Chapitre 1

Calcul différentiel

Ce cours portant principalement sur les Équations aux Dérivées Partielles (EDP), nous dédions ce premier chapitre à préciser de manière détaillée ce qu'est la différentielle d'une fonction de plusieurs variables, notion dont découle la définition d'une dérivée partielle. Nous introduirons également les opérateurs gradient, divergence et laplacien. Le lecteur désireux d'approfondir les thèmes abordés dans ce chapitre pourra consulter avec profit [12, Chap.16], [6, Chap.6 & 9], ainsi que [16, chap.9].

Dans tout ce chapitre E et F désigneront des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$. On supposera ces espaces de dimension finie. On notera systématiquement $|\ \ |$ la norme sur E comme sur F, ce qui ne devrait pas occasionner de confusion. On rappelle d'ailleurs que, dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

1.1 Différentielle

Pour un ouvert $\Omega \subset \mathrm{E}$ on dira qu'une fonction $f : \Omega \to \mathrm{F}$ est différentiable en un point $\boldsymbol{a} \in \Omega$ s'il existe une application linéaire $df(\boldsymbol{a}) : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ telle que, pour un $\boldsymbol{h}$ suffisamment petit, on puisse écrire

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h} + |\boldsymbol{h}|\epsilon(\boldsymbol{h}) \\ & \text{avec} \quad \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} |\epsilon(\boldsymbol{h})| = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Lorsqu'une telle application existe elle est unique, car si $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une autre application linéaire vérifiant les même conditions, on doit avoir $df(\boldsymbol{a})\cdot(t\boldsymbol{h}) = \varphi(t\boldsymbol{h}) + t|\boldsymbol{h}|\eta(t\boldsymbol{h})$ pour tout $\boldsymbol{h} \in \mathrm{E}$, $t > 0$ suffisamment petit, et avec $\lim_{t\to 0}\eta(t\boldsymbol{h}) = 0$. Par linéarité de $df(\boldsymbol{a})$ et φ, en faisant $t \to 0$ on obtient $df(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h} = \varphi(\boldsymbol{h})$, $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^d$.

L'application linéaire $df(\boldsymbol{a})$ est appelée différentielle de f en $\boldsymbol{a}$. Introduisons pour tout $L \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) := \{\text{applications linéaires } \mathrm{E} \to \mathrm{F}\}$ la norme

$$|L| := \sup_{\boldsymbol{h}\in\mathrm{E}\setminus\{0\}} |L(\boldsymbol{h})|/|\boldsymbol{h}|. \tag{1.2}$$

Alors dans (1.1) il est clair que $\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})| \leq \lim_{\boldsymbol{h}\to 0}(|df(\boldsymbol{a})| + |\epsilon(\boldsymbol{h})|)|\boldsymbol{h}| = 0$. Ceci montre que si f est différentiable en $\boldsymbol{a}$ alors elle est continue en $\boldsymbol{a}$. On dit que f est différentiable sur Ω lorsqu'elle admet une différentielle en chaque point $\boldsymbol{a} \in \Omega$. Dans ce dernier cas on aura donc $f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$ où

$$\mathscr{C}^0(\Omega) := \{\text{fonctions continues sur } \Omega\}.$$

Le domaine Ω étant supposé ouvert, la continuité d'une fonction sur Ω ne l'empêche pas d'exploser au voisinage du bord. Pour certaines fonctions, nous aurons besoin de prescrire un comportement régulier jusqu'au bord ce qui nous amène à introduire des variantes de $\mathscr{C}^0(\Omega)$. Étant donné un sous-ensemble fermé $\Gamma \subset \overline{\Omega}$, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, nous définirons

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) &:= \{\varphi|_\Omega \text{ tel que } \varphi \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)\},\\
\mathscr{C}^0_{0,\Gamma}(\overline{\Omega}) &:= \{\varphi \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \varphi|_\Gamma = 0\}.
\end{aligned}$$

Lorsque $f : \Omega \to \mathrm{F}$ est différentiable sur Ω, l'application $\boldsymbol{a} \mapsto df(\boldsymbol{a})$ est à valeur dans $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ qui est un espace vectoriel de dimension finie. En munissant cet espace de la topologie d'espace métrique induite, par exemple, par la norme (1.2), on peut envisager le cas de figure où $\boldsymbol{a} \mapsto df(\boldsymbol{a})$ est continue.

Definition 1.1.
On dit que l'application $f : \Omega \to \mathrm{F}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si f est différentiable sur Ω et l'application $\boldsymbol{a} \mapsto df(\boldsymbol{a})$ est continue sur Ω. On notera $\mathscr{C}^1(\Omega,\mathrm{F})$ (ou simplement $\mathscr{C}^1(\Omega)$ si $\mathrm{F} = \mathbb{C}$) l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω à valeur dans F.

La notion de différentielle généralise la dérivation "usuelle", c'est-à-dire la dérivation par rapport à une seule variable. En effet dans le cas où $d = 1$, en appliquant la formule de Taylor à une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathrm{F}$ définie sur un intervalle ouvert $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, et en notant $t \in \mathrm{I}$ l'unique variable dont dépend $f = f(t)$, on obtient

$$f(a+h) = f(a) + h\,\partial_t f(a) + h\,\epsilon(h) \tag{1.3}$$

pour tout $a \in \mathrm{I}$ avec $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$. Ici $\partial_t f(a) \in \mathrm{F}$ est la dérivée de $f(t)$ par rapport à t, c'est un vecteur dont les composantes sont formées des dérivées des composantes de f. La différentielle de f est donc simplement donnée par $df(a)\cdot h = h\,\partial_t f(a)$.

1.2 Cas particuliers importants

Des vérifications directes montrent la linéarité de la différentielle i.e. $d(f + \lambda g)(\boldsymbol{a}) = df(\boldsymbol{a}) + \lambda dg(\boldsymbol{a})$ lorsque f et g sont différentiables en $\boldsymbol{a}$. Examinons par ailleurs le calcul de la différentielle dans deux cas particuliers.

Transformation affine

Considérons le cas où $\mathrm{E} = \mathbb{R}^d, \mathrm{F} = \mathbb{R}^p$ et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est application de la forme $f(\boldsymbol{x}) := \mathrm{A}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ où $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ et $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{p\times d}$ est une matrice à coefficients réels. Un rapide calcul $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{A}\cdot\boldsymbol{h}$ nous montre, par identification avec (1.1), que la différentielle est donnée par $df(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$.

Au passage dans le cas où $d = 1$, la matrice A se réduit à un unique vecteur colonne $\mathrm{A} = \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p$ et $f(t) = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}$, de sorte que l'on retrouve $\partial_t f(t) = \boldsymbol{a}$. Dans le cas où $p = 1$ on voit que $\mathrm{A} = \boldsymbol{a}^\top$ pour un certain $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$, et $df(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}$.

Fonctionnelle quadratique

On considère également le cas où $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est de la forme $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top \mathrm{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{x} + c$ où $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$ et $c \in \mathbb{R}$. En cherchant à exprimer $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$ et en développant l'expression, on obtient

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + (\,(\mathrm{A}+\mathrm{A}^\top)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\,)^\top\boldsymbol{h} \;+\; |\boldsymbol{h}|\epsilon(\boldsymbol{h}) \\ & \text{où} \quad \epsilon(\boldsymbol{h}) = \;\boldsymbol{h}^\top\mathrm{A}\boldsymbol{h}/|\boldsymbol{h}| \end{aligned} \tag{1.4}$$

Alors on a $|\epsilon(\boldsymbol{h})| \leq |\mathrm{A}|\,|\boldsymbol{h}| \to 0$ pour $\boldsymbol{h} \to 0$. Par comparaison avec (1.1) et (1.4) on reconnait donc que $df(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{b} + (\mathrm{A}+\mathrm{A}^\top)\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{h}$ dans ce cas de figure.

Forme bilinéaire

Considérons maintenant une application bilinéaire continue $\beta : \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \to \mathrm{F}$, où $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ sont deux espaces vectoriels normés. Alors l'espace $\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2$ est naturellement muni de la norme $|\boldsymbol{h}| = (|\boldsymbol{h}_1|^2 + |\boldsymbol{h}_2|^2)^{1/2}$ pour $\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$. Évaluons la différentielle de $\beta(\cdot,\cdot)$ en $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$. On a

$$\begin{aligned} \beta(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) &= \beta(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{h}_2) \\ &= \beta(\boldsymbol{a}) + \beta(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{a}_2) + \beta(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{h}_2) + \beta(\boldsymbol{h}). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Le dernier terme $\beta(\boldsymbol{h})$ admet une décroissance quadratique puisque, par continuité de la forme bilinéaire, $|\beta(\boldsymbol{h})| \leq |\beta|\cdot|\boldsymbol{h}_1|\cdot|\boldsymbol{h}_2| \leq |\beta|\cdot|\boldsymbol{h}|^2$ où $|\beta|$ désigne le module de continuité de β. Le terme linéaire dans (1.5) est donc donné par les 2eme et 3eme termes et on déduit que

$$d\beta(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h} = \beta(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{a}_2) + \beta(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{h}_2). \tag{1.6}$$

1.3 Dérivées partielles

On se place ici dans le cas où $\mathrm{E} = \mathbb{R}^d$, et on notera $\boldsymbol{e}_j \in \mathbb{R}^d, j = 1\dots d$ les vecteurs de la base canonique. Pour un point $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ on note $x_j = \boldsymbol{e}_j^\top\boldsymbol{x}$ ses coordonnées si bien que $\boldsymbol{x} = (x_j)_{j=1}^d = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_d\boldsymbol{e}_d$. Alors, pour une fonction différentiable $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ comme dans (1.1), en choisissant $\boldsymbol{h} = t\boldsymbol{e}_j$, l'existence de la différentielle implique l'existence de la limite

$$\partial_{x_j} f(\boldsymbol{a}) := \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{a})}{t} = df(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{e}_j \tag{1.7}$$

appelée encore dérivée partielle de f en $\boldsymbol{a}$ par rapport à la coordonnée x_j. La définition (1.7) montre assez clairement que si $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)^n$ alors f admet des dérivées partielles et $\partial_{x_j} f \in \mathscr{C}^0(\Omega)^n$ pour tout $j = 1\dots d$. Inversement on a le résultat suivant.

Lemme 1.2.
Si $f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$ et admet des dérivées partielles continues $\partial_{x_j} f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$ pour tout $j = 1\dots d$, alors f est différentiable sur Ω et $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$.

Démo:
Considérons tout d'abord un point $\boldsymbol{b} \in \Omega$ arbitraire et notons $\varphi(t) := f(\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{e}_j)$. La définition des dérivées partielles implique $\partial_t\varphi(t) = \partial_{x_j} f(\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{e}_j)$. Alors en écrivant $\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t \partial_t\varphi(\tau)d\tau$, on obtient l'identité

$$f(\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{b}) = t\int_0^1 \partial_{x_j} f(\boldsymbol{b}+st\boldsymbol{e}_j)ds \quad \forall f \in \mathscr{C}^1(\Omega). \tag{1.8}$$

Choisissons un $\boldsymbol{a} \in \Omega$ quelconque. Nous allons montrer que f est différentiable en $\boldsymbol{a}$ avec $df(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h} = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} f(\boldsymbol{a})h_j$ pour $\boldsymbol{h} = h_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+h_d\boldsymbol{e}_d$. Posons $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_{j-1}+h_j\boldsymbol{e}_j, j = 1,\dots,d$ d'où $\boldsymbol{a}_d = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$. On a alors

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \textstyle\sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} f(\boldsymbol{a})h_j \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{d} f(\boldsymbol{a}_j) - f(\boldsymbol{a}_{j-1}) - \partial_{x_j} f(\boldsymbol{a})h_j \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{d} f(\boldsymbol{a}_{j-1}+h_j\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{a}_{j-1}) - \partial_{x_j} f(\boldsymbol{a})h_j \\
&= |\boldsymbol{h}| \textstyle\sum_{j=1}^{d} (h_j/|\boldsymbol{h}|) \int_0^1 (\partial_{x_j} f(\boldsymbol{a}_{j-1}+sh_j\boldsymbol{e}_j) - \partial_{x_j} f(\boldsymbol{a})\,)ds
\end{aligned}$$

Notons $\epsilon(\boldsymbol{h})$ la somme à la dernière ligne ci-dessus, de sorte que le membre de droite prend la forme $|\boldsymbol{h}|\epsilon(\boldsymbol{h})$. On a bien $\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \epsilon(\boldsymbol{h}) = 0$ puisque $|\boldsymbol{a}_{j-1} + sh_j\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{a}| \le |\boldsymbol{h}| \forall s \in [0,1]$ et donc, par continuité des $\partial_{x_j} f$ en $\boldsymbol{a}$, pour tout $\delta > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|\boldsymbol{h}| < \eta \Rightarrow |\partial_{x_j} f(\boldsymbol{a}_{j-1} + sh_j\boldsymbol{e}_j) - \partial_{x_j} f(\boldsymbol{a})| \le \delta\ \forall j = 1\dots d$. De l'identité $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} f(\boldsymbol{a})h_j + |\boldsymbol{h}|\epsilon(\boldsymbol{h})$ on déduit $df(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h} = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} f(\boldsymbol{a})h_j$ et comme chaque $\partial_{x_j} f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$ cette dernière égalité implique la continuité de $\boldsymbol{a} \mapsto df(\boldsymbol{a})$. □

Dérivées d'ordre supérieur

On peut bien sûr réitérer la définition de l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, ce qui nous amène à définir $\mathscr{C}^k$ de façon récursive, pour tout $k \ge 1$,

$$\mathscr{C}^k(\Omega) := \{\varphi \in \mathscr{C}^{k-1}(\Omega),\ \partial_{x_j}\varphi \in \mathscr{C}^{k-1}(\Omega)\ \forall j = 1\dots d\}. \tag{1.9}$$

L'espace $\mathscr{C}^k(\Omega)$ se présente alors comme l'ensemble des fonctions f admettant des dérivées partielles $\partial_{x_{i_1}}\dots\partial_{x_{i_q}} f$ d'ordre $q \le k$ selon n'importe quel combinaison $i_1,\dots,i_q$. Comme précédemment, nous aurons parfois besoin de considérer des fonctions admettant un comportement régulier jusqu'au bord ce qui conduit, pour une portion du bord $\Gamma \subset \partial\Omega$, à définir

$$\begin{aligned}
&\mathscr{C}^k(\overline{\Omega}) := \{\varphi|_\Omega \text{ tel que } \varphi \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^d)\} \\
&\mathscr{C}^k_{0,\Gamma}(\overline{\Omega}) := \{\varphi \in \mathscr{C}^{k-1}_{0,\Gamma}(\Omega),\ \partial_{x_j}\varphi \in \mathscr{C}^{k-1}_{0,\Gamma}(\Omega)\ \forall j = 1\dots d\}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Les fonctions appartenant à $\mathscr{C}^k_{0,\Gamma}(\overline{\Omega})$ sont supposées s'annuler sur Γ ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k. Dans le cas d'une dérivée partielle d'ordre supérieure, l'ordre dans lequel interviennent les différents opérateurs de dérivation n'a pas d'importance d'après le résultat suivant.

Lemme 1.3.
Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^2(\Omega)$, on a $\partial_{x_j}\partial_{x_k} f(\boldsymbol{x}) = \partial_{x_k}\partial_{x_j} f(\boldsymbol{x})$ pour tout $j,k = 1\dots d$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Démo:
Choisissons $j,k \in \{1,\dots d\}, j \ne k$ et $\boldsymbol{a} \in \Omega$ arbitraires. En posant $\varphi(x_1,x_2) := f(\boldsymbol{a} + x_1\boldsymbol{e}_j + x_2\boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{a})$, on réduit le problème à démontrer que $\partial_{x_1}\partial_{x_2}\varphi(\boldsymbol{0}) = \partial_{x_2}\partial_{x_1}\varphi(\boldsymbol{0})$ avec $\varphi(\boldsymbol{0}) = 0$. En suivant le même argumentaire que pour établir (1.8), on a tout d'abord

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1,x_2) - \varphi(x_1,0) - \varphi(0,x_2) &= x_1 \int_0^1 \partial_{x_1}\varphi(sx_1,x_2) - \partial_{x_1}\varphi(sx_1,0)ds \\
&= x_1x_2 \int_0^1\int_0^1 \partial_{x_2}\partial_{x_1}\varphi(sx_1,tx_2)\,dtds
\end{aligned}$$

Dans le calcul ci-dessus, nous avons d'abord appliqué une formule de Taylor au 1er ordre par rapport à x_1, puis par rapport à x_2. On peut procéder différemment en appliquant d'abord une formule de Taylor par rapport à x_2, puis par rapport à x_1, ce qui conduit à $\varphi(x_1,x_2) - \varphi(x_1,0) - \varphi(0,x_2) = x_1x_2 \int_0^1\int_0^1 \partial_{x_1}\partial_{x_2}\varphi(sx_1,tx_2)\,dsdt$. En appliquant le théorème de Fubini par rapport à s,t, et en divisant par le facteur x_1x_2, on aboutit à

$$\int_0^1\int_0^1 \partial_{x_2}\partial_{x_1}\varphi(sx_1,tx_2)\,dtds = \int_0^1\int_0^1 \partial_{x_1}\partial_{x_2}\varphi(sx_1,tx_2)\,dtds$$

pour tout $x_1,x_2 \neq 0$ suffisamment petit. Il reste à faire tendre x_1,x_2 vers 0. Puisque $\partial_{x_2}\partial_{x_1}\varphi(sx_1,tx_2) \to \partial_{x_2}\partial_{x_1}\varphi(\mathbf{0})$ et $\partial_{x_1}\partial_{x_2}\varphi(sx_1,tx_2) \to \partial_{x_1}\partial_{x_2}\varphi(\mathbf{0})$ lorsque $x_1,x_2 \to 0$, on obtient le résultat voulu par le théorème de convergence dominée. $\square$

Une dérivée partielle $\partial_{x_{i_1}}\dots\partial_{x_{i_k}}f$ est dite d'ordre k, et d'après le résultat qui précède, quitte à permuter des dérivées partielles, on peut supposer systématiquement que les indices sont rangés par ordre croissant $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$. On notera dans la suite

$$\begin{aligned}\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} f &:= \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\dots\partial_{x_d}^{\alpha_d} f \qquad \text{avec}\ \ \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_d)\\ &= \underbrace{\partial_{x_1}\dots\partial_{x_1}}_{\alpha_1\text{fois}}\underbrace{\partial_{x_2}\dots\partial_{x_2}}_{\alpha_2\text{fois}}\partial_{x_3}\cdots\partial_{x_d} f\end{aligned}$$

Un vecteur d'entier $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ comme ci-dessus sera appelé par la suite un multi-indice et (au prix d'un léger abus de notation) on notera $|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ si bien que les dérivées partielles d'ordre k d'une fonction f sont donc les fonctions $\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} f$ pour $|\boldsymbol{\alpha}| = k$. On sera amenés à considérer l'espace des fonctions admettant des dérivées partielles à tout ordre

$$\begin{aligned}\mathscr{C}^\infty(\Omega) &:= \cap_{k\geq 0}\mathscr{C}^k(\Omega),\\ \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}) &:= \cap_{k\geq 0}\mathscr{C}^k(\overline{\Omega}),\\ \mathscr{C}^\infty_{0,\Gamma}(\overline{\Omega}) &:= \cap_{k\geq 0}\mathscr{C}^k_{0,\Gamma}(\overline{\Omega}).\end{aligned}$$

Nous serons en particulier souvent amenés à manipuler des fonctions s'annulant ainsi que toutes leurs dérivées sur le bord tout entier, et également des fonctions à support borné (compact), c'est pourquoi nous poserons également

$$\begin{aligned}\mathscr{C}^\infty_0(\Omega) &:= \mathscr{C}^\infty_{0,\partial\Omega}(\overline{\Omega})\\ \mathscr{C}^\infty_{0,\mathrm{K}}(\Omega) &:= \{\varphi \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega),\ \mathrm{supp}(\varphi)\ \text{borné}\}\end{aligned}$$

Fonctions polynomiales

Les fonctions polynomiales fournissent un premier exemple de fonctions de plusieurs variables infiniment différentiables. Étant donné un multi-indice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ notons $\boldsymbol{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_d^{\alpha_d}$. Alors on a $\mathbb{P}_k(\Omega) \subset \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ avec la définition

$$\mathbb{P}_k(\Omega) := \{\varphi|_\Omega,\ \varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq k} a_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}},\ a_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{C}\}.$$

Notons $\boldsymbol{\alpha}! := \alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_d!$ et, si $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\dots,\beta_d) \in \mathbb{N}^d$ est un autre multi-indice, convenons que $\boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{\beta}$ signifie $\alpha_j \geq \beta_j\ \forall j = 1\dots d$. En guise d'exercice sur les dérivées partielles, on pourra s'amuser à vérifier que $\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha}!/(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})!$ si $\boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{\beta}$, et $\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = 0$ sinon.

1.4 Fonctions composées

Le résultat suivant, connu sous le nom de "règle de la chaîne", permet d'obtenir la différentielle de fonctions composées.

Proposition 1.4.
Si $f : \Omega \to \mathrm{F}$ *est une application différentiable sur un ouvert* $\Omega \subset \mathrm{E}$*, et* $g : \Omega' \to \mathrm{G}$ *est une application différentiable sur un ouvert* $\Omega' \subset \mathrm{F}$ *tel que* $f(\Omega) \subset \Omega'$*, alors l'application composée* $g \circ f : \Omega \to \mathrm{G}$ *est différentiable sur* Ω *et on a*

$$\begin{aligned}&d(g \circ f)(\boldsymbol{a}) = dg(\boldsymbol{b}) \cdot df(\boldsymbol{a})\\ &\textit{où } \ \boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a}).\end{aligned}$$

Démo:
On a $g(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{k}) = g(\boldsymbol{b}) + dg(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{k} + |\boldsymbol{k}|\eta(\boldsymbol{k})$ et $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h} + |\boldsymbol{h}|\epsilon(\boldsymbol{h})$ avec $\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\epsilon(\boldsymbol{h}) = \lim_{\boldsymbol{k}\to 0}\eta(\boldsymbol{k}) = 0$. En combinant ces deux identités avec le choix $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h}) := df(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h} + |\boldsymbol{h}|\epsilon(\boldsymbol{h})$, on tire

$$\begin{aligned} g(\, f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})\,) &= g(\, f(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h} + |\boldsymbol{h}|\epsilon(\boldsymbol{h})\,)\\ &= g\circ f(\boldsymbol{a}) + dg(\boldsymbol{b})\cdot(df(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h} + |\boldsymbol{h}|\epsilon(\boldsymbol{h})\,) + |\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h})|\eta(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h}))\\ &= g\circ f(\boldsymbol{a}) + dg(\boldsymbol{b})\cdot df(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h} + |\boldsymbol{h}|\delta(\boldsymbol{h})\end{aligned} \tag{1.11}$$

où $\delta(\boldsymbol{h}) := dg(\boldsymbol{b})\cdot\epsilon(\boldsymbol{h}) + |\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h})|\eta(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h}))/|\boldsymbol{h}|$. Pour démontrer le résultat il suffit de montrer que $\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\delta(\boldsymbol{h}) = 0$. D'après la définition ci-dessus $|\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h})| \leq (|df(\boldsymbol{a})|+|\epsilon(\boldsymbol{h})|)|\boldsymbol{h}| \to 0$ pour $\boldsymbol{h}\to 0$, d'où $\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\eta(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h})) = 0$ et donc $|\eta(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h}))|\cdot|\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h})|/|\boldsymbol{h}| \leq (|df(\boldsymbol{a})|+|\epsilon(\boldsymbol{h})|)|\eta(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h}))| \to 0$. On en tire finalement $\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\delta(\boldsymbol{h}) = 0$ et donc le résultat voulu par identification du terme linéaire dans (1.11). □

Corollaire 1.5.
Un $\mathscr{C}^k-$*difféomorphisme d'un ouvert* $\Omega \subset \mathrm{E}$ *dans un ouvert* $\Omega' \subset \mathrm{F}$ *est une bijection* $f : \Omega \to \Omega'$ *de classe* $\mathscr{C}^k$ *sur* Ω *et dont l'inverse* $f^{-1} : \Omega' \to \Omega$ *est de classe* $\mathscr{C}^k$ *sur* Ω'*. On a alors, pour tout* $\boldsymbol{a} \in \Omega$*,*

$$df(\boldsymbol{a})^{-1} = d(f^{-1})(\boldsymbol{b}) \quad \textit{où}\ \boldsymbol{b} := f(\boldsymbol{a}).$$

Démo:
Avec $g(\boldsymbol{x}) = f^{-1}(\boldsymbol{x})$, il suffit d'écrire que $g\circ f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ est d'appliquer la proposition précédente, ce qui donne $dg(\boldsymbol{b})\cdot df(\boldsymbol{a}) = \mathrm{Id}$. □

Transformation affine

Dans le cas simple d'une application affine $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ définie par $\Phi(\boldsymbol{x}) := \mathrm{A}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$, celle-ci est inversible si et seulement si sa matrice A est inversible, auquel cas $\Phi^{-1}(\boldsymbol{y}) := \mathrm{A}^{-1}\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})$. Dans cette situation on aura $d\Phi(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}$ et $d\Phi^{-1}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{A}^{-1}$, et alors on retrouve bien ici que $d\Phi(\boldsymbol{x})\cdot d\Phi^{-1}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{Id}$.

Fonction à valeur scalaire

Voyons comment la règle de la chaîne s'applique dans le cas où $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{G} = \mathbb{C}$ de sorte que $g\circ f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est une simple fonction d'une seule variable sur un intervalle ouvert $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$

et à valeur complexe (alors que f est à valeur vectorielle). Notons t l'unique variable dont dépend $g \circ f = g \circ f(t)$. Vu (1.3), on doit avoir $df(a)h = h\partial_t f(a)$. En appliquant la règle de la chaîne, on obtient donc $d(g \circ f)(a)h = dg(\boldsymbol{b}) \cdot df(a)h = dg(\boldsymbol{b})(h\partial_t f(a)) = h\, dg(\boldsymbol{b}) \cdot \partial_t f(a)$. Comme par ailleurs $d(g \circ f)(a)h = h\partial_t(g \circ f)(a)$ on en tire finalement

$$\partial_t(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \cdot \partial_t f(a) \quad \forall a \in \mathrm{I}.$$

Produit de fonctions

Considérons le cas $\mathrm{E} = \mathbb{R}^d$ et $\mathrm{F} = \mathbb{C}^n$ et où f_1, f_2 sont deux applications différentiables d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}^n$. On souhaite calculer la différentielle de l'application $g : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $g(\boldsymbol{x}) := f_1(\boldsymbol{x})^\top f_2(\boldsymbol{x})$.

Soit l'application bilinéaire $\beta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ définie par $\beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{v}$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ définie par $f(\boldsymbol{x}) := (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}))$. Alors on a $g(\boldsymbol{x}) = \beta \circ f(\boldsymbol{x})$. Il est clair que $df(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h} = (df_1(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}, df_2(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h})$ et, d'après (1.6), $d\beta(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{k} = \beta(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{k}_2) + \beta(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{b}_1^\top \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_1^\top \boldsymbol{b}_2$ où $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a})$ et $\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. La règle de la chaîne $dg(\boldsymbol{a}) = d\beta(\boldsymbol{b}) \cdot df(\boldsymbol{a})$ donne alors

$$\begin{aligned} dg(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} &= f_1(\boldsymbol{a})^\top df_2(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} + (df_1(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h})^\top f_2(\boldsymbol{a}) \\ &= (\ f_1(\boldsymbol{a})^\top df_2(\boldsymbol{a}) + f_2(\boldsymbol{a})^\top df_1(\boldsymbol{a})\ ) \cdot \boldsymbol{h} \qquad \forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{C}^n, \end{aligned}$$

ce qui se lit encore $dg(\boldsymbol{a}) = f_1(\boldsymbol{a})^\top df_2(\boldsymbol{a}) + f_2(\boldsymbol{a})^\top df_1(\boldsymbol{a})$. Dans le cas où $n = 1$ et $f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, cette formule se réduit à $dg(\boldsymbol{a}) = f_1(\boldsymbol{a})df_2(\boldsymbol{a}) + f_2(\boldsymbol{a})df_1(\boldsymbol{a})$.

Régularité des fonctions composées

Revenons à la situation considérée à la proposition 1.4. La règle de la chaîne nous montre aussi que si $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ et $g \in \mathscr{C}^1(\Omega')$, alors $g \circ f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$. On peut appliquer en cascade cette observation pour aboutir au corollaire suivant.

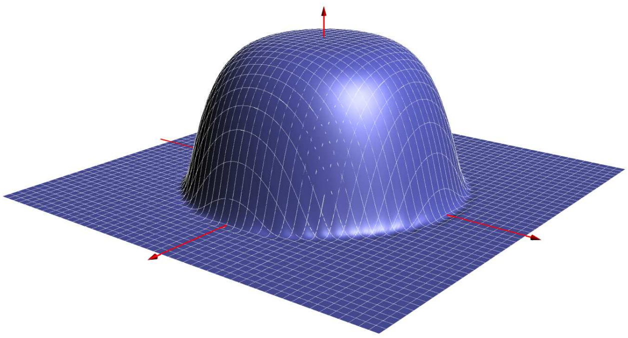
Corollaire 1.6.
Sous les hypothèses de la proposition 1.4, si $f \in \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathscr{C}^k(\Omega', \mathbb{C}^n)$ alors on a $g \circ f \in \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{C}^n)$.

En particulier si g et f sont toutes deux de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors la fonction composée $g \circ f$ sera elle-même de classe $\mathscr{C}^\infty$ i.e. la composée de deux fonctions régulières est régulière.

Considérons le cas où $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est définie par $f(\boldsymbol{x}) := |\boldsymbol{x}|^2 = x_1^2 + \cdots + x_d^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $g(t) = \exp(-1/(1-t))$ pour $t < 1$ et $g(t) = 0$ si $t \geq 1$. D'après l'exemple cité plus haut sur les fonction polynomiales il est clair que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et, par ailleurs, c'est un exercice classique sur le prolongement des fonctions continues de vérifier que $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. En appliquant le corollaire ci-dessus, on en déduit que la fonction composée $\varphi := c\, g \circ f$ appartient à $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, où le coefficient multiplicatif c est choisi comme suit

$$\begin{aligned} &\varphi(\boldsymbol{x}) = c \exp(-\frac{1}{1 - |\boldsymbol{x}|^2}) && \text{si } |\boldsymbol{x}| < 1, \\ &\varphi(\boldsymbol{x}) = 0 && \text{si } |\boldsymbol{x}| \geq 1, \\ &\text{avec} \quad 1/c = \int_{\mathrm{B}(0,1)} \exp(-1/(1 - |\boldsymbol{x}|^2)) d\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{1.12}$$

avec $\mathrm{B}(0,1) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,\ |\boldsymbol{x}| < 1\}$ la boule unité (ouverte). Cette définition garantit que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 1$ et $\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\mathrm{B}}(0,1)$ où $\mathrm{supp}(\varphi)$ est le support de la fonction φ i.e. le plus petit fermé K tel que $\varphi|_{\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{K}} = 0$. Notons par ailleurs que $\varphi(\boldsymbol{x}) > 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathrm{B}(0,1)$. Comme on peut le voir sur l'image ci-dessous, la fonction φ consiste simplement en une "bosse" de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support localisé dans la boule unité.



Lemme 1.7.
Soient $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^d$ *un ensemble compact, et* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert borné tel que* $\mathrm{K} \subset \mathcal{O}$. *Alors il existe une fonction* $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *telle* $\psi(\boldsymbol{x}) = 1\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{K}$ *et* $\psi(\boldsymbol{x}) = 0\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$.

Démo:

L'ensemble $\mathrm{F} := \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$ est fermé et $\mathrm{K} \cap \mathrm{F} = \emptyset$. Soit $\delta > 0$ tel que $4\delta = \inf\{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|,\ \boldsymbol{x} \in \mathrm{K},\ \boldsymbol{y} \in \mathrm{F}\}$. Notons $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \mathrm{K}) := \inf_{\boldsymbol{y}\in\mathrm{K}} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$. Alors l'application $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \mathrm{K})$ est continue car $|\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \mathrm{K}) - \mathrm{dist}(\boldsymbol{y}, \mathrm{K})| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ pour tout $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, de sorte que l'ensemble $\mathrm{K}_\eta := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,\ \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \mathrm{K}) \leq \eta\}$ est un fermé borné vérifiant $\mathrm{K}_\eta \subset \mathcal{O}$ pour tout $\eta < 4\delta$. En choisissant φ comme dans (1.12), vérifions que la fonction

$$\psi(\boldsymbol{x}) := \int_{\mathrm{K}_\delta} \varphi_\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} \quad \text{où} \quad \varphi_\delta(\boldsymbol{x}) := \delta^{-d}\varphi(\boldsymbol{x}/\delta), \tag{1.13}$$

répond au problème. Tout d'abord $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale. Un calcul simple montre que $\mathrm{supp}(\varphi_\delta) \subset \mathrm{B}(0,\delta)$ et que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 1$. Pour $\boldsymbol{x} \in \mathrm{K}$ et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{K}_\delta$, on a $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \geq \mathrm{dist}(\boldsymbol{y}, \mathrm{K}) > \delta$, de sorte que $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \notin \mathrm{B}(0,\delta)$, donc $\varphi_\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = 0$ et

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = 1 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{K}.$$

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{K}_{3\delta}$ et $\boldsymbol{y} \in \mathrm{K}_\delta$, on a $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \geq \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \mathrm{K}) - \mathrm{dist}(\boldsymbol{y}, \mathrm{K}) \geq 3\delta - \delta = 2\delta$ de sorte que, dans ce cas $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \notin \mathrm{B}(0,\delta)$ et $\varphi_\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = 0$. On en déduit que $\psi(\boldsymbol{x}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{K}_{3\delta}$ et donc $\mathrm{supp}(\psi) \subset \mathrm{K}_{3\delta} \subset \mathcal{O}$. $\square$

1.5 Opérateurs différentiels

Les opérateurs que nous présentons en cette fin de chapitre sont d'un usage constant dans l'analyse des équations aux dérivées partielles.

Gradient

Étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ on considère une fonction à valeur scalaire $f : \Omega \to \mathbb{C}$ différentiable sur Ω. Sa différentielle est une application linéaire $df(\boldsymbol{a}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ et il existe donc un vecteur à coefficients complexes $\nabla f(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{C}^d$ tel que

☞
$$df(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} = \nabla f(\boldsymbol{a})^\top \boldsymbol{h} \quad \forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.14}$$

Dans le cas où f à valeur scalaire est différentiable sur tout Ω, l'application $\nabla f : \boldsymbol{a} \mapsto \nabla f(\boldsymbol{a})$ est donc à valeur vectorielle, c'est un champ de vecteur. L'opérateur "∇" est appelé gradient. D'après le calcul du §1.4, on a

$$\nabla(fg)(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a})\nabla g(\boldsymbol{a}) + g(\boldsymbol{a})\nabla f(\boldsymbol{a}). \tag{1.15}$$

Le gradient admet une expression explicite en fonction des dérivées partielles : le gradient de $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$ en un point $\nabla f(\boldsymbol{a})$ étant un vecteur de $\mathbb{C}^d$ par définition, et puisque $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^\top + \cdots + \boldsymbol{e}_d\boldsymbol{e}_d^\top = \mathrm{Id}$, on a

$$\begin{aligned} \nabla f(\boldsymbol{a}) &= \sum_{j=1}^d \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j^\top \nabla f(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^d \boldsymbol{e}_j \nabla f(\boldsymbol{a})^\top \boldsymbol{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^d \boldsymbol{e}_j\, df(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^d \boldsymbol{e}_j\, \partial_{x_j} f(\boldsymbol{a}) \end{aligned} \tag{1.16}$$

On voit que le gradient est un vecteur dont les coordonnées dans la base $\boldsymbol{e}_j$ sont les dérivées partielles $\partial_{x_j} f(\boldsymbol{a})$. Attention : l'expression (1.16) est vrai parce que les vecteurs $\boldsymbol{e}_j$ sont fixes et ne dépendent pas du point $\boldsymbol{a}$ en lequel est évalué le gradient. Une expression aussi simple n'est pas vrai dans un système de coordonnées où cette hypothèse n'est pas satisfaite (exemples : systèmes de coordonnées polaires, cylindriques, sphériques).

Lemme 1.8.
Considérons deux ouverts $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^d$, un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $\Phi : \Omega \to \Omega'$, et une application $f \in \mathscr{C}^1(\Omega', \mathbb{C})$, on a la formule

$$\nabla(f \circ \Phi)(\boldsymbol{a}) = d\Phi(\boldsymbol{a})^\top \nabla f(\boldsymbol{b}) \quad \textit{où} \quad \boldsymbol{b} = \Phi(\boldsymbol{a}).$$

Démo:
Appliquons simplement la règle de la chaîne à $f \circ \Phi$ ce qui donne $\nabla(f \circ \Phi)(\boldsymbol{a})^\top \boldsymbol{h} = d(f \circ \Phi)(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} = df(\boldsymbol{b}) \cdot d\Phi(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} = \nabla f(\boldsymbol{b})^\top d\Phi(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}$ avec $\boldsymbol{b} = \Phi(\boldsymbol{a})$. Puisque ceci est vrai pour $\boldsymbol{h}$, il reste à identifier. □

Lemme 1.9.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert connexe et $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ vérifiant $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0 \forall \boldsymbol{x} \in \Omega$. Alors f est constante sur Ω, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $f(\boldsymbol{x}) = \lambda$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Démo :
Fixons un point $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$. L'ensemble $\mathcal{O} = \{\boldsymbol{x} \in \Omega,\ f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)\}$ est clairement un ensemble fermé de Ω par continuité de f. Par ailleurs si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{O}$, alors il existe $\delta > 0$ telle que $\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta) \subset \Omega$ et, en appliquant une formule de Taylor au 1er ordre, on a $f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + \int_0^1 (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^\top \nabla f(t\boldsymbol{y} + (1-t)\boldsymbol{x}) dt = f(\boldsymbol{x}_0)$ pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta)$, d'où l'on tire $\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta) \subset \mathcal{O}$. Donc $\mathcal{O}$ est un ouvert de Ω : il est à la fois ouvert, fermé et non vide dans Ω. Donc $\mathcal{O} = \Omega$ par connexité de Ω. □

Divergence

Étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, on considère une application $\boldsymbol{g} : \Omega \to \mathbb{C}^d$ différentiable sur Ω, et on note $g_j := \boldsymbol{e}_j^\top \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ où les $\boldsymbol{e}_j, j = 1 \dots d$ forment la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On définit alors l'opérateur divergence par la formule

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) := \mathrm{tr}(d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} g_j(\boldsymbol{x}). \tag{1.17}$$

Par ailleurs si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction à valeur scalaire différentiable sur Ω, alors $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ est encore un champ de vecteur différentiable. Puisque $\partial_{x_j}(fg_j) = f\partial_{x_j} g_j + g_j \partial_{x_j} f$, en sommant sur $j = 1 \dots d$ on obtient

$$\mathrm{div}(f\boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a})\mathrm{div}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})^\top \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}). \tag{1.18}$$

Laplacien

En combinant les opérateurs gradient et divergence, on obtient un nouvel opérateur différentiel, appelé le laplacien, et défini par

$$\Delta u := \mathrm{div}(\nabla u) = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}^2 u \qquad \forall u \in \mathscr{C}^2(\Omega). \tag{1.19}$$

C'est un opérateur d'ordre 2 i.e. faisant intervenir des dérivées partielles du second ordre. Le laplacien est central dans de très nombreuses applications qui dépassent de très loin le seul champ de la physique mathématique.

1.6 Quelques EDPs classiques

Les opérateurs différentiels que nous avons introduits au paragraphe précédent sont les briques de base des EDPs les plus classiques. Passons maintenant en revue quelques-unes d'entre elles que nous prendrons comme des problèmes modèles tout au long de ce cours.

Nous considérerons un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et supposerons que les différentes fonctions entrant en jeu $(u, f, \dots)$ sont "suffisamment régulières", notion intuitive pour le moment mais sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir longuement.

Équations elliptiques

Les équations elliptiques sont l'objet principal de ce cours. Du point de vue de la modélisation physique, elles font intervenir uniquement des variables d'espace. Étant donné une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$, l'équation de Poisson permet de modéliser des systèmes physiques à l'équilibre et consiste à chercher $u : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{aligned} &\textbf{Poisson :} \\ &-\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega. \end{aligned} \tag{1.20}$$

On se donne ensuite deux champs scalaires $\nu, c : \Omega \to \mathbb{C}$ et un champ de vecteur $\boldsymbol{b} : \Omega \to \mathbb{C}^d$, avec $\nu(\boldsymbol{x}) \geq 0$. La fonction $\nu(\boldsymbol{x})$ est appelé coefficient de diffusion, et le champ $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ est appelé vitesse de convection. L'équation de convection diffusion permet de modéliser les phénomènes de transport d'un produit, avec absorption du produit au fil de son trajet. Elle consiste à chercher $u : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{aligned}&\textbf{Convection-diffusion :}\\ &-\nu\Delta u + \boldsymbol{b}\cdot\nabla u + c\,u = f \quad \text{sur } \Omega.\end{aligned} \tag{1.21}$$

Une variante de l'équation ci-dessus, appelée équation de Helmholtz, permet de modéliser la propagation d'ondes en régime harmonique établi. Pour une constante $\omega > 0$ réprésentant la pulsation du régime sinusoidal, et une fonction $c : \Omega \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, l'équation de Helmholtz consiste à chercher $u : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{aligned}&\textbf{Helmholtz :}\\ &-\Delta u - (\omega/c)^2 u = f \quad \text{sur } \Omega.\end{aligned} \tag{1.22}$$

Problème bien posé et conditions au bord

A l'instar de ces premiers exemples d'EDP, les équations que nous étudierons dans ce cours seront exclusivement linéaires : elles se présentent sous la forme

$$\mathcal{A}(u) = f \quad \text{dans } \Omega. \tag{1.23}$$

avec $\mathcal{A}$ un opérateur aux dérivées partielles vérifiant $\mathcal{A}(u_1 + \lambda u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \lambda\mathcal{A}(u_2)$ pour toutes fonctions u_1, u_2 et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$. Dans ce contexte, la fonction u dans (1.23) est l'*inconnue* du problème, la fonction f est appelée *second membre* et c'est une donnée du problème. On écrit traditionnellement l'EDP à gauche de l'égalité et le second membre à droite.

On dit qu'un problème associé à une équation aux dérivées partielles (ou un système d'EDP) est bien posée lorsqu'il y a existence et unicité de sa solution et que cette solution dépend continuement du second membre.

Il n'est pas difficile de s'apercevoir que les équations (1.20), (1.21) et (1.22) ne *sont pas* bien posées. Par exemple, avec (1.22) dans le cas où $c : \Omega \to \mathbb{C}$ est une constante, si u est solution de l'équation alors $u + \alpha\exp(\imath\omega x_1/c)$ est également solution de l'équation pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. On peut construire des exemples comme celui-ci dans le cas général (nous ne le ferons pas ici). Il manque donc un ingrédient à ces équations pour qu'elles soient bien posées.

Dans le contexte des équations elliptiques, les ingrédients manquants sont des conditions sur l'inconnue u prescrites sur le bord $\partial\Omega$. On parle de conditions aux limites. Elles doivent être imposées sur *tout* $\partial\Omega$ et pas juste sur une partie. Une EDP à laquelle on adjoint des conditions aux bord est appelée un problème aux limites et prend la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u) &= f \quad \text{dans } \Omega,\\ \mathcal{B}(u) &= g \quad \text{sur } \partial\Omega.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Ici $\mathcal{B}$ est un opérateur linéaire agissant sur les fonctions définies sur le bord, et $g : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ est une donnée au bord. Nous donnerons quelque exemples d'opérateurs aux limites $\mathcal{B}$ classiques au prochain chapitre.

Dans tous les cas, il est très important de comprendre qu'une EDP seule n'est pas satisfaisante, et qu'il convient de lui adjoindre des conditions aux bord.

Équations d'évolution

Dans les exemples d'EDP que nous avons donné jusqu'ici, le domaine de calcul ne faisait intervenir que des variables d'espace. Voyons maintenant des équations dites d'évolution faisant également intervenir le temps. Le domaine de calcul est maintenant spatio-temporel et prend la forme $]0,T[\times\Omega$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine ouvert. On suppose ici que le temps initial d'étude de l'EDP est $t = 0$ et que le temps final est $t = T$.

Un premier exemple de problème d'évolution est donné par l'équation décrivant la température dans un volume Ω au cours du temps. Étant donné un coefficient de diffusion $\nu : \Omega \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, et une fonction $f :]0,T[\times\Omega \to \mathbb{C}$, cette équation consiste à trouver $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{aligned}&\textbf{Chaleur :}\\ &\partial_t u - \nu\Delta u = f \quad \text{sur} \quad]0,T[\times\Omega.\end{aligned} \tag{1.25}$$

Comme auparavant, il convient d'assortir cette équation de conditions imposées sur $\partial\Omega$ pour tout temps. Comme il s'agit par ailleurs d'une équation d'évolution que l'on peut voir comme une variante vectorielle abstraite d'une équation différentielle ordinaire par rapport au temps, il convient également d'adjoindre une condition au temps initial $t = 0$. Mais nous resterons flou sur ces conditions aux limites et y reviendrons plus précisément plus tard.

L'équation (1.26) est d'ordre 1 par rapport au temps. On peut aussi considérer des équations d'ordre plus élevé en temps comme l'équation des ondes. Étant donné $c : \Omega \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et $f :]0,T[\times\Omega \to \mathbb{C}$, cette équation consiste à trouver $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{aligned}&\textbf{Ondes :}\\ &\partial_t^2 u(t) - c^2\Delta u(t) = f(t) \quad \text{sur }]0,T[\times\Omega.\end{aligned} \tag{1.26}$$