TP 6 : Problème de Neumann/Dirichlet

En cohérence avec les feuilles de TP précédentes, un maillage sera ici représenté par deux tableaux : `vtx` représentant les noeuds, et `elt` représentant les éléments (triangles en 2D, arètes en 1D).

Exercice 1 : calcul de vecteur normal

On considère ici les maillages générés au moyen de la fonction `GenerateMesh` écrite pour l'exercice 2 du TP no.2.

Question 1.1 Ecrire une fonction qui prend en argument un couple `(vtx,belt)` qui représente le bord d'un maillage généré au moyen de `GenerateMesh`, et qui renvoie en sortie un tableau `nrm` de `nb_belt` vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tel que `nrm[j]` est le vecteur normal sortant à l'élément no.`j` sur le bord.

Question 1.2 Représentez graphiquement le champ de vecteur normal sortant au bord du maillage obtenu en appellant `GenerateMesh('rectangle.msh'` $, 2\pi, \pi, 10, 10)$.

Exercice 2 : problème de Neumann

Dans cet exercice on considère le domaine de calcul $\Omega =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ et le maillage correspondant obtenu avec la routine `GenerateMesh`. On notera $\boldsymbol{n}$ le champ de vecteur normal sortant au bord de Ω.

Question 2.1 On se donne $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^2$, $|\boldsymbol{d}| = 1$, un paramètre $\mu > 0$, on considère la fonction $u^{\mathrm{N}}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{x}) := \sinh(\mu\, \boldsymbol{d} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c))$ avec $\boldsymbol{x}_c = (\pi, \pi/2)$. Réalisez un affichage graphique de $u^{\mathrm{N}}_{\mathrm{ex}}$ sur le domaine Ω en prenant $\boldsymbol{d} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $\mu = 2$. Que vaut $-\Delta u^{\mathrm{N}}_{\mathrm{ex}} + \mu^2 u^{\mathrm{N}}_{\mathrm{ex}}$? Quelle est la solution du problème aux limites suivant ?

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \Delta u - \mu^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_{\boldsymbol{n}} u = \partial_{\boldsymbol{n}} u^{\mathrm{N}}_{\mathrm{ex}} \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Question 2.2 Calculez les valeurs nodales de la solution numérique u^{N}_h par éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange pour le problème (1).

Question 2.3 Note $\Pi_h : \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) \to \mathrm{V}_h(\Omega)$ l'opérateur d'interpolation $\mathbb{P}_1$-Lagrange. Réalisez un affichage graphique que $u_h^{\mathrm{N}} - \Pi_h(u_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{N}})$. Cette fonction doit être petite devant 1 sur tout Ω pour un maillage suffisamment fin.

Question 2.4 Tracez la courbe $h \mapsto \|u_h^{\mathrm{N}} - \Pi_h(u_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{N}})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}/\|\Pi_h(u_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{N}})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$, où h désigne le pas du maillage. Quel est le taux de convergence ? Tracez sur la même figure la courbe $h \mapsto \|u_h^{\mathrm{N}} - \Pi_h(u_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{N}})\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}/\|\Pi_h(u_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{N}})\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$. Quel est le taux de convergence de cette deuxième courbe ?

Exercice 3 : problème de Dirichlet

Dans cet exercice on se place à nouveau dans le même domaine $\Omega =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ qu'à l'exercice précédent, et $\mu > 0$ désigne à nouveau un paramètre fixe.

Question 2.1 On considère à nouveau la fonction $f(\boldsymbol{x}) = \sin(x_1)\sin(x_2)$. Calculez Δf. Quelle est la solution $u_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x})$ du problème suivant ?

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u + \mu^2 u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2}$$

Question 2.2 Résolvez le problème (2) par éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange. On notera u_h^{D} la solution discrète obtenue.

Question 2.3 Réalisez un affichage graphique que $u_h^{\mathrm{D}} - \Pi_h(u_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{D}})$ en prenant $\mu = 2$.

Question 2.4 Calculez $\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2$ à la main. Tracez la courbe $h \mapsto \|u_h^{\mathrm{D}} - \Pi_h(u_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{D}})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}/\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$, où h désigne le pas du maillage, et avec la valeur $\mu = 2$.