Chapitre 7

Méthodes de bases hilbertiennes

Dans ce chapitre nous abordons plusieurs méthodes d'approximations variationelles dont le point commun est le suivant : les espaces V_n sont engendrés par les n premiers éléments $e_1, \dots, e_n$ d'une base orthonormée de fonction $(e_n)_{n\geq 1}$ pour un espace de Hilbert V. De telles familles sont appelées bases hilbertiennes. On note que dans ce cas les espaces V_n résultants vérifient la propriété d'emboitement

$$V_n \subset V_{n+1},$$

qui n'était pas nécessairement vérifiée dans le cas des espaces d'éléments finis. L'étude de convergence de la méthode d'approximation variationelle dans les espaces V_n se ramène alors celle des coefficients de la solution u dans cette base.

7.1 Bases hilbertiennes

Voici tout d'abord quelques notions générales qu'il convient de connaître sur les bases hilbertiennes.

Définition 7.1.1 *Soit V un espace de Hilbert de dimension infinie. Une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ est appelée base hilbertienne de V si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) La suite est orthonormée, c'est à dire $(e_n, e_m)_V = \delta_{m,n}$ pour tout $m, n \geq 1$.

(ii) La suite est totale, c'est à dire pour tout $v \in V$, il existe une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ telle que $v_n \in V_n = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n)$ et $\|v - v_n\|_V \to 0$ quand $n \to \infty$.

La notion de base hilbertienne remplace ainsi la notion classique de base orthonormée en dimension finie, la propriété de famille génératrice étant remplacée par la propriété (ii) de totalité. Cette propriété peut aussi s'exprimer par le fait que l'ensemble des combinaisons linéaires finies des e_n est dense dans V, ou que l'union de tous les espaces V_n est dense dans V.

Remarque 7.1.1 *On rappelle qu'un espace de Banach X est dit séparable si et seulement si il existe une partie dénombrable dense dans X. Il est facile de montrer que l'existence d'une base Hilbertienne implique une telle propriété sur V (considérer les combinaisons à coefficients rationnels des $(e_1, \dots, e_n)$ pour $n \geq 1$). Réciproquement dans tout espace de Hilbert séparable, on peut construite une base Hilbertienne en partant d'une partie dénombrable dense et en appliquant un procédé d'orthonormalisaiton de type Gram-Schmidt. En pratique, pour des espaces* *de Hilbert tels que $L^2(\Omega)$ ou les espaces de Sobolev, on s'intéressera à des bases hibertiennes plus spécifiques dont les éléments ont des expressions simples.*

Quelques propriétés importantes découlent facilement de la définition : puisque pour tout $v \in V$ on peut trouver $v_n \in V_n$ qui converge vers v quand $n \to \infty$, en notant ici P_{V_n} le projecteur orthogonal sur V_n, on obtient

$$\|v - P_{V_n} v\|_V \leq \|v - v_n\|_V \to 0.$$

On vérifie aisément que

$$P_{V_n} v = \sum_{j=1}^{n} c_j(v) e_j, \quad c_j(v) := (v, e_j)_V$$

ce qui entraîne la convergence vers v dans V de la série ci-dessus quand $n \to \infty$:

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(v) e_j,$$

les coefficients $c_j(v) = (v, e_j)_V$ sont les coordonnées de v dans la base hilbertienne. Elles sont uniquement déterminées : si $v = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$ au sens de la convergence dans V, alors en prenant le produit scalaire avec e_j on voit que l'on a nécessairement $c_j = (v, e_j)_V = c_j(v)$. Puisque

$$\|P_{V_n} v\|_V^2 = \sum_{j=1}^{n} |c_j(v)|^2,$$

on obtient par passage à la limite l'égalité de Parseval

$$\|v\|_V^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |c_j(v)|^2,$$

qui montre que la série des coordonnées appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$. Réciproquement, si $(c_j)_{j \geq 1}$ est une suite quelconque de $\ell^2(\mathbb{N})$, la série $\sum_j c_j e_j$ converge vers une fonction $v \in V$ telle que $c_j = (v, e_j)_V$. La base hilbertienne définit ainsi une isométrie entre V et ℓ^2.

Nous allons utiliser certaines bases hilbertiennes afin de résoudre numériquement les problèmes aux limites par la méthode de Galerkin appliquée dans les espaces V_n. Comme on l'a observé, dans l'estimation fondamentale (5.2), l'analyse de cette méthode se ramène à étudier l'erreur de meilleure approximation de la solution u dans V_n, c'est à dire

$$\min_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_V,$$

où V est la norme de l'espace de Hilbert dans lequel la formulation variationelle est posée et vérifie les hypothèse de Lax-Milgram.

Si on a utilisé une base orthonormée pour le produit scalaire de V, cette erreur d'approximation est donnée par

$$\min_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_V = \|u - P_{V_n} u\|_V = \Big(\sum_{j>n} |c_j(u)|^2\Big)^{1/2}, \quad c_j(u) = (u, e_j)_V,$$

et son évaluation se ramène ainsi à comprendre les propriétés des coefficients de u.

Nous allons faire cette étude pour trois type de bases hilbertiennes $(e_n)_{n\geq 1}$. Dans la suite, on considérera plus généralement des espaces V_n de la forme

$$V_n = \mathrm{vect}\{e_1, \dots, e_{d_n}\},$$

où $(d_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'entiers positifs, et on aura ainsi $\dim(V_n) = d_n$.

7.2 Bases de Fourier

Les séries de Fourier sont adaptées à la représentation des fonctions périodiques. Pour les fonctions de période 1, elles peuvent s'écrire de façon équivalente sous la forme réelle

$$v(x) = \sum_{k\geq 0} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k\geq 1} b_k \sin(2\pi kx), \tag{7.1}$$

ou la forme complexe

$$v(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i2\pi kx}. \tag{7.2}$$

On adoptera ici la forme complexe, plus simple, tout en remarquant que $c_{-k} = \overline{c}_k$ dans le cas où v est réelle. Si la série converge uniformément, ou simplement dans $L^1(]0,1[)$, il est facile de vérifier par intégration que le coefficient c_k est donné par

$$c_k = c_k(v) = \int_0^1 v(x) e^{-i2\pi kx} dx.$$

Dans toute cette section, on posera à nouveau

$$\Omega =]0,1[$$

La série de Fourier (7.2) s'interprete comme une décomposition de v dans une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ en écrivant

$$v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (v, e_k)_{L^2} e_k, \quad e_k(x) := e^{i2\pi kx}.$$

La seule différence avec le cadre général présenté dans la section précédente est que les fonctions e_k sont naturellement indexées par $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{N}$ (on pourrait les re-indexer au prix de notations moins naturelles), et que ce sont des fonctions à valeurs complexes. Le produit scalaire est alors défini par

$$(v, w)_{L^2} = \int_\Omega v(x)\overline{w(x)} dx.$$

L'orthonormalité de la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est immédiate en calculant les produits scalaires.

La propriété de totalité de la suite peut se démontrer de plusieurs manières. On renvoie en particulier les étudiants aux cours introductifs sur les séries de Fourier et les conditions assurant la convergence ponctuelle ou uniforme des sommes partielles

$$S_n v(x) := \sum_{|k|\leq n} (v, e_k)_{L^2} e_k(x) = \sum_{|k|\leq n} c_k(v) e^{i2\pi kx},$$

vers v lorsque $n \to +\infty$. Notons que S_n est le projecteur orthogonal sur l'espace

$$V_n := \text{vect}\{e_{-n}, \dots, e_n\} \tag{7.3}$$

des *polynômes trigonométriques* de degré inférieur ou égal à n et de période 1. On a clairement

$$d_n = \dim(V_n) = 2n+1.$$

L'étude générale de la convergence des série de Fourier, en particulier au sens ponctuel, L^p ou de la norme de la convergence uniforme, est à l'origine de nombreux développements mathématiques depuis le début du XIXème siècle. On rappelle en particulier qu'il ne suffit pas qu'une fonction v soit continue et 2π-périodique pour avoir la convergence uniforme ou même ponctuelle, mais que celle-ci peut-être obtenue si on fait des hypothèses supplémentaires de régularité sur v : elle est assurée par exemple lorsque v est 1-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (ou simplement s-Hölderienne pour un $s > 0$). On note $\mathcal{C}^m_{per}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions 1-périodiques qui sont de classe $\mathcal{C}^m$ sur $\mathbb{R}$.

L'union sur $n \geq 0$ des espaces V_n est donc dense dans $\mathcal{C}^1_{per}$ au sens de la norme L^∞, et donc de la norme de $L^2(\Omega)$. Or $\mathcal{C}^1_{per}$ est dense dans $L^2(\Omega)$ (on peut par exemple prolonger par périodicité les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui est un espace dense dans $L^2(\Omega)$). On en déduit la densité de l'union des espaces V_n dans $L^2(\Omega)$, et on conclut que la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est totale dans cet espace. L'égalité de Parseval

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(v)|^2,$$

exprime une isométrie ente $L^2(\Omega)$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Remarque 7.2.1 *On peut facilement adapter les séries de Fourier à des fonctions de période quelconque en chaque variable : pour des fonctions de période F, il suffit de modifier la définition de e_k suivant $e_k := \frac{1}{\sqrt{F}} e^{i\frac{2\pi k\cdot x}{F}}$. L'analyse étant tout à fait similaire, on considère ici uniquement le cas $F = 1$ qui a l'avantage de simplifier les notations. Un autre cas souvent considéré est $F = 2\pi$ et $\Omega =]-\pi,\pi[$ qui permet d'enlever le facteur 2π dans l'exponentielle mais le fait apparaître dans la normalisation.*

Afin d'étudier l'erreur d'approximation par les espace V_n et la relier à la régularité de la fonction v, on introduit la version périodique des espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ dont la définition est très similaire.

Définition 7.2.1 *Soit m un entier positif. Une fonction $v \in L^2(\Omega)$ appartient à $H^m_{per}(\Omega)$ si et seulement si pour tout $l \leq m$, il existe $w_l \in L^2(\Omega)$ telle que*

$$\int_\Omega w_l \varphi = (-1)^l \int_\Omega v\varphi^{(l)},$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{per}(\Omega)$ où $\mathcal{C}^\infty_{per}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et de période 1.

Comme pour les espaces de Sobolev non-périodiques on note alors $w_l = v^{(l)}$, la dérivée faible d'ordre l. On a en particulier la récurrence

$$H^m_{per}(\Omega) = \{v \in H^1_{per}(\Omega) \ : \ v' \in H^{m-1}_{per}(\Omega)\}.$$

On définit les normes et semi-normes H^m_{per} de la même manière que celle des espaces H^m. Les propriétés des espaces de Sobolev périodiques sont très similaires à celles des espaces non-périodiques et se démontrent de la même façon : complétude, densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty_{per}(\Omega)$, injection continue de $H^1_{per}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^0_{per}(\Omega)$ et plus généralement de $H^m_{per}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^{m-1}_{per}(\Omega)$. Notons que $H^m_{per}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ et que cette inclusion est stricte lorsque $m \geq 1$ à cause de la continuité des dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$. On a cependant $H^0_{per}(\Omega) = H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

En appliquant la définition ci-dessus à la fonction $\varphi(x) = e^{-i2\pi kx}$, on obtient la relation importante

$$c_k(v^{(l)}) = (i2\pi k)^l c_k(v),$$

qui permet de relier la régularité de v aux propriétés de décroissance de ses coefficients de Fourier. En particulier, l'égalité de Parseval nous indique qu'une fonction v appartient à l'espace de Sobolev $H^m_{per}(\Omega)$ si et seulement si

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |2\pi k|^{2l}|c_k|^2 < \infty, \quad l \leq m, \quad c_k = c_k(v).$$

La norme H^m_{per} de v s'écrit

$$\|v\|^2_{H^m_{per}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{l\leq m} |2\pi k|^{2l}\Big)|c_k|^2, \tag{7.4}$$

et la semi-norme

$$|v|^2_{H^m_{per}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |2\pi k|^{2m}|c_k|^2.$$

On remarque au passage que les fonctions e_k sont orthogonales pour le produit scalaire de H^m_{per} mais pas orthonormales. On obtient une base orthonormée si on les renormalise en définissant

$$f_k = \Big(\sum_{l\leq m} |2\pi k|^{2l}\Big)^{-1/2} e_k.$$

On note que

$$S_n v = \sum_{|k|\leq n} (v, e_k)_{L^2} e_k = \sum_{|k|\leq n} (v, f_k)_{H^m_{per}} f_k,$$

et par conséquent S_n est aussi le projecteur orthogonal sur V_n pour la norme H^m_{per}.

La caractérisation par les séries de Fourier des espaces de Sobolev $H^m_{per}(T)$ nous permet d'établir un résultat d'approximation élémentaire par les sommes partielles de Fourier en norme L^2 et H^l_{per}.

Théorème 7.2.1 *Soit $m > 0$ un entier. Pour tout $v \in H^m_{per}(\Omega)$, on a*

$$\|v - S_n v\|_{L^2} \leq Cn^{-m}|v|_{H^m_{per}}, \quad n > 0, \quad C = (2\pi)^{-m} \tag{7.5}$$

Si l est un entier tel que $0 \leq l \leq m$, on a

$$|v - S_n v|_{H^l_{per}} \leq Cn^{-(m-l)}|v|_{H^m_{per}}, \quad n > 0, \quad C = (2\pi)^{-(m-l)}, \tag{7.6}$$

ainsi que

$$\|v - S_n v\|_{H^l_{per}} \leq Cn^{-(m-l)}|v|_{H^m_{per}}, \quad n > 0, \quad C = \sqrt{l+1}(2\pi)^{-(m-l)}. \tag{7.7}$$

Démonstration. Comme $v - S_n v = \sum_{|k|>n} c_k e_k$ avec $c_k = c_k(v)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|v - S_n v\|_{L^2}^2 &= \sum_{|k|>n} |c_k|^2 \\
&\leq (2\pi n)^{-2m} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2\pi k)^{2m} |c_k|^2 \\
&= (2\pi n)^{-2m} |v|_{H^m_{per}}^2,
\end{aligned}$$

et on obtient ainsi (7.5). De la même manière on a

$$\begin{aligned}
|v - S_n v|_{H^l_{per}}^2 &= \sum_{|k|>n} (2\pi k)^{2l} |c_k|^2 \\
&\leq (2\pi n)^{-2(m-l)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2\pi k)^{2m} |c_k|^2 \\
&= (2\pi n)^{-2(m-l)} |v|_{H^m_{per}}^2,
\end{aligned}$$

et on obtient ainsi (7.6). En sommant les estimations en normes L^2 et semi-normes H^j_{per} pour $j = 1, \ldots, l$ élevées au carré, on obtient (7.7). □

Les bases de Fourier sont donc bien adaptées à l'approximation des fonctions appartenant aux espaces de Sobolev H^m_{per}. Dans le cas des solutions de problèmes aux limites ou d'évolution, l'appartenance à de tels espaces sera assurée de manière naturelle si l'on remplace les conditions de Dirichlet par des conditions aux limites périodiques. Nous considérons ici l'exemple suivant

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \quad u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1). \tag{7.8}$$

où c est une fonction de $\mathcal{C}^0(\Omega)$ telle que $c(x) > \eta$ pour tout $x \in \Omega$, avec $\eta > 0$, et où $f \in L^2(\Omega)$. En multipliant cette équation par une fonction $v \in H^1_{per}(\Omega)$ et en intégrant par parties, on trouve

$$\int_\Omega (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx = \int_\Omega f(x)v(x) + [u'v]_0^1,$$

et le dernier terme $[u'v]_0^1$ est nul du fait des périodicités de u' et de v. Cela nous conduit à la formulation variationelle : trouver $u \in V := H^1_{per}(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = \ell(v), \quad v \in V,$$

où a et ℓ ont la même forme que pour le problème avec conditions homogènes de Dirichlet. Seul l'espace V a changé : on a remplacé $H^1_0(\Omega)$ par $H^1_{per}(\Omega)$. Notons que cet espace contient la condition de périodicité $u(0) = u(1)$ puisqu'il s'injecte dans $\mathcal{C}^0_{per}(\Omega)$.

Les hypothèses de Lax-Milgram sont clairement vérifiées avec

$$C_\ell = \|f\|_{L^2}, \quad C_a = \max\{1, \|c\|_{L^\infty}\}, \quad \alpha = \min\{1, \eta\}.$$

Ceci nous assure l'existence et l'unicité de la solution $u \in V$. On remarque aussi que cette solution est en fait dans $H^2_{per}(\Omega)$: pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{per}(\Omega)$ on a, puisque $\varphi \in V$,

$$-\int_\Omega u'(x)\varphi'(x)dx = \int_\Omega (c(x)u(x) - f(x))\varphi(x)dx,$$

qui nous montre que la dérivée faible de u' au sens de H^1_{per} est égale à $cu - f \in L^2(\Omega)$. Ceci nous montre aussi que l'équation $-u'' + cu = f$ est vérifiée dans L^2. On en déduit en particulier que $u \in \mathcal{C}^1_{per}(\Omega)$ et l'on retrouve ainsi la condition de périodicité pour u'. Tout comme dans le cas des conditions de Dirichlet - voir remarque 4.4.4 - on peut monter en régularité et démontrer par récurrence le résultat plus général suivant.

Proposition 7.2.1 *Si $f \in H^m_{per}(\Omega)$ et $c \in \mathcal{C}^m_{per}(\overline{\Omega})$ alors la solution $u \in V = H^1_{per}(\Omega)$ du problème variationel appartient à $H^{m+2}_{per}(\Omega)$.*

Appliquons à présent la méthode de Galerkin en utilisant les espaces V_n des polynômes trigonométriques de degré n. Ces espaces sont contenus dans $\mathcal{C}^\infty_{per}(\Omega)$ et donc a fortiori dans V. La solution discrète est donc $u_n \in V_n$ telle que

$$a(u_n, v_n) = \ell(v_n), \quad v_n \in V_n.$$

D'après le lemme de Cea, on sait que

$$\|u - u_n\|_V \leq C \min_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_V = C\|u - S_n u\|_V,$$

où $C = (C_a/\alpha)^{1/2} = \left(\frac{\max\{1, \|c\|_{L^\infty}\}}{\min\{1,\eta\}}\right)^{1/2}$. Puisque $V = H^1_{per}$, on déduit de la Proposition 7.2.1, que si la solution u appartient à $H^m_{per}(\Omega)$ pour un entier $m \geq 1$, on a l'estimation d'erreur

$$\|u - u_n\|_V \leq C|u|_{H^m_{per}} n^{-(m-1)},$$

où $C = \sqrt{2}(2\pi)^{-(m-1)}\left(\frac{\max\{1, \|c\|_{L^\infty}\}}{\min\{1,\eta\}}\right)^{1/2}$.

On voit ici apparaître une caractéristique de la méthode d'approximation variationelle fondée sur les séries de Fourier : la vitesse de convergence $O(n^{-(m-1)})$ augmente avec la régularité de la solution, sans limitation liée à l'ordre de la méthode. D'après les résultats de régularité de la proposition 7.2.1, on obtiendra en particulier cette vitesse si $f \in H^{m-1}_{per}$ et $c \in \mathcal{C}^{m-1}_{per}(\Omega)$. On note la différence avec les méthodes d'éléments finis P_k pour lesquelles on a vu que la vitesse de convergence est limitée par $O(h^k)$ même si la solution est très régulière. Les méthodes numériques sans limitation d'ordre sont appelées méthodes *spectrales*.

Remarque 7.2.2 *Dans le calcul de la solution u_n, il est intéressant d'utiliser la base de Fourier*

$$f_k = \left(1 + |2\pi k|^2\right)^{-1/2} e_k,$$

qui est orthonormée pour le produit scalaire H^1_{per}. En effet, si $v_n \in V_n$ et $\overline{v}_n$ est son vecteur de coordonnées dans cette base, on a

$$\|v_n\|^2_{H^1_{per}} = \|\overline{v}_n\|^2_{\ell^2}.$$

D'autre part, la matrice de rigidité A_n dont les éléments sont les $a(f_k, f_l)$, pour $|k|, |l| \leq n$, vérifie

$$(A_n \overline{v}_n, \overline{v}_n)_{\ell^2} = a(v_n, v_n)$$

Or on sait que

$$\alpha\|v\|^2_{H^1_{per}} \leq a(v,v) \leq C_a\|v\|^2_{H^1_{per}}, \quad v \in H^1_{per}(\Omega),$$

et par conséquence pour tout vecteur $\overline{v}_n$, on a

$$\alpha\|\overline{v}_n\|^2_{\ell^2} \leq (A_n\overline{v}_n, \overline{v}_n)_{\ell^2} \leq C_a\|\overline{v}_n\|^2_{\ell^2},$$

ce qui montre que $\lambda_{\min}(A_n) \geq \alpha$ et $\lambda_{\max}(A_n) \leq C_a$. On voit ainsi que le nombre de conditionnement de A_n est borné suivant

$$\kappa(A_n) \leq \frac{C_a}{\alpha},$$

indépendamment de n. Contrairement à ce qui a été observé pour la méthode des éléments finis, on peut donc ici éviter la dégradation du nombre de conditionnement lorsque la précision augmente par une simple renormalisation de la base de V_n.

Le défaut principal des approximations fondées sur les séries de Fourier reste néammoins qu'elles sont adaptées aux conditions aux limites périodiques qui ne sont pas souvent celles qu'on rencontre en pratique. Nous allons voir que des méthodes spectrales peuvent être définies avec les conditions de Dirichlet en utilisant les espaces polynomiaux classiques.

7.3 Bases polynomiales

Les bases orthogonales de polynômes peuvent être définies en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt aux fonctions $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$, par rapport un produit scalaire Hilbertien donné. De manière usuelle, on choisit de travailler avec le produit scalaire L^2 sur l'intervalle symmétrique $]-1,1[$. On posera ainsi dans cette section

$$\Omega =]-1,1[,$$

tout en remarquant qu'il est possible de traiter le cas d'un intervalle Ω quelconque. Le procédé de Gram-Schmidt conduit ainsi à la suite $(\tilde{L}_n)_{n\geq 1}$ des polynômes de Legendre, qui est caractérisée par les propriétés suivantes

(i) $\tilde{L}_0 = 1$

(ii) $\tilde{L}_n(x) = x^n + q_{n-1}$ avec $q_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$.

(iii) $\int_\Omega \tilde{L}_n\tilde{L}_m = 0$ si $m \neq n$.

Le polynôme $\tilde{L}_n$ est donc de degré exactement égal à n et est défini en soustrayant la fonction $x \mapsto x^n$ sa projection orthogonale sur $\mathbb{P}_{n-1}$. Par construction $\{\tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_n\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{P}_n$. Notons que la suite ainsi définie n'est pas orthonormale et peut être orthonormalisée en posant

$$L^*_n = \|\tilde{L}_n\|^{-1}_{L^2(\Omega)}\tilde{L}_n.$$

Théorème 7.3.1 *La suite $(L^*_n)_{n\geq 0}$ des polynômes de Legendre renormalisés est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$.*

Démonstration. On sait déjà qu'il s'agit d'une suite orthonormée. Il suffit donc de démontrer que l'union des espaces $\mathbb{P}_n$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Or le théorème de Stone-Weierstrass nous indique que l'on peut approcher toute fonction continue sur $[-1,1]$ uniformément par une suite de polynômes, et donc a fortiori en norme L^2. Comme $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est lui-même dense dans $L^2(\Omega)$, on en déduit la densité de l'union des espaces $\mathbb{P}_n$ dans $L^2(\Omega)$. $\square$

Ainsi toute fonction $v \in L^2(\Omega)$ peut se décomposer de manière unique suivant

$$v = \sum_{n\geq 0} c_n(v) L_n^*, \quad c_n(v) = \int_\Omega v(x) L_n^*(x) dx, \tag{7.9}$$

et on a $\|v\|_{L^2}^2 = \sum_{n\geq 0} |c_n(v)|^2$.

Remarque 7.3.1 *Il est évidemment possible d'obtenir des suites orthonormée de polynômes dans $L^2(\Omega)$ pour d'autres intervalles Ω en appliquant des changement de variables, comme on l'a déjà remarqué pour les séries de Fourier. On peut aussi fabriquer par le même procédé des suites de polynômes orthogonaux dans des espaces $L^2(\Omega, d\mu)$ où μ n'est pas la mesure de Lebesgue. On obtient en particulier les exemples classiques suivants :*
- Polynômes de Chebychev : $\Omega =]-1,1[$ et $d\mu = (1-x^2)^{-1/2} dx$.
- Polynômes de Hermite : $\Omega = \mathbb{R}$ et $d\mu = \exp(-x^2) dx$.
- Polynômes de Laguerre : $\Omega = \mathbb{R}_+$ et $d\mu = \exp(-x) dx$.
Notons qu'il est nécessaire d'avoir un poids décroissant rapidement à l'infini dans la mesure μ lorsque Ω est non-borné puisque l'existence d'une base orthonormée polynomiale implique en particulier que $\int_\Omega |p|^2 d\mu < \infty$ pour tout polynôme p.

La normalisation la plus souvent appliquée des polynômes de Legendre consiste cependant à imposer la valeur 1 au point $x = 1$, en posant

$$L_n = (\tilde{L}_n(1))^{-1} \tilde{L}_n.$$

On note en particulier que $L_0 = 1$ et $L_1(x) = x$. La propriété $\tilde{L}_n(1) \neq 0$ découle de la première propriété dans le résultat suivant qui compile quelques propriétés importantes.

Théorème 7.3.2 *Les polynômes de Legendre vérifient les propriétés suivantes :*
(i) Leurs n racines sont réelles, simples, et contenues dans $]-1,1[$.
(ii) Si n est pair, L_n est pair, si n est impair, L_n est impair.
(iii) Formule de Rodrigues : on a $L_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\big((1-x^2)^n\big)$
(iv) Coefficient dominant : on a $L_n(x) = k_n x^n + q_{n-1}(x)$ où $q_{n-1} \in P_{n-1}$ et $k_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.
(v) Equation différentielle : $((1-x^2)L_n')' + n(n+1)L_n = 0$.
(vi) Norme L^2 et récurrence : $\|L_n\|_{L^2}^2 = (n+1/2)^{-1}$ et $L_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} x L_n - \frac{n}{n+1} L_{n-1}$.

Démonstration. (i) Soient $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ les racines de $\tilde{L}_n$ qui appartiennent à $]-1,1[$, de multiplicité impaire $2\alpha_j + 1$ et $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l$ les racines de $\tilde{L}_n$ qui appartiennent à $]-1,1[$, de multiplicité paire $2\beta_i$. On peut donc écrire que

$$\tilde{L}_n(x) = q(x) \prod_{i=1}^{l} (x-\eta_i)^{2\beta_i} \prod_{j=1}^{k} (x-\zeta_j)^{2\alpha_j+1},$$

(avec la convention que si $l = 0$ ou $k = 0$, le produit correspondant vaut 1) où q n'a pas de racine dans $]-1,1[$. Par conséquent, q garde un signe constant sur cet intervalle. Soit $p(x) = \prod_{j=1}^{k}(x-\zeta_j)$. Si L_n a une racine qui n'est pas dans $]-1,1[$ ou si toutes ses racines sont bien dans $]-1,1[$, mais l'une d'entre elle est de multiplicité strictement supérieure à 1, alors $\deg p < n$ (en effet, dans ce cas $k = \deg p < \sum_{i=1}^{l}(2\beta_i) + \sum_{i=1}^{k}(2\alpha_j + 1) \leq \deg L_n$). Par conséquent, par orthogonalité

$$0 = \int_\Omega \tilde{L}_n p = \int_\Omega q(x)\Big(\prod_{i=1}^{l}(x-\eta_i)^{\beta_i}\prod_{j=1}^{k}(x-\zeta_j)^{\alpha_j+1}\Big)^2 dx$$

mais l'intégrande du membre de droite ne change pas de signe dans $]-1,1[$, ce qui est une contradiction. Donc toutes les racines de $\tilde{L}_n$ sont dans $]-1,1[$ et elles sont simples.

(ii) Considérons les polynômes $\tilde{L}_n$, et soit $p_n(x) = (-1)^n\tilde{L}_n(-x)$. Alors p_n satisfait visiblement la propriété de suite orthogonale telle que $p_n(x) = x^n + q_{n-1}(x)$ avec $q_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. Par unicité on en déduite que $p_n(x) = \tilde{L}_n(x)$ ce qui entraîne les propriétés de parité et d'imparité annoncées.

(iii) Le polynôme $(1-x^2)^n$ est de degré $2n$, donc sa dérivée $n$ième est de degré n. Il s'annule ainsi que ses $n-1$ premières dérivées aux points -1 et 1. Par conséquent, pour toute fonction q, n fois dérivable, on obtient en intégrant n fois par parties

$$\int_\Omega \frac{d^n}{dx^n}\big((1-x^2)^n\big)q(x)\,dx = (-1)^n\int_\Omega (1-x^2)^n\frac{d^n q}{dx^n}(x)\,dx,$$

car tous les termes tout intégrés disparaissent. En particulier, on a

$$\int_\Omega \frac{d^n}{dx^n}\big((1-x^2)^n\big)q(x)\,dx = 0, \quad q \in P_{n-1}$$

Donc, $\frac{d^n}{dx^n}\big((1-x^2)^n\big)$ est un polynôme de $\mathbb{P}_n$, orthogonal à $\mathbb{P}_{n-1}$. Il existe donc un scalaire λ_n tel que

$$\frac{d^n}{dx^n}\big((1-x^2)^n\big) = \lambda_n L_n(x).$$

Pour identifier ce scalaire, on considère ici la valeur prise en $x = 1$ par les deux membres de cette égalité. D'un côté, $L_n(1) = 1$, et de l'autre, comme $(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n$, on voit que sa dérivée n-ème au point $x = 1$ et la même que celle de $(-x)^n(2+x)^n$ au point $x = 0$ soit $\lambda_n = (-1)^n 2^n n!$. On obtient ainsi la formule de Rodrigues.

(iv) En utilisant la formule de Rodrigues et en remarquant que $(1-x^2)^n = (-1)^n x^{2n} + \ldots$, on en déduit par dérivation d'ordre n la valeur annoncée du coefficient dominant k_n.

(v) Comme L_n est de degré n, on voit que $((1-x^2)L_n')'$ est de degré n. Pour tout polynôme $q \in \mathbb{P}_{n-1}$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big((1-x^2)L_n'\big)'q &= [(1-x^2)L_n' q]_{-1}^{1} - \int_\Omega (1-x^2)L_n' q' \\ &= -\int_\Omega L_n\big((1-x^2)q'\big)' = 0,\end{aligned}$$

puisque $\big((1-x^2)q'\big)'$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$. Par conséquent, il existe un scalaire λ_n tel que

$$\big((1-x^2)L_n'\big)' = \lambda_n L_n.$$

en identifiant les termes de plus haut degré de part et d'autre, on trouve $\lambda_n = -n(n+1)$ et on obtient ainsi l'équation différentielle.

(vi) A cause de la normalisation $L_n(x) = 1$, on sait que $L_0 = 1$ et $L_1(x) = x$. Par récurrence, supposons que $\|L_k\|_{L^2}^2 = (k+1/2)^{-1}$ pour $k = 0,\dots,n$. On regarde alors la fonction définie par la formule de récurrence

$$g_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xL_n(x) - \frac{n}{n+1}L_{n-1}(x).$$

C'est un polynôme de degré $n+1$, et puisque

$$\int_\Omega xL_n p = \int_\Omega L_{n-1}p = 0, \quad p \in \mathbb{P}_{n-2},$$

ce polynôme est orthogonal à $L_0,\dots,L_{n-2}$. Son produit scalaire avec L_n est nul car $\int_\Omega xL_n^2 = 0$ par parité de L_n^2. Son produit scalaire avec L_{n-1} est donné par

$$\int_\Omega g_{n+1}L_{n-1} = \frac{2n+1}{n+1}\int_\Omega xL_nL_{n-1}dx - \frac{n}{n+1}\|L_{n-1}\|_{L^2}^2$$

L'intégrale $\int_\Omega xL_n(x)L_{n-1}(x)$ se calcule en remarquant que d'après l'orthogonalité de L_n à $\mathbb{P}_{n-1}$ on a $\|L_n\|_{L^2}^2 = \int_\Omega k_nx^nL_ndx$ et $\int_\Omega xL_nL_{n-1} = \int_\Omega k_{n-1}x^nL_n$. Par conséquent

$$\int_\Omega xL_nL_{n-1} = \frac{k_{n-1}}{k_n}\|L_n\|_{L^2}^2 = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}((n-1)!)^2}\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}\frac{2}{2n+1} = \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)},$$

où on a utilisé la valeur de k_n et l'hypothèse de récurrence. Par conséquence

$$\int_\Omega g_{n+1}L_{n-1} = \frac{2n}{(2n-1)(n+1)} - \frac{n}{n+1}\|L_{n-1}\|_{L^2}^2 = 0,$$

à nouveau par l'hypothèse de récurrence. On a ainsi montré que g_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{P}_n$ et sa définition nous montre aussi que $g_{n+1}(1) = 1$. On a donc $g_{n+1} = L_{n+1}$ et la formule de récurrence est démontrée. D'autre part, cette formule montre que la norme L^2 de L_{n+1} est donnée par

$$\|L_{n+1}\|_{L^2}^2 = \frac{2n+1}{n+1}\int_\Omega xL_{n+1}L_n = \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}\frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = (n+3/2)^{-1},$$

ce qui conclut la récurrence. □

Remarque 7.3.2 *Toutes ces propriétés se traduisent immédiatement sur les polynômes de Legendre L_n^* normalisés dans L^2 et qui sont définis par*

$$L_n^* = \sqrt{n+1/2}L_n,$$

et donc $L_n^*(1) = \sqrt{n+1/2}$. On a en particulier la récurrence

$$L_{n+1}^* = \frac{(2n+1)\sqrt{n+3/2}}{(n+1)\sqrt{n+1/2}}xL_n^* - \frac{n\sqrt{n+3/2}}{(n+1)\sqrt{n-1/2}}L_{n-1}^*$$

L'équation différentielle reste inchangée.

Remarque 7.3.3 *Pour un intervalle $\Omega =]a,b[$ quelconque, on obtient une base Hilbertienne de polynômes pour $L^2(\Omega)$ en posant*

$$L_n^{[a,b]}(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} L_n^* \Big(\frac{2}{b-a}(x - \frac{a+b}{2}) \Big),$$

et on peut effectuer une analyse similaire à celle qui va suivre, mais par simplicité on conservera le choix $\Omega =]-1,1[$

Nous allons à présent établir des résultats d'approximation d'une fonction u dans les espaces polynomiaux $\mathbb{P}_n$. On suit ici une démarche analogue à celle employée pour les séries de Fourier : on considère une fonction $v \in L^2(\Omega)$ et sa décomposition (7.9) et on montre que ses propriétés de régularité se traduisent par des propriétés de sommabilité de ses coefficients $c_n(v)$ avec des poids croissants, comme dans (7.4) pour les coefficients de Fourier.

Théorème 7.3.3 *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante C qui ne dépend que de m telle que*

$$\sum_{n \geq 0} |n|^{2m} |c_n(v)|^2 \leq C \|v\|_{H^m}^2, \tag{7.10}$$

pour tout $v \in H^m(\Omega)$.

Démonstration. Nous allons utiliser l'équation différentielle vérifiée par les polynômes de Legendre, qui peut s'écrire

$$DL_n^* + n(n+1)L_n^* = 0$$

où D est l'opérateur différentiel $Dv = ((1-x^2)v')'$. On remarque que si v et w sont suffisament régulières, par exemple dans $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, on a

$$\int_\Omega Dv(x)w(x)dx = -\int_\Omega (1-x^2)v'(x)w'(x)dx = \int_\Omega v(x)Dw(x)dx,$$

ce qui nous montre que l'opérateur D est en ce sens *auto-adjoint*. En appliquant cela à $w = L_n^*$ et en utilisant l'équation différentielle, on obtient

$$c_n(Dv) = \int_\Omega (Dv)L_n^* = \int_\Omega v(DL_n^*) = -n(n+1)c_n(v).$$

Notons que si $v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ on a $Dv(x) = (1-x^2)v''(x) - 2xv'(x)$ mais ce calcul garde un sens si $v \in H^2(\Omega)$. On a dans ce cas $Dv \in L^2(\Omega)$ avec

$$\|Dv\|_{L^2} \leq \|v''\|_{L^2} + 2\|v'\|_{L^2} \leq \sqrt{3}(\|v''\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2)^{1/2} \leq \sqrt{3}\|v\|_{H^2}.$$

On peut ainsi écrire

$$\|Dv\|_{L^2}^2 = \sum_{n \geq 0} |c_n(Dv)|^2 = \sum_{n \geq 0} |n(n+1)|^2 |c_n(v)|^2.$$

ce qui conduit l'estimation, pour tout $v \in H^2(\Omega)$,

$$\sum_{n \geq 0} |n|^4 |c_n(v)|^2 \leq 3\|v\|_{H^2}^2.$$

On peut itérer ce raisonnement en remarquant que pour tout $k \geq 1$ et $v \in H^{2k}$ on a

$$c_n(D^k v) = -n(n+1)c_n(D^{k-1}v) = \cdots = (-n(n+1))^k c_n(v),$$

et que

$$\|D^k v\|_{L^2}^2 \leq C\|v\|_{H^{2k}}^2,$$

où la constante C ne dépend que de k. En remarquant que $n^2 \leq n(n+1)$, on aboutit ainsi à l'estimation pour tout $v \in H^{2k}(\Omega)$.

$$\sum_{n\geq 0} |n|^{4k}|c_n(v)|^2 \leq C\|v\|_{H^{2k}}^2.$$

On a ainsi obtenu (7.10) pour les valeurs paires de m. On peut obtenir une estimation similaire pour les espaces de régularités impaires $H^{2k+1}(\Omega)$: pour cela, on écrit pour v suffisament régulière, par exemple dans $\mathcal{C}^{4k+2}(\Omega)$,

$$-\int_\Omega (D^{2k+1}v)v = -\int_\Omega D^{k+1}vD^k v = \int_\Omega (1-x)^2(D^k v)'(D^k v)' \leq \|(D^k v)'\|_{L^2}^2.$$

Puisque $D^{2k+1}v = -\sum_{n\geq 0}(n(n+1))^{2k+1}c_n(v)L_n^*$, on obtient ainsi

$$\sum_{n\geq 0} |n|^{4k+2}|c_n(v)|^2 = -\int_\Omega (D^{2k+1}v)v \leq \|(D^k v)'\|_{L^2}^2 \leq C\|v\|_{H^{2k+1}}^2,$$

où la constante C ne dépend que de k. Par densité, cette estimation est valable pour tout $v \in H^{2k+1}(\Omega)$. □

Le résultat ci-dessus nous conduit naturellement vers un résultat d'approximation.

Théorème 7.3.4 *Pour tout entier $m \geq 0$, il existe une constante C qui ne dépend que de m telle que,*

$$\min_{v_n \in \mathbb{P}_n} \|v - v_n\|_{L^2} \leq C(n+1)^{-m}\|v\|_{H^m}, \tag{7.11}$$

pour tout $v \in H^m(\Omega)$.

Démonstration. En notant Π_n le projecteur orthogonal pour $L^2(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_n$, on peut écrire

$$\|v - \Pi_n v\|_{L^2}^2 = \sum_{k>n} |c_k(v)|^2 \leq (n+1)^{-2m} \sum_{k\geq 0} |k|^{2m}|c_k(v)|^2 \leq C(n+1)^{-2m}\|v\|_{H^m}^2,$$

où la dernière inégalité découle de (7.10), et on obtient ainsi l'estimation (7.11). □

Nous souhaitons appliquer la méthode d'approximation variationnelle dans les espaces de polynômes, au problème aux limites

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega =]-1,1[,$$

avec les conditions aux limites homogène de Dirichlet $u(-1) = u(1) = 0$. Il nous faut tout d'abord modifier l'espace $\mathbb{P}_n$ afin de tenir compte des conditions aux limites. Nous définissons pour cela l'espace

$$V_n := \{v \in \mathbb{P}_n \ : v(-1) = v(1) = 0\}.$$

Il est immédiat de vérifier que cet espace est constitué des fonctions de la forme

$$v(x) = (1-x^2)w(x), \quad w \in \mathbb{P}_{n-2},$$

et que sa dimension est celle de $\mathbb{P}_{n-2}$, c'est à dire

$$d_n = \dim(V_n) = n-1.$$

Cet espace est contenu dans l'espace $V = H_0^1(\Omega)$ qui est l'espace naturel de la formulation variationelle : trouver $u \in V$ telle que

$$a(u,v) = \ell(v), \quad v \in V,$$

avec $a(u,v) := \int_\Omega (c(x)u(x)v(x) + u'(x)v'(x))dx$ et $\ell(v) := \int_\Omega f(x)v(x)dx$. La solution discrète est donc définie par : trouver $u_n \in V_n$ telle que

$$a(u_n,v_n) = \ell(v_n), \quad v_n \in V_n.$$

Pour l'estimation d'erreur on va utiliser la norme $\|v\|_V = \|v\|_{H_0^1} = \|v'\|_{L^2}$ dont on rappelle qu'elle est équivalente à la norme H^1 sur V.

On a en particulier pour la forme bilinéaire a la propriété de continuité avec $C_a = 1 + \|c\|_{L^\infty} C_P^2$, où C_P est la constante dans l'inégalité de Poincaré

$$\|v\|_{L^2} \le C_P \|v'\|_{L^2}, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

ainsi que la propriété de coercivité avec $\alpha = 1$. D'après le lemme de Cea, on a l'estimation d'erreur

$$\|u-u_n\|_V \le C \min_{v_n \in V_n} \|u-v_n\|_V, \quad C = (C_a/\alpha)^{1/2} = (1+\|c\|_{L^\infty} C_P^2)^{1/2}.$$

Il nous reste à estimer $\min_{v_n \in V_n} \|u-v_n\|_V$, et pour cela il nous faut un résultat d'approximation similaire au théorème 7.3.4 mais pour l'erreur d'approximation mesurée en norme H_0^1 au lieu de L^2. Remarquons tout d'abord qu'on peut exhiber simplement une base de V_n qui sera orthonormée pour le produit scalaire de V. Il suffit de considérer les fonctions primitives des polynômes de Legendre normalisées dans L^2,

$$Q_k(x) = \int_{-1}^x L_k^*(t)dt,$$

pour $k = 1, \dots, n-1$. Au vu de l'équation différentielle, ces fonctions sont aussi données par

$$Q_k(x) = -\frac{1}{k(k+1)}(1-x^2)(L_k^*)'(x).$$

Théorème 7.3.5 *Les fonctions $(Q_1, \dots, Q_{n-1})$ forment une base hilbertienne de V_n et la famille $(Q_k)_{k\ge1}$ est une base hilbertienne de V.*

Démonstration. On remarque tout d'abord que pour tout $k \geq 1$ la fonction Q_k est un polynôme de degré $k+1$. On a d'autre part

$$\int_\Omega L_k^*(t)dt = \int_\Omega L_0^*(t)L_k^*(t)dt = 0,$$

ce qui entraîne immédiatement que $Q_k(-1) = Q_k(1) = 0$. On voit ainsi que $Q_k \in V$. L'orthonormalité dans V est immédiate puisque

$$(Q_j, Q_k)_V = \int_\Omega Q_j' Q_k' = \int_\Omega L_j^* L_k^* = \delta_{j,k}.$$

On en déduit que $(Q_1, \dots, Q_{n-1})$ est une base hilbertienne de V_n puisqu'on a exactement $n-1$ fonctions orthonormées et que $\dim(V_n) = n-1$. D'autre part notons $\overline{\Pi}_n$ l'opérateur de projection V-orthogonale sur V_n. Celui-ci peut s'écrire

$$\overline{\Pi}_n v = \sum_{k=1}^{n-1} (v, Q_k)_V Q_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\int_\Omega v' L_k^*) Q_k.$$

Ainsi

$$(\overline{\Pi}_n v)' = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(v') L_k^* = \Pi_{n-1} v',$$

où Π_{n-1} est le projecteur L^2-orthogonal sur $\mathbb{P}_{n-1}$, puisque

$$c_0(v') = (v', L_0^*)_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_\Omega v' = \frac{1}{\sqrt{2}}(v(1) - v(-1)) = 0.$$

On voit ainsi que

$$\|\overline{\Pi}_n v - v\|_V = \|(\overline{\Pi}_n v)' - v'\|_{L^2} = \|\Pi_{n-1} v' - v'\|_{L^2} \to 0,$$

quand $n \to \infty$, et on conclut ainsi que $(Q_k)_{k \geq 1}$ est une base hilbertienne de V. □

En utilisant cette nouvelle base hilbertienne, on obtient aisément un résultat d'approximation dans V en utilisant celui qu'on a auparavant démontré dans L^2 pour les espaces $\mathbb{P}_n$.

Théorème 7.3.6 *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante C qui ne dépend que de m telle que,*

$$\min_{v_n \in V_n} \|v - v_n\|_V \leq C n^{-(m-1)} \|v\|_{H^m}, \tag{7.12}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^m(\Omega)$.

Démonstration. En utilisant les propriétés du projecteur $\overline{\Pi}_n$ utilisées dans le théorème 7.3.5, on peut écrire

$$\|v - \overline{\Pi}_n v\|_V = \|v' - \Pi_{n-1} v'\|_{L^2}.$$

D'après le théorème 7.3.4, on a l'estimation

$$\|v' - \Pi_{n-1} v'\|_{L^2} \leq C n^{-(m-1)} \|v'\|_{H^{m-1}},$$

où la constante C ne dépend que de m. On en déduit (7.12) $\square$

Revenons à l'approximation variationelle du problème aux limites dans l'espace V_n. En combinant l'estimation du Lemme de Cea et le théorème 7.3.6, on en déduit que si la solution u appartient à $H^m(\Omega)$ pour un entier $m \geq 1$, on a alors l'estimation d'erreur

$$\|u - u_n\|_V \leq C\|u\|_{H^m} n^{-(m-1)},$$

où C depend de m et des constantes C_P et $\|c\|_{L^\infty}$. Tout comme pour les méthodes utilisant les bases de Fourier, la vitesse de convergence $O(n^{-(m-1)})$ augmente avec la régularité de la solution, sans limitation liée à l'ordre de la méthode. D'après les résultats de régularité indiqués dans la remarque 4.4.4, on obtiendra en particulier cette vitesse si $f \in H^{m-1}$ et $c \in \mathcal{C}^{m-1}(\Omega)$. On parle ici de méthodes *spectrales* polynomiales.

Remarque 7.3.4 *La méthode spectrale polynomiale demande le calcul exact d'un certain nombre d'intégrales. Comme ce calcul n'est en général pas possible, on doit dans la pratique utiliser des méthodes d'intégration numérique. Parmi celles-ci, les méthodes de quadratures de Gauss ont l'avantage d'être exactes sur les polynômes de degré le plus élevé possible. On peut analyser l'erreur induite sur l'approximation à l'aide des techniques générales décrites dans la section 5.3*

Remarque 7.3.5 *On peut utiliser la base V-orthonormée $(Q_1, \ldots, Q_{n-1})$ pour le calcul de la solution discrète u_n. Par un raisonnement analogue à celui effectué dans la remarque 7.2.2 pour les bases de Fourier, on obtient que la matrice de rigidité résultante A_n a un nombre de conditionnement borné suivant*

$$\kappa(A_n) \leq \frac{C_a}{\alpha} = 1 + \|c\|_{L^\infty} C_P^2,$$

indépendamment de n.

7.4 Bases d'ondelettes

La théorie des bases d'ondelettes a été mise en place au cours des années 1980. Ces bases jouent aujourd'hui un rôle important en traitement du signal, en particulier pour la compression et la restauration des images. Elles ont été aussi utilisées pour la discrétisation de certaines équations différentielles et aux dérivées partielles, même si, comme les méthodes spectrales, elles sont moins souvent employées que les méthodes d'éléments finis et différences finies. Dans cette section, on se limite à la présentation de deux exemples élémentaires de telles bases, bien adaptés à la représentation de fonctions définies sur $\Omega = [0,1]$.

Commençons par le *système de Haar*. On note $\varphi = \chi_{[0,1]}$ la fonction constante égale à 1 sur Ω, et on définit

$$\psi = \chi_{[0,1/2[} - \chi_{[1/2,1[},$$

la fonction constante par morceaux qui vaut 1 sur $[0,1/2[$ et -1 sur $[1/2,1[$. On remarque que $\int_\Omega \varphi\psi = 0$ c'est-à-dire que ψ est orthogonale à φ dans $L^2(\Omega)$.

Notons V_1 l'espace des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles $[0,1/2[$ et $[1/2,1[$ auquel appartiennent φ et ψ. Cet espace est de dimension 2, et on voit ainsi que $\{\varphi,\psi\}$ forment une base orthogonale de V_1. Si l'on considère ensuite les deux fonctions

$$x \mapsto \psi(2x), \quad x \mapsto \psi(2x-1),$$

on voit qu'elles sont orthogonales dans L^2 aux fonctions de V_1. En notant V_2 l'espace des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles deux fois plus petits $[k/4,(k+1)/4[$ pour $k=0,1,2,3$, on voit ainsi que les 4 fonctions $\{\varphi,\psi,\psi(2\cdot),\psi(2\cdot-1)\}$ constituent une base orthogonale de V_2.

On itére ce processus en définissant les espaces de fonctions constantes par morceaux sur les intervalles de longueur 2^{-j} obtenus par raffinements successifs

$$I_{j,k} := [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)[, \quad k=0,\dots 2^j-1.$$

On définit ainsi

$$V_j := \{v \,:\, v_{|I_{j,k}} \in \mathbb{P}_0,\ k=0,\dots 2^j-1\},$$

pour tout entier $j \geq 0$. L'espace V_j est de dimension 2^j et on a la propriété d'emboitement

$$V_j \subset V_{j+1}.$$

Les fonctions

$$x \mapsto \psi(2^j(x-2^{-j}k)) = \psi(2^jx-k), \quad k=0,\dots,2^j-1,$$

appartiennent à V_{j+1} et sont orthogonales aux fonctions de V_j. Elles forment ainsi une base orthogonale du supplémentaire orthogonal W_j de V_j dans V_{j+1} qui vérifie

$$\dim(W_j) = \dim(V_{j+1}) - \dim(V_i) = 2^j.$$

On peut normaliser ces fonctions dans L^2 en posant

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx-k).$$

et on obtient ainsi que la famille constituée de la fonction φ et des fonctions

$$\psi_{j,k}, \quad k=0,\dots,2^{j-1},\ j=0,\dots,n-1, \tag{7.13}$$

forme une base orthonormée de l'espace

$$V_n = V_0 \oplus^\perp W_0 \oplus^\perp W_1 \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp W_{n-1}.$$

Notons la structure multiéchelle de cette base où, à l'exception de φ, toutes les fonctions $\psi_{j,k}$ sont obtenues à partir de la fonctions ψ par mise aux échelles 2^{-j} et translations de $k2^{-j}$.

Notons qu'une base orthonormée plus simple de V_n est donnée par les fonctions indicatrices des intervalles $I_{n,k}$ convenablement normalisées, c'est à dire

$$\varphi_{n,k}(x) = 2^{n/2}\varphi(2^nx-k), \quad k=0,\dots,2^n-1. \tag{7.14}$$

Cette base change complètement à chaque fois que l'on passe de n à $n+1$, alors que la base d'ondelettes définie par (7.13) s'enrichit d'un niveau à l'autre. La projection orthogonale $\Pi_n v$ d'une fonction v est définie par sa moyenne sur chaque intervalle

$$\Pi_n v_{|I_{n,k}} = 2^n \int_{I_{n,k}} v(x)dx.$$

Il est facile de voir que $\Pi_n v \to v$ dans L^2 pour tout $v \in L^2(\Omega)$, par exemple en montrant d'abord la convergence uniforme donc L^2 pour tout $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ puis en raisonnant par densité (exercice).

Ceci nous montre que la famille infinie constituée de la fonction φ et des fonctions

$$\psi_{j,k}, \quad k = 0, \ldots, 2^{j-1},\ j \geq 0, \tag{7.15}$$

forme une base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$. Cette base appelée système de Haar est connue depuis le début du XXème siècle. Notons qu'on peut la réindexer en une base orthonormée $(e_n)_{n\geq 0}$ en posant $e_0 = \varphi$ et $e_n = \psi_{j,k}$ pour $n = 2^j + k$, mais on garde le plus souvent la notation $\psi_{j,k}$.

La théorie récente des bases d'ondelettes systématise cette construction à partir d'espaces emboités de la forme V_j qui généralisent les espaces de fonctions constantes par morceaux : on peut par exemple considérer des fonctions polynomiales par morceaux sur les intervalles $I_{j,k}$ de degré et régularité globale prescrits. La difficulté est alors de savoir construire une fonction ψ de forme simple telle que ses versions mise à l'echelle 2^{-j} et translatées de $k2^{-j}$ engendrent un complémentaire (orthogonal ou plus général) W_j de V_j dans V_{j+1}. Nous ne rentrons pas plus loin dans cette théorie générale mais présentons un deuxième exemple élémentaire, lui aussi connu depuis plus longtemps.

Avant cela, expliquons l'un des intérêts fondamentaux de la base d'ondelettes (7.13) par rapport à la base plus classique (7.14) pour décrire les fonctions du même espace V_n. Les coefficients d'une fonction v projetée sur V_n dans cette base sont donnés par

$$d_{j,k} = d_{j,k}(v) = \int_{I_{j,k}} v\psi_{j,k}.$$

Or la fonction $\psi_{j,k}$ est supportée dans l'intervalle $I_{j,k}$ on a $\int_\Omega \psi_{j,k} = 0$. Ceci montre que si la fonction v est constante dans cet intervalle alors $d_{j,k} = 0$. Ainsi, si la fonction v est constante par morceaux, avec des sauts de discontinuités en m points $x_1, \ldots, x_m$, on voit que les seuls coefficients $d_{j,k}$ non-nuls seront ceux tels que les intervalles $I_{j,k}$ contiennent l'un de ces m points. Pour un niveau d'échelle j fixé, il n'y a qu'un intervalle $I_{j,k}$ qui contient un point x_i donc en tout au plus $m \times n$ coeffcients non-nuls pour la description de $\Pi_n v$ au lieu de 2^n ce qui est une grande économie de données.

Plus généralement considérons une fonction v bornée par une constante $M_0 = \|v\|_{L^\infty}$, avec des sauts de discontinuité en m points $x_1, \ldots, x_m$, et de classe $\mathcal{C}^1$ avec une dérivée uniformément bornée par M_1 entre ces sauts. Pour tous les coefficients, on peut utiliser la borne uniforme sur v pour obtenir l'estimation

$$|d_{j,k}| = \left| \int_{I_{j,k}} v\psi_{j,k} \right| \leq M_0 \|\psi_{j,k}\|_{L^1} = M_0 2^{-j/2}.$$

En utilisant à nouveau $\int_\Omega \psi_{j,k} = 0$, on peut aussi écrire

$$|d_{j,k}| = \left| \int_{I_{j,k}} v\psi_{j,k} \right| = \left| \int_{I_{j,k}} (v - v(2^{-j}k))\psi_{j,k} \right|,$$

Lorque $I_{j,k}$ ne contient pas de point x_i de discontinuité, on a par le théorème des accroissements finis

$$|v(x) - v(2^{-j}k)| \leq M_1 2^{-j}, \quad x \in I_{j,k},$$

et on en déduit l'estimation

$$|d_{j,k}| \leq M_1 2^{-j} \|\psi_{j,k}\|_{L^1} = M_1 2^{-3j/2}.$$

On voit ainsi que les coefficients des ondelettes dont les supports ne contiennent pas de points x_i ne sont pas nuls mais décroissent beaucoup plus vite avec le niveau d'échelle j que ceux des ondelettes dont les supports contiennent l'un de ces points (pour lequels on a seulement la première estimation en $O(2^{-j/2})$). On pourra ainsi *comprimer* significativement la représentation de la fonction v en oubliant les coefficients qui sont en dessous d'un seuil que l'on se fixe. L'algorithme JPEG 2000, qui constitue l'état de l'art actuel pour le codage efficace des images, tire ses fondements de ce principe, mais utilise des ondelettes plus sophistiquées que celles du système de Haar, ainsi que des techniques de quantification permettant de coder les valeurs des coefficients retenus avec un nombre fini de bits 0 ou 1.

Le système de Haar présente le désavantage d'être constitué de fonctions discontinues et qui par conséquent n'appartiennent pas à l'espace $H_0^1(\Omega)$. On ne peut donc pas l'utiliser pour l'approximation variationnelle du problème aux limites. Nous présentons à présent un deuxième exemple de base d'ondelettes mieux adapté à cette tâche. On l'obtient tout simplement en considérant les primitives des fonctions $\psi_{j,k}$ du système de Haar, c'est à dire

$$w_{j,k}(x) = \int_0^x \psi_{j,k}(t)dt.$$

Les fonctions $w_{j,k}$ ainsi obtenues appartiennent à H_0^1 puisque $\int_0^1 \psi_{j,k} = 0$ Elles peuvent se déduire de la fonction chapeau centrée en $1/2$

$$w(x) = 1/2 - |x - 1/2|,$$

dont la dérivée est $w' = \psi$. On a en effet par changement d'échelle

$$w_{j,k}(x) = 2^{-j/2} w(2^j x - k).$$

La structure multiéchelle de cette base, appellée *base hiérarchique* ou *base de Schauder* ressemble à celle de la base de Haar, mais l'orthonormalité est à présent vérifiée pour la norme H_0^1 puisqu'on a

$$\int_\Omega w'_{j,k} w'_{i,l} = \int_\Omega \psi_{j,k} \psi_{i,l} = \delta_{j,i} \delta_{k,l}.$$

Notons V_n l'espace engendré par les fonctions

$$\{w_{j,k} \,:\, k = 0 =, \ldots, 2^{j-1},\ j = 0, \ldots, n-1\}.$$

Il s'agit exactement de l'espace des éléments fini $\mathbb{P}_1$ pour la partition

$$0 = x_0^n < x_1^n < \cdots < x_{2^n}^n = 1, \quad \text{avec} \quad x_k^n := k2^{-n},$$

c'est à dire $V_n = V_{h_n}$ avec $h_n = 2^{-n}$. En effet, toutes les fonctions $w_{j,k}$ appartiennent à V_{h_n}, elles constituent une base (orthonormée dans H_0^1), et leur nombre est exactement

$$1+2+\cdots+2^{n-1} = 2^n - 1 = \dim(V_{h_n}).$$

En ce sens, l'espace V_n n'est pas nouveau, il a été étudié en détail dans le chapitre 6. La base hiérarchique est simplement un choix différent de celui de la base nodale classique pour représenter les fonctions de cet espace. Ce nouveau choix présente plusieurs avantages.

Considérons l'approximation variationnelle dans V_n du problème aux limites

$$-u''(x)+c(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega =]0,1[,$$

avec les conditions aux limites homogènes de Dirichlet $u(-1) = u(1) = 0$. Pour un élément $v_n = \sum_{j=0}^{n-1} d_{j,k} w_{j,k}$, on note $\overline{d} = (d_{j,k})$ le vecteur des coordonnées (après avoir choisi un ordre d'énumération de la base hiérarchique, par exemple l'ordre lexicographique croissant de (j,k)). On a ainsi

$$\|v_n\|_{H_0^1}^2 = \|\overline{d}\|_{\ell^2}^2.$$

D'autre part, la matrice de rigidité A_n vérifie

$$(A_n\overline{d},\overline{d})_{\ell^2} = a(v_n,v_n),$$

Or on sait que

$$\alpha\|v\|_{H_0^1}^2 \le a(v,v) \le C_a\|v\|_{H_0^1}^2, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

En raisonnant comme pour les bases de Fourier et les bases polynomiales, on obtient ainsi $\lambda_{\min}(A_n) \ge \alpha$ et $\lambda_{\max}(A_n) \le C_a$, et la borne

$$\kappa(A_n) \le \frac{C_a}{\alpha},$$

indépendante de n, par contraste avec l'utilisation de la base nodale pour laquelle on a vu que le nombre de conditionnement se comporte en $O(h_n^{-2}) = O(2^{2n})$. L'utilisation de la base hiérarchique peut ainsi être vu comme une opération de *préconditionnement*, qui s'incrit dans un ensemble de techniques puissantes appelées *méthodes multigrilles*.

D'autre part, comme pour la base de Haar, on peut décider de réduire la dimension de l'espace V_n en omettant les fonctions de bases dont les supports se situent dans les régions où l'on sait que la solution va peu varier ou être très régulière. Si par exemple on ne retient que les fonctions de base dont les supports contiennent certains points $x_1,\dots,x_m$ autours desquels la fonctions est peu régulière ou varie beaucoup, l'espace obtenu sera de petite dimension nm par rapport à $\dim(V_n) = 2^n$. On pourra vérifier que ceci correspond à remplacer le maillage uniforme de l'espace V_n par un maillage adaptatif qui se concentre au voisinage de ces points de singularité, ce qui est intuitivement raisonnable si l'on souhaite allouer plus efficacement les degrés de liberté qu'avec un maillage uniforme.