cdot)$ donné, il existe $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in H$ tels que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}', \mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in H$. Alors $(\mathbf{u} - \mathbf{u}', \mathbf{v}) = 0 \forall \mathbf{v} \in H$ et en choisissant $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}'$ on obtient $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}'$.

On vérifie maintenant l'existence. Soit $F := \text{Ker}(\ell) = \ell^{-1}(\{0\})$. C'est un sous-espace fermé de H car ℓ est continue. On peut supposer que $F \neq H$, sinon $\ell = 0$ et le théorème est

trivialement vérifié avec $\mathbf{u} = 0$. Donc, d'après la proposition 3.12, on a $H = F \oplus F^\perp$ avec $F^\perp \neq \{0\}$. Choisissons $\mathbf{w} \in F^\perp \setminus \{0\}$ avec $\|\mathbf{w}\| = 1$, et posons $\mathbf{u} = \ell(\mathbf{w})\mathbf{w}$. On a alors pour tout $\mathbf{v} \in H$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\ell(\mathbf{w})\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{w})(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (\mathbf{w}, \overline{\ell(\mathbf{w})}\mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{w}, \underbrace{\ell(\mathbf{w})\mathbf{v} - \overline{\ell(\mathbf{v})}\mathbf{w}}_{\in \text{Ker}(\ell)=F} + \ell(\mathbf{v})\underbrace{(\mathbf{w}, \mathbf{w})}_{=1}) = \ell(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

ce qui démontre la partie existence de l'énoncé. De ceci on tire que $|\ell(\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ pour tout $\mathbf{v} \in H$ par Cauchy-Schwarz. Donc en divisant par $\|\mathbf{v}\|$, et en prenant la borne sup en \mathbf{v} , on obtient

$$\sup_{\mathbf{v} \in H \setminus \{0\}} \frac{|\ell(\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|} \leq \|\mathbf{u}\| = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{|\ell(\mathbf{u})|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \sup_{\mathbf{v} \in H \setminus \{0\}} \frac{|\ell(\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

□

Une application immédiate et très utile permet d'associer à toute forme sesquilinearéaire un opérateur continu.

Lemme 3.14.

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) . Pour toute forme sesquilinearéaire continue $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ il existe une unique application linéaire continue $A : H \rightarrow H$ tel que $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$.

Démo:

Pour un $\mathbf{u} \in H$ fixé, l'application $\mathbf{v} \mapsto a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est anti-linéaire. Donc d'après le théorème de Riesz, il existe un unique $A(\mathbf{u}) \in H$ tel que $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (A(\mathbf{u}), \mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{v} \in H$. Comme $\mathbf{u} \in H$ était choisi arbitrairement on a même

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (A(\mathbf{u}), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H. \quad (3.9)$$

Vérifions que l'application $A : H \rightarrow H$ ainsi construite est linéaire et continue. Tout d'abord pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $(A(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{w}), \mathbf{v}) = a(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{w}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (A(\mathbf{u}) + \lambda A(\mathbf{w}), \mathbf{v})$, c'est-à-dire $(A(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{w}) - A(\mathbf{u}) - \lambda A(\mathbf{w}), \mathbf{v}) = 0$ pour tout $\mathbf{v} \in H$. En choisissant $\mathbf{v} = A(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{w}) - A(\mathbf{u}) - \lambda A(\mathbf{w})$ dans cette dernière identité, on trouve $\|A(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{w}) - A(\mathbf{u}) - \lambda A(\mathbf{w})\|^2 = 0$ d'où l'on tire finalement

$$A(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{w}) = A(\mathbf{u}) + \lambda A(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in H, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.10)$$

Par ailleurs, en choisissant $\mathbf{v} = A(\mathbf{u})$ dans (3.9), en utilisant la continuité de $a(\cdot, \cdot)$ et le corollaire 3.7 ii), on trouve une constante $C > 0$ telle que $\|A(\mathbf{u})\|^2 = a(\mathbf{u}, A(\mathbf{u})) \leq C\|\mathbf{u}\| \|A(\mathbf{u})\|$. On en tire donc $\|A(\mathbf{u})\| \leq C\|\mathbf{u}\| \forall \mathbf{u} \in H$ et, en appliquant le corollaire 3.7 on en tire finalement la continuité de A . □

Voici maintenant un théorème charnière qui est la base de beaucoup de résultats d'existence/unicité pour les EDP elliptique.

Théorème 3.15 (Lax-Milgram).

Soit V un espace de Hilbert muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) . Soit $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinearéaire continue telle qu'il existe $\alpha > 0$ et

$$\text{coercivité : } |a(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \geq \alpha \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.11)$$

Alors pour toute forme anti-linéaire continue $\ell : V \rightarrow \mathbb{C}$ il existe un unique $\mathbf{u} \in V$ tel que $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in V$. De plus on a $\|\mathbf{u}\| \leq \|\ell\|/\alpha$ où $\|\ell\| := \sup_{\mathbf{v} \in V \setminus \{0\}} |\ell(\mathbf{v})|/\|\mathbf{v}\|$.

Démo :

Montrons d'abord l'unicité. Si $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in V$ sont deux éléments vérifiant $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}', \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in V$, on en déduit $a(\mathbf{u} - \mathbf{u}', \mathbf{v}) = 0$ pour tout $\mathbf{v} \in V$. En choisissant $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}'$ et en utilisant (3.11), on en déduit que $\mathbf{u} - \mathbf{u}' = 0$.

Notons maintenant $A : V \rightarrow V$ l'unique application linéaire continue vérifiant $(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ dont l'existence est garantie par le lemme 3.14. D'après (3.11) on a $\alpha\|\mathbf{u}\|^2 \leq \operatorname{Re}\{(A\mathbf{u}, \mathbf{u})\} \leq |(A\mathbf{u}, \mathbf{u})| \leq \|A\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}\|$, c'est-à-dire

$$\alpha\|\mathbf{u}\| \leq \|A\mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{u} \in V. \quad (3.12)$$

Cette inégalité montre que A est injectif. Elle implique aussi que le sous-espace $F := \operatorname{Im}(A) \subset V$ est fermé. En effet si $\mathbf{f}_n = A(\mathbf{u}_n) \in F$ est une suite convergente vers un $\mathbf{f} \in V$, cette suite est de Cauchy, et comme $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m\| \leq \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_m\|/\alpha$, on en déduit que (\mathbf{u}_n) est de Cauchy également donc converge vers un $\mathbf{u} \in V$ car V est complet (c'est un espace de Hilbert), et on déduit finalement que $\mathbf{f} = A(\mathbf{u}) \in \operatorname{Im}(A)$ par continuité de A .

Pour tout $\mathbf{u} \in F^\perp$, d'après (3.11), on a $\|\mathbf{u}\|^2 \leq |(A\mathbf{u}, \mathbf{u})|/\alpha = 0$. Ce qui montre que $F^\perp = \{0\}$ et donc $V = F$ par application de la proposition 3.12. Ceci montre que $A : V \rightarrow V$ est surjectif et donc c'est une bijection, et (3.12) implique que A^{-1} est continue puisque

$$\|A^{-1}(\mathbf{f})\| \leq \|\mathbf{f}\|/\alpha \quad \forall \mathbf{f} \in V. \quad (3.13)$$

D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $\mathbf{f} \in V$ tel que $\ell(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in V$. Soit $\mathbf{u} = A^{-1}(\mathbf{f})$. Alors pour tout $\mathbf{v} \in V$ on a $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v})$. De plus (3.13) et (3.8) impliquent $\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{f}\|/\alpha = \|\ell\|/\alpha$. \square

Le théorème précédent est d'un usage constant tant sur le plan théorique que numérique. Il donne des conditions suffisantes les problèmes de la forme suivante admettent une unique solution

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{cases} \quad (3.14)$$

Un problème écrit sous cette forme est dit variationnel. C'est la forme type sous laquelle nous allons ramener les problèmes que nous étudierons dans ce cours, y compris quand il s'agira de résolution numérique effective. Notez bien que le théorème 3.15 comporte quatre hypothèses :

Hypothèse 1 : complétude de H (Hilbert),

Hypothèse 2 : continuité de $\ell(\cdot)$,

Hypothèse 3 : continuité de $a(\cdot, \cdot)$,

Hypothèse 4 : coercivité de $a(\cdot, \cdot)$.

Une forme sesquilinear vérifiant (3.11) est dite coercive. En pratique, c'est la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ qui est la plus délicate à vérifier. A noter que le théorème précédent s'accompagne d'un résultat de dépendance continue de la solution \mathbf{u} par rapport à la donnée ℓ .

3.5 Fonctions de carré intégrable

Nous discutons à présent l'exemple le plus important d'espace fonctionnel admettant une structure hilbertienne. Il s'agit des fonctions de carré intégrable. Dans toute la suite de ce cours, nous considérerons systématiquement la mesure de Lebesgue notée $d\mathbf{x}$ lorsqu'il s'agira d'intégrer sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^d . L'intégration sur une surface, telle que définie au §2.5, constitue une exception à cette règle qui ne devrait cependant pas générer d'ambiguité. Toujours est-il que, lorsque nous écrirons "presque partout" ou "mesurable", ces expressions renverront systématiquement à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

Structure hilbertienne

Étant donné un ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, nous noterons $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définies presque partout et de carré intégrable $\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty$. Cet espace est muni du produit scalaire et de la norme associés

$$\begin{aligned} (u, v)_{L^2(\Omega)} &:= \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \bar{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ \|u\|_{L^2(\Omega)} &:= \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Théorème 3.16.



Pour tout ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, l'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire (3.15) est un espace de Hilbert.

Démo :

On sait déjà que c'est un espace pré-hilbertien, il s'agit uniquement de démontrer la complétude pour la norme (3.15). Soit $u_n \in L^2(\Omega)$, $n \geq 0$ une suite de Cauchy : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que $\|u_n - u_m\|_{L^2(\Omega)} < \epsilon$ dès que $n, m \geq N$. On peut donc trouver une suite strictement croissante $n_0 < n_1 < \dots$ telle que $\|u_{n_k} - u_{n_{k-1}}\|_{L^2(\Omega)} \leq 1/2^k$. Définissons $f_k(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^k |u_{n_j}(\mathbf{x}) - u_{n_{j-1}}(\mathbf{x})|$. D'après l'inégalité triangulaire on a $\|f_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^k 1/2^j \leq 1$,

$$\int_{\Omega} |f_k(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq 1 \quad \forall k \geq 1. \quad (3.16)$$

La fonction $f(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{\infty} |u_{n_k}(\mathbf{x}) - u_{n_{k-1}}(\mathbf{x})| = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x})$ définie presque partout est mesurable. Par le théorème de convergence monotone appliqué à la suite croissante $|f_k(\mathbf{x})|^2$, on a $\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq 1$. Par convergence dominée on obtient alors $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = 0$. Par ailleurs $|f(\mathbf{x})| < +\infty$ pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$ puisque la fonction $|f|^2$ est intégrable. On en déduit que la série $\sum_{k \geq 1} (u_{n_k}(\mathbf{x}) - u_{n_{k-1}}(\mathbf{x}))$ est absolument convergente pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$ et donc que la suite

$$u_{n_k}(\mathbf{x}) = u_{n_0}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^k u_{n_j}(\mathbf{x}) - u_{n_{j-1}}(\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

converge presque partout vers une fonction mesurable définie presque partout que nous noterons $u(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k}(\mathbf{x})$. Pour tout $k, m \geq 0$ on a $|u(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x})| \leq |u(\mathbf{x}) - u_{n_k}(\mathbf{x})| +$

$|u_{n_k}(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x})| \leq |f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x})| + |u_{n_k}(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x})|$ presque partout. En intégrant sur Ω , on tire

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq 2\|f - f_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|u_{n_k} - u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.18)$$

Cette inégalité montre que $u \in L^2(\Omega)$. Montrons maintenant $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u - u_m\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Fixons un $\epsilon > 0$ arbitraire. La suite (u_n) étant de Cauchy, pour $\epsilon > 0$ il existe $N \geq 0$ tel que $\|u_p - u_q\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon^2/4$ dès que $p, q \geq N$. Pour m tel que $m \geq N$, l'inégalité (3.18) fournit alors $\|u - u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\epsilon^2/4 + 2\epsilon^2/4 = \epsilon^2$ en choisissant k tel que $n_k \geq N$ et $\|f - f_k\|_{L^2(\Omega)}^2 < \epsilon^2/4$. \square

On peut proposer de nombreuses variantes de l'espace des fonctions de carré intégrable. Étant donné un entier $k \geq 1$, nous serons par exemple amenés à considérer l'espace $L^2(\Omega)^k := \{\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^k$ mesurable, $\int_{\Omega} |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty\}$ des fonctions de carré intégrables à valeur dans \mathbb{C}^k (à valeur vectorielle donc) muni du produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^k} := \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x})^\top \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

En revenant sur la notion de fonction intégrable sur $\partial\Omega$ considérée à la fin de la section 2.5, nous serons également amené à considérer l'espace $L^2(\partial\Omega)$ des fonctions $u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de carré intégrable muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\partial\Omega)} := \int_{\partial\Omega} u \bar{v} d\sigma$$

où l'intégrale ci-dessus doit être comprise comme au paragraphe 2.5. En reprenant les arguments du théorème précédent (modulo le recours à des cartes locales éventuellement), on démontre encore que $L^2(\partial\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Régularisation et densité

Nous allons montrer que les fonctions de carré intégrable peuvent être approchées par des fonctions infiniment régulières. Nous nous appuierons sur la technique de régularisation par convolution illustrée par le lemme suivant.

Lemme 3.17.

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et posons $u \star \rho_\delta(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{y}) \rho_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ où $\rho_\delta(\mathbf{x}) = \delta^{-d} \rho(\mathbf{x}/\delta)$ et $\rho(\mathbf{x})$ est la fonction définie par (1.12). Alors on a :

- i) $u \star \rho_\delta \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$,
- ii) $\|u \star \rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$,
- iii) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u - u \star \rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$.

Démo :

On obtient tout d'abord $u \star \rho_\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ par le théorème de dérivation sous le signe intégral. Ensuite un simple changement de variable nous montre que $u \star \rho_\delta(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho_\delta(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ et, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l'intégrale en \mathbf{y} et le théorème

de Fubini, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} |u * \rho_\delta(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \rho_\delta(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)^2 d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |u(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^2 \rho_\delta(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\delta(\mathbf{z}) d\mathbf{z} d\mathbf{x} \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^2 d\mathbf{x} \right) \rho_\delta(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\delta(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

De ce premier calcul on tire que $\|u * \rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty$ et donc $u * \rho_\delta \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour démontrer le dernier point *iii*), on se donne un $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et un $\epsilon > 0$. On sait par un théorème classique de théorie de l'intégration [17, thm.3.14], qu'il existe une fonction continue à support borné $\tilde{u} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|u - \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \epsilon/3$. On applique ensuite un calcul similaire à ce qui précède à la différence $\tilde{u} - \tilde{u} * \rho_\delta$ ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{u}(\mathbf{x}) - \tilde{u} * \rho_\delta(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} & \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{u}(\mathbf{x}) - \tilde{u}(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \rho_\delta(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)^2 d\mathbf{x} \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{u}(\mathbf{x}) - \tilde{u}(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^2 \rho_\delta(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\delta(\mathbf{z}) d\mathbf{z} d\mathbf{x} \quad (3.19) \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{u}(\mathbf{x}) - \tilde{u}(\mathbf{x} - \delta\mathbf{y})|^2 \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{y} \in \overline{\mathbb{B}}(0, 1)$ on a $\lim_{\delta \rightarrow 0} |\tilde{u}(\mathbf{x}) - \tilde{u}(\mathbf{x} - \delta\mathbf{y})| = 0$ par continuité de \tilde{u} . D'après le théorème de convergence dominée, il existe donc $\delta > 0$ tel que $\|\tilde{u} - \tilde{u} * \rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \epsilon/3$. Pour conclure on a donc $\|u - u * \rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\tilde{u} - \tilde{u} * \rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|(\tilde{u} - u) * \rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \epsilon/3 + 2\|u - \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \epsilon$. \square

Théorème 3.18.



Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Alors l'espace $\mathcal{C}_{0,\kappa}^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ i.e. pour tout $u \in L^2(\Omega)$, il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ à support borné telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - \varphi_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Démo :

On choisit $u \in L^2(\Omega)$ fixé et $\epsilon > 0$ arbitraire. Nous allons montrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tel que $\|u - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon$. Définissons $d_\Omega(\mathbf{x}) := \inf_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ dont on montre facilement qu'il s'agit d'une fonction 1-Lipschitzienne $|d_\Omega(\mathbf{x}) - d_\Omega(\mathbf{x}')| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ et donc continue. On considère ensuite la suite croissante d'ensembles compacts $K_n := \{\mathbf{x} \in \Omega, |\mathbf{x}| \leq n \text{ et } d_\Omega(\mathbf{x}) \geq 1/n\}$ satisfaisant $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$. Par convergence dominée on a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) 1_{K_n}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = 0$. On choisit $n \geq 0$ suffisamment grand pour que

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon/2 \quad \text{avec} \quad \tilde{u}(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) 1_{K_n}(\mathbf{x}). \quad (3.20)$$

Quitte à étendre \tilde{u} par zéro de sorte que $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et en considérant la fonction convolée $\tilde{u} * \rho_\delta$ comme définie au lemme 3.17, on remarque que, pour $3\delta < 1/n$, on a $\text{supp}(\tilde{u} * \rho_\delta) \subset \text{supp}(\tilde{u}) + \text{supp}(\rho_\delta) \subset K_n + B(0, \delta) \subset \Omega$ si bien que $\tilde{u} * \rho_\delta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. D'après le lemme 3.17, on peut donc choisir $\varphi = \tilde{u} * \rho_\delta$ avec $\delta > 0$ assez petit pour que $\|\tilde{u} - \tilde{u} * \rho_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon/2$. On obtient finalement $\|u - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u} - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. \square

On dit que l'espace $\mathcal{C}_{0,\kappa}^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. Ce résultat, très

utile, permettra dans certains cas d'étendre à tout $L^2(\Omega)$, des résultats dont on aura démontré qu'ils sont vrais dans $\mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega)$. Voici en particulier une conséquence intéressante.

Corollaire 3.19.

Si $u \in L^2(\Omega)$ vérifie $\int_{\Omega} u(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0 \forall \varphi \in \mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega)$ alors $u = 0$.

Démo :

En appliquant le théorème 3.18, on choisit une suite $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - \varphi_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Comme l'application $\ell : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\ell(v) := \int_{\Omega} u\bar{v}d\mathbf{x}$ est continue d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le corollaire 3.7, on en déduit que $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(\varphi_n) = \ell(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n) = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$. \square

3.6 Bases hilbertiennes

Rappelons tout d'abord qu'un espace est dit séparable lorsqu'il admet un sous-ensemble dénombrable dense. La grande majorité des espaces fonctionnels que l'on rencontre dans la pratique sont séparables. En particulier on admettra le résultat suivant dont on pourra trouver la démonstration dans [4, Thm.4.13 & Prop.9.1].

Proposition 3.20.

Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ l'espace $L^2(\Omega)$ est séparable.

Rappelons par ailleurs que, si H est un Hilbert et $\mathcal{E} \subset H$ un sous-ensemble, l'espace vectoriel engendré par \mathcal{E} est défini par $\text{vect}(\mathcal{E}) := \{\sum_{e \in \mathcal{F}} \lambda_e e \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{E}, \text{card}(\mathcal{F}) < +\infty, \lambda_e \in \mathbb{C}\}$ c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de \mathcal{E} .

Definition 3.21.

Soit H un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) . On appelle base hilbertienne de H une famille $e_j \in H, j \geq 0$ telle que

- i) $\text{vect}_{j \geq 0}\{e_j\}$ est dense dans H ,
- ii) $(e_j, e_k) = 0 \forall j, k \geq 0, j \neq k$,
- iii) $\|e_j\| = 1 \forall j \geq 0$.

Une base hilbertienne joue en dimension infinie le même rôle que les base orthonormale en dimension finie. Ici la complétude des espaces de Hilbert est une propriété capitale. Tout élément d'un espace de Hilbert se décompose sur une telle base.

Proposition 3.22.

Soit H un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et d'une base hilbertienne $\{e_j\}_{j \geq 0}$. Alors pour tout $u \in H$, notons $u_j := (u, e_j) \in \mathbb{C}$. Alors on a

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - (u_0 e_0 + \cdots + u_k e_k)\| = 0$
- $\|u\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |u_j|^2$ (identité de Bessel)

Démo :

Définissons un opérateur linéaire $S_k : H \rightarrow H$ par $S_k(u) := (u, e_0)e_0 + \cdots + (u, e_k)e_k$. On commence par démontrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - S_k(u)\| = 0$. Les éléments e_j étant orthonormés entre eux, on a $\|S_k(u)\|^2 = |u_0|^2 + \cdots + |u_k|^2 = (u, e_0)\bar{u}_0 + \cdots + (u, e_k)\bar{u}_k = (u, S_k(u))$, d'où l'on tire que $\|S_k(u)\|^2 \leq \|S_k(u)\| \|u\|$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et finalement

$$\|S_k(u)\| \leq \|u\| \quad \forall u \in H. \tag{3.21}$$

Observons par ailleurs que, pour tout $\mathbf{v} \in \text{vect}_{j \geq 0}\{\mathbf{e}_j\}$, on a $S_k(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ pour k assez grand. Considérons un $\mathbf{u} \in H$ et soit $\epsilon > 0$. On sait par densité (i.e. i) de la définition 3.21) qu'il existe $\mathbf{u}' \in \text{vect}_{j \geq 0}\{\mathbf{e}_j\}$ tel que $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\| \leq \epsilon$. Soit $N \geq 0$ tel que $S_N(\mathbf{u}') = \mathbf{u}'$. Alors en utilisant (3.21), on obtient $\|\mathbf{u} - S_k(\mathbf{u})\| = \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}') - S_k(\mathbf{u} - \mathbf{u}')\| \leq 2\|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\| \leq 2\epsilon$ pour tout $k \geq N$. Ceci démontre que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{u} - S_k(\mathbf{u})\| = 0$. Ensuite, par continuité du produit scalaire, on a

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{u}, S_k(\mathbf{u})) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k |u_j|^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} |u_j|^2.$$

□

Corollaire 3.23.

Soit H un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et d'une base hilbertienne $\{\mathbf{e}_j\}_{j \geq 0}$. si une suite $v_j \in \mathbb{C}, j \geq 0$ est de carré intégrable $\sum_{j=0}^{\infty} |v_j|^2 < +\infty$, alors il existe $\mathbf{v} \in H$ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v} - (v_0 \mathbf{e}_0 + \cdots + v_k \mathbf{e}_k)\| = 0$ et on a $\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |v_j|^2$.

Démo :

Supposons donné une suite $v_j \in \mathbb{C}, j \geq 0$ de carré intégrable $\sum_{j=0}^{+\infty} |v_j|^2 < +\infty$. Posons $\mathbf{w}_k := v_0 \mathbf{e}_0 + \cdots + v_k \mathbf{e}_k$ et montrons que les \mathbf{w}_k forment une suite de Cauchy dans H . Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \geq 0$ tel que $\sum_{j=N+1}^{\infty} |v_j|^2 \leq \epsilon$. En utilisant le fait que les \mathbf{e}_j sont orthonormés, on obtient

$$\|\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_p\|^2 = \sum_{j=k+1}^p |v_j|^2 \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |v_j|^2 \leq \epsilon \quad \forall k, p \text{ avec } p \geq k \geq N.$$

Puisque H est complet, on en tire l'existence d'un $\mathbf{v} \in H$ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}_k\| = 0$. Par continuité du produit scalaire on obtient ensuite $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{w}_k, \mathbf{e}_j) = v_j$. On conclut en appliquant l'identité de Bessel de la proposition 3.22 à \mathbf{v} . □

Proposition 3.24.

Tout espace de Hilbert séparable H admet une base hilbertienne.

Démo :

Soit $\{\mathbf{u}_n\}_{n \geq 0}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans H . On construit une autre suite $\mathbf{v}_n \in H$ par récurrence. On pose $\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_{k_0}$ où $k_0 = \min\{k \geq 0, \mathbf{u}_k \neq 0\}$. Ensuite on suppose $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$ déjà construits et on définit $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{u}_{k_{n+1}}$ où $k_{n+1} = \min\{k \geq 0 \mid \mathbf{u}_k \notin \text{vect}\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n\}\}$. Alors par construction $\{\mathbf{u}_j\}_{j=0 \dots n} \in \text{vect}_{k=0 \dots n}\{\mathbf{v}_k\}$, de sorte que $\text{vect}_{n \geq 0}\{\mathbf{v}_n\}$ est dense dans H et les \mathbf{v}_n sont linéairement indépendants. On obtient alors une base hilbertienne en appliquant un procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $\{\mathbf{v}_n\}_{n \geq 0}$. □

Nous terminerons ce chapitre en examinant une application concrète de la notion de base hilbertienne à l'espace $L^2(-\pi, \pi)$ que l'on s'autorisera à noter $L^2(-\pi, \pi)$ (notation anglo-saxonne).

Proposition 3.25.

La famille $\{\mathbf{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ des harmoniques de Fourier définie par $\mathbf{e}_n(x) := \exp(inx)/\sqrt{2\pi}, n \in \mathbb{Z}, -\pi < x < \pi$ forme une base hilbertienne de $L^2(-\pi, \pi)$ muni de son produit scalaire usuel (3.15).

Démo :

Il est clair que la famille $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée au sens de (3.15). Nous devons donc établir que $\text{vect}_{n \in \mathbb{Z}}\{\epsilon_n\}$ est dense dans $L^2(-\pi, \pi)$. D'après le théorème 3.18, il suffit de montrer que toute fonction $u \in \mathcal{C}_0^\infty(]-\pi, \pi[)$ peut être approchée au sens de la norme $\| \cdot \|_{L^2(-\pi, \pi)}$ par des éléments de $\text{vect}_{n \in \mathbb{Z}}\{\epsilon_n\}$. Quitte à prolonger par périodicité $u(x + 2n\pi) = u(x) \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in [-\pi, \pi]$, on se ramène à considérer le cas où u est 2π -périodique et appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Étant donné $k \geq 0$, nous allons approcher u par la fonction $P_k(u)$ définie par

$$\begin{aligned} P_k(u)(x) &:= \int_{-\pi}^{\pi} u(y) Q_k(x-y) dy \\ \text{avec } Q_k(x) &:= c_k \cos^{2k}\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

avec $c_k > 0$ choisi pour garantir $\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(x) dx = 1$. Un calcul simple en fournit une estimation : $2/(2k+1) = \int_0^{\pi} \cos^{2k}(x/2) \sin(x/2) dx \leq \int_0^{\pi} \cos^{2k}(x/2) dx = 1/(2c_k)$. La fonction Q_k est clairement décroissante sur $[0, \pi]$ et $Q_k(-x) = Q_k(x)$, si bien que, pour tout $0 < \delta \leq \pi$, on a la limite

$$\sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} |Q_k(x)| \leq Q_k(\delta) \leq \left(\frac{2k+1}{4}\right) \cos^{2k}\left(\frac{\delta}{2}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (3.23)$$

Rappelons que $2\cos^2(x/2) = \cos(x) + 1$ de sorte qu'il existe $a_{k,n} \in \mathbb{C}, n = -k, \dots, k$ tels que $Q_k(x) = \sum_{|n| \leq k} a_{k,n} \epsilon_n(x)$. Puisque par ailleurs $\epsilon_n(x-y) = \sqrt{2\pi} \epsilon_n(x) \epsilon_n(-y)$, on déduit $P_k(u) = \sqrt{2\pi} \sum_{|n| \leq k} a_{k,n} (u, \epsilon_n)_{L^2(-\pi, \pi)} \epsilon_n$ d'où l'on tire finalement que $P_k(u) \in \text{vect}_{n \in \mathbb{Z}}\{\epsilon_n\}$. Il nous reste à montrer que $P_k(u)$ tend vers u dans la norme de l'espace $L^2(-\pi, \pi)$. On a

$$\begin{aligned} \|u - P_k(u)\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (u(x-y) - u(x)) Q_k(y) dy \right|^2 dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(x-y) - u(x)|^2 dx \right) Q_k(y) dy \\ &\leq 4 Q_k(\delta) \sup_{[-\pi, \pi]} |u| + \int_{-\delta}^{\delta} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(x-y) - u(x)|^2 dx \right) Q_k(y) dy \end{aligned}$$

Choisissons un $\epsilon > 0$ arbitrairement petit. La fonction u étant uniformément continue sur $[-2\pi, 2\pi]$, il existe $\delta > 0$ tel que $|u(x-y) - u(x)|^2 \leq \epsilon$ dès que $|y| \leq \delta$. D'après (3.23), il existe $k_0 \geq 0$ tel que $4 Q_k(\delta) \sup_{[-\pi, \pi]} |u| \leq \epsilon$ dès que $k \geq k_0$. On en tire donc finalement $\|u - P_k(u)\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 \leq 2\epsilon \forall k \geq k_0$. Comme ϵ était arbitraire, on a donc finalement établi $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - P_k(u)\|_{L^2(-\pi, \pi)} = 0$. \square

On peut maintenant combiner le résultat précédent avec la proposition 3.22 et le corollaire 3.23, ce qui fournit un résultat de base de la théorie de Fourier à savoir une correspondance bi-univoque entre les fonctions de carré intégrable sur $]-\pi, \pi[$, et les suites de carré sommable.

Corollaire 3.26.

Soit $\ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace des suites de carré sommable muni de la norme $\|(v_n)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |v_n|^2$. Pour tout $u \in L^2(-\pi, \pi)$ notons $(\hat{u}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier

$$\hat{u}(n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \exp(-inx) dx.$$

Alors l'application $u \mapsto \hat{u}$ réalise un isomorphisme de $L^2(-\pi, \pi)$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ et c'est une isométrie i.e. $\|u\|_{L^2(-\pi, \pi)} = \|\hat{u}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$ pour tout $u \in L^2(-\pi, \pi)$.

Chapitre 4

Espaces de Sobolev

L'espace des fonctions de carré intégrable n'est pas un cadre suffisamment riche pour l'analyse des EDPs car on ne peut appliquer de dérivée partielle sur les fonctions dans L^2 . Nous allons donc construire dans ce chapitre de nouveaux espaces de Hilbert, dans lesquels nous pourrons donc appliquer les résultats d'existence-unicité (théorèmes de Riesz et Lax-Milgram) et pour lesquels, en même temps, on aura accès à une notion de dérivée partielle. Cette opération de dérivation devra cependant être entendue dans un sens généralisé dit "faible" que nous discuterons en détail. Le lecteur désireux d'approfondir les thèmes abordés dans ce chapitre pourra consulter [3, chap.1], [1, chap.4], [15, chap.1], [4, chap.8 & 9] ou encore [18, part.I].

4.1 Définition

Nous commençons par généraliser la notion de gradient à des fonctions appartenant à l'espace $L^2(\Omega)$ donc potentiellement pas même continues. Cette généralisation prend une forme "variationnelle".

Definition 4.1.

 Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, on dit que $u \in L^2(\Omega)$ admet un gradient faible, et on écrit " $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ ", lorsqu'il existe $\mathbf{p} \in L^2(\Omega)^d$ telle que

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div}(\varphi) dx = - \int_{\Omega} \mathbf{p}^T \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega)^d,$$

où $\mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \operatorname{supp}(\varphi) \text{ borné}\}$. Si un tel \mathbf{p} existe, il est unique. On écrit alors " ∇u " pour désigner ce champ de vecteur $\mathbf{p} \in L^2(\Omega)^d$.

Justifions l'unicité : si $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in L^2(\Omega)^d$ vérifient tous les deux l'identité mentionnée, alors $\int_{\Omega} (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \varphi dx = 0 \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^d$, et on en déduit $\mathbf{p} - \mathbf{q} = 0$ d'après le corollaire 3.19. Cette unicité justifie la convention de notation pour le gradient faible.

Dans cette définition, les fonctions φ sont parfois appelées fonctions test. Il est très important de noter que ces fonctions s'annulent sur le bord. Ainsi la condition ci-dessus ne prescrit rien quant au comportement de u au voisinage de $\partial\Omega$. L'unicité de \mathbf{p} vaut bien sûr au sens de l'égalité presque partout, les éléments de $L^2(\Omega)$ étant de toute façon définis presque partout.

Généralisation du gradient usuel

La définition 4.1 étend la notion usuelle de gradient et donc de dérivée partielle, les coordonnées du gradient étant données par les dérivées partielles par rapport à chacune des variables. Pour le voir plaçons-nous dans le cas d'un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, et considérons un $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ pour lequel il est bien évident que $u \in L^2(\Omega)$. Notons $\mathbf{f} := \mathbf{e}_1 \partial_{x_1} u + \cdots + \mathbf{e}_d \partial_{x_d} u$ son gradient usuel, défini comme au §1.5. On peut alors appliquer la formule de Stokes (2.13), et on obtient

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \mathbf{f}^\top \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{x} \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}_{0,\kappa}^\infty(\Omega)^d.$$

Dans cette identité, on ne retrouve pas le terme de bord apparaissant dans (2.13), justement parce que les fonctions tests $\boldsymbol{\varphi}$ sont supposées s'annuler sur $\partial\Omega$. Comme $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, on a $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$. Les hypothèses de la définition 4.1 sont vérifiées et \mathbf{f} est bien le gradient faible de u . Les formules de calcul différentiel liées au gradient se prolongent au gradient faible. Le résultat suivant, à comparer à (1.15), en donne un exemple.

Lemme 4.2.

Étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $u \in L^2(\Omega)$ avec $\nabla u \in L^2(\Omega)$ et $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ avec $\sup_{\Omega}(|\chi| + |\nabla \chi|) < +\infty$, on a $\nabla(\chi u) \in L^2(\Omega)$ avec $\nabla(\chi u) = \chi \nabla u + u \nabla \chi$.

Démo :

Pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}_{0,\kappa}^\infty(\Omega)^d$, en utilisant la caractérisation du gradient faible ∇u , on a $\int_{\Omega} u \chi \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\chi \boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} u \nabla \chi^\top \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\chi \nabla u + u \nabla \chi)^\top \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{x}$. Il reste à comparer avec la définition 4.1. On a bien $\chi u \in L^2(\Omega)$ et $\chi \nabla u + u \nabla \chi \in L^2(\Omega)^d$ car $\chi, \nabla \chi$ sont bornés. \square

Espace de Sobolev "de base"

On vérifie sans difficulté que le gradient faible défini plus haut respecte les combinaisons linéaires : si $u, v \in L^2(\Omega)$ admettent un gradient faible alors $u + \alpha v \in L^2(\Omega)$ admet un gradient faible aussi pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\nabla(u + \alpha v) = \nabla u + \alpha \nabla v$, ce qui nous conduit naturellement à introduire l'espace des fonctions admettant un gradient faible.

Definition 4.3.



On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions de carré intégrable admettant un gradient faible $H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)^d\}$ muni du produit scalaire suivant

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} u \bar{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla u^\top \nabla \bar{v} d\mathbf{x}, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}. \quad (4.1)$$

On a bien $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ mais, attention, $H^1(\Omega)$ n'est pas équipé du même produit scalaire que $L^2(\Omega)$. C'est un point important. C'est un espace dans lequel l'usage du gradient est autorisé, il devrait donc se prêter mieux à l'étude des EDPs que $L^2(\Omega)$. De plus il est complet pour la norme ci-dessus.

Proposition 4.4.



L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire (4.1) est un espace de Hilbert séparable.

Démo :

Il est clair que $H^1(\Omega)$ muni de $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$ est un espace pré-hilbertien. On admettra qu'il est séparable. Il s'agit donc uniquement de démontrer que c'est un espace complet. Considérons une suite $u_n \in H^1(\Omega)$, $n \geq 1$ qui est de Cauchy au sens de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Notons $\mathbf{p}_n \in L^2(\Omega)^d$, $n \geq 1$ les gradients faible $\mathbf{p}_n := \nabla u_n$. Comme $(u_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \geq 1$ tel que

$$\|u_n - u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 = \|u_n - u_m\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \epsilon^2$$

dès que $n, m \geq N$. On en déduit que $(u_n)_{n \geq 1}$ est aussi une suite de Cauchy au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, et $(\mathbf{p}_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)^d$ au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)^d}$. Les espaces $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)^d$ étant complet d'après le théorème 3.16, il existe $u_\infty \in L^2(\Omega)$ et $\mathbf{p}_\infty \in L^2(\Omega)^d$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_\infty - u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{p}_\infty - \nabla u_n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 = 0. \quad (4.2)$$

Pour conclure, il reste à vérifier que \mathbf{p}_∞ est le gradient faible de u_∞ . Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ arbitraire. En appliquant la définition 4.1 à u_n , on obtient que $\int_\Omega u_n \operatorname{div}(\varphi) + \mathbf{p}_n^\top \varphi d\mathbf{x} = 0$ pour tout $n \geq 1$. En faisant tendre $n \rightarrow +\infty$, puisque la convergence de u_n (resp. \mathbf{p}_n) a lieu dans $L^2(\Omega)$ (resp. $L^2(\Omega)^d$), on en tire

$$\int_\Omega u_\infty \operatorname{div}(\varphi) + \mathbf{p}_\infty^\top \varphi d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Ceci démontre que $u_\infty \in H^1(\Omega)$ avec $\mathbf{p}_\infty = \nabla u_\infty$. En reportant ceci dans (4.2) on obtient que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_\infty\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Bilan : toute suite de Cauchy de $H^1(\Omega)$ converge dans $H^1(\Omega)$. C'est donc un espace complet. \square

En analyse numérique, on rencontre souvent des fonctions qui sont régulières par morceaux et globalement continues. De telles fonctions sont typiques de l'espace $H^1(\Omega)$.

Proposition 4.5.

On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert polyédrique borné, et qu'il est partitionné en $\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^J \overline{\Omega}_j$ où chaque Ω_j est un ouvert polyédrique et $\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$ pour $j \neq k$. Si $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ vérifie en plus $u|_{\Omega_j} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_j) \forall j = 1 \dots J$ alors $u \in H^1(\Omega)$.

Démo :

Notons \mathbf{n}_j le vecteur normal sortant à Ω_j et $\Gamma_j := \partial\Omega_j$. On pose également $u_j := u|_{\Omega_j}$ et on définit $\mathbf{p} \in L^2(\Omega)^d$ par $\mathbf{p}|_{\Omega_j} = \nabla u_j$ pour tout $j = 1 \dots J$. Pour vérifier que $u \in H^1(\Omega)$, on choisit un $\varphi \in \mathcal{C}_{0,k}^\infty(\Omega)$ et on part du membre de gauche de la définition 4.1. En décomposant sur les Ω_j , et en appliquant une formule de Stokes (2.13) dans chaque sous-domaine, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega u \operatorname{div}(\varphi) d\mathbf{x} &= \sum_{j=1}^J \int_{\Omega_j} u_j \operatorname{div}(\varphi) d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^J - \int_{\Omega_j} \nabla u_j^\top \varphi d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_j} u_j \varphi^\top \mathbf{n}_j d\sigma \\ &= - \int_\Omega \mathbf{p}^\top \varphi d\mathbf{x} + \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq J \\ j \neq k}} \int_{\Gamma_j \cap \Gamma_k} (u_j \mathbf{n}_j + u_k \mathbf{n}_k)^\top \varphi d\sigma \end{aligned}$$

Ci-dessus, les intégrales de surfaces sont nulles sauf si $\Gamma_j \cap \Gamma_k$ est une portion d'hyperplan (un plan pour $d = 3$, une droite pour $d = 2$, un point pour $d = 1$) d'intérieur non-vide, auquel

cas $\mathbf{n}_j = -\mathbf{n}_k$ et $u_j = u_k$ sur $\Gamma_j \cap \Gamma_k$ par continuité de u . On a donc systématiquement $(u_j \mathbf{n}_j + u_k \mathbf{n}_k)^\top \boldsymbol{\varphi} = 0$ sur $\Gamma_j \cap \Gamma_k$, de sorte que $\int_{\Omega} u \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \mathbf{p}^\top \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{x} \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega)$ i.e. la définition 4.1 est vérifiée avec $\nabla u = \mathbf{p}$. \square

4.2 Régularisation et densité

Nous souhaitons maintenant démontrer que les fonctions de $H^1(\Omega)$ peuvent être approchées par des fonctions infiniment régulières. Nous commençons par préciser un peu le résultat du lemme 3.17 car, dans le cas d'une fonction dans $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, on obtient des propriétés plus fortes en régularisant par convolution.

Lemme 4.6.

Pour ρ_δ comme au lemme 3.17, $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ arbitraire, et $\omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, on a

- i) $u \star \rho_\delta \in H^1(\mathbb{R}^d)$ avec $\nabla(u \star \rho_\delta) = (\nabla u) \star \rho_\delta$,
- ii) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u - u \star \rho_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 0$,
- iii) $\|u - u \star \rho_\delta\|_{L^2(\omega)} \leq \delta \|\nabla u\|_{L^2(\omega_\delta)}$ où $\omega_\delta := \omega + \operatorname{supp}(\rho_\delta)$.

Démo :

Le théorème de Fubini et quelques changements de variables élémentaires montrent d'une part que $\int_{\mathbb{R}^d} (u \star \rho_\delta)(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x}) (\psi \star \rho_\delta)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \forall \psi \in \mathcal{C}_{0,K}^\infty(\mathbb{R}^d)$, ainsi que $\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}) \star \rho_\delta = \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi} \star \rho_\delta) \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}_{0,K}^\infty(\mathbb{R}^d)^d$. Choisissons $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}_{0,K}^\infty(\mathbb{R}^d)^d$ une fonction test arbitraire, et observons que $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi} \star \rho_\delta) \subset \operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}) + \operatorname{supp}(\rho_\delta)$ de sorte que $\boldsymbol{\varphi} \star \rho_\delta$ est encore de classe \mathcal{C}^∞ à support borné. En utilisant les remarques qui précédent on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (u \star \rho_\delta)(\mathbf{x}) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi} \star \rho_\delta)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla u)(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\varphi} \star \rho_\delta)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})^\top ((\nabla u) \star \rho_\delta)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En comparant ce calcul avec la caractérisation du gradient faible de la définition 4.1, on obtient $(\nabla u) \star \rho_\delta = \nabla(u \star \rho_\delta)$. En utilisant i) du lemme 3.17, on voit que $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^d)^d \Rightarrow u \star \rho_\delta \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\nabla(u \star \rho_\delta) \in L^2(\mathbb{R}^d)^d$ et donc $u \star \rho_\delta \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, avec iii) du lemme 3.17 on obtient, quand $\delta \rightarrow 0$,

$$\|u - u \star \rho_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 = \|u - u \star \rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\nabla u - (\nabla u) \star \rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow 0.$$

Il reste à démontrer iii). Commençons par considérer le cas d'une fonction $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\mathbb{R}^d)$. En appliquant une formule de Taylor au premier ordre on obtient $v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = - \int_0^1 \mathbf{y}^\top \nabla v(\mathbf{x} - t\mathbf{y}) dt$ d'où l'on tire par Cauchy-Schwarz $|v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^2 \leq \delta^2 \int_0^1 |\nabla v(\mathbf{x} - t\mathbf{y})|^2 dt$ pour $|\mathbf{y}| \leq \delta$. En reprenant le calcul (3.19) et en utilisant Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} &\|v - v \star \rho_\delta\|_{L^2(\omega)}^2 \\ &\leq \int_{\omega} \int_{\mathbb{R}^d} |v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^2 \rho_\delta(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \leq \delta^2 \int_{\omega} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 |\nabla v(\mathbf{x} - t\mathbf{y})|^2 dt \right) \rho_\delta(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\ &\leq \delta^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \|\nabla v\|_{L^2(\omega-t\mathbf{y})}^2 dt \rho_\delta(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \leq \delta^2 \|\nabla v\|_{L^2(\omega_\delta)}^2. \end{aligned}$$

Dans ce calcul on a utilisé, d'une part $|\mathbf{y}| \leq \delta$ sur $\text{supp}(\rho_\delta) \subset \overline{B}(0, \delta)$, et d'autre part $\omega - t\mathbf{y} \subset \omega_\delta$ pour tout $t \in (0, 1)$, $\mathbf{y} \in \text{supp}(\rho_\delta)$. Pour le cas d'un $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ pas forcément de classe \mathcal{C}^∞ , il suffit d'appliquer ce qui précède à $v = u \star \rho_\epsilon$ et de passer à la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$. \square

Nous pouvons maintenant obtenir un analogue du théorème 3.18 mais pour l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. Nous énonçons d'abord un résultat que nous admettrons. On pourra trouver une démonstration dans [4, §9.2] pour le cas où Ω est de classe \mathcal{C}^1 . La démonstration dans le cas général est donnée par exemple dans [18, §5.2].

Théorème 4.7.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert lipschitzien de frontière bornée. Alors il existe une application linéaire continue $\mathcal{E} : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\mathcal{E}(u)|_\Omega = u$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

Dans le résultat ci-dessus, l'égalité $\mathcal{E}(u)|_\Omega = u$ doit bien sûr être comprise au sens de l'égalité presque partout (pour la mesure de Lebesgue) sur Ω .

Corollaire 4.8.

 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert lipschitzien de frontière bornée. Pour tout $u \in H^1(\Omega)$, il existe une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support borné telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - \varphi_n\|_{H^1(\Omega)} = 0$.*

Démonstration :

Notons $v := \mathcal{E}(u) \in H^1(\mathbb{R}^d)$ où \mathcal{E} est l'opérateur d'extension provenant du théorème 4.7. Considérons une fonction de troncature $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi(\mathbf{x}) = 1$ pour $|\mathbf{x}| \leq 1$ et $\chi(\mathbf{x}) = 0$ pour $|\mathbf{x}| \geq 2$ cf lemme 1.7, et posons $\chi_\delta(\mathbf{x}) = \chi(\delta \mathbf{x})$. Puisque $(\nabla \chi_\delta)(\mathbf{x}) = \delta (\nabla \chi)(\delta \mathbf{x})$, en posant $v_\delta := v \chi_\delta$, on obtient

$$\begin{aligned} \|v - v_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 &= \|(1 - \chi_\delta)v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|(1 - \chi_\delta)\nabla v - v\nabla\chi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq \|(1 - \chi_\delta)v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + 2\|(1 - \chi_\delta)\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + 2\delta(\sup_{\mathbb{R}^d} |\nabla \chi|) \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \\ \|v_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 &= \|\chi_\delta v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\chi_\delta \nabla v + v \nabla \chi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq 2(\sup_{\mathbb{R}^d} |\chi|) \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 + 2\delta(\sup_{\mathbb{R}^d} |\nabla \chi|) \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \end{aligned}$$

ce qui donne $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|v - v_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 0$ par convergence dominée, et $\|v_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}$ pour tout $\delta \in]0, 1[$. Avec ρ_δ comme dans le lemme 3.17, remarquons que $v_\delta \star \rho_\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et est à support borné. En appliquant iii) du lemme 4.6 à v_δ , on obtient donc $\|v - v_\delta \star \rho_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|v - v_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + C\delta\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$. Pour conclure, il reste à noter que $\|u - v_\delta \star \rho_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v - v_\delta \star \rho_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$ pour $\delta \rightarrow 0$, puisque $v|_\Omega = u$. \square

4.3 Inégalité de Poincaré

Dans cette section nous souhaitons établir une inégalité permettant de borner la norme L^2 d'une fonction par la norme L^2 de son gradient (modulo des termes auxiliaires) lorsque cette fonction est dans H^1 . Ce résultat sera d'une grande importance lorsqu'il s'agira d'analyser l'unicité des solutions d'une EDP elliptique. Nous commencerons par un résultat abstrait d'analyse hilbertienne.

Théorème 4.9 (Compacité faible).

Soit H un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et de la norme $\| \cdot \|$. Si $u_n \in H, n \geq 0$ est une suite bornée $\sup_{n \geq 0} \|u_n\| < +\infty$, alors il existe $u_\infty \in H$ et une sous-suite $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} (u_{n_k}, v) = (u_\infty, v)$ pour tout $v \in H$.

Démo :

Soit $M := \sup_{n \geq 0} \|u_n\| < +\infty$. Puisque H est un Hilbert séparable, il existe une base hilbertienne $w_p \in H, p \geq 0$. Pour chaque $p \geq 0$, notons $u_n^p := (u_n, w_p)$. D'après Cauchy-Schwarz $|u_n^p| \leq \|u_n\| \|w_p\| \leq M$, donc $\{u_n^0\}_{n \geq 0}$ est une suite bornée dans \mathbb{C} et on peut en extraire une sous-suite convergente i.e. il existe une fonction strictement croissante $\varphi_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $u_\infty^0 \in \mathbb{C}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_\infty^0 - u_{\varphi_0(n)}^0| = 0$.

On procède ensuite par récurrence en supposant des fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ déjà construites telles que, pour tout $j = 0 \dots k$, la fonction $\varphi_j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante et il existe $u_\infty^j \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |u_\infty^j - u_{\psi_j(n)}^j| &= 0 \\ \text{où } \psi_j &:= \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_j \end{aligned} \tag{4.3}$$

Par Cauchy-Schwarz on a $|u_{\psi_k(n)}^{k+1}| \leq M$ à nouveau, donc $\{u_{\psi_k(n)}^{k+1}\}_{n \geq 0}$ est une suite bornée dans \mathbb{C} , on peut donc en extraire une sous-suite convergente i.e. il existe $u_\infty^{k+1} \in \mathbb{C}$ et une fonction strictement croissante $\varphi_{k+1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que (4.3) est vrai pour $j = k + 1$.

On considère ensuite $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\psi(k) := \varphi_k(k) \forall k \geq 0$ ("extraction diagonale"). De la stricte croissance de chaque φ_j , on déduit la stricte croissance de ψ si bien que $\tilde{u}_n := u_{\psi(n)} \in H, n \geq 0$ est extraite de $\{u_n\}_{n \geq 0}$. En particulier $\sup_{n \geq 0} \|\tilde{u}_n\| \leq M < +\infty$. De plus en posant $\tilde{u}_n^p := u_{\psi(n)}^p = (\tilde{u}_n, w_p) = (u_{\psi(n)}, w_p)$, la suite $\{\tilde{u}_n^p\}_{n \geq p}$ est par construction extraite de $\{u_{\psi_p(n)}^p\}_{n \geq p}$ de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_\infty^p - \tilde{u}_n^p| = 0 \quad \forall p \geq 0. \tag{4.4}$$

Puisque $\{\tilde{u}_n\}_{n \geq 0}$ est bornée par M , on a $|\tilde{u}_n^0|^2 + \dots + |\tilde{u}_n^k|^2 \leq M^2$ pour tout $n, k \geq 0$. En utilisant (4.4) on peut passer à la limite en $n \rightarrow \infty$ à k fixé ce qui donne $|u_\infty^0|^2 + \dots + |u_\infty^k|^2 \leq M^2 \forall k \geq 0$, et finalement $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_\infty^k|^2 \leq M^2 < +\infty$. En appliquant le Corollaire 3.23, on obtient l'existence de $u_\infty \in H$ tel que $u_\infty^p = (u_\infty, w_p) \forall p \geq 0$.

Soit enfin $v \in H$ et $\epsilon > 0$ arbitraire. En notant $v_k := (v, w_k)$ on a $\sum_{k \in \mathbb{N}} |v_k|^2 < +\infty$, donc il existe $p \geq 0$ tel que $v' = v_0 w_0 + \dots + v_p w_p \in H$ vérifie $\|v - v'\|^2 = \sum_{k=p+1}^{+\infty} |v_k|^2 < (\epsilon/M)^2$. D'après (4.4) il existe $n_* \geq 0$ tel que $\sum_{k=0}^p |u_\infty^p - \tilde{u}_n^p|^2 \leq (\epsilon/\|v\|)^2$. On a donc finalement

$$\begin{aligned} |(\tilde{u}_n - u_\infty, v)| &\leq |(\tilde{u}_n - u_\infty, v - v')| + |(\tilde{u}_n - u_\infty, v')| \\ &\leq 2M\epsilon/M + \sum_{k=0}^p |\tilde{u}_n^k - u_\infty^k| |v_k| \\ &\leq 2\epsilon + (\sum_{k=0}^p |v_k|^2)^{1/2} (\sum_{k=0}^p |\tilde{u}_n^k - u_\infty^k|^2)^{1/2} \leq 3\epsilon. \end{aligned} \tag{4.5}$$

dès que $n \geq n_*$. Ceci démontre que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{u}_n, v) = (u_\infty, v)$ et, comme $v \in H$ et $\epsilon > 0$ était choisi arbitrairement, ceci termine la démonstration. \square

Dans les conditions du théorème ci-dessus, on dit que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers u_∞ dans H . Attention, ceci n'implique pas la convergence forte de la suite, c'est-à-dire qu'on a pas a priori $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_\infty\| = 0$. Cette distinction entre convergence faible et forte est caractéristique des espaces de dimension infinie, et nous devrons y prêter attention car les espaces fonctionnels sont le plus souvent de dimension infinie.

Une conséquence directe du théorème précédent est que toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$ contient une sous-suite *faiblement* convergente dans $H^1(\Omega)$. Le résultat suivant nous dit cependant que, si l'on se contente de la norme $L^2(\Omega)$, on obtient la convergence forte.

Théorème 4.10.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert lipschitzien borné. Si $u_n \in H^1(\Omega)$, $n \geq 0$ est une suite bornée $\sup_{n \geq 0} \|u_n\|_{H^1(\Omega)} < +\infty$, alors il existe $u_\infty \in H^1(\Omega)$ et une sous-suite $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ tels que $\lim_{k \rightarrow \infty} (u_{n_k}, v)_{H^1(\Omega)} = (u_\infty, v)_{H^1(\Omega)}$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_\infty - u_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Démo :

On peut commencer par appliquer le théorème 4.9 dans l'espace $H^1(\Omega)$ ce qui fournit l'existence d'un $u_\infty \in H^1(\Omega)$ et d'une sous-suite $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} (u_{n_k}, v)_{H^1(\Omega)} = (u_\infty, v)_{H^1(\Omega)} \forall v \in H^1(\Omega)$. Posons $\tilde{u}_k := \chi \mathcal{E}(u_{n_k} - u_\infty)$ où $\mathcal{E} : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)$ est l'opérateur d'extension continu du théorème 4.7, et $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\chi(\mathbf{x}) = 1$ pour $\mathbf{x} \in \Omega$ ainsi que $\text{supp}(\chi) \subset B$ pour une boule bornée B (existence de χ garantie par le lemme 1.7). Par continuité de \mathcal{E} , il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\chi \mathcal{E}(u)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \forall u \in H^1(\Omega)$ de sorte que

$$\sup_{p \geq 0} \|\tilde{u}_p\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < +\infty, \quad \text{supp}(\tilde{u}_k) \subset B. \quad (4.6)$$

Nous allons démontrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$, et comme $\|u_{n_k} - u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ ceci terminera la preuve. Fixons un $\epsilon > 0$, et considérons les fonctions convolées $\tilde{u}_k \star \rho_\delta(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tilde{u}_k(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ où ρ_δ est définie comme dans le lemme 3.17. On a $\|\tilde{u}_k - \tilde{u}_k \star \rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta \sup_{p \geq 0} \|\tilde{u}_p\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}$ d'après iii) du lemme 4.6, donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|\tilde{u}_k - \tilde{u}_k \star \rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \epsilon \quad \forall k \geq 0. \quad (4.7)$$

En posant $K := B + \text{supp}(\rho_\delta)$, on a $\text{supp}(\tilde{u}_k \star \rho_\delta) \subset K$ pour tout $k \geq 0$ d'après (4.6). Par ailleurs, pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$, l'application $w \mapsto (\chi \mathcal{E}(w), v)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ est continue puisque $|(\chi \mathcal{E}(w), v)_{L^2(\mathbb{R}^d)}| \leq C \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|w\|_{H^1(\Omega)}$ par Cauchy-Schwarz. En appliquant le théorème de Riesz cf §3.4, il existe $\tilde{v} \in H^1(\Omega)$ tel que $(\chi \mathcal{E}(w), v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (w, \tilde{v})_{H^1(\Omega)} \forall w \in H^1(\Omega)$. On en tire $(\tilde{u}_k, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (u_{n_k} - u_\infty, \tilde{v})_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow \infty$. Ceci démontre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\tilde{u}_k, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0 \forall v \in H^1(\mathbb{R}^d). \quad (4.8)$$

Si l'on choisit $v(\mathbf{y}) = \rho_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ et que l'on applique (4.8), on obtient $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k \star \rho_\delta(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Par ailleurs, en appliquant Cauchy-Schwarz et (4.6), on a $|\tilde{u}_k \star \rho_\delta(\mathbf{x})| \leq \|\rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \sup_{p \geq 0} \|\tilde{u}_p\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \forall k \geq 0$. Puisque $\text{supp}(\tilde{u}_k \star \rho_\delta) \subset K \forall k \geq 0$ et que K est borné, on peut appliquer le théorème de convergence dominée sur K , ce qui fournit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_k \star \rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$. En résumé on a obtenu

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \epsilon + \lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_k \star \rho_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \epsilon.$$

On obtient donc finalement $0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$ puisque $\epsilon > 0$ était choisi arbitrairement petit. \square

On peut résumer le résultat précédent en disant que, si Ω est borné, de toute suite (fortement) bornée dans $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite (fortement) convergente dans $L^2(\Omega)$. Attention, l'hypothèse selon laquelle Ω doit être borné est essentielle, et le théorème précédent tombe en défaut si Ω est un domaine non-borné. On donne maintenant une application très importante du théorème de compacité que nous avons démontré.

Théorème 4.11 (Inégalité de Poincaré).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine lipschitzien borné, et une application continue $\Phi : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $(\Phi(v) = 0 \text{ et } \nabla v = 0) \Rightarrow v = 0$, et $|\Phi(\lambda v)| = |\lambda| |\Phi(v)| \forall v \in H^1(\Omega) \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Alors il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |\Phi(u)|^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Démo :

Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite $u_n \in H^1(\Omega)$, $n \geq 0$ telle que $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi(u_n)|^2 + \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$. D'après le théorème 4.10, il existe une sous-suite $\tilde{u}_k = u_{n_k}$ et $u_\infty \in H^1(\Omega)$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} (\tilde{u}_k - u_\infty, v)_{H^1(\Omega)} = 0 \forall v \in H^1(\Omega)$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_k - u_\infty\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Par continuité dans $L^2(\Omega)$, on a $\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ d'où $u_\infty \neq 0$.

D'autre part, choisissons $\varphi \in \mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega)$. On a $|\int_{\Omega} u_\infty \operatorname{div}(\varphi) d\mathbf{x}| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\int_{\Omega} \tilde{u}_k \operatorname{div}(\varphi) d\mathbf{x}| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\int_{\Omega} \varphi^\top \nabla \tilde{u}_k d\mathbf{x}| = 0$ car $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)} = 0$, donc d'après la définition 4.1 du gradient faible, on obtient $\nabla u_\infty = 0$ sur Ω . Ceci implique la convergence de \tilde{u}_k dans $H^1(\Omega)$ car $\|u_\infty - \tilde{u}_k\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u_\infty - \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$.

Par continuité de $\Phi()$ et convergence dans $H^1(\Omega)$, on a $0 \leq |\Phi(u_\infty)|^2 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi(\tilde{u}_k)|^2 + \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$ d'où $\Phi(u_\infty) = 0$. Comme, d'autre part $\nabla u_\infty = 0$, on en déduit $u_\infty = 0$ ce qui fournit une contradiction avec ce qui précède (car alors $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$) et conclut la preuve. \square

Le résultat précédent amène naturellement à s'intéroger sur l'ensemble des $v \in H^1(\Omega)$ vérifiant $\nabla v = 0$. On sait que les fonctions régulières à gradient nulle sont les fonctions localement constantes. Ce résultat se généralise à $H^1(\Omega)$.

Lemme 4.12.

Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, les $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant $\nabla u = 0$ sur Ω sont exactement les fonctions constantes sur chaque composante connexe de Ω .

Démo :

Quitte à décomposer Ω en composantes connexes et à restreindre u à chacune de ces composantes, on peut supposer Ω connexe sans nuire à la généralité. Prenons un ensemble ouvert borné $\bar{\omega} \subset \Omega$ arbitraire, considérons une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support borné telle que $\chi(\mathbf{x}) = 1$ si $\mathbf{x} \in \bar{\omega}$, et $\chi(\mathbf{x}) = 0$ si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$, fonction dont l'existence est garantie par le lemme 1.7. Posons $\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})\chi(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \Omega$ et $\tilde{u}(\mathbf{x}) = 0$ pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$, de sorte que $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ et $\tilde{u}|_{\omega} = u|_{\omega}$. Notons enfin $\omega_\delta = \{\mathbf{x} \in \omega, B(\mathbf{x}, \delta) \subset \omega\}$. Par application de *iii* lemme 4.6, on a $\|u - \tilde{u} * \rho_\delta\|_{L^2(\omega_\delta)} \leq \delta \|\nabla u\|_{L^2(\omega)} = 0$. On en déduit que $u|_{\omega_\delta} = \tilde{u} * \rho_\delta|_{\omega_\delta} \in \mathcal{C}^\infty(\omega_\delta)$ pour tout $\delta > 0$. Comme $\omega = \cup_{\delta > 0} \omega_\delta$, on conclut que $u \in \mathcal{C}^\infty(\omega)$, et comme ceci est vrai pour tout ouvert borné $\omega \subset \Omega$, on en déduit finalement que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Comme par ailleurs $\nabla u = 0$ sur Ω connexe, il reste à appliquer le lemme 1.9 pour conclure que u est constante sur Ω tout entier. \square

En utilisant le lemme précédent, nous proposons une application concrète de l'inégalité de Poincaré avec le choix $\Phi(u) = \int_{\Omega} u d\mathbf{x}/|\Omega|$ en notant $|\Omega| := \int_{\Omega} d\mathbf{x}$ le volume de Ω .

Corollaire 4.13.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert lipschitzien borné et connexe, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |\int_{\Omega} u d\mathbf{x}/|\Omega||^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

4.4 Espaces d'ordre supérieur

Par construction, les éléments de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ admettent des dérivées partielles d'ordre un (gradient). En adoptant une définition récursive on peut également introduire des espaces admettant des dérivées partielles faibles d'ordre supérieur.

Definition 4.14.

Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et tout entier $k \geq 1$, on définit $H^k(\Omega) := \{v \in H^{k-1}(\Omega), \partial_{x_j} v \in H^{k-1}(\Omega) \forall j = 1 \dots d\}$. Il s'agit d'un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire et de la norme suivants

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \bar{v} d\mathbf{x},$$

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} := (\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u\|_{H^{k-1}(\Omega)}^2)^{1/2}.$$

Démo :

Comme pour la preuve de la proposition 4.4, seul la complétude de ces espaces est non-triviale. On le démontre par récurrence. Nous savons déjà que le résultat est vrai pour $k = 1$, et nous supposons donc (hypothèse de récurrence) que $H^r(\Omega)$ est complet pour tout $r = 1, \dots, k - 1$.

Supposons que $u_n \in H^k(\Omega), n \geq 0$ est de Cauchy au sens de la norme $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$. On sait déjà qu'elle est de Cauchy au sens de la norme $\|\cdot\|_{H^{k-1}(\Omega)}$ et $H^{k-1}(\Omega)$ est complet par hypothèse de récurrence, donc il existe $u_{\infty} \in H^{k-1}(\Omega)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_{\infty}\|_{H^{k-1}(\Omega)} = 0$. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ un multi-indice arbitraire tel que $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d = k$. On sait que $\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u_n$ est de Cauchy $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ et comme $L^2(\Omega)$ est complet, il existe $p_{\infty} \in L^2(\Omega)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_{\infty} - \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Il nous suffit de démontrer que $p_{\infty} = \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u_{\infty}$. Comme $k = \alpha_1 + \dots + \alpha_d \geq 1$, on a $\alpha_j \geq 1$ pour au moins un $j \in \{1, \dots, d\}$. Définissons le multi-indice $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ par $\beta_{\ell} = \alpha_{\ell}$ si $\ell \neq j$, et $\beta_j = \alpha_j - 1$. On a alors $\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} = \partial_{x_j} \partial_{\mathbf{x}}^{\beta}$ si bien que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi p_{\infty} d\mathbf{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u_n d\mathbf{x} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \partial_{x_j} \varphi \partial_{\mathbf{x}}^{\beta} u_n d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \partial_{x_j} \varphi \partial_{\mathbf{x}}^{\beta} u_{\infty} d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_{0,k}^{\infty}(\Omega). \end{aligned}$$

On en tire donc finalement que $p_{\infty} = \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u_{\infty}$ de sorte que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u_{\infty} - \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} u_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$ et comme ceci est vrai pour tout α , on en tire finalement le résultat voulu. \square

Notons que si $u \in H^k(\Omega)$ pour $k \geq 2$ et $\varphi \in \mathcal{C}_{0,k}^{\infty}(\Omega)$, en appliquant la définition de la dérivation faible en cascade on obtient $\int_{\Omega} \varphi \partial_{x_1} \partial_{x_2} u d\mathbf{x} = \int_{\Omega} u \partial_{x_2} \partial_{x_1} \varphi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} u \partial_{x_1} \partial_{x_2} \varphi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \varphi \partial_{x_2} \partial_{x_1} u d\mathbf{x}$. Comme $\varphi \in \mathcal{C}_{0,k}^{\infty}(\Omega)$ est arbitraire, on en déduit par densité (théorème 3.18) que le lemme 1.3 (lemme de Schwarz) encore vrai au sens faible i.e.

$$\partial_{x_1} \partial_{x_2} u = \partial_{x_2} \partial_{x_1} u. \tag{4.9}$$

Il est clair qu'on a les inclusions $H^{k+1}(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ de sorte que les espaces de Sobolev $(H^k(\Omega))_{k \geq 0}$ constituent une famille d'espaces emboités les uns dans les autres comme des poupees russes. Dire d'une fonction u qu'elle appartient à un espace $H^k(\Omega)$ pour un k plus élevé, c'est dire qu'elle admet des dérivées partielles d'ordre plus élevé. Statuer sur les k tels que $u \in H^k(\Omega)$, c'est donc une façon de mesurer la régularité de cette fonction. D'ailleurs, pour un $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ borné, on a $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) \subset H^k(\Omega)$. A priori $H^k(\Omega) \not\subset \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ mais le résultat suivant, que

l'on admettra, établit une inclusion de ce type sous des hypothèses raisonnables. On trouvera une démonstration de ce résultat dans [18, I §6].

Proposition 4.15 (Injection de Sobolev).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert lipschitzien borné. Pour $k > m + d/2$ on a $H^k(\Omega) \subset \mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ et cette injection est continue : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{\Omega} |\partial_x^\alpha u| \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)} \quad \forall u \in H^k(\Omega).$$

Puisque les éléments des espaces de Sobolev sont des fonctions définies partout modulo un ensemble de mesure nul, les inclusions ci-dessus doivent s'entendre au sens où, pour tout $\dot{u} \in H^k(\Omega)$ classe d'équivalence modulo l'égalité presque partout, il existe un $u \in \dot{u}$ tel que $u \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$.

Chapitre 5

Formule de Green généralisée

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit l'espace de Sobolev qui est plus grand que les fonctions de classe \mathcal{C}^1 et dans lequel la notion de gradient avait encore un sens. Nous allons étudier en détail le comportement au bord des éléments de cet espace. Puis nous définirons une variante vectorielle de l'espace de Sobolev, ce qui nous permettra d'écrire des formules de Green telles que vues au chapitre 2 mais dans le cadre fonctionnel des espaces de Sobolev.

5.1 Opérateur de trace Dirichlet

Les espaces de Sobolev constituent un cadre fonctionnel privilégié pour l'analyse des EDP elliptiques. Comme les équations que nous souhaitons étudier comportent des conditions aux limites, il nous faut considérer la restriction de fonctions sur le bord $\partial\Omega$ du domaine de calcul. Mais les éléments de l'espace $H^1(\Omega)$ sont définis *a priori* partout modulo les ensembles de mesure (de Lebesgue) nulle et, puisque $\partial\Omega$ est de mesure nulle, considérer la restriction $u|_{\partial\Omega}$ n'a pas réellement de sens pour un $u \in L^2(\Omega)$. Mais l'opération de trace $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$ prend du sens dans $H^1(\Omega)$, et nous allons consacrer cette section à préciser cette notion.

Opérateur de trace

Il est clair que la trace sur le bord d'une fonction régulière est bien définie en tant que restriction au sens classique. Mais le résultat suivant donne une information plus fine en montrant une dépendance continue dans la norme de Sobolev.

Proposition 5.1.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert lipschitzien de frontière bornée. Il existe $C > 0$ telle que $\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$ pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ à support borné.

Démo :

On introduit un atlas fini $(B, \Phi_B)_{B \in \mathcal{B}}$ de $\partial\Omega$, ainsi qu'une partition de l'unité $(\varphi_B)_{B \in \mathcal{B}}$ subordonnée à cet atlas. Comme la somme dans (2.9) est finie, et $\sup_{\mathbb{R}^{d-1}} \sqrt{1 + |\nabla h_B|^2} < +\infty$ (cf prop. 2.4), il suffit de démontrer que pour tout $B \in \mathcal{B}$, il existe $C > 0$ indépendant de u tel que

$$\begin{aligned} \|u_B \circ \Phi_B\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} &\leq C\|u_B\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \\ \text{où } u_B(x) &:= \varphi_B(x)u(x). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Fixons donc $B \in \mathcal{B}$. Par définition de la carte locale, il existe $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$ orthogonale et $h_B : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne, tels que $\Phi_B(\mathbf{y}) = \mathbf{a} + U(\mathbf{y}, h_B(\mathbf{y}))$. Quitte à multiplier par une fonction de troncature valant 1 sur B , on peut supposer h_B à support borné. Posons $\phi(\mathbf{y}, z) = \mathbf{a} + U(\mathbf{y}, z)$ ainsi que $\Omega_\phi = \phi^{-1}(\Omega)$. On a $u_B(\Phi_B(\mathbf{y})) = u_B(\phi(\mathbf{y}, h_B(\mathbf{y})))$. Parce que φ_B est à support borné, $\varphi_B \circ \phi$ l'est aussi, et il existe donc un $h_* > 0$ tel que $\sup_{\mathbb{R}^{d-1}} |h_B| \leq h_*$ et $\varphi_B \circ \phi(\mathbf{y}, z) = 0$ pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$ dès que $|z| \geq h_*$. Comme $\text{supp}(u_B \circ \phi) \subset \text{supp}(\varphi_B \circ \phi)$, on en tire

$$\begin{aligned} \|u_B \circ \Phi_B\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2 &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_B \circ \phi(\mathbf{y}, h_B(\mathbf{y}))|^2 d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left| \int_{-\infty}^{h_B(\mathbf{y})} \partial_z(u_B \circ \phi)(\mathbf{y}, z) dz \right|^2 d\mathbf{y} \\ &\leq 2h_* \int_{\Omega_\phi} |\nabla(u_B \circ \phi)|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Dans ce calcul, nous avons utilisé le fait que $\text{supp}(u_B \circ \phi) \cap \{(\mathbf{y}, z) \in \mathbb{R}^d \mid z < h_B(\mathbf{y})\} \subset \Omega_\phi$. Maintenant notons que $d\phi = U^\top$ et, comme U est orthogonale, le lemme 1.8 nous donne $|\nabla(u_B \circ \phi)(\mathbf{x})| = |(\nabla u_B)(\phi(\mathbf{x}))|$. Finalement, en utilisant ϕ comme changement de variable dans l'intégrale, on conclut $\|\nabla(u_B \circ \phi)\|_{L^2(\Omega_\phi)} = \|\nabla u_B \circ \phi\|_{L^2(\Omega_\phi)} = \|\nabla u_B\|_{L^2(\Omega)}$ ce qui termine la preuve. \square

Le résultat qui précède montre que l'application trace $\varphi \mapsto \varphi|_{\partial\Omega}$ est linéaire continue de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ dans $L^2(\Gamma)$, en considérant $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ comme un sous-espace de $H^1(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Vu la densité de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$ (Corollaire 4.8), on peut donc appliquer la proposition 3.8 garantissant l'existence/unicité d'un prolongement par continuité.

Théorème 5.2 (Theorème de trace).



Il existe une unique application linéaire continue $\tau_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ vérifiant $\tau_{\partial\Omega}(\varphi) = \varphi|_{\partial\Omega}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Dans la suite on écrira à l'occasion " $u|_{\partial\Omega}$ " au lieu de " $\tau_{\partial\Omega}(u)$ " même lorsque $u \in H^1(\Omega)$ car l'unicité de l'application trace élimine tout ambiguïté quant au sens à accorder à cette notation. De plus on notera

$$\|\tau_{\partial\Omega}\| := \sup_{u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\tau_{\partial\Omega}(u)\|_{L^2(\partial\Omega)}}{\|u\|_{H^1(\Omega)}}. \quad (5.2)$$

Si Γ est un sous-ensemble de $\partial\Omega$ de mesure (de surface) non nulle, l'espace $L^2(\partial\Omega)$ s'injecte continument dans $L^2(\Gamma)$ par restriction i.e. $\|\varphi\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} \forall \varphi \in L^2(\partial\Omega)$. Et alors le théorème précédent montre que $u \mapsto u|_\Gamma$ peut être prolongé en une application continue de $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$.

Sobolev à trace nulle

Definition 5.3.

Soit $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure de surface non-nulle. On définit $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ comme l'adhérence au sens de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ de l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{C}_{0,\Gamma}^\infty(\overline{\Omega})$ à support borné.

Si $\varphi \in \mathcal{C}_{0,\Gamma}^\infty(\overline{\Omega})$ est à support borné, alors on a bien $\varphi \in H^1(\Omega)$, ce qui justifie cette définition. Par construction l'espace $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ et, en tant que tel, il peut être muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$ ce qui en fait un (sous-)espace de Hilbert (tout sous-ensemble fermé d'un espace complet étant complet). Il est d'usage de noter

$$H_0^1(\Omega) := H_{0,\partial\Omega}^1(\Omega). \quad (5.3)$$

En reprenant les notation du théorème 5.2, il est clair que $H_0^1(\Omega) \subset \text{Ker}(\tau_{\partial\Omega})$ par continuité de l'application. En réalité cette inclusion est une égalité que l'on peut utiliser pour caractériser $H_0^1(\Omega)$. La démonstration du résultat suivant, que nous admettrons, est proposée dans [15, Chap.1].

Proposition 5.4.

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\} = \text{Ker}(\tau_{\partial\Omega}).$$

Si Ω est connexe et $\Gamma \subset \partial\Omega$ est de mesure non nulle, alors une fonction $u \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ constante s'annule nécessairement partout $u = 0$ sur Ω parce que u doit prendre la valeur 0 sur Γ . Cette remarque conduit à une forme particulièrement simple de l'inégalité de Poincaré. Le résultat suivant est une application directe du théorème 4.11 avec le choix $\Phi(u) = \int_\Gamma |u| d\sigma$.

Lemme 5.5.

Soit Ω un ouvert lipschitzien connexe borné et $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure de surface non nulle. Il existe $\alpha > 0$ telle que $\alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\int_\Gamma |u| d\sigma)^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \forall u \in H^1(\Omega)$. On a en particulier

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1 + 1/\alpha) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega). \quad (5.4)$$

5.2 Espace des traces

Nous avons vu que l'application trace $\tau_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ n'était pas injective. Elle n'est pas surjective non plus. La trace induit donc un sous-espace remarquable de fonctions définies sur le bord auquel il est naturel de s'intéresser. De manière générale, pour $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure de surface non nulle, on définit

$$H^{1/2}(\Gamma) := \{u|_\Gamma, u \in H^1(\Omega)\}. \quad (5.5)$$

Dans cette définition il faut comprendre " $u|_\Gamma$ " comme $\tau_\Gamma(u) := \tau_{\partial\Omega}(u)|_\Gamma$ i.e. la restriction à Γ de la trace de u . Il s'agit bien d'un sous-espace strict de $L^2(\Gamma)$ et l'application $\tau_\Gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ est surjective. On peut équiper $H^{1/2}(\partial\Omega)$ d'une norme pour laquelle la trace reste continue.

Proposition 5.6.

L'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$, muni de la norme $\|\tau_{\partial\Omega}(u)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} := \inf\{\|u + v\|_{H^1(\Omega)}, v \in H_0^1(\Omega)\}$, est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet) et l'application trace $\tau_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ est une surjection continue de module unitaire

$$\|\tau_{\partial\Omega}(u)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (5.6)$$

Démo :

La continuité annoncée de l'opérateur trace est une évidence au vu de la définition de $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. Il faut simplement vérifier qu'il s'agit bien d'une norme avec laquelle $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est complet. Comme l'espace $H_0^1(\Omega)$ est fermé, on peut appliquer le théorème 3.10 de projection sur un sous-espace fermé qui donne, pour tout $u \in H^1(\Omega)$, l'existence et l'unicité d'un $\phi_0(u) \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\|u - \phi_0(u)\|_{H^1(\Omega)} = \inf\{\|u + v\|_{H^1(\Omega)}, v \in H_0^1(\Omega)\}$. Posons $\phi(u) := u - \phi_0(u)$ qui vérifie

$$\phi(u) \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \|\phi(u)\|_{H^1(\Omega)} = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \|u + v\|_{H^1(\Omega)} \quad (5.7)$$

pour tout $u \in H^1(\Omega)$. Autrement dit $\|\tau_{\partial\Omega}(u)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|\phi(u)\|_{H^1(\Omega)}$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$. D'après le corollaire 3.11, on voit par ailleurs que $\phi(u) \in H_0^1(\Omega)^\perp$ (où l'orthogonal est à comprendre au sens du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$) si bien que $u = \phi_0(u) + \phi(u)$ fournit la décomposition de u sur la somme directe orthogonale $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_0^1(\Omega)^\perp$. Donc $u \mapsto \phi(u)$ est un projecteur orthogonal qui est donc linéaire.

Vérifions maintenant les propriétés de $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. Pour $\dot{u}, \dot{v} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, soient $u, v \in H^1(\Omega)$ vérifiant $\tau_{\partial\Omega}(u) = \dot{u}, \tau_{\partial\Omega}(v) = \dot{v}$. Alors, vu la linéarité de ϕ , on a $\|\dot{u} + \lambda\dot{v}\|_{H^{1/2}} = \|\phi(u + \lambda v)\|_{H^1(\Omega)} = \|\phi(u) + \lambda\phi(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\phi(u)\|_{H^1(\Omega)} + |\lambda| \cdot \|\phi(v)\|_{H^1(\Omega)} = \|\dot{u}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + |\lambda| \cdot \|\dot{v}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. Ensuite si $\|\dot{u}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = 0$, alors $\|\phi(u)\|_{H^1(\Omega)} = 0$ d'où $\phi(u) = 0$ ce qui signifie que $u \in H_0^1(\Omega)$ et donc $\dot{u} = 0$. Donc $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ est bien une norme.

Vérifions enfin la complétude de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ pour cette norme. Soit $\dot{u}_n \in H^{1/2}(\partial\Omega), n \geq 0$ une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. Pour chaque n , il existe $u_n \in H^1(\Omega)$ tel que $\tau_{\partial\Omega}(u_n) = \dot{u}_n$. Alors $\|\phi(u_n) - \phi(u_m)\|_{H^1(\Omega)} = \|\phi(u_n - u_m)\|_{H^1(\Omega)} = \|\dot{u}_n - \dot{u}_m\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$, si bien que $\phi(u_n)$ est une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$ et converge donc vers un $u_\infty \in H^1(\Omega)$. Puisque ϕ est un projecteur continu on a même $\phi(u_n) = \phi(\phi(u_n)) \rightarrow \phi(u_\infty) = u_\infty$. En notant $\dot{u}_\infty = \tau_{\partial\Omega}(u_\infty)$, on a $\|\dot{u}_\infty - \dot{u}_n\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|\phi(u_\infty - u_n)\|_{H^1(\Omega)} = \|\phi(u_\infty) - \phi(u_n)\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$, ce qui conclut la preuve. \square

Il est important de comprendre que les normes $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ et $\|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)}$ ne sont pas équivalentes. L'une des deux normes est plus forte que l'autre.

Corollaire 5.7.

Pour tout ouvert lipschitzien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ borné, l'injection $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ est dense : pour tout $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$, il existe $\varphi_n \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0$. D'autre part cette injection est continue : il existe $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \quad \forall u \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Démo :

Nous admettrons le résultat de densité (on pourra consulter ???). Pour la continuité, il suffit d'appliquer le théorème 5.2 qui nous dit qu'il existe $C > 0$ telle que $\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v + v_0\|_{H^1(\Omega)}$ pour $u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ tel que $v|_{\partial\Omega} = u$ et pour tout $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Il reste ensuite à prendre la borne inférieure sur les $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. \square

Nous nous intéresserons également à l'espace dual $H^{-1/2}(\partial\Omega) = H^{1/2}(\partial\Omega)'$ défini comme l'ensemble des formes linéaires $q : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ continues par rapport à la norme $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$.

Nous noterons $\langle q, v \rangle_{\partial\Omega} := q(v)$. Nous verrons un peu plus loin pourquoi cette notation se justifie. Le dual hérite naturellement d'une structure d'espace de Banach.

Lemme 5.8.

L'ensemble $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ des formes linéaires continues $q : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ est un espace de Banach (espace normé complet) lorsqu'il est muni de la norme suivante

$$\|q\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} := \sup_{v \in H^{1/2}(\partial\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\langle q, v \rangle_{\partial\Omega}|}{\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}}.$$

Démo :

Des vérifications élémentaires montrent qu'il s'agit bien d'une norme. Il faut simplement de vérifier la complétude. Soit $q_n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, $n \geq 0$ une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}$. Tout d'abord $(\|q_n\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)})_{n \geq 0}$ est de Cauchy donc est bornée par une constante

$$C = \sup_{n \geq 0} \|q_n\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} < +\infty \quad (5.8)$$

Par ailleurs pour tout $v \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ la suite $(\langle q_n, v \rangle_{\partial\Omega})_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans \mathbb{C} vu que, par définition de la norme, on a l'estimation

$$\begin{aligned} |\langle q_n, v \rangle_{\partial\Omega} - \langle q_k, v \rangle_{\partial\Omega}| &= |\langle q_n - q_k, v \rangle_{\partial\Omega}| \\ &\leq \|q_n - q_k\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Donc la suite $(\langle q_n, v \rangle_{\partial\Omega})_{n \geq 0}$ converge vers une limite que nous noterons $q(v) := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle q_n, v \rangle_{\partial\Omega}$. Il est clair que $v \mapsto q(v)$ est linéaire. De plus on a $|\langle q_n, v \rangle_{\partial\Omega}| \leq C \|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ pour tout $n \geq 0$ et tout $v \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ d'après (5.8). En faisant $n \rightarrow +\infty$, on déduit finalement que $|\langle q, v \rangle_{\partial\Omega}| \leq C \|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$, de sorte que $q \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Enfin, puisque q_n est de Cauchy dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \geq 0$ tel que $\|q_n - q_k\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \epsilon$ dès que $n, k \geq N$. En reprenant (5.9) et en faisant $k \rightarrow \infty$, on obtient $|\langle q_n, v \rangle_{\partial\Omega} - \langle q, v \rangle_{\partial\Omega}| \leq \epsilon \|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ pour tout $v \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. On en déduit que $\|q - q_n\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$ i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|q - q_n\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} = 0$. \square

Pour tout $g \in L^2(\partial\Omega)$, définissons $\iota(g) \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ par $\langle \iota(g), v \rangle_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega} g v d\sigma \forall v \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. D'après le résultat de densité du corollaire 5.7, $\iota(g) = 0 \Rightarrow g = 0$ i.e. l'application $\iota : L^2(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ est une injection. En convenant d'identifier $L^2(\partial\Omega)$ avec son propre dual topologique, nous confondrons $\iota(g)$ avec g lui-même. Cette identification permet d'abord d'écrire

$$H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega) \subset H^{-1/2}(\partial\Omega) \quad (5.10)$$

chacune de ces injections étant continues. Par ailleurs, identifier $\iota(g)$ avec g amène à écrire $\langle g, v \rangle_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega} g v d\sigma \forall v \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Ceci suggère de prolonger l'identification de $\int_{\partial\Omega} \leftrightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$ à $H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)$ tout entier. Nous adopterons également parfois la notation suivante

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} q v d\sigma &:= \langle q, v \rangle_{\partial\Omega} \\ \text{pour } q \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), v \in H^{+\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Attention, il ne s'agit pas d'une "vraie" intégrale, mais bien d'une *convention de notation*. Cette convention simplifiera grandement les écritures par la suite.

Avec la norme introduite ci-dessus, et la convention de notation (5.11), on obtient directement l'inégalité $|\int_{\partial\Omega} qv \, d\sigma| \leq \|q\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ pour tout $q \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et tout $v \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, ce qui ressemble de très près à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

5.3 Divergence faible

De même que nous avons défini une notion de gradient faible, on peut définir une divergence faible, en utilisant la formule de Green et des fonctions test régulières s'annulant sur le bord. La définition suivante est à rapprocher de la définition 4.1 du chapitre précédent.

 **Definition 5.9.**

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, on dit qu'un champ de vecteur de carré intégrable $\mathbf{p} \in L^2(\Omega)^d$ admet une divergence faible, et on écrit " $\text{div}(\mathbf{p}) \in L^2(\Omega)$ ", lorsqu'il existe $u \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} \mathbf{p}^T \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u \varphi \, d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega),$$

où $\mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \text{ supp}(\varphi) \text{ borné}\}$. Si un tel u existe, il est unique. On écrit alors " $\text{div}(\mathbf{p})$ " pour désigner cette fonction $u \in L^2(\Omega)$.

De même que pour le gradient, et en suivant les mêmes arguments (exercice), la divergence faible ainsi définie est unique et généralise la divergence au sens classique telle qu'introduite au paragraphe 1.5. De même que pour le gradient la divergence faible est un opérateur linéaire $\text{div}(\mathbf{p} + \alpha \mathbf{q}) = \text{div}(\mathbf{p}) + \alpha \text{div}(\mathbf{q})$ si $\text{div}(\mathbf{p}), \text{div}(\mathbf{q}) \in L^2(\Omega)$. Cette notion permet donc de définir un espace vectoriel.

 **Definition 5.10.**

L'ensemble $H(\text{div}, \Omega) := \{\mathbf{p} \in L^2(\Omega)^d, \text{ div}(\mathbf{p}) \in L^2(\Omega)\}$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire et de la norme suivant

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}, \mathbf{q})_{H(\text{div}, \Omega)} &:= \int_{\Omega} \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{q}} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{p}) \text{div}(\bar{\mathbf{q}}) \, d\mathbf{x} \\ \|\mathbf{p}\|_{H(\text{div}, \Omega)} &:= (\|\mathbf{p}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{div}(\mathbf{p})\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Cette définition contient un résultat de complétude dont la démonstration est quasiment identique à celle de la proposition 4.4 (exercice à nouveau laissé au lecteur). On définit également des sous-espaces fermés remarquables comme suit.

 **Definition 5.11.**

Étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et un sous-ensemble $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure de surface non-nulle, on définit $H_{0,\Gamma}(\text{div}, \Omega)$ comme l'adhérence pour la norme $\|\cdot\|_{H(\text{div}, \Omega)}$ de l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{C}_{0,\Gamma}^\infty(\Omega)^d$ à support borné.

Il est d'usage de noter $H_0(\text{div}, \Omega) := H_{0,\partial\Omega}(\text{div}, \Omega)$. Par construction, les espaces $H_{0,\Gamma}(\text{div}, \Omega)$ sont des sous-espaces fermés de $H(\text{div}, \Omega)$.

5.4 Flux normal sortant au bord

Vu la définition 5.9, par densité de $\mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, on a $\int_\Omega \mathbf{p}^\top \nabla u + u \operatorname{div}(\mathbf{p}) d\mathbf{x} = 0$ pour tout $\mathbf{p} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ et tout $u \in H_0^1(\Omega)$. En revanche cette intégrale n'a aucune raison de s'annuler si $u \in H^1(\Omega)$ car, dans ce cas, des termes de bord supplémentaires doivent être pris en compte. Ceci nous conduit à formaliser la notion de flux sortant. Pour tout champ $\mathbf{p} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$, on définit $\pi_{\partial\Omega}(\mathbf{p}) \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (i.e. forme linéaire continue $H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$) par l'identité

$$\langle \pi_{\partial\Omega}(\mathbf{p}), u|_{\partial\Omega} \rangle_{\partial\Omega} := \int_\Omega \mathbf{p}^\top \nabla u + u \operatorname{div}(\mathbf{p}) d\mathbf{x} \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (5.12)$$

Cette définition est licite car l'opérateur de trace $\tau_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ est surjectif et, par ailleurs, le membre de droite dans (5.12) dépend uniquement de $u|_{\partial\Omega}$: en effet si $u'|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$ pour un autre $u' \in H^1(\Omega)$, alors $u - u' \in H_0^1(\Omega)$ d'après la proposition 5.4, et donc $\int_\Omega \mathbf{p}^\top \nabla(u - u') + (u - u') \operatorname{div}(\mathbf{p}) d\mathbf{x} = 0$. Pour bien comprendre cette opérateur $\pi_{\partial\Omega}$, voyons ce que devient cette définition si le champ de vecteur \mathbf{p} est régulier.

Lemme 5.12.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert lipschitzien à frontière borné dont la normale sortante au bord est notée \mathbf{n} . Alors pour tout $\mathbf{p} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ on a

$$\langle \pi_{\partial\Omega}(\mathbf{p}), v \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}^\top \mathbf{p} v d\sigma \quad \forall v \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Démo :

En prenant dans un premier temps $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, il suffit d'appliquer la formule de Green (2.13) pour obtenir $\langle \pi_{\partial\Omega}(\mathbf{p}), u|_{\partial\Omega} \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}^\top \mathbf{p} u|_{\partial\Omega} d\sigma$. Il reste ensuite à utiliser la densité de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$ cf corollaire 4.8, et la surjectivité de la trace Dirichlet $\tau_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$. \square

Le résultat précédent montre que l'opérateur $\pi_{\partial\Omega}$ prolonge la notion de flux normal $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{n}^\top \mathbf{p}|_{\partial\Omega}$ à tout $H(\operatorname{div}, \Omega)$ si bien que nous écrirons parfois " $\mathbf{n}^\top \mathbf{p}|_{\partial\Omega}$ " au lieu de $\pi_{\partial\Omega}(\mathbf{p})$. Ceci justifie par ailleurs un peu plus la convention de notation (5.11). L'opérateur de flux normal $\pi_{\partial\Omega} : H(\operatorname{div}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ est un deuxième opérateur de trace, linéaire et continue. Il est contrôlé par la norme $H(\operatorname{div}, \Omega)$.

Lemme 5.13.

L'application $\pi_{\partial\Omega} : H(\operatorname{div}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ définie par (5.12) est une surjection linéaire continue de module unitaire $\|\pi_{\partial\Omega}(\mathbf{p})\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \|\mathbf{p}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}$.

Démo :

Vérifions dans un premier temps la continuité. Fixons un $\mathbf{p} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$. Puisque $\tau_{\partial\Omega}(u + u_0) = \tau_{\partial\Omega}(u)$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (5.12), on obtient $|\langle \pi_{\partial\Omega}(\mathbf{p}), \tau_{\partial\Omega}(u) \rangle_{\partial\Omega}| \leq \|\mathbf{p}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \|u + u_0\|_{H^1(\Omega)}$. En prenant l'inf sur les $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ ceci conduit à $|\langle \pi_{\partial\Omega}(\mathbf{p}), \tau_{\partial\Omega}(u) \rangle_{\partial\Omega}| \leq \|\mathbf{p}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \|\tau_{\partial\Omega}(u)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ d'après la définition de $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ donnée dans la Proposition 5.6. Vu que l'opérateur de trace Dirichlet $\tau_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ est surjectif, ceci se ré-écrit $|\langle \pi_{\partial\Omega}(\mathbf{p}), v \rangle_{\partial\Omega}| / \|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq \|\mathbf{p}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}$. Il reste à prendre le sup sur les $v \in H^{1/2}(\partial\Omega) \setminus \{0\}$.

Nous vérifions maintenant la surjectivité. Soit $q \in H^{-1/2}(\Omega)$. L'application $v \mapsto \langle q, v|_{\partial\Omega} \rangle_{\partial\Omega}$ est une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega)$ d'après la continuité de la trace Dirichlet cf. proposition 5.1. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u^\top \nabla \bar{v} + u \bar{v} \, dx = \langle q, \bar{v}|_{\partial\Omega} \rangle_{\partial\Omega}$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. Posons $\mathbf{p} = \nabla u$, et observons que

$$\int_{\Omega} \mathbf{p}^\top \nabla \varphi + u \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_{0,\kappa}^\infty(\Omega).$$

De cela on déduit que $\mathbf{p} \in H(\text{div}, \Omega)$ avec $\text{div}(\mathbf{p}) = u$. Et alors, vu la définition de u , pour tout $v \in H^1(\Omega)$ on a $\int_{\Omega} \mathbf{p}^\top \nabla v + \text{div}(\mathbf{p}) v \, dx = \langle q, v|_{\partial\Omega} \rangle_{\partial\Omega}$, c'est-à-dire $\pi_{\partial\Omega}(\mathbf{p}) = q$. \square

Revenons sur la définition sur l'opérateur de flux normal sortant au bord, et ré-écrivons simplement cette définition en adoptant la convention de notation (5.11). On obtient une généralisation de la formule de Green (2.13) dans le cas de fonctions appartenant à des espaces de Sobolev.

Lemme 5.14 (Formule de Green généralisée).



$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{p}^\top \nabla v + v \text{div}(\mathbf{p}) \, dx &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}^\top \mathbf{p} v \, d\sigma \\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad \forall \mathbf{p} \in H(\text{div}, \Omega). \end{aligned}$$

Chapitre 6

Formulations variationnelles

Nous disposons maintenant des nécessaires à l'étude de toute une gamme d'EDPs elliptiques linéaires. Dans ce chapitre nous examinerons diverses problèmes aux limites elliptiques et chercherons, pour chacun de ces problèmes à répondre aux questions suivantes :

Q1 : Y a-t-il existence d'une solution ?

Q2 : Y a-t-il unicité d'une éventuelle solution ?

Q3 : Quelle est la dépendance d'une éventuelle solution vis-à-vis des données ?

6.1 Problème aux limites modèle

Nous commençons par nous concentrer sur un problème aux limites assez simple. On se place dans un ouvert lipschitzien borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, on considère une constante $\mu \in \mathbb{C}$ satisfaisant la condition

$$\Re\{\mu^2\} > 0 \quad (6.1)$$

On se donne également un terme source volumique $f \in L^2(\Omega)$ et surfacique $g \in L^2(\partial\Omega)$. Le problème que l'on souhaite examiner s'écrit

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \Delta u - \mu^2 u = -f \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u = g \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.2)$$

Bien comprendre le problème

Discutons de l'interprétation à donner aux termes apparaissant dans (6.2). Supposer $u \in H^1(\Omega)$ semble une hypothèse minimale : l'espace $H^1(\Omega)$ offre un cadre hilbertien et autorise à dériver u , il semble a priori difficile de demander moins en terme de régularité. Dans ce contexte, presque tous les termes de (6.2) sont bien définis. Seul le terme " Δu " peut soulever une éventuelle difficulté. Dans le présent contexte, le sens à donner à ce terme est le suivant :

$$\begin{aligned} \nabla u &\in H(\text{div}, \Omega) \quad \text{et} \\ \text{div}(\nabla u) &= \Delta u = \mu^2 u - f \end{aligned} \quad (6.3)$$

Autrement dit, quand on écrit (6.2), on impose quelquechose de plus fort que juste $u \in H^1(\Omega)$: on impose aussi $\nabla u \in H(\text{div}, \Omega)$. Ceci nous amène naturellement à nous intéresser à un espace adapté à notre problème.

Lemme 6.1.

L'espace $H^1(\Delta, \Omega) := \{u \in H^1(\Omega), \nabla u \in H(\text{div}, \Omega)\}$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire $(u, v)_{H^1(\Delta, \Omega)} := (u, v)_{H^1(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{H(\text{div}, \Omega)}$.

La preuve de ce résultat est laissée au lecteur : elle suit de très près la démonstration de la proposition 4.4 et ne pose pas de difficulté particulière. Pour résumer, quand on écrit (6.2) on impose implicitement $u \in H^1(\Delta, \Omega)$. Ceci autorise à considérer la trace Dirichlet $u|_{\partial\Omega}$, mais également le flux normal du gradient

$$\partial_{\mathbf{n}} u := \mathbf{n}^\top \nabla u|_{\partial\Omega}. \quad (6.4)$$

Cette quantité, appelée la trace Neumann, avait déjà été introduite pour des fonctions régulières au §2.4. En combinant le lemme 6.1 et le lemme 5.13, on voit que cet opérateur réalise une application continue $\partial_{\mathbf{n}} : H^1(\Delta, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Ré-écriture variationnelle : formule de Green

Le première étape pour l'étude de (6.2) consiste à ré-écrire ce problème sous une forme variationnelle équivalente i.e. une ré-écriture comme (3.14) car c'est un cadre dans lequel nous disposons de résultats d'existence/unicité/continuité. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 6.2.

Une fonction u est solution de (6.2) si et seulement si elle satisfait :

$$\begin{aligned} u &\in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \\ \text{avec} \quad a(u, v) &:= \int_{\Omega} \nabla u^\top \nabla \bar{v} + \mu^2 u \bar{v} \, d\mathbf{x} \\ \ell(v) &:= \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g \bar{v} \, d\sigma \end{aligned} \quad (6.5)$$

Démo :

Partons de $u \in H^1(\Omega)$ solution de (6.2). Choisissons un $v \in H^1(\Omega)$ et appliquons la formule de Green généralisée du lemme 5.14 avec $\mathbf{p} = \nabla u \in H(\text{div}, \Omega)$. On obtient $\int_{\Omega} \nabla u^\top \nabla \bar{v} + \bar{v} \Delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \bar{v} \mathbf{n}^\top \nabla u \, d\sigma$. En vertu de la 2ème équation de (6.2), on peut remplacer Δu par $\mu^2 u - f$, et $\partial_{\mathbf{n}} u = \mathbf{n}^\top \nabla u|_{\partial\Omega}$ par g . Ceci fournit finalement $a(u, v) = \ell(v)$ comme ci-dessus.

Réiproquement supposons que $u \in H^1(\Omega)$ satisfait $a(u, v) = \ell(v) \forall v \in H^1(\Omega)$. Commençons par choisir $v \in \mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Alors l'identité variationnelle $a(u, v) = \ell(v)$ se ré-écrit :

$$\int_{\Omega} \nabla u^\top \nabla \bar{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (f - \mu^2 u) \bar{v} \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega). \quad (6.6)$$

D'après les définitions 4.1 et 5.10, on en conclut que $\nabla u \in H(\text{div}, \Omega)$ et que $\Delta u = \mu^2 u - f$ dans Ω ce qui est la 2ème équation de (6.2). A présent nous reprenons l'identité variationnelle $a(u, v) = \ell(v)$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. En appliquant le lemme 5.14, on obtient l'identité $\int_{\Omega} \nabla u^\top \nabla \bar{v} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \bar{v} \Delta u \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \bar{v} \partial_{\mathbf{n}} u \, d\sigma$. Si l'on reporte ceci dans l'expression de $a(u, v)$

obtient

$$\begin{aligned}\ell(v) &= \int_{\Omega} f\bar{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g\bar{v} d\sigma = a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u^{\top} \nabla \bar{v} + \mu^2 u\bar{v} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \bar{v}(\mu^2 u - \Delta u) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \bar{v}\partial_{\mathbf{n}} u d\sigma \\ &= \int_{\Omega} f\bar{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \bar{v}\partial_{\mathbf{n}} u d\sigma \quad \forall v \in H^1(\Omega).\end{aligned}$$

On en déduit que $\int_{\partial\Omega} (g - \partial_{\mathbf{n}} u)\bar{v} d\sigma = 0$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. Par surjectivité de l'opérateur de trace (Proposition 5.6), on déduit finalement $\partial_{\mathbf{n}} u = g$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, ce qui est la 3ème équation de (6.2). \square

C'est l'écriture du problème sous la forme "Trouver $u \in V$ tel que $a(u, v) = \ell(v) \forall v \in V$ " que l'on nomme formulation variationnelle. L'espace V est appelé espace variationnel (dans le cas présent on a $V = H^1(\Omega)$). Il est important de bien comprendre la méthodologie employée dans la première partie de la preuve précédente. Une formulation variationnelle est presque toujours obtenue selon les trois même étapes :

Méthode :

Étape 1 On part de l'EDP dans le volume Ω que l'on multiplie par une fonction v choisie dans l'espace variationnel V qui convient (ici $V = H^1(\Omega)$).

Étape 2 On intègre sur le domaine de calcul Ω et on applique la formule de Green, ce qui fait apparaître des termes de bord.

Étape 3 On injecte les conditions aux limites dans les termes de bord apparus à l'étape précédente.

Heuristique de choix de l'espace variationnel Dans le cadre d'une EDP elliptique d'ordre 2 et en l'*absence de condition aux limites de Dirichlet* on peut, en général, choisir $H^1(\Omega)$ comme espace variationnel. Cette règle n'est cependant qu'une heuristique et il convient, pour chaque problème aux limites étudié, d'établir l'équivalence entre le problème de départ et la formulation variationnel.

Existence-unicité de la solution : Lax-Milgram

Nous avons travaillé pour nous ramener à un problème posé dans un espace de Hilbert. Ceci nous donne accès à tout un arsenal théorique dont le théorème 3.15 (Lax-Milgram) que nous pouvons appliquer à (6.5). Passons soigneusement en revue les hypothèses.

Hypothèse 1 : espace de Hilbert ? Il est clair que l'espace variationnel $H^1(\Omega)$ intervenant dans la formulation (6.5) est un espace Hilbert : c'est précisément ce que dit la proposition 4.4.

Hypothèse 2 : $\ell(\cdot)$ continue ? D'après le corollaire 3.7, la continuité sera établie si on arrive à montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $|\ell(v)| \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}$. Si on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Lemme 3.2) dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(\partial\Omega)$, on obtient $|\ell(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|v\|_{L^2(\partial\Omega)}$. Il reste à remarquer que $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ et à appliquer le théorème 5.1 de trace. Si on note $\|\tau_{\partial\Omega}\| > 0$ le module de

continuité de la trace en tant qu'application $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$, on obtient :

$$|\ell(v)| \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\tau_{\partial\Omega}\| \cdot \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Hypothèse 3 : $a(\cdot, \cdot)$ continue ? A nouveau on utilise le corollaire 3.7 : il suffit de démontrer l'existence de $C > 0$ telle que $|a(u, v)| \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$ pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| \cdot |\nabla v| d\mathbf{x} + |\mu^2| \int_{\Omega} |u| \cdot |v| d\mathbf{x} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + |\mu^2| \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max(1, |\mu^2|) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Hypothèse 4 : $a(\cdot, \cdot)$ coercive ? En utilisant l'hypothèse (6.1) on observe que $\min(1, \Re e\{\mu^2\}) > 0$, et par un calcul direct on obtient, pour tout $v \in H^1(\Omega)$, l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |a(v, v)| \geq \Re e\{a(v, v)\} &= \Re e\left\{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \mu^2 |v|^2 d\mathbf{x}\right\}, \\ &= \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Re e\{\mu^2\} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ &\geq \min(1, \Re e\{\mu^2\}) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Nous avons vérifié toutes les hypothèses du théorème 3.15 (Lax-Milgram). On en déduit l'existence et l'unicité d'un $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant (6.5) et donc (6.2). En bonus le théorème de Lax-Milgram nous fournit la dépendance continue de la solution u par rapport aux données f, g :

Lemme 6.3.

Le problème (6.2) admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ satisfaisant

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\min(1, \Re e\{\mu^2\})} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\tau_{\partial\Omega}\| \cdot \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}). \quad (6.9)$$

Régularité

Nous avons établi l'existence et l'unicité de la solution du problème (6.2). Nous savons que cette solution appartient à $H^1(\Omega)$ et même à $H^1(\Delta, \Omega)$. Mais peut-on obtenir des résultats plus précis au sujet de la régularité de cette solution ? Comme le montre la proposition suivante que nous admettrons (voir par exemple [4, §9.6]), la réponse est oui à condition de formuler des hypothèses suffisantes sur la régularité des données du problème.

Proposition 6.4.

On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné de classe \mathcal{C}^{k+2} , que $f \in H^k(\Omega)$ et qu'il existe $v_g \in H^{k+2}(\Omega)$ tel que $\partial_{\mathbf{n}} v_g|_{\partial\Omega} = g$. Alors l'unique solution $u \in H^1(\Omega)$ de (6.2) appartient à $H^{k+2}(\Omega)$.

6.2 Problème aux limites plus général

Nous examinons maintenant un problème plus général auquel nous allons appliquer le même schéma d'étude que précédemment. Dans la suite on se place sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ lipschitzien borné, on considère des fonctions continues $\mathcal{A} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$, $\mathbf{b} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ et deux

fonctions scalaires $\lambda, c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ continues elles aussi. Étant donnés $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$, on veut résoudre

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u) + \mathbf{b}^\top \nabla u + cu = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n},\mathcal{A}} u + \lambda u = g \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.10)$$

Il s'agit cette fois d'une EDP à coefficients variables, ce qui n'était pas le cas de (6.2). Soulignons à nouveau qu'avec une telle EDP, on ne suppose pas uniquement $u \in H^1(\Omega)$ mais aussi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\nabla u &\in H(\operatorname{div}, \Omega) \quad \text{et} \\ \operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u) &= \mathbf{b}^\top \nabla u + cu - f \end{aligned} \quad (6.11)$$

ce qui, du coup, donne un sens au terme " $\operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u)$ " et autorise à considérer l'opérateur de trace conormale défini par

$$\partial_{\mathbf{n},\mathcal{A}} u := \mathbf{n}^\top \mathcal{A}\nabla u|_{\partial\Omega}. \quad (6.12)$$

Dans le cas où $\mathcal{A} = \operatorname{Id}$ on retrouve l'opérateur de trace Neumann introduit en (2.7). Ce qui précède nous amène naturellement à introduire un espace adapté à notre problème. A nouveau la preuve du résultat suivant est laissé au lecteur car elle suit de très près la preuve de la proposition 4.4.

Lemme 6.5.

L'espace $H^1(\Delta_{\mathcal{A}}, \Omega) := \{u \in H^1(\Omega), \mathcal{A}\nabla u \in H(\operatorname{div}, \Omega)\}$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire $(u, v)_{H^1(\Delta_{\mathcal{A}}, \Omega)} := (u, v)_{H^1(\Omega)} + (\mathcal{A}\nabla u, \mathcal{A}\nabla v)_{H(\operatorname{div}, \Omega)}$. De plus l'opérateur de trace conormale $\partial_{\mathbf{n},\mathcal{A}}$ est continue de $H^1(\Delta_{\mathcal{A}}, \Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

En suivant le plan d'étude de la section 6.1, commençons par ré-écrire ce problème sous forme variationnelle, ce qui permettra de le faire rentrer dans un cadre hilbertien. C'est l'objet de la proposition suivante.

Lemme 6.6.

Une fonction u est solution de (6.10) si et seulement si elle satisfait :

$$\begin{aligned} u &\in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \\ \text{avec} \quad a(u, v) &:= \int_{\Omega} \nabla \bar{v}^\top \mathcal{A} \nabla u + \nabla u^\top \mathbf{b} \bar{v} + cu \bar{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \lambda u \bar{v} \, d\sigma \\ \ell(v) &:= \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g \bar{v} \, d\sigma \end{aligned} \quad (6.13)$$

Démo :

Pour montrer $[u \text{ satisfait (6.10)}] \Rightarrow [u \text{ satisfait (6.13)}]$, nous suivons les trois étapes mentionnée à la fin du §6.1. **Étape 1 :** Le point crucial consiste ici à choisir correctement l'espace variationnel. Il n'y a pas de condition aux limites de Dirichlet, nous choisissons donc $V = H^1(\Omega)$ comme espace variationnel. **Étape 2 :** On multiplie l'EDP par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$, on intègre sur Ω et on applique une formule de Green,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u) \bar{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{b}^\top \nabla u + cu) \bar{v} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \nabla \bar{v}^\top \mathcal{A} \nabla u \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{b}^\top \nabla u + cu) \bar{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \bar{v} \partial_{\mathbf{n},\mathcal{A}} u \, d\sigma \end{aligned} \quad (6.14)$$

Étape 3 : On prend en compte les conditions aux limites, ce qui consiste ici à écrire $\partial_{\mathbf{n}, \mathcal{A}} u = g - \lambda u|_{\partial\Omega}$, à injecter cette identité dans (6.14) et à faire passer le terme associé à g de l'autre côté de l'égalité. Ceci conduit exactement à (6.13).

Réciproquement supposons que $u \in H^1(\Omega)$ satisfait (6.13). Choisissons un $v \in \mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega)$. On a en particulier $v|_{\partial\Omega} = 0$ de sorte que $\int_\Omega \nabla \bar{v}^\top \mathcal{A} \nabla u + \nabla u^\top \mathbf{b} \bar{v} + cu \bar{v} d\mathbf{x} = \int_\Omega f \bar{v} d\mathbf{x}$. En appliquant maintenant la formule de Green généralisée on obtient : $\int_\Omega (-\operatorname{div}(\mathcal{A} \nabla u) + \nabla u^\top \mathbf{b} \bar{v} + cu - f) \bar{v} d\mathbf{x} = 0$ pour tout $v \in \mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega)$ et, en appliquant le corollaire 3.19,

$$-\operatorname{div}(\mathcal{A} \nabla u) + \mathbf{b}^\top \nabla u + cu = f \quad \text{dans } \Omega. \quad (6.15)$$

A présent, nous repartons de (6.13) en choisissant cette fois un $v \in H^1(\Omega)$ arbitraire et donc pas forcément nul sur le bord. On applique à nouveau une formule de Green généralisée et on utilise l'identité (6.15) que nous venons d'établir.

$$\begin{aligned} & \int_\Omega f \bar{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g \bar{v} d\sigma \\ &= \int_\Omega \nabla \bar{v}^\top \mathcal{A} \nabla u d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{b}^\top \nabla u + cu) \bar{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \lambda u \bar{v} d\sigma \\ &= \int_\Omega (-\operatorname{div}(\mathcal{A} \nabla u) + \mathbf{b}^\top \nabla u + cu) \bar{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (\partial_{\mathbf{n}, \mathcal{A}} u + \lambda u) \bar{v} d\sigma \\ &= \int_\Omega f \bar{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (\partial_{\mathbf{n}, \mathcal{A}} u + \lambda u) \bar{v} d\sigma \end{aligned} \quad (6.16)$$

On obtient donc finalement $\int_{\partial\Omega} (\partial_{\mathbf{n}, \mathcal{A}} u + \lambda u - g) \bar{v} d\sigma = 0$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et, par surjectivité de l'application trace $\tau_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$, on obtient $\partial_{\mathbf{n}, \mathcal{A}} u + \lambda u = g$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Nous avons donc établi que u est solution de (6.10). \square

Le lemme précédent a permis de mettre le problème aux limites (6.10) sous forme variationnelle. Examinons maintenant dans quelle mesure ce problème admet une unique solution. Nous n'avons supposé que peu de choses sur les coefficients $\mathcal{A}, \mathbf{b}, c$ de sorte qu'il est difficile de conclure. On a néanmoins le résultat partiel suivant.

Lemme 6.7.



Si la forme sesquilinéaire $a(,)$ donnée par (6.13) est coercive, alors le problème aux limites (6.10) admet une unique solution.

Démo :

Il suffit de vérifier que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, à l'exception de l'hypothèse de coercivité que l'on suppose d'emblée satisfaite. **Hypothèse 1 :** L'espace $V = H^1(\Omega)$ que nous avons choisi comme espace variationnel est bien un espace de Hilbert d'après la proposition 4.4. **Hypothèse 2 :** la forme linéaire $\ell(\cdot)$ est bien continue puisque d'après le théorème 5.2, l'application $\tau_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ est continue (on notera $\|\tau_{\partial\Omega}\|$ son module de continuité) si bien que, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\ell(v)| &\leq \left| \int_\Omega f \bar{v} d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\partial\Omega} g \bar{v} d\sigma \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\tau_{\partial\Omega}\| \cdot \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Hypothèse 3 : Montrons enfin que $a(\cdot, \cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ est bien continue. On a supposé la continuité de $\mathcal{A}(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x}), c(\mathbf{x})$ sur \mathbb{R}^d et donc ces fonctions sont bornées sur $\overline{\Omega}$ qui est compact (on a supposé Ω borné). En notant $\|\mathcal{A}\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{\xi \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}} |\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \xi| / |\xi|$ et de même pour $\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(\Omega)}$ et $\|c\|_{L^\infty(\Omega)}$, on a les estimations

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla \bar{v}^\top \mathcal{A} \nabla u d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\Omega} \nabla u^\top \mathbf{b} \bar{v} d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\Omega} c u \bar{v} d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\partial\Omega} \lambda u \bar{v} d\sigma \right| \\ &\leq \|\mathcal{A}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\lambda\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq (\|\mathcal{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\lambda\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|\tau_{\partial\Omega}\|^2) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (6.18)$$

où on rappelle que $\|\tau_{\partial\Omega}\|$ renvoie au module de continuité de l'application trace $\tau_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ cf (5.2). Dans ces calculs nous avons également posé $\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbf{b}(\mathbf{x})|$ et de même pour $c(\mathbf{x})$ sur Ω et $\lambda(\mathbf{x})$ sur $\partial\Omega$. \square

Avec le lemme précédent, nous sommes ramenés à la question de savoir si la forme sesquilinearaire $a(\cdot, \cdot)$ était coercive. Cette question ne peut être tranchée a priori sans plus d'hypothèse sur les coefficients de l'équation $\mathcal{A}, \mathbf{b}, c$ et λ , et en particulier sur leur signe. Il n'y a pas de règle générale équivalente à la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$: il faut examiner pour chaque situation concrète si oui ou non la coercivité est vérifiée. En guise d'exemple, nous considérons ci-dessous deux cas de figure pour lesquels on peut établir la coercivité.

Lemme 6.8.



On se place dans le cas $\mathbf{b} \equiv 0$ et $c \equiv 0$ sur Ω . On suppose qu'il existe $\alpha_* > 0$ tels que $\Re e\{\xi^\top \mathcal{A}(\mathbf{x}) \bar{\xi}\} \geq \alpha_* |\xi|^2$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega, \xi \in \mathbb{C}^d$, et $\Re e\{\lambda(\mathbf{x})\} > 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Alors la forme sesquilinearaire $a(\cdot, \cdot)$ définie dans (6.13) est coercive.

Démo :

Puisque \mathbf{b} et c sont partout nuls, on a $\Re e\{a(u, u)\} = \int_{\Omega} \Re e\{\nabla \bar{u}^\top \mathcal{A} \nabla u\} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \Re e\{\lambda\} |u|^2 d\sigma$. Quitte à décomposer les intégrales selon les composantes connexes de Ω , on peut supposer que Ω est connexe. Posons $\Phi(v) = (\frac{1}{\alpha_*} \int_{\partial\Omega} \Re e\{\lambda\} |v|^2 d\sigma)^{1/2}$. Parce que $\Re e\{\lambda(\mathbf{x})\} > 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, il est clair que $\Phi(1) \neq 0$, de sorte que $\nabla v = 0$ et $\Phi(v) = 0$ implique $v = 0$. En appliquant le théorème 4.11 (inégalité de Poincaré) on déduit l'existence de $\beta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \beta \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq |\Phi(v)|^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \Rightarrow \alpha_* \beta \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\partial\Omega} \Re e\{\lambda\} |v|^2 d\sigma + \alpha_* \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \Re e\{a(v, v)\}, \\ \Rightarrow \frac{\alpha_*}{2} \min(1, \beta) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{2} (\alpha_* \beta \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_* \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2) \leq \Re e\{a(v, v)\} \leq |a(v, v)|. \end{aligned}$$

\square

Insistons sur le rôle crucial qu'a joué l'inégalité de Poincaré dans la preuve précédente. Notons par ailleurs que l'hypothèse portant sur $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ peut être ré-écrite $\inf \mathfrak{S}(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x})^*) > \alpha_*$ $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ où " \mathfrak{S} " désigne le spectre : cette hypothèse signifie que la partie symétrique de \mathcal{A} est définie positive uniformément en \mathbf{x} . On considère à présent un deuxième cas de figure couvrant le cas d'une condition de "Neumann pure".

Lemme 6.9.

 On suppose qu'il existe $\alpha_* > 0$ tel que $\Re\{\boldsymbol{\xi}^\top \mathcal{A}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi}\} \geq \alpha_* |\boldsymbol{\xi}|^2$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d$, et que $\mathbf{b} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe \mathscr{C}^1 et à valeurs réelles. Alors les deux conditions suivantes sont suffisantes pour que la forme sesquilinearéaire $a(\cdot, \cdot)$ définie dans (6.10) soit coercive :

- $\Re\{c(\mathbf{x}) - \operatorname{div}(\mathbf{b}(\mathbf{x}))/2\} > 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega,$
- $\Re\{\lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{n}(\mathbf{x})^\top \mathbf{b}(\mathbf{x})/2\} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega.$

Démo :

Remarquons tout d'abord que, comme $\mathbf{b} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ est de la classe \mathscr{C}^1 , on a $\mathbf{b}v \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$ pour tout $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, avec $\operatorname{div}(v\mathbf{b}) = \mathbf{b}^\top \nabla v + v\operatorname{div}(\mathbf{b})$. En appliquant une formule de Green généralisée Lemma 5.14, on a donc $\int_{\Omega} \bar{v} \mathbf{b}^\top \nabla u d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\bar{v} \mathbf{b}) u d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u \bar{v} \mathbf{n}^\top \mathbf{b} d\sigma$, et on en déduit

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \bar{v} \mathbf{b}^\top \nabla u d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \bar{v} \mathbf{b}^\top \nabla u d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\bar{v} \mathbf{b}) u d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u \bar{v} \mathbf{n}^\top \mathbf{b} d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{b}^\top (\bar{v} \nabla u - u \nabla \bar{v}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{b}) u \bar{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u \bar{v} \mathbf{n}^\top \mathbf{b} d\sigma \end{aligned}$$

En injectant cette identité dans (6.13), on peut alors obtenir pour $a(\cdot, \cdot)$ l'expression symétrisée suivante

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla \bar{v}^\top \mathcal{A} \nabla u + (c - \operatorname{div}(\mathbf{b})/2) u \bar{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (\lambda + \mathbf{n}^\top \mathbf{b}/2) u \bar{v} d\sigma \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{b}^\top (\bar{v} \nabla u - u \nabla \bar{v}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Comme \mathbf{b} est supposée à valeurs réelles, on a $\Re\{\mathbf{b}^\top (\bar{u} \nabla u - u \nabla \bar{u})\} = 0$. En utilisant les hypothèses du lemme, et en posant $c_r := \Re\{c - \operatorname{div}(\mathbf{b})/2\}/\alpha_* > 0$, on en tire donc $\Re\{a(u, u)\} \geq \int_{\Omega} \Re\{\nabla \bar{u}^\top \mathcal{A} \nabla u\} + \alpha_* c_r |u|^2 d\mathbf{x} \geq \alpha_* (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} c_r |u|^2 d\mathbf{x})$. Ensuite en appliquant l'inégalité de Poincaré i.e. théorème 4.11 avec $\Phi(v) := (\int_{\Omega} c_r |u|^2 d\mathbf{x})^{1/2}$, on obtient l'existence de $\beta > 0$ tel que

$$\beta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} c_r |u|^2 d\mathbf{x} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{6.20}$$

De sorte que finalement $\alpha_* \min(1, \beta) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \alpha_* \beta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_* \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \Re\{a(u, u)\} \leq 2|a(u, u)|$, ce qui termine la preuve de coercivité. \square

Encore une fois, dans la preuve précédente, l'inégalité de Poincaré s'est avéré un résultat clé. Pour clore cette section, nous énonçons un résultat portant sur la régularité des solutions des problèmes de la forme (6.10). On admettra ce résultat (le lecteur pourra consulter [4, §9.6] pour une démonstration détaillée).

Théorème 6.10.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe \mathscr{C}^{k+2} . On suppose par ailleurs que les fonctions $\mathcal{A}, \mathbf{b}, \lambda$ sont de classe \mathscr{C}^{k+1} et que c soit de classe \mathscr{C}^k . On suppose également que $f \in \mathbf{H}^k(\Omega)$ et il existe $v_g \in \mathbf{H}^{k+2}(\Omega)$ tel que $\partial_{\mathbf{n}, \mathcal{A}} v_g = g$ sur $\partial\Omega$. Alors l'unique solution u de (6.10) appartient à $\mathbf{H}^{k+2}(\Omega)$.

6.3 Conditions de Dirichlet

Jusqu'à présent nous nous sommes limités à considérer des conditions aux limites de type Neumann et/ou Robin. Ceci nous a conduit à toujours choisir $V = H^1(\Omega)$ comme espace variationnel. Les choses changent lorsque l'on impose des conditions de Dirichlet sur une partie du bord. C'est ce que nous détaillons dans cette dernière section.

Un nouveau problème modèle

On se concentre dans ce paragraphe sur un problème spécifique. On suppose $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert lipschitzien borné, et $f \in L^2(\Omega)$, et l'on souhaite résoudre le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.21)$$

La première étape pour analyser ce problème par une méthode variationnelle consiste à en obtenir une formulation variationnelle. Mais avant de nous atteler à cette tâche, remarquons que si u est solution du problème ci-dessus alors la condition aux limites implique que

$$u \in H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

de sorte que $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^1(\Delta, \Omega)$. Comme nous l'avons annoncé à la fin du §6.1, une heuristique raisonnable consiste à prendre en compte la condition de Dirichlet homogène dans le choix de l'espace variationnel. Nous allons donc choisir $V = H_0^1(\Omega)$ comme espace variationnel, et non pas $H^1(\Omega)$.

Lemme 6.11.

Une fonction u est solution de (6.21) si et seulement si elle satisfait la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} u &\in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \text{avec} \quad a(u, v) &:= \int_{\Omega} \nabla u^{\top} \nabla \bar{v} d\mathbf{x}, \\ \ell(v) &:= \int_{\Omega} f \bar{v} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Démo :

Supposons d'abord que $u \in H^1(\Omega)$ soit solution de (6.21). Puisque l'espace variationnel choisi est $H_0^1(\Omega)$, c'est dans cet espace que l'on choisit la fonction test (**étape 1**). Conformément à la méthodologie décrite au §6.1, on multiplie donc la deuxième ligne de (6.21) par $v \in H_0^1(\Omega)$, on intègre sur Ω (**étape 2**) puis on applique une formule de Green (**étape 3**). On obtient le calcul suivant

$$\int_{\Omega} f \bar{v} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \bar{v} \Delta u d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla u^{\top} \nabla \bar{v} d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \bar{v} \partial_{\mathbf{n}} u d\sigma \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Puisque $v|_{\partial\Omega} = 0$ de par le choix de l'espace variationnel, le terme de bord dans l'identité ci-dessus est nul et on obtient finalement (6.22). Notons que l'usage de la formule de Green était autorisée car, u étant supposée solution de (6.21), on avait en particulier $u \in H^1(\Delta, \Omega)$ c'est-à-dire $\nabla u \in H(\text{div}, \Omega)$.

Réiproquement, supposons que $u \in H_0^1(\Omega)$ soit solution de (6.22). Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega)$, on a $\int_\Omega \nabla u^\top \nabla \varphi d\mathbf{x} = \int_\Omega f \varphi d\mathbf{x}$ avec $f \in L^2(\Omega)$ donc, d'après la définition (5.9) de la divergence faible, on a $\nabla u \in H(\text{div}, \Omega)$ avec $\Delta u = \text{div}(\nabla u) = -f$ sur Ω . D'autre part on a $u|_{\partial\Omega} = 0$ puisque $u \in H_0^1(\Omega)$. \square

A présent que nous avons mis le problème sous forme variationnelle, nous pouvons examiner l'existence-unicité par des méthodes hilbertiennes.

Proposition 6.12.

Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de (6.22). De plus il existe une constante $\alpha > 0$ indépendante de f telle que telle $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}/\alpha$.

Démo :

Comme auparavant, nous allons appliquer le théorème de Lax-Milgram dont on vérifie les hypothèses une à une. **Hypothèse 1** : l'espace $H_0^1(\Omega)$ est bien un espace de Hilbert car c'est un sous-espace fermé (continuité de la trace, proposition 5.1) de $H^1(\Omega)$ qui est lui-même un espace de Hilbert (proposition 4.4). **Hypothèse 2** : la forme anti-linéaire $\ell()$ définie dans (6.22) est bien continue puisque, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Omega)$, on obtient $|\ell(v)| = |\int_\Omega f \bar{v} d\mathbf{x}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$. **Hypothèse 3** : la forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ définie dans (6.22) est elle aussi continue d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puisque $|a(u, v)| = |\int_\Omega \nabla u^\top \nabla \bar{v} d\mathbf{x}| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$. **Hypothèse 4** : la forme sequilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est bien coercive, c'est une conséquence directe du lemme 5.5 (qui est une variante de l'inégalité de Poincaré, théorème 4.11). \square

Et le théorème de régularité qui va avec (et que l'on admettra).

Théorème 6.13.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe \mathcal{C}^{k+2} , et $f \in H^k(\Omega)$. Alors l'unique solution de (6.21) appartient à $H^{k+2}(\Omega)$.

Conditions de Dirichlet inhomogènes

Nous concluons ce chapitre en examinant un dernier cas de figure. Celui où le problème aux limites à l'étude fait intervenir une condition au bord de Dirichlet non-homogène. Pour fixer les idées, étant donné un ouvert Lipschitzien borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et une portion $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure de surface non nulle, on considère le problème aux limites

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\text{div}(\mathcal{A}\nabla u) + cu = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = g_D \quad \text{sur } \Gamma, \\ \partial_{\mathbf{n}, \mathcal{A}} u = g_N \quad \text{sur } \Sigma := \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{cases} \quad (6.23)$$

Dans ce problème on suppose que les données vérifient $f \in L^2(\Omega)$, $g_N \in L^2(\Sigma)$ et $g_D \in H^{1/2}(\Gamma)$. Les coefficients de l'équation sont des fonctions continues $\mathcal{A} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$ et $c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ telles qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant les conditions supplémentaires

$$\begin{aligned} \Re e\{\boldsymbol{\xi}^\top \mathcal{A}(\mathbf{x}) \bar{\boldsymbol{\xi}}\} &\geq \alpha |\boldsymbol{\xi}|^2 \\ \text{et } \Re e\{c(\mathbf{x})\} &\geq 0 \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d. \end{aligned} \quad (6.24)$$

La dernière équation de (6.23) portant sur la trace Neumann doit être comprise au sens faible, c'est-à-dire dans l'espace dual $H^{-1/2}(\partial\Omega) := H^{1/2}(\partial\Omega)'$. Dans ce contexte le sens à donner à l'expression " $\partial_{n,\mathcal{A}}u|_\Sigma = g_N$ " n'est pas évidente a priori, à cause de la notion de restriction, puisqu'on a pas dit ce qu'était la restriction d'un élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ sur une partie du bord (ici $\Sigma \subset \partial\Omega$). Le sens de cette équation est le suivant :

$$\int_{\partial\Omega} (\partial_{n,\mathcal{A}}u - g_N)v \, d\sigma = 0 \quad \forall v \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega) \quad (6.25)$$

où $H^1_{0,\Gamma}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v|_\Gamma = 0\}$.

Pour traiter la condition de Dirichlet (non-homogène), une possibilité consiste à se ramener au cas d'une condition de Dirichlet homogène. On remarque d'abord que, par définition de $H^{1/2}(\Gamma)$, il existe $u_D \in H^1(\Omega)$ telle que $u_D|_\Gamma = g_D$ (une telle fonction est appelée un relèvement), de sorte que

$$\tilde{u} = u - u_D \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega). \quad (6.26)$$

Nous allons alors effectuer un changement de fonction inconnue, et reformuler le problème (6.23) portant sur u comme une formulation variationnelle portant sur \tilde{u} qui devra vérifier une condition de Dirichlet homogène sur Γ .

Proposition 6.14.

Une fonction u est solution de (6.23) si et seulement si $u = \tilde{u} + u_D$ où \tilde{u} est solution de la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} \tilde{u} &\in H^1_{0,\Gamma}(\Omega) \quad \text{et} \quad a(\tilde{u}, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega) \\ \text{avec} \quad a(w, v) &:= \int_{\Omega} \nabla \bar{v}^\top \mathcal{A} \nabla w + c w \bar{v} \, d\mathbf{x} \\ \ell(v) &:= \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} g_N \bar{v} \, d\sigma - a(u_D, v) \end{aligned} \quad (6.27)$$

Démo :

Supposons d'abord que u est solution de (6.23). On a donc $u \in H^1(\Delta_{\mathcal{A}}, \Omega)$ et, en choisissant un $v \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$, on peut appliquer la formule de Green généralisée avec $\mathcal{A}\nabla u$ et v . En utilisant la condition aux limites de Neumann dans (6.23) et le fait que $v|_\Gamma = 0$ (par choix de $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ comme espace variationnel), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (-\operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u) + cu) \bar{v} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \nabla \bar{v}^\top \mathcal{A} \nabla u + cu \bar{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Sigma} \bar{v} \partial_{n,\mathcal{A}}u \, d\sigma \\ \int_{\Sigma} g_N \bar{v} \, d\sigma + \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nabla \bar{v}^\top \mathcal{A} \nabla (\tilde{u} + u_D) + c(\tilde{u} + u_D) \bar{v} \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Le membre de droite ci-dessus vaut $a(\tilde{u} + u_D, v)$. En faisant passer les termes associés à u_D de l'autre côté de l'égalité on obtient donc finalement (6.27). De plus, on a bien $\tilde{u} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ d'après (6.26).

Réciproquement supposons que \tilde{u} est solution de (6.27) et que $u = \tilde{u} + u_D$. Alors on a $a(u, v) = \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} g_N \bar{v} \, d\sigma$ pour tout $v \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$. Choisissons $v \in \mathcal{C}_{0,K}^\infty(\Omega) \subset H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ de sorte que

$v|_{\partial\Omega} = 0$. D'après la formulation variationnelle on a $\int_{\Omega} \nabla \bar{v}^T \mathcal{A} \nabla u d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (f - cu) \bar{v} d\mathbf{x} \forall v \in \mathcal{C}_{0,K}^{\infty}(\Omega)$. En comparant avec la définition 5.9 de la divergence faible, on en déduit que $\mathcal{A} \nabla u \in H(\text{div}, \Omega)$ et que

$$f + \text{div}(\mathcal{A} \nabla u) - c = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (6.29)$$

ce qui fournit la 2ème ligne dans (6.23). Par construction on a $u|_{\Gamma} = \tilde{u}|_{\Gamma} + u_D|_{\Gamma} = u_D|_{\Gamma} = g_D$ d'où la 3ème ligne de (6.23). Enfin si on choisit un $v \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ quelconque, que l'on repart de $a(u, v) = \int_{\Omega} f \bar{v} d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} g_N \bar{v} d\sigma$ et que l'on applique une formule de Green généralisée, on obtient $0 = \int_{\Omega} (f + \text{div}(\mathcal{A} \nabla u) - cu) \bar{v} d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} (\partial_n \mathcal{A} u - g_N) \bar{v} d\sigma$ pour tout $v \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ ce qui, d'après (6.25), est la dernière équation de (6.23). \square

Maintenant que nous avons mis le problème sous forme variationnel, nous pouvons appliquer la théorie hilbertienne pour étudier l'existence et l'unicité de la solution.

Proposition 6.15.

Le problème aux limites (6.23) admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$.

Démo :

Montrons d'abord l'existence et l'unicité de la solution $\tilde{u} \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ de (6.27) en vérifiant que le théorème de Lax-Milgram est applicable. **Hypothèse 1** : d'après la définition 5.3, $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ qui est un Hilbert, de sorte que $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ est un Hilbert. **Hypothèse 3** : la continuité de la forme sesquilinearaire $a(\cdot, \cdot)$ est une conséquence directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz puisqu'on a

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla \bar{v}^T \mathcal{A} \nabla w d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\Omega} cw \bar{v} d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \|\mathcal{A}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\|\mathcal{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)}) \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Hypothèse 2 : comme nous venons de démontrer la continuité de $a(\cdot, \cdot)$, on en déduit en particulier la continuité de $v \mapsto a(u_D, v)$. Pour montrer la continuité de $\ell(\cdot)$, il reste donc à montrer la continuité de $v \mapsto \int_{\Omega} f \bar{v} d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} g_N \bar{v} d\sigma$, ce que l'on fait de nouveau par Cauchy-Schwarz et la continuité de l'application trace,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f \bar{v} d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} g_N \bar{v} d\sigma \right| &\leq \left| \int_{\Omega} f \bar{v} d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\Sigma} g_N \bar{v} d\sigma \right|, \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g_N\|_{L^2(\Sigma)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}, \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\tau_{\partial\Omega}\| \cdot \|g_N\|_{L^2(\Sigma)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Hypothèse 4 : puisque $\Gamma \subset \partial\Omega$ est de mesure de surface non-nulle, d'après le lemme 5.5, il existe une constante $\beta > 0$ tel que $\beta \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2$ pour tout $v \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$. En utilisant les hypothèses (6.24), on obtient donc

$$\begin{aligned} |a(v, v)| &\geq \Re e\{a(v, v)\} = \int_{\Omega} \Re e\{\nabla \bar{v}^T \mathcal{A} \nabla v\} + \Re e\{c\} |v|^2 d\mathbf{x} \\ &\geq \alpha \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \alpha \beta \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (6.30)$$

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui nous donne l'existence et l'unicité de \tilde{u} solution de (6.27). Ceci implique également l'existence de $u \in H^1(\Omega)$ solution de (6.23).

Montrons l'unicité de cette solution. Supposons que $u' \in H^1(\Omega)$ est une autre solution de (6.23), de sorte que $u|_{\Gamma} - u'|_{\Gamma} = g_D - g_D = 0$ c'est-à-dire $u - u' \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$. En reprenant le début de la preuve de la proposition 6.14, on en déduit $a(u - u', v) = 0 \forall v \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ donc, en prenant $v = u - u'$ et en utilisant la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ on en déduit $\alpha\beta\|u - u'\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \Re\{a(u - u', u - u')\} = 0$ ce qui fournit $u = u'$. \square

Chapitre 7

Discrétisation

Dans les chapitres précédents, nous avons vu comment poser proprement une EDP et discuter de l'existence/unicité de la solution. Nous avons eu recours à des formulations variationnelles posées dans des espaces de dimension infinie. Dans ce chapitre nous allons voir comment, au prix d'une (petite) erreur dans le calcul de la solution, nous pouvons réduire ces formulations variationnelles à des systèmes linéaires. Ces systèmes linéaires seront potentiellement de grande taille mais malgré tout de dimension finie et, donc, accessible au calcul scientifique effectif.

7.1 Méthode de Galerkin

Étant donné un espace de Hilbert V muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de la norme associée $\|\cdot\|_V$, supposons que l'on souhaite calculer de manière effective la solution de la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (7.1)$$

où $a(\cdot, \cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont des formes sesquilinearaires et antilinearaires continues, et où $a(\cdot, \cdot)$ est coercive : il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\Re e\{a(v, v)\} \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

L'espace V est a priori de dimension infinie ce qui pose problème pour une résolution effective. Pour cette raison, il est en général impossible de calculer u exactement. En revanche on peut espérer pouvoir calculer un $u_h \in V$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0$$

où $h > 0$ est un paramètre qui est d'autant plus petit que l'effort de calcul est grand. Bien souvent (mais pas toujours) h représente la finesse d'un maillage du domaine de calcul. En pratique h n'est jamais nul, mais on veut pouvoir approcher u d'aussi près que l'on souhaite à condition "d'investir" le calcul nécessaire.

Voici une méthode générique, dite méthode de Galerkin, permettant de calculer un tel u_h . On commence par choisir une famille d'espaces $(V_h)_{h>0}$ vérifiant deux conditions :

- 1) V_h est de dimension finie

2) $V_h \subset V$

Les espaces V_h sont parfois désignés comme espaces variationnels discrets. La méthode de Galerkin consiste alors à résoudre la même formulation que (7.1) mais en substituant V_h à V ce qui nous amène à écrire une formulation dite discrète :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (7.2)$$

Comme $V_h \subset V$ est de dimension finie, il s'agit d'un espace complet, c'est donc un espace de Hilbert, et comme $a(\cdot, \cdot)$ est coercive, on peut encore appliquer Lax-Milgram à (7.2). De sorte que (7.2) admet une unique solution que l'on note u_h . **Attention :**

$$\begin{array}{c} u_h \neq u \\ \text{solution de (7.2)} \neq \text{solution de (7.1)} \end{array}$$

Il ne faut pas confondre la solution exacte du problème (que l'on ne connaîtra bien souvent jamais) avec la solution discrète que l'on calcule en pratique. La formulation (7.2) peut se mettre sous la forme d'un système linéaire. En effet soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ une base de V_h de sorte que, par linéarité, (7.2) est équivalente à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, \varphi_j) = \ell(\varphi_j) \quad \forall j = 1 \dots N \end{cases} \quad (7.3)$$

Par ailleurs comme $u_h \in V_h$, elle se décompose sur la base des φ_j comme $u_h = \sum_{k=1}^N u_k \varphi_k$ avec $u_k \in \mathbb{C}$. En injectant cette décomposition dans (7.3) on en déduit : $\sum_{k=1}^N a(\varphi_k, \varphi_j) u_k = \ell(\varphi_j)$ pour tout $j = 1 \dots N$. Ce qui se re-écrit sous forme matricielle comme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathbb{C}^N \text{ tel que} \\ A \cdot U = F \end{cases} \quad (7.4)$$

avec

$$A = (A_{j,k})_{j,k=1 \dots N} \quad A_{j,k} := a(\varphi_k, \varphi_j)$$

$$F = \begin{bmatrix} \ell(\varphi_1) \\ \vdots \\ \ell(\varphi_N) \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}.$$

La consistance de la méthode de Galerkin est assurée par le lemme suivant connue sous le nom de lemme de Céa.

Lemme 7.1 (lemme de Céa).

 Soit $u \in V$ l'unique solution de (7.1) et $u_h \in V_h$ l'unique solution de (7.2). Si $\|a\|$ désigne le module de continuité de $a(\cdot, \cdot)$ et α sa constante de coercivité, alors

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\|a\|}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Démo :

Soit $v_h \in V_h \subset V$ arbitraire. D'après (7.1) et (7.2), pour tout $v_h \in V_h$, on a :

$$\begin{aligned} a(u, v_h) &= \ell(v_h) \quad \text{car } v_h \in V \\ a(u_h, v_h) &= \ell(v_h) \quad \text{car } v_h \in V_h \\ \Rightarrow a(u - u_h, v_h) &= 0 \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

En choisissant $w_h \in V_h$ arbitraire, et en appliquant l'identité ci-dessus à $v_h = w_h - u_h \in V_h$, on obtient $a(u - u_h, w_h - u_h) = 0$. Maintenant d'après la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$, pour tout $w_h \in V_h$ on a :

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq |a(u - u_h, u - u_h)| \\ &\leq |a(u - u_h, u - w_h)| + |a(u - u_h, w_h - u_h)| \\ &\leq |a(u - u_h, u - w_h)| \leq \|a\| \|u - u_h\|_V \|u - w_h\|_V \end{aligned}$$

où $\|a\| > 0$ renvoie au module de continuité de $a(\cdot, \cdot)$. En divisant de part et d'autre de l'inégalité par $\|u - u_h\|_V$ obtient finalement $\|u - u_h\|_V \leq (C/\alpha) \|u - w_h\|_V$. Comme $w_h \in V_h$ était choisi arbitrairement, il suffit de prendre la borne inf pour établir le résultat recherché. \square

7.2 Éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange en 1D

Les méthodes d'éléments finis sont des méthodes de résolution de Galerkin correspondant à un choix particulier d'espace discret. Nous allons commencer par décrire en détail ces méthodes dans le cas particulier d'un problème de dimension 1, ce qui nous permettra d'écrire de nombreuses choses explicitement.

Description de la méthode

Pour fixer les idées, nous considérerons le premier problème du chapitre précédent. Nous nous plaçons sur un intervalle $I =]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Étant donné une fonction $f \in L^2(I)$ et une constante $\mu \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re\{\mu^2\} > 0$, on souhaite résoudre (au moins de manière approchée) le problème

$$\begin{cases} u \in H^1(I) \text{ tel que} \\ -\partial_x^2 u + \mu^2 u = f \quad \text{sur } I, \\ \partial_x u(a) = \partial_x u(b) = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

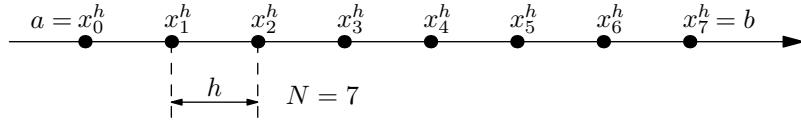
En choisissant $V = H^1(I)$ comme espace variationnel, et en suivant la méthodologie présentée au chapitre (6 (voir en particulier la section 6.1) ce problème admet la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} u \in H^1(I) \text{ tel que } a(u, v) &= \ell(v) \quad \forall v \in H^1(I) \\ a(u, v) &:= \int_I \partial_x u \partial_x \bar{v} + \mu^2 u \bar{v} dx \\ \ell(v) &:= \int_I f \bar{v} dx \end{aligned} \quad (7.6)$$

Voyons en détail comment discréteriser ce problème par éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange. Étant donné un paramètre de discréétisation $N \geq 1$ fixé, on commence par se donner une grille de discréétisation uniforme

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \cup_{j=1}^N \bar{I}_j^h \quad \text{avec } I_j^h :=]x_{j-1}^h, x_j^h[\\ x_j^h &= a + jh \quad \text{où } h := (b - a)/N, \\ \mathcal{T}_h(I) &:= \{I_1^h, \dots, I_N^h\}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

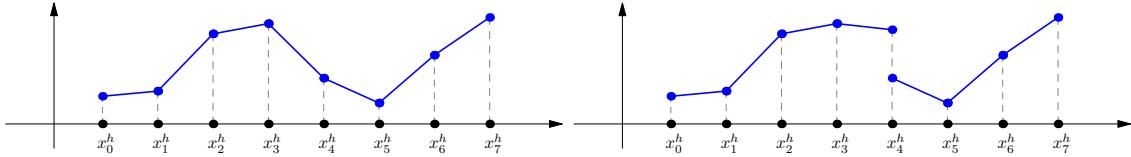
La collection $\mathcal{T}_h(I) := \{I_j^h\}_{j=1}^N$ est appelée *maillage*, la quantité " h " est souvent appelée *pas du maillage*, et les I_j^h sont les *mailles*. On définit ensuite l'espace variationnel discret $V_h \subset V$

FIGURE 7.1: exemple de grille régulière à $N + 1 = 8$ noeuds

comme l'ensemble des fonctions globalement continues et affines sur chaque maille, appelé encore espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange

$$\begin{aligned} V_h &:= \{ v \in \mathcal{C}^0(\bar{J}), v|_{I_j^h} \in \mathbb{P}_1(I_j^h) \} \\ \text{où } \mathbb{P}_1(J) &:= \{\varphi|_J, \varphi(x) = \alpha + \beta x, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\} \end{aligned} \quad (7.8)$$

En d'autres termes $\mathbb{P}_1(J)$ est l'espace des fonctions affines sur J . Attention, dans la définition de V_h ci-dessus, les fonctions ne sont pas supposées affines, mais seulement affines *par morceaux* i.e. affines sur chaque maille.

FIGURE 7.2: Deux exemples de fonctions affines par morceaux sur la grille de la figure 7.1. La fonction de gauche est continue et appartient donc à l'espace \mathbb{P}_1 -Lagrange. La fonction de droite est discontinue en x_4^h et n'est donc pas \mathbb{P}_1 -Lagrange.

Lemme 7.2.

Pour tout segment $J =]a_J, b_J[$ avec $a_J, b_J \in \mathbb{R}, a_J < b_J$, l'application $v \mapsto (v(a_J), v(b_J))$ est un isomorphisme de $\mathbb{P}_1(J)$ dans \mathbb{C}^2 .

Démo :

Notons $\Upsilon_J(v) := (v(a_J), v(b_J))$. Pour toute fonction $v \in \mathbb{P}_1(J)$ vérifiant $v(a_J) = v(b_J) = 0$, on a $v \equiv 0$, c'est-à-dire $\ker(\Upsilon_J) = \{0\}$. Pour tout $(v_-, v_+) \in \mathbb{C}^2$, la fonction

$$v(x) = \left(\frac{b_J - x}{b_J - a_J} \right) v_- + \left(\frac{x - a_J}{b_J - a_J} \right) v_+$$

appartient à $\mathbb{P}_1(J)$ et vérifie $v(a_J) = v_-$ et $v(b_J) = v_+$ c'est-à-dire $\Upsilon_J(v) = (v_-, v_+)$. Donc Υ_J est surjective et c'est un isomorphisme. \square

Proposition 7.3.

Pour V_h défini comme en (7.8) ci-dessus, l'application $v \mapsto (v(x_j^h))_{j=0 \dots N}$ est un isomorphisme de V_h dans \mathbb{C}^{N+1} .

Démo :

Notons $\Upsilon(v) := (v(x_j^h))_{j=0 \dots N}$ l'application dont il s'agit de démontrer qu'elle est un isomorphisme. Supposons d'abord que $\Upsilon(v) = 0$ pour un $v \in V_h$. Alors il est clair que $(v(x_{j-1}^h), v(x_j^h)) = 0$ pour tout $j = 1 \dots N$ c'est-à-dire $\Upsilon_J(v|_J) = 0$ pour tout $J \in \{I_1^h, \dots, I_N^h\} = \mathcal{T}_h(I)$. On en tire $v|_J = 0 \forall J \in \mathcal{T}_h(I)$ d'après le lemme 7.2 et donc $v = 0$ puisque $I = \bigcup_{j=1}^N I_j^h$. D'où finalement $\ker(\Upsilon) = \{0\}$ i.e. $\Upsilon : V_h \rightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ est injective.

A présent, on se donne $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ et on définit une fonction par morceaux $v(x) = \sum_{J \in \mathcal{T}_h(I)} v_J(x) 1_J(x)$ où $1_J(x)$ est la fonction indicatrice de J (i.e. $1_J(x) = 1$ si $x \in J$ et $1_J(x) = 0$ si $x \notin J$) et v_J est l'unique élément de $\mathbb{P}_1(J)$ vérifiant $v_J(x_{j-1}^h) = w_{j-1}$ et $v_J(x_j^h) = w_j$ pour $J = I_j^h = [x_{j-1}^h, x_j^h]$. Puisque $v_{I_j^h}(x_j^h) = w_j = v_{I_{j+1}^h}(x_j^h)$, on en déduit que la fonction v ainsi définie est continue, et donc $v \in V_h$. Par ailleurs cette fonction vérifie $v(x_j^h) = w_j$ par construction c'est-à-dire $\Upsilon(v) = \mathbf{w}$. Donc Υ est surjective. \square

La proposition précédente montre en particulier que $\dim(V_h) < +\infty$. Par ailleurs, la proposition 4.5 garantit que $V_h \subset H^1(I)$. Enfin on verra au chapitre prochain qu'on a bien $\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v_h - v\|_V = 0$ pour tout $v \in V$. Donc l'espace de fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange rentre bien dans le cadre de la méthode de Galerkin décrite à la section 7.1.

La méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange ne consiste pas seulement à prescrire l'espace variationnel V_h défini par (7.8) pour approcher $V = H^1(I)$. Cette méthode consiste également à spécifier une base $V_h = \text{vect}_{j=0, \dots, N} \{\varphi_j^h\}$ pour cet espace. Cette base est définie par

$$\varphi_j^h(x_j^h) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_j^h(x_k^h) = 0 \text{ si } j \neq k. \quad (7.9)$$

L'image de φ_j^h par l'isomorphisme de la proposition 7.3 est un élément de la base canonique de \mathbb{C}^{N+1} , par conséquent c'est une conséquence évidente de cette proposition que la famille $\{\varphi_j^h\}_{j=0}^N$ constitue une base de V_h .

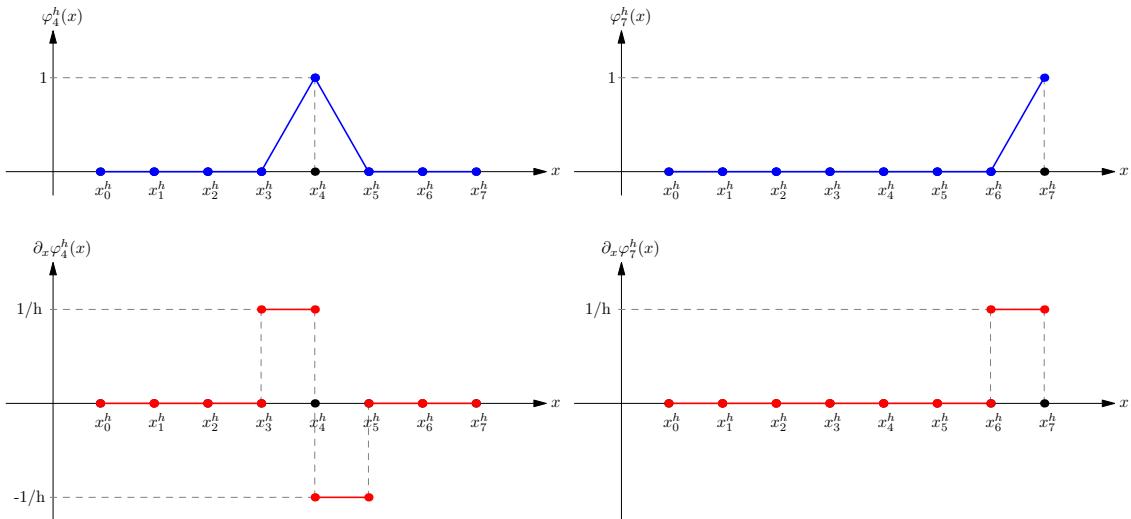


FIGURE 7.3: Deux des 8 fonctions de forme (et leur dérivée) engendrant l'espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange dans le cas de la grille uniforme de la figure 7.1.

Les éléments de cette base sont appelées les fonctions de forme. La fonction φ_j^h est non-nulle uniquement sur les mailles contenant x_j^h si bien que $\text{supp}(\varphi_j^h) = \bar{I} \cap [x_{j-1}^h, x_{j+1}^h]$. Un rapide calcul donne l'expression explicite des fonctions de forme, maille par maille.

$$\begin{aligned}\varphi_j^h(x) &= (x - x_{j-1}^h)/h && \text{si } x \in I \cap]x_{j-1}^h, x_j^h[\\ \varphi_j^h(x) &= (x_{j+1}^h - x)/h && \text{si } x \in I \cap]x_j^h, x_{j+1}^h[\\ \varphi_j^h(x) &= 0 && \text{si } x \in I \setminus]x_{j-1}^h, x_{j+1}^h[\end{aligned}\quad (7.10)$$

Résolution effective

Concrètement, pour résoudre numériquement (et donc de manière approchée) l'équation (7.5) par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange, il faut résoudre le système linéaire (7.4) ce qui fournit les valeurs $U = (u_0, \dots, u_N)$, et donne accès à la solution variationnelle discrète $u_h(x)$ via la formule

$$u_h(x) = u_0\varphi_0^h(x) + \dots + u_N\varphi_N^h(x) \quad (7.11)$$

fonction que l'on aura tout loisir de décrire par différents procédés de représentation graphique (carte de champs par exemple) puisque tout, dans le membre de droite de (7.11), sera connu.

Avertissement Pour calculer la solution $U \in \mathbb{C}^{N+1}$ du système linéaire (7.4), on pourrait penser naïvement à calculer d'abord l'inverse A^{-1} de la matrice A , et ensuite calculer le produit matrice-vecteur $U = A^{-1}F$. Malheureux ! Surtout pas : inverser une matrice est beaucoup trop cher numériquement. Il ne faut pas oublier que la matrice A est potentiellement de très grande taille. Dans ce contexte, il y a des moyens plus rapides pour calculer la solution U sans avoir à calculer l'inverse A^{-1} . Mais ceci nous emmènerait trop loin (voir l'UE 4MA053 Grand systèmes linéaires).

La méthode de Galerkin que nous avons présenté à la section 7.1 nous montre que la résolution de la formulation discrète (7.2) se réduit à la résolution du système linéaire (7.4) avec une matrice $A \in \mathbb{C}^{(N+1) \times (N+1)}$ donnée par

$$\begin{aligned}A &= K + \mu^2 M \\ K &= (K_{j,k})_{j,k=0,\dots,N} \quad \text{avec} \quad K_{j,k} := \int_I \partial_x \varphi_j^h \partial_x \varphi_k^h \, dx \\ M &= (M_{j,k})_{j,k=0,\dots,N} \quad \text{avec} \quad M_{j,k} := \int_I \varphi_j^h \varphi_k^h \, dx\end{aligned}\quad (7.12)$$

La matrice K est appelée habituellement "matrice de rigidité", et la matrice M est appelée "matrice de masse", vocable hérité de la mécanique. Grâce aux expressions (7.10), on peut calculer explicitement les éléments $K_{j,k}$ et $M_{j,k}$. Commençons par observer que, si x_j^h et x_k^h n'appartiennent pas à la même maille, c'est-à-dire si $|j - k| \geq 2$, alors $\text{supp}(\varphi_j^h) \cap \text{supp}(\varphi_k^h) = \emptyset$ si bien que

$$K_{j,k} = M_{j,k} = 0 \quad \text{si } |j - k| \geq 2.$$

Autrement dit les matrices K et M sont tridiagonales. Examinons à présent l'expression de $M_{j,j+1} = M_{j+1,j}$ et $M_{j,j}$. Puisque $\text{supp}(\varphi_j^h) = [x_{j-1}^h, x_{j+1}^h]$ pour $j \neq 0, N$ et $\text{supp}(\varphi_0^h) = [x_0^h, x_1^h]$ et $\text{supp}(\varphi_N^h) = [x_{N-1}^h, x_N^h]$, on déduit $\text{supp}(\varphi_j^h) \cap \text{supp}(\varphi_{j+1}^h) = [x_j^h, x_{j+1}^h]$ pour $j \neq N$.

Par ailleurs, avec (7.10), on voit que $\partial_x \varphi_j^h(x) = 1/h$ pour $x \in]x_{j-1}^h, x_j^h[$ (sauf si $j = 0$), et $\partial_x \varphi_j^h(x) = -1/h$ pour $x \in]x_j^h, x_{j+1}^h[$ (sauf si $j = N$). En combinant ces remarques on obtient

$$\begin{aligned} K_{j,j+1} &= \int_{x_j^h}^{x_{j+1}^h} \partial_x \varphi_j^h \partial_x \varphi_{j+1}^h dx = -h^{-2} \int_{x_j^h}^{x_{j+1}^h} dx = -1/h \quad \text{pour } j \neq N. \\ K_{j,j} &= \int_{x_{j-1}^h}^{x_{j+1}^h} |\partial_x \varphi_j^h(x)|^2 dx = h^{-2} \int_{x_{j-1}^h}^{x_{j+1}^h} dx = 2/h \quad \text{pour } j \neq 0, N, \\ K_{0,0} &= h^{-2} \int_{x_0^h}^{x_1^h} dx = 1/h = K_{N,N} \end{aligned}$$

Pour calculer les éléments de la matrice de masse, on utilise un calcul semblable, mais directement avec les expressions de (7.10), ce qui nous donne

$$\begin{aligned} M_{j,j+1} &= \int_{x_j^h}^{x_{j+1}^h} \varphi_j^h(x) \varphi_{j+1}^h(x) dx = h^{-2} \int_{x_j^h}^{x_{j+1}^h} (x_{j+1}^h - x)(x - x_j^h) dx \\ &= h \int_0^1 (1-t)tdt = h/6 \quad \text{pour } j \neq N. \\ M_{j,j} &= \int_{x_{j-1}^h}^{x_{j+1}^h} |\varphi_j^h(x)|^2 dx = h^{-2} \int_{x_j^h}^{x_{j+1}^h} (x_{j+1}^h - x)^2 dx + h^{-2} \int_{x_{j-1}^h}^{x_j^h} (x - x_{j-1}^h)^2 dx \\ &= h \int_0^1 (1-t)^2 dt + h \int_0^1 t^2 dt = 2h/3 \quad \text{pour } j \neq 0, N, \\ M_{0,0} &= h^{-2} \int_{x_0^h}^{x_1^h} (x_1^h - x)^2 dx = h \int_0^1 (1-t)^2 dt = h/3 = M_{N,N} \end{aligned}$$

Dans les calculs ci-dessus on a écrit que $x = x_j^h + th$ pour $t \in [0, 1]$ lorsque $x \in [x_j^h, x_{j+1}^h]$. Puisque par ailleurs $K_{j+1,j} = K_{j,j+1}$ et $M_{j+1,j} = M_{j,j+1}$ par symétrie provenant des expressions de (7.12), on déduit finalement l'expression complète des matrices de masse et de rigidité

$$K = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad M = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

et ces expressions permettent de calculer A. Pour résoudre le système linéaire (7.4), il reste également à assembler le second membre $F = (\ell(\varphi_j^h))_{j=0,\dots,N}$. Comme ici $\ell(\varphi_j^h) = \int_I f(x) \varphi_j^h(x) dx$, on peut réaliser ce calcul en utilisant (7.10), ce qui donne

$$\begin{aligned} \ell(\varphi_j^h) &= h^{-1} \int_{x_{j-1}^h}^{x_j^h} f(x)(x - x_{j-1}^h) dx + h^{-1} \int_{x_j^h}^{x_{j+1}^h} f(x)(x_{j+1}^h - x) dx \quad \text{pour } j \neq 0, N \\ \ell(\varphi_0^h) &= h^{-1} \int_{x_0^h}^{x_1^h} f(x)(x_1^h - x) dx, \\ \ell(\varphi_N^h) &= h^{-1} \int_{x_{N-1}^h}^{x_N^h} f(x)(x - x_{N-1}^h) dx, \end{aligned}$$

Les différentes intégrales intervenant dans les expressions ci-dessus sont à évaluer, soit explicitement dans le cas où $f(x)$ admet une expression simple (un polynôme par exemple), soit au moyen d'une formule de quadrature (règle de quadrature de Gauss par exemple).

7.3 Éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange en 2D/3D

Nous allons maintenant décrire comment la méthode présentée à la section précédente se généralise en dimension supérieure à 1 en espace. Une difficulté nouvelle apparaît qui provient de ce qu'il est difficile de trouver une grille de discréétisation du domaine de calcul dans lequel les mailles sont ordonnées de façon simple.

Pour expliquer la méthode, nous fixons à nouveau un problème modèle dans lequel $\mu \in \mathbb{C}$ vérifie $\Re\{\mu^2\} > 0$, et $f \in L^2(\Omega)$. Pour simplifier le propos, le domaine de calcul $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sera supposé un ouvert borné à bord polyédral (qui est donc en particulier lipschitzien). On veut résoudre le problème

$$\begin{aligned} u &\in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u + \mu^2 u &= f \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_n u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Nous avons vu à la section 6.1 que ce problème admettait la formulation variationnelle (6.5) avec $H^1(\Omega)$ comme espace variationnel de sorte que, selon la méthode de Galerkin, une formulation discrète adaptée prendra la forme :

$$\begin{aligned} u_h &\in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ \text{avec } a(u_h, v_h) &:= \int_{\Omega} \nabla u_h^\top \nabla v_h + \mu^2 u_h v_h d\mathbf{x} \\ \ell(v_h) &:= \int_{\Omega} f v_h d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Comme nous l'avons vu à la section 7.2, pour décrire la méthode numérique de manière exhaustive, il reste à décrire l'espace V_h des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange, et d'en spécifier une base (fonctions de forme).

Maillage simplicial

L'espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange est basé sur un maillage du domaine de calcul. Nous commençons donc par décrire cette notion. Nous nous restreindrons aux cas de maillages simpliciaux c'est-à-dire dont les briques géométriques de base sont des simplexes.

Definition 7.4.

 Pour $n \leq d$, un n -simplexe $e \subset \mathbb{R}^d$ de sommets $\mathbf{s}_j \in \mathbb{R}^d, j = 0 \dots n$ est défini comme l'enveloppe convexe ouverte $e = \{\lambda_0 \mathbf{s}_0 + \dots + \lambda_n \mathbf{s}_n, \lambda_j > 0 \forall j = 0 \dots d \text{ et } \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1\}$. On dit que e est non-dégénéré si $\dim(\text{vect}(e)) = n$ où $\text{vect}(e) := \text{vect}_{j=1 \dots n}\{\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_0\}$.

L'hypothèse de non-dégénérescence signifie que les vecteurs $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_n - \mathbf{s}_0$ sont linéairement indépendants. Ceci suppose en particulier que les sommets $\mathbf{s}_j, j = 0 \dots n$ soient tous disjoints. Dans la suite nous considérerons systématiquement des simplexes non-dégénérés.

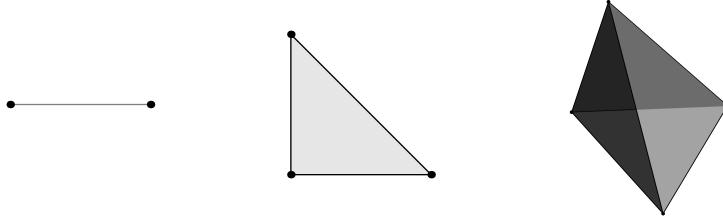


FIGURE 7.4: Segment (1-simplexe), triangle (2-simplexe) et tétraèdre (3-simplexe).

Un 1-simplexe est un segment, un 2-simplexe est un triangle, un 3-simplexe est un tétraèdre. Par exemple un triangle non-dégénéré est un triangle qui n'est pas plat et n'est pas réduit non plus à un point.

Notons que dans la définition 7.4 d'un simplexe, il y a la possibilité que $n < d$. On peut par exemple considérer un triangle (un 2-simplexe) plongé dans \mathbb{R}^3 . C'est la situation que l'on rencontre lorsque l'on considère le bord d'un tétraèdre (un 3-simplexe) qui est constitué de 4 triangles. D'une manière générale, observons que le bord d'un d -simplexe est la réunion de $d + 1$ simplexes de dimension $d - 1$ appelés *faces*.

Un maillage simplicial, encore appelé triangulation, est une partition du domaine de calcul en simplexes. Il existe des maillages non-simpliciaux (maillages cartésiens, ou basé sur des hexahèdres par exemple), mais nous nous limiterons systématiquement au cas des triangulations simpliciales régulières.

Definition 7.5.



Une triangulation simpliciale régulière de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est une collection \mathcal{T}_h de d -simplexes non-dégénérés satisfaisant $\overline{\Omega} = \cup_{e \in \mathcal{T}_h} \overline{e}$, et $e \cap e' = \emptyset$ si $e \neq e'$, et telle que toute face f d'un $e \in \mathcal{T}_h$ soit, ou bien une face complète d'un autre $e' \in \mathcal{T}_h$, ou bien une partie de $\partial\Omega$.

Les simplexes qui composent une triangulation sont appelés *mailles*, *cellules* ou plus souvent *éléments*. Les sommets des éléments s'appellent également *noeuds*.

La définition d'une triangulation régulière proscrit les situations où un noeud d'un élément serait situé à l'intérieur d'une face d'un autre élément, cf figure 7.5. En fait les hypothèses de la définition 7.5 impliquent que, si deux éléments $e, e' \in \mathcal{T}_h$, $e \neq e'$ sont adjacents $\overline{e} \cap \overline{e'} \neq \emptyset$, alors leur intersection est un $(n - 1)$ -simplexe où n est le nombre de sommets qu'ils ont en commun. Les cas possibles d'adjacence pour une triangulation simpliciale régulière de dimension 1, 2 et 3 sont représentés sur la figure 7.6.

Générer un maillage n'est pas une chose simple et peut s'avérer très coûteux. Sur les figures 7.7, 7.8 et 7.9 on représente des exemples de maillages simpliciaux en 2D et 3D. Le maillage de la figure 7.7 a été généré avec le logiciel **gmsh**¹. D'autres logiciels libres existent pour la génération de maillages triangulaires tels que **Triangle**², ainsi que pour les maillages tétraédriques parmi lesquels **CGAL**³ ou **TetGen**⁴. Une liste conséquente de générateurs de maillage est disponible à l'adresse <http://www.robertschneiders.de/meshgeneration/software.html>

1. <http://gmsh.info/>
 2. <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>
 3. <https://www.cgal.org/>
 4. <http://www.wias-berlin.de/software/index.jsp?id=TetGen>

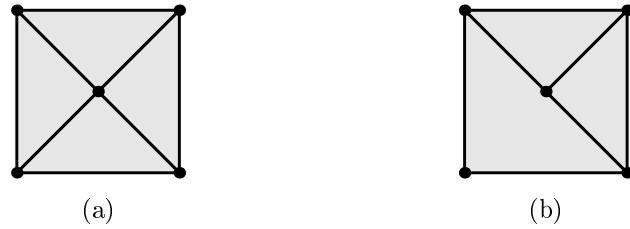


FIGURE 7.5: Deux triangulations 2D : régulière (a) et non-régulière (b).

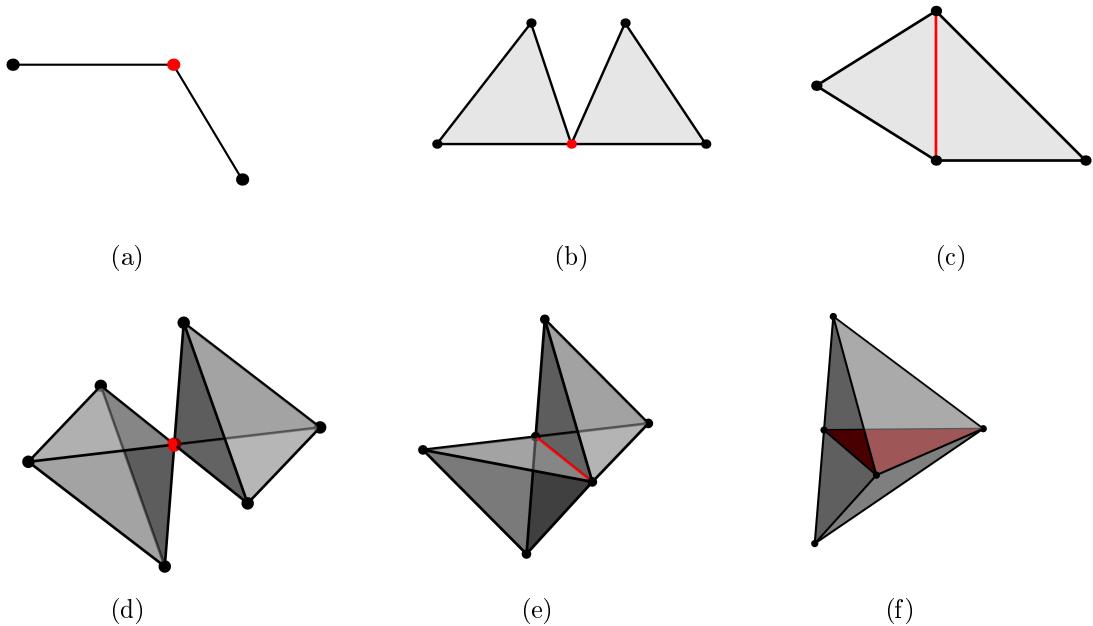


FIGURE 7.6: Cas possibles d'adjacence entre deux éléments dans une triangulation régulière en 1D (a), en 2D (b et c) et en 3D (e,f et g). Les intersections sont en rouge.

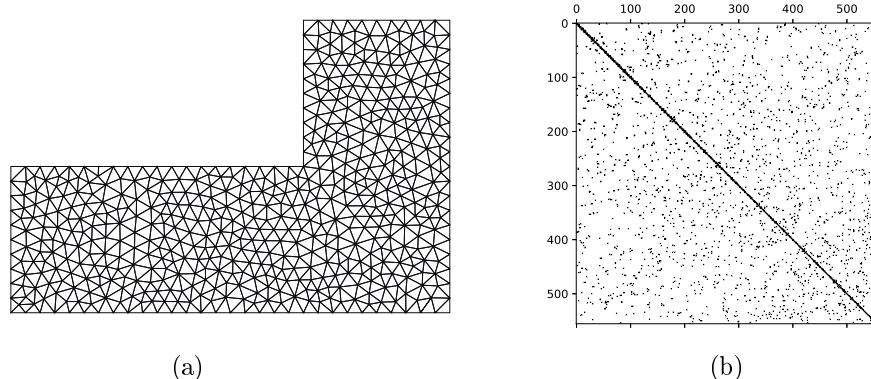


FIGURE 7.7: A gauche (a) un exemple de maillage régulier 2D : 556 noeuds, 1010 triangles. A droite (b) la matrice éléments finis correspondante (sparsity pattern).

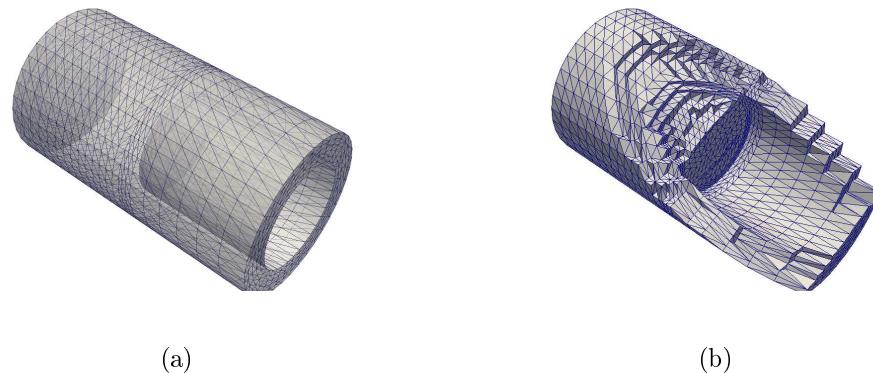


FIGURE 7.8: A gauche (a) maillage 3D tétraédrique d'une pièce de forme cylindrique : 8499 noeuds et 44832 tétraèdres. A droite (b) vue en coupe de ce même maillage.

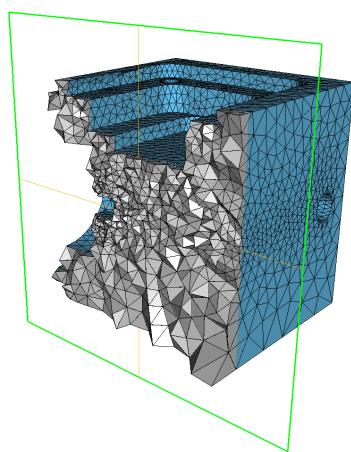


FIGURE 7.9: Vue en coupe d'un autre maillage tétraédrique contenant 28694 noeuds et 150779 tétraèdres.

Espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange

Sur une partie $\omega \subset \mathbb{R}^d$ (pas forcément ouverte !) on rappelle que l'espace des fonctions affines est défini par $\mathbb{P}_1(\omega) := \{v|_\omega \text{ tel que } v(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{x} + \beta, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^d, \beta \in \mathbb{C}\}$. Ce sont les polynômes de degré 1. Étant donné une triangulation régulière \mathcal{T}_h d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, l'espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange est donné par

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}), v|_e \in \mathbb{P}_1(e) \forall e \in \mathcal{T}_h\}. \quad (7.15)$$

D'après la proposition 4.5, on a bien $V_h \subset H^1(\Omega)$. Attention : cette définition nous dit que, si $v_h \in V_h$ alors pour chaque $e \in \mathcal{T}_h$ il existe $\boldsymbol{\alpha}_e \in \mathbb{C}^d, \beta_e \in \mathbb{C}$ tels que $v(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}_e^\top \mathbf{x} + \beta_e$ pour tout $\mathbf{x} \in e$. Il est important de noter que les coefficients $\boldsymbol{\alpha}_e, \beta_e$ dépendent de e . Ainsi on a, a priori, $\boldsymbol{\alpha}_e \neq \boldsymbol{\alpha}_{e'}$ et $\beta_e \neq \beta_{e'}$ si $e \neq e'$. La fonction v_h est affine seulement par morceaux. Elle n'est pas affine globalement.

Lemme 7.6.

Étant donné un n -simplexe $e \subset \mathbb{R}^d$, pour toute fonction $v \in \mathbb{P}_1(e)$ il existe $\mathbf{a} \in \text{vect}(e), b \in \mathbb{C}$ uniques tels que $v(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b \forall \mathbf{x} \in e$. De plus $\dim \mathbb{P}_1(e) = 1 + \dim(\text{vect}(e))$.

Démo :

Considérons l'application linéaire $\Phi : \text{vect}(e) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}_1(e)$ définie par $\Phi(\mathbf{a}, b)(\mathbf{x}) := \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b$ pour tout $\mathbf{x} \in e$. Il suffit de montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme.

On montre d'abord la surjectivité. Soit $v \in \mathbb{P}_1(e)$ arbitraire prenant donc la forme $v(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{x} + \beta$ pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^d$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Décomposons $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a} + \mathbf{a}_*$ avec $\mathbf{a} \in \text{vect}(e)$ et $\mathbf{a}_* \in \text{vect}(e)^\perp$. Par définition d'un simplexe, tout $\mathbf{x} \in e$ se met sous la forme $\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{s}_0 + \dots + \lambda_n \mathbf{s}_n$ où les $\lambda_j \in \mathbb{R}, j = 0, \dots, n$ satisfont $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$. On a $\mathbf{a}_*^\top \mathbf{x} = \mathbf{a}_*^\top \mathbf{s}_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{a}_*^\top (\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_0) = \mathbf{a}_*^\top \mathbf{s}_0$ pour tout $\mathbf{x} \in e$ puisque $\mathbf{a}_* \in \text{vect}(e)^\perp$. On a donc $v(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + \mathbf{a}_*^\top \mathbf{x} + \beta = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + \beta + \mathbf{a}_*^\top \mathbf{s}_0 \forall \mathbf{x} \in e$, c'est-à-dire $v = \Phi(\mathbf{a}, \beta + \mathbf{a}_*^\top \mathbf{s}_0)$ d'où la surjectivité.

Soit à présent $\mathbf{a} \in \text{vect}(e), b \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b = 0 \forall \mathbf{x} \in e$, et posons $w(\mathbf{x}) := \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. On a donc $w(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in e$. L'application $\mathbf{x} \mapsto w(\mathbf{x})$ est continue sur \mathbb{R}^d tout entier donc, par passage à la limite, on a $w(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \overline{e}$. Si on note $\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_n \in \mathbb{R}^d$ les sommets de e on a $0 = w(\mathbf{s}_j) - w(\mathbf{s}_0) = \mathbf{a}^\top (\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_0)$ pour tout $j = 1 \dots n$, ce qui implique $\mathbf{a} = 0$ puisque $\mathbf{a} \in \text{vect}(e)$ par hypothèse. On déduit que $b = w(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in e \neq \emptyset$. D'où finalement $(\mathbf{a}, b) = 0$. On a montré que $\ker(\Phi) = \{0\}$. \square

Lemme 7.7 (Unisolvance).



Soit $e \subset \mathbb{R}^d$ un n -simplexe non dégénéré de sommets $\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_n \in \mathbb{R}^d$. Alors l'application $v \mapsto (v(\mathbf{s}_0), \dots, v(\mathbf{s}_n))$ induit un isomorphisme de $\mathbb{P}_1(e) \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$.

Démo :

Comme on sait déjà que $\dim(\mathbb{P}_1(e)) = n + 1$, d'après le théorème de la dimension, il suffit de démontrer que l'application définie par $\Upsilon_e(v) := (v(\mathbf{s}_0), \dots, v(\mathbf{s}_n))$ est injective. Soit $v \in \ker(\Upsilon_e)$. Tout $\mathbf{x} \in e$ se mettant sous la forme $\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{s}_0 + \dots + \lambda_n \mathbf{s}_n$ avec $\lambda_j \in \mathbb{R}, j = 0, \dots, n$ et $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$, on a donc $v(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top (\sum_{j=0}^n \lambda_j \mathbf{s}_j) + \beta (\sum_{j=0}^n \lambda_j) = \sum_{j=0}^n \lambda_j v(\mathbf{s}_j) = 0$. Ce qui établit que $\ker(\Upsilon_e) = \{0\}$. \square

Lemme 7.8.

Soit \mathcal{S}_h l'ensemble des sommets d'une triangulation régulière \mathcal{T}_h de Ω . Soit V_h l'espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange associé défini comme en (7.15). Alors l'application $u \mapsto (u(\mathbf{s}))_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h}$ définit un isomorphisme de V_h dans $\mathbb{C}^{|\mathcal{S}_h|}$ où $|\mathcal{S}_h| = \text{card}(\mathcal{S}_h)$.

Démo :

Notons $\Upsilon(v) := (v(\mathbf{s}))_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h}$. Soit $v \in V_h$ tel que $v(\mathbf{s}) = 0 \forall \mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$. Soit $e \in \mathcal{T}_h$ arbitraire. D'après la définition de V_h on a $v|_e \in \mathbb{P}_1(e)$ et cette fonction vérifie $v(\mathbf{s}) = 0 \forall \mathbf{s} \in \mathcal{S}(e) := \{\text{sommets de } e\}$. En appliquant le lemme 7.7 dans e , on obtient $v|_e \equiv 0$ et donc finalement $v \equiv 0$ sur Ω puisque $\overline{\Omega} = \cup_{e \in \mathcal{T}_h} \overline{e}$. Ceci montre que $\ker(\Upsilon) = \{0\}$.

Montrons à présent la surjectivité de Υ . Soit $\mu_{\mathbf{s}} \in \mathbb{C}, \mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$ un jeu de valeurs. D'après le lemme 7.7, pour chaque $e \in \mathcal{T}_h$, il existe un unique $p_e \in \mathbb{P}_1(e)$ tel que $p_e(\mathbf{s}) = \mu_{\mathbf{s}}$ pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(e)$. On définit alors une fonction affine sur chaque élément par

$$u_h(\mathbf{x}) := p_e(\mathbf{x}) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \overline{e}. \quad (7.16)$$

Cette formule fournit, en apparence, plusieurs définitions possibles pour $u(\mathbf{x})$ lorsque $\mathbf{x} \in \overline{e} \cap \overline{e}'$. Vérifions que toutes ces définitions coïncident, ce qui montrera du même coup que u_h définie par (7.16) appartient à $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Soit deux éléments $e, e' \in \mathcal{T}_h$ tels que $\overline{e} \cap \overline{e}' \neq \emptyset$ et notons f le simplexe admettant pour sommets $\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(e) \cap \mathcal{S}(e')$ i.e. les sommets communs à e et e' . On a donc $\overline{f} = \overline{e} \cap \overline{e}'$ (voir figure 7.6). Les deux fonctions $p_e|_f$ et $p_{e'}|_f$ appartiennent toutes deux à $\mathbb{P}_1(f)$ et coïncident en tous les sommets de f . Donc en appliquant le lemme 7.7 dans f , on voit que $p_e|_{\overline{f}} = p_{e'}|_{\overline{f}}$, d'où $u_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et donc finalement $u_h \in V_h$. \square

Fonctions de forme

En notant $|\mathcal{S}_h| = \text{card}(\mathcal{S}_h)$, la proposition précédente affirme que l'application $\Phi_h : V_h \rightarrow \mathbb{C}^{|\mathcal{S}_h|}$ définie par $\Phi_h(u) = (u(\mathbf{s}))_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h}$ est un isomorphisme. Au vu de ce résultat il est donc naturel de considérer la base de V_h qui est mise en correspondance avec la base canonique de $\mathbb{C}^{|\mathcal{S}_h|}$ via cet isomorphisme. On définit donc $\varphi_{\mathbf{s}}^h, \mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$ comme l'unique élément de V_h vérifiant

$$\varphi_{\mathbf{s}}^h(\mathbf{s}') = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{s} = \mathbf{s}', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce qui précède permet alors d'affirmer que toute fonction $u_h \in V_h$ se décompose de la manière suivante

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h} u_h(\mathbf{s}) \varphi_{\mathbf{s}}^h(\mathbf{x})$$

La famille $(\varphi_{\mathbf{s}}^h)_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h}$ constitue une base de V_h que l'on nomme fonctions de forme, et qui engendre l'espace variationnel discret

$$V_h = \text{span}_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h} \{\varphi_{\mathbf{s}}^h\}.$$

Les fonctions de forme $\varphi_{\mathbf{s}}^h$ jouent un rôle central dans l'implémentation de la méthode des éléments finis. Il est important de bien comprendre la forme qu'elles prennent. Ces fonctions sont localisées : le résultat suivant nous dit que leur support est contenu dans un paquet d'éléments ayant un même noeud en commun.

Lemme 7.9.

On a $\text{supp}(\varphi_{\mathbf{s}}^h) = \bigcup_{e \in \mathcal{T}_h(\mathbf{s})} \overline{e}$ où $\mathcal{T}_h(\mathbf{s}) := \{e \in \mathcal{T}_h, \mathbf{s} \in \mathcal{S}(e)\}$.

En effet, pour un $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$ fixé, et pour un $e \in \mathcal{T}_h$ tel que $\mathbf{s} \notin \mathcal{S}(e)$, on a $\varphi_{\mathbf{s}}^h(\mathbf{s}') = 0$ pour tout $\mathbf{s}' \in \mathcal{S}(e)$ par définition de $\varphi_{\mathbf{s}}^h$, et donc $\varphi_{\mathbf{s}}^h = 0$ sur e puisque $\varphi_{\mathbf{s}}^h|_e \in \mathbb{P}_1(e)$. Le corollaire du

lemme ci-dessus est que deux fonctions de forme attachées à des noeuds n'appartenant pas à un même élément ont des supports qui ne s'intersectent pas.

Voyons sur un exemple cf figure 7.10 sur la page suivante. Considérons le maillage en haut à gauche de la figure. Ce maillage comprend huit éléments et huit sommets que l'on note $\mathcal{S}_h = \{\mathbf{s}_j\}_{j=1\dots 8}$. On a donc $\dim(V_h) = 8$. On représente le support de la fonction de forme associée à chacun de ces noeuds.

Système linéaire final

Pour terminer ce chapitre, formulons quelques commentaires sur la forme que prend le système linéaire que l'on considère pour la résolution de (7.14). Pour pouvoir assembler la matrice du problème, il convient d'abord de numérotter les noeuds du maillage : $\mathcal{S}_h = \{\mathbf{s}_j\}_{j=1\dots N}$ avec $N = \text{card}(\mathcal{S}_h)$ = nombre de sommets. En posant $\varphi_j^h := \varphi_{\mathbf{s}_j}^h$, les éléments de la matrice $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{j,k})$ du problème prennent la forme

$$\mathbf{A}_{j,k} = \int_{\Omega} (\nabla \varphi_j^h)^{\top} (\nabla \varphi_k^h) + \mu^2 \varphi_j^h \varphi_k^h \, d\mathbf{x}.$$

Au vu du lemme 7.9, on voit que $\mathbf{A}_{j,k} = 0$ à moins que \mathbf{s}_j et \mathbf{s}_k appartiennent à un même élément. De ce fait, la plupart des éléments de la matrice \mathbf{A} sont nuls. Pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$, notons $\mathcal{T}(\mathbf{s}) = \{e \in \mathcal{T}_h, \mathbf{s} \in \mathcal{S}(e)\}$, puis $\text{adj}(\mathbf{s}) = \cup_{e \in \mathcal{T}(\mathbf{s})} \mathcal{S}(e)$ qui est l'ensemble des noeuds du maillage reliés à \mathbf{s} par une arête. Alors, sur la ligne (resp. colonne) numérotée j de la matrice \mathbf{A} , seuls $\text{card}(\text{adj}(\mathbf{s}_j))$ éléments sont non nuls.

Usuellement, le maillage peut être généré de manière à ce que $\sup_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h} \{\text{card}(\mathcal{T}(\mathbf{s}))\} \leq p$ où p est un entier pas trop grand (exemple $p = 10$). Comme par ailleurs $\text{card}(\text{adj}(\mathbf{s})) \leq (d+1) \times \text{card}(\mathcal{T}(\mathbf{s}))$, on en déduit que chaque colonne de la matrice comporte, au maximum $p \times (d+1)$ éléments non-nul. Et alors la matrice elle-même comporte au plus $p \times (d+1) \times N$ éléments non-nuls, alors qu'elle est de taille $N \times N$. On a donc

$$\frac{\#\{\text{coefficients non nuls}\}}{\#\{\text{coefficients}\}} \leq \frac{p \times (d+1)}{N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0.$$

C'est cette situation qui caractérise une matrice creuse. En guise d'illustration, nous représentons sur la figure 7.7 (b) le "sparsity pattern" de la matrice associée au problème (7.14) dans le cas du maillage de la figure 7.7 (a).

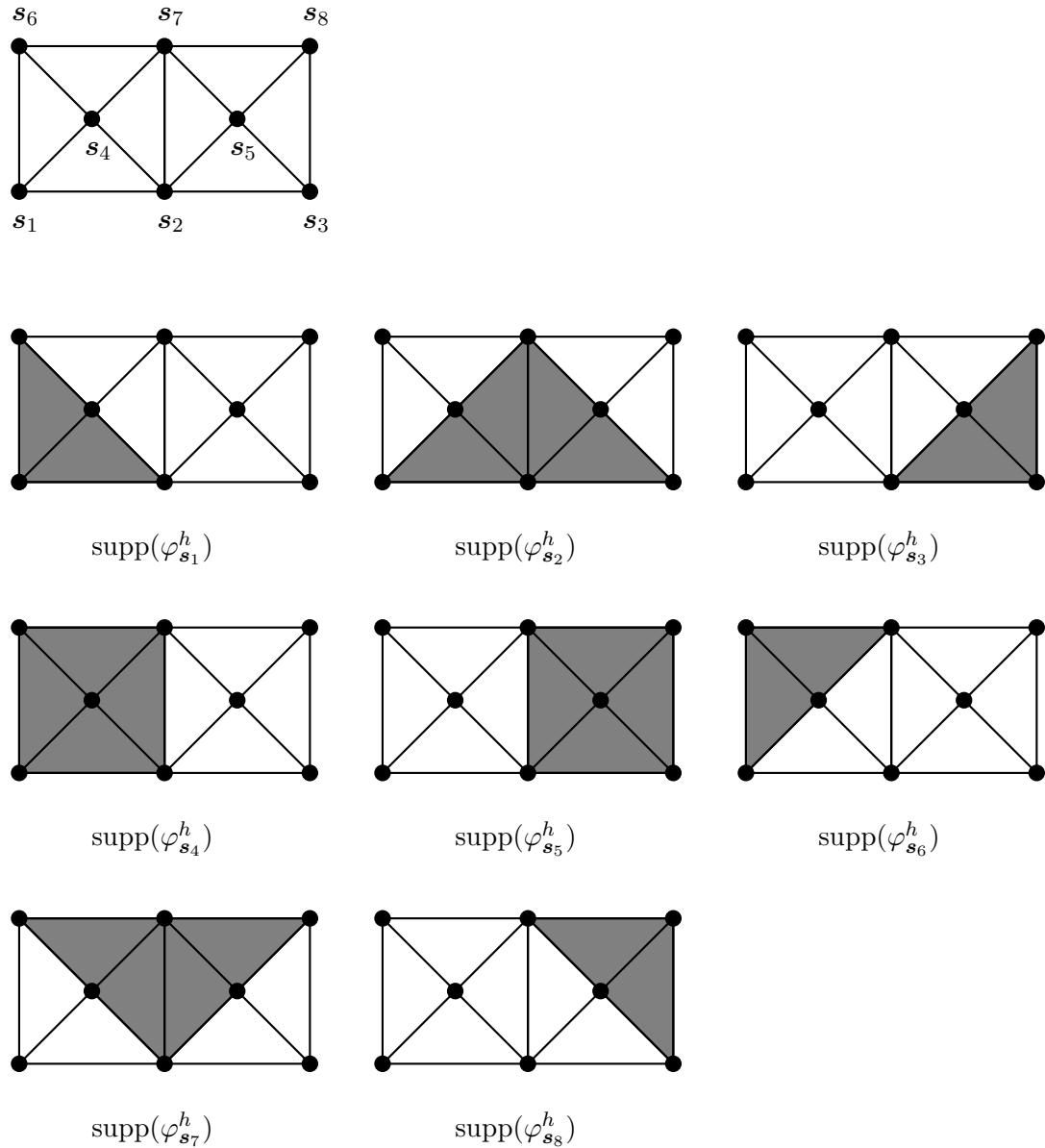


FIGURE 7.10: Support des fonctions de forme dans le cas d'un maillage 2D à 8 éléments.

Chapitre 8

Algorithmique dans les éléments finis

Maintenant que nous avons décrit le principe général de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange, nous allons rentrer un peu plus dans les détails, et décrire plus précisément les algorithmes nécessaires à l'implémentation. Dans ce chapitre, nous nous limiterons à décrire la mise en pratique de cette méthode en 2D, les triangulations que nous considérerons seront donc des maillages en triangle. Commençons par donner le schéma général d'une simulation par éléments finis.

- **étape 1 :** Description de la géométrie. On parle de "Conception Assistée par Ordinateur" (CAO) ou, en anglais de "Computer Aided Design" (CAD).
- **étape 2 :** Génération du maillage. Cette étape peut être plus gourmande en calcul, ou en ressources humaines, que la résolution du système linéaire proprement dite.
- **étape 3 :** Construction de la connectique : chargement du maillage et numérotation des inconnues.
- **étape 4 :** Assemblage de la matrice du problème : calcul des intégrales $a(\varphi_k, \varphi_j)$.
- **étape 5 :** Assemblage du second membre : calcul des intégrales $\ell(\varphi_j)$.
- **étape 6 :** Prise en compte des conditions de bord : application d'un post-traitement si nécessaire, comme dans le cas des conditions de Dirichlet.
- **étape 7 :** Résolution du système linéaire.
- **étape 8 :** Post-traitement/visualisation des résultats (affichages de cartes de champs, calcul d'erreur, etc...).

Les étapes 1, 2 et 7 ci-dessus sont bien souvent sous-traitées par des logiciels/bibliothèques externes. Les étapes les plus coûteuses en temps calcul sont bien souvent les étapes 2 et 7. Mentionnons enfin que le cycle de résolution décrit ci-dessous est parfois imbriqué dans un processus itératif de plus haut niveau : optimisation, stratégie adaptative, second membres multiples, etc...

8.1 Structure type d'un fichier de maillage

La génération de maillage étant une étape qui précède directement la résolution par éléments finis, il s'agit d'une donnée d'entrée d'un code éléments finis (à moins qu'un tel code intègre la génération de maillage, exemple : FreeFEM++¹). A l'issue de sa génération, les données décrivant le maillage sont stockées dans un fichier selon un certain format. Il existe autant de formats de fichier de maillage que de logiciels de génération de maillage. Les différents formats de fichier de maillage suivent cependant bien souvent les mêmes principes élémentaires. Pour s'en faire une idée, nous donnons ici un format type de fichier de maillage.

```
#Nombre de noeuds
Ns

#Coordonnees des noeuds
x1    y1    z1
x2    y2    z2
:
:
xNs   yNs   zNs

#Nombre de triangles
Nt

#Numeros des sommets de chaque triangle
I1,1    I1,2    I1,3
I2,1    I2,2    I2,3
:
:
INt,1   INt,2   INt,3
```

8.2 Assemblage des matrices

Dans toute la suite on va supposer que les noeuds sont numérotés de 1...Ns de sorte que $\mathcal{S}_h = \{\mathbf{s}_j\}_{j=1\dots Ns}$. Dans un souci de concision, on notera φ_j au lieu de $\varphi_{\mathbf{s}_j}$. La matrice $\mathbf{A} = (A_{j,k})_{j,k=1\dots Ns}$ du système (7.4) se décompose en une somme de matrices de rang 1. Si $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^{Ns}, j = 1\dots Ns$ désignent les vecteurs de la base canonique, on a en effet :

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{Ns} \sum_{k=1}^{Ns} a(\varphi_k, \varphi_j) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^T$$

Il va bien évidemment falloir assembler cette matrice i.e. calculer ses coefficients, et stocker ces derniers dans une structure de données qui représente (dans le programme) la matrice. Pour ce faire, on présente un premier algorithme, qui semble naturel en première approche. Mais, en pratique, *cet algorithme ne marche pas*.

1. <https://freefem.org/>

Algorithm 1 Algorithme d'assemblage qui **ne fonctionne pas**

```

A = 0
for  $j = 1 \dots N_s$  do
    for  $k = 1 \dots N_s$  do
         $A_{j,k} = A_{j,k} + a(\varphi_k, \varphi_j)$ 
    end for
end for

```

Cet algorithme ne marche pas en pratique car il est de complexité $\mathcal{O}(N_s^2)$. Ceci n'est pas raisonnable. Et de toute façon, nous allons voir comment obtenir le même résultat mais avec un algorithme beaucoup plus rapide de complexité linéaire.

Nous allons exploiter le caractère creux de la matrice des éléments finis. On dit qu'une matrice est creuse lorsque son ratio (termes non-nuls)/(termes nuls) est très petit. Observons que, pour j, k donnés, si aucun triangle n'admet à la fois s_j et s_k comme sommet, alors $a(\varphi_k, \varphi_j) = 0$. La forme $a(\cdot, \cdot)$ peut donc se décomposer en sommes de contributions locales

$$a(u, v) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} a_\tau(u, v)$$

où $a_\tau(\cdot, \cdot)$ renvoie à la contribution de $a(\cdot, \cdot)$ localisée sur l'élément τ . Une telle décomposition est possible car l'expression de $a(\cdot, \cdot)$ prend la forme d'un nombre fini d'intégrales volumiques. Par exemple dans le cas de (7.14), on a

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} + \mu^2 u \bar{v} \, d\mathbf{x} \\ \text{et alors } a_\tau(u, v) &:= \int_{\tau} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} + \mu^2 u \bar{v} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Supposons que les éléments de la triangulation sont numérotées conformément au fichier de maillage décrit à la section 8.1, de sorte que $\mathcal{T}_h = \{\tau_q\}_{q=1 \dots N_t}$. Notons $\mathbf{e}_j, j = 1 \dots N_s$ les vecteurs de la base canonique dans \mathbb{C}^{N_s} . La matrice du problème se décompose alors de la façon suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} a(\varphi_k, \varphi_j) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^T \\ &= \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{q=1}^{N_t} a_{\tau_q}(\varphi_k, \varphi_j) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^T \\ &= \sum_{q=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} a_{\tau_q}(\varphi_k, \varphi_j) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^T \end{aligned} \tag{8.1}$$

Notons que, pour un τ_q fixé, on a $a_{\tau_q}(\varphi_k, \varphi_j) = 0$ sauf si $\tau_q \cap \text{supp}(\varphi_j) \neq \emptyset$ et $\tau_q \cap \text{supp}(\varphi_k) \neq \emptyset$, ce qui n'arrivera que si $j, k \in \{I_{q,1}, I_{q,2}, I_{q,3}\}$. Ainsi, à q fixé, la double somme ci-dessus $\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_s}$ se réduit à une double somme sur l'ensemble $\{I_{q,1}, I_{q,2}, I_{q,3}\}$

$$\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} a_{\tau_q}(\varphi_k, \varphi_j) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^T = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_{\tau_q}(\varphi_{I_{q,m}}, \varphi_{I_{q,l}}) \mathbf{e}_{I_{q,l}} \cdot \mathbf{e}_{I_{q,m}}^T.$$

On exploite ici activement le caractère creux de la matrice du problème. Cette matrice admet en fine la représentation suivante

$$\mathbf{A} = \sum_{q=1}^{N_t} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_{\tau_q}(\varphi_{I_{q,m}}, \varphi_{I_{q,l}}) \mathbf{e}_{I_{q,l}} \cdot \mathbf{e}_{I_{q,m}}^T$$

La somme ci-dessus contient $9 \times N_t$ termes, c'est-à-dire beaucoup moins que les $N_s \times N_s$ de l'algorithme (1). Ceci nous amène donc à l'algorithme suivant. Il s'agit de l'algorithme standard d'assemblage des matrices éléments finis.

Algorithm 2 Algorithme d'assemblage qui fonctionne

```

A = 0
for q = 1 ... Nt do
    for l = 1 ... 3 do
        for m = 1 ... 3 do
            j = Iq,l
            k = Iq,m
            Aj,k = Aj,k + aτq(φk, φj)
        end for
    end for
end for

```

8.3 Assemblage des termes surfaciques

Dans certains cas la forme sesquilinearaire $a(\cdot, \cdot)$ contient des termes de bord. Pour fixer les idées, étant donné une partie du bord $Γ ⊂ ∂Ω$ de mesure de surface non-nulle et $λ > 0$, considérons dans cette section le problème suivant,

$$\begin{cases} -Δu + μ²u = f & \text{dans } Ω \\ ∂_n u = 0 & \text{sur } Σ = ∂Ω \setminus Γ \\ ∂_n u + λu = 0 & \text{sur } Γ \end{cases} \quad (8.2)$$

Ce problème ne diffère de (7.13) que par les conditions aux limites. En recherchant une formulation variationnelle en suivant la méthodologie exposée au chapitre précédent, on aboutit à la forme sesquilinearaire suivante

$$a(u, v) = ∫_Ω ∇u · ∇v + u v dx + b(u, v)$$

avec $b(u, v) := λ ∫_Γ u v dσ.$

Nous ferons deux hypothèses pratiques. Nous verrons plus tard durant ce cours comment s'en affranchir. On supposez premièrement que le maillage ait été généré de telle sorte que que $Γ$ soit une réunion d'arêtes du maillage

$$\overline{Γ} = \overline{γ}_1 ∪ \overline{γ}_2 ∪ ⋯ ∪ \overline{γ}_{Ng}$$

avec $γ_j ∩ γ_k = ∅$ pour $j ≠ k.$ (8.3)

On suppose par ailleurs que le générateur de maillage nous fournit le numéro des noeuds de chaque γ_j en incorporant une section supplémentaire dans le fichier de maillage qu'il produit, cette section prenant la forme suivante

```
#Nombre arete condition Robin
Ng

#Numeros des sommets de chaque arete
J1,1 J1,2
J2,1 J2,2
⋮ ⋮
JNg,1 JNg,2
```

Nous avons noté $b(\cdot, \cdot)$ la contribution surfacique dans la forme sesquilinearéaire $a(\cdot, \cdot)$. Cette forme peut se décomposer en contributions élémentaires associées à chaque γ_j ,

$$b(u, v) = \sum_{j=1}^{Ng} b_{\gamma_j}(u, v)$$

Soit $B = (B_{j,k}) \in \mathbb{C}^{Ns \times Ns}$ la matrice associée à cette forme sequilinéaire $B_{j,k} = b(\varphi_k, \varphi_j)$. Il faut bien noter que $b(\varphi_k, \varphi_j) = 0$ dès que s_j ou s_k n'appartient pas à Γ , ce qui est le cas de la plupart des noeuds du maillage, de sorte que la matrice B contient beaucoup de termes nulle, encore plus que A. Par ailleurs, on a aussi $b(\varphi_k, \varphi_j) = 0$ dès que s_j et s_k ne sont pas sommets d'une même arête de Γ . On peut alors dérouler un calcul semblable à (8.1), à savoir

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=1}^{Ns} \sum_{k=1}^{Ns} b(\varphi_k, \varphi_j) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^T = \sum_{j=1}^{Ns} \sum_{k=1}^{Ns} \sum_{q=1}^{Ng} b_{\gamma_q}(\varphi_k, \varphi_j) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^T \\ &= \sum_{q=1}^{Ng} \sum_{j=1}^{Ns} \sum_{k=1}^{Ns} b_{\gamma_q}(\varphi_k, \varphi_j) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^T = \sum_{q=1}^{Ng} \sum_{l=1,2} \sum_{m=1,2} b_{\gamma_q}(\varphi_{J_{q,l}}, \varphi_{J_{q,m}}) \mathbf{e}_{J_{q,m}} \cdot \mathbf{e}_{J_{q,l}}^T \end{aligned}$$

Ici encore on a obtenu une somme qui ne compte que $2 \times Ng$ termes. Le cout d'assemblage correspondant est donc linéaire. L'algorithme d'assemblage correspondant s'écrit alors

Algorithm 3 Assemblage du second membre

```
B = 0
for q = 1 ... Ng do
    for l = 1, 2 do
        for m = 1, 2 do
            j = Jq,l
            k = Jq,m
            Bj,k = Bj,k + bγq(φk, φj)
        end for
    end for
end for
```

8.4 Assemblage du second membre

Dans le système (7.4) que l'on obtient à l'issue d'une discrétisation de Galerkin, outre la matrice A, il convient également d'assembler la matrice F. L'assemblage de ce terme suit le même principe de base que pour A, consistant à exploitant la localité des fonctions de forme. A noter aussi que, de même que $a(\cdot, \cdot)$, le second membre $\ell(\cdot)$ peut lui-même admettre à la fois des termes volumiques et surfaciques.

Plaçons-nous pour simplifier dans le cas où $\ell(\cdot)$ ne contient que des termes volumiques, et peut se décomposer en termes localisés dans chaque triangle du maillage comme

$$\ell(v) = \sum_{q=1}^{N_t} \ell_{\tau_q}(v)$$

La matrice colonne $F = (F_j) \in \mathbb{C}^{Ns}$, associé au second membre par la relation $F_j = \ell(\varphi_j)$, se décompose alors de la manière suivante

$$\begin{aligned} F &= \sum_{j=1}^{Ns} \ell(\varphi_j) e_j = \sum_{j=1}^{Ns} \sum_{q=1}^{N_t} \ell_{\tau_q}(\varphi_j) e_j \\ &= \sum_{q=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{Ns} \ell_{\tau_q}(\varphi_j) e_j = \sum_{q=1}^{N_t} \sum_{l=1}^3 \ell_{\tau_q}(\varphi_{I_{q,l}}) e_{I_{q,l}} \end{aligned}$$

On en tire l'algorithme suivant.

Algorithm 4 Assemblage des termes du bord

```

F = 0
for q = 1 ... Nt do
    for l = 1, ..., 3 do
        j = Iq,l
        Fj = Fj + ℓτq(φj)
    end for
end for

```

8.5 Prise en compte des conditions de Dirichlet

Les conditions aux limites de Neumann ne requièrent aucun traitement particulier. A contrario, les conditions au bord de Dirichlet réclament, elles, un traitement spécifique. Pour fixer les idées considérons une portion du bord du domaine $Γ ⊂ ∂Ω$ de mesure de surface non nulle. Supposons que l'on souhaite résoudre le problème

$$\begin{cases} -Δu = f & \text{dans } Ω, \\ ∂_n u = 0 & \text{sur } Σ = ∂Ω \setminus Γ, \\ u = 0 & \text{sur } Γ. \end{cases} \quad (8.4)$$

Une formulation variationnelle possible s'écrit alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega). \end{cases} \quad (8.5)$$

avec $a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} d\mathbf{x}$ et $\ell(v) = \int_{\Omega} f \bar{v} d\mathbf{x}$.

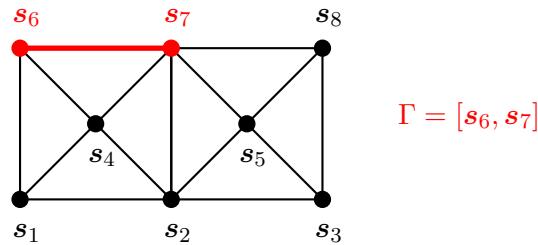
Supposons que le maillage ait été généré de sorte que la partie du bord Γ associée à la condition de Dirichlet soit exactement formé d'une réunion d'arêtes du maillage $\Gamma = \cup_{j=1}^{N_g} \bar{\gamma}_j$ comme en (8.3). Soit par ailleurs $\mathcal{S}_h(\Gamma) := \{s \in \mathcal{S}_h \mid s \in \Gamma\}$ l'ensemble des sommets du maillage localisés sur Γ . L'espace variationnel discret "naturellement" associé à (8.5) est alors

$$\begin{aligned} V_h^\Gamma &:= V_h \cap H_{0,\Gamma}^1(\Omega) \\ &= \{v \in C^0(\bar{\Omega}), v|_\tau \in P_1(\tau) \forall \tau \in \mathcal{T}_h \text{ et } v|_\Gamma = 0\} \\ &= \text{span}\{\varphi_s \mid s \in \mathcal{S}_h \setminus \mathcal{S}_h(\Gamma)\} \end{aligned}$$

Une première formulation variationnelle discrète possible pour (8.5) peut être obtenue en remplaçant $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ par V_h^Γ ,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h^\Gamma \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^\Gamma. \end{cases} \quad (8.6)$$

On peut mettre (8.6) sous la forme d'un système linéaire en utilisant la numérotation des noeuds. Il faudra prendre garde ici à exclure de la numérotation du maillage tous les noeuds localisés sur Γ . Ceci pose une difficulté d'ordre algorithmique car, en général, les noeuds de $\mathcal{S}_h \setminus \mathcal{S}_h(\Gamma)$ ne sont pas numérotés de 1 à $\text{card}(\mathcal{S}_h \setminus \mathcal{S}_h(\Gamma))$. Pour bien faire comprendre ce problème revenons par exemple au maillage considéré à la fin de la section 7.3.



Nous avons fait figurer en rouge ci-dessus la portion du bord que nous considérons pour le bord Dirichlet noté Γ . Les numéros des noeuds associés à $\mathcal{S}_h \setminus \mathcal{S}_h(\Gamma)$ sont $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{8\}$. Il ne s'agit pas d'entier consécutifs et, en particulier, $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{8\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Introduisons les deux ensembles d'indice correspondant à la frontière Γ et à son complémentaire

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_\Gamma &:= \{j \in \{1 \dots N_s\} \mid s_j \in \Gamma\} \\ \mathfrak{I}_\Gamma^0 &:= \{1 \dots N_s\} \setminus \mathfrak{I}_\Gamma. \end{aligned}$$

Au lieu de (8.6) on va se ramener à une formulation discrète écrite dans V_h . Pour $u_h, v_h \in V_h$ se décomposant sur la base des fonctions de formes comme $u_h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_s} u_k \varphi_k(\mathbf{x})$ et $v_h(\mathbf{x}) =$

$\sum_{j=1}^{Ns} v_j \varphi_j(\mathbf{x})$, on définit

$$\begin{aligned}\dot{a}(u_h, v_h) &:= a\left(\sum_{k \in \mathfrak{J}_\Gamma^0} u_k \varphi_k, \sum_{j \in \mathfrak{J}_\Gamma^0} v_j \varphi_j\right) + \sum_{j \in \mathfrak{J}_\Gamma} a(\varphi_j, \varphi_j) u_j \bar{v}_j \\ \dot{\ell}(v_h) &:= \ell\left(\sum_{j \in \mathfrak{J}_\Gamma^0} v_j \varphi_j\right).\end{aligned}$$

La nouvelle formulation s'écrit

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \dot{a}(u_h, v_h) = \dot{\ell}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (8.7)$$

C'est un exercice simple de démontrer que $u_h \in V_h$ est solution de (8.7) si et seulement si $u_h \in V_h^\Gamma$ est solution de (8.6). L'avantage de considérer (8.7) est que l'on s'est ramené à une situation pour laquelle la numérotation du problème sans condition de Dirichlet est préservée. La matrice associée à (8.7) s'écrit

$$\dot{\mathbf{A}} = \sum_{j \in \mathfrak{J}_\Gamma^0} \sum_{k \in \mathfrak{J}_\Gamma^0} a(\varphi_k, \varphi_j) \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k^\top + \sum_{j \in \mathfrak{J}_\Gamma} a(\varphi_j, \varphi_j) \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^\top$$

Pour l'écriture de l'algorithme d'assemblage correspondant, on suppose disponible un tableau qui permet de déterminer (en $\mathcal{O}(1)$ opérations) si, pour un $j \in \{1 \dots Ns\}$ donné, on a $j \in \mathfrak{J}_\Gamma$ ou pas. Ceci revient à pouvoir déterminer rapidement si un noeud appartient à Γ ou non. Si un tel tableau n'est pas disponible, il convient de mettre en place une étape préliminaire permettant de le construire.

Algorithm 5 Assemblage avec pseudo-élimination

```

A = 0
for q = 1 ... Nt do
    for l = 1, ..., 3 do
        for m = 1, ..., 3 do
            j = Iq,l
            k = Iq,m
            interior = (j ∉ JΓ and k ∉ JΓ)
            ok = (interior or j ≠ k)
            if ok then
                Aj,k = Aj,k + aTq(φk, φj)
            end if
        end for
    end for
end for

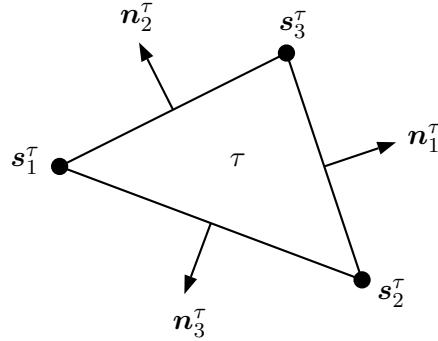
```

8.6 Calcul des interactions élémentaires

Avec les boucles d'assemblage, nous avons vu comment l'assemblage de la matrice (et du second membre) du problème se ramenait au calcul de termes de la forme $a_\tau(\varphi_k, \varphi_j)$ localisés sur un seul triangle τ . Nous allons voir maintenant comment calculer ces termes. Dans ce qui

suit nous exploitons explicitement le fait que l'on considère une discréétisation \mathbb{P}_1 -Lagrange (et pas par exemple \mathbb{P}_k -Lagrange avec $k \geq 2$).

Dans ce paragraphe on considère un triangle du maillage $\tau \in \mathcal{T}_h$ dont on notera $\mathbf{s}_1^\tau, \mathbf{s}_2^\tau, \mathbf{s}_3^\tau$ les sommets. Pour $\tau = \tau_q$, on a donc $\mathbf{s}_k^\tau = \mathbf{s}_{\mathbf{l}_{q,k}}$, $k = 1, 2, 3$. On supposera que l'ordre dans lequel sont donnés ces sommets oriente le triangle τ dans le sens trigonométrique (les calculs seraient tout à fait semblables dans le cas contraire).



Fonctions de forme locales

Pour rendre les notations plus concises on adoptera la convention de notation suivante : pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on pose que $\mathbf{s}_k^\tau := \mathbf{s}_j^\tau$ dès lors que $k - j = 3 * q$ pour un certain entier $q \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\mathbf{s}_0^\tau = \mathbf{s}_3^\tau = \mathbf{s}_6^\tau$, $\mathbf{s}_1^\tau = \mathbf{s}_4^\tau$, et $\mathbf{s}_{-1}^\tau = \mathbf{s}_2^\tau = \mathbf{s}_5^\tau$. On introduit en plus des vecteurs \mathbf{n}_j^τ , $j = 1, 2, 3$ normaux aux arêtes $[\mathbf{s}_{j+1}^\tau, \mathbf{s}_{j+2}^\tau]$ dirigés vers l'extérieur de τ , définis par

$$\mathbf{n}_j^\tau = (\mathbf{s}_{j+2}^\tau - \mathbf{s}_{j+1}^\tau) \times \mathbf{e}_3 \quad (8.8)$$

où l'on rappelle que $\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ désigne le 3ème vecteur de la base canonique i.e. $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, et " \times " désigne ici le produit vectoriel usuel. Attention, les vecteurs \mathbf{n}_j^τ ne sont pas unitaires. Enfin on notera φ_j^τ , $j = 1, 2, 3$ l'unique fonction affine $\varphi_j^\tau \in \mathbb{P}_1(\tau)$ telle que

$$\varphi_j^\tau(\mathbf{s}_k^\tau) = 0 \quad \text{pour } j \neq k \quad \text{et} \quad \varphi_j^\tau(\mathbf{s}_j^\tau) = 1.$$

Une telle fonction existe et est unique d'après le lemme 7.7. Nous appellerons les φ_j^τ fonctions de forme locale à τ . Cette terminologie est motivée par le fait qu'il existe trois fonctions de forme "globales" φ_j qui coïncident sur τ avec les φ_j^τ . On a en effet par construction $\varphi_j^\tau = \varphi_{\mathbf{s}_j^\tau}$ ou encore $\varphi_j^{\tau_q} = \varphi_{\mathbf{l}_{q,j}}$. Les fonctions φ_j^τ admettent l'expression suivante qui est explicite en fonction des \mathbf{s}_j^τ ,

$$\varphi_j^\tau(\mathbf{x}) = 1 - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{s}_j^\tau) \cdot \mathbf{n}_j^\tau}{(\mathbf{s}_{j+1}^\tau - \mathbf{s}_j^\tau) \cdot \mathbf{n}_j^\tau} \quad (8.9)$$

Cette expression conduit également à une formule très simple pour le gradient des fonctions de forme locales. En effet le gradient de (8.9) donne $\nabla \varphi_j^\tau = -\mathbf{n}_j^\tau / (\mathbf{s}_{j+1}^\tau - \mathbf{s}_j^\tau) \cdot \mathbf{n}_j^\tau$. On peut

simplifier cette expression, car d'après (8.8) on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}_{j+1}^\tau - \mathbf{s}_j^\tau) \cdot \mathbf{n}_j^\tau &= (\mathbf{s}_{j+1}^\tau - \mathbf{s}_j^\tau) \cdot [(\mathbf{s}_{j+2}^\tau - \mathbf{s}_{j+1}^\tau) \times \mathbf{e}_3] \\ &= \mathbf{e}_3 \cdot [(\mathbf{s}_{j+1}^\tau - \mathbf{s}_j^\tau) \times (\mathbf{s}_{j+2}^\tau - \mathbf{s}_{j+1}^\tau)] \\ &= 2|\tau|. \end{aligned}$$

Ceci conduit à

$$\nabla \varphi_j^\tau = -\frac{\mathbf{n}_j^\tau}{2|\tau|}. \quad (8.10)$$

Exemple Considérons le cas où τ est le triangle de sommets $\mathbf{s}_1^\tau = (0, 0)$, $\mathbf{s}_2^\tau = (1, 0)$ et $\mathbf{s}_3^\tau = (0, 1)$. Dans toute la suite on notera $\hat{\tau}$ ce triangle que l'on nomme parfois triangle de référence. On a dans ce cas $|\tau| = 1/2$ et

$$\begin{aligned} \varphi_1^\tau(\mathbf{x}) &= 1 - x_1 - x_2, & \nabla \varphi_1^\tau &= -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \varphi_2^\tau(\mathbf{x}) &= x_1, & \nabla \varphi_2^\tau &= \mathbf{e}_1, \\ \varphi_3^\tau(\mathbf{x}) &= x_2, & \nabla \varphi_3^\tau &= \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Rigidité élémentaire

Voyons tout d'abord comment calculer les termes de la forme $\int_\tau \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_k d\mathbf{x}$. Observons simplement que d'après (8.10), chaque $\nabla \varphi_j^\tau \in \mathbb{R}^2$ est une constante vectorielle. On peut ainsi directement écrire

$$\begin{aligned} \int_\tau \nabla \varphi_j^\tau \cdot \nabla \varphi_k^\tau d\mathbf{x} &= \nabla \varphi_j^\tau \cdot \nabla \varphi_k^\tau \int_\tau d\mathbf{x} = \frac{\mathbf{n}_j^\tau \cdot \mathbf{n}_k^\tau}{4|\tau|} \\ &= \frac{(\mathbf{s}_{j+2}^\tau - \mathbf{s}_{j+1}^\tau) \cdot (\mathbf{s}_{k+2}^\tau - \mathbf{s}_{k+1}^\tau)}{4|\tau|}. \end{aligned}$$

Cette expression a la vertu d'être complètement explicite vis-à-vis des coordonnées des sommets du triangle.

Exemple Dans le cas où $\tau = \hat{\tau}$ est le triangle de référence i.e. $\mathbf{s}_1^\tau = (0, 0)$, $\mathbf{s}_2^\tau = (1, 0)$ et $\mathbf{s}_3^\tau = (0, 1)$, la matrice de rigidité élémentaire $\mathbf{K}^\tau = (\mathbf{K}_{j,k}^\tau)_{j,k=1,2,3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ définie par $\mathbf{K}_{j,k}^\tau = \int_\tau \nabla \varphi_j^\tau \cdot \nabla \varphi_k^\tau d\mathbf{x}$ admet l'expression explicite suivante

$$\mathbf{K}^\tau = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Masse élémentaire

Pour le calcul des termes de la forme $\int_\tau \varphi_j(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, on peut utiliser une autre formule explicite générale.

Lemme 8.1 (admis).

Quel que soit le triangle $\tau \subset \mathbb{R}^2$, étant donnés trois entiers $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_\tau \varphi_1^\tau(\mathbf{x})^{\alpha_1} \varphi_2^\tau(\mathbf{x})^{\alpha_2} \varphi_3^\tau(\mathbf{x})^{\alpha_3} d\mathbf{x} = 2|\tau| \frac{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!}{(2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)!}$$

Comme application directe on voit que, quel que soit le triangle $\tau \subset \mathbb{R}^2$, la matrice de masse élémentaire $M^\tau = (M_{j,k}^\tau)_{j,k=1,2,3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ définie par $M_{j,k}^\tau = \int_\tau \varphi_j^\tau \varphi_k^\tau d\mathbf{x}$ dépend uniquement de $|\tau|$ et est donnée par

$$M^\tau = \frac{|\tau|}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Quadrature sur un triangle dans le cas général

On peut avoir à calculer des intégrales plus compliquées que les intégrales élémentaires considérées dans les paragraphes précédents. Étant donné un triangle τ , on se pose alors la question du calcul de l'intégrale $\int_\tau g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = ?$ sans rien savoir sur la fonction $g(\mathbf{x})$ a priori, si ce n'est qu'il sagit d'une fonction régulière.

Pour réaliser un tel calcul, on a recours à une règle de quadrature qui permet de calculer l'intégrale non pas exactement, mais de manière approchée. Une règle de quadrature prend la forme

$$\int_\tau g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq \sum_{q=1}^Q g(\mathbf{x}_q) \omega_q.$$

où les $\mathbf{x}_q \in \mathbb{R}^2$ (resp. $\omega_q \in \mathbb{R}$) sont les points (resp. poids) de la règle de quadrature qui dépendent du domaine d'intégration i.e. le triangle τ . Voici trois exemples de règles de quadrature dans un triangle

$$\int_\tau g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq g\left(\frac{\mathbf{s}_1^\tau + \mathbf{s}_2^\tau + \mathbf{s}_3^\tau}{3}\right) |\tau| \quad (8.11a)$$

$$\int_\tau g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq \left(g\left(\frac{\mathbf{s}_1^\tau + \mathbf{s}_2^\tau}{2}\right) + g\left(\frac{\mathbf{s}_2^\tau + \mathbf{s}_3^\tau}{2}\right) + g\left(\frac{\mathbf{s}_3^\tau + \mathbf{s}_1^\tau}{2}\right) \right) \frac{|\tau|}{3} \quad (8.11b)$$

$$\int_\tau g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq \left(27 g\left(\frac{\mathbf{s}_1^\tau + \mathbf{s}_2^\tau + \mathbf{s}_3^\tau}{3}\right) + \sum_{j=1,2,3} 3 g(\mathbf{s}_j^\tau) + 8 g\left(\frac{\mathbf{s}_{j+1}^\tau + \mathbf{s}_{j+2}^\tau}{2}\right) \right) \frac{|\tau|}{60} \quad (8.11c)$$

En utilisant une règle de quadrature on commet une erreur, mais cette erreur est d'autant plus petite que la triangulation est fine. Dans le cas d'une méthode d'éléments finis \mathbb{P}_k -Lagrange, l'erreur de quadrature ne détériore pas la consistance de la méthode dès lors que les règles de quadrature sont exactes pour les éléments de $\mathbb{P}_{2k-2}(\mathbb{R}^2)$ (dans le cas d'une méthode \mathbb{P}_1 -Lagrange il faut donc que la règle soit exacte pour les constantes).

Quadrature sur une arête

De même, on est amené à calculer des intégrales sur des arêtes, lors de la prise en compte de termes de bord par exemple. Considérant une arête du maillage notée γ , on doit donc calculer des intégrales de la forme $\int_\gamma g(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x})$.

Étant donné un segment du maillage γ , notons $\mathbf{s}_1^\gamma, \mathbf{s}_2^\gamma \in \mathcal{S}_h$ ses deux extrémités, et $|\gamma|$ sa

longueur. On peut considérer les règles suivantes

$$\int_{\gamma} g(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) \simeq g\left(\frac{\mathbf{s}_1^\gamma + \mathbf{s}_2^\gamma}{2}\right) |\gamma| \quad (8.12a)$$

$$\int_{\gamma} g(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) \simeq \left(g(\mathbf{s}_1^\gamma) + 4g\left(\frac{\mathbf{s}_1^\gamma + \mathbf{s}_2^\gamma}{2}\right) + g(\mathbf{s}_2^\gamma)\right) \frac{|\gamma|}{6}. \quad (8.12b)$$

8.7 Validation d'un code élément finis

Dans le cas d'une méthode éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange, il existe certains tests très simples qu'il est possible d'utiliser pour tenter de débusquer un bug. Si le code passe les tests suivants, cela ne signifira nullement l'absence de bug. En revanche, si l'échec de l'un des tests impliquera la présence d'un bug à coup sur.

Test sur la rigidité

Commençons par observer que, si $u \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$, alors on a exactement $u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{Ns} u(\mathbf{s}_j) \varphi_j(\mathbf{x})$. Prenons deux fonctions $u, v \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ définies par $u(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}_u \cdot \mathbf{x} + \beta_u$ et $v(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}_v \cdot \mathbf{x} + \beta_v$. Notons par ailleurs $\mathbf{U} := (u(\mathbf{s}_j))_{j=1\dots Ns}$ et $\mathbf{V} := (v(\mathbf{s}_j))_{j=1\dots Ns}$, ainsi que la matrice de rigidité $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_{j,k})_{j,k=1\dots Ns}$ avec $\mathbf{K}_{j,k} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_k d\mathbf{x}$. Alors on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_u \cdot \boldsymbol{\alpha}_v |\Omega| &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{k=1}^{Ns} u(\mathbf{s}_k) \varphi_k \right) \cdot \nabla \left(\sum_{j=1}^{Ns} v(\mathbf{s}_j) \varphi_j \right) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{k=1}^{Ns} \sum_{j=1}^{Ns} v(\mathbf{s}_j) u(\mathbf{s}_k) \int_{\Omega} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j d\mathbf{x} \\ &= \sum_{k=1}^{Ns} \sum_{j=1}^{Ns} \mathbf{K}_{j,k} v(\mathbf{s}_j) u(\mathbf{s}_k) = \mathbf{V}^\top \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \end{aligned}$$

Par exemple, si l'on prend $\boldsymbol{\alpha}_u = \mathbf{e}_1$ et $\boldsymbol{\alpha}_v = \mathbf{e}_2$ et β_u, β_v quelconque, on doit avoir $\mathbf{V}^\top \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = 0$. Si par contre $\boldsymbol{\alpha}_u = \boldsymbol{\alpha}_v = \mathbf{e}_1$ alors $\mathbf{V}^\top \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = |\Omega|$. Enfin, avec le même type de calcul, on voit que

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{si } \mathbf{U}^\top = (1, \dots, 1).$$

Test sur la masse

Notons $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_{j,k})_{j,k=1\dots Ns}$ la matrice de masse définie par $\mathbf{M}_{j,k} := \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_k d\mathbf{x}$. Alors, avec un calcul semblable à celui que nous avons mené ci-dessus pour la rigidité, on a

$$\mathbf{U}^\top \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U} = |\Omega| \quad \text{pour } \mathbf{U}^\top = (1, \dots, 1).$$