Τεχνικές Βελτιστοποίησης

3η Εργαστηριακή Άσκηση

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών ΑΠΘ

7ο εξάμηνο

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 2024

Υπεύθυνη εργασίας: Μανωλίδου Ανατολή

Email: amanolid@ece.auth.gr

ΑΕΜ: 10874

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Αντικείμενο αυτής της εργασίας είναι το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας δοσμένης συνάρτησης δύο μεταβλητών, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους Μέγιστη Κάθοδος αλλά και Μέγιστη Κάθοδος με Προβολή. Πέρα από την εφαρμογή των δυο μεθόδων υπό διάφορες περιπτώσεις για το βήμα g και το s, ζητούμενο ήταν και η σύγκριση αυτών.

Η αντικειμενική συνάρτηση μας παρουσιάζεται παρακάτω. Η ελάχιστη της τιμή είναι η $(x, y) = (0,0)$.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \;\; f(x,y) = \frac{1}{3}{x_1}^2 + 3{x_2}^2, \quad x = [x_1 x_2]^T$$

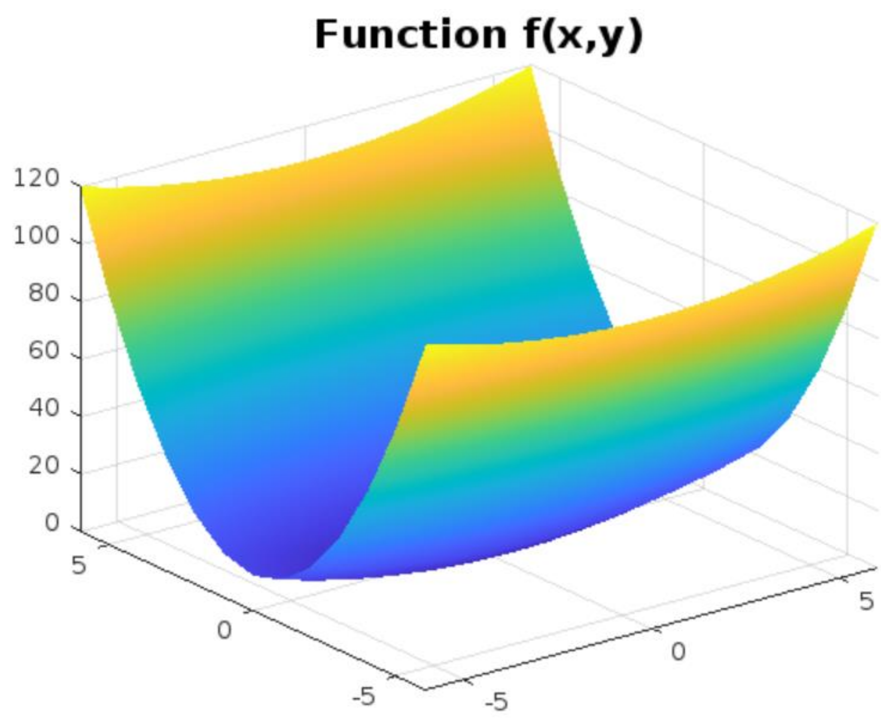

Figure 1: Η αντικειμενική συνάρτηση

Θέμα 1ο |Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου

Για το Θέμα 1, χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος της Μέγιστης Καθόδου από το προηγούμενο εργαστήριο. Και στις τέσσερις περιπτώσεις για την επιλογή του g, εφαρμόσαμε ως αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (2,2)$. Παρακάτω παρατίθενται οι γραφικές παραστάσεις σύγκλισης της f ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων αλλά και η απόδειξη των αποτελεσμάτων που πήραμε.

2.1 Βήμα $g = 0.1$

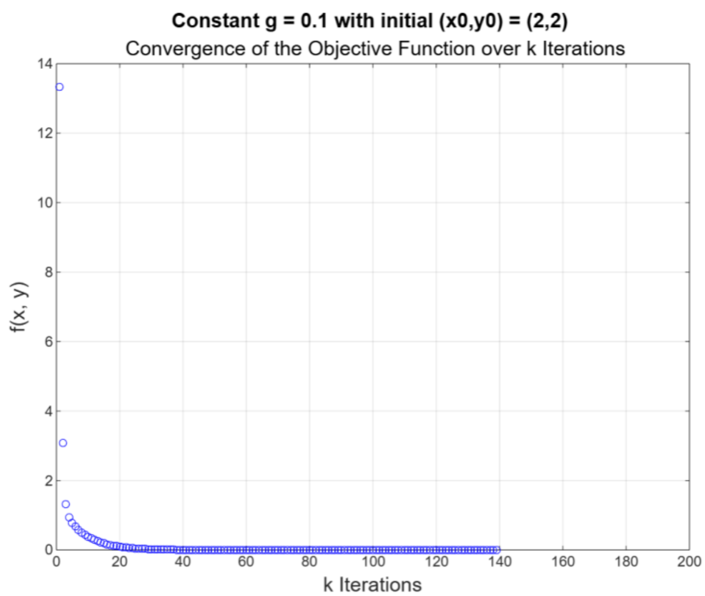

Figure 2: Σύγκλιση της αντικειμενικής με g = 0.1 και επιλογή αρχικού σημείου (x_0,y_0) = (2,2) ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων.

Παρατηρούμε, πως με αυτή την επιλογή του g ο αλγόριθμος καταφέρνει και συγκλίνει και έτσι έπειτα από σχεδόν 25 επαναλήψεις έχει φθάσει κοντά στο ελάχιστο της αντικειμενικής μας συνάρτησης.

2.2 Βήμα $g = 0.3$

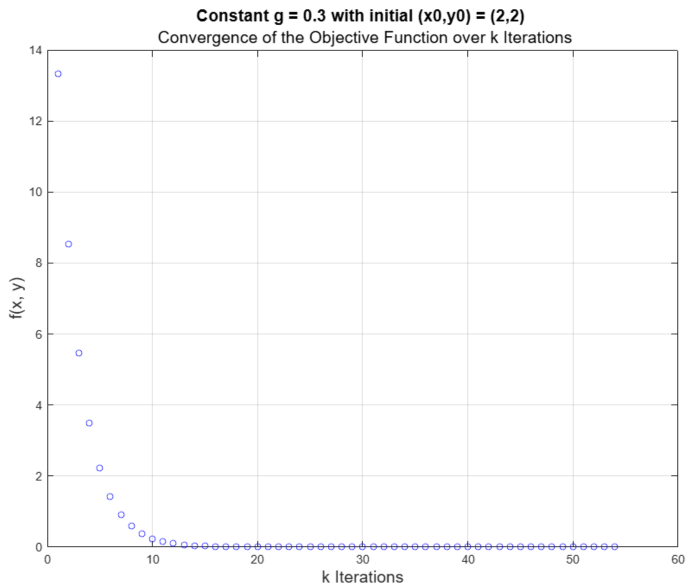

Figure 3 : Σύγκλιση της αντικειμενικής με g = 0.3 και επιλογή αρχικού σημείου $(x_0,y_0) = (2,2)$ ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων.

Εδώ παρατηρούμε, πως ο αλγόριθμος και πάλι καταφέρνει και συγκλίνει αλλά με μεγαλύτερη ταχύτητα συγκριτικά με την προηγούμενη επιλογή του g. Συγκεκριμένα, έπειτα από σχεδόν 15 επαναλήψεις έχει φθάσει κοντά στο ελάχιστο της αντικειμενικής μας συνάρτησης.

2.3 Βήμα $g = 3$

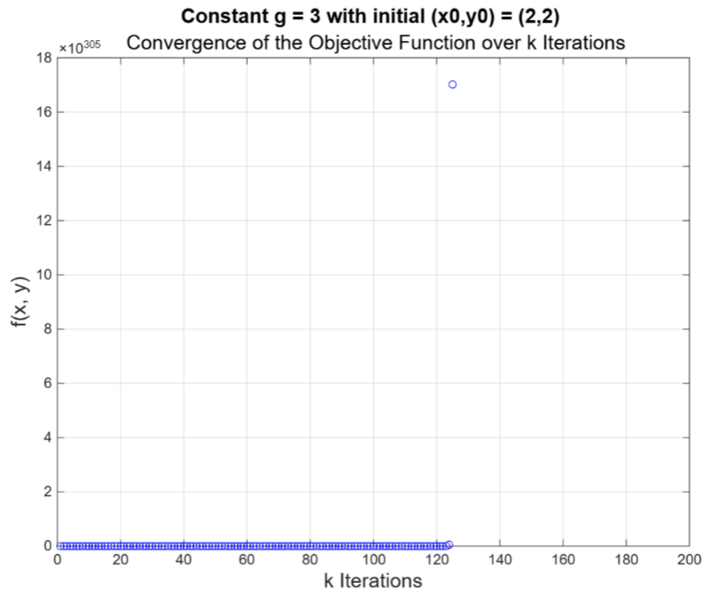

Figure 4: Σύγκλιση της αντικειμενικής με g = 3 και επιλογή αρχικού σημείου (x_0,y_0) = (2,2) ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων.

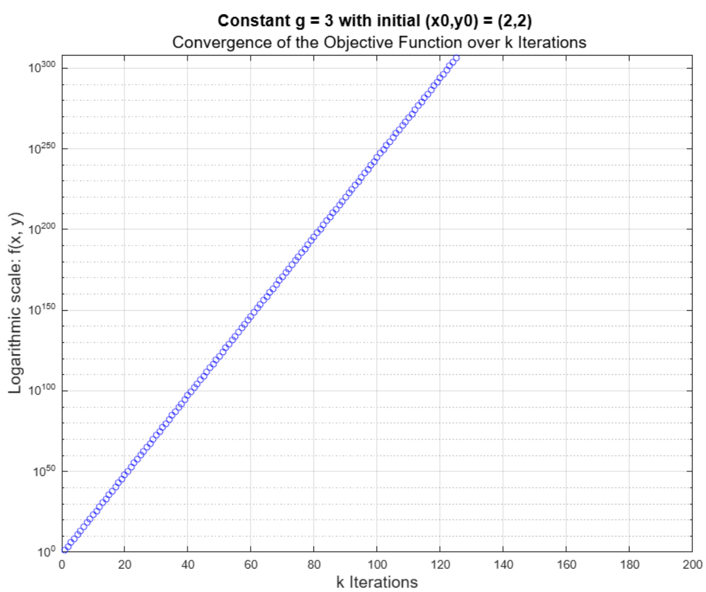

Figure 5: Σύγκλιση της αντικειμενικής με g = 3 και επιλογή αρχικού σημείου (x_0,y_0) = (2,2) ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων, σε λογαριθμική κλίμακα.

Εδώ παρατίθενται η γραφική και σε λογαριθμική κλίμακα για καλύτερη ανάγνωση. Παρατηρούμε όμως πως ο αλγόριθμος δεν έχει καταφέρνει να συγκλείσει.

2.4 Βήμα $g = 5$

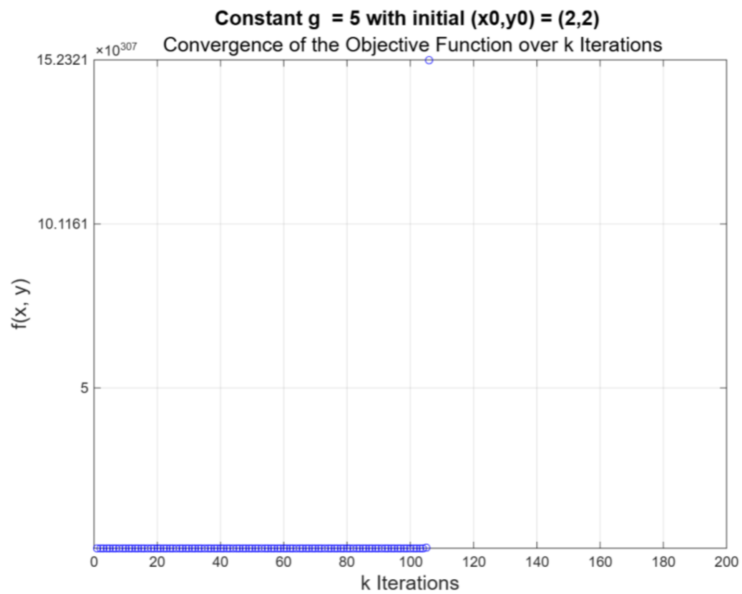

Figure 6: Σύγκλιση της αντικειμενικής με g = 5 και επιλογή αρχικού σημείου (x_0,y_0) = (2,2) ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων.

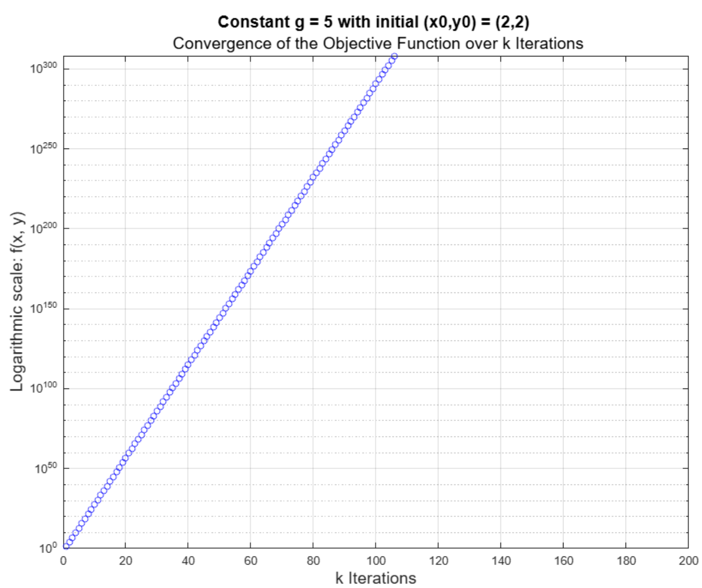

Figure 7: Σύγκλιση της αντικειμενικής με g = 5 και επιλογή αρχικού σημείου (x_0,y_0) = (2,2) ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων, σε λογαριθμική κλίμακα.

Όπως και στη προηγούμενη περίπτωση, παρατίθενται η γραφική και σε λογαριθμική κλίμακα για καλύτερη ανάγνωση. Και εδώ βλέπουμε πως ο αλγόριθμος δεν έχει καταφέρνει να συγκλείσει.

2.5 Μαθηματική ανάλυση αποτελεσμάτων

Για να εξηγήσουμε τη συμπεριφορά του αλγορίθμου στις παραπάνω περιπτώσεις θα ακολουθήσουμε τη παρακάτω μαθηματική ανάλυση.

Αρχικά υπολογίζουμε το gradient της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x_1 \\ 6x_2 \end{bmatrix}. \text{ Οπότε } \nabla f(x_{1k}, x_{2k}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x_{1k} \\ 6x_{2k} \end{bmatrix}$$

Έπειτα ακολουθώντας το τύπο (5.2.7) του βιβλίου[1] προκύπτει οι εξής σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} x_{1k+1} \\ x_{2k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix} - g_k \nabla f(x_{1k}, x_{2k})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1k+1} = x_{1k} - g_k \frac{2}{3} x_{1k} & (1) \\ x_{2k+1} = x_{2k} - g_k 6x_{2k} & (2) \end{cases}$$

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή η f παρουσιάζει το ολικό της ελάχιστο στο σημείο $(x, y) = (0,0)$, αυτό σημαίνει πως για $k \longrightarrow \infty$ θα πρέπει $x_{1k} = 0$ και $x_{2k} = 0$. Αυτό σημαίνει πως οι σχέσεις (1) και (2) θα πρέπει να συγκλίνουν, οπότε έχουμε ως εξής:

$$\begin{cases} \left|1 - \frac{2}{3}g_k\right| < 1 \\ |1 - 6g_k| < 1 \end{cases} \Rightarrow |1 - 6g_k| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - 6g_k < 1 \Rightarrow \frac{1}{3} > g_k > 0$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως για να μπορέσει να συγκλείσει ο αλγόριθμος θα πρέπει $g_k \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψη τη μαθηματική ανάλυση μπορούμε να ερμηνεύσουμε καλύτερα τα αποτελέσματα. Τόσο στη πρώτη όσο και στη δεύτερη περίπτωση ($g_k = 0.1$ και $g_k = 0.3$ αντίστοιχα) παρατηρήσαμε πως ο αλγόριθμος σύγκλινε προς το ελάχιστο, το αποτέλεσμα αυτό είναι εύλογο καθώς και οι δυο τιμές g_k βρίσκονται μέσα στο απαιτούμενο διάστημα $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Ως μικρή παρατήρηση, η μόνη διαφορά που παρουσιάστηκε στις δυο αυτές περιπτώσεις ήταν η ταχύτητα σύγκλισης, συγκεκριμένα στη δεύτερη είχαμε μεγαλύτερη ταχύτητα το οποίο είναι λογικό λόγω του μεγαλύτερου βήματος. Όσο όμως αφορά τις περιπτώσεις 2 και 3 είχαμε δει πως ο αλγόριθμος δεν σύγκλεινε. Πλέον αυτό μας φαίνεται λογικό καθώς ούτε η τιμή $g_k = 3$ αλλά ούτε και η $g_k = 5$ βρίσκονται μέσα στο απαιτούμενο διάστημα $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, με αποτέλεσμα ο αλγόριθμος να αποκλίνει.

[1] Γεώργιος Α. Ροβιθάκης. Τεχνικές Βελτιστοποίησης. ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2024.

3 Θέμα 2ο |Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

Τα θέματα 2,3 και 4 αφορούν την εφαρμογή της Μέγιστης Καθόδου με Προβολή. Σύμφωνα με το βιβλίο, η συγκεκριμένη μέθοδος ακολουθεί τη παρακάτω λογική:

Ξεκινάμε με ένα εφικτό σημείο και εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο της Μέγιστης Καθόδου. Εάν το νέο σημείο είναι εφικτό συνεχίζουμε με τον ίδιο αλγόριθμο ενώ εάν δεν είναι εφικτό το νέο σημείο βρίσκουμε την προβολή αυτού στο κυρτό σύνολο X. Η διαδικασία επαναλαμβάνετε έως ότου καταλήξουμε σε στάσιμο σημείο. Τα εφικτά σημεία δηλαδή του αλγορίθμου είναι της μορφής:

$x_{k+1} = x_k + g_k(\bar{x}_k - x_k)$ σχέση (6.1.8) [2] όπου $\bar{x}_k = Pr\{x_k - s_k \nabla f(x_k)\}$ σχέση (6.1.9)[2]

Όταν όμως το x_k είναι εφικτό σημείο, ισχύει $\bar{x}_k = x_k - s_k \nabla f(x_k)$ άρα $x_{k+1} = x_k - g_k s_k \nabla f(x_k)$, δηλαδή πλέον έχουμε βήμα $g_k' = g_k s_k$ (3) για το οποίο θα ισχύει $g_k' \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Συγκεκριμένα και στα 3 θέματα εφαρμόσαμε τους περιορισμούς $-10 \leq x_1 \leq 5$ και $-8 \leq x_2 \leq 12$, ενώ σε κάθε θέμα είχαμε διαφορετικό σημείο εκκίνησης, διαφορετικά s_kκαι g_k ενώ η ακρίβεια ε ήταν σταθερή σε όλα στη τιμή $\varepsilon = 0.01$.

3.1 Περίπτωση s_k = 5, g_k = 0.5, σημείο εκκίνησης το $(x_0, y_0) = (5, -5)$ και ακρίβεια ε = 0.01

Παρακάτω παρατίθενται η γραφική της σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων.

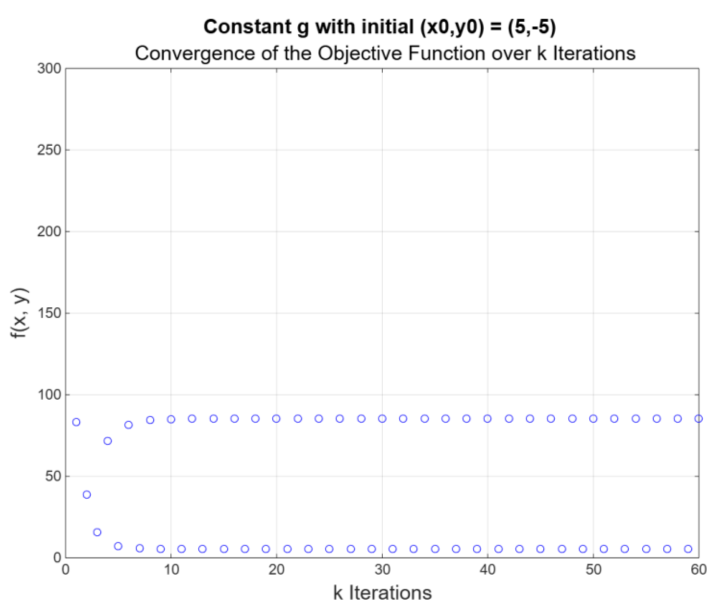

Figure 8: Σύγκλιση της αντικειμενικής με g =0. 5 και επιλογή αρχικού σημείου (x_0,y_0) = (5,-5) ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων.

[2] Γεώργιος Α. Ροβιθάκης. Τεχνικές Βελτιστοποίησης. ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2024.

Παρατηρούμε πως η μέθοδος δε συγκλίνει στο ελάχιστο αλλά πιο συγκεκριμένα παρουσιάζει μια ταλάντωση. Σύμφωνα με τη σχέση (3) που ορίσαμε, εδώ ισχύει $g_k' = g_k s_k = 5 * 0.5 = 2.5 > \frac{1}{3}$, άρα είναι λογικό το γεγονός πως δε συγκλίνει η μέθοδος. Συγκρίνοντας τώρα αυτά τα αποτελέσματα με το Θέμα 1, στις περιπτώσεις 3 και 4 όπου και εκεί είχαμε g_k το οποίο ξεπερνούσε το απαιτούμενο διάστημα, η διαφορά είναι πως στη μέθοδο με τη προβολή καταφέρνουμε να "εγκλωβίσουμε" την f και έτσι δεν αυξάνεται εκθετικά η τιμή της όπως στο Θέμα 1. Έτσι υπάρχει περίπτωση σε αυτή τη μέθοδο τη χρονική στιγμή που θα τερματίσει ο αλγόριθμος να έχουμε τυχαία βρεθεί στο ελάχιστο της συνάρτησης, κάτι το οποίο δε συμβαίνει στην κλασσική προσέγγιση της Μέγιστης Καθόδου.

4 Θέμα 3ο |Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

4.1 Περίπτωση s_k = 15, g_k = 0.1, σημείο εκκίνησης το $(x_0, y_0) = (-5, 10)$ και ακρίβεια ε = 0.01

Παρακάτω παρατίθενται η γραφική της σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων.

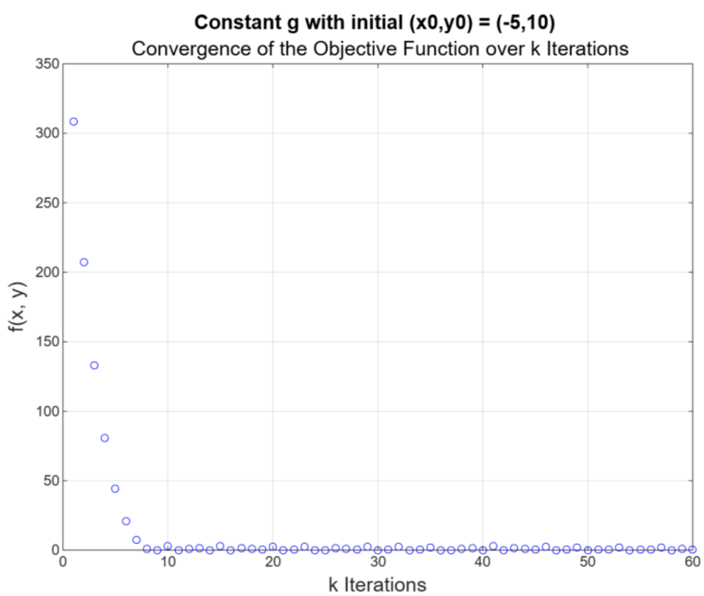

Figure 9: Σύγκλιση της αντικειμενικής με g =0. 1 και επιλογή αρχικού σημείου (x_0,y_0) = (-5,10) ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων.

Όπως και προηγουμένως βλέπουμε πως η μέθοδος δε συγκλίνει στο ελάχιστο και συγκεκριμένα παρουσιάζει μια ταλάντωση, αρκετά μικρότερη όμως από τη προηγούμενη. Σύμφωνα με τη σχέση (3) που ορίσαμε εδώ ισχύει $g_k' = g_k s_k = 15 * 0.1 = 1.5 > \frac{1}{3}$, άρα είναι λογικό το γεγονός πως δε συγκλίνει η μέθοδος. Επειδή $1.5 < 2.5$, η ταλάντωση εδώ είναι μικρότερης κλίμακας από τη προηγούμενη. Συγκριτικά με το Θέμα 1, ισχύει η ίδια ανάλυση που κάναμε και στο Θέμα 2.

Για να μπορέσει η αλγόριθμος να συγκλείσει μπορούμε να αλλάξουμε τη τιμή του s_k . Συγκεκριμένα, θέλουμε $g_k' = g_k s_k < \frac{1}{3} \Rightarrow s_k < \frac{1}{3} * 0.1 = 0.0333$. Άρα θα μπορούσαμε να επιλέξουμε τη τιμή $s_k = 0.025$ και έτσι να έχουμε σύγκλιση.

5 Θέμα 4ο |Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

5.1 Περίπτωση s_k = 0.1, g_k = 0.2, σημείο εκκίνησης το (x_0, y_0) = (8, -10) και ακρίβεια ε = 0.01

Παρακάτω παρατίθενται η γραφική της σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων.

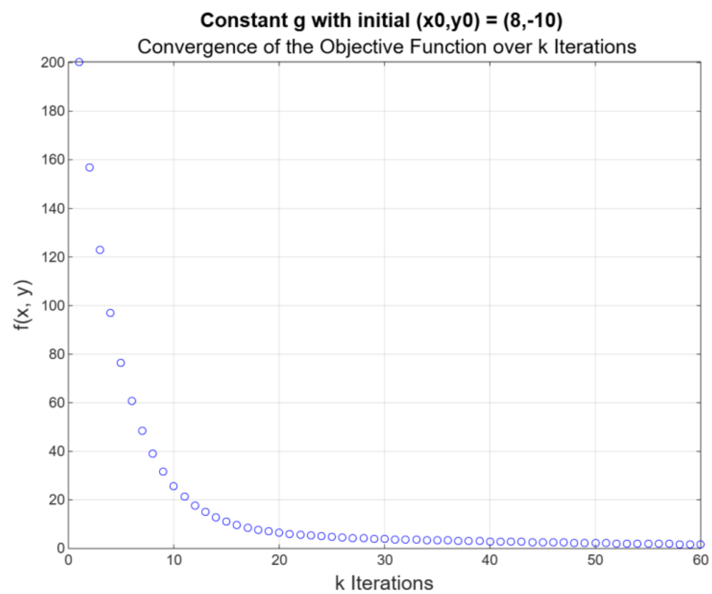

Figure 10: Σύγκλιση της αντικειμενικής με g =0. 2 και επιλογή αρχικού σημείου (x_0,y_0) = (8,-10) ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων.

Ήδη βλέποντας το σημείο εκκίνησης καταλαβαίνουμε πως δεν πληρούνται οι περιορισμοί για τα x_1 και x_2, άρα στη πρώτη κλήση του αλγορίθμου θα χρησιμοποιηθεί η προβολή στο X. Έτσι το νέο σημείο θα είναι το $(5, -8)$. Σε αντίθεση με τα θέματα 2 και 3 εδώ βλέπουμε πως η μέθοδος συγκλίνει στο ελάχιστο. Σύμφωνα με τη σχέση (3) που ορίσαμε εδώ ισχύει $g_k' = g_k s_k = 0.2 * 0.1 = 0.02 < \frac{1}{3}$, άρα είναι λογικό το γεγονός πως συγκλίνει η μέθοδος.