Τεχνικές Βελτιστοποίησης

1η Εργαστηριακή Άσκηση

Ελαχιστοποίηση κυρτής συνάρτησης μιας μεταβλητής σε δοσμένο διάστημα

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών ΑΠΘ

7ο εξάμηνο

Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 2024

Υπεύθυνη εργασίας: Μανωλίδου Ανατολή

Email: amanolid@ece.auth.gr

ΑΕΜ: 10874

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Ζητούμενο της εργασίας είναι η ελαχιστοποίηση μιας δοσμένης κυρτής συνάρτησης όταν $x\epsilon[a, b]$ όπου $\alpha = -1$ και $b = 3$. Οι δοσμένες συναρτήσεις ήταν οι εξής:

$$f1(x) = (x-2)^2 + x\, ln(x+3)$$

$$f2(x) = e^{(-2x)} + (x-2)^2$$

$$f3(x) = e^{x}\,(x^3-1) + (x-1)sin(x)$$

Οι μέθοδοι που μας ζητήθηκαν να εφαρμόσουμε ήταν οι εξής:

- Μέθοδοι αναζήτησης ελαχίστου χωρίς την χρήση παραγώγων:

  Μέθοδος της Διχοτόμου,

  Μέθοδος του Χρυσού Τομέα,

  Μέθοδος Fibonacci.

- Μέθοδοι αναζήτησης με χρήση παραγώγων:

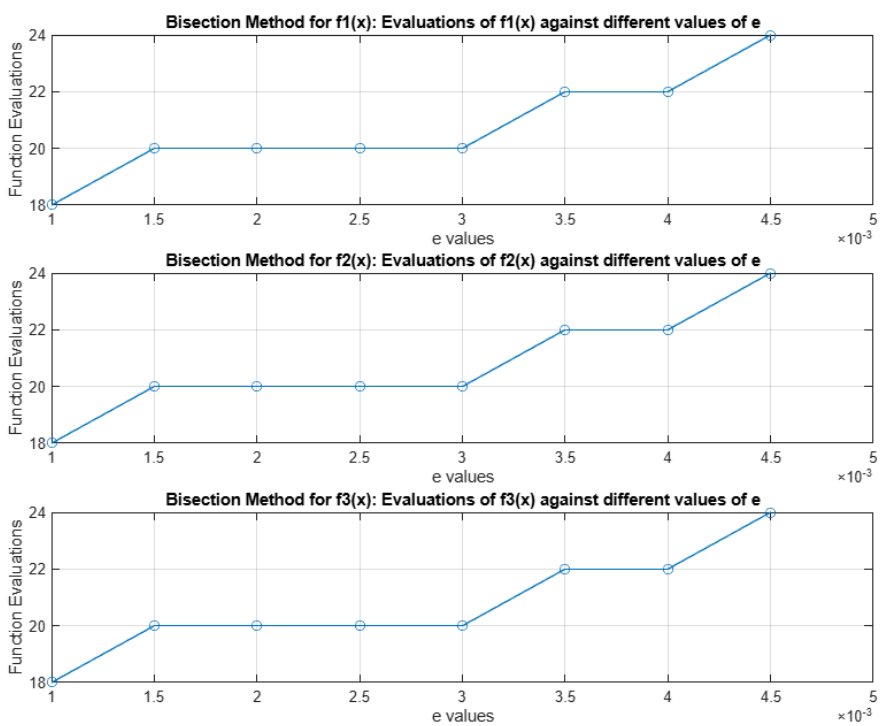
  Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου.

2 Θέμα 1ο | Μέθοδος Διχοτόμου χωρίς παραγώγους

2.1 Σταθερό l και μεταβλητό e

Η μέθοδος της διχοτόμου εστιάζει στη διαδοχική μείωση του εύρους ενός διαστήματος που περιέχει την ελάχιστη τιμή που και αναζητούμε. Αρχικά, ορίζουμε το αρχικό διάστημα $[a, b]$ και με τη χρήση μιας επαναληπτικής διαδικασίας, προσεγγίζουμε το επιθυμητό διάστημα $[ak, bk]$. Σε κάθε επανάληψη επιλέγονται δύο σημεία, αριστερά και δεξιά της διχοτόμου σε απόσταση e και σύμφωνα με το *Θεώρημα 5.1.1* του βιβλίου, το διάστημα αναπροσαρμόζεται και εν τέλη γίνεται όλο και μικρότερο. Η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου το μήκος του διαστήματος να γίνει μικρότερο του τελικού εύρους αναζήτησης l.

Για να μελετήσουμε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης έπρεπε να ακολουθήσουμε δυο τακτικές. Πρώτη τακτική που ακολουθήσαμε ήταν η εξής, διατηρούμε σταθερό το τελικό εύρος αναζήτησης $l = 0.01$ και μεταβάλλουμε τη σταθερά $\varepsilon > 0$. Συγκεκριμένα, δόθηκε στη σταθερά e ως αρχική τιμή η 0.001 ενώ σε κάθε διαφορετική δοκιμή του αλγορίθμου υπήρχε αύξηση της με βήμα 0.0005 λαμβάνοντας υπ' όψη το κάτω φράγμα $(\frac{l}{2})$ της σταθεράς (καθώς η μέθοδος αλλιώς δε συγκλίνει). Ακολουθώντας τη τακτική αυτή και εφαρμόζοντας στο MATLAB τον *Αλγόριθμο 5.1.3* του βιβλίου, είχαμε ως αποτέλεσμα τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις:

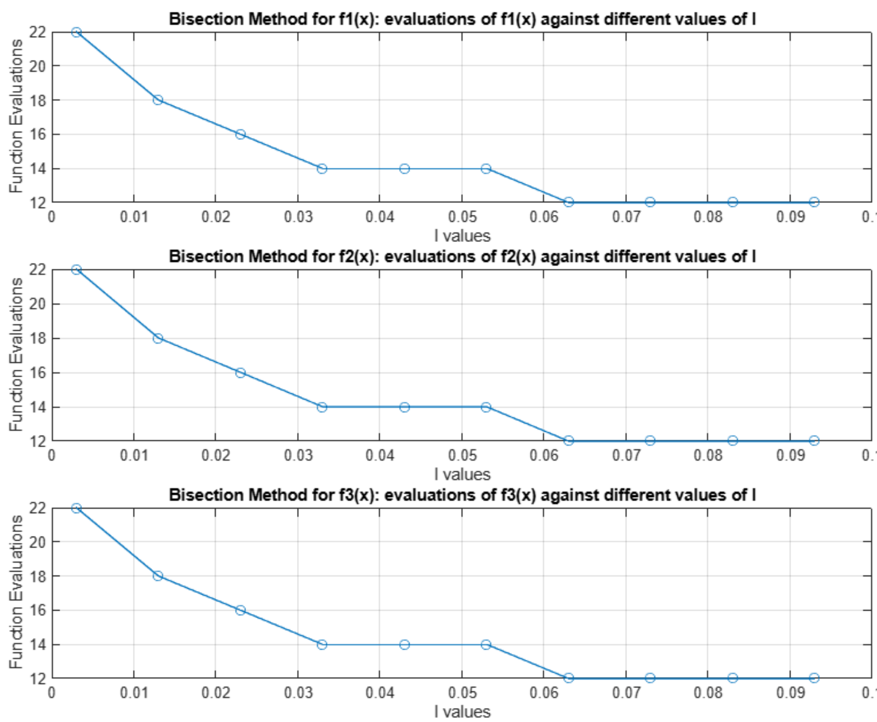


Εικόνα 1: Άξονας y πλήθος υπολογισμών της fi(x). Άξονας x διάφορες τιμές της σταθεράς e.

Παρατηρούμε πως όσο αυξάνουμε τη σταθερά e, τόσο αυξάνεται και το πλήθος των υπολογισμών της εκάστοτε f. Το παραπάνω συμπέρασμα μας φαίνεται λογικό καθώς εάν η απόσταση από τη διχοτόμο γίνει μεγαλύτερη θα πρέπει να χωρίσουμε σε περισσότερα κομμάτια το διάστημα το οποίο μελετάμε άρα θα χρειαστούμε και περισσότερες επαναλήψεις του αλγορίθμου δηλαδή περισσότερους υπολογισμούς της f.

2.2 Σταθερό e και μεταβλητό l

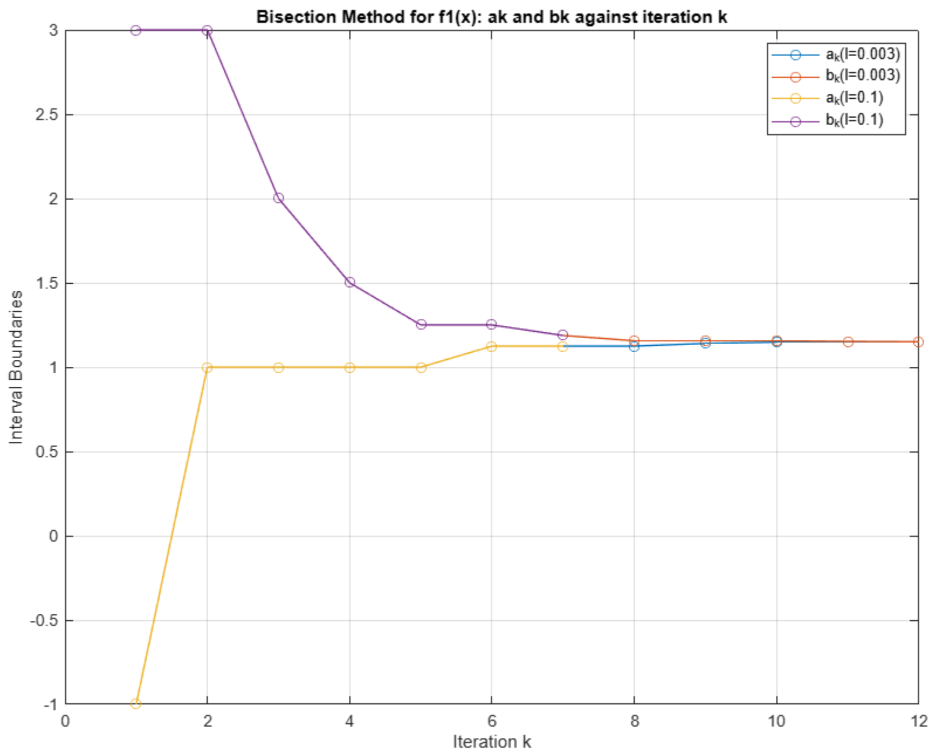
Όπως αναφέραμε και προηγουμένως για την εφαρμογή της μεθόδου της διχοτόμου χρησιμοποιήσαμε δυο τακτικές. Στη δεύτερη τακτική κρατήσαμε σταθερή τη σταθερά e ενώ το τελικό εύρος αναζήτησης l το μεταβάλαμε. Συγκεκριμένα, στο e δόθηκε η τιμή $e = 0.0001$ ενώ για το l δόθηκε αρχική δοκιμαστική τιμή $l = 0.03$ και τελική δοκιμαστική $l = 0.1$ με βήμα ίσο με 0.01. Ακολουθώντας τη τακτική αυτή είχαμε ως αποτέλεσμα τις παρακάτω γραφικές:



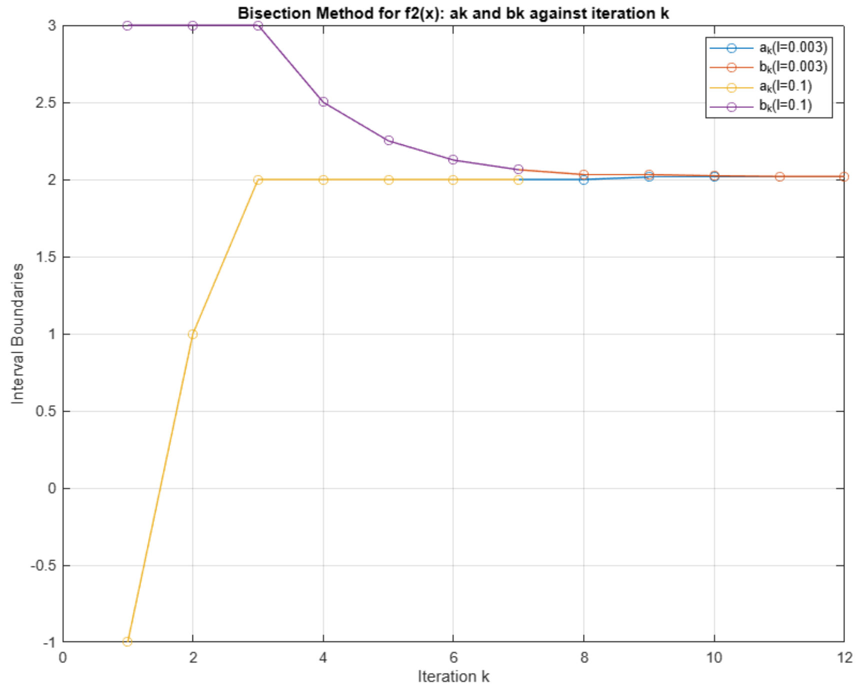
Εικόνα 2: Άξονας y πλήθος υπολογισμών της fi(x). Άξονας χ διάφορες τιμές της σταθεράς l.

Παρατηρούμε πως όσο αυξάνουμε τη σταθερά l, τόσο μειώνεται το πλήθος των υπολογισμών της εκάστοτε f. Το παραπάνω συμπέρασμα μας φαίνεται λογικό καθώς εάν το τελικό εύρος αναζήτησης που επιθυμούμε γίνει μεγαλύτερο, τόσο λιγότερα κομμάτια του διαστήματος θα πρέπει να χωρίσουμε άρα θα χρειάζονται λιγότερες επαναλήψεις του αλγορίθμου δηλαδή λιγότεροι υπολογισμοί της f.

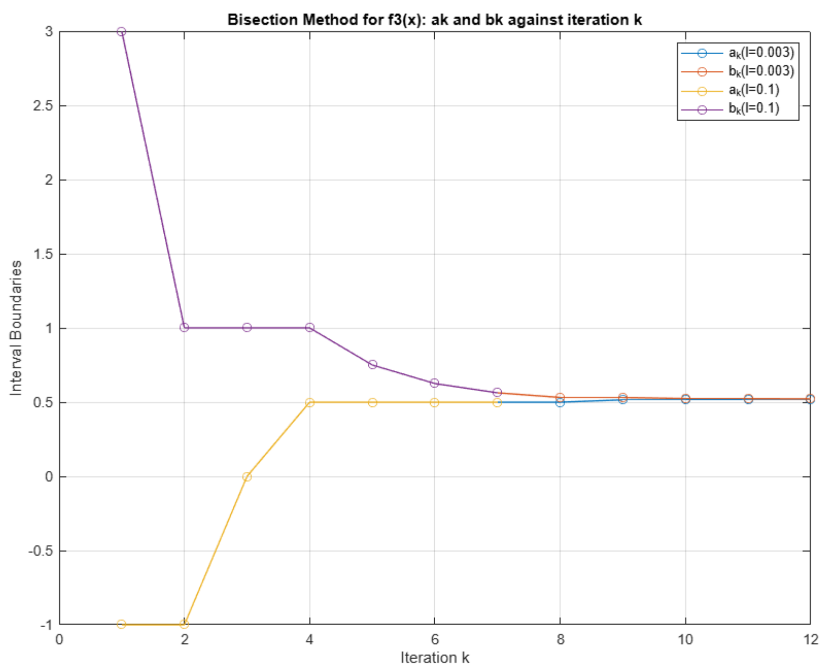
Επιπλέον, για τη συγκεκριμένη τακτική έπρεπε να μελετήσουμε πως μεταβάλλεται το εύρος του διαστήματος μετά από κάθε δοκιμή του αλγορίθμου, για διαφορετικές τιμές του l. Συγκεκριμένα, επιλέχθηκαν οι τιμές $l = 0.03$ και $l = 0.1$. Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις που εξαγάγαμε.



Εικόνα 3: Άξονας x επαναλήψεις του αλγορίθμου. Άξονας y άκρα διαστήματος ak και bk.



Εικόνα 4: Άξονας x επαναλήψεις του αλγορίθμου. Άξονας y άκρα διαστήματος ak και bk.



Εικόνα 5: Άξονας x επαναλήψεις του αλγορίθμου. Άξονας y άκρα διαστήματος ak και bk.

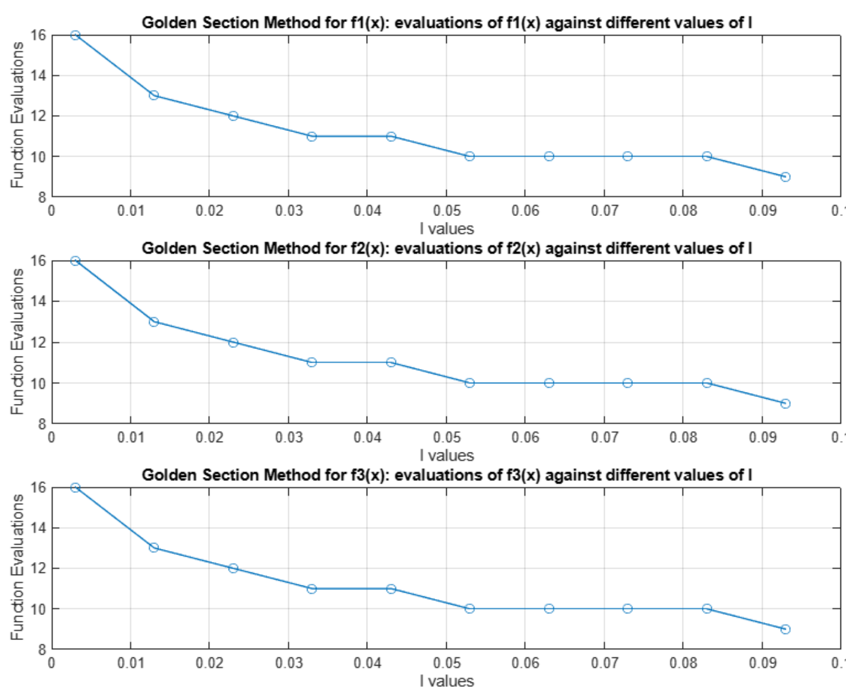
Παρατηρούμε λοιπόν πως και για τις τρεις συναρτήσεις στη περίπτωση όπου $l = 0.1$ χρειάζονται 7 επαναλήψεις του αλγορίθμου ενώ όταν $l = 0.003$ χρειάζονται 12 επαναλήψεις. Αυτό επιβεβαιώνει το συμπέρασμα που διεξαγάγαμε παραπάνω, δηλαδή ότι μεγαλύτερη τιμή του l έχει ως αποτέλεσμα λιγότερους υπολογισμούς της fi δηλαδή λιγότερες επαναλήψεις του αλγορίθμου.

3 Θέμα 2ο |Μέθοδος Χρυσού Τομέα

3.1 Μεταβλητό l και σταθερό e

Επόμενη μέθοδος ήταν η αυτή του Χρυσού Τομέα. Στη συγκεκριμένη μέθοδο ξεκινάμε με το αρχικό μας διάστημα $[a, b] = [-1,3]$ και σύμφωνα με τον *Αλγόριθμο* 5.1.2 του βιβλίου, υπολογίζουμε τα σημεία $x1(k)$ και $x2(k)$. Έπειτα υπολογίζουμε τα $f(x1(k))$ και $f(x2(k))$ τα συγκρίνουμε και αναλόγως ακολουθούμε το *Θεώρημα 5.1.1* του βιβλίου ώστε να βρούμε το νέο διάστημα μελέτης, ενώ χρησιμοποιούμε τη σταθερά γ για να υπολογίσουμε τα $x1(k)$ και $x2(k)$ (ανάλογα τη περίπτωση) που θα αποτελούν άκρο του νέου διαστήματος.

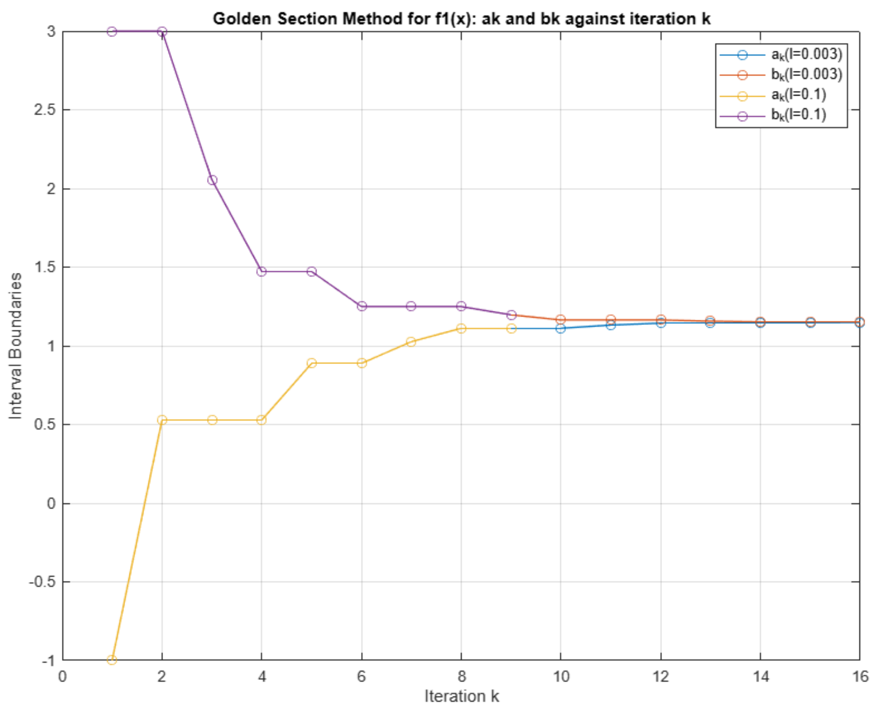
Γι' αυτή τη μέθοδο ζητούμενο ήταν η εφαρμογή διαφορετικών τιμών για τη σταθερά l. Συγκεκριμένα, για το l δόθηκε αρχική δοκιμαστική τιμή $l = 0.03$ και τελική δοκιμαστική $l = 0.1$ με βήμα ίσο με 0.01. Ακολουθώντας τη τακτική αυτή και τον αλγόριθμο στο MATLAB είχαμε ως αποτέλεσμα τις παρακάτω γραφικές. Η πρώτη εικόνα, δείχνει το πλήθος των υπολογισμών της f για κάθε διαφορετική τιμή του l που δοκιμάσαμε.



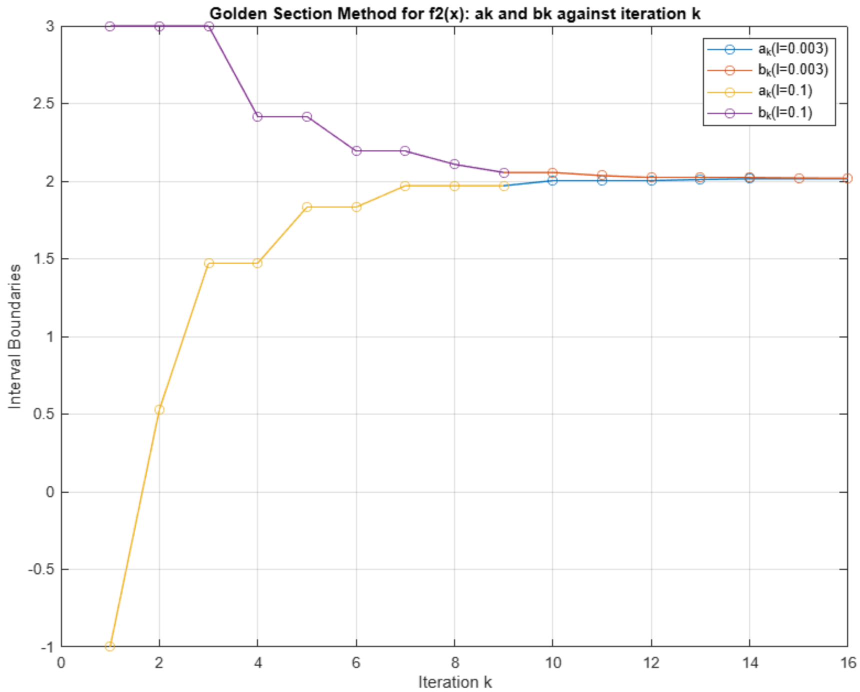
Εικόνα 6: Άξονας y πλήθος υπολογισμών της fi(x). Άξονας x διάφορες τιμές της σταθεράς l.

Ακριβώς όπως παρατηρήθηκε και στη μέθοδο της διχοτόμου για τη συγκεκριμένη τακτική όσο αυξάνουμε τη σταθερά l, τόσο μειώνεται το πλήθος των υπολογισμών της εκάστοτε f. Το παραπάνω συμπέρασμα μας φαίνεται λογικό καθώς εάν το τελικό εύρος αναζήτησης που επιθυμούμε γίνει μεγαλύτερο, τόσο λιγότερα κομμάτια του διαστήματος θα πρέπει να χωρίσουμε άρα θα χρειάζονται λιγότερες επαναλήψεις του αλγορίθμου δηλαδή λιγότεροι υπολογισμοί της f.

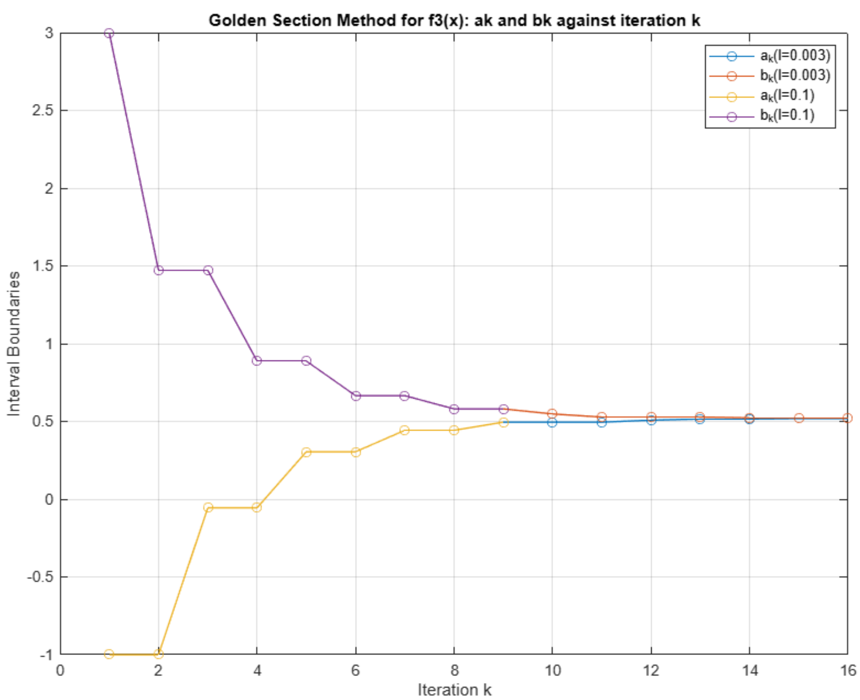
Επιπλέον, έπρεπε να μελετήσουμε πως μεταβάλλεται το εύρος του διαστήματος μετά από κάθε δοκιμή του αλγορίθμου, για διαφορετικές τιμές του l. Συγκεκριμένα, επιλέχθηκαν οι τιμές $l = 0.03$ και $l = 0.1$. Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις που εξαγάγαμε.



Εικόνα 7: Άξονας x επαναλήψεις του αλγορίθμου. Άξονας y άκρα διαστήματος ak και bk.



Εικόνα 8: Άξονας x επαναλήψεις του αλγορίθμου. Άξονας y άκρα διαστήματος ak και bk.



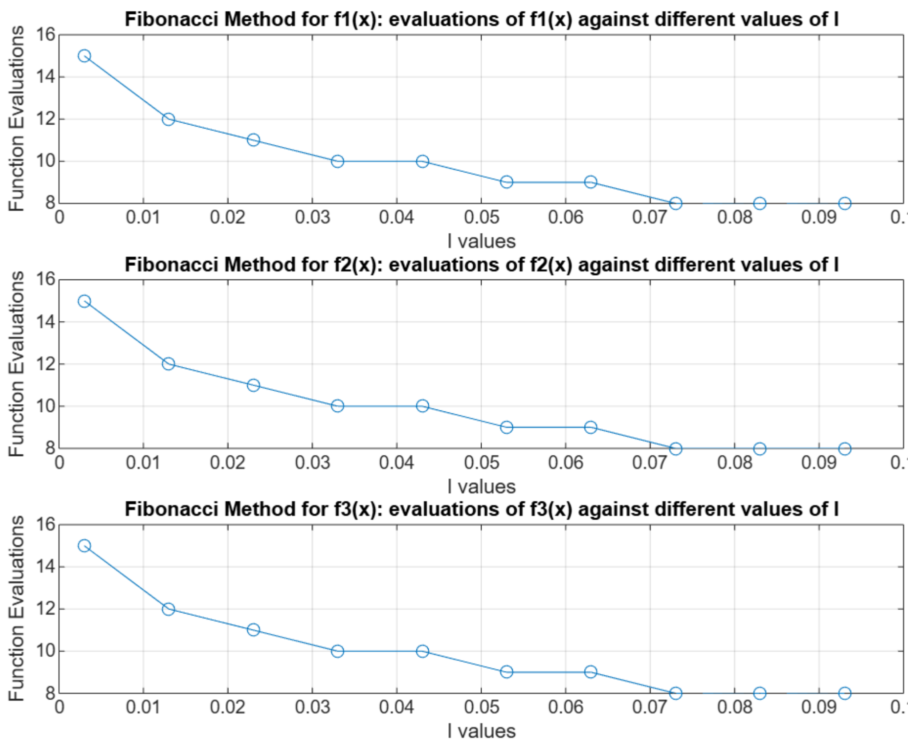
Εικόνα 9: Άξονας x επαναλήψεις του αλγορίθμου. Άξονας y άκρα διαστήματος ak και bk.

Και σε αυτή τη μέθοδο παρατηρούμε την ίδια συμπεριφορά όπως και στη μέθοδο της Διχοτόμου. Συγκεκριμένα και για τις τρεις συναρτήσεις στη περίπτωση όπου $l = 0.1$ χρειάζονται 9 επαναλήψεις του αλγορίθμου ενώ όταν $l = 0.003$ χρειάζονται 16 επαναλήψεις. Και πάλι επιβεβαιώνεται το συμπέρασμα ότι μεγαλύτερη τιμή του l έχει ως αποτέλεσμα λιγότερους υπολογισμούς της fi δηλαδή λιγότερες επαναλήψεις του αλγορίθμου.

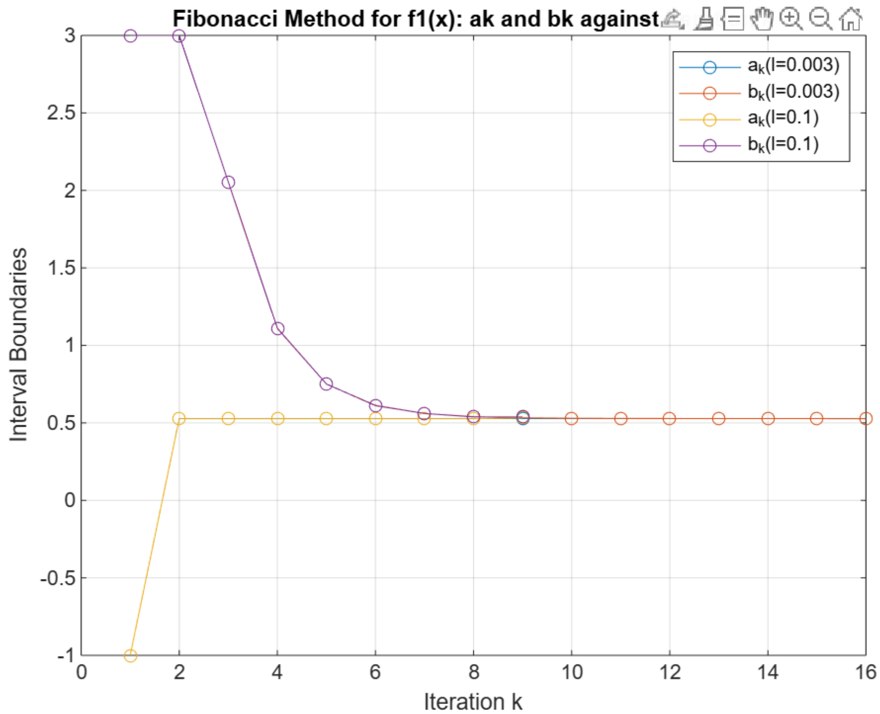
4 Θέμα 3ο |Μέθοδος Fibonacci

4.1 Μεταβλητό l και σταθερό e

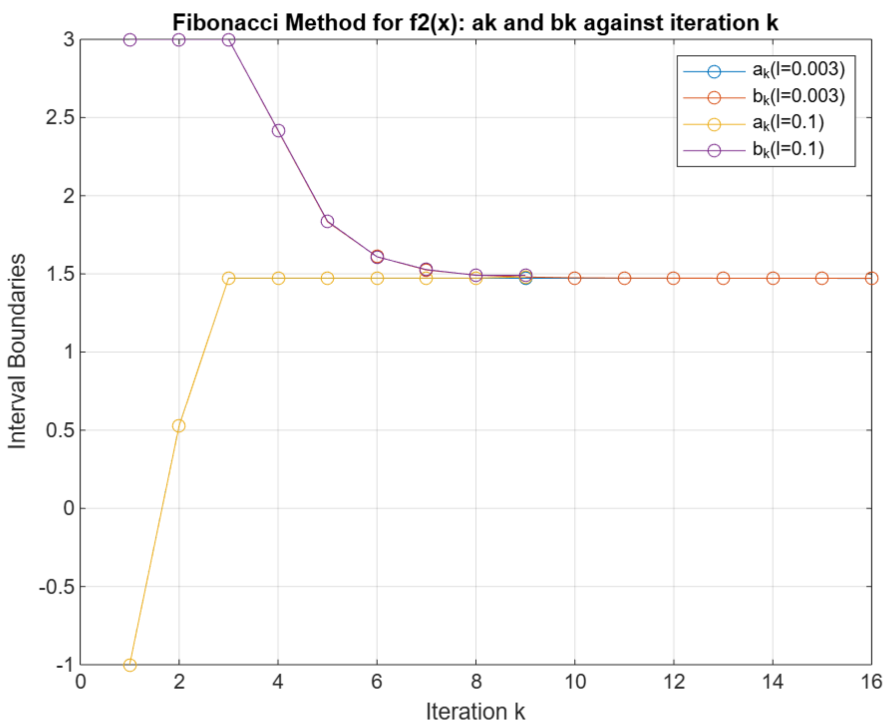
Επόμενη μέθοδος ήταν η αυτή του Fibonacci. Στη συγκεκριμένη μέθοδο χρησιμοποιείται η ακολουθία Fibonacci έτσι ώστε να υπολογιστούν εκ των προτέρων τα σημεία εντός του διαστήματος μελέτης. Ακολουθώντας λοιπόν τον $Αλγόριθμο$ 5.1.3 του βιβλίου και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για διάφορες τιμές του l και συγκεκριμένα για αρχική δοκιμαστική τιμή $l = 0.03$ και τελική δοκιμαστική $l = 0.1$ με βήμα ίσο με 0.01, είχαμε ως αποτέλεσμα τις παρακάτω γραφικές:



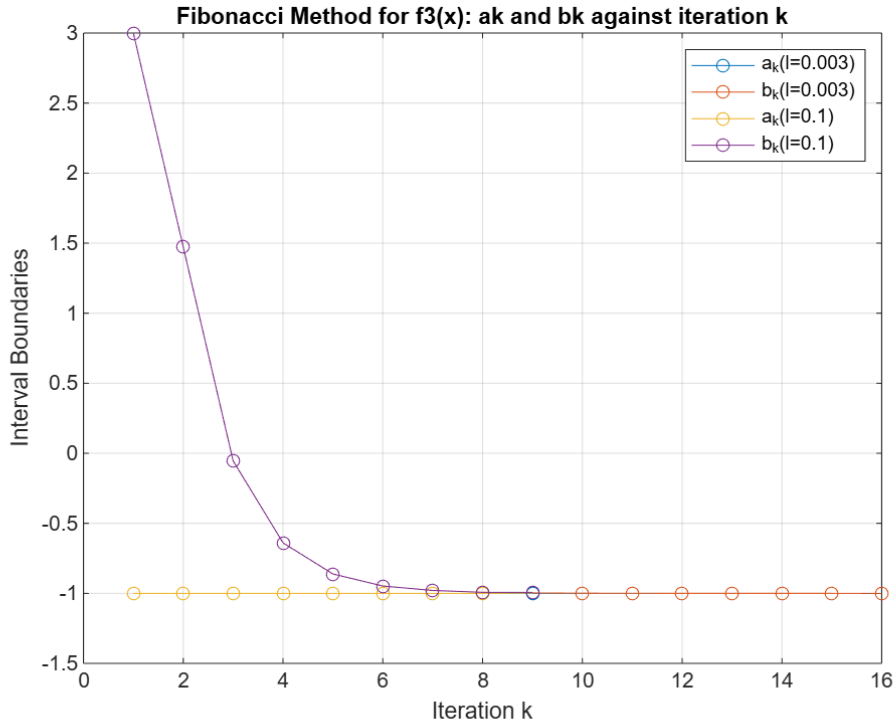
Εικόνα 10: Άξονας y πλήθος υπολογισμών της fi(x). Άξονας x διάφορες τιμές της σταθεράς l.



Εικόνα 11: Άξονας x επαναλήψεις του αλγορίθμου. Άξονας y άκρα διαστήματος ak και bk.



Εικόνα 12: Άξονας x επαναλήψεις του αλγορίθμου. Άξονας y άκρα διαστήματος ak και bk.



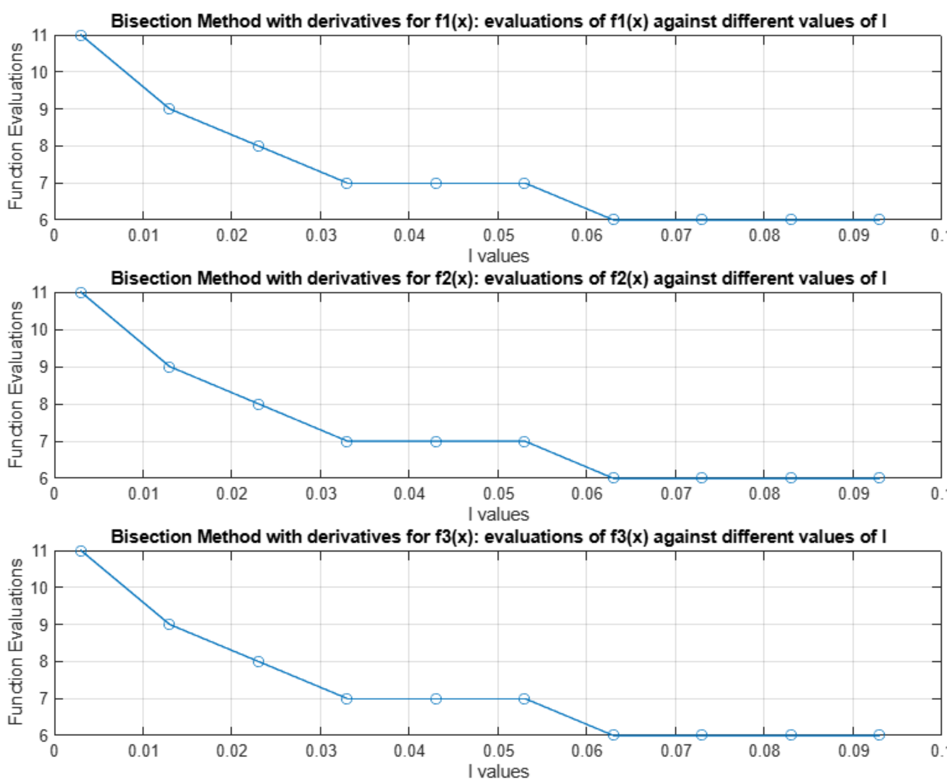
Εικόνα 13: Άξονας x επαναλήψεις του αλγορίθμου. Άξονας y άκρα διαστήματος ak και bk.

Και σε αυτή τη μέθοδο παρατηρούμε την ίδια συμπεριφορά όπως και στις προηγούμενες δυο. Συγκεκριμένα και για τις τρεις συναρτήσεις στη περίπτωση όπου $l = 0.1$ χρειάζονται 8 επαναλήψεις του αλγορίθμου ενώ όταν $l = 0.003$ χρειάζονται 16 επαναλήψεις. Και πάλι επιβεβαιώνεται το συμπέρασμα ότι μεγαλύτερη τιμή του l έχει ως αποτέλεσμα λιγότερους υπολογισμούς της fi δηλαδή λιγότερες επαναλήψεις του αλγορίθμου.

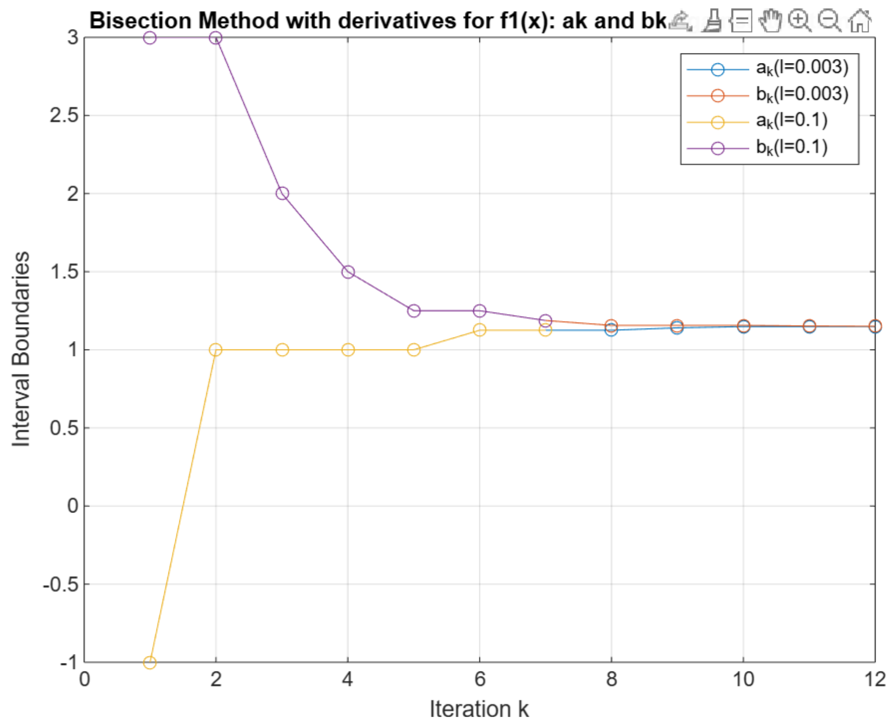
5 Θέμα 4ο |Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση Παραγώγων

5.1 Μεταβλητό l και σταθερό e

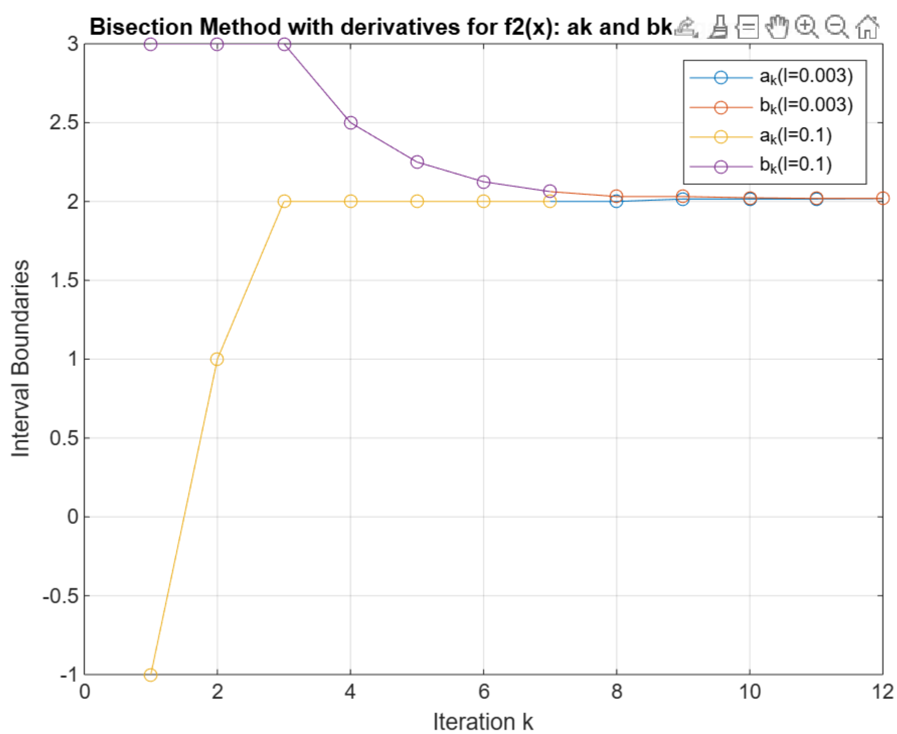
Επόμενη μέθοδος ήταν η αυτή της Διχοτόμου αλλά αυτή τη φορά με χρήση παραγώγων. Η χρήση των παραγώγων βοηθάει στον αποτελεσματικότερο εντοπισμό του ελαχίστου. Αναλυτικότερα, ο αλγόριθμος υπολογίζει τη παράγωγο της συνάρτησης στο μέσο του διαστήματος μελέτης, αναγνωρίζει έτσι τη μονοτονία της και περιορίζει αναλόγως το διάστημα. Όταν η παράγωγος πλησιάσει στο 0 τότε τερματίζει και επιστρέφει το τελικό διάστημα. Ακολουθώντας τον $Αλγόριθμο$ 5.1.4 του βιβλίου και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για διάφορες τιμές του l και συγκεκριμένα για αρχική δοκιμαστική τιμή $l = 0.03$ και τελική δοκιμαστική $l = 0.1$ με βήμα ίσο με 0.01, είχαμε ως αποτέλεσμα τις παρακάτω γραφικές:



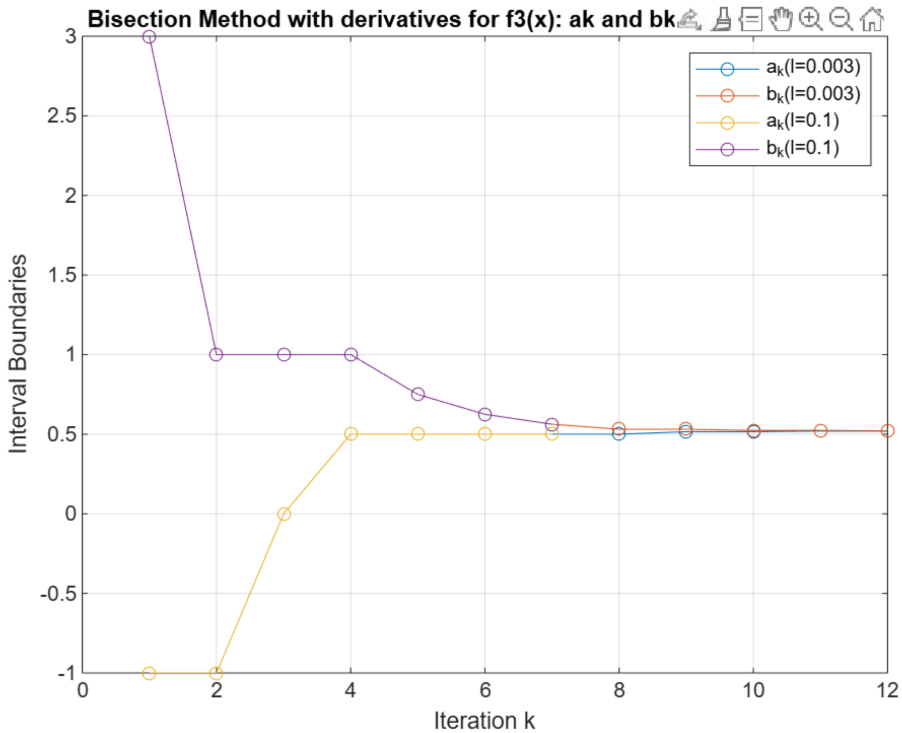
Εικόνα 14: Άξονας y πλήθος υπολογισμών της fi(x). Άξονας x διάφορες τιμές της σταθεράς l.



Εικόνα 15: Άξονας x επαναλήψεις του αλγορίθμου. Άξονας y άκρα διαστήματος ak και bk.



Εικόνα 16: Άξονας x επαναλήψεις του αλγορίθμου. Άξονας y άκρα διαστήματος ak και bk.



Εικόνα 17: Άξονας x επαναλήψεις του αλγορίθμου. Άξονας y άκρα διαστήματος ak και bk.

Όπως και στις προηγούμενες μεθόδους παρατηρούμε την ίδια συμπεριφορά. Συγκεκριμένα και για τις τρεις συναρτήσεις στη περίπτωση όπου $l = 0.1$ χρειάζονται 7 επαναλήψεις του αλγορίθμου ενώ όταν $l = 0.003$ χρειάζονται 12 επαναλήψεις. Και πάλι επιβεβαιώνεται το συμπέρασμα ότι μεγαλύτερη τιμή του l έχει ως αποτέλεσμα λιγότερους υπολογισμούς της fi δηλαδή λιγότερες επαναλήψεις του αλγορίθμου.

6 Σύγκριση των μεθόδων

Έχοντας εφαρμόσει και τις τέσσερις μεθόδους και σύμφωνα με όλες τις γραφικές παραστάσεις που εξαγάγαμε, καταλήγουμε στα παρακάτω συμπεράσματα σχετικά με την αποδοτικότητα της κάθε μεθόδου και συγκριτικά με όλες τις υπόλοιπες.

Πιο γρήγορη αποδείχτηκε η μέθοδος της Διχοτόμησης με Παραγώγους ενώ οι αμέσως πιο γρήγορες ήταν η Fibonacci και η Χρυσή Τομή. Η μέθοδος της Διχοτόμησης χωρίς παραγώγους απαιτεί τους περισσότερους υπολογισμούς της f, γι' αυτό και αποδείχθηκε η πιο αργή. Το πλεονέκτημα των μεθόδων Fibonacci και Χρυσή Τομή είναι πως σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου χρησιμοποιούμε τιμές της f που είχαμε ήδη υπολογίσει σε προηγούμενη επανάληψη, οπότε απαιτείται μόνο ένας επιπλέον υπολογισμός της f. Στη Διχοτόμηση με Παραγώγους όμως, απαιτείται ένας αρχικός υπολογισμός και ένας μόνο επιπλέον σε κάθε επανάληψη. Ως αποτέλεσμα λιγότεροι υπολογισμοί και μεγαλύτερη ταχύτητα. Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο παρακάτω πίνακα:

Μέθοδος	Κλήσεις f στη πρώτη επανάληψη	Κλήσεις f στις επόμενες επαναλήψεις
Διχοτόμηση χωρίς Παραγώγους	2	2
Χρυσή Τομή	2	1
Fibonacci	2	1
Διχοτόμηση με Παραγώγους	1	1