SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Mathématiques Discrètes

ANNÉE 2020-2021 | **Examen du 19 janvier 2021** | LU2IN005 Durée : 1h30

N° d'anonymat : 363

Documents, calculettes et téléphones interdits. La note (entre 0 et 20) est le minimum entre 20 et la somme des points obtenus (entre 0 et 23). **Le barème est donné à titre indicatif.**

Exercice 1 (Total : 2½ points)

(1) (1 point) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 3x^2$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.

$f(x) = f(y) \not\Rightarrow x = y$ (si $x = -y$) donc f n'est pas injective
Soit $y \in \mathbb{R}$, il existe x tel que $f(x) = y$ donc f est surjective
f n'est pas bijective
g n'est pas injective (si $x = 1,2$ et $y = 1,3$, $g(x) = g(y)$)
si $y = 3,2$, il n'existe aucun x tel que $g(x) = y$ donc g n'est pas surjective
injective

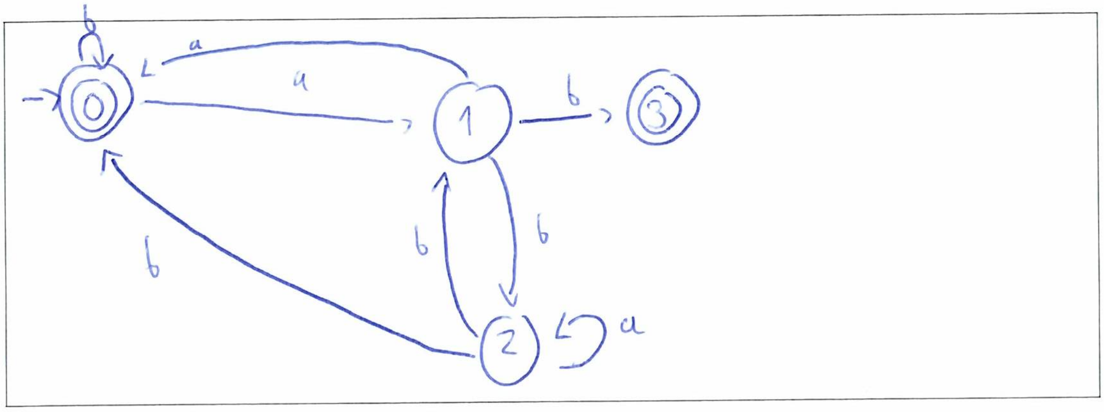
(2) (1½ points) Soit E un ensemble et $\preceq$ une relation d'ordre sur E. Montrer que $\preceq$ est un ordre bien fondé si et seulement si toute partie non vide de E admet un élément minimal.

~~Soit A ⊂ E~~ Supposons que une partie A non vide E n'admet pas d'élément minimal.

alors $\forall x \in A$, $\exists x' \in A$ tel que $x' \precneq x$
et $x'' \in A$ tel que $x'' \precneq x'$
Ainsi de suite ...
On forme ici une suite infini décroissante dans E, donc
E n'est pas un ordre bien fondé.
Contradiction donc l'implication est vraie

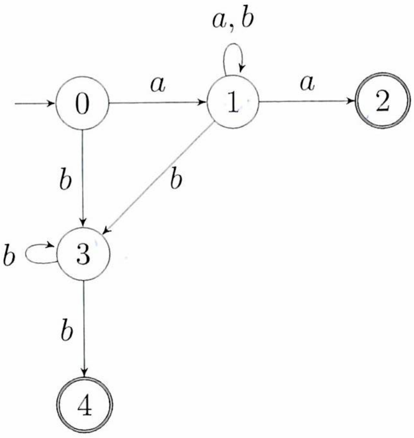
Exercice 2 (Total : 13 points)

(1) (2 points) Construire un automate fini sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ reconnaissant le langage $\mathcal{L} = \{w \in A^* \mid \text{le nombre de } b \text{ séparant deux } a \text{ est pair}\}$.

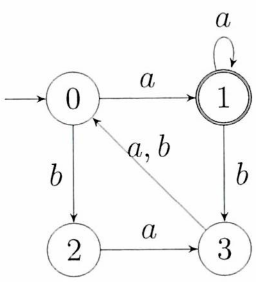


(2) On considère les deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ci-dessous :

$\mathcal{B}$



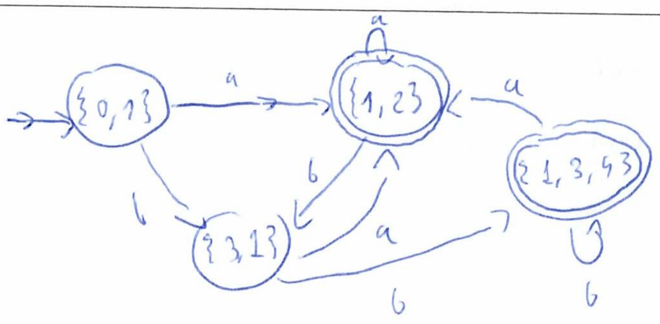
$\mathcal{A}$:



a. ($\frac{1}{2}$ point) L'automate $\mathcal{A}$ est-il déterministe ? complet ? L'automate $\mathcal{B}$ est-il déterministe ? complet ? Justifier.

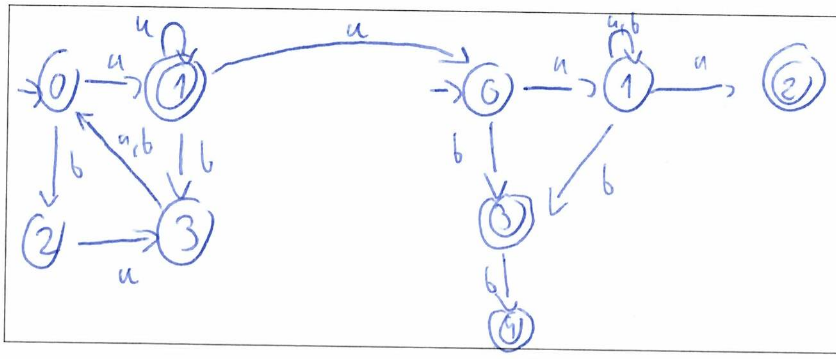
l'automate A st deterministe mais pas complet
l'automate B st ni deterministe ni complet

b. (3 points) Si l'un ou les deux automates ci-dessus sont non-déterministes, le ou les déterminiser, en explicitant clairement votre construction.



On construit cet automate déterminisé en construisant ces états comme des ensemble d'états de B, pour les transitions, on regarde vers quel ensemble d'état chaque transition emmène un ensemble d'état.

c. ($1\frac{1}{2}$ points) Construire un automate reconnaissant le langage $L(\mathcal{A}).L(\mathcal{B})$.



d. (3 points) En utilisant la méthode du cours, donner une expression rationnelle équivalente au langage $L(\mathcal{A})$.

$L_0 = aL_1 + bL_2$ (1)

$L_1 = aL_1 + bL_3 + \varepsilon$ (2)

$L_2 = aL_3$ (3)

$L_3 = aL_0 + bL_0$ (4)

On applique le lemme d'Arden à (2) : $L_1 = bL_3(a+\varepsilon)^*$

On remplace L_1 et L_2 dans (1)

$L_0 = abL_3(a+\varepsilon)^* + baL_3$

$= L_3(ab(a+\varepsilon)^* + ba)$

on peut remplacer dans la 4

$L_3 = aL_3(ab(a+\varepsilon)^* + ba) + bL_3(ab(a+\varepsilon)^* + ba)$

$= L_3(\cancel{ab}\,ab(a+\varepsilon)^* + ba)(a+b)$

On rappelle que pour un mot u sur un alphabet A, $|u|$ désigne la taille du u. On se place sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. On définit le langage $\mathcal{L}_1 = \{u.a^n \mid u \in A^*, |u| = n\}$

(3) (½ point) Donner trois mots de $\mathcal{L}_1$.

ε, ba et $bbaa$ appartiennent à L_1

(4) (2 points) Le langage $\mathcal{L}_1$ est-il reconnaissable ? Démontrer précisément votre réponse.

L_1 est reconnaissable si il existe un automate tel que cet automate accepte L_1

Supposons que L_1 est reconnaissable par A

~~alors A a au moins n+2 états~~

alors A doit "contrôler" la taille de u dans une première partie d'automate.

Le problème, pour vérifier si ce qui suit est a^n, il faut n états

l'automate n'est donc pas un automate fini, donc L_1 n'est pas reconnaissable

(5) (½ point) Donner un langage $\mathcal{L}$ reconnaissable tel que $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$.

$L = \{ u \cdot a^n , n \in \mathbb{N} \}, u \in A^* \}$

Exercice 3 (Total : $2\frac{1}{2}$ points)

(1) (1 point) Pour F et G deux formules de la logique propositionnelle, on note $F \sim G$ si F est sémantiquement équivalente à G (on dit aussi F est logiquement équivalente à G).

On pose $F = \neg p \to (q \wedge \neg q)$ et $G = p$. A-t-on $F \sim G$? Justifier précisément la réponse.

~~Soit p = 1, alors ¬p = 0, et ¬p → q (q une expression booleenne) est vrai pour toute q~~

si $p = 0$ et $q = 0$ alors $(\neg p \to (q \wedge \neg q)) = 1$

or $p = 0$ donc on n'a pas $F \sim G$

(2) On note $F \models G$ si G est conséquence sémantique de F.

a. ($\frac{1}{2}$ point) Donner la définition mathématique de $F \models G$.

$F \models G$ si ~~F(A) → G(A)~~

$F(r) = 1 \to G(r) = 1$ (r une expression booleenne)

On étend la notion de conséquence sémantique aux ensembles de formules.

b. (1 point) On pose $\mathcal{F} = \{p \to \neg r, \neg r \to p, p \to q, \neg p\}$ et $G = \neg r \to q$. A-t-on $\mathcal{F} \models G$? Jusitifier précisément la réponse.

~~prenons~~ soit si $p = 0$, $q = 1$ et $r = 1$

On a

$p \to \neg r = 1$, $\neg r \to p = 1$, $p \to q = 1$ et $\neg p = 1$

or $\neg r \to q = 0$

donc il n'y a pas de conséquence semantique

Exercice 4 (Total : 5 points)

(1) (½ point) Donner une forme normale conjonctive et un forme normale disjonctive de l'expression booléenne $\overline{x+y}+z$.

FNC $= (x+y+z)(\bar{x}+y+z)(x+\bar{y}+z)$

FND $= \bar{x}\bar{y}z + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + xyz$

(2) (1 point) Montrer que $(\overline{x+y}+z)\cdot(z+\overline{x})\cdot(x+y+z) = z$.

On a $(\bar{x}\bar{y}+z)(z+\bar{x})(x+y+z)$

$= (\bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y} + z + z\bar{x})(x+y+z)$

$= (\bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z + zx + zy + z + zy + z\bar{x})$

$= (\bar{x}\bar{y}z + zy + zx + z + z\bar{x})$

$= z(\bar{x}\bar{y} + y + x + 1 + \bar{x}) = z$

(3) La réserve de chocolat a disparu ... Elie, Léa et Emilio sont soupçonnés d'avoir mangé le chocolat. On suppose que :

— (*i*) Si Elie ou Léa (l'un des deux au moins) a mangé du chocolat alors Emilio aussi.

— (*ii*) Si Emilio n'a pas mangé de chocolat alors Léa n'en a pas mangé non plus.

— (*iii*) L'un des trois au moins a mangé du chocolat.

On désigne par les symboles p, q et r les propositions suivantes :

— p : « *Léa a mangé du chocolat.* »

— q : « *Elie a mangé du chocolat.* »

— r : « *Emilio a mangé du chocolat.* »

a. (1 point) Formaliser les trois hypothèses ci-dessus par trois formules F_1, F_2 et F_3 de la logique des propositions.

$F_1 = p \vee q \to r$

$F_2 = \neg r \to \neg p$

$F_3 = p \vee q \vee r$

b. ($1\frac{1}{2}$ points) Soit $\mathbf{I}$ une interprétation quelconque. Exprimer $\mathbf{I}(F_1)$, $\mathbf{I}(F_2)$ et $\mathbf{I}(F_3)$ en fonction de $\mathbf{I}(p)$, $\mathbf{I}(q)$ et $\mathbf{I}(r)$.

$x = p \quad y = q \quad z = r$

$I(F_1) = (\overline{x + y}) \cancel{+} \cancel{y} + z = \bar{x}\,\bar{y} + z$

$I(F_2) = z + \bar{x}$

$I(F_3) = x + y + z$

c. (1 point) Que peut-on en déduire sur Emilio ? sur Léa ? sur Elie ?

si ils disent la verité,

~~emilio a mangé du chocolat~~

alors $\bar{x}\,\bar{y}+z\,(z+\bar{x})(x+y+z)=1$

or d'après une question précédente, cela vaut z

donc si Emilio a mangé du chocolat les 3 disent la verité,

sinon, au moins un ment