

Chapitre 2

Géométrie

Nous avons vu comment définir une notion de régularité pour les fonctions de plusieurs variables. Nous allons développer une notion de régularité pour les domaines géométriques. Ceci nous permettra en particulier de détailler la notion de condition au bord que nous avons évoqué au paragraphe précédent. Nous énoncerons le théorème de Stokes, outil très important en analyse des EDPs. Puisque ce qui nous intéresse ici est la géométrie, on pourra considérer dans tout ce paragraphe que $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{R} . Le lecteur désireux d'approfondir les thèmes abordés dans ce chapitre pourra consulter [13, Chap.9],[5, chap.2-4] ou bien [2, chap.6 & 10].

2.1 Domaine à bord régulier

Rappelons qu'une matrice à coefficients réels $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$ est dite orthogonale si et seulement si ses vecteur colonnes forment une base orthonormée ce qui équivaut à $U^T U = \text{Id}$.

Definition 2.1.



Un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit de classe \mathcal{C}^k (resp. \mathcal{C}^∞ , resp. lipschitzien) si pour tout point du bord $\mathbf{a} \in \partial\Omega$, il existe une matrice orthogonale $U_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, une boule ouverte $B_{\mathbf{a}}$ centrée en \mathbf{a} , et une fonction $h_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k (resp. \mathcal{C}^∞ , resp. lipschitzienne) telle que, pour $\mathbf{x} = \mathbf{a} + U_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, z)$ avec $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}, z \in \mathbb{R}$, on a :

- $\mathbf{x} \in \partial\Omega \cap B_{\mathbf{a}} \iff z = h_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})$
- $\mathbf{x} \in \Omega \cap B_{\mathbf{a}} \iff z < h_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})$

Un ouvert est de classe \mathcal{C}^k si son bord peut être caractérisé localement en tout point comme le graphe d'une fonction de classe \mathcal{C}^k . Il est important de noter que, dans cette définition, la matrice $U_{\mathbf{a}}$ et la fonction $h_{\mathbf{a}}$ dépendent du point \mathbf{a} . Avec la définition ci-dessus, ce qui caractérise les ouverts de classe \mathcal{C}^k est une propriété de régularité locale, de sorte que ces domaines peuvent prendre globalement des formes très générales. Les domaines à bord polyédrique dont le bord comporte un coin anguleux, des singularités (exemple : un cube) ne sont pas de classe \mathcal{C}^1 mais sont lipschitziens. Précisons enfin que la définition 2.1 suppose que le domaine Ω est (localement) d'un seul côté de son bord, ce qui exclut de nombreux domaines tout à fait pertinents pour les applications.

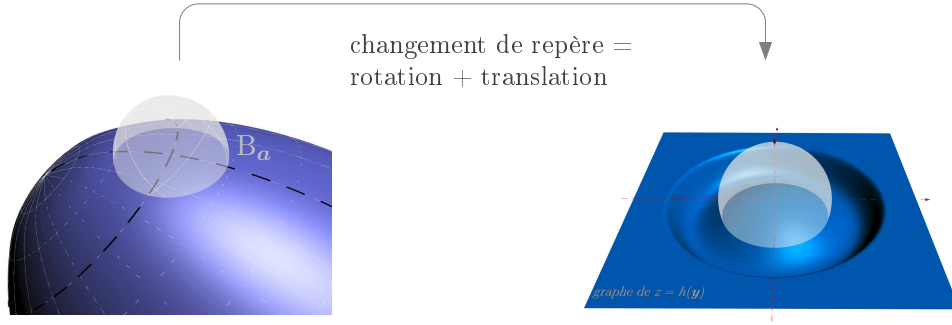
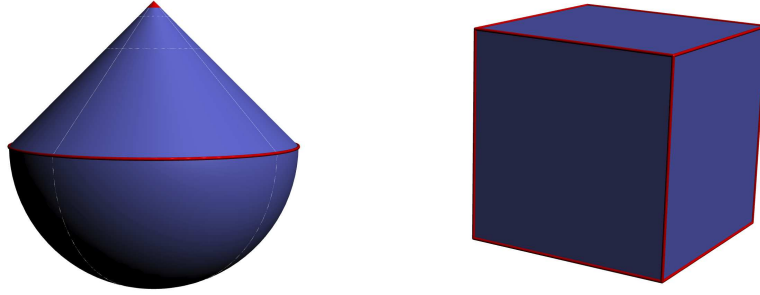


FIGURE 2.1: Un ouvert régulier est localement le graphe d'une fonction régulière

FIGURE 2.2: Deux exemples de domaines lipschitziens qui ne sont pas de classe \mathcal{C}^1 . Les parties singulières de la surface ont été colorées en rouge.

La définition précédente fournit, au voisinage de chaque point $\mathbf{a} \in \partial\Omega$ une paramétrisation du bord, grâce à l'application $\Phi_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ par la formule $\Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}) := \mathbf{a} + \mathbf{U}_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, h_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})) \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$. Ceci nous amène à introduire la terminologie suivante.

Définition 2.2.

Dans la suite on appellera carte locale de $\partial\Omega$ au voisinage de \mathbf{a} un couple $(B_{\mathbf{a}}, \Phi_{\mathbf{a}})$ avec $\Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}) := \mathbf{a} + \mathbf{U}_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, h_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}))$ comme dans la définition 2.1. On appellera atlas de $\partial\Omega$ une famille de cartes locales $\{B_{\mathbf{a}}, \Phi_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \mathcal{F}}$ telle que $\partial\Omega \subset \cup_{\mathbf{a} \in \mathcal{F}} B_{\mathbf{a}}$ pour un certain ensemble de points $\mathcal{F} \subset \partial\Omega$.

En considérant la famille $\{B_{\mathbf{a}}, \Phi_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \partial\Omega}$ on dispose d'emblée d'un atlas du bord (avec $\mathcal{F} = \partial\Omega$). Mais puisqu'on s'intéresse ici uniquement aux domaines bornés Ω , le bord $\partial\Omega$ est compact et $\{B_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \partial\Omega}$ est un recouvrement ouvert de $\partial\Omega$, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini. En pratique on pourra donc toujours supposer que l'atlas $\{B_{\mathbf{a}}, \Phi_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \mathcal{F}}$ comporte un nombre fini de carte locales $\text{card}(\mathcal{F}) < +\infty$, et on dira alors que l'atlas est fini.

Ce qui précède permet également de définir une notion de régularité pour les fonctions définie sur le bord d'un domaine régulier.

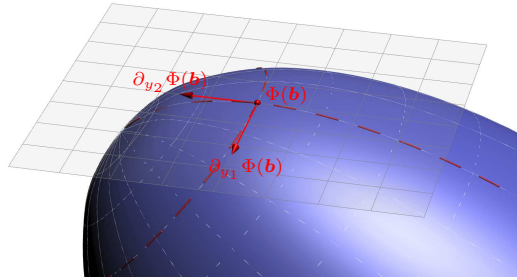
Definition 2.3.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe \mathcal{C}^p et F un espace vectoriel de dimension fini. On dira qu'une fonction $\varphi : \partial\Omega \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^k pour $k \leq p$ si et seulement si, pour toute carte locale (B_a, Φ_a) au voisinage de tout point $a \in \partial\Omega$, la fonction $\varphi \circ \Phi_a$ est de classe \mathcal{C}^k . On notera $\varphi \in \mathcal{C}^k(\partial\Omega, F)$.

En pratique on considèrera le plus souvent $F = \mathbb{C}$ ou \mathbb{C}^d . On vérifie sans peine que les $\mathcal{C}^k(\partial\Omega, F)$ sont des espaces vectoriels.

2.2 Hyperplan tangent au bord

Considérons une carte locale (B, Φ) centrée en un point $a \in \partial\Omega$, et pour laquelle on notera $h : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ la paramétrisation associée. Par continuité de Φ , l'ensemble $D := \Phi^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^{d-1}$ vérifie $\Phi(D) \subset \partial\Omega$. Si l'on fixe un point $b \in D$, et que l'on définit des applications $\gamma_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d, j = 1 \dots d-1$ par $\gamma_j(t) := \Phi(b + te_j)$ on voit que, lorsque t varie au voisinage de 0, le point $\gamma_j(t)$ décrit une courbe tracée sur $\partial\Omega$ qui passe par $\Phi(b)$ en $t = 0$, c'est-à-dire $\gamma_j(\mathbb{R}) \cap B \subset \partial\Omega$. La dérivée $\partial_t \gamma_j(0) = \partial_{y_j} \Phi(b)$ est un vecteur tangent à cette courbe et donc tangent à $\partial\Omega$ en $\Phi(b)$.



Les vecteurs $\{\partial_{y_j} \Phi(b)\}_{j=1}^{d-1}$ fournissent donc une famille de vecteurs tangents à $\partial\Omega$ en $\Phi(b)$. Notons $u_j \in \mathbb{R}^d, j = 1 \dots d$ les vecteurs colonnes de la matrice $U = [u_1, \dots, u_d]$, de sorte que $\Phi(y) = a + y_1 u_1 + \dots + y_{d-1} u_{d-1} + h(y_1, \dots, y_{d-1}) u_d$. On a donc

$$\begin{aligned} \partial_{y_j} \Phi(b) &= u_j + u_d \partial_{y_j} h(b) \\ &= U \cdot (e_j + e_d \partial_{y_j} h(b)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Les vecteurs $u_j, j = 1, \dots, d-1$ étant indépendants en tant que vecteurs colonnes d'une matrice inversible, les vecteurs $\partial_{y_j} \Phi(b)$ sont donc eux-même linéairement indépendants. Comme $\text{vect}\{\partial_{y_1} \Phi(b), \dots, \partial_{y_{d-1}} \Phi(b)\} = \text{Im}(d\Phi_b)$, l'hyperplan tangent à $\partial\Omega$ en $\Phi(b)$ est donc $\Phi(b) + \text{Im}(d\Phi_b)$.

Pour définir la notion de plan tangent, nous avons besoin de dériver la paramétrisation dans (2.1). Ceci ne pose pas de problème pour les domaines de classe \mathcal{C}^1 . Ceci se conçoit également pour les domaines lipschitziens grâce au théorème suivant que l'on admettra.

Proposition 2.4.

Soit une fonction $h : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément lipschitzienne c'est-à-dire vérifiant la condition $\sup_{x, y \in \mathbb{R}^{d-1}} |h(x) - h(y)| / |x - y| < +\infty$. Alors h est différentiable presque partout et son gradient est essentiellement borné i.e. $|\nabla h| \in L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$.

2.3 Champ de vecteur normal

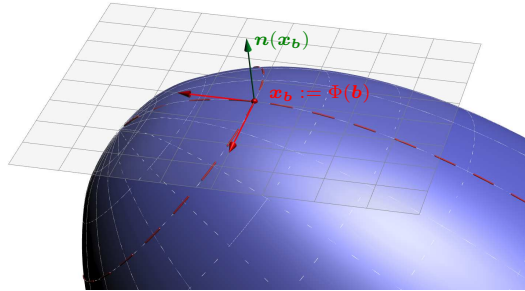
Le vecteur normal à $\partial\Omega$ en $\Phi(\mathbf{b})$ et l'un des deux vecteurs unitaires normaux à l'hyperplan tangent à $\partial\Omega$ en $\Phi(\mathbf{b})$. Il n'y a en effet que deux possibilités pour un tel vecteur normal : il pointe soit vers l'intérieur soit vers l'extérieur de Ω qui est localement d'un seul côté de son bord. Pendant tout ce cours, nous considérerons systématiquement un vecteur normal pointant vers l'extérieur de Ω dont on notera $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ la valeur qu'il prend en le point $\mathbf{x} \in \partial\Omega$.

Toujours en considérant une carte locale (B, Φ) centrée en un point $\mathbf{a} \in \partial\Omega$, avec $h : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ la paramétrisation associée, introduisons la fonction $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(\mathbf{y}, z) = z - h(\mathbf{y})$ pour tout $(\mathbf{y}, z) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^d$, puis $\Psi(\mathbf{x}) := \psi(U^\top(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$. Alors $\Psi(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$ et $\Psi(\Phi(\mathbf{y})) = 0 \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$ par construction. En appliquant la règle de la chaîne en un point $\mathbf{b} \in D := \Phi^{-1}(B)$ (proposition 1.4) et avec le lemme 1.8, il vient

$$0 = \nabla(\Psi \circ \Phi)(\mathbf{b}) = d\Phi(\mathbf{b})^\top \nabla\Psi(\mathbf{x}_b) \quad \text{où} \quad \mathbf{x}_b := \Phi(\mathbf{b}) \quad (2.2)$$

On voit que $\nabla\Psi(\mathbf{x}_b)$ est orthogonal à tout vecteur de $\text{Im } d\Phi(\mathbf{b})$, de sorte que $\nabla\Psi(\mathbf{x}_b)$ est proportionnel au vecteur normal $\mathbf{n}(\mathbf{x}_b)$. D'après la définition du gradient, on a $\Psi(\mathbf{x}_b + \mathbf{k}) = \Psi(\mathbf{x}_b) + \nabla\Psi(\mathbf{x}_b)^\top \mathbf{k} + |\mathbf{k}| \epsilon(\mathbf{k})$ pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ donc, en choisissant $\mathbf{k} = t \nabla\Psi(\mathbf{x}_b)$ avec $t \rightarrow 0$, on obtient $\Psi(\mathbf{x}_b + t \nabla\Psi(\mathbf{x}_b)) = \Psi(\mathbf{x}_b) + t |\nabla\Psi(\mathbf{x}_b)|^2 + t \eta(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \eta(t) = 0$. On en déduit que $\Psi(\mathbf{x}_t) > \Psi(\mathbf{x}_b) = 0$ pour $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_b + t \nabla\Psi(\mathbf{x}_b)$ avec $t > 0$ suffisamment petit. Comme par ailleurs $\Psi(\mathbf{x}) > 0$ pour $\mathbf{x} \in B \setminus \Omega$ (car c'est la zone où $z > h(\mathbf{y})$), on en déduit finalement que $\nabla\Psi(\mathbf{x}_b)$ pointe vers l'extérieur de Ω d'où l'expression de la normale

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) := \frac{\nabla\Psi(\mathbf{x})}{|\nabla\Psi(\mathbf{x})|} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \cap B. \quad (2.3)$$



Avec la formule ci-dessus, on voit que quand Ω est de classe \mathcal{C}^k avec $k \geq 1$, le champ de vecteur $\mathbf{n} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe \mathcal{C}^{k-1} . En appliquant à nouveau la règle de la chaîne, puisque $\nabla\psi(\mathbf{y}, z) = \mathbf{e}_d - \nabla h(\mathbf{y})$, on en déduit que $\nabla\Psi(\mathbf{x}_b) = U \cdot \nabla\psi(\mathbf{b}, h(\mathbf{b})) = U \cdot (\mathbf{e}_d - \nabla h(\mathbf{b}))$. Par ailleurs, la matrice U étant orthogonale, on a $|U\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}|^2 \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$. Comme $\mathbf{e}_d^\top \nabla h(\mathbf{b}) = 0$ car $h(y_1, \dots, y_{d-1})$ ne dépend pas de y_d , on a $|\mathbf{e}_d - \nabla h(\mathbf{b})|^2 = 1 + |\nabla h(\mathbf{b})|^2$, et on obtient finalement

$$|\nabla\Psi(\mathbf{x}_b)|^2 = 1 + |\nabla h(\mathbf{b})|^2 \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{d-1}. \quad (2.4)$$

La quantité ci-dessus, qui interviendra à nouveau dans les paragraphes qui suivent, admet encore une expression simple en fonction de la différentielle de la paramétrisation Φ .

Lemme 2.5.

Si $\Phi : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ est définie par $\Phi(\mathbf{y}) := \mathbf{a} + \mathbf{U}(\mathbf{y}, h(\mathbf{y}))$ avec $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ une matrice orthogonale et $h : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne alors, pour presque tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$, on a

$$1 + |\nabla h(\mathbf{y})|^2 = \det(d\Phi(\mathbf{y})^\top d\Phi(\mathbf{y})).$$

Démo:

On démontre le résultat en un point \mathbf{y} où h est différentiable. Calculons tout d'abord $d\Phi(\mathbf{y})^\top d\Phi(\mathbf{y})$. Définissons $\phi : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ par $\phi(\mathbf{y}) := (\mathbf{y}, h(\mathbf{y}))$ si bien que $\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{a} + \mathbf{U} \cdot \phi(\mathbf{y})$ et, d'après la règle de la chaîne, on a $d\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{U} \cdot d\phi(\mathbf{y})$. Comme \mathbf{U} est orthogonale, $\mathbf{U}^\top \mathbf{U} = \text{Id}$ si bien que $d\Phi(\mathbf{y})^\top d\Phi(\mathbf{y}) = d\phi(\mathbf{y})^\top d\phi(\mathbf{y})$. En reprenant (2.1), on voit que les vecteurs colonnes de la matrice de $d\phi(\mathbf{y})$ sont donnés par $\partial_{y_j} \phi(\mathbf{y}) = \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_d \partial_{y_j} h(\mathbf{y})$. La matrice de cette différentielle est donc $d\phi(\mathbf{y}) = [\text{Id}, \nabla h(\mathbf{y})]^\top \in \mathbb{R}^{d \times (d-1)}$ ce qui fournit finalement

$$d\Phi(\mathbf{y})^\top d\Phi(\mathbf{y}) = \text{Id} + \nabla h(\mathbf{y}) \cdot \nabla h(\mathbf{y})^\top$$

Nous avons donc une matrice de la forme $\text{Id} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\top$ pour $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{d-1}$. Soit $\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{d-1}$ une base du sous-espace de \mathbb{R}^{d-1} orthogonal à \mathbf{v} . On a $(\text{Id} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\top) \mathbf{w}_j = \mathbf{w}_j$, $j = 2 \dots d-1$ et $(\text{Id} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\top) \mathbf{v} = (1 + |\mathbf{v}|^2) \mathbf{v}$. On conclut donc que $\text{Id} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\top$ admet $1 + |\mathbf{v}|^2$ comme valeur propre de multiplicité 1, et admet 1 comme valeur propre de multiplicité $d-2$. Le déterminant étant le produit des valeurs propres, on en déduit que $\det(\text{Id} + \mathbf{v} \mathbf{v}^\top) = 1 + |\mathbf{v}|^2$. Le choix $\mathbf{v} = \nabla h(\mathbf{y})$ termine la preuve. \square

2.4 Opérateurs de trace

Lorsque l'on considère un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^1 ainsi qu'une partie de son bord $\Gamma \subset \partial\Omega$, un opérateur de trace sur Γ est un opérateur qui fait correspondre à chaque fonction définie dans $\overline{\Omega}$ une fonction définie sur Γ . L'opérateur de trace le plus classique associe simplement à chaque fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ sa restriction à Γ

$$\begin{aligned} \text{trace Dirichlet :} \\ \varphi \mapsto \varphi|_\Gamma \end{aligned} \tag{2.5}$$

Il s'agit clairement d'un opérateur linéaire. On considère également fréquemment un opérateur qui fait correspondre à un champ de vecteur régulier $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^d)$ son flux sortant à travers le bord Γ ,

$$\begin{aligned} \text{flux normal :} \\ \mathbf{g} \mapsto \mathbf{n}^\top \mathbf{g}|_\Gamma \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ceci est encore un opérateur linéaire. La notion de flux sortant joue bien évidemment un rôle décisif dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques, ce qui explique que cet opérateur intervient souvent dans les EDPs classiques. On peut considérer le flux normal du gradient d'une fonction à valeur scalaire, ce qui conduit à la trace Neumann

$$\begin{aligned} \text{trace Neumann :} \\ \varphi \mapsto \partial_{\mathbf{n}} \varphi|_\Gamma \\ \text{avec } \partial_{\mathbf{n}} \varphi := \mathbf{n}^\top \nabla \varphi|_{\partial\Omega} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dans la définition ci-dessus, nous avons introduit au passage la nouvelle notation " $\partial_{\mathbf{n}}\varphi$ ". On peut combiner ces opérateurs de trace de base pour construire d'autres traces plus sophistiquées. Par exemple pour une fonction continue $\lambda \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$, on peut considérer la trace dite de Robin associée

$$\begin{aligned} \text{trace Robin :} \\ \varphi \mapsto \partial_{\mathbf{n}}\varphi|_{\Gamma} + \lambda\varphi|_{\Gamma} \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.5 Intégrale de surface

Nous allons fréquemment avoir besoin d'intégrer une fonction sur $\partial\Omega$, en considérant des intégrales de la forme " $\int_{\partial\Omega} u \, d\sigma$ " où " $d\sigma$ " est une mesure de surface naturellement induite par la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$. Avant de définir ces intégrales de façon explicite, nous avons besoin d'un lemme technique.

Lemme 2.6.

Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble compact, et soit \mathcal{B} une famille finie de boules recouvrant cet ensemble $K \subset \cup_{B \in \mathcal{B}} B$. Alors il existe une famille de fonctions $\{\psi_B\}_{B \in \mathcal{B}}$, appelée partition de l'unité sur K subordonnée à \mathcal{B} , vérifiant $\text{supp}(\psi_B) \subset B$ et $\sum_{B \in \mathcal{B}} \psi_B(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in K$.

Démo:

L'ensemble $\mathcal{O} = \cup_{B \in \mathcal{B}} B$ est un ouvert vérifiant $K \subset \mathcal{O}$. D'après le lemme 1.7, il existe donc une fonction $\varphi' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi'(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in K$ et $\varphi'(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$.

Pour chaque boule $B \in \mathcal{B}$, notons $\mathbf{c}_B \in \mathbb{R}^d$ son centre et $r_B > 0$ son rayon de sorte que $B = B(\mathbf{c}_B, r_B)$. On pose ensuite $\varphi_B(\mathbf{x}) := \varphi((\mathbf{x} - \mathbf{c}_B)/r_B)$ où φ est la fonction construite avec (1.12), de sorte que $\varphi_B \in \mathcal{C}_0^\infty(B)$ et $\varphi_B(\mathbf{x}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \in B$. Remarquons maintenant que, puisque le support $\text{supp}(\varphi')$ est un compact $\subset \mathcal{O}$, il existe $\gamma > 0$ tel que la fonction $\varphi_K(\mathbf{x}) := \sum_B \varphi_B(\mathbf{x})$ vérifie $\varphi_K(\mathbf{x}) > \gamma \forall \mathbf{x} \in \text{supp}(\varphi')$ de sorte que les fonctions $\psi_B(\mathbf{x}) := \varphi'(\mathbf{x})\varphi_B(\mathbf{x})/\varphi_K(\mathbf{x})$ répondent au problème. \square

Considérons un atlas fini $(B, \Phi_B)_{B \in \mathcal{B}}$ de $\partial\Omega$, ce qui implique en particulier $\partial\Omega \subset \cup_{B \in \mathcal{B}} B$. Soit $\{\varphi_B\}_{B \in \mathcal{B}}$ une partition de l'unité sur $\partial\Omega$ subordonnée à \mathcal{B} . Alors l'intégrale d'une fonction $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ sur $\partial\Omega$ est définie par

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u \, d\sigma &:= \sum_{B \in \mathcal{B}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_B(\Phi_B(\mathbf{y})) \sqrt{1 + |\nabla h_B(\mathbf{y})|^2} \, d\mathbf{y} \\ \text{avec } u_B(\mathbf{x}) &:= \varphi_B(\mathbf{x})u(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

La fonction h_B est ici la paramétrisation du bord associée à (B, Φ_B) , comme dans la définition 2.1. La définition (2.9) vaut même pour le cas d'un domaine Ω lipschitzien puisqu'alors, en vertu de la proposition 2.4, $\mathbf{y} \mapsto |\nabla h_B(\mathbf{y})|$ est une fonction essentiellement bornée. Cette définition de l'intégrale sur le bord est bien valide car, comme le montre le résultat suivant, le membre de droite de (2.9) ne dépend pas du choix de l'atlas $(B, \Phi_B)_{B \in \mathcal{B}}$.

Proposition 2.7.

On considère une fonction $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$. Si $(B, \Phi_B)_{B \in \mathcal{B}}$ et $(B', \Phi_{B'})_{B' \in \mathcal{B}'}$ sont deux atlas, si $\{\varphi_B\}_{B \in \mathcal{B}}$ et $\{\varphi_{B'}\}_{B' \in \mathcal{B}'}$ sont des partitions de l'unité subordonnées à \mathcal{B} et \mathcal{B}' , alors en posant

$u_B := \varphi_B u$ et $u_{B'} := \varphi_{B'} u$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{B \in \mathcal{B}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_B(\Phi_B(\mathbf{y})) \sqrt{1 + |\nabla h_B(\mathbf{y})|^2} d\mathbf{y} \\ = \sum_{B' \in \mathcal{B}'} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_{B'}(\Phi_{B'}(\mathbf{y}')) \sqrt{1 + |\nabla h_{B'}(\mathbf{y}')|^2} d\mathbf{y}'. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Démo:

Étant donnés $B \in \mathcal{B}$ et $B' \in \mathcal{B}'$, soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $u(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus B \cap B'$. En posant $\Upsilon := \Phi_B^{-1} \circ \Phi_{B'} : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$, on a $d\Phi_{B'}(\mathbf{y}') = d(\Phi_B \circ \Upsilon)(\mathbf{y}') = d\Phi_B(\mathbf{y}) \cdot d\Upsilon(\mathbf{y}')$ où $\mathbf{y} = \Upsilon(\mathbf{y}')$. De cela on tire

$$\begin{aligned} 1 + |\nabla h_B(\mathbf{y})|^2 &= \det(d\Phi_B(\mathbf{y})^\top d\Phi_B(\mathbf{y})) \\ &= \det(d\Phi_{B'}(\mathbf{y}')^\top d\Phi_{B'}(\mathbf{y}')) \cdot |\det(d\Upsilon(\mathbf{y}')^{-1})|^2 \\ &= (1 + |\nabla h_{B'}(\mathbf{y}')|^2) / |\det(d\Upsilon(\mathbf{y}'))|^2 \quad \text{pour } \mathbf{y} = \Upsilon(\mathbf{y}') \end{aligned} \quad (2.11)$$

Un calcul simple montre que Υ est une bijection affine associée à une matrice inversible. D'après le théorème de changement de variable dans les intégrales multiples (voir par exemple [16, Thm.10.9]), on a donc $\int_{\mathbb{R}^d} v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^d} v(\Upsilon(\mathbf{y}')) |\det d\Upsilon(\mathbf{y}')| d\mathbf{y}'$. En combinant ce changement de variable avec (2.11), on déduit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(\Phi_B(\mathbf{y})) \sqrt{1 + |\nabla h_B(\mathbf{y})|^2} d\mathbf{y} \\ = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(\Phi_{B'}(\mathbf{y}')) \sqrt{1 + |\nabla h_{B'}(\mathbf{y}')|^2} d\mathbf{y}' \\ \text{pour } \text{supp}(u) \subset B \cap B' \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pour conclure, considérons le cas général d'une fonction $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$. Pour $B \in \mathcal{B}$ et $B' \in \mathcal{B}'$ on pose $u_B := \varphi_B u$, $u_{B'} := \varphi_{B'} u$ et $u_{B,B'} := \varphi_B \varphi_{B'} u$. Il est clair que $\text{supp}(u_{B,B'}) \subset B \cap B'$. Puisque $\sum_{B \in \mathcal{B}} \varphi_B(\mathbf{x}) = 1$ pour $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, on a $u_{B'}(\Phi_{B'}(\mathbf{y}')) = \sum_{B \in \mathcal{B}} u_{B,B'}(\Phi_{B'}(\mathbf{y}'))$ pour tout $\mathbf{y}' \in \mathbb{R}^{d-1}$. De même on a $u_B(\Phi_B(\mathbf{y})) = \sum_{B' \in \mathcal{B}'} u_{B,B'}(\Phi_B(\mathbf{y}))$. Puisque \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont finies on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \sum_{B' \in \mathcal{B}'} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_{B'}(\Phi_{B'}(\mathbf{y}')) \sqrt{1 + |\nabla h_{B'}(\mathbf{y}')|^2} d\mathbf{y}' \\ = \sum_{B' \in \mathcal{B}'} \sum_{B \in \mathcal{B}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_{B,B'}(\Phi_{B'}(\mathbf{y}')) \sqrt{1 + |\nabla h_{B'}(\mathbf{y}')|^2} d\mathbf{y}' \\ = \sum_{B \in \mathcal{B}} \sum_{B' \in \mathcal{B}'} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_{B,B'}(\Phi_B(\mathbf{y})) \sqrt{1 + |\nabla h_B(\mathbf{y})|^2} d\mathbf{y} \\ = \sum_{B \in \mathcal{B}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_B(\Phi_B(\mathbf{y})) \sqrt{1 + |\nabla h_B(\mathbf{y})|^2} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

□

Convenons de dire qu'une fonction $u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable si et seulement si $\mathbf{y} \mapsto \varphi_B(\Phi_B(\mathbf{y})) u(\Phi_B(\mathbf{y}))$ est intégrable sur \mathbb{R}^{d-1} pour toute carte d'un atlas $(B, \Phi_B)_{B \in \mathcal{B}}$. Les arguments usuels de la théorie de la mesure montrent que l'intégrale (2.9) garde un sens si l'on suppose seulement u intégrable au sens de la mesure de surface (2.9).

2.6 Formule de Stokes

Nous allons maintenant énoncer le théorème de Stokes. Ce théorème sera d'un usage constant tout au long de ce cours car il s'agit de l'outil principal permettant de reformuler les EDPs sous une forme alternative, dite variationnelle, beaucoup plus commode pour l'analyse et la résolution numérique. Dans tout contexte faisant intervenir des EDPs, il est indispensable de bien comprendre comment utiliser le théorème de Stokes.

Théorème 2.8.

Soit $\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 à support borné et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert lipschitzien dont on notera $\mathbf{n} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champ de vecteur normal au bord et dirigé vers l'extérieur de Ω . Alors on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{g}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}^{\top} \mathbf{n} d\sigma.$$

Nous admettrons ce résultat car la preuve s'avère assez élaborée. On pourra en trouver une démonstration par exemple dans [2, §6.2]. Voyons comment on utilise le théorème de Stokes en pratique. Tout d'abord, si $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ et $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^d)$ avec u ou \mathbf{g} à support borné, alors on peut appliquer le théorème de Stokes au champ de vecteur $u\mathbf{g}$. Comme par ailleurs $\operatorname{div}(u\mathbf{g}) = u \operatorname{div}(\mathbf{g}) + \mathbf{g}^{\top} \nabla u$ d'après (1.18), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\mathbf{g}) + \mathbf{g}^{\top} \nabla u d\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} u \mathbf{g}^{\top} \mathbf{n} d\sigma \\ \forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}), \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^d). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Cette formule est une généralisation multi-dimensionnelle de la formule d'intégration par parties quand on intègre sur un intervalle de \mathbb{R} . Cette manière de ré-écrire la formule de Stokes est souvent appelée formule de Green. Notons que si $u \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ de sorte que $u = 0$ sur le bord, ou bien $\mathbf{g} \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^d)$ de sorte que $\mathbf{g} = 0$ sur le bord, alors le terme de bord ci-dessus disparaît. En particulier

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\mathbf{g}) + \mathbf{g}^{\top} \nabla u d\mathbf{x} &= 0 \\ \forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}), \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^d). \end{aligned} \quad (2.14)$$

On considère également souvent le cas où $\mathbf{g} = \nabla v$ pour un certain $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ à valeur scalaire. On a alors $\operatorname{div}(u\nabla v) = u\Delta v + \nabla u^{\top} \nabla v$ d'où l'on tire finalement, en appliquant le théorème de Stokes,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \Delta v d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \nabla u^{\top} \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u \partial_{\mathbf{n}} v d\sigma \\ \forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}), \quad \forall v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dans les formules ci-dessus, on voit apparaître naturellement les opérateurs de trace introduits au §2.4. De même que ci-dessus, si $u \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ ou bien $v \in \mathcal{C}_0^2(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$, alors le terme de bord dans la formule ci-dessus disparaît.