Chapitre 4

Espaces de Sobolev

L'espace des fonctions de carré intégrable n'est pas un cadre suffisament riche pour l'analyse des EDPs car on ne peut appliquer de dérivée partielle sur les fonctions dans L^2. Nous allons donc construire dans ce chapitre de nouveaux espaces de Hilbert, dans lesquels nous pourrons donc appliquer les résultats d'existence-unicité (théorèmes de Riesz et Lax-Milgram) et pour lesquels, en même temps, on aura accès à une notion de dérivée partielle. Cette opération de dérivation devra cependant être entendue dans un sens généralisé dit "faible" que nous discuterons en détail. Le lecteur désireux d'approfondir les thèmes abordés dans ce chapitre pourra consulter [3, chap.1], [1, chap.4], [15, chap.1], [4, chap.8 & 9] ou encore [18, part.I].

4.1 Définition

Nous commençons par généraliser la notion de gradient à des fonctions appartenant à l'espace $\mathrm{L}^2(\Omega)$ donc potentiellement pas même continues. Cette généralisation prend une forme "variationnelle".

☞ **Definition 4.1.**
Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, on dit que $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ admet un gradient faible, et on écrit "$\nabla u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^d$", lorsqu'il existe $\boldsymbol{p} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^d$ telle que

$$\int_\Omega u\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)^d,$$

où $\mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega) := \{\varphi \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega),\ \mathrm{supp}(\varphi)$ borné$\}$. Si un tel $\boldsymbol{p}$ existe, il est unique. On écrit alors "∇u" pour désigner ce champ de vecteur $\boldsymbol{p} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^d$.

Justifions l'unicité : si $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^d$ vérifient tous les deux l'identité mentionnée, alors $\int_\Omega (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x} = 0 \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega)^d$, et on en déduit $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} = 0$ d'après le corollaire 3.19. Cette unicité jusitifie la convention de notation pour le gradient faible.

Dans cette définition, les fonctions $\boldsymbol{\varphi}$ sont parfois appelées fonctions test. Il est très important de noter que ces fonctions s'annulent sur le bord. Ainsi la condition ci-dessus ne prescrit rien quant au comportement de u au voisinage de $\partial\Omega$. L'unicité de $\boldsymbol{p}$ vaut biensur au sens de l'égalité presque partout, les éléments de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ étant de toute façon définis presque partout.

Généralisation du gradient usuel

La définition 4.1 étend la notion usuelle de gradient et donc de dérivée partielle, les coordonnées du gradient étant données par les dérivées partielles par rapport à chacune des variables. Pour le voir plaçons-nous dans le cas d'un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, et considérons un $u \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ pour lequel il est bien évident que $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Notons $\boldsymbol{f} := \boldsymbol{e}_1\partial_{x_1}u + \cdots + \boldsymbol{e}_d\partial_{x_d}u$ son gradient usuel, défini comme au §1.5. On peut alors appliquer la formule de Stokes (2.13), et on obtient

$$\int_\Omega u\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\varphi})d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{\varphi}\,d\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)^d.$$

Dans cette identité, on ne retrouve pas le terme de bord apparaissant dans (2.13), justement parce que les fonctions tests $\boldsymbol{\varphi}$ sont supposées s'annuler sur $\partial\Omega$. Comme $\boldsymbol{f} \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$, on a $\boldsymbol{f} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Les hypothèses de la définition 4.1 sont vérifiées et $\boldsymbol{f}$ est bien le gradient faible de u. Les formules de calcul différentiel liées au gradient se prolongent au gradient faible. Le résultat suivant, à comparer à (1.15), en donne un exemple.

Lemme 4.2.
Étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ avec $\nabla u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ avec $\sup_\Omega(|\chi| + |\nabla\chi|) < +\infty$, on a $\nabla(\chi u) \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ avec $\nabla(\chi u) = \chi\nabla u + u\nabla\chi$.

Démo :
Pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)^d$, en utilisant la caractérisation du gradient faible ∇u, on a $\int_\Omega u\chi\mathrm{div}(\boldsymbol{\varphi})d\boldsymbol{x} = \int_\Omega u\mathrm{div}(\chi\boldsymbol{\varphi})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega u\nabla\chi^\top\boldsymbol{\varphi}d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega(\chi\nabla u + u\nabla\chi)^\top\boldsymbol{\varphi}d\boldsymbol{x}$. Il reste à comparer avec la définition 4.1. On a bien $\chi u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\chi\nabla u + u\nabla\chi \in \mathrm{L}^2(\Omega)^d$ car $\chi, \nabla\chi$ sont bornés. □

Espace de Sobolev "de base"

On vérifie sans difficulté que le gradient faible défini plus haut respecte les combinaisons linéaires : si $u, v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ admettent un gradient faible alors $u+\alpha v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ admet un gracdient faible aussi pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\nabla(u + \alpha v) = \nabla u + \alpha\nabla v$, ce qui nous conduit naturellement à introduire l'espace des fonctions admettant un gradient faible.

Definition 4.3.
On définit l'espace de Sobolev $\mathrm{H}^1(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions de carré intégrable admettant un gradient faible $\mathrm{H}^1(\Omega) := \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ \nabla u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^d\}$ muni du produit scalaire suivant

$$\begin{aligned}
(u, v)_{\mathrm{H}^1(\Omega)} &:= \int_\Omega u\,\overline{v}\,d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla u^\top \nabla\overline{v}\,d\boldsymbol{x}, \\
\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} &= (\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)})^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

On a bien $\mathrm{H}^1(\Omega) \subset \mathrm{L}^2(\Omega)$ mais, attention, $\mathrm{H}^1(\Omega)$ n'est pas équipé du même produit scalaire que $\mathrm{L}^2(\Omega)$. C'est un point important. C'est un espace dans lequel l'usage du gradient est autorisé, il devrait donc se prêter mieux à l'étude des EDPs que $\mathrm{L}^2(\Omega)$. De plus il est complet pour la norme ci-dessus.

Proposition 4.4.
L'espace $\mathrm{H}^1(\Omega)$ muni du produit scalaire (4.1) est un espace de Hilbert séparable.

Démo :

Il est clair que $\mathrm{H}^1(\Omega)$ muni de $(\ ,\ )_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ est un espace pré-hilbertien. On admettra qu'il est séparable. Il s'agit donc uniquement de démontrer que c'est un espace complet. Considérons une suite $u_n \in \mathrm{H}^1(\Omega), n \geq 1$ qui est de Cauchy au sens de la norme $\|\ \|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$. Notons $\boldsymbol{p}_n \in \mathrm{L}^2(\Omega)^d, n \geq 1$ les gradients faible $\boldsymbol{p}_n := \nabla u_n$. Comme $(u_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \geq 1$ tel que

$$\|u_n - u_m\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_m\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)^d} = \|u_n - u_m\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq \epsilon^2$$

dès que $n, m \geq N$. On en déduit que $(u_n)_{n\geq 1}$ est aussi une suite de Cauchy au sens de la norme $\|\ \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$, et $(\boldsymbol{p}_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^d$ au sens de la norme $\|\ \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^d}$. Les espaces $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\mathrm{L}^2(\Omega)^d$ étant complet d'après le théorème 3.16, il existe $u_\infty \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\boldsymbol{p}_\infty \in \mathrm{L}^2(\Omega)^d$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_\infty - u_n\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{p}_\infty - \nabla u_n\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)^d} = 0. \tag{4.2}$$

Pour conclure, il reste à vérifier que $\boldsymbol{p}_\infty$ est le gradient faible de u_∞. Soit $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega)$ arbitraire. En appliquant la définition 4.1 à u_n, on obtient que $\int_\Omega u_n \mathrm{div}(\boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{p}_n^\top \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} = 0$ pour tout $n \geq 1$. En faisant tendre $n \to +\infty$, puisque la convergence de u_n (resp. $\boldsymbol{p}_n$) a lieu dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ (resp. $\mathrm{L}^2(\Omega)^d$), on en tire

$$\int_\Omega u_\infty \mathrm{div}(\boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{p}_\infty^\top \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega).$$

Ceci démontre que $u_\infty \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ avec $\boldsymbol{p}_\infty = \nabla u_\infty$. En reportant ceci dans (4.2) on obtient que $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_\infty\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = 0$. Bilan : toute suite de Cauchy de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ converge dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$. C'est donc un espace complet. □

En analyse numérique, on rencontre souvent des fonctions qui sont régulières par morceaux et globalement continues. De telles fonctions sont typiques de l'espace $\mathrm{H}^1(\Omega)$.

Proposition 4.5.
On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert polyhédrique borné, et qu'il est partitionné en $\overline{\Omega} = \cup_{j=1}^{\mathrm{J}} \overline{\Omega}_j$ où chaque Ω_j est un ouvert polyhédrique et $\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$ pour $j \neq k$. Si $u \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ vérifie en plus $u|_{\Omega_j} \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}_j) \forall j = 1 \ldots \mathrm{J}$ alors $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.

Démo :

Notons $\boldsymbol{n}_j$ le vecteur normal sortant à Ω_j et $\Gamma_j := \partial\Omega_j$. On pose également $u_j := u|_{\Omega_j}$ et on définit $\boldsymbol{p} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^d$ par $\boldsymbol{p}|_{\Omega_j} = \nabla u_j$ pour tout $j = 1 \ldots \mathrm{J}$. Pour vérifier que $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, on choisit un $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)$ et on part du membre de gauche de la définition 4.1. En décomposant sur les Ω_j, et en appliquant une formule de Stokes (2.13) dans chaque sous-domaine, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u \,\mathrm{div}(\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x} &= \sum_{j=1}^{\mathrm{J}} \int_{\Omega_j} u_j \,\mathrm{div}(\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{\mathrm{J}} - \int_{\Omega_j} \nabla u_j^\top \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_j} u_j \boldsymbol{\varphi}^\top \boldsymbol{n}_j d\sigma \\
&= -\int_\Omega \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} \;+ \sum_{\substack{1\leq j,k\leq \mathrm{J} \\ j\neq k}} \int_{\Gamma_j\cap\Gamma_k} (u_j \boldsymbol{n}_j + u_k \boldsymbol{n}_k)^\top \boldsymbol{\varphi} \, d\sigma
\end{aligned}$$

Ci-dessus, les intégrales de surfaces sont nulles sauf si $\Gamma_j \cap \Gamma_k$ est une portion d'hyperplan (un plan pour $d = 3$, une droite pour $d = 2$, un point pour $d = 1$) d'intérieur non-vide, auquel cas $\boldsymbol{n}_j = -\boldsymbol{n}_k$ et $u_j = u_k$ sur $\Gamma_j \cap \Gamma_k$ par continuité de u. On a donc systématiquement $(u_j\boldsymbol{n}_j + u_k\boldsymbol{n}_k)^\top\boldsymbol{\varphi} = 0$ sur $\Gamma_j \cap \Gamma_k$, de sorte que $\int_\Omega u \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \boldsymbol{p}^\top\boldsymbol{\varphi}d\boldsymbol{x}\forall\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)$ i.e. la définition 4.1 est vérifiée avec $\nabla u = \boldsymbol{p}$. □

4.2 Régularisation et densité

Nous souhaitons maintenant démontrer que les fonctions de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ peuvent être approchées par des fonctions infiniment régulières. Nous commençons par préciser un peu le résultat du lemme 3.17 car, dans le cas d'une fonction dans $\mathrm{H}^1(\Omega) \subset \mathrm{L}^2(\Omega)$, on obtient des propriétés plus fortes en régularisant par convolution.

Lemme 4.6.
Pour ρ_δ comme au lemme 3.17, $u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ arbitraire, et $\omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, on a
i) $u \star \rho_\delta \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ *avec* $\nabla(u \star \rho_\delta) = (\nabla u) \star \rho_\delta$,
ii) $\lim_{\delta\to 0} \|u - u \star \rho_\delta\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)} = 0$,
iii) $\|u - u \star \rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\omega)} \leq \delta\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\omega_\delta)}$ *où* $\omega_\delta := \omega + \operatorname{supp}(\rho_\delta)$.

Démo :
Le théorème de Fubini et quelques changements de variables élémentaires montrent d'une part que $\int_{\mathbb{R}^d}(u\star\rho_\delta)(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d} u(\boldsymbol{x})(\psi\star\rho_\delta)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\forall\psi \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\mathbb{R}^d)$, ainsi que $\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})\star\rho_\delta = \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}\star\rho_\delta)\forall\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\mathbb{R}^d)^d$. Choisissons $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\mathbb{R}^d)^d$ une fonction test arbitraire, et observons que $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}\star\rho_\delta) \subset \operatorname{supp}(\boldsymbol{\varphi}) + \operatorname{supp}(\rho_\delta)$ de sorte que $\boldsymbol{\varphi}\star\rho_\delta$ est encore de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support borné. En utilisant les remarques qui précèdent on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}(u\star\rho_\delta)(\boldsymbol{x})\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{R}^d} u(\boldsymbol{x})\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}\star\rho_\delta)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d}(\nabla u)(\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{\varphi}\star\rho_\delta)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = -\int_{\mathbb{R}^d}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})^\top((\nabla u)\star\rho_\delta)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

En comparant ce calcul avec la caractérisation du gradient faible de la définition 4.1, on obtient $(\nabla u)\star\rho_\delta = \nabla(u\star\rho_\delta)$. En utilisant *i)* du lemme 3.17, on voit que $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d), \nabla u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)^d \Rightarrow u\star\rho_\delta \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d), \nabla(u\star\rho_\delta) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)^d$ et donc $u\star\rho_\delta \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, avec *iii)* du lemme 3.17 on obtient, quand $\delta \to 0$,

$$\|u - u\star\rho_\delta\|^2_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)} = \|u - u\star\rho_\delta\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u - (\nabla u)\star\rho_\delta\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \to 0.$$

Il reste à démontrer *iii)*. Commencons par considérer le cas d'une fonction $v \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$. En appliquant une formule de Taylor au premier ordre on obtient $v(\boldsymbol{x}) - v(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = -\int_0^1 \boldsymbol{y}^\top\nabla v(\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{y})dt$ d'où l'on tire par Cauchy-Schwarz $|v(\boldsymbol{x}) - v(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|^2 \leq \delta^2\int_0^1 |\nabla v(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{y})|^2dt$ pour $|\boldsymbol{y}| \leq \delta$. En reprenant le calcul (3.19) et en utilisant Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}&\|v - v\star\rho_\delta\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)}\\ &\leq \int_\omega\int_{\mathbb{R}^d}|v(\boldsymbol{x}) - v(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|^2\rho_\delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x} \leq \delta^2\int_\omega\int_{\mathbb{R}^d}(\int_0^1 |\nabla v(\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{y})|^2dt)\rho_\delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x}\\ &\leq \delta^2\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 \|\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega-t\boldsymbol{y})}dt\rho_\delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} \leq \delta^2\|\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega_\delta)}.\end{aligned}$$

Dans ce calcul on a utilisé, d'une part $|\boldsymbol{y}| \leq \delta$ sur $\mathrm{supp}(\rho_\delta) \subset \overline{\mathrm{B}}(0,\delta)$, et d'autre part $\omega - t\boldsymbol{y} \subset \omega_\delta$ pour tout $t \in (0,1), \boldsymbol{y} \in \mathrm{supp}(\rho_\delta)$. Pour le cas d'un $u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ pas forcément de classe $\mathscr{C}^\infty$, il suffit d'appliquer ce qui précède à $v = u \star \rho_\epsilon$ et de passer à la limite quand $\epsilon \to 0$. $\square$

Nous pouvons maintenant obtenir un analogue du théorème 3.18 mais pour l'espace de Sobolev $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Nous énonçons d'abord un résultat que nous admettrons. On pourra trouver une démonstration dans [4, §9.2] pour le cas où Ω est de classe $\mathscr{C}^1$. La démonstration dans le cas général est donnée par exemple dans [18, §5.2].

Théorème 4.7.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert lipschitzien de frontière bornée. Alors il existe une application linéaire continue $\mathscr{E} : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\mathscr{E}(u)|_\Omega = u$ pour tout $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.

Dans le résultat ci-dessus, l'égalité $\mathscr{E}(u)|_\Omega = u$ doit biensur être comprise au sens de l'égalité presque partout (pour la mesure de Lebesgue) sur Ω.

Corollaire 4.8.
☞ *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert lipschitzien de frontière bornée. Pour tout $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, il existe une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support borné telle que $\lim_{n\to\infty} \|u - \varphi_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = 0$.*

Démo :
Notons $v := \mathscr{E}(u) \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ où $\mathscr{E}$ est l'opérateur d'extension provenant du théorème 4.7. Considérons une fonction de troncature $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi(\boldsymbol{x}) = 1$ pour $|\boldsymbol{x}| \leq 1$ et $\chi(\boldsymbol{x}) = 0$ pour $|\boldsymbol{x}| \geq 2$ cf lemma 1.7, et posons $\chi_\delta(\boldsymbol{x}) = \chi(\delta\boldsymbol{x})$. Puisque $(\nabla\chi_\delta)(\boldsymbol{x}) = \delta(\nabla\chi)(\delta\boldsymbol{x})$, en posant $v_\delta := v\chi_\delta$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|v - v_\delta\|^2_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)} &= \|(1-\chi_\delta)v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} + \|(1-\chi_\delta)\nabla v - v\nabla\chi_\delta\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}\\
&\leq \|(1-\chi_\delta)v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} + 2\|(1-\chi_\delta)\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} + 2\delta(\sup_{\mathbb{R}^d}|\nabla\chi|)\|v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)},\\
\|v_\delta\|^2_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)} &= \|\chi_\delta v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} + \|\chi_\delta\nabla v + v\nabla\chi_\delta\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}\\
&\leq 2(\sup_{\mathbb{R}^d}|\chi|)\|v\|^2_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)} + 2\delta(\sup_{\mathbb{R}^d}|\nabla\chi|)\|v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)},
\end{aligned}$$

ce qui donne $\lim_{\delta\to 0}\|v - v_\delta\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)} = 0$ par convergence dominée, et $\|v_\delta\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\|v\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)}$ pour tout $\delta \in]0,1[$. Avec ρ_δ comme dans le lemme 3.17, remarquons que $v_\delta \star \rho_\delta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et est à support borné. En appliquant *iii)* du lemme 4.6 à v_δ, on obtient donc $\|v - v_\delta \star \rho_\delta\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|v - v_\delta\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)} + C\delta\|v\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)} \to 0$ quand $\delta \to 0$. Pour conclure, il reste à noter que $\|u - v_\delta \star \rho_\delta\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq \|v - v_\delta \star \rho_\delta\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)} \to 0$ pour $\delta \to 0$, puisque $v|_\Omega = u$. $\square$

4.3 Inégalité de Poincaré

Dans cette section nous souhaitons établir une inégalité permettant de borner la norme L^2 d'une fonction par la norme L^2 de son gradient (modulo des termes auxiliaires) lorsque cette fonction est dans H^1. Ce résultat sera d'une grande importance lorsqu'il s'agira d'analyser l'unicité des solutions d'une EDP elliptique. Nous commencerons par un résultat abstrait d'analyse hilbertienne.

Théorème 4.9 (Compacité faible)**.**
Soit H un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et de la norme $\|\ \|$. Si $u_n \in \mathrm{H}, n \geq 0$ est une suite bornée $\sup_{n\geq 0}\|u_n\| < +\infty$, alors il existe $u_\infty \in \mathrm{H}$ et une sous-suite $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ tel que $\lim_{k\to\infty}(u_{n_k}, v) = (u_\infty, v)$ pour tout $v \in \mathrm{H}$.

Démo :

Soit $M := \sup_{n\geq 0} \|u_n\| < +\infty$. Puisque H est un Hilbert séparable, il existe une base hilbertienne $w_p \in \mathrm{H}, p \geq 0$. Pour chaque $p \geq 0$, notons $u_n^p := (u_n, w_p)$. D'après Cauchy-Schwarz $|u_n^p| \leq \|u_n\| \, \|w_p\| \leq M$, donc $\{u_n^0\}_{n\geq 0}$ est une suite bornée dans $\mathbb{C}$ et on peut en extraire une sous-suite convergente i.e. il existe une fonction strictement croissante $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $u_\infty^0 \in \mathbb{C}$ telle que $\lim_{n\to\infty} |u_\infty^0 - u_{\varphi_0(n)}^0| = 0$.

On procède ensuite par récurrence en supposant des fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ déjà construites telles que, pour tout $j = 0 \dots k$, la fonctions $\varphi_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante et il existe $u_\infty^j \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} |u_\infty^j - u_{\psi_j(n)}^j| = 0 \\ &\text{où} \quad \psi_j := \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_j \end{aligned} \tag{4.3}$$

Par Cauchy-Schwarz on a $|u_{\psi_k(n)}^{k+1}| \leq M$ à nouveau, donc $\{u_{\psi_k(n)}^{k+1}\}_{n\geq 0}$ est une suite bornée dans $\mathbb{C}$, on peut donc en extraire une sous-suite convergente i.e. il existe $u_\infty^{k+1} \in \mathbb{C}$ et une fonction strictement croissante $\varphi_{k+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que (4.3) est vrai pour $j = k+1$.

On considère ensuite $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\psi(k) := \psi_k(k) \forall k \geq 0$ ("extraction diagonale"). De la stricte croissance de chaque φ_j, on déduit la stricte croissance de ψ si bien que $\tilde{u}_n := u_{\psi(n)} \in \mathrm{H}, n \geq 0$ est extraite de $\{u_n\}_{n\geq 0}$. En particulier $\sup_{n\geq 0} \|\tilde{u}_n\| \leq M < +\infty$. De plus en posant $\tilde{u}_n^p := u_{\psi(n)}^p = (\tilde{u}_n, w_p) = (u_{\psi(n)}, w_p)$, la suite $\{\tilde{u}_n^p\}_{n\geq p}$ est par construction extraite de $\{u_{\psi_p(n)}^p\}_{n\geq p}$ de sorte que

$$\lim_{n\to\infty} |u_\infty^p - \tilde{u}_n^p| = 0 \quad \forall p \geq 0. \tag{4.4}$$

Puisque $\{\tilde{u}_n\}_{n\geq 0}$ est bornée par M, on a $|\tilde{u}_n^0|^2 + \dots + |\tilde{u}_n^k|^2 \leq M^2$ pour tout $n, k \geq 0$. En utilisant (4.4) on peut passer à la limite en $n \to \infty$ à k fixé ce qui donne $|u_\infty^0|^2 + \dots + |u_\infty^k|^2 \leq M^2 \; \forall k \geq 0$, et finalement $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_\infty^k|^2 \leq M^2 < +\infty$. En appliquant le Corollaire 3.23, on obtient l'existence de $u_\infty \in \mathrm{H}$ tel que $u_\infty^p = (u_\infty, w_p) \forall p \geq 0$.

Soit enfin $v \in \mathrm{H}$ et $\epsilon > 0$ arbitraire. En notant $v_k := (v, w_k)$ on a $\sum_{k\in\mathbb{N}} |v_k|^2 < +\infty$, donc il existe $p \geq 0$ tel que $v' = v_0 w_0 + \dots + v_p w_p \in \mathrm{H}$ vérifie $\|v - v'\|^2 = \sum_{k=p+1}^{+\infty} |v_k|^2 < (\epsilon/M)^2$. D'après (4.4) il existe $n_\star \geq 0$ tel que $\sum_{k=0}^{p} |u_\infty^p - \tilde{u}_n^p|^2 \leq (\epsilon/\|v\|)^2$. On a donc finalement

$$\begin{aligned} |(\tilde{u}_n - u_\infty, v)| \; &\leq |(\tilde{u}_n - u_\infty, v - v')| + |(\tilde{u}_n - u_\infty, v')| \\ &\leq 2M\epsilon/M + \textstyle\sum_{k=0}^{p} |\tilde{u}_n^k - u_\infty^k| \, |v_k| \\ &\leq 2\epsilon + (\textstyle\sum_{k=0}^{p} |v_k|^2)^{1/2} (\textstyle\sum_{k=0}^{p} |\tilde{u}_n^k - u_\infty^k|^2)^{1/2} \leq 3\epsilon. \end{aligned} \tag{4.5}$$

dès que $n \geq n_\star$. Ceci démontre que $\lim_{n\to\infty} (\tilde{u}_n, v) = (u_\infty, v)$ et, comme $v \in \mathrm{H}$ et $\epsilon > 0$ était choisi arbitrairement, ceci termine la démonstration. □

Dans les conditions du théorème ci-dessus, on dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers u_∞ dans H. Attention, ceci n'implique pas la convergence forte de la suite, c'est-à-dire qu'on a pas a priori $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_\infty\| = 0$. Cette distinction entre convergence faible et forte est caractéristique des espaces de dimension infinie, et nous devrons y prêter attention car les espaces fonctionnels sont le plus souvent de dimension infinie.

Une conséquence directe du théorème précédent est que toute suite bornée dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ contient une sous-suite *faiblement* convergente dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Le résultat suivant nous dit cependant que, si l'on se contente de la norme $\mathrm{L}^2(\Omega)$, on obtient la convergence forte.

Théorème 4.10.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert lipschitzien borné. Si* $u_n \in \mathrm{H}^1(\Omega), n \geq 0$ *est une suite bornée* $\sup_{n\geq 0} \|u_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} < +\infty$, *alors il existe* $u_\infty \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ *et une sous-suite* $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ *tels que* $\lim_{k\to\infty}(u_{n_k}, v)_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = (u_\infty, v)_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ *pour tout* $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ *et*

$$\lim_{k\to\infty} \|u_\infty - u_{n_k}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 0.$$

Démo :
On peut commencer par appliquer le théorème 4.9 dans l'espace $\mathrm{H}^1(\Omega)$ ce qui fournit l'existence d'un $u_\infty \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ et d'une sous-suite $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que $\lim_{k\to\infty}(u_{n_k}, v)_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = (u_\infty, v)_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. Posons $\tilde{u}_k := \chi\mathscr{E}(u_{n_k} - u_\infty)$ où $\mathscr{E} : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ est l'opérateur d'extension continu du théorème 4.7, et $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\chi(\boldsymbol{x}) = 1$ pour $\boldsymbol{x} \in \Omega$ ainsi que $\mathrm{supp}(\chi) \subset \mathrm{B}$ pour une boule bornée B (existence de χ garantie par le lemme 1.7). Par continuité de $\mathscr{E}$, il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\chi\mathscr{E}(u)\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \forall u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ de sorte que

$$\sup_{p\geq 0} \|\tilde{u}_p\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)} < +\infty, \quad \mathrm{supp}(\tilde{u}_k) \subset \mathrm{B}. \tag{4.6}$$

Nous allons démontrer que $\lim_{k\to\infty} \|\tilde{u}_k\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = 0$, et comme $\|u_{n_k} - u_\infty\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \|\tilde{u}_k\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$ ceci terminera la preuve. Fixons un $\epsilon > 0$, et considérons les fonctions convolées $\tilde{u}_k \star \rho_\delta(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\tilde{u}_k(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$ où ρ_δ est définie comme dans le lemme 3.17. On a $\|\tilde{u}_k - \tilde{u}_k \star \rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta \sup_{p\geq 0} \|\tilde{u}_p\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)}$ d'après *iii)* du lemme 4.6, donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|\tilde{u}_k - \tilde{u}_k \star \rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leq \epsilon \quad \forall k \geq 0. \tag{4.7}$$

En posant $\mathrm{K} := \mathrm{B} + \mathrm{supp}(\rho_\delta)$, on a $\mathrm{supp}(\tilde{u}_k \star \rho_\delta) \subset \mathrm{K}$ pour tout $k \geq 0$ d'après (4.6). Par ailleurs, pour tout $v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$, l'application $w \mapsto (\chi\mathscr{E}(w), v)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$ est continue puisque $|(\chi\mathscr{E}(w), v)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}| \leq C\|v\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)}\|w\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ par Cauchy-Schwarz. En appliquant le théorème de Riesz cf §3.4, il existe $\tilde{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ tel que $(\chi\mathscr{E}(w), v)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = (w, \tilde{v})_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \forall w \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. On en tire $(\tilde{u}_k, v)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = (u_{n_k} - u_\infty, \tilde{v})_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \to 0$ pour $k \to \infty$. Ceci démontre

$$\lim_{k\to\infty} (\tilde{u}_k, v)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = 0 \forall v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d). \tag{4.8}$$

Si l'on choisit $v(\boldsymbol{y}) = \rho_\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ et que l'on applique (4.8), on obtient $\lim_{k\to\infty} \tilde{u}_k \star \rho_\delta(\boldsymbol{x}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$. Par ailleurs, en appliquant Cauchy-Schwarz et (4.6), on a $|\tilde{u}_k \star \rho_\delta(\boldsymbol{x})| \leq \|\rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}\|\tilde{u}_k\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \sup_{p\geq 0} \|\tilde{u}_p\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \forall k \geq 0$. Puisque $\mathrm{supp}(\tilde{u}_k \star \rho_\delta) \subset \mathrm{K}\ \forall k \geq 0$ et que K est borné, on peut appliquer le théorème de convergence dominée sur K, ce qui fournit $\lim_{k\to\infty} \|\tilde{u}_k \star \rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = 0$. En résumé on a obtenu

$$\limsup_{k\to\infty} \|\tilde{u}_k\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leq \epsilon + \lim_{k\to\infty} \|\tilde{u}_k \star \rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \epsilon.$$

On obtient donc finalement $0 \leq \lim_{k\to\infty} \|\tilde{u}_k\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leq \limsup_{k\to\infty} \|\tilde{u}_k\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = 0$ puisque $\epsilon > 0$ était choisi arbitrairement petit. □

On peut résumer le résultat précédent en disant que, si Ω est borné, de toute suite (fortement) bornée dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite (fortement) convergente dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Attention, l'hypothèse selon laquelle Ω doit être borné est essentielle, et le théorème précédent tombe en défaut si Ω est un domaine non-borné. On donne maintenant une application très importante du théorème de compacité que nous avons démontré.

Théorème 4.11 (Inégalité de Poincaré).
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine lipschitzien borné, et une application continue $\Phi : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ telle que ($\Phi(v) = 0$ et $\nabla v = 0$) $\Rightarrow v = 0$, et $|\Phi(\lambda v)| = |\lambda|\,|\Phi(v)| \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Alors il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\alpha \|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le |\Phi(u)|^2 + \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \quad \forall u \in \mathrm{H}^1(\Omega).$$

Démo :

Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite $u_n \in \mathrm{H}^1(\Omega), n \ge 0$ telle que $\|u_n\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 1$ et $\lim_{n\to\infty} |\Phi(u_n)|^2 + \|\nabla u_n\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 0$. D'après le théorème 4.10, il existe une sous-suite $\tilde{u}_k = u_{n_k}$ et $u_\infty \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ telle que $\lim_{k\to\infty} (\tilde{u}_k - u_\infty, v)_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = 0 \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ et $\lim_{k\to\infty} \|\tilde{u}_k - u_\infty\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 0$. Par continuité dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, on a $\|u_\infty\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \|\tilde{u}_k\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 1$ d'où $u_\infty \ne 0$.

D'autre part, choisissons $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)$. On a $|\int_\Omega u_\infty \mathrm{div}(\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}| = \lim_{k\to\infty} |\int_\Omega \tilde{u}_k \mathrm{div}(\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}| = \lim_{k\to\infty} |\int_\Omega \boldsymbol{\varphi}^\top \nabla \tilde{u}_k d\boldsymbol{x}| = 0$ car $\lim_{k\to 0} \|\nabla \tilde{u}_k\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 0$, donc d'après la définition 4.1 du gradient faible, on obtient $\nabla u_\infty = 0$ sur Ω. Ceci implique la convergence de $\tilde{u}_k$ dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ car $\|u_\infty - \tilde{u}_k\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = \|u_\infty - \tilde{u}_k\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\nabla \tilde{u}_k\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \to 0$.

Par continuité de $\Phi()$ et convergence dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, on a $0 \le |\Phi(u_\infty)|^2 \le \lim_{k\to\infty} |\Phi(\tilde{u}_k)|^2 + \|\nabla \tilde{u}_k\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 0$ d'où $\Phi(u_\infty) = 0$. Comme, d'autre part $\nabla u_\infty = 0$, on en déduit $u_\infty = 0$ ce qui fournit une contradiction avec ce qui précède (car alors $\lim_{k\to\infty} \|\tilde{u}_k\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 0$) et conclut la preuve. □

Le résultat précédent amène naturellement à s'intérroger sur l'ensemble des $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ vérifiant $\nabla v = 0$. On sait que les fonctions régulières à gradient nulle sont les fonctions localement constantes. Ce résultat se généralise à $\mathrm{H}^1(\Omega)$.

Lemme 4.12.
Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, les $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ vérifiant $\nabla u = 0$ sur Ω sont exactement les fonctions constantes sur chaque composante connexe de Ω.

Démo :

Quitte à décomposer Ω en composantes connexes et à restreindre u à chacune de ces composantes, on peut supposer Ω connexe sans nuire à la généralité. Prenons un ensemble ouvert borné $\overline{\omega} \subset \Omega$ arbitraire, considérons une fonction $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support borné telle que $\chi(\boldsymbol{x}) = 1$ si $\boldsymbol{x} \in \overline{\omega}$, et $\chi(\boldsymbol{x}) = 0$ si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$, fonction dont l'existence est garantie par le lemme 1.7. Posons $\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x})\chi(\boldsymbol{x})$ pour $\boldsymbol{x} \in \Omega$ et $\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = 0$ pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$, de sorte que $\tilde{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ et $\tilde{u}|_\omega = u|_\omega$. Notons enfin $\omega_\delta = \{\boldsymbol{x} \in \omega,\ \mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta) \subset \omega\}$. Par application de *iii)* lemme 4.6, on a $\|u - \tilde{u} \star \rho_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\omega_\delta)} \le \delta \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\omega)} = 0$. On en déduit que $u|_{\omega_\delta} = \tilde{u} \star \rho_\delta|_{\omega_\delta} \in \mathscr{C}^\infty(\omega_\delta)$ pour tout $\delta > 0$. Comme $\omega = \cup_{\delta > 0} \omega_\delta$, on conclut que $u \in \mathscr{C}^\infty(\omega)$, et comme ceci est vrai pour tout ouvert borné $\omega \subset \Omega$, on en déduit finalement que $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. Comme par ailleurs $\nabla u = 0$ sur Ω connexe, il reste à appliquer le lemme 1.9 pour conclure que u est constante sur Ω tout entier. □

En utilisant le lemme précédent, nous proposons une application concrète de l'inégalité de Poincaré avec le choix $\Phi(u) = \int_\Omega u\, d\boldsymbol{x} / |\Omega|$ en notant $|\Omega| := \int_\Omega d\boldsymbol{x}$ le volume de Ω.

Corollaire 4.13.
Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert lipschitzien borné et connexe, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\alpha \|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le |\int_\Omega u d\boldsymbol{x} / |\Omega||^2 + \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ pour tout $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.

4.4 Espaces d'ordre supérieur

Par construction, les éléments de l'espace de Sobolev $\mathrm{H}^1(\Omega)$ admettent des dérivées partielles d'ordre un (gradient). En adoptant une définition récursive on peut également introduire des espaces admettant des dérivée partielles faibles d'ordre supérieur.

Definition 4.14.
Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et tout entier $k \geq 1$, on définit $\mathrm{H}^k(\Omega) := \{v \in \mathrm{H}^{k-1}(\Omega),\ \partial_{x_j} v \in \mathrm{H}^{k-1}(\Omega)\ \forall j = 1\dots d\}$. Il s'agit d'un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire et de la norme suivants

$$(u,v)_{\mathrm{H}^k(\Omega)} := \textstyle\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega \partial^\alpha_{\boldsymbol{x}} u\, \partial^\alpha_{\boldsymbol{x}} \overline{v}\, d\boldsymbol{x},$$
$$\|u\|_{\mathrm{H}^k(\Omega)} := (\textstyle\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha_{\boldsymbol{x}} u\|^2_{\mathrm{H}^k(\Omega)})^{1/2}.$$

Démo :
Comme pour la preuve de la proposition 4.4, seul la complétude de ces espaces est non-triviale. On le démontre par récurrence. Nous savons déjà que le résultat est vrai pour $k = 1$, et nous supposons donc (hypothèse de récurrence) que $\mathrm{H}^r(\Omega)$ est complet pour tout $r = 1,\dots,k-1$.

Supposons que $u_n \in \mathrm{H}^k(\Omega), n \geq 0$ est de Cauchy au sens de la norme $\|\ \ \|_{\mathrm{H}^k(\Omega)}$. On sait déjà qu'elle est de Cauchy au sens de la norme $\|\ \ \|_{\mathrm{H}^{k-1}(\Omega)}$ et $\mathrm{H}^{k-1}(\Omega)$ est complet par hypothèse de récurrence, donc il existe $u_\infty \in \mathrm{H}^{k-1}(\Omega)$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_\infty\|_{\mathrm{H}^{k-1}(\Omega)} = 0$. Soit $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ un multi-indice arbitraire tel que $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d = k$. On sait que $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{x}} u_n$ est de Cauchy $\|\ \ \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ et comme $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est complet, il existe $p_\infty \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|p_\infty - \partial^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{x}} u_n\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 0$. Il nous suffit de démontrer que $p_\infty = \partial^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{x}} u_\infty$. Comme $k = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d \geq 1$, on a $\alpha_j \geq 1$ pour au moins un $j \in \{1,\dots,d\}$. Définissons le multi-indice $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\dots,\beta_d)$ par $\beta_\ell = \alpha_\ell$ si $\ell \neq j$, et $\beta_j = \alpha_j - 1$. On a alors $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{x}} = \partial_{x_j} \partial^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{x}}$ si bien que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi\, p_\infty d\boldsymbol{x} &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi \partial^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{x}} u_n d\boldsymbol{x} = -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \partial_{x_j} \varphi \partial^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{x}} u_n d\boldsymbol{x} \\ &= \int_\Omega \partial_{x_j} \varphi\, \partial^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{x}} u_\infty d\boldsymbol{x} \qquad \forall \varphi \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega).\end{aligned}$$

On en tire donc finalement que $p_\infty = \partial^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{x}} u_\infty$ de sorte que $\lim_{n\to\infty} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{x}} u_\infty - \partial^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{x}} u_n\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 0$ et comme ceci est vrai pour tout $\boldsymbol{\alpha}$, on en tire finalement le résultat voulu. □

Notons que si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$ pour $k \geq 2$ et $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)$, en appliquant la définition de la dérivation faible en cascade on obtient $\int_\Omega \varphi \partial_{x_1} \partial_{x_2} u d\boldsymbol{x} = \int_\Omega u \partial_{x_2} \partial_{x_1} \varphi d\boldsymbol{x} = \int_\Omega u \partial_{x_1} \partial_{x_2} \varphi d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \varphi \partial_{x_2} \partial_{x_1} u d\boldsymbol{x}$. Comme $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega)$ est arbitraire, on en déduit par densité (théorème 3.18) que le lemme 1.3 (lemme de Schwarz) encore vrai au sens faible i.e.

$$\partial_{x_1} \partial_{x_2} u = \partial_{x_2} \partial_{x_1} u. \tag{4.9}$$

Il est clair qu'on a les inclusions $\mathrm{H}^{k+1}(\Omega) \subset \mathrm{H}^k(\Omega)$ de sorte que les espaces de Sobolev $(\mathrm{H}^k(\Omega))_{k\geq 0}$ constituent une famille d'espaces emboités les uns dans les autres comme des poupées russes. Dire d'une fonction u qu'elle appartient à un espace $\mathrm{H}^k(\Omega)$ pour un k plus élevé, c'est dire qu'elle admet des dérivées partielles d'ordre plus élevé. Statuer sur les k tels que $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, c'est donc une façon de mesurer la régularité de cette fonction. D'ailleurs, pour un $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ borné, on a $\mathscr{C}^k(\overline{\Omega}) \subset \mathrm{H}^k(\Omega)$. A priori $\mathrm{H}^k(\Omega) \not\subset \mathscr{C}^k(\overline{\Omega})$ mais le résultat suivant, que l'on admettra, établit une inclusion de ce type sous des hypothèses raisonnables. On trouvera une démonstration de ce résultat dans [18, I §6].

Proposition 4.15 (Injection de Sobolev).
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert lipschitzien borné. Pour* $k > m + d/2$ *on a* $\mathrm{H}^k(\Omega) \subset \mathscr{C}^m(\overline{\Omega})$ *et cette injection est continue : il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq m} \sup_{\Omega} |\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} u| \leq C \|u\|_{\mathrm{H}^k(\Omega)} \quad \forall u \in \mathrm{H}^k(\Omega).$$

Puisque les éléments des espaces de Sobolev sont des fonctions définies partout modulo un ensemble de mesure nul, les inclusions ci-dessus doivent s'entendre au sens où, pour tout $\dot{u} \in \mathrm{H}^k(\Omega)$ classe d'équivalence modulo l'égalité presque partout, il existe un $u \in \dot{u}$ tel que $u \in \mathscr{C}^m(\overline{\Omega})$.