TP 4 : Éléments finis 1D

On considère l'intervalle $\mathrm{I} :=]0,1[$, un paramètre $\mu \in \mathbb{R}$, ainsi que la fonction $f(x) = \cos(p\pi x)$ pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$, et on souhaite trouver $u : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ qui résoud le problème

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + \mu^2 u(x) = f(x),\ x \in \mathrm{I} \\ \dfrac{du}{dx}(0) = \dfrac{du}{dx}(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Question 1 En précisant l'expression explicite de $a(\ ,\ )$ et $\ell(\ )$, montrez que le problème (1) peut se mettre sous la forme variationnelle suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1(\mathrm{I}) \text{ telle que} \\ a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in \mathrm{H}^1(\mathrm{I}) \end{cases} \tag{2}$$

Nous souhaitons résoudre numériquement (2). Étant donné un pas de maillage $h = 1/N$ pour un certain N, on introduit une grille de discrétisation $\mathrm{I} = \cup_{j=1}^{N}[x_{j-1}^h, x_j^h]$ admettant pour sommets $x_j^h = jh$. On introduit l'espace des fonctions $\mathbb{P}_1$-Lagrange construites sur ce maillage

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_h(\mathrm{I}) := \{ & v \in \mathscr{C}^0(\bar{\mathrm{I}}),\ \exists \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R} \text{ t.q.} \\ & v(x) = \alpha_j x + \beta_j \text{ pour } x_{j-1}^h \leq x \leq x_j^h,\ \ \forall j = 1 \ldots N\ \} \end{aligned}$$

La méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange consiste alors à résoudre une version discrète de (2) dans laquelle on remplace simplement $\mathrm{H}^1(\mathrm{I})$ par $\mathrm{V}_h(\mathrm{I})$,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \mathrm{V}_h(\mathrm{I}) \text{ telle que} \\ a(u_h,v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in \mathrm{V}_h(\mathrm{I}) \end{cases} \tag{3}$$

Question 2 On rappelle que $\mathrm{V}_h(\mathrm{I})$ est engendré par les fonctions $\varphi_j^h(x) \in \mathrm{V}_h(\mathrm{I})$ caractérisées par $\varphi_j^h(x_k^h) = 0$ si $j \neq k$, et $\varphi_j^h(x_j^h) = 1$, $j = 0, \ldots N$. En particulier $\dim \mathrm{V}_h(\mathrm{I}) = N + 1$. Montrez que la méthode discrétisation de Galerkin basée sur les fonctions $(\varphi_j^h)_{j=0\ldots N}$ permet de reformuler de manière équivalente le problème (3) comme un système linéaire $\mathrm{A}_h\mathrm{U} = \mathrm{F}_h$ où on donnera l'expression explicite de $\mathrm{A}_h \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$ et $\mathrm{F}_h \in \mathbb{R}^{N+1}$ en fonction de $a(\ ,\ )$, $\ell(\ )$ et des φ_j^h.

Question 3 Montrez que la matrice du problème (3) admet l'expression $\mathrm{A}_h = \mathrm{K}_h + \mu^2 \mathrm{M}_h$ où les matrices de masse M_h et de rigidité K_h sont données par

$$\mathrm{K}_h = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{M}_h = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Écrivez un programme dans lequel vous assemblez la matrice M_h, K_h données par l'expression ci-dessus, ainsi que le vecteur F_h.

Question 4 En utilisant les matrices de la question précédente, résolvez numériquement le problème (3) pour 10 valeurs de $N = 1/h$. On choisira ces valeurs de N de manière à ce que $\log_{10}(N)$ soit uniformément réparti dans l'intervalle $[1, 3]$ (de sorte que N varie entre 10 et 1000). On prendra $\mu = 1$ et $p = 3$ en guise de valeurs concrètes des paramètres.

Question 5 Étant donné un élément $v_h \in \mathrm{V}_h(\mathrm{I})$ dont on notera $\mathrm{V} = (v_h(x_j^h))_{j=0\dots N}$ le vecteur des valeurs nodales, montrez que $\|v_h\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{I})} = \mathrm{V}^\top \mathrm{M}_h \mathrm{V}$ et $\|\nabla v_h\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{I})} = \mathrm{V}^\top \mathrm{K}_h \mathrm{V}$.

Déterminez une expression explicite de la solution exacte $u(x)$ de (1) en fonction de p, μ. On note $\Pi_h(u)(x) := \sum_{j=0}^{N} u(x_j^h)\varphi_j^h(x)$ l'interpolant de Lagrange de u au noeuds de la grille. A l'aide du travail réalisé à la question précédente, tracez l'erreur $\|\Pi_h(u) - u_h\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{I})}/\|u_h\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{I})}$ en fonction de h. On se placera en échelle logarithmique en abscisse comme en ordonnée. Quel est le taux de convergence observé ?

Question 6 Modifiez l'assemblage de la matrice A_h de manière à calculer les valeurs nodales de la solution du même problème que (1) mais avec des conditions de Dirichlet homogènes à la place des conditions de Neumann

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + \mu^2 u(x) = f(x), \ x \in \mathrm{I} \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$