Chapitre 4

Formulation variationnelle des problèmes aux limites

4.1 La formulation variationnelle : d'où vient-elle ?

La formulation "classique" des problèmes aux limites que nous avons utilisée jusqu'à maintenant n'est pas suffisante, à la fois pour obtenir des résultats théoriques d'existence et d'unicité et pour définir des méthodes d'approximation plus générales. Cela sera d'autant plus vrai que l'on travaillera en dimension supérieure à 1, mais nous n'aborderons pas ces questions dans ce cours.

Reprenons notre problème modèle, avec condition aux limites de Dirichlet homogènes pour simplifier : trouver $u \in \mathcal{C}^0([0,1]) \cap \mathcal{C}^2(]0,1[)$ telle que

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \text{ dans }]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On a vu en utilisant la méthode de tir que, si f et $c \geq 0$ sont continues sur l'intervalle $[0,1]$, alors le problème admet une solution et une seule, laquelle appartient en fait à $\mathcal{C}^2([0,1])$. On va maintenant exprimer le problème (P) différemment.

Théorème 4.1.1 *Soit u la solution du problème (P). Alors pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$ telle que $v(0) = v(1) = 0$, u vérifie*

$$\int_0^1 (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

Réciproquement, si $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ satisfait

$$(\mathrm{fv}) \qquad \begin{cases} \int_0^1 (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1]),\ v(0) = v(1) = 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

alors u est solution de (P).

Démonstration. i) Sens direct. Soit u la solution du problème (P). On a donc $-u'' + cu = f$ dans $[0,1]$. Soit $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$ telle que $v(0) = v(1) = 0$. On multiplie l'équation différentielle par v

et on intègre le résultat sur $[0,1]$. Il vient

$$-\int_0^1 u''v + \int_0^1 cuv = \int_0^1 fv.$$

Or $u'' \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$, donc on a le droit d'intégrer la première intégrale par parties :

$$-\int_0^1 u''v = -[u'v]_0^1 + \int_0^1 u'v'.$$

Comme v satisfait les conditions de Dirichlet homogènes, le terme $[u'v]_0^1$ disparaît et l'on obtient bien

$$\int_0^1 (u'v' + cuv) = \int_0^1 fv$$

pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$ telle que $v(0) = v(1) = 0$.

ii) Réciproque. Par hypothèse, u vérifie les conditions aux limites de (P). Ensuite, le même calcul mené en sens inverse montre que si $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ satisfait (fv) pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$ telle que $v(0) = v(1) = 0$, alors

$$-\int_0^1 u''v + \int_0^1 cuv - \int_0^1 fv = \int_0^1 (-u'' + cu - f)v = 0.$$

Or on sait (ou on devrait savoir) que si une fonction $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ est telle que pour tout $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$ avec $v(0) = v(1) = 0$, $\int_0^1 gv = 0$, alors nécessairement, $g = 0$.

Juste au cas où on ne sait pas, voici la preuve de cette propriété fort utile. On raisonne par contradiction en supposant que g n'est pas identiquement nulle. Il existe donc un point $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = c \neq 0$ et par continuité de g on peut supposer que $x_0 \in]0,1[$. Supposons par exemple que $c > 0$. Toujours par continuité de g, ceci implique qu'il existe un intervalle $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ contenu dans $]0,1[$ avec $\delta > 0$, tel que $g(x) \geq c/2$ pour tout $x \in I$. On considère à présent une fonction $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$ dont le support est contenu dans I et telle que $\int_I v = 1$. Il est facile de construire une telle fonction en partant d'une fonction $w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, dont le support est contenu dans $[-1,1]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} w = 1$, puis en posant $v(x) = \delta^{-1} w(\delta^{-1}(x - x_0))$. On a alors

$$\int_0^1 gv = \int_I gv \geq \frac{c}{2} \int_I v = \frac{c}{2} > 0,$$

ce qui est une contradiction. Le cas $c < 0$ se traite de la même manière.

Pour en revenir à la formulation variationnelle, on applique le résultat précédent à la fonction continue $g = -u'' + cu - f$. □

Au vu du théorème 4.1.1, on est naturellement amené à poser la définition suivante.

Définition 4.1.1 *Soit l'espace vectoriel* $\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1]), v(0) = v(1) = 0\}$. *On appelle* formulation variationnelle *du problème (P) le problème :*

$$\text{(FV)} \qquad \begin{cases} \text{trouver } u \in \mathcal{V} \\ a(u,v) = \ell(v), \qquad \forall v \in \mathcal{V}, \end{cases}$$

où la forme bilinéaire $a\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ *est donnée par*

$$a(u,v)=\int_0^1 (u'v'+cuv),$$

et la forme linéaire $\ell\colon \mathcal{V}\to\mathbb{R}$ *est donnée par*

$$\ell(v)=\int_0^1 fv.$$

Remarque 4.1.1 *On vient de voir que le problème (FV) admet au moins une solution, à savoir la solution de (P). On n'est pas encore sûr que c'est la seule ! En effet, il pourrait très bien y en avoir une qui soit* $\mathcal{C}^1([0,1])$ *mais pas* $\mathcal{C}^2([0,1])$ *(d'après le théorème 4.1.1, toute solution* $\mathcal{C}^2([0,1])$ *est solution de (P)). On verra plus loin que ce n'est pas le cas.*

Remarque 4.1.2 *On a remplacé une équation différentielle posée dans* $]0,1[$ *par une infinité d'équations dans* $\mathbb{R}$. *Noter que* $\mathcal{V}$ *est un espace vectoriel de dimension infinie. Les éléments de* $\mathcal{V}$ *sont appelés* fonctions-test *(elles servent à"tester" l'équation différentielle).*

Réglons d'abord la question de l'unicité.

Proposition 4.1.1 *Le problème (FV) admet une solution unique.*

Démonstration. On sait déjà que la solution de (P) est solution de (FV). Reste à montrer l'unicité. Soient donc $u_1,u_2\in\mathcal{V}$ deux solutions de (FV) :

$$\forall v\in\mathcal{V},\quad \begin{cases} a(u_1,v)=l(v),\\ a(u_2,v)=l(v),\end{cases}$$

d'où en soustrayant membre à membre, et en posant $w=u_1-u_2$,

$$\forall v\in\mathcal{V},\quad a(w,v)=a(u_1,v)-a(u_2,v)=0$$

en utilisant la bilinéarité de a. Comme $w\in\mathcal{V}$, on a le droit de prendre comme fonction-test $v=w$. Ceci donne

$$\int_0^1 (|w'|^2+c|w|^2)=0,$$

d'où, par un raisonnement déjà effectué plusieurs fois, $w'=0$, c'est-à-dire $w=\text{Cte}=w(0)=0$. $\square$

Dans la suite, on omettra souvent le signe $\forall$ en écrivant simplement

$$a(u,v)=\ell(v),\quad v\in V.$$

Nous terminons cette section en présentant les formulations variationnelles pour la même edp mais avec d'autres conditions aux limites.

i) Conditions aux limites de Dirichlet non homogènes $u(0)=\alpha$ et $u(1)=\beta$.
On ne peut pas définir $\mathcal{V}$ comme l'espace des fonctions $\mathcal{C}^1([0,1])$ telles que $v(0)=\alpha$ et $v(1)=\beta$

car ce n'est pas un espace vectoriel. On se ramène au problème de Dirichlet homogène en posant $\tilde{u} = u - g$ où g est une fonction de $\mathcal{C}^1([0,1])$ qui prend les valeurs prescrites $g(0) = \alpha$ et $g(1) = \beta$ (on dit que g est un *relèvement* de ces conditions limites). On peut par exemple prendre la fonction affine $g(x) = \alpha(1-x) - \beta x$. Ainsi $\tilde{u} = u - g$ vérifie les conditions de Dirichlet homogènes et on vérifie qu'elle est solution d'un problème de type (P) : trouver $\tilde{u} \in \mathcal{V}$ telle que

$$a(\tilde{u}, v) = \tilde{\ell}(v), \quad v \in \mathcal{V}.$$

avec $\tilde{\ell}(v) = \ell(v) - a(g, v)$. Si $\tilde{u}$ est l'unique solution de ce problème, on revient à u en posant $u = \tilde{u} + g$. Un exercice instructif consiste vérifier que la solution u ainsi obtenue ne dépend pas du choix du relèvement g.

ii) Conditions aux limites de Neumann $u'(0) = \gamma$ et $u'(1) = \delta$.
Nous n'avons pas abordé ce problème aux limites au chapitre 1 mais il peut être résolu par une méthode du tir. Indiquons qu'il faut supposer $c > 0$ en un point x_0 pour montrer l'existence d'une solution. Pour la formulation variationnelle, il faut changer d'espace de fonctions-test : pour les conditions aux limites de Neumann il n'y a aucune raison d'imposer $v(0) = v(1) = 0$, on prend $\mathcal{V} = \mathcal{C}^1([0,1])$. Par intégration par parties de l'équation, on obtient la formulation variationelle : trouver $u \in \mathcal{V}$ telle que

$$a(u, v) = \tilde{\ell}(v), \quad v \in \mathcal{V}.$$

dans laquelle la forme de a est la même que pour les conditions de Dirichlet et $\tilde{\ell}(v) = \int_0^1 fv + \delta v(1) - \gamma v(0)$. On remarque qu'on n'impose pas aux fonctions tests de vérifier les conditions limites de Neumann (on voit que ces conditions n'apparaissent pas naturellement sur la fonction test quand on intègre par parties). On pourra vérifier que réciproquement, lorsque $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$, cette formulation variationnelle permet bien de récupérer l'équation *et* les conditions aux limites, donc la solution du problème aux limites.

On a montré l'existence de la solution de (FV) en se raccrochant à l'existence de la solution de (P), obtenue par la méthode de tir. Cette méthode n'étant pas susceptible de beaucoup de généralisations, il convient de voir si l'on peut démontrer directement l'existence pour (FV), *sans passer* par (P). Pour cela, il faut prendre un peu de recul et reconsidérer l'affaire sous un angle abstrait.

4.2 Problèmes variationnels abstraits et espaces de Hilbert

Quelques rappels de vocabulaire pour commencer. Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle *produit scalaire* sur H toute forme bilinéaire, symétrique, définie, positive. On notera $(\cdot,\cdot)_H$ un tel produit scalaire. Il n'est pas difficile de montrer que l'application $u \mapsto (u,u)_H^{1/2}$ définit une norme sur H, dite norme *préhilbertienne*. Un espace H muni d'un produit scalaire (et de la norme qui va avec) est dit *préhilbertien*. Dans le cas où H est en outre de dimension finie, on parle d'espace *euclidien* et de norme *euclidienne*. Si H est *complet* pour la norme associée au produit scalaire, *i.e.*, si toute suite de Cauchy pour cette norme est convergente, on dit que H muni de son produit scalaire est un *espace de Hilbert*. La norme est alors appelée norme *hilbertienne*. Comme tout espace de dimension finie est complet pour n'importe quelle norme, ce qui découle immédiatement du fait que $\mathbb{R}$ lui-même est complet en identifiant H à $\mathbb{R}^n$ pour un certain n à l'aide d'une base, tout espace euclidien est un espace de Hilbert. Le cas non trivial est bien entendu celui de la dimension infinie, où le caractère complet ou non de l'espace prend toute son importance.

Le cadre des espaces de Hilbert se révèle particulièrement utile pour étudier les formulations variationelles de type (FV). Avant de revenir à ces formulations, on va rappeler quelques propriétés fondamentales des espaces de Hilbert.

On a tout d'abord le théorème de projection sur un convexe fermé. On rappelle qu'un convexe d'un espace vectoriel est un sous-ensemble C de cet espace tel que pour tout couple de points de cet ensemble, le segment qui joint ces deux points reste dans l'ensemble, c'est-à-dire

$$\lambda u + (1-\lambda)v \in C, \qquad u, v \in C,\ \lambda \in [0,1].$$

Théorème 4.2.1 *Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de H. Alors, pour tout $u \in H$, il existe un unique $v \in C$ tel que*

$$\|u-v\|_H = \inf_{w\in C} \|u-w\|_H. \tag{4.1}$$

De plus, cet élément v est caractérisé par les conditions suivantes

$$\begin{cases} v \in C, \\ (u-v, w-v)_H \leq 0,\ \forall w \in C. \end{cases} \tag{4.2}$$

On note $v = P_C(u)$ et on l'appelle *projection orthogonale de u sur C*.

Démonstration. 1) *Existence*. Posons $d = \inf_{w\in C} \|u-w\|_H$ et soit $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in C$ une suite d'éléments de C telle que $d_n = \|u-w_n\|_H \to d$ quand $n \to +\infty$ (une telle suite, dite *suite minimisante*, existe par définition de la borne inférieure). Appliquons l'identité du parallélogramme

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_H^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_H^2 = \frac{1}{2}(\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2), \tag{4.3}$$

à $x = u - w_n$ et $y = u - w_m$. Il vient

$$\left\|\frac{w_n - w_m}{2}\right\|_H^2 + \left\|u - \frac{w_n + w_m}{2}\right\|_H^2 = \frac{1}{2}(\|u-w_n\|_H^2 + \|u-w_m\|_H^2) = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2).$$

Or C est convexe et comme w_n et w_m appartiennent à C, leur milieu $\frac{w_n+w_m}{2}$ appartient aussi à C. Par conséquent,

$$\left\|u - \frac{w_n + w_m}{2}\right\|_H^2 \geq d^2.$$

On en déduit

$$\left\|\frac{w_n - w_m}{2}\right\|_H^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2.$$

Comme d_n et d_m tendent vers d quand n et m tendent vers l'infini, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver un entier n_0 tel que pour tous $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$, $\frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2 \leq \varepsilon^2$, soit

$$\left\|\frac{w_n - w_m}{2}\right\|_H \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire que la suite w_n est une *suite de Cauchy*. Or H est un espace de Hilbert. Il est donc complet (c'est là que la complétude intervient crucialement) et cette suite de Cauchy est convergente, il existe $v \in H$ tel que $w_n \to v$ dans H (*i.e.*, $\|w_n - v\|_H \to 0$).

On utilise maintenant le fait que C est fermé pour en déduire que $v \in C$. De plus, par continuité de la norme, $\|u - v\|_H = \lim_{n\to\infty} \|u - w_n\|_H = d$, donc v répond à la question.

2) *Équivalence entre (4.1) et (4.2).* Soit $v \in C$ vérifiant (4.1). On se donne $w \in C$ quelconque et l'on pose $z = (1-t)v + tw$ pour $t \in]0,1]$. Comme C est convexe, $z \in C$. Donc, par (4.1),

$$\|u - v\|_H \leq \|u - z\|_H = \|u - (1-t)v - tw\|_H = \|u - v - t(w - v)\|_H.$$

Élevant les deux membres de cette inégalité au carré et développant le carré scalaire du membre de droite, on obtient

$$\|u - v\|_H^2 \leq \|u - v\|_H^2 - 2t(u - v, w - v)_H + t^2\|w - v\|_H^2,$$

soit

$$2t(u - v, w - v)_H \leq t^2\|w - v\|_H^2.$$

On divise cette inégalité par $t > 0$, on fait tendre t vers 0 et on obtient (4.2).

Réciproquement, soit $v \in C$ vérifiant (4.2). Pour tout $w \in C$, on a

$$\|u - w\|_H^2 = \|u - v + v - w\|_H^2 = \|u - v\|_H^2 + 2(u - v, v - w)_H + \|v - w\|_H^2 \geq \|u - v\|_H^2,$$

et v satisfait (4.1).

3) *Unicité*. Soient $v_1 \in C$ et $v_2 \in C$ satisfaisant (4.2). On prend $w = v_2$ pour le premier et $w = v_1$ pour le second et l'on additionne les inégalités correspondantes. Il vient,

$$(u - v_1, v_2 - v_1)_H + (u - v_2, v_1 - v_2)_H \leq 0$$

c'est-à-dire

$$(v_2 - v_1, v_2 - v_1)_H = \|v_2 - v_1\|_H^2 \leq 0.$$

Donc $v_1 = v_2$. □

Le point $v = P_C(u)$ réalise donc par (4.1) le minimum de la distance de u aux points de C. La caractérisation (4.2) permet de comprendre pourquoi on parle de projection orthogonale, *cf* figure 4.1.

Remarque 4.2.1 *Si l'espace H n'est pas complet, il n'existe pas forcément de projection orthogonale. Un espace qui n'est pas complet est un espace qui contient des «trous», des endroits où des suites de Cauchy aimeraient bien converger, mais ne le peuvent pas car leur limite manque à l'espace. En particulier, il se peut que la borne inférieure des distances d'un point à un convexe fermé ne soit pas atteinte, car elle tombe justement dans un «trou» de l'espace. On peut boucher ces trous de façon systématique. Plus précisément, on rappelle que pour tout espace métrique X, il existe un espace métrique $\bar{X}$, unique à homéomorphisme près, tel que $\bar{X}$ soit complet et qu'il existe une injection continue de X dans $\bar{X}$ dont l'image est dense. L'espace $\bar{X}$ s'appelle le complété de X. L'injection continue permet d'identifier X à un sous-ensemble dense de $\bar{X}$.*

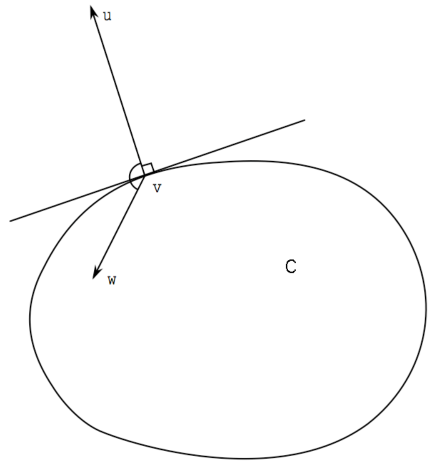

FIGURE 4.1 – Projection orthogonale sur un convexe fermé

On construit $\bar{X}$ à partir de X de la même façon que l'on construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$: on regarde l'ensemble des suites de Cauchy sur X, on dit que deux suites x_n et y_n sont équivalentes si la distance $d(x_n, y_n)$ tend vers 0 et on définit $\bar{X}$ comme le quotient de l'ensemble des suites de Cauchy par cette relation d'équivalence. La distance entre deux classes d'équivalence est définie comme étant la limite de la distance entre deux représentants de ces classes (cette suite étant de Cauchy dans $\mathbb{R}$). L'injection continue est définie en prenant la classe d'équivalence des suites constantes. Dans le cas où X est un espace vectoriel normé, $\bar{X}$ est un espace de Banach. Dans le cas où X est un espace vectoriel préhilbertien, $\bar{X}$ est un espace de Hilbert. Dans le cas d'un espace préhilbertien X, la projection orthogonale d'un point sur un convexe fermé C existera donc toujours sur le complété $\bar{C}$ du convexe, mais pas forcément dans l'espace de départ. C'est pourquoi il est crucial dans ces questions d'avoir affaire à un espace (préhilbertien) complet, i.e. de Hilbert. On a une remarque analogue si H est un espace de Hilbert, mais C est un convexe non fermé : la projection orthogonale d'un point existe dans l'adhérence $\bar{C}$ de C, qui coïncide avec son complété dans ce cas. Enfin, si C est compact mais pas convexe, il existe bien un point qui minimise la distance, mais il n'y a pas unicité en général (faire un dessin). De plus, l'interprétation géométrique en termes de projection orthogonale ne tient plus. Attention : si C est seulement fermé, il n'existe pas forcément de point qui minimise la distance (en dimension infinie).

L'application la plus importante du théorème de projection dans le cadre de ce cours est celle où le convexe M sur lequel on projette est un sous-espace vectoriel fermé, c'est à dire un sous-espace Hilbertien quand on l'équipe du même produite scalaire que celui de H.

Corollaire 4.2.2 *Si M est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $v = P_M(u)$ est caractérisé par*

$$\begin{cases} v \in M, \\ (u - v, w)_H = 0, \ \forall w \in M. \end{cases} \tag{4.4}$$

De plus, l'application P_M est linéaire continue de H dans H. On note ainsi $P_M u = P_M(u)$.

Démonstration. D'après (4.2), on a pour tout $z \in M$

$$(u-v, z-v)_H \leq 0.$$

Or M est un espace vectoriel, donc pour tout $w \in M$, $z = v + w \in M$, d'où

$$(u-v, w)_H \leq 0.$$

Mais encore, comme M est un espace vectoriel, si $w \in M$, $-w \in M$, d'où

$$(u-v, w)_H \geq 0.$$

On en déduit immédiatement (4.4) et réciproquement. On en déduit également que l'application P_M est linéaire. En effet, étant donnés u_1, $u_2 \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda(u_1 - P_M(u_1), w)_H = 0, \quad (u_2 - P_M(u_2), w)_H = 0,$$

pour tout $w \in M$, d'où en additionnant ces deux relations et par bilinéarité du produit scalaire,

$$(\lambda u_1 + u_2 - (\lambda P_M(u_1) + P_M(u_2)), w)_H = 0,$$

pour tout $w \in M$. Or cette relation caractérise $P_M(\lambda u_1 + u_2)$. Par conséquent,

$$P_M(\lambda u_1 + u_2) = \lambda P_M(u_1) + P_M(u_2).$$

Enfin, on note que

$$(u - P_M(u), P_M(u))_H = 0 \Longrightarrow \|P_M(u)\|_H^2 = (u, P_M(u))_H \leq \|u\|_H \|P_M(u)\|_H,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc

$$\|P_M(u)\|_H \leq \|u\|_H \Longleftrightarrow \|P_M\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq 1.$$

Donc P_M est continu. En fait sa norme d'application linéaire continue est égale à 1 car il est facile de voir que P_M est un projecteur, *i.e.* $P_M \circ P_M = P_M$. □

Remarque 4.2.2 *Le corollaire ci-dessus implique que la décomposition*

$$u = P_M u + (u - P_M u) = P_M u + (I - P_M) u,$$

est orthogonale et que $(I - P_M)$ est l'opérateur de projection orthogonale sur $M^\perp$, le supplémentaire orthogonal de M. Par Pythagore, on a

$$\|u\|_H^2 = \|P_M u\|_H^2 + \|u - P_M u\|_H^2. \tag{4.5}$$

On rappelle qu'une application linéaire L allant d'un espace de Banach X (espace normé complet) dans un autre espace de Banach Y est continue si et seulement si il existe une constante finie C_L telle que

$$\|Lu\|_Y \leq C_L \|u\|_X,$$

pour tout $u \in X$. L'espace $\mathcal{L}(X,Y)$ des applications linéaires continues est aussi un espace de Banach muni de la norme

$$\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \max_{u \neq 0} \frac{\|Lu\|_Y}{\|u\|_X} = \max_{\|u\|_X = 1} \|Lu\|_Y.$$

En particulier une forme linéaire ℓ sur X est continue si et seulement si il existe une constante finie C_ℓ telle que

$$|\ell(u)| \leq C_\ell \|u\|_X, \quad u \in X.$$

L'ensemble des formes linéaires continues sur X est appelé le *dual topologique* de X et est noté X'. C'est aussi un espace vectoriel de Banach muni de la norme

$$\|\ell\|_{X'} = \max\{\ell(u) \ : \ \|u\|_X = 1\}.$$

Il ne faut pas confondre X' avec le *dual algébrique* de X qui contient toutes les formes linéaires sur X et est noté X^*. Ce dernier est moins utilisé en pratique car on s'intéresse principalement aux formes linéaires continues.

De la même manière, on peut vérifier qu'une forme bilinéaire $a : X \times Y \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si il existe une constante C_a telle que

$$|a(u,v)| \leq C_a \|u\|_X \|v\|_Y, \qquad (u,v) \in X \times Y.$$

En particulier, une forme bilinéaire sur X est continue si et seulement si il existe une constante C_a telle que

$$|a(u,v)| \leq C_a \|u\|_X \|v\|_X, \qquad u,v \in X.$$

Lemme 3 *(Théorème de représentation de Riesz) Soit H un espace de Hilbert et ℓ une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique $u_0 \in H$ qui représente ℓ au sens où*

$$\ell(v) = (u_0, v)_H,$$

pour tout $v \in H$.

Démonstration. Soit $M = \ker \ell$. Comme ℓ est continue, c'est un sous-espace vectoriel fermé de H. Deux cas se présentent :

- Soit $M = H$, c'est-à-dire $\ell = 0$. Dans ce cas, $u_0 = 0$ est la solution qui s'impose.
- Soit $M \neq H$ et alors il existe $v_1 \in H$ tel que $v_1 \notin M$. Comme $P_M(v_1) \in M$, on a donc $v_1 \neq P_M(v_1)$ et l'on peut définir

$$v_0 = \frac{v_1 - P_M(v_1)}{\|v_1 - P_M(v_1)\|_H}.$$

Il est clair que $\|v_0\|_H = 1$ et que $(v_0, w)_H = 0$ pour tout $w \in M$ par définition de la projection orthogonale sur M (v_0 est un vecteur unitaire orthogonal à M). Par ailleurs, comme $v_1 \notin M$, de même, $v_0 \notin M$, d'où $\ell(v_0) \neq 0$. Pour tout $v \in H$, on pose alors

$$\lambda = \frac{\ell(v)}{\ell(v_0)} \text{ et } w = v - \lambda v_0.$$

On voit immédiatement que $w \in M$. En effet, $\ell(w) = \ell(v - \lambda v_0) = \ell(v) - \lambda \ell(v_0) = 0$ par définition de λ. On a donc ainsi décomposé tout vecteur $v \in H$ en somme orthogonale $v = w + \lambda v_0$. Par conséquent

$$(v, v_0)_H = (w, v_0)_H + \lambda \|v_0\|_H^2 = \frac{\ell(v)}{\ell(v_0)},$$

ou, en d'autres termes,

$$\ell(v) = \ell(v_0)(v, v_0)_H = (v, u_0)_H$$

avec $u_0 = \ell(v_0)v_0$ et l'existence du vecteur u_0 est prouvée. L'unicité est immédiate. □

Remarque 4.2.3 *On a montré que le noyau d'une forme linéaire continue non nulle est un sous-espace vectoriel fermé qui admet un supplémentaire orthogonal de dimension* 1*. C'est donc un hyperplan fermé. De façon plus générale, le noyau d'une forme linéaire non nulle est toujours un hyperplan, c'est à dire un sous-espace de codimension* 1 *(il admet un supplémentaire de dimension* 1*), mais si la forme linéaire n'est pas continue, cet hyperplan n'est pas fermé. Il n'admet pas de supplémentaire orthogonal. En fait, on montre que tout hyperplan non fermé est dense dans l'espace. En dimension finie, toute forme linéaire est continue et la question de fermé ou pas fermé ne se pose pas : tout hyperplan (tout sous-espace vectoriel en fait) est fermé. La dimension d'un hyperplan est égale à la dimension de l'espace moins* 1.

Remarque 4.2.4 *Soit H' le dual topologique de H espace de Hilbert. Alors l'application $\ell \mapsto u_0$ donnée par le théorème de Riesz (on dit aussi de Riesz-Fréchet) est linéaire, bijective et isométrique. La linéarité est évidente, par unicité du vecteur qui représente une forme linéaire. La bijectivité est essentiellement l'objet du théorème (en effet, réciproquement, toute forme linéaire de la forme $v \mapsto (v, u_0)_H$ est trivialement continue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Pour montrer qu'il s'agit d'une isométrie, on note que*

$$\|\ell\|_{H'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|\ell(v)|}{\|v\|_H} = \sup_{v \neq 0} \frac{|(v, u_0)_H|}{\|v\|_H} \leq \|u_0\|_H,$$

encore par Cauchy-Schwarz, avec égalité pour $v = u_0$, d'où $\|\ell\|_{H'} = \|u_0\|_H$. Cette isométrie permet d'identifier H et H' (si l'on veut, on n'est pas obligé de le faire systématiquement), et montre en passant que H' est aussi un espace de Hilbert.

Nous revenons à présent sur les problèmes variationnels de la forme (FV) que l'on peut généraliser ainsi.

Définition 4.2.1 *Un problème variationnel abstrait est défini par la donnée d'un espace vectoriel H, d'une forme bilinéaire a sur H et d'une forme linéaire ℓ sur H. Il consiste à trouver un élément $u \in H$ tel que*

$$(\text{PVA}) \quad a(u, v) = \ell(v), \quad v \in H.$$

Il s'agit bien d'une abstraction de la formulation de la définition 4.1.1. On va montrer un théorème d'existence et d'unicité pour les problèmes variationnels abstraits. La propriété suivante joue un rôle fondamental.

Définition 4.2.2 *Soit H un espace de Hilbert muni de sa norme $\|\cdot\|_H$. On dit qu'une forme bilinéaire a sur H est coercive (ou elliptique) s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $u \in H$,*

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2.$$

Notons qu'une forme bilinéaire coercive est automatiquement définie, positive. Par contre, la réciproque est fausse en dimension infinie.

Théorème 4.2.3 *(théorème ou lemme de Lax-Milgram) Soit un problème variationnel abstrait (PVA) pour lequel*

i) l'espace H est un espace de Hilbert,

ii) la forme linéaire ℓ est continue : $|\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_H$ pour tout $v \in H$.

iii) la forme bilinéaire a est continue : $|a(u,v)| \leq C_a \|u\|_H \|v\|_H$ pour tout $u, v \in H$.

iv) la forme bilinéaire a est coercive : $a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2$ pour tout $v \in H$, avec $\alpha > 0$.

Alors le problème variationnel abstrait admet une solution u et une seule. Cette solution vérifie l'estimation dite a priori*,*

$$\|u\|_H \leq \frac{C_\ell}{\alpha}. \tag{4.6}$$

Démonstration du théorème 4.2.3 dans le cas symétrique. Pour l'unicité on suppose qu'il existe deux solutions u_1 et u_2. En posant $w = u_1 - u_2$, et en prenant la différence des équations vérifiées par les deux solutions, on voit que

$$a(w,v) = 0, \qquad v \in H.$$

en prenant $v = w$, et utilisant la propriété de coercivité (iv), on trouve

$$\alpha \|w\|_H^2 \leq a(w,w) = 0,$$

et par conséquent $w = 0$ ce qui montre l'unicité. L'estimation a-priori (4.6) se démontre en remarquant que si u est solution, on a

$$\alpha \|u\|_H^2 \leq a(u,u) = \ell(u) \leq C_\ell \|u\|_H,$$

et en divisant par $\|u\|_H$ (il n'y a rien à prouver dans le cas $u = 0$).

Pour l'existence, on donne la preuve dans le cas où la forme bilinéaire a est symétrique. Puisqu'elle est aussi définie positive, elle définit un produit scalaire sur H noté $(u,v)_a = a(u,v)$. La norme préhilbertienne sur H associée à ce produit scalaire est notée $\|u\|_a = (u,u)_a^{1/2}$. Les propriétés de continuité et de coercivité de a montrent que

$$\alpha \|v\|_H^2 \leq \|v\|_a^2 \leq C_a \|v\|_H^2,$$

pour tout $v \in H$, et par conséquent les normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_H$ sont équivalentes. On en déduit immédiatement que H est complet pour la norme $\|\cdot\|_a$, c'est-à-dire est un espace de Hilbert pour cette norme également, et que la forme linéaire ℓ est continue pour la nouvelle norme. Le problème variationel peut ainsi s'écrire : trouver u tel que

$$(u,v)_a = \ell(v), \qquad v \in H,$$

et le théorème de Riesz nous assure qu'il existe une unique solution $u \in H$. □

Remarque 4.2.5 *Le théorème s'applique naturellement en dimension finie. Dans ce cas, il suffit que la matrice de la forme bilinéaire soit définie positive pour avoir la coercivité (le démontrer). Il est facile de démontrer que ceci implique son inversibilité et par conséquent l'existence et l'unicité. Cette preuve fonctionne aussi lorsque a n'est pas symétrique. La démonstration est plus élaborée dans le cas où H est de dimension infinie et a n'est pas symétrique.*

Les problèmes variationnels abstraits associés à une forme bilinéaire symétrique ont une formulation équivalente en termes de *problèmes de minimisation.*

Théorème 4.2.4 *Soit H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire symétrique, continue, coercive et ℓ une forme linéaire continue. On introduit la fonction $J\colon H \to \mathbb{R}$ par*

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v).$$

Alors $u \in H$ est solution du problème (PVA) si et seulement si u minimise J sur H, c'est-à-dire

$$J(u) = \min_{v\in H} J(v).$$

Démonstration. Notons d'abord que pour tous $v, w \in H$, on a

$$\begin{aligned} J(v+w) &= \tfrac{1}{2}a(v+w,v+w) - \ell(v+w) \\ &= \tfrac{1}{2}a(v,v) + \tfrac{1}{2}a(v,w) + \tfrac{1}{2}a(w,v) + \tfrac{1}{2}a(w,w) - \ell(v) - \ell(w) \\ &= \tfrac{1}{2}a(v,v) - \ell(v) + a(v,w) - \ell(w) + \tfrac{1}{2}a(w,w) \quad (a \text{ symétrique}) \\ &= J(v) + a(v,w) - \ell(w) + \tfrac{1}{2}a(w,w). \end{aligned}$$

Soit alors $u \in H$ la solution du problème (PVA). Pour tout $w \in H$, on a donc $a(u,w) - \ell(w) = 0$ et il vient

$$J(u+w) = J(u) + \frac{1}{2}a(w,w) \geq J(u)$$

pour tout $w \in H$. Or H est un espace vectoriel, donc tout $v \in H$ s'écrit sous la forme $v = u + w$, avec $w = v - u \in H$. On a ainsi montré que

$$J(u) \leq J(v), \quad v \in H,$$

c'est à dire $J(u) = \min_{v\in H} J(v)$.

Réciproquement, si $u \in H$ est tel que $J(u) = \min_{v\in H} J(v)$, alors pour tout $v \in H$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $J(u+tv) \geq J(u)$. En développant comme plus haut, on remarque que

$$P(t) = J(u+tv) = J(u) + (a(u,v) - \ell(v))t + \frac{1}{2}a(v,v)t^2,$$

est un polynôme de degré 2 qui atteint son minimum en $t = 0$. Ceci entraine que $P'(0) = 0$, autrement dit

$$a(u,v) - \ell(v) = 0.$$

Puisque $v \in H$ est arbitraire, on obtient que u est solution du problème (PVA). $\square$

Remarque 4.2.6 *Le théorème de Lax-Milgram montre l'existence et l'unicité de la solution de (PVA), ce qui entraîne l'existence et l'unicité du minimum de J sur H. Il est possible de démontrer directement, sans passer par le problème (PVA), que le problème de minimisation admet une solution et une seule sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. L'étude générale des problèmes de minimisation fait partie de ce qu'on appelle le calcul des variations : toute variation autour d'une solution produit un élément dont le J est plus grand que celui de la solution. Il s'agit d'un domaine très vaste qui a de nombreuses applications dans divers domaines où interviennent des problèmes d'équations aux dérivées partielles. C'est de là que vient le terme "variationnel".*

Remarque 4.2.7 *Le calcul de $J(u+v)$ montre que la différentielle $J'(u) = dJ_u \in H'$ de la fonction quadratique J est donnée par la forme linéaire*

$$v \mapsto J'(u)v = a(u,v) - \ell(v)$$

ce qui montre que $u \mapsto J'(u)$ est affine. Elle s'annule si et seulement si u est solution de (PVA).

Remarque 4.2.8 *Si a n'est plus symétrique, alors le (PVA) garde encore une solution unique par Lax-Milgram, mais il n'y a plus de problème de minimisation associé. On peut encore écrire la fonction J, le problème de minimisation correspondant aura bien une solution et une seule, mais cette solution est solution du (PVA) correspondant à la partie symétrique de la forme bilinéaire de départ.*

4.3 Espaces de Sobolev

Les espaces bien adaptés au type de produit scalaire qui apparaît naturellement dans les problèmes variationnels associés aux problèmes aux limites doivent prendre en compte le caractère intégrable des fonctions, puisque la norme fait intervenir des intégrales. Rappelons quelques définitions.

Définition 4.3.1 *On note $L^2(0,1)$, ou $L^2(]0,1[)$, l'espace vectoriel des (classes de) fonctions mesurables sur $]0,1[$, de carré intégrable,*

$$L^2(0,1) = \Big\{ v \text{ mesurable}, \int_0^1 |v(x)|^2\,dx < +\infty \Big\}.$$

Muni de la norme $\|v\|_{L^2(0,1)} = \big(\int_0^1 |v|^2\big)^{1/2}$, associée au produit scalaire $(u,v)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 uv$, c'est un espace de Hilbert.

On rappelle qu'une fonction est dite mesurable si l'image réciproque d'un ouvert est un sous-ensemble mesurable de $[0,1]$ (pour la mesure de Lebesgue). On sait alors calculer l'intégrale de Lebesgue $\int_0^1 v^2$, qui appartient *a priori* à $[0,+\infty]$, et pour un élément de $L^2(0,1)$, cette intégrale est dans $[0,+\infty[$. Il y a une petite subtilité : comme l'intégrale ne voit pas les ensembles de mesure nulle, c'est-à-dire si v est nulle sauf sur un ensemble de mesure nulle (on dit que v est nulle *presque partout*), alors $\int_0^1 |v|^2 = 0$, si l'on considérait vraiment l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable, alors l'intégrale du carré ne produirait qu'une semi-norme sur cet espace. Pour fabriquer une norme, on introduit une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions mesurables — l'égalité presque partout, *i.e.*, deux fonctions sont équivalentes si elles sont égales sauf sur un ensemble de mesure nulle — on prend l'espace quotient par cette relation, la norme passe au quotient et l'espace quotient devient un espace vectoriel normé. En toute rigueur, L^2 (ainsi que tous les espaces L^p) est donc un espace de classes d'équivalence de fonctions. Dans la pratique, on y pense le plus souvent comme à un espace de fonctions ordinaires. Il y a toutefois des situations dans lesquelles il faut faire attention à la distinction entre fonction et classe d'équivalence.

Notation : Dans la suite, on notera systématiquement $]0,1[=\Omega$ et $[0,1]=\bar{\Omega}$. En particulier, on notera $L^2(\Omega)$ pour $L^2(0,1)$, $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ pour $\mathcal{C}^1([0,1])$, etc. De façon générale, on omet de mentionner le domaine de définition de la fonction en notant sa norme

$$\|v\|_{L^2} = \|v\|_{L^2(\Omega)} = \|v\|_{L^2(0,1)}$$

et de même le produit scalaire $(u,v)_{L^2}$. Il en sera de même pour d'autres normes.

On a vu que le problème aux limites est équivalent, sous des hypothèses de continuité des fonctions c et f, à un problème variationnel abstrait posé sur l'espace $\mathcal{V}=\{v\in\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}), v(0)=v(1)=0\}$, avec la forme bilinéaire $a(u,v)=\int_0^1(u'v'+cuv)$ et la forme linéaire $\ell(v)=\int_0^1 fv$. Peut-on appliquer le résultat d'existence abstrait à ce problème variationnel ? Nous avons donc besoin d'un produit scalaire sur $\mathcal{V}$ pour lequel $\mathcal{V}$ soit préhilbertien, a soit continue et coercive et ℓ soit continue. Définissons donc

$$(u,v)_{H^1} = \int_\Omega (u'v'+uv).$$

C'est visiblement un produit scalaire sur $\mathcal{V}$. La norme préhilbertienne associée est la norme H^1 définie par

$$\|v\|_{H^1} = \Big(\int_\Omega [(v')^2+v^2]\Big)^{1/2} = \Big(\|v\|_{L^2}^2+\|v'\|_{L^2}^2\Big)^{1/2}.$$

On définit la *semi-norme* H^1 par

$$|v|_{H^1} = \|v'\|_{L^2},$$

et on note en particulier que

$$\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + |v|_{H^1}^2.$$

Alors ℓ et a sont clairement continues pour cette norme, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et si de plus $c(x)\geq\eta>0$ (hypothèse trop forte comme nous le verrons plus tard) la forme a est visiblement coercive. Le seul point délicat est la question de savoir si $\mathcal{V}$ est complet pour cette norme. La réponse, négative comme on va le voir, montre que $\mathcal{V}$ n'est pas le bon espace pour travailler avec la formulation variationnelle.

Proposition 4.3.1 *L'espace $\mathcal{V}$ n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$.*

Démonstration. Il faut fabriquer une suite de Cauchy dans $\mathcal{V}$ qui ne soit pas convergente. Pour cela on peut considérer une fonction la fonction

$$u(x) = 1-|1-2x|,$$

qui est nulle en 0 et 1. La dérivée de u admet une discontinuité en $\frac{1}{2}$ et donc $u \notin \mathcal{V}$.

On considère alors des versions régularisées de u que l'on peut définir par exemple de la manière suivante : on considère une fonction φ symétrique, positive et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\bar{\Omega}$ et telle que

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0, \quad \varphi'(-1) = 2, \quad \varphi(1) = -2.$$

Un exemple d'une telle fonction est $\varphi(x) = (x+1)(1-x)$. Pour $n \geq 2$, on définit ensuite u_n par

$$u_n(x) = u(x), \quad |x - \frac{1}{2}| \geq 1/n,$$

et

$$u_n(x) = u(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) + n^{-1}\varphi(n(x - \frac{1}{2})).$$

On vérifie aisément que u_n ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$, nulle en 0 et 1 et donc appartient à $\mathcal{V}$. On note que lorsque $|x - \frac{1}{2}| \leq c$ avec $c \geq \frac{1}{n}$, on a

$$1 - c \leq u_n(x) \leq 1,$$

Ceci permet de montrer que

$$\|u_n - u\|_{L^2}^2 \leq \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |u_n - u|^2 \leq \frac{2}{n}\frac{1}{n^2},$$

et par conséquent u_n converges vers u dans $L^2(\Omega)$. D'autre part, en remarquant que $-2 \leq u_n'(x) \leq 2$ pour tout $x \in [0,1]$, on trouve que pour tout $m \geq n$,

$$\|u_n - u_m\|_{H^1}^2 = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left(|u_n - u_m|^2 + |u_n' - u_m'|^2 \right) \leq \frac{2}{n}(\frac{1}{n^2} + 16),$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\geq 2}$ est une suite de cauchy pour la norme H^1.

Si $\mathcal{V}$ était complet elle convergerait dans cette norme vers une limite $u^* \in \mathcal{V}$. Puisque $\|v\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1}$, on voit que u^* serait aussi la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ pour la norme L^2 et par conséquence $u^* = u$, ce qui est impossible puisque $u \notin \mathcal{V}$. □

Cette démonstration indique que le complété de $\mathcal{V}$ pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{H^1}$ doit d'une certaine façon contenir des fonctions qui ne sont pas dérivables au sens usuel. Il faut noter que l'espace $\mathcal{V}$ est par contre bien complet pour sa norme naturelle

$$\|v\|_{\mathcal{C}^1([0,1])} = \max_{x\in[0,1]} |v(x)| + \max_{x\in[0,1]} |v'(x)|.$$

Mais, cette norme n'est pas hilbertienne (le montrer). Une situation similaire se rencontre si on cherche à utiliser la norme L^2 sur l'espace $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$.

On va à présent chercher à construire un espace qui, au contraire de $\mathcal{V}$ est complet pour la norme H^1. Au vu de la définition de cette norme, on est tenté de définir l'espace comme celui des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telle que $u' \in L^2(\Omega)$ mais cette définition n'a pas de sens car on ne sait pas bien définir la dérivée d'une fonction de $L^2(\Omega)$. Nous allons voir comment on peut contourner cette difficulté.

Définition 4.3.2 *On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur Ω à support compact*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega),\ supp\ \varphi := \overline{\{x \in \Omega\ :\ v(x) \neq 0\}}\ \textit{est compact dans}\ \Omega\}.$$

Ceci signifie que le support de φ est inclus dans un intervalle *fermé* $[a,b]$ avec $0 < a < b < 1$. En d'autres termes, on est sûr que φ est nulle sur $[0,a]$ et sur $[b,1]$. Attention, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas de façon naturelle un espace vectoriel normé (on peut bien sûr mettre des normes dessus, mais elles n'auront pas de bonnes propriétés). Sa topologie naturelle est nettement plus compliquée qu'une topologie d'espace vectoriel normé, et nous la passerons volontiers sous silence. Il contient beaucoup de fonctions, en voici un exemple : $\varphi(x) = 0$ si $0 \leq x \leq a$ ou $b \leq x \leq b$ et $\varphi(x) = e^{1/(x-a)(x-b)}$ si $a < x < b$. Nous admettrons le résultat de densité fondamental suivant, dont la démonstration ressort de la théorie de la mesure et de l'intégration.

Proposition 4.3.2 *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, i.e., pour tout $v \in L^2(\Omega)$, il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\|\varphi_n - v\|_{L^2} \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

Définition 4.3.3 *On dit qu'une fonction $v \in L^2(\Omega)$ admet une* dérivée faible *dans $L^2(\Omega)$ s'il existe $g \in L^2(\Omega)$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,*

$$\int_\Omega v\varphi' = -\int_\Omega g\varphi,$$

et l'on note alors $g = v'$.

Remarque 4.3.1 *On dit également que v admet une dérivée au sens des distributions, ou au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$, et que cette dérivée appartient à $L^2(\Omega)$. La notion de dérivée faible s'inscrit ainsi de manière plus générale dans la théorie des distributions. Comme nous n'aurons pas besoin de cette théorie ici, nous garderons la terminologie la plus brève.*

La notion de dérivée faible généralise la notion de dérivée usuelle pour des fonctions qui ne sont pas dérivables au sens où leurs quotients différentiels n'ont pas forcément de limite en certains points de l'intervalle de définition. C'est le sens de la proposition suivante.

Proposition 4.3.3 *i) Si $v \in L^2(\Omega)$ admet une dérivée faible, alors celle-ci est unique.*
ii) Si $v \in C^1(\bar{\Omega})$, alors v admet une dérivée faible et celle-ci coïncide avec sa dérivée au sens usuel.

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité de la dérivée faible. Soit $v \in L^2(\Omega)$ qui admet deux dérivées faibles g_1 et g_2. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a donc

$$\int_\Omega v\frac{d\varphi}{dx} = -\int_\Omega g_1\varphi = -\int_\Omega g_2\varphi.$$

En posant $w = g_1 - g_2 \in L^2(\Omega)$, on a donc

$$\int_\Omega w\varphi = 0.$$

Or, $\mathcal{D}(\Omega)$ est *dense* dans $L^2(\Omega)$. Il existe donc une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to w$ quand $n \to +\infty$ au sens de $L^2(\Omega)$. Donc

$$0 = \int_\Omega w\varphi_n \to \int_\Omega w^2 = \|w\|_{L^2}^2 \text{ quand } n \to +\infty.$$

En effet, $\varphi \to \int_\Omega w\varphi$ est continu pour la norme L^2 par Cauchy-Schwarz. Par conséquent, $w = 0$, i.e. $g_1 = g_2$ et on a unicité de la dérivée faible.

Soit maintenant $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ (que l'on identifie à un sous-espace de $L^2(\Omega)$ comme on l'a fait plus haut pour $\mathcal{D}(\Omega)$). Comme φ est indéfiniment dérivable, nous pouvons intégrer par parties,

$$\int_\Omega v\varphi' = [v\varphi]_0^1 - \int_\Omega v'\varphi.$$

Comme φ est à support compact, en particulier $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ et par conséquent $[v\varphi]_0^1 = 0$. De plus, $v' \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ est de carré intégrable et appartient à $L^2(\Omega)$. Par conséquent, on voit que v admet une dérivée faible et que cette dérivée faible est égale à sa dérivée usuelle v'. □

Définition 4.3.4 *On appelle* espace de Sobolev *et on note $H^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions v de $L^2(\Omega)$ qui admettent une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$.*

Remarque 4.3.2 *La notion de dérivée faible s'étend naturellement en dimension supérieure de la manière suivante : si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ une fonction $f \in L^2(\Omega)$ admet une dérivée partielle faible dans la direction x_i si et seulement si il existe une fonction $g_i \in L^2(\Omega)$ telle que $\int_\Omega f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int g_i\varphi$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On pose alors $\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i$, et on note $H^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions v de $L^2(\Omega)$ qui admettent des dérivée partielles faible dans $L^2(\Omega)$ dans toutes les directions $(x_1,\dots,x_d)$.*

Remarque 4.3.3 *D'après la proposition précédente, on a $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.*

Théorème 4.3.1 *Muni de la norme*

$$\|v\|_{H^1} = \Big(\int_\Omega [|v|^2 + |v'|^2]\Big)^{1/2},$$

l'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Il est clair que $H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel et que la norme $\|\cdot\|_1$ est une norme préhilbertienne. Il s'agit donc de vérifier que $H^1(\Omega)$ est complet pour cette norme. On va pour cela s'appuyer sur le fait que $L^2(\Omega)$ lui-même est complet (c'est dans ce dernier résultat que se trouve tout le travail difficile en fait, que nous admettrons, voir en annexe pour sa preuve).

Soit u_n une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier n_0 tel que pour tous $m, n \geq n_0$, $\|u_m - u_n\|_{H^1} \leq \varepsilon$. Comme $\|u_m - u_n\|_{L^2} \leq \|u_m - u_n\|_{H^1}$, on en déduit d'abord que u_n est aussi de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Comme $L^2(\Omega)$ est complet, il existe donc $u \in L^2(\Omega)$ tel que $\|u_n - u\|_{L^2} \to 0$ quand $n \to +\infty$. De même, comme $\|u'_m - u'_n\|_{L^2} \leq \|u_m - u_n\|_{H^1}$, la suite u'_n est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et il existe $g \in L^2(\Omega)$ tel que $\|u'_n - g\|_{L^2} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Vérifions que g est bien la dérivée faible de u, afin de montrer que $u \in H^1(\Omega)$. Comme $u_n \in H^1(\Omega)$, on a par définition

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \int_\Omega u_n \varphi' = -\int_\Omega u_n' \varphi.$$

Comme φ et φ' appartiennent à $\mathcal{D}(\Omega)$ et donc à $L^2(\Omega)$, on peut passer à la limite et obtenir

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \int_\Omega u \varphi' = -\int_\Omega g \varphi.$$

Donc u admet une dérivée faible $u' = g$, c'est-à-dire $u \in H^1(\Omega)$. De plus,

$$\|u_n - u\|_{H^1}^2 = \|u_n - u\|_{L^2}^2 + \|u_n' - g\|_{L^2}^2 \to 0 \text{ quand } n \to +\infty,$$

et la suite u_n converge bien vers $u \in H^1(\Omega)$ au sens de la norme de $H^1(\Omega)$. Cet espace est par conséquent complet. □

Donnons quelques propriétés élémentaires de l'espace $H^1(\Omega)$. La proposition 4.3.1 nous indique que l'inclusion $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ est stricte, puisque sa preuve montre que la fonction $v(x) = 1 - |2x - 1|$ appartient à $H^1(\Omega)$ alors qu'elle n'appartient pas à $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Ce dernier exemple, une fonction affine par morceaux, se généralise aisément.

Proposition 4.3.4 *Toute fonction u continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\bar{\Omega}$ appartient à $H^1(\Omega)$. Sa dérivée faible est une fonction continue par morceaux qui coïncide avec la dérivée de u sur chaque intervalle ouvert où u est $\mathcal{C}^1$.*

Démonstration. Soit u une fonction continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Ceci signifie que l'on a des points $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_p < x_{p+1} = 1$ et que la restriction de u à chaque intervalle fermé $[x_i, x_{i+1}]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce même intervalle. De plus, les limites de u à gauche et à droite en chaque point x_i coïncident avec la valeur de u en ce point. Notons $g_i \in \mathcal{C}^0([x_i, x_{i+1}])$ la dérivée de la restriction de u à $[x_i, x_{i+1}]$. En définissant la fonction g par

$$g(x) = g_i(x) \text{ quand } \quad x \in]x_i, x_{i+1}[,$$

et en ne la définissant pas pour $x = x_i$, on voit que $g \in L^2(\Omega)$ (une fonction de L^2 n'a pas besoin d'être définie sur un ensemble de mesure nulle). Montrons que g est bien la dérivée faible de u. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ quelconque. On a

$$\int_\Omega u \varphi' = \sum_{i=0}^{p} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u \varphi' = \sum_{i=0}^{p} [u\varphi]_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{i=0}^{p} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i \varphi,$$

car la restriction de u à $[x_i, x_{i+1}]$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, on a le droit d'intégrer par parties sur chacun de ces intervalles. Il est clair, parce qu'on a supposé u continue, que $\sum_{i=0}^{p} [u\varphi]_{x_i}^{x_{i+1}} = [u\varphi]_0^1$ et que $[u\varphi]_0^1 = 0$, puisque φ est à support compact. Par conséquent, on a

$$\int_\Omega u \varphi' = -\sum_{i=0}^{p} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i \varphi = -\int_0^1 g \varphi,$$

d'où $u \in H^1(\Omega)$ et $u' = g$. $\square$

L'hypothèse de continuité globale de u est essentielle dans la preuve de la proposition ci-dessus. En particulier une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux mais sans raccords continus n'appartiendra pas à l'espace $H^1(\Omega)$. Prenons par exemple la fonction

$$u = \chi_{[0,1/2[},$$

où χ_E désigne la fonction indicatrice d'un ensemble E. La fonction u vaut donc 1 sur $[0,1/2[$ et 0 sur $[1/2,1]$. Si elle admettait une dérivée faible $g = u'$, celle-ci vérifierait pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1/2[)$

$$\int_0^{1/2} g\varphi = -\int_0^{1/2} \varphi' = -[\varphi]_0^{1/2} = 0,$$

et par conséquent sa restriction à $]0,1/2[$ serait nulle. De la même manière sa restriction à $]1/2,1[$ serait nulle, ce qui montre que $g = 0$ (au sens presque partout). On aurait alors

$$0 = \int_\Omega g\varphi = -\int_\Omega u\varphi' = -\int_0^{1/2} \varphi' = -\varphi(1/2),$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on aboutit à une contradiction en prenant une fonction φ telle que $\varphi(1/2) \neq 0$. Cet exemple montre en particulier que l'inclusion $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ est stricte, et qu'il ne faut surtout pas confondre la dérivée faible avec la dérivée presque partout.

Montrons maintenant que $H^1(\Omega)$ réalise le complété de $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. On commence par un petit lemme fort utile.

Lemme 4 *Si $w \in H^1(\Omega)$ est tel que $w' = 0$, alors w est une fonction constante.*

Démonstration. Soit $w \in H^1(\Omega)$ telle que $w' = 0$, ceci signifie, par définition de la dérivée faible, que

$$\int_\Omega w\varphi' = 0, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Choisissons $\psi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ de façon à ce que $\int_\Omega \psi_0 = 1$. Alors pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$, la fonction $\Theta = \theta - (\int_\Omega \theta(x)\,dx)\psi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et est telle que $\int_\Omega \Theta = 0$. Par conséquent, $\varphi(x) = \int_0^x \Theta(t)\,dt$ est $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact (introduire des intervalles qui contiennent les supports de θ et ψ). De plus, $\varphi' = \Theta$ et en reportant dans l'intégrale $\int_\Omega w\varphi'$, on obtient

$$\int_\Omega w\theta - \Big(\int_\Omega \theta\Big)\Big(\int_\Omega w\psi_0\Big) = 0, \qquad \theta \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Posant alors $c = \int_\Omega w\psi_0 \in \mathbb{R}$, on a montré que

$$\int_\Omega (w-c)\theta = 0, \qquad \theta \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On utilise encore une fois la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ pour en déduire que $w - c = 0$. $\square$

Remarque 4.3.4 *Attention, il ne s'agit pas du résultat classique analogue, puisqu'on parle ici de dérivée faible et c'est la définition de la dérivée faible qu'il faut utiliser. Néanmoins, le résultat est le même.*

Proposition 4.3.5 *L'espace $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $u \in H^1(\Omega)$. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, il existe une suite φ_n dans $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to u'$ dans $L^2(\Omega)$. On pose $v_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt$. Il est clair que $v_n \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ (en fait ces fonctions sont indéfiniment dérivables) et que $v_n' \to u'$ dans $L^2(\Omega)$. Montrons que la suite v_n est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$.

Pour cela, on prend deux indices n et m et l'on compare v_n et v_m :

$$(v_n - v_m)(x) = \int_0^x (\varphi_n - \varphi_m)(t)\,dt.$$

Prenant les valeurs absolues et élevant au carré, il vient immédiatement (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$|(v_n - v_m)(x)|^2 \leq \int_\Omega |\varphi_n - \varphi_m|^2 = \|\varphi_n - \varphi_m\|_{L^2}^2.$$

Intégrant alors entre 0 et 1, on obtient,

$$\|v_n - v_m\|_{L^2} \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_{L^2}.$$

Mais la suite φ_n converge dans $L^2(\Omega)$ par hypothèse. C'est donc une suite de Cauchy dans L^2. L'inégalité précédente montre alors que v_n est aussi une suite de Cauchy.

Comme l'espace $L^2(\Omega)$ est complet, il existe donc $v \in L^2(\Omega)$ tel que $v_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$. Par le même raisonnement de passage à la limite dans les intégrales que celui déjà fait au théorème 4.3.1, on voit que $v \in H^1(\Omega)$ avec $v' = u'$. Par le lemme précédent, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $u = v + c$. On déduit de ce qui précède que la suite de terme $u_n := v_n + c \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ converge dans $H^1(\Omega)$ vers u. □

Remarque 4.3.5 *La preuve ci-dessus montre en fait que l'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ puisqu'on a en fait par construction $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.*

Encore une inclusion, plus exactement une injection continue : nous allons montrer que toute fonction u de $H^1(\Omega)$ a un représentant continu, qu'on note encore u et que l'application $u \longmapsto u$ est une application (linéaire) continue de $H^1(\Omega)$ muni de $\|.\|_{H^1}$ dans $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ muni de sa norme naturelle

$$\|v\|_{\mathcal{C}^0} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)|.$$

On rappelle au passage que $L^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions mesurables sur $\Omega =]0,1[$ qui contiennent un représentant borné. On peut y penser comme à des fonctions mesurables bornées presque partout. Le nombre

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{esssup}_{x \in \Omega} |v(x)| = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+, |v(x)| \leq \lambda \text{ presque partout}\}$$

est appelé *sup essentiel* de la fonction c et définit une norme sur $L^\infty(\Omega)$ qui en fait un espace de Banach. Bien sûr, $|v(x)| \le \|c\|_{L^\infty(\Omega)}$ presque partout. Mais dans le cas où v est continue sur $\bar{\Omega}$, le sup essentiel et le max sur $\bar{\Omega}$ coïncident. On pourra donc écrire

$$\|v\|_{L^\infty} = \|v\|_{\mathcal{C}^0}.$$

Proposition 4.3.6 *On a* $H^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$.

Démonstration. On raisonne par densité des fonctions régulières. Pour $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, on a pour tout $x, y \in \bar{\Omega}$,

$$v(x) = v(y) + \int_y^x v'(t)dt, \tag{4.7}$$

et par conséquent

$$|v(x)|^2 \le 2|v(y)|^2 + 2|\int_y^x v'(t)dt|^2 \le 2|v(y)|^2 + 2\int_0^1 |v'(t)|^2 dt,$$

en utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ et Cauchy-Schwarz. En intégrant sur y entre 0 et 1, on trouve

$$|v(x)|^2 \le 2(\|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2) = 2\|v\|_{H^1}^2.$$

Cette inégalité étant uniforme par rapport à x, on en déduit que

$$\|v\|_{L^\infty} \le \sqrt{2}\|v\|_{H^1}. \tag{4.8}$$

Soit maintenant $u \in H^1(\Omega)$ et soit $v_n \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ une suite qui converge vers u dans $H^1(\Omega)$, laquelle existe d'après la proposition 4.3.5. C'est donc une suite de Cauchy et en appliquant l'inégalité précédente, il vient

$$\|v_n - v_m\|_{L^\infty} \le \sqrt{2}\|v_n - v_m\|_{H^1},$$

c'est-à-dire que v_n est aussi une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$. Cet espace est un espace de Banach pour sa norme naturelle et il existe donc $v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ tel que $v_n \to v$ dans $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, c'est-à-dire uniformément. En particulier, comme Ω est un intervalle borné de longueur 1,

$$\|v_n - v\|_{L^2}^2 \le \|v_n - v\|_{L^\infty}^2,$$

par conséquent, v_n tend aussi vers v dans $L^2(\Omega)$. Or on sait déjà que v_n tend vers u dans $L^2(\Omega)$, d'où $u = v$ presque partout et la classe d'équivalence de u contient une fonction continue v. On a ainsi construit une injection de $H^1(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$. De plus cette injection est continue, car appliquant l'inégalité (4.8) à v_n, on peut passer à la limite dans les deux membres, par convergence $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ à gauche et convergence $H^1(\Omega)$ à droite, ce qui donne

$$|u\|_{L^\infty} \le \sqrt{2}\|u\|_1, \qquad u \in H^1(\Omega), \tag{4.9}$$

où l'on n'a pas distingué entre u et son représentant continu v.

Notons que l'on peut aussi passer à la limite dans les deux membres de l'identité (4.7) qui est donc aussi vérifiée pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$. □

Remarque 4.3.6 *Ce raisonnement est typique des raisonnements par densité : on établit une relation pour des fonctions régulières, en utilisant des propriétés de ces fonctions régulières — ici d'être égales à l'intégrale de leur dérivée — puis on passe à la limite dans la relation en question.*

Remarque 4.3.7 *Le fait que l'injection soit continue implique qu'une suite qui converge dans H^1 converge aussi uniformément. L'injection continue $H^1 \hookrightarrow \mathcal{C}^0$ n'est valable qu'en dimension* 1. *Elle est fausse pour les espaces de Sobolev H^1 que l'on définit en dimension supérieure.*

Nous pouvons maintenant parler de condition de Dirichlet pour des fonctions H^1.

Définition 4.3.5 *On pose $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v(0) = v(1) = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel fermé (et donc complet, ou "sous-espace hilbertien") de $H^1(\Omega)$.*

En effet, $H_0^1(\Omega)$ est bien défini en considérant la fonction continue qui représente v (si v est seulement L^2, la quantité $v(0)$ n'a aucun sens, puisque l'on peut modifier les valeurs d'une fonction de L^2 sur un ensemble de mesure nulle sans modifier la classe d'équivalence). De plus si $v_n \in H_0^1(\Omega)$ converge vers $v \in H^1(\Omega)$, alors elle converge aussi uniformément et donc ponctuellement en 0 et en 1. Donc $0 = v_n(0) \to v(0)$ et $0 = v_n(1) \to v(1)$, *i.e.*, $v \in H_0^1(\Omega)$ qui est bien fermé.

Proposition 4.3.7 *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. C'est aussi l'adhérence, donc le complété, de l'espace $\mathcal{V}$ introduit au début de cette section.*

Démonstration. On commence par noter que si $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $\int_\Omega u' = 0$. Ceci provient de l'identité (4.7) qui est vérifiée par les fonctions de $H^1(\Omega)$ et qu'on peut appliquer avec $x = 0$ et $y = 1$.

On reprend alors la suite $\varphi_n \to u'$ dans $L^2(\Omega)$ de la proposition 4.3.5, et la fonction ψ_0 du lemme 4. Comme $\int_\Omega \varphi_n \to \int_\Omega u' = 0$, on a aussi que $\theta_n = \varphi_n - (\int_\Omega \varphi_n)\psi_0 \to u'$ dans $L^2(\Omega)$. De plus, $\int_\Omega \theta_n(x) = 0$ et donc $\Theta_n(x) = \int_0^x \theta_n(t)\,dt$ est telle que $\Theta_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\Theta_n \to u + c$ dans $H^1(\Omega)$ quand $n \to \infty$. Comme la convergence est de plus uniforme, il s'ensuit que $0 = \Theta_n(0) \to u(0) + c = c$, d'où $c = 0$, et $\Theta_n \to u$ ce qui établit le premier résultat.

On remarque enfin que $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{V} \subset H_0^1(\Omega)$ pour en déduire immédiatement que $\mathcal{V}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. □

Remarque 4.3.8 *En dimension supérieure, on définit parfois directement $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. La question de savoir en quel sens une fonction de $H_0^1(\Omega)$ s'annule sur le bord de Ω est délicate dès que les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont plus continues.*

On rappelle la notation $|u|_{H^1} = \|u'\|_{L^2}$ pour la semi-norme H^1. La propriété suivante est très importante.

Théorème 4.3.2 *Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a l'inégalité de Poincaré*

$$\|u\|_{L^2} \leq |u|_{H^1}. \tag{4.10}$$

La semi-norme $|\cdot|_{H^1}$ définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1}$.

Démonstration. Pour $u \in H^1(\Omega)$, on a $u(x) - u(0) = \int_0^x u'(s)\,ds$. En particulier, si $u \in H_0^1(\Omega)$, il vient
$$u(x) = \int_0^x u'(s)\,ds,$$
d'où
$$|u(x)|^2 \le |\int_0^x u'(s)\,ds|^2 \le \int_0^x |u'(s)|^2\,ds \le \int_\Omega |u'(s)|^2\,ds = |u|_1^2.$$
Intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient (4.10). On en déduit immédiatement que
$$|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + |u|_{H^1}^2 \le 2|u|_{H^1}^2, \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$
d'où l'équivalence des normes,
$$|u|_{H^1} \le \|u\|_{H^1} \le \sqrt{2}|u|_{H^1}, \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$
qui démontre le théorème. □

Remarque 4.3.9 *Si l'on travaille sur $H_0^1(\Omega)$, on peut donc au choix utiliser la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ ou la norme équivalente définie par*
$$\|v\|_{H_0^1} := |v|_{H^1} = \|v'\|_{L^2}.$$

Remarque 4.3.10 *L'inégalité de Poincaré est fausse sur $H^1(\Omega)$. En effet, si u est une fonction constante non nulle, $\|u\|_0 > 0$ mais $|u|_1 = 0$. Par contre, elle reste vraie, comme le montre clairement la démonstration, si l'on considère l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent en $x = 0$ (ou en $x = 1$). Elle se généralise facilement au cas où Ω est intervalle de taille finie quelconque, sous la forme*
$$\|u\|_{L^2} \le C|u|_{H^1},$$
où on peut prendre pour C la longueur de l'intervalle Ω.

Donnons, pour être complet, une dernière propriété d'injection continue.

Proposition 4.3.8 *On a $H^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{1/2}(\bar\Omega)$ l'espace des fonctions hölderiennes d'exposant $1/2$. De plus, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.*

Démonstration. On sait déjà que $H^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\bar\Omega)$. Il faut montrer qu'en outre les fonctions de $H^1(\Omega)$ sont höldériennes d'exposant $1/2$. Or, pour $u \in H^1(\Omega)$,
$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(s)\,ds,$$
d'où
$$|u(x) - u(y)| \le |x-y|^{1/2}\|u'\|_{L^2},$$
par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc u est höldérienne d'exposant $1/2$. De plus,
$$\max_{x \ne y \in \bar\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{1/2}} \le \|u'\|_{L^2},$$

d'où

$$\|u\|_{C^{1/2}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \max_{x \neq y \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{1/2}} \leq C\|u\|_{H^1}$$

et l'injection est continue.

On dit qu'une application linéaire est compacte si elle transforme les bornés en ensembles relativement compacts. Par linéarité, cela revient à affirmer que l'image de la boule unité est relativement compacte. Soit B la boule unité de $H^1(\Omega)$. Pour tout $u \in B$, d'après ce qui précède,

$$|u(x) - u(y)| \leq |x-y|^{1/2}, \qquad x, y \in \Omega,$$

donc B est une partie équicontinue de $C^0(\bar{\Omega})$, bornée. Par le théorème d'Ascoli, on en déduit que B est relativement compacte dans $C^0(\bar{\Omega})$, d'où aussi dans $L^2(\Omega)$ par l'injection continue triviale $C^0(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Ceci nous montre que l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (ainsi que dans $C^0(\bar{\Omega})$) est compacte. $\square$

Remarque 4.3.11 *L'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow C^{1/2}(\bar{\Omega})$ n'est valable qu'en dimension 1, mais la compacité de l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ reste vraie en dimension supérieure, pour Ω borné et de frontière régulière (en un sens à préciser). C'est le très important théorème de Rellich. Il implique que si l'on a une suite bornée dans $H^1(\Omega)$, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$ (et uniformément en dimension 1).*

Remarque 4.3.12 *Ici encore les inclusions sont strictes : $H^1(\Omega) \neq C^{1/2}(\bar{\Omega})$, en effet, $\sqrt{x} \in C^{1/2}(\bar{\Omega})$ mais $\sqrt{x} \notin H^1(\Omega)$. De plus, on ne peut pas faire mieux : $H^1(\Omega) \not\subset C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ pour tout $\alpha > 1/2$.*

4.4 Application au problème aux limites

Appliquons les notions que l'on vient d'introduire au problème variationnel associé au problème aux limites.

Théorème 4.4.1 *Pour tout $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$ et tout $f \in L^2(\Omega)$, le problème variationnel : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que*

$$\int_\Omega (u'v' + cuv) = \int_\Omega fv, \quad v \in H_0^1(\Omega), \tag{4.11}$$

admet une solution et une seule. De plus, on a l'estimation $\|u\|_{H^1} \leq 2\|f\|_{L^2}$.

Démonstration. Il faut vérifier que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont bien satisfaites. Cette fois-ci, on travaille bien dans un espace de Hilbert $V = H_0^1(\Omega)$. La forme bilinéaire et la forme linéaire sont continues :

$$|a(u,v)| \leq \max(1, \|c\|_{L^\infty})\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$
$$|\ell(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1},$$

par diverses applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La forme bilinéaire est bien coercive. En effet, comme c est positive, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega [(v')^2 + cv^2] \geq |v|_{H^1}^2 \geq \frac{1}{2}\|v\|_{H^1}^2$$

par l'équivalence des normes. Donc on a existence et unicité de la solution. Pour l'estimation de cette dernière, on prend comme fonction-test $v = u$, ce qui donne

$$\frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 \leq \int_\Omega [(u')^2 + cu^2] = \int_\Omega fu \leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{H^1},$$

et l'on conclut en divisant par $\|u\|_{H^1}$ (quand $u \neq 0$, sinon il n'y a rien à montrer). □

Remarque 4.4.1 *Cette dernière inégalité signifie que l'application linéaire qui à f associe u est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.*

Remarque 4.4.2 *Quand c et f sont en outre continues sur $[0,1]$, on sait qu'il existe une solution classique du problème aux limites qui est de classe C^2. Par unicité elle coïncide avec la solution variationelle u.*

On a ainsi résolu directement un problème variationnel, qui redonne la solution du problème aux limites quand les données sont bien régulières. Mais on a obtenu bien plus : on peut maintenant résoudre pour le même prix le problème variationnel avec des fonctions c éventuellement discontinues (mais toujours bornées) et des fonctions f éventuellement discontinues et non bornées. On a donc considérablement généralisé le champ d'applications possible. Le revers de la médaille est que l'on sait pas encore dans ce cas s'il y a un problème aux limites raisonnable associé au problème variationnel. On remarque que pour la formulation variationnelle considérée, les conditions aux limites sont naturellement vérifiées par la solution puisqu'on la cherche dans $H_0^1(\Omega)$. Il faut encore donner un sens faible à la dérivée u''.

Pour traiter cette dernière question, on a besoin d'autres espaces de Sobolev.

Définition 4.4.1 *Soit $m \in \mathbb{N}$. On définit par récurrence sur $k \geq 1$ l'espace de Sobolev*

$$H^m(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \; : \; v' \in H^{m-1}(\Omega)\},$$

en posant par convention $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Il est clair, d'après cette définition, qu'une fonction de $H^m(\Omega)$ admet m dérivées faibles successives (*i.e.*, pour $k \geq 2$, v' admet une dérivée faible, noté v'', qui admet elle-même une dérivée faible, notée v''' ou $v^{(3)}$, etc. Ces dérivées sont caractérisées par la relation

$$\int_\Omega v^{(l)}\varphi = (-1)^l \int_\Omega v\varphi^{(l)}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On note aussi que l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^0(\Omega)$ entraine par récurrence celle de $H^m(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^{m-1}(\Omega)$: les $m-1$ premières dérivées sont donc des dérivées classiques.

Nous reviendrons sur ces espaces dans un chapitre suivant. Muni de la norme

$$\|v\|_{H^m} = \Big(\sum_{l=0}^{m} \|u^{(l)}\|_{L^2}^2\Big)^{1/2},$$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert (la démonstration est identique au cas $m = 1$). On note par ailleurs

$$|v|_{H^m} = \|u^{(m)}\|_{L^2},$$

la semi-norme associée à cet espace.

Proposition 4.4.1 *On se donne $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$, et $f \in L^2(\Omega)$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution du problème variationnel (4.11). Alors $u \in H^2(\Omega)$ et*

$$-u'' + cu = f \text{ au sens de } L^2(\Omega),$$

donc en particulier presque partout.

Démonstration. Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on peut prendre dans (4.11) des fonctions-test de $\mathcal{D}(\Omega)$. Ceci donne

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \int_\Omega u'\varphi' = -\int_\Omega (cu - f)\varphi.$$

Or $f \in L^2(\Omega)$ d'une part et $u \in L^2(\Omega)$ et $c \in L^\infty(\Omega)$ d'autre part, d'où $cu \in L^2(\Omega)$ puisque

$$\int_\Omega (cu)^2 \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_\Omega u^2.$$

Donc, $g = cu - f \in L^2(\Omega)$ et on reconnaît la définition de la dérivée faible pour u' : u' a une dérivée faible u'' qui coincide avec $cu - f$. On a ainsi montré que $u \in H^2(\Omega)$ et $u'' = cu - f$, donc u vérifie le problème aux limites $-u'' + cu = f$, et $u(0) = u(1) = 0$ puisque $u \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

Remarque 4.4.3 *Attention : il ne s'agit pas d'une intégration par partie au sens usuel. On ne fait qu'utiliser la définition des dérivées faibles. Bien sûr, si les données sont régulières, la solution l'est aussi et les dérivées faibles coïncident avec les dérivées usuelles.*

Remarque 4.4.4 *On peut bien entendu aller plus loin en régularité, en établissant par récurrence le résultat suivant : si $f \in H^m(\Omega)$ et $c \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$, alors la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème variationnel appartient à $H^{m+2}(\Omega)$. Pour cela il suffit de montrer que si*

$$v \in H^m(\Omega) \quad \text{et} \quad c \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega}) \implies cv \in H^m(\Omega),$$

avec la règle de Leibniz qui s'applique aux dérivées faibles (exercice). La formulation variationnelle nous montre alors que la dérivée faible de u appartient à $H^{m+1}(\Omega)$.

Remarque 4.4.5 *Les conditions aux limites de Dirichlet apparaissent par l'intermédiaire de l'espace $H_0^1(\Omega)$. Dans le cas d'un problème aux limites avec des conditions de Neumann $u'(0) = \gamma$ et $u'(1) = \delta$, nous avons déjà indiqué à la fin de la section 4.1 que ce ne serait pas le cas. Dans ce cas la formulation variationnelle correspondante est posée dans l'espace $V = H^1(\Omega)$ tout entier, la forme linéaire a reste la même, et il faut ajouter la condition $c \geq \beta$, où β est une constante strictement positive, pour qu'elle soit coercive sur $H^1(\Omega)$. Enfin on modifie la forme linéaire ℓ en la remplacant par $\tilde{\ell}(v) = \int_\Omega fv + \delta v(1) - \gamma v(0)$. Il est là aussi possible de montrer que si $f \in L^2(\Omega)$, alors la solution u de la formulation variationelle appartient à $H^2(\Omega)$ et vérifie le problème aux limites $-u'' + cu = f$ avec conditions de Neumann.*

Pour clore ce chapitre, rappelons aussi que la solution de (4.11) minimise la fonction

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega [cv^2 + (v')^2] - \int_\Omega fv$$

sur $H_0^1(\Omega)$, c'est à dire $J(u) = \inf J(v)$ borne inférieure prise sur tous les $v \in H_0^1(\Omega)$.

Annexe : complétude de $L^2(\Omega)$

Montrons rapidement que $L^2(\Omega)$ est complet. On se donne une suite de Cauchy u_n dans $L^2(\Omega)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n, m \geq n_0$, $\|u_n - u_m\|_{L^2} \leq \varepsilon$. Prenant $\varepsilon = 2^{-k}$ pour $k \in \mathbb{N}$, on extrait donc une sous-suite u_{n_k} telle que $\|u_{n_k} - u_{n_{k+1}}\|_{L^2} \leq 2^{-k}$. On considère la fonction

$$g(x) = |u_{n_0}| + \sum_{k=0}^{\infty} |u_{n_{k+1}} - u_{n_k}|(x).$$

Cette fonction est bien définie comme série à termes positifs et prend ses valeurs dans $[0, +\infty]$. De plus, c'est une limite ponctuelle de fonctions mesurables, elle est donc mesurable. Comme

$$\|g\|_{L^2} \leq \|u_{n_0}\|_{L^2} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \leq \|u_{n_0}\|_{L^2} + 2,$$

g appartient en fait à $L^2(\Omega)$. En particulier g est finie presque partout.

Par conséquent, il existe un ensemble de mesure nulle N tel que $g(x) < +\infty$ si $x \notin N$ et pour x en dehors de cet ensemble la série

$$u(x) = u_{n_0} + \sum_{k=0}^{\infty} (u_{n_{k+1}} - u_{n_k})(x)$$

est absolument convergente. Elle définit donc une fonction presque partout, mesurable et, comme $|u(x)| \leq g(x)$, appartenant à $L^2(\Omega)$. Pour conclure, il suffit de montrer que $u_{n_p} \to u$ dans $L^2(\Omega)$ quand $p \to +\infty$. Or $u_{n_p} - u \to 0$ presque partout, et de plus, $|u_{n_p} - u| \leq |g|$ avec g dans $L^2(\Omega)$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre donc que $\|u_{n_p} - u\|_{L^2} \to 0$ quand $p \to +\infty$. La propriété de suite de Cauchy entraîne finalement que $\|u_n - u\|_{L^2} \to 0$ quand $n \to +\infty$. $\square$

On a incidemment montré la réciproque partielle du théorème de convergence dominée de Lebesgue, à savoir que de toute suite convergente dans $L^2(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout et qui est dominée par une fonction de $L^2(\Omega)$.