Master de sciences et technologie 1 — MU4MA029
Mention : mathématiques et applications — 2021-2022

TP 5 : Masse et rigidité

En cohérence avec les feuilles de TP précédentes, un maillage sera ici représenté par deux tableaux : `vtx` représentant les noeuds, et `elt` représentant les éléments (triangles en 2D, arètes en 1D).

Exercice 1 : matrice de masse

Question 1.1 Ecrire une fonction `Mloc` prenant en argument d'entrée un tableau de noeuds `vtx`, ainsi qu'un tableau `e` de 3 entiers représentant un triangle. En notant $|\tau|$ l'aire du triangle représenté par `e`, la fonction `Mloc` doit renvoyer en sortie la matrice de masse élémentaire 2D définie par :

$$\mathrm{M}^{\mathrm{loc}} = \frac{|\tau|}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

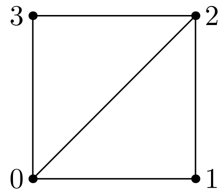
Question 1.2 Modifier la fonction `Mloc` pour qu'elle puisse également prendre en argument d'entrée le tableau de noeuds `vtx` ainsi qu'un tableau `e` de 2 entiers représentant une arète. Dans ce cas, si $|\gamma|$ est la longueur de l'arète représentée par `e`, la fonction `Mloc` doit renvoyer en sortie la matrice de masse élémentaire 1D définie par

$$\mathrm{M}^{\mathrm{loc}} = \frac{|\gamma|}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Question 1.3 Ecrire une fonction `Mass` prenant en argument les deux tableaux (`vtx`, `elt`) et renvoyant en sortie une variable de type `coo_matrix` modélisant la matrice de masse associée au maillage, voir le module `scipy.sparse`. Cette fonction devra fonctionner pour un maillage 2D en triangle aussi bien que pour un maillage 1D en arètes.

Question 1.4 On considère le maillage ci-dessous. Calculez la matrice de masse de cette triangulation au moyen de la fonction `Mass`. Calculez l'expression de cette même matrice de masse par un calcul à la main. Vérifiez que les deux résultats coincident. Faites la même chose en considérant cette fois-ci le maillage du bord.

```
vtx =
[[0., 0.]
 [1., 0.]
 [1., 1.]
 [0., 1.]]
```



Question 1.5 Testez l'assemblage de votre matrice de masse en calculant l'aire du maillage `maillage6.msh` au moyen de sa matrice de masse. Faites de même pour calculer la longueur du bord de ce maillage.

Exercice 2 : matrice de rigidité

Question 2.1 Reprenez les questions 1.1 et 1.2 et écrivez cette fois une fonction `Kloc` avec les même arguments d'entrée que `Mloc` mais qui renvoie en sortie la matrice de rigidité élémentaire $\mathrm{K}^{\mathrm{loc}} = (\mathrm{K}^{\mathrm{loc}}_{j,k})_{j,k=1,\dots,d+1}$. Cette routine doit être fonctionelle pour les maillages 2D. On rappelle que, sur un triangle τ, cette matrice est définie par

$$\begin{aligned} \mathrm{K}^{\mathrm{loc}}_{j,k} &= \int_\tau (\nabla\varphi_j)^\top(\nabla\varphi_k)\, d\boldsymbol{x} \\ &= (\nabla\varphi_j)^\top(\nabla\varphi_k)\,|\tau| \end{aligned}$$

où les φ_j sont les fonctions de formes dans l'élément dont le gradient est un champ de vecteur constant (puisque les φ_j sont des fonctions affines).

Question 2.2 Ecrire une fonction `Rig` prenant en argument les deux tableaux (`vtx`, `elt`) et renvoyant en sortie une variable de type `coo_matrix` modélisant la matrice de rigidité associée au maillage. Cette fonction devra fonctionner en 2D.

Question 2.3 On reprend le maillage à deux éléments de la question 1.4. Calculez la matrice de rigidité sur ce maillage à l'aide de la fonction `Rig`. Calculez l'expression de cette même matrice à la main. Vérifiez que les deux résultats coincident.

Question 2.4 On considère le maillage du fichier `maillage6.msh`. On note Ω le domaine de calcul et K la matrice de rigidité associée assemblée au moyen de la fonction `Rig`. On se donne deux fonctions $u_k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}_k^\top\boldsymbol{x} + \beta_k, k = 1,2$ où les $\boldsymbol{\alpha}_k \in \mathbb{R}^2, \beta_k \in \mathbb{R}$ sont tirés aléatoirement. On note $\mathrm{U}_k = (u_k(\boldsymbol{x}_j))_{j=1,\dots,\mathrm{N}}$ les vecteurs de valeurs nodales (où N = le nombre de noeuds dans le maillage). Justifiez à la main que l'on a l'expression suivante

$$\mathrm{U}_1^\top \cdot \mathrm{K} \cdot \mathrm{U}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1^\top\boldsymbol{\alpha}_2\,|\Omega|$$

et vérifiez que cette relation est bien vérifiée avec votre code pour chaque tirage aléatoire des coefficients.