Санкт-Петербургский Национальный Исследовательский Университет
Информационных Технологий, Механики и Оптики

МФКТиУ, ФПИиКТ, СППО

Расчётно-графическая работа

по дисциплине
«Математика»

Вариант - 1

Выполнили:
Анищенко Анатолий Алексеевич
Ефаринов Павел Андреевич
Гогидзе Полина Роиновна
Группа: P3112

Санкт-Петербург
2019 г.

Задание №1

$A\ (a, b, c)$

Пусть проведена плоскость пересекающая координатные оси в точках $(x_0, 0, 0), (0, y_0, 0), (0, 0, z_0)$.
Уравнение плоскости: $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1$
Объём отсекаемого тетраэдра: $V = \frac{x_0 y_0 z_0}{6}$
Т.к. точка A лежит в плоскости, то $a y_0 z_0 + b x_0 z_0 + c x_0 y_0 = x_0 y_0 z_0$
Объём тетраэдра будет минимален только в точке минимума функции $V(x_0, y_0, z_0)$
Минимум функции достигается в точке экстремума.
Условие экстремума функции: $\frac{\partial V}{\partial x_0} = \frac{\partial V}{\partial y_0} = \frac{\partial V}{\partial z_0} = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_0} = b z_0 + c y_0 = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y_0} = a z_0 + c x_0 = 0; \\ \frac{\partial V}{\partial z_0} = a y_0 + b x_0 = 0 \end{cases} \begin{cases} z_0 = -\frac{c y_0}{b} \\ x_0 = -\frac{a z_0}{c} = \frac{a y_0}{b} \\ x_0 = -\frac{a y_0}{b} \end{cases}$$

Значит, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.
При этих значениях получаем вырожденный случай тетраэдра, при котором его объём равен нулю.
Если предположить, что нельзя провести плоскость через точку $(0,0,0)$, то всегда можно устремить объём тетраэдра к нулю.

Пусть плоскость проходит через точки $A\ (a, b, c), X(x_0, 0, 0), Y(0, y_0, 0)$, где $sgn(a) = sgn(x_0), sgn(b) = sgn(y_0), sgn(c) = sgn(z_0)$

Тогда уравнение плоскости можно выразить как $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ a-x_0 & b & c \\ x_0 & -y_0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, тогда детерминант матрицы будет $y_0 c x - x_0 c y + z(x_0 y_0 - y_0 a - x_0 b) - x_0 y_0 c = 0$

Известно, что $V = \frac{x_0 y_0 z_0}{6}$

Подставив $x = 0, y = 0$, найдём z_0. $z_0 = \frac{x_0 y_0 c}{x_0 y_0 - y_0 a - x_0 b}$
Подставим z_0 в V

$$V = \frac{x_0^2 y_0^2 c}{6(x_0 y_0 - y_0 a - x_0 b)}$$

Известно, что минимум будет достигаться только при $\frac{\partial V}{\partial x_0} = \frac{\partial V}{\partial y_0} = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial x_0} = \frac{c x_0 y_0^2 (y_0(x_0 - 2a) - b x_0)}{6(-y_0(a - x_0) - b x_0)^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_0} = \frac{c y_0 x_0^2 (y_0(x_0 - a) - 2b x_0)}{6(-y_0(a - x_0) - b x_0)^2} = 0$$

Отсюда $y_0 = \frac{b x_0}{x_0 - 2a}$ и $y_0 = \frac{2 b x_0}{x_0 - a}$ (остальные решения не подходят по условию), значит

$b x_0 (x_0 - a) = 2 b x_0 (x_0 - 2a), x_0 = 3a$.

Зная x_0, найдём y_0, z_0. $y_0 = 3b, z_0 = 3c$.

Проверим, что эта точка является точкой минимума.

$$A = \frac{\partial^2 V}{\partial x_0 \partial x_0} = \frac{a^2 c y_0^4}{3(y_0(x_0 - a) - b x_0)^3}$$
$$B = \frac{\partial^2 V}{\partial y_0 \partial x_0} = \frac{c y_0 x_0 (y_0^2 (2a^2 - 3a x_0 + x_0^2) + 3b x_0 y_0 (2a - x_0) + 2b^2 x_0^2)}{6(y_0(x_0 - a) - b x_0)^3}$$
$$C = \frac{\partial^2 V}{\partial y_0 \partial y_0} = \frac{b^2 c x_0^4}{3(y_0(x_0 - a) - b x_0)^3}$$

$$AC - B^2 > 0, \text{в точке } (3a, 3b)$$

$$A = \frac{bc}{a}, B = \frac{c}{2}, C = \frac{ac}{b}$$

$$c^2 - \frac{c^2}{4} > 0, \text{всегда верно}$$

Следовательно, найденная точка является точкой минимума объёма для положительных a, b, c.

Значит $V = \frac{9abc}{2}$

Задание №2

Интеграл Пуассона: $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \int\limits_0^\infty e^{-y^2} dy$$

$$I^2 = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx \int\limits_0^\infty e^{-y^2} dy$$

Перейдём к полярным координатам:

$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$

Пересчитаем пределы интегрирования:

$$\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^\infty \rho d\rho$$

Вычислим полученный двойной интеграл:

$$I^2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^\infty \rho e^{-(\rho\sin\varphi)^2} e^{-(\rho\cos\varphi)^2} d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^\infty \rho e^{-\rho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^\infty \rho e^{-\rho^2} d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^\infty e^{-\rho^2} d(-\rho^2) = -\frac{\pi}{4}\lim_{\rho\to\infty}\left(e^{-\rho^2} - e^0\right) = -\frac{\pi}{4}(0-1) = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Получаем:

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Интеграл Френеля: $J = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$

Докажем, что: $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2 t} du$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-u^2 t} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} * \frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_0^\infty e^{-(u\sqrt{t})^2} d(u\sqrt{t})$$

Воспользуемся уже посчитанным интегралом Пуассона:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} * \frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_0^\infty e^{-(u\sqrt{t})^2} d(u\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi t}} * \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Подставим полученный результат в исходный интеграл:

$$J=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}dt\int_0^{\infty}e^{-u^2t}\,\sin t\,du$$

Рассмотрим интеграл по t от $J(u^2)$

$$J(u^2)=\int_0^{\infty}e^{-u^2t}\,\sin t\,dt$$

Есть несколько вариантов, как вычислять такой интеграл, рассмотрим ***первый*** из них:

Интегрируем по частям:

$$\begin{vmatrix} w=\sin t & dw=\cos t\,dt \\ dv=e^{-u^2t}dt & v=-\frac{1}{u^2}e^{-u^2t}\end{vmatrix}$$

$$J(u^2)=-\frac{1}{u^2}e^{-u^2t}\sin t+\frac{1}{u^2}\int_0^{\infty}e^{-u^2t}\,\cos t\,dt=$$

Ещё раз интегрируем по частям:

$$\begin{vmatrix} w=\cos t & dw=-\sin t\,dt \\ dv=e^{-u^2t}dt & v=-\frac{1}{u^2}e^{-u^2t}\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{u^2}e^{-u^2t}\sin t+\frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{u^2}e^{-u^2t}\cos t\;-\frac{1}{u^2}\int_0^{\infty}e^{-u^2t}\,\sin t\,dt\right)=$$

$$=-\frac{1}{u^2}e^{-u^2t}\sin t-\frac{1}{u^4}e^{-u^2t}\cos t-\frac{1}{u^4}\int_0^{\infty}e^{-u^2t}\,\sin t\,dt$$

Можем заметить, что интеграл циклический, переносим интеграл в левую часть и выражаем его:

$$\left(1+\frac{1}{u^4}\right)\int_0^{\infty}e^{-u^2t}\,\sin t\,dt=-\frac{e^{-u^2t}}{u^4}(\cos t-u^2\sin t)$$

$$(u^4+1)\int_0^{\infty}e^{-u^2t}\,\sin t\,dt=-e^{-u^2t}(\cos t-u^2\sin t)$$

$$\int_0^{\infty}e^{-u^2t}\,\sin t\,dt=-\frac{e^{-u^2t}}{1+u^4}(\cos t-u^2\sin t)\bigg|_0^{\infty}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{e^{-u^2t}}{1+u^4}(\cos t-u^2\sin t)\right)-\lim_{t\to0}\left(-\frac{e^{-u^2t}}{1+u^4}(\cos t-u^2\sin t)\right)=$$

Заметим, что $(\cos t-u^2\sin t)$ ограничена и умножается на бесконечно малую e^{-u^2t} при $t\to\infty$, то итоговая функция является бесконечно малой, а значит стремится к нулю

$$=0-\left(-\frac{e^0}{1+u^4}(\cos 0-u^2\sin 0)\right)=\frac{1}{1+u^4}$$

Второй вариант вычисления интеграла $J(u^2)$

Рассмотрим $\sin t$, как мнимую часть комплексного числа $\sin t = -Im\left(e^{it}\right)$

Заменим синус в интеграле:

$$J(u^2) = \int\limits_0^\infty e^{-u^2 t}\, \sin t\, dt = -Im \int\limits_0^\infty e^{-u^2 t}\, e^{it} dt =$$

$$= -Im \frac{1}{i-u^2} \int\limits_0^\infty e^{t(i-u^2)}\, d\left(t(i-u^2)\right) = -Im \frac{1}{i-u^2} \left(\lim_{t\to\infty}\left(e^{t(i-u^2)}\right) - e^0\right) =$$

$$= -Im \frac{1}{i-u^2} \left(\lim_{t\to\infty}\left(e^{-u^2 t}(\cos t - i\sin t)\right) - 1\right) =$$

Заметим, что $(\cos t - i\sin t)$ ограничена и умножается на бесконечно малую $e^{-u^2 t}$ при $t \to \infty$, то итоговая функция является бесконечно малой, а значит стремится к нулю

$$= -Im \frac{1}{i-u^2}(0-1) = Im \frac{1}{i-u^2} = Im \frac{u^2+i}{1+u^4} = \frac{1}{1+u^4}$$

Вернёмся к вычислению интеграла Френеля:

Подставим полученное значение в искомый интеграл J

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+u^4} du$$

Сделаем замену $u = \frac{1}{g}$, тогда $du = -\frac{dg}{g^2}$

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+u^4} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_\infty^0 \frac{1}{1+\frac{1}{g^4}} \left(-\frac{dg}{g^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{g^2}{1+g^4} dg\, J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{u^2}{1+u^4} du$$

Следовательно:

$$J = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{1+u^4} du + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{u^2}{1+u^4} du\right)}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{1+u^2}{1+u^4} du =$$

Сделаем замену $g = u - \frac{1}{u} = \frac{(u^2-1)}{u}$, тогда $g^2 = \frac{\left(u^2-1\right)^2}{u^2} = \frac{u^4+1}{u^2} - 2$, то есть $u^4 + 1 = u^2(g^2+2), dg = \frac{u^2+1}{u^2} du$

То есть $u^2 + 1 = u^2 \frac{dg}{du}$ Пересчитаем пределы интегрирования:

$$\lim_{u\to\infty}\left(u - \frac{1}{u}\right) = +\infty, \lim_{u\to 0}\left(u - \frac{1}{u}\right) = -\infty$$

Подставим полученные значения в исходный интеграл:

$$J = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dg}{g^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\lim_{g\to+\infty}\left(arctg\frac{g}{\sqrt{2}}\right) - \lim_{g\to-\infty}\left(arctg\frac{g}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Получаем:

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Вычислим интеграл K: $K = \int_0^\infty \frac{\cos\left(4t - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{t}} dt$

$$K = \int\limits_0^\infty \frac{\cos\left(4t - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{t}} dt = \int\limits_0^\infty \frac{\sin 4t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{4}\int\limits_0^\infty \frac{\sin 4t}{\sqrt{4t}} d(4t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

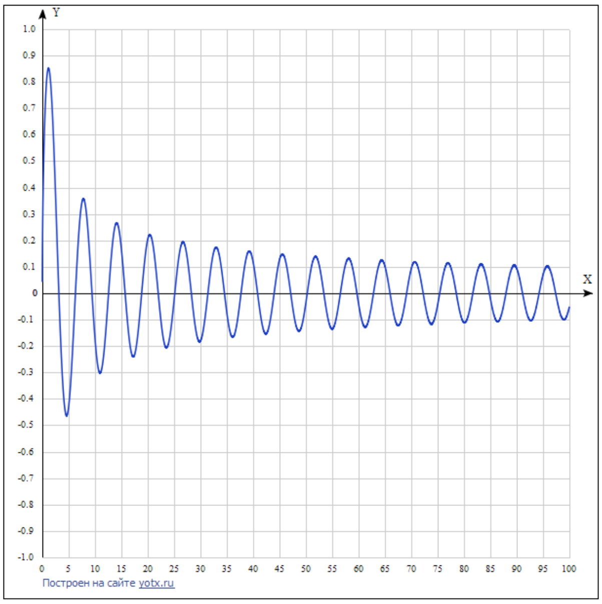
Вычислим интегралы: $\int_0^\infty \sin x^2\, dx$, $\int_0^\infty \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx$

$$\int\limits_0^\infty \sin x^2\, dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \\ x = \sqrt{t} \end{matrix} \right| = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t\, dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

$$\int\limits_0^\infty \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx = \left| \begin{matrix} t = \dfrac{\pi x^2}{2} \\ dt = \pi x dx \\ x = \sqrt{\dfrac{2t}{\pi}} \\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{2t\pi}} \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2}$$

Графики ошибок и подынтегральных функций интегралов Френеля:

Подынтегральная функция $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$:



Подынтегральная функция $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$:

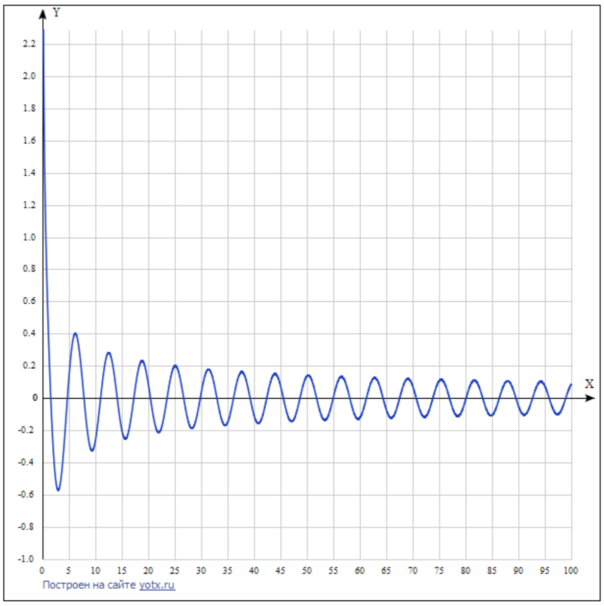
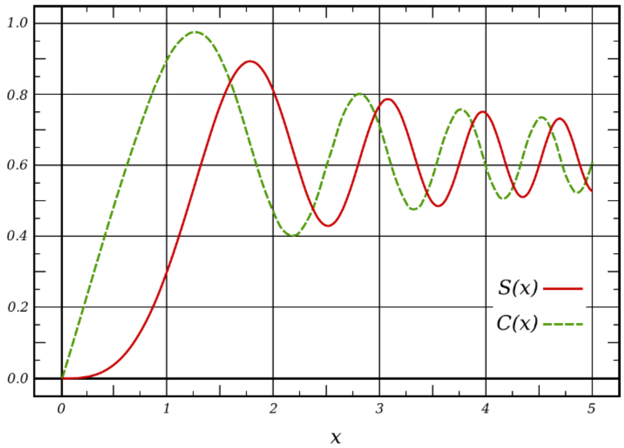


График ошибок, где $S(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$, а $C(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$:



Задание №3

Исходное поле: $\vec{H}\ (y\ \cos(xy)\,, x\cos(xy))$

Убедимся, что исходное поле потенциально:

Необходимое и достаточное условие, чтобы поле было потенциальным, нужно чтобы $rot\ \vec{H} = \vec{0}$

$$rot\ \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial z}(-x\cos(xy)) - \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial z}(-y\cos(xy)) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x\cos(xy)) - \frac{\partial}{\partial y}(y\cos(xy))\right) =$$

$$= \vec{k}\big((\cos(xy) - xy\sin(xy)) - (\cos(xy) - xy\sin(xy))\big) = \vec{0}$$

Следовательно поле потенциально.

Найдём векторные линии:

Векторной линией для поля $F(x, y, z)$ называется кривая $r(t)$, касательная к которой во всех точках кривой совпадает со значением поля.

$$\frac{dx}{y\cos(xy)} = \frac{dy}{x\cos(xy)}$$

$$x\cos(xy)\,dx = y\cos(xy)\,dy$$

$$x\,dx = y\,dy$$

Интегрируя, получаем:

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

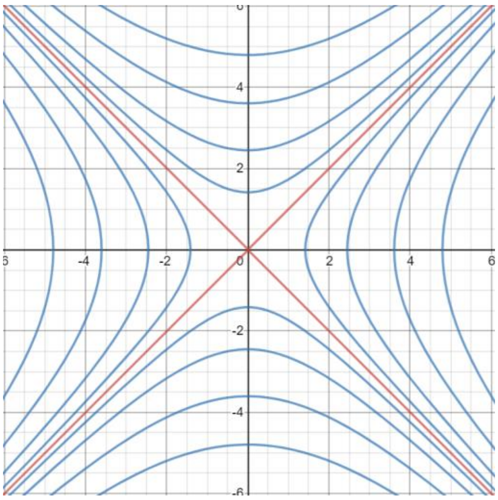
Аналогично:

$$\int ydy = \frac{y^2}{2} + C$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$$

$$x^2 - y^2 = C$$

Изобразим полученные векторные линии:



Найдём потенциал для поля при помощи криволинейного интеграла:

Потенциальное поле является полем градиента некоторой скалярной функции $U(x,y,z)$, т. е. если $rot\,\vec{H} = 0$, то существует функция $U(x,y,z)$ такая, что. $\vec{H} = grad\,U$. Из равенства $rot\,\vec{H} = 0$ вытекает что выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x,y,z)$. Отсюда: $P = \frac{\partial U}{\partial x}, Q = \frac{\partial U}{\partial y}, R = \frac{\partial U}{\partial z}$. Следовательно вектор поля $\vec{H}$ является градиентом скалярного поля.

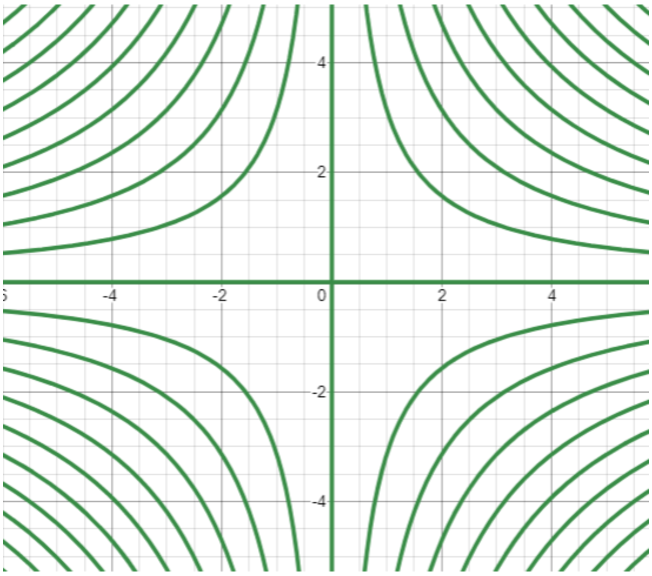
Из равенства $rot\,grad\,U = 0$ следует обратное утверждение: поле градиента скалярной функции $U = U(x,y,z)$ является потенциальным. Из равенства $\vec{H} = grad\,\vec{U}$ следует, что потенциальное поле определяется заданием одной скалярной функции $U = U(x,y,z)$ – его потенциала.

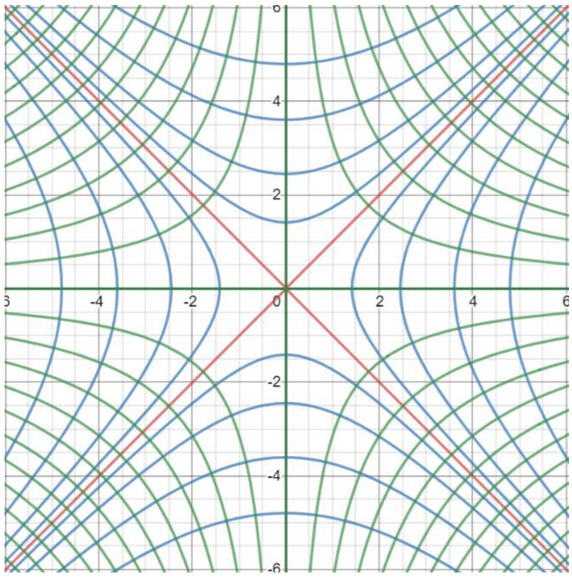
В качестве начальной точки возьмём начало координат.

$$\begin{cases} \mathrm{P}(\chi, y_0, z_0) = y_0\cos(\chi y_0) \\ Q(x, \xi, z_0) = x\cos(x\xi) \end{cases}$$

$$U(x,y) = \int_0^x y_0\cos(\chi y_0)\,d\chi + \int_0^y x\cos(x\xi)\,d\xi = \int_0^x 0 d\chi + \int_0^y \cos(x\xi)\,d(x\xi) = \sin(x\xi)|_0^y = \sin(xy) + C$$

Изобразим линии уровня потенциала:





Для примера, взяты потенциальные линии: $\sin(xy) = 0$

Докажем ортогональность линий уровня и векторных линий:

$\vec{a} = (y\cos(xy), x\cos(xy))$ – касательные к линиям уровня

$\vec{b} = \left(\frac{2x}{c}, -\frac{2y}{c}\right)$ – касательные к векторным линиям

$\vec{a} * \vec{b} = \left(\frac{2xy\cos(xy)}{c} - \frac{2xy\cos(xy)}{c}\right) = 0$ следовательно они перпендикулярны

Зафиксируем точки A и B на какой-либо векторной линии. Вычислим работу поля вдоль этой линии

Пусть выбраны точки A: $(1, 1)$ и B: $(5, 5)$ и векторные линии $x^2 = y^2$.

Тогда: так как поле потенциально (доказали ранее), то $A_H = u(\mathrm{A}) - u(\mathrm{B})$.

$$u(x,y) = \sin(xy)$$

Тогда $A_H = u(2,1) - u(-1,-2) = \left(\frac{1}{2} + 1\right) - \left(-1 - \frac{1}{2}\right) = 3.$

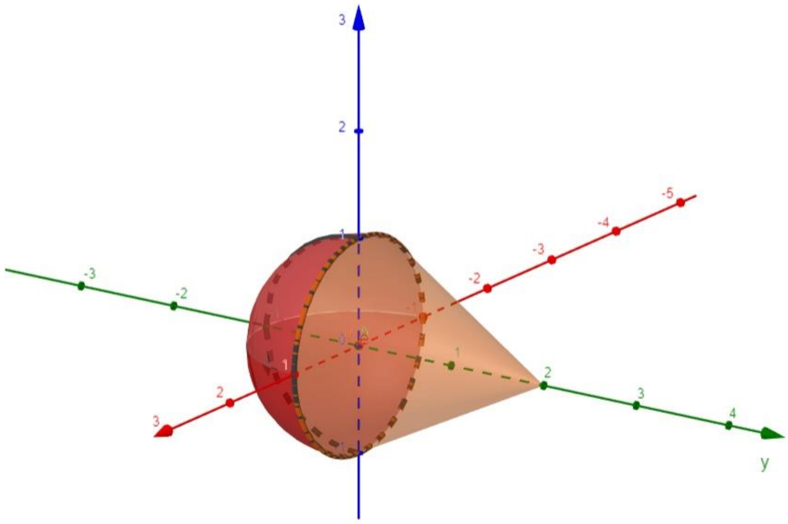
Задание №4

Исходное тело T:

(1) $y+\sqrt{1-x^2-z^2}=0$

(2) $y+2\sqrt{x^2+z^2}=2$

T в пространстве:



Поле:

$\vec{a}=(\cos zy)\vec{\imath}+x\vec{\jmath}+(e^{y^2}-5z)\vec{k}$

Поток поля через боковую поверхность, заданную функцией (1) будем искать с помощью теоремы Гаусса-Остроградского.

$$\oiint_S \vec{F}d\vec{\sigma} = \iiint_T div\vec{F}dxdydz$$

Вычислим $div\vec{F}$:

$$div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = 0+0-5 = -5$$

$$\Phi_1=-5\iiint_T dxdydz=-5\iint_{D_{xz}} dxdz\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{0}dy=-5\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2-z^2}dxdz=$$

$$=-5\int_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi = 5\pi*\frac{2}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1=-\frac{10}{3}\pi$$

$$\Phi_2=\iint_{D_{xz}} xdxdz=\int_0^1\rho^2d\rho\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0$$

$$\Phi=\Phi_1-\Phi_2=-\frac{10}{3}\pi$$

Вывод:

Наша команда выполнила расчетно-графическую работу, оформила доклад в виде презентации и построила аргументированную защиту. Команда работала сплоченно и слаженно решала возникающие в ходе выполнения задания проблемы быстро и аккуратно. В ходе выполнения заданий использовались такие источники информации как: записи с практических занятий по математике и различные интернет ресурсы.

Оценочный лист:

Анатолий Анищенко – 5
Ефаринов Павел – 5
Гогидзе Полина – 5