

Τεχνικές Βελτιστοποίησης

2^η Εργαστηριακή Άσκηση

Ελαχιστοποίηση με χρήση παραγώγων

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών ΑΠΘ

7^ο εξάμηνο

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 2024

Υπεύθυνη εργασίας: Μανωλίδου Ανατολή

Email: amanolid@ece.auth.gr

AEM: 10874

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή.....	3
2	Θέμα 1 ^ο Σχεδιασμός της συνάρτησης $f(x)$	4
3	Θέμα 2 ^ο Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου.....	5
3.1	Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (0, 0)$	5
3.2	Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (1, 1)$	7
3.3	Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (-1, -1)$	9
4	Θέμα 4 ^ο Μέθοδος Newton.....	11
4.1	Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (0, 0)$	11
4.2	Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (1, 1)$	13
4.3	Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (-1, -1)$	15
5	Θέμα 3 ^ο Μέθοδος Levenberg-Marquardt.....	16
5.1	Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (0, 0)$	16
5.2	Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (1, 1)$	18
5.3	Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (-1, -1)$	20
6	Τελικά Συμπεράσματα/Σύγκριση Μεθόδων.....	22

1 Εισαγωγή

Αντικείμενο αυτής της εργασίας είναι το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας δοσμένης συνάρτησης πολλών μεταβλητών χωρίς περιορισμούς. Οι αλγόριθμοι που έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε βασίζονται στην ιδέα της επαναληπτικής καθόδου, βάσει της οποίας ξεκινάμε από κάποιο σημείο και παράγουμε διαδοχικά τα διανύσματα έτσι ώστε $f(x_k + 1) < f(x_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Για κάθε μέθοδο από τις τρεις έπρεπε να εφαρμοστούν ως αρχικά σημεία τα $(0,0)$, $(-1,1)$ και $(1,-1)$. Οι αλγόριθμοι αναζήτησης είναι οι εξής:

- Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent)
- Μέθοδος Newton
- Μέθοδος Levenberg-Marquardt

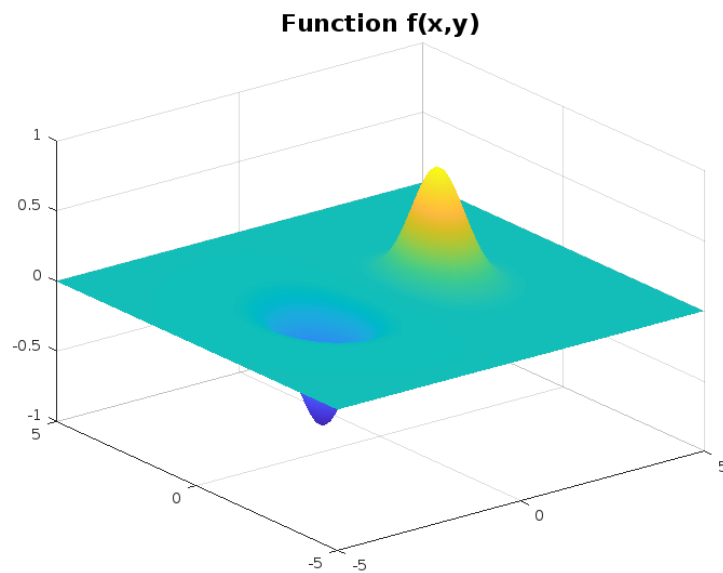
Ενώ η αντικειμενική συνάρτηση που μελετήσαμε είναι η:

$$f(x, y) = x^5 e^{-(x^2+y^2)}$$

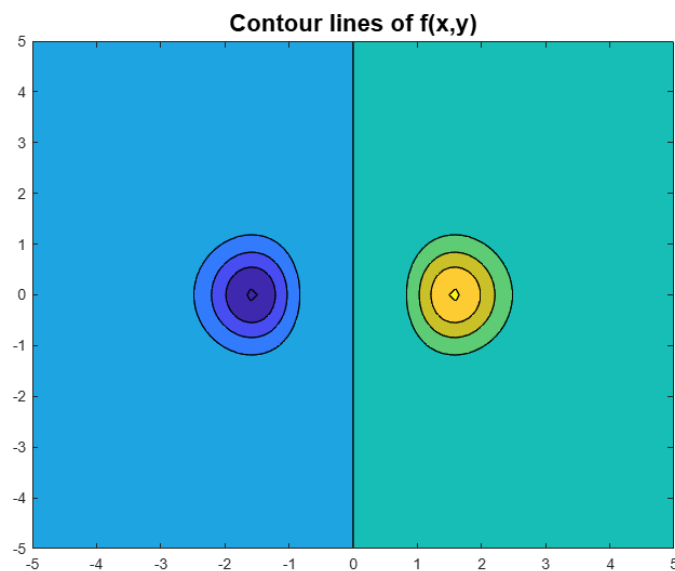
Επιπρόσθετα, για κάθε αλγόριθμο αναζήτησης έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε τρεις διαφορετικούς αλγορίθμους για την επιλογή του g . Συγκεκριμένα, έχουμε g σταθερό, τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k + g \cdot dk)$ ως προς g και βάσει του κανόνα Armijo. Για όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε $\epsilon = 0.0001$ ενώ για τις περιπτώσεις όπου ζητούταν σταθερό g τέθηκε αυθαίρετα $g = 0.6$. Στο κανόνα Armijo επιλέχθηκαν αρχικές συνθήκες $a = 0.001$, $b = 0.3$, $s = 0.5$. Όσο αφορά τη μέθοδο ελαχιστοποίησης του g , επιλέχθηκε η μέθοδος της Διχοτόμησης με Χρήση Παραγώγων από την προηγούμενη εργασία, η οποία έχει τροποποιηθεί ελάχιστα για να μας δίνει μια ελάχιστη τιμή. Για αυτή τη μέθοδο επιλέχθηκε ως αρχικό διάστημα το $[a, b] = [0, 5]$ και $l = 0.005$. Τέλος, σε όλους τους αλγορίθμους, έχει τεθεί ένα όριο για τις επαναλήψεις ίσο με $k = 199$.

2 Θέμα 1^ο | Σχεδιασμός της συνάρτησης $f(x)$

Παρακάτω παρουσιάζονται η γραφική παράσταση της αντικειμενικής μας συνάρτησης , καθώς επίσης και οι ισοϋψείς καμπύλες της. Επιπλέον, έπειτα από την ανάλυση στο MATLAB, βρέθηκε το ολικό ελάχιστο της f να είναι το σημείο $(x,y) = (-1.6,0)$ και η τιμή της f σε αυτό το σημείο είναι -0.810599 .



Εικόνα 1: Γραφική παράσταση της f



Εικόνα 2: Ισοϋψείς καμπύλες της f

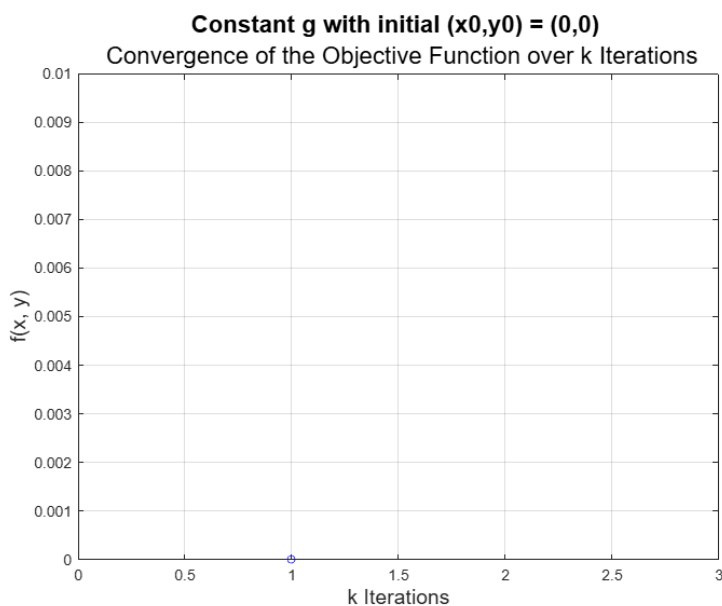
Θέμα 3ο | Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου

Στο Θέμα 3 ελαχιστοποιούμε την f με την χρήση της μεθόδου Μεγίστης Καθόδου. Αυτή η μέθοδος αναζητά το ελάχιστο στη κατεύθυνση $d_k = -\nabla f(x_k)$ ενώ χρησιμοποιούμε το τύπο (5.2.7) του βιβλίου $x_{k+1} = x_k - g_k \nabla f(x_k)$.

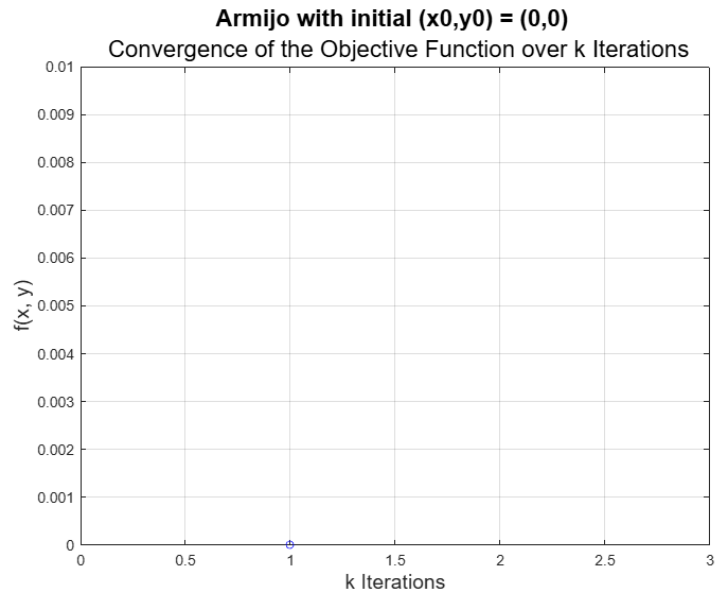
Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, για καθένα από τα 3 αρχικά σημεία υλοποιούμε 3 διαφορετικούς αλγορίθμους ανάλογα με τον τρόπο επιλογής του βήματος g και συγκεκριμένα με σταθερό, τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k + g \cdot dk)$ ως προς g και βάσει του κανόνα Armijo. Για κάθε μέθοδο χρησιμοποιούμε ως αρχικά σημεία τα $(0,0)$, $(-1,1)$ και $(1,-1)$.

3.1 Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (0, 0)$

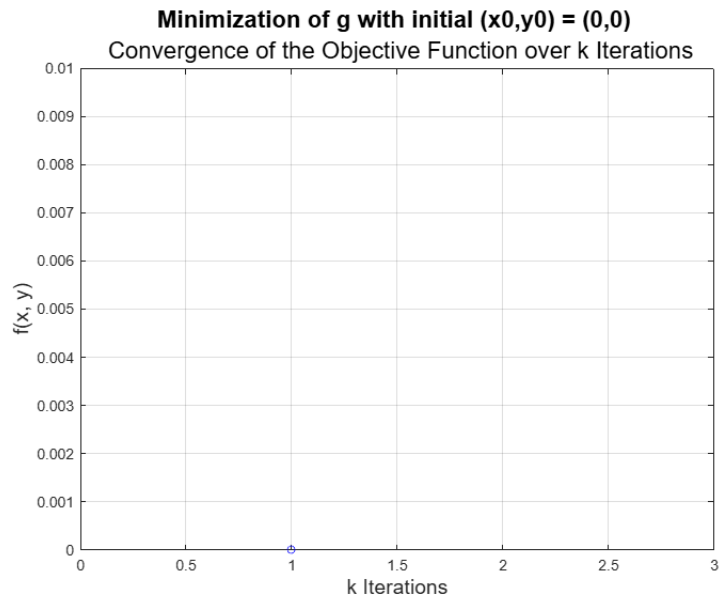
Εφαρμόζοντας τις 3 διαφορετικές περιπτώσεις επιλογής του g , για αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (0,0)$ είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα ως προς τη σύγκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος.



Εικόνα 3: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (0,0)$ με τη μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου και σταθερό g .



Εικόνα 4: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (0,0)$ με τη μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου και του κανόνα Armijo για τη επιλογή του g .

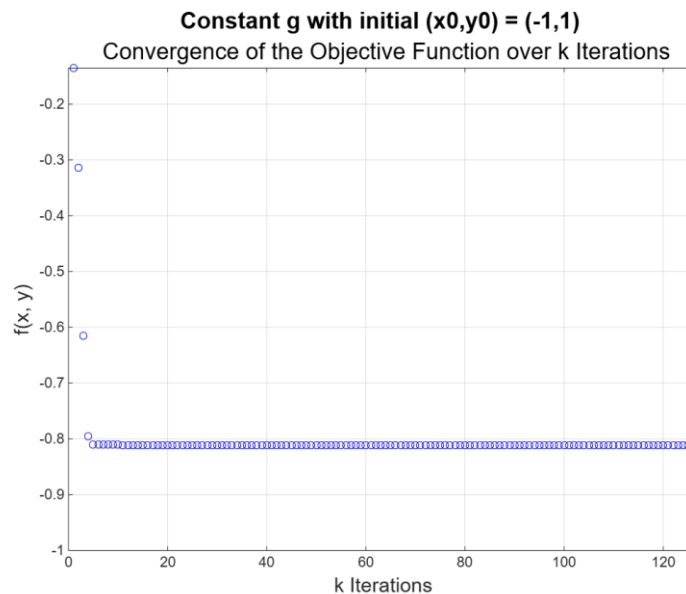


Εικόνα 5: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (0,0)$ με τη μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου με ελαχιστοποίηση του g με τη μέθοδο της Διχοτόμου με Παραγώγους.

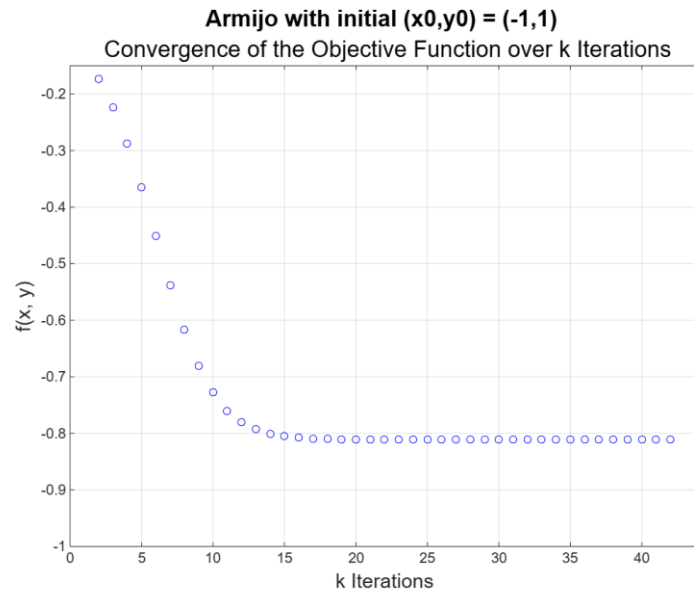
Παρατηρούμε πως και στις τρεις περιπτώσεις ο αλγόριθμος τερματίζει μετά τη μια επανάληψη. Αυτό συμβαίνει καθώς η αντικειμενική μας συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο αρχικό μας σημείο $(x_0, y_0) = (0,0)$ οπότε ο αλγόριθμος εγκλωβίζεται σε αυτό το σημείο και δεν συνεχίζεται η αναζήτηση.

3.2 Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (-1, 1)$

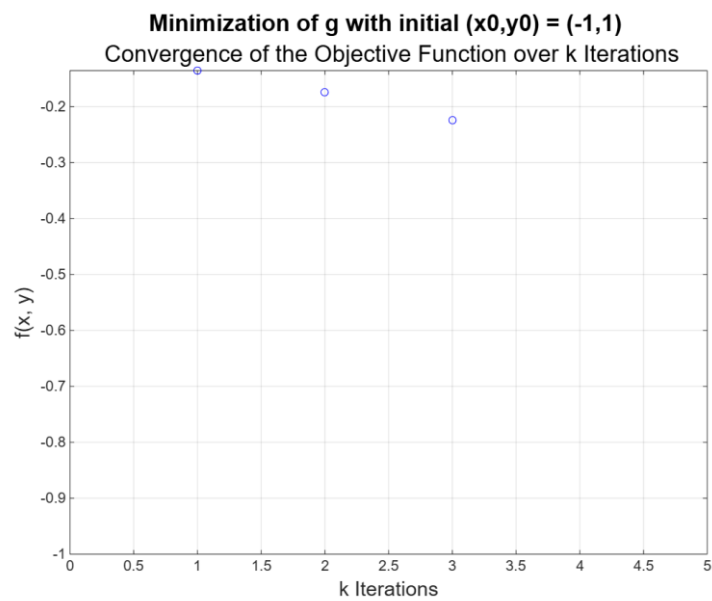
Εφαρμόζοντας τις 3 διαφορετικές περιπτώσεις επιλογής του g , για αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα ως προς τη σύγκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος. Δυστυχώς όμως για άγνωστο λόγο που δε κατάφερα να επιλύσω, στην ελαχιστοποίηση της $f(x_k + g \cdot dk)$ ως προς g ο αλγόριθμος σταματάει στη τρίτη επανάληψη δίχως όμως να προλάβει να φθάσει στο ελάχιστο.



Εικόνα 6: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ με τη μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου και σταθερό g .



Εικόνα 7: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ με τη μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου και του κανόνα Armijo για την επιλογή του g .

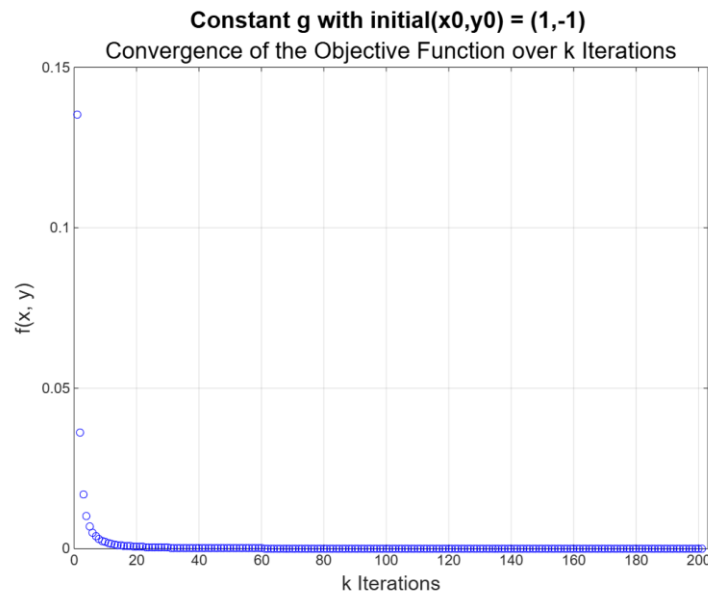


Εικόνα 8: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ με τη μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου με ελαχιστοποίηση του g με τη μέθοδο της Διχοτόμου με Παραγώγους.

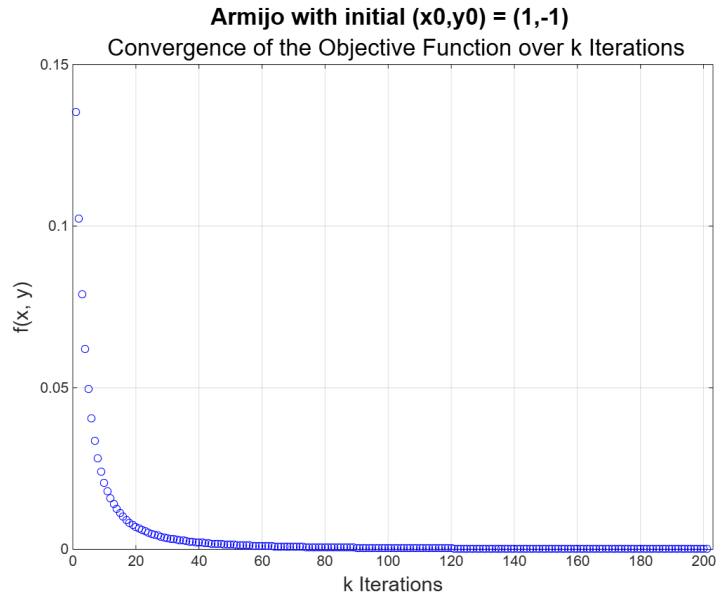
Παρατηρούμε πως και στις τρεις περιπτώσεις ο αλγόριθμος καταφέρνει να βρει το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης. Πιο γρήγορα συγκλίνει η μέθοδος με την επιλογή σταθερού g και με σχεδόν ίδια ταχύτητα και η μέθοδος με τη χρήση του κανόνα Armijo. Ενώ μπορεί να μην λειτουργεί σωστά η Μέγιστη Κάθοδος, φαίνεται πως μέχρι τη τελευταία της επανάληψη είναι πιο αργή από τις άλλες δυο.

3.3 Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (1, -1)$

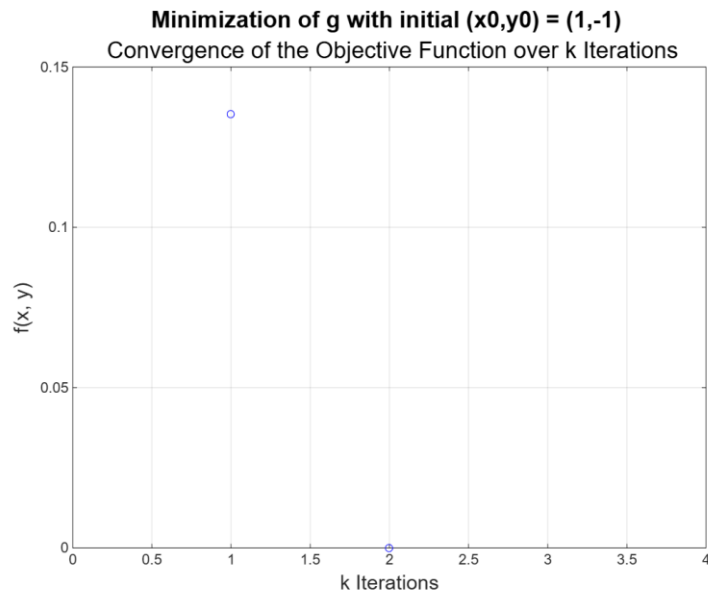
Εφαρμόζοντας τις 3 διαφορετικές περιπτώσεις επιλογής του g , για αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (1, -1)$ είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα ως προς τη σύγκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος.



Εικόνα 9: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (1, -1)$ με τη μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου και σταθερό g .



Εικόνα 10: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (1, -1)$ με τη μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου και του κανόνα Armijo για την επιλογή του g .



Εικόνα 81: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (1, -1)$ με τη μέθοδο της Newton με ελαχιστοποίηση του g με τη μέθοδο της Διχοτόμου με Παραγώγους.

Παρατηρούμε πως και στις τρεις περιπτώσεις ο αλγόριθμος δεν καταφέρνει να βρει το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό είναι λογικό καθώς υπάρχει εγκλωβισμός του αλγορίθμου στο τοπικό ελάχιστο $(x, y) = (0, 0)$. Πιο γρήγορα συγκλίνει η μέθοδος ελαχιστοποίησης του g (στη δεύτερη επανάληψη), ενώ η αμέσως πιο γρήγορη είναι αυτή με την επιλογή σταθερού g και τελευταία σε ταχύτητα δείχνει η χρήση του κανόνα Armijo, με διαφορά μεταξύ τους περίπου στις 10 επαναλήψεις.

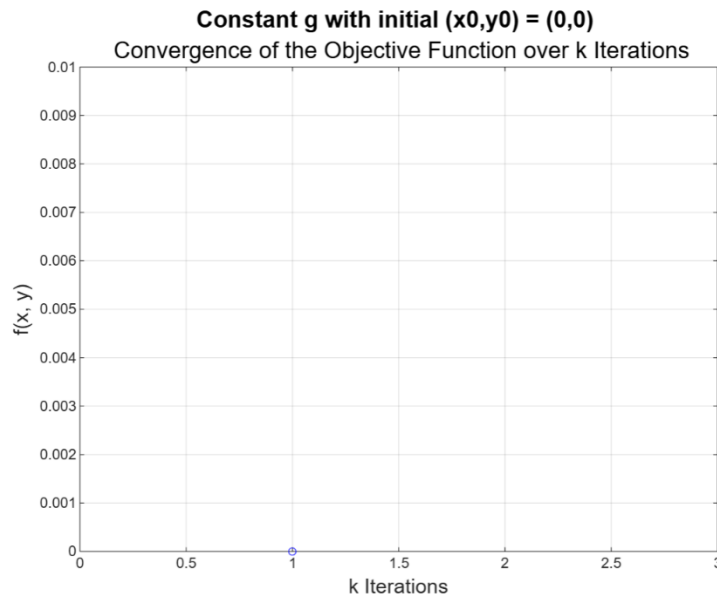
4 Θέμα 4^ο | Μέθοδος Newton

Στο Θέμα 4 ελαχιστοποιούμε την f με την χρήση της μεθόδου Newton. Αυτή η μέθοδος αναζητά το ελάχιστο στη κατεύθυνση $d_k = -\frac{1}{\nabla^2 f(x_k)} \nabla f(x_k)$ ενώ χρησιμοποιούμε το τύπο (5.2.16) του βιβλίου $x_{k+1} = x_k - g_k \frac{1}{\nabla^2 f(x_k)} \nabla f(x_k)$.

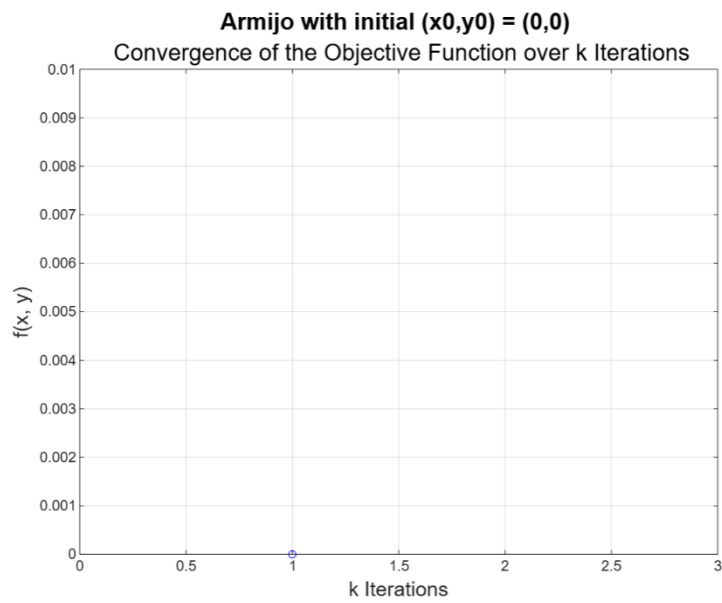
Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, για καθένα από τα 3 αρχικά σημεία υλοποιούμε 3 διαφορετικούς αλγορίθμους ανάλογα με τον τρόπο επιλογής του βήματος g και συγκεκριμένα με σταθερό, τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k + g \cdot dk)$ ως προς g και βάσει του κανόνα Armijo. Για κάθε μέθοδο χρησιμοποιούμε ως αρχικά σημεία τα $(0,0)$, $(-1,1)$ και $(1,-1)$.

4.1 Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (0, 0)$

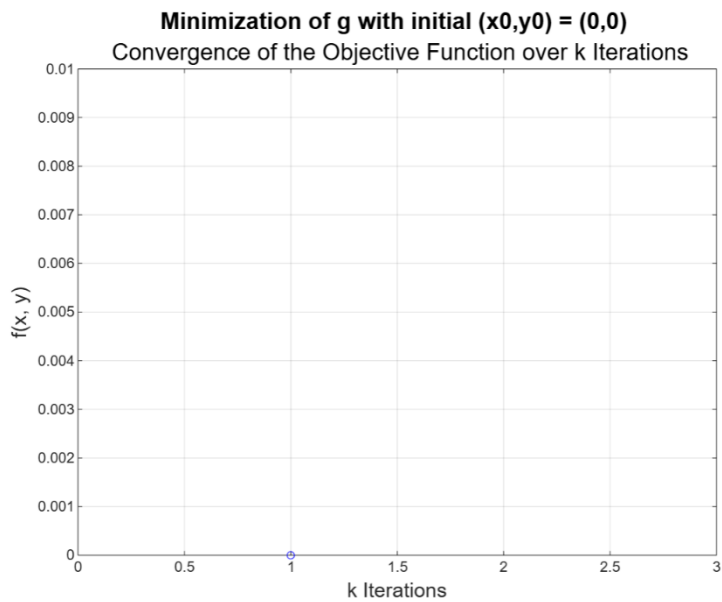
Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα της σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης όταν ακολουθούμε τη μέθοδο Newton



Εικόνα 12: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (0, 0)$ με τη μέθοδο της Newton και σταθερό g .



Εικόνα 13: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (0,0)$ με τη μέθοδο της Newton και του κανόνα Armijo για την επιλογή του g .



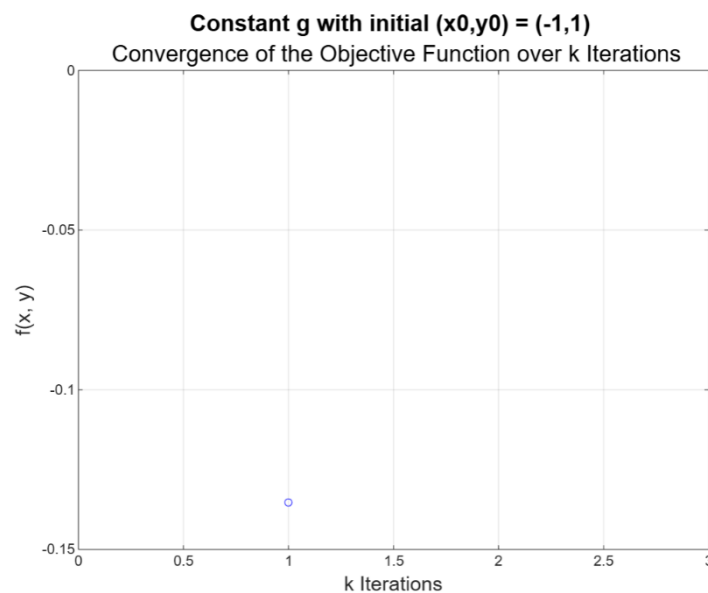
Εικόνα 14: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (0,0)$ με τη μέθοδο της Newton με ελαχιστοποίηση του g με τη μέθοδο της Διχοτόμου με Παραγώγους..

Παρατηρείται πως σε όλα τα διαγράμματα έχει συμβεί μόνο μια επανάληψη του αλγορίθμου, ξεκινώντας από την αρχική τιμή της f για το $(x_0, y_0) = (0,0)$. Αυτό συμβαίνει καθώς η συγκεκριμένη συνάρτηση δεν έχει θετικά ορισμένο τον εσσιανό πίνακα $\nabla^2 f(x)$ γεγονός που δεν επιτρέπει στη συγκεκριμένη μέθοδο να βγάλει κάποιο αποτέλεσμα καθώς για να εφαρμοστεί αυτή η μέθοδος ο θετικά ορισμένος εσσιανός είναι προαπαιτούμενο.

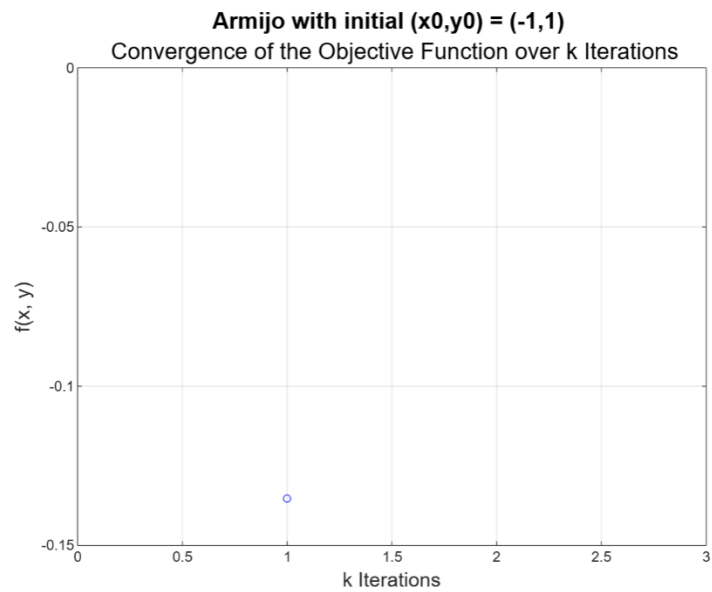
Για όλα τα αρχικά σημεία ισχύει το παραπάνω συμπέρασμα και έτσι σε κάθε διάγραμμα η f ξεκινάει από την αρχική της τιμή και δε υπάρχει δεύτερη επανάληψη του αλγορίθμου. Παρότι τα διαγράμματα δε παρουσιάζουν κάποια διαφορά, παρατίθενται για λόγους πληρότητας.

4.2 Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (-1, 1)$

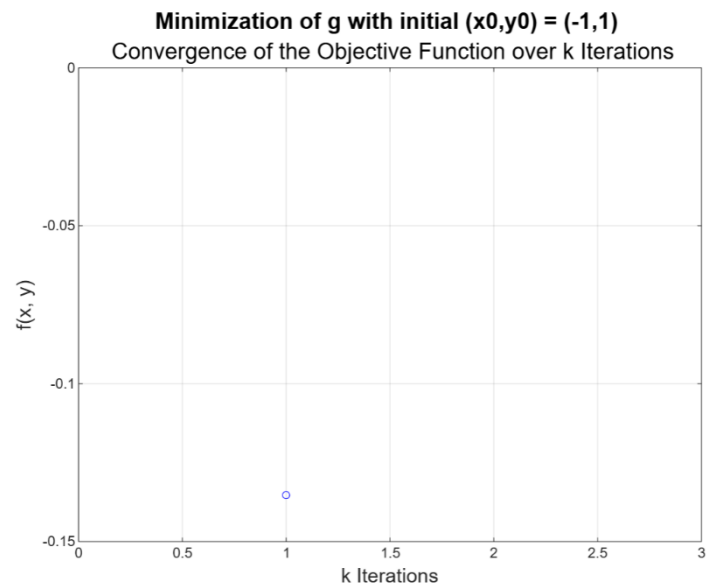
Εφαρμόζοντας τις 3 διαφορετικές περιπτώσεις επιλογής του g , για αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα ως προς τη σύγκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος.



Εικόνα 15: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ με τη μέθοδο της Newton και σταθερό g .



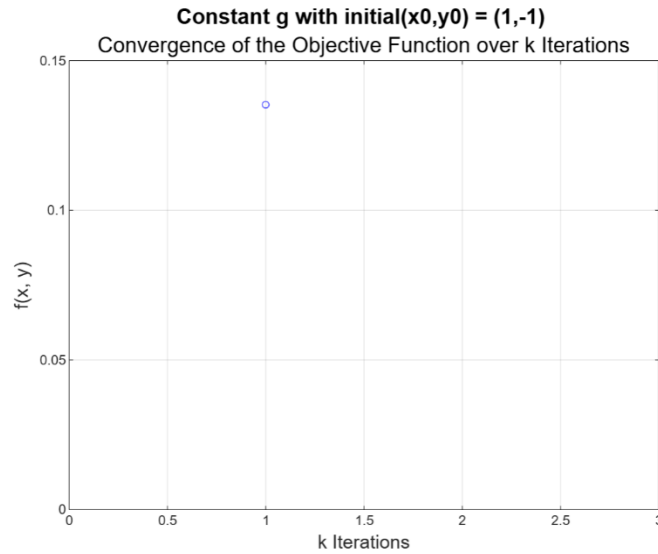
Εικόνα 16: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ με τη μέθοδο της Newton και του κανόνα Armijo για την επιλογή του g .



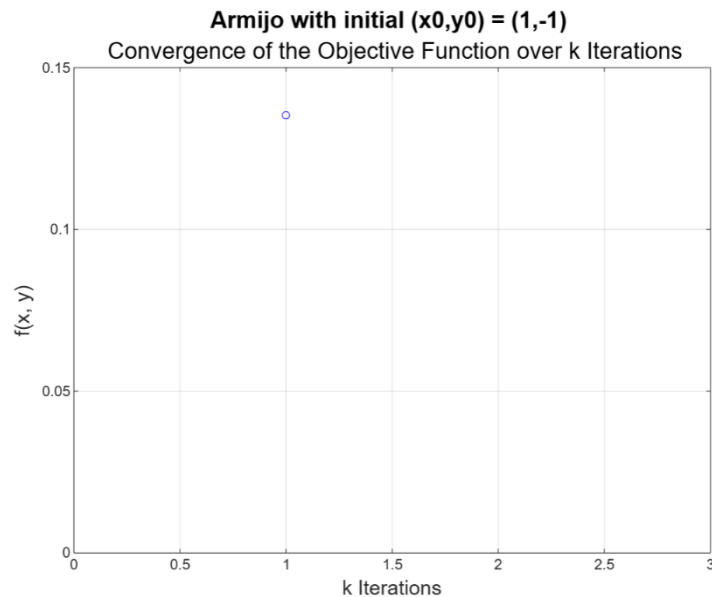
Εικόνα 17: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ με τη μέθοδο της Newton με ελαχιστοποίηση του g με τη μέθοδο της Διχοτόμου με Παραγώγους..

4.3 Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (1, -1)$

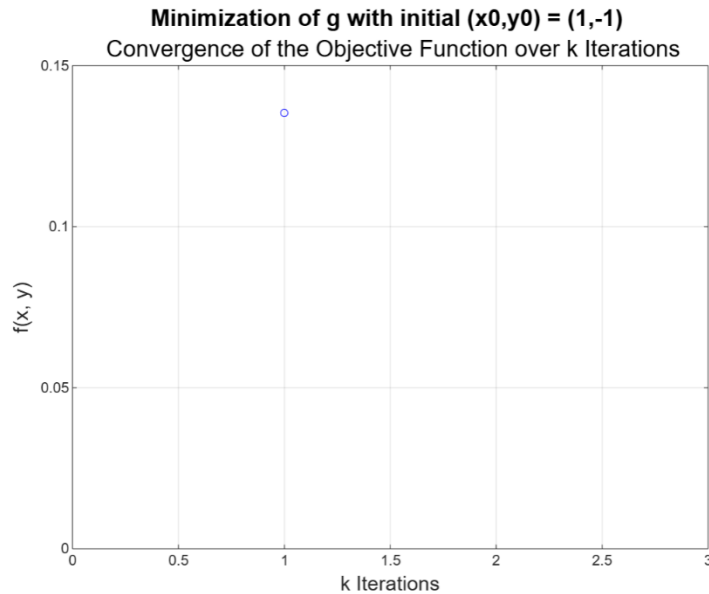
Εφαρμόζοντας τις 3 διαφορετικές περιπτώσεις επιλογής του g , για αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (1, -1)$ είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα ως προς τη σύγκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος.



Εικόνα 18: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (1, -1)$ με τη μέθοδο της Newton και σταθερό g .



Εικόνα 19: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (1, -1)$ με τη μέθοδο της Newton και του κανόνα Armijo για την επιλογή του g .



Εικόνα 20: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (1, -1)$ με τη μέθοδο της Newton με ελαχιστοποίηση του g με τη μέθοδο της Διχοτόμου με Παραγώγους.

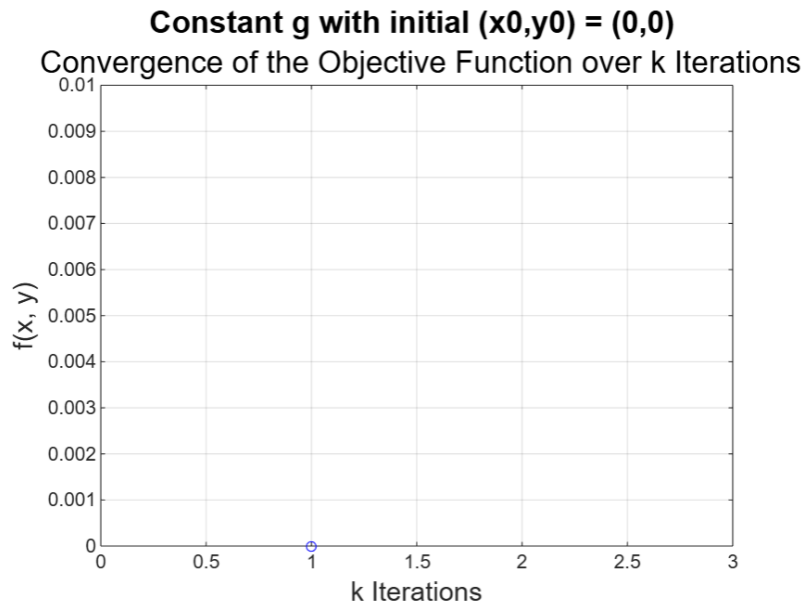
5 Θέμα 3^ο | Μέθοδος Levenberg-Marquardt

Στη συγκεκριμένη μέθοδο ξεκινάμε με μια τιμή για τη παράμετρο m_k και σε κάθε επανάληψη την αυξάνουμε κατά μια μονάδα ώσπου ο πίνακας $\nabla^2 f(x_k) + m_k I$ να είναι θετικά ορισμένος.

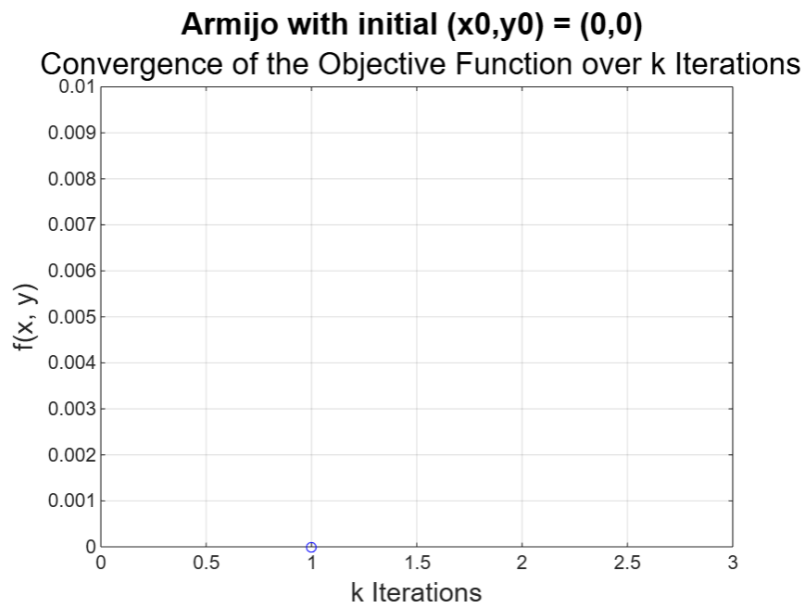
Αυτή η μέθοδος αυτή η μέθοδος λειτουργεί όπως τη Μέγιστη Κάθοδο όταν το m_k είναι αρκετά μεγάλο κάνοντας τον όρο $m_k I$ να υπερισχύει του όρου $\nabla^2 f(x_k)$, ενώ σαν την μέθοδο Newton όταν ο όρος $\nabla^2 f(x_k)$ υπερισχύει λόγω της μικρής τιμής του $m_k I$.

5.1 Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (0, 0)$

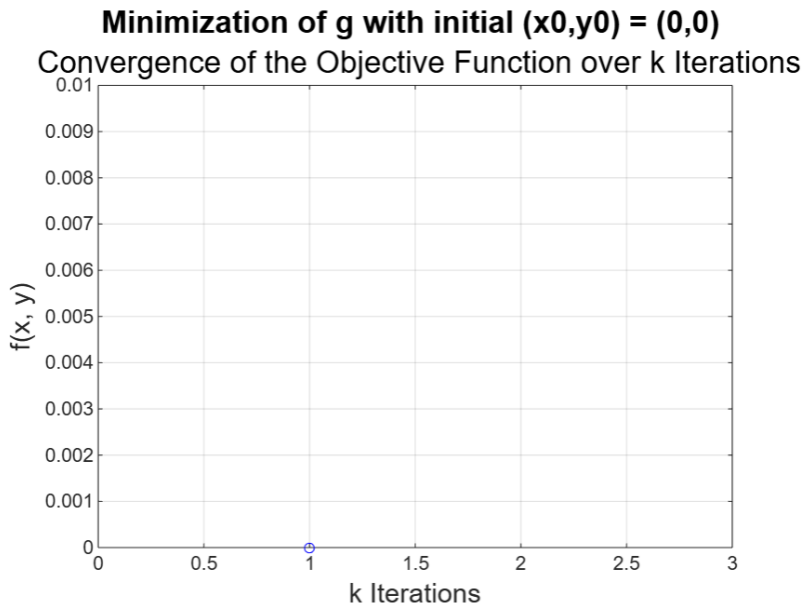
Εφαρμόζοντας τις 3 διαφορετικές περιπτώσεις επιλογής του g , για αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (0, 0)$ είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα ως προς τη σύγκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος.



Εικόνα 21: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (0, 0)$ με τη μέθοδο Levenberg-Marquardt και σταθερό g .



Εικόνα 22: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (0, 0)$ με τη μέθοδο Levenberg-Marquardt και του κανόνα Armijo για την επιλογή του g .



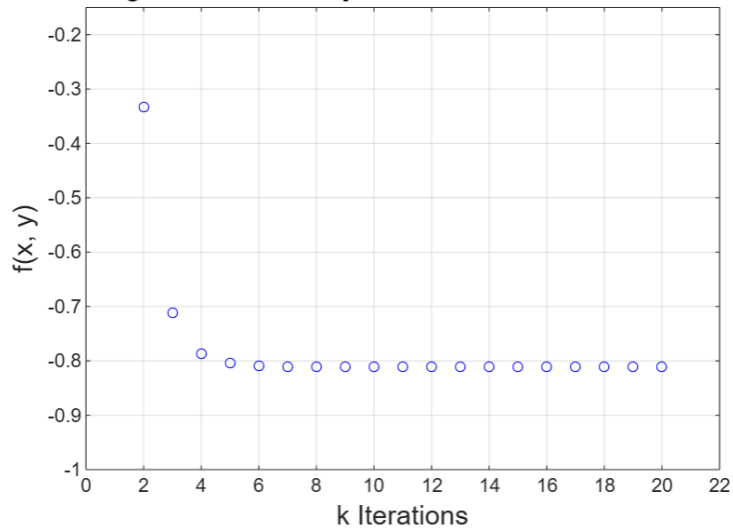
Εικόνα 23: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (0, 0)$ με τη μέθοδο Levenberg-Marquardt με ελαχιστοποίηση του g με τη μέθοδο της Διχοτόμου με Παραγώγους.

Παρατηρούμε πως και στις τρεις περιπτώσεις ο αλγόριθμος εγκλωβίζεται και πάλι στο σημείο $(0, 0)$. Όπως αναφέραμε και πριν αυτό συμβαίνει καθώς η αντικειμενική μας συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο αρχικό μας σημείο $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

5.2 Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (-1, 1)$

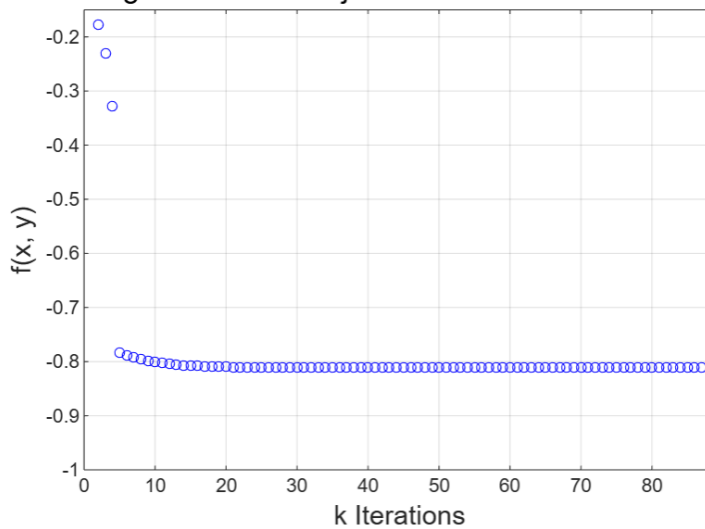
Εφαρμόζοντας τις 3 διαφορετικές περιπτώσεις επιλογής του g , για αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα ως προς τη σύγκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος. Δυστυχώς όμως όπως και στη Μέγιστη Κάθοδο, ελαχιστοποίηση της $f(x_k + g \cdot dk)$ ως προς g ο αλγόριθμος σταματάει στη τρίτη επανάληψη δίχως όμως να προλάβει να φθάσει στο ελάχιστο.

Constant g with initial $(x_0, y_0) = (-1, 1)$
 Convergence of the Objective Function over k Iterations

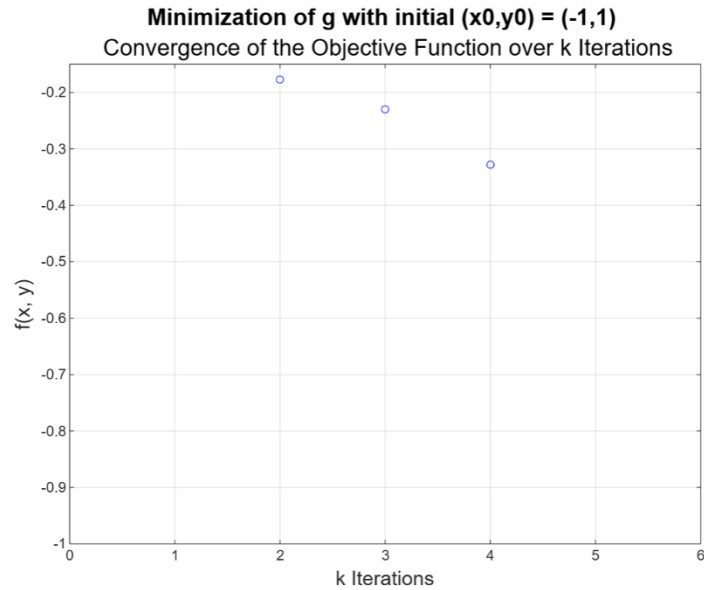


Εικόνα 24: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ με τη μέθοδο Levenberg-Marquardt και σταθερό g .

Armijo with initial $(x_0, y_0) = (-1, 1)$
 Convergence of the Objective Function over k Iterations



Εικόνα 25: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ με τη μέθοδο Levenberg-Marquardt και του κανόνα Armijo για την επιλογή του g .

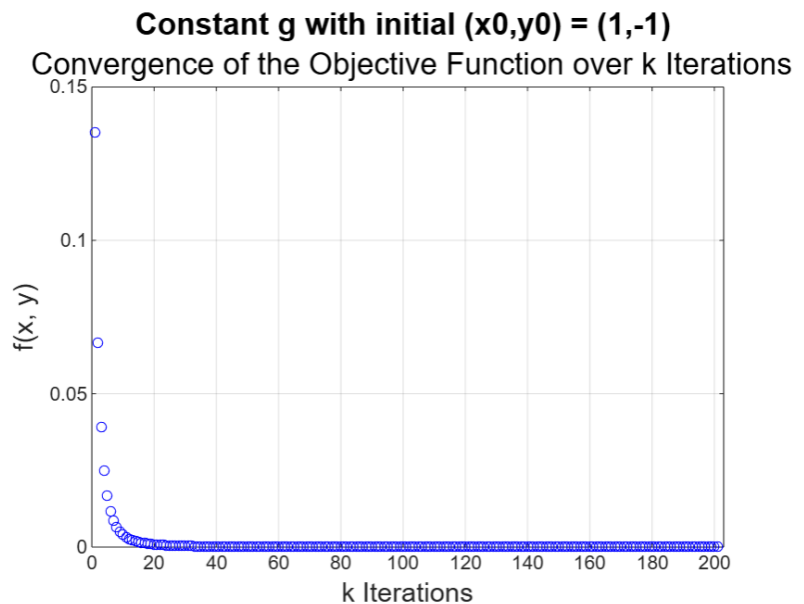


Εικόνα 26: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ με τη μέθοδο Levenberg-Marquardt με ελαχιστοποίηση του g με τη μέθοδο της Διχοτόμου με Παραγώγους.

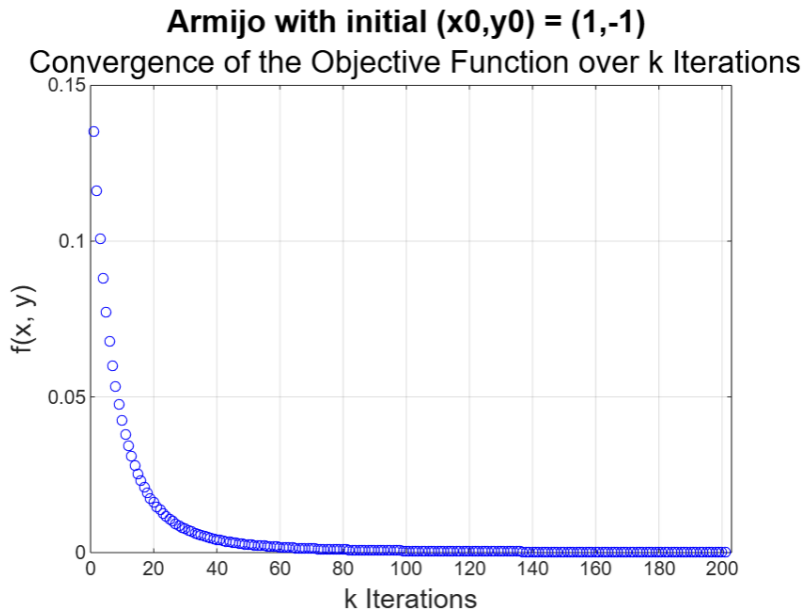
Παρατηρούμε πως και στις τρεις περιπτώσεις ο αλγόριθμος καταφέρνει να βρει το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης. Πιο γρήγορα συγκλίνει η μέθοδος με την επιλογή σταθερού g και με σχεδόν ίδια ταχύτητα και η μέθοδος με τη χρήση του κανόνα Armijo. Ενώ μπορεί να μην λειτουργεί σωστά η Μέγιστη Κάθοδος, φαίνεται πως μέχρι τη τελευταία της επανάληψη είναι πιο αργή από τις άλλες δυο.

5.3 Αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (1, -1)$

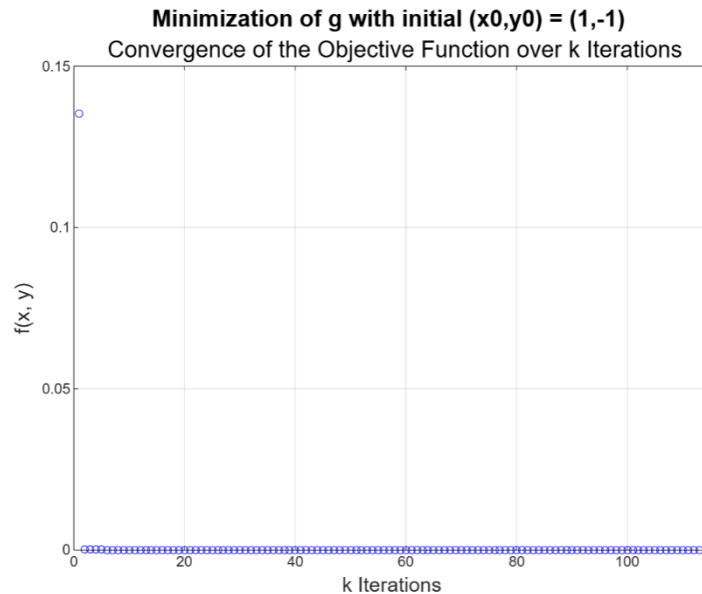
Εφαρμόζοντας τις 3 διαφορετικές περιπτώσεις επιλογής του g , για αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (1, -1)$ είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα ως προς τη σύγκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος.



Εικόνα 27: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (1, -1)$ με τη μέθοδο Levenberg-Marquardt και σταθερό g .



Εικόνα 28: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (1, -1)$ με τη μέθοδο Levenberg-Marquardt με ελαχιστοποίηση του g με τη μέθοδο της Διχοτόμου με Παραγώγους.



Εικόνα 29: Σύγκλιση της f για $(x_0, y_0) = (1, -1)$ με τη μέθοδο Levenberg-Marquardt με ελαχιστοποίηση του g με τη μέθοδο της Διχοτόμου με Παραγώγους.

Και εδώ, βλέπουμε πως και στις τρεις περιπτώσεις ο αλγόριθμος δεν καταφέρνει να βρει το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό είναι λογικό καθώς υπάρχει εγκλωβισμός του αλγορίθμου στο τοπικό ελάχιστο $(x, y) = (0, 0)$. Πιο γρήγορα συγκλίνει η μέθοδος ελαχιστοποίησης του g (στη δεύτερη επανάληψη), ενώ η αμέσως πιο γρήγορη είναι αυτή με την επιλογή σταθερού g και τελευταία σε ταχύτητα δείχνει η χρήση του κανόνα Armijo, με διαφορά μεταξύ τους περίπου στις 25 επαναλήψεις.

6 Τελικά Συμπεράσματα/Σύγκριση Μεθόδων

Λαμβάνοντας υπ' όψη όλα τα προαναφερθέντα συμπεράσματα και διαγράμματα σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης, καταλήγουμε στο γεγονός πως απ' όλες τις μεθόδους αναζήτησης η Levenberg-Marquardt είναι πιο γρήγορη. Το παραπάνω συμπέρασμα είναι εύλογο καθώς αυτή η μέθοδος λειτουργεί όπως τη Μέγιστη Κάθοδο όταν το m_k είναι αρκετά μεγάλο κάνοντας τον όρο $m_k I$ να υπερσχύει του όρου $\nabla^2 f(x_k)$, ενώ σαν την μέθοδο Newton όταν ο όρος $\nabla^2 f(x_k)$ υπερσχύει λόγω της μικρής τιμής του $m_k I$.

Επιπλέον, καταλαβαίνουμε πως μόνο για το αρχικό σημείο $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ καταφέρνουμε να φθάσουμε στο ελάχιστο της συνάρτησης μας καθώς ξεκινάμε ήδη από το αρνητικό ημιεπίπεδο (στη τιμή -0.1351 της f). Για τα άλλα δυο σημεία εγκλωβιζόμαστε στο σημείο $(x_0, y_0) = (0, 0)$ που αποτελεί τοπικό ελάχιστο.

Τέλος, για την αντικειμενική συνάρτηση που μας δόθηκε η μέθοδος Newton αποδείχθηκε «ανίκανη» να βρει το ελάχιστο καθώς δεν πληρούταν η αναγκαία συνθήκη του θετικά ορισμένου εσσιανού πίνακα $\nabla^2 f(x)$