

М329. Выпуклый n -угольник помещён в квадрат со стороной 1. Докажите, что найдётся три вершины A, B, C этого n -угольника такие, что площадь треугольника ABC меньше $8/n^2$

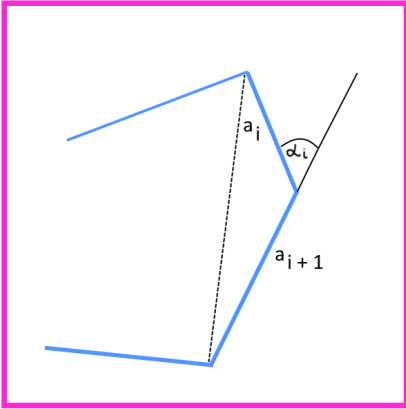


Рис. 5.

Обозначим через a_1, a_2, \dots, a_n длины сторон нашего n -угольника, через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – величины его внутренних углов. Пусть S_i – площадь i -того треугольника (со сторонами a_i и a_{i+1} – см. рисунок 5, $i = 1, 2, \dots, n-1$), S_n – площадь треугольника со сторонами a_n, a_1 . Имеем: $2S_i = a_i a_{i+1} \sin \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $2S_n = a_n a_1 \sin \alpha_n$. Пусть S – наименьшая из площадей этих треугольников. Тогда

$$2S \leq a_i a_{i+1} \sin \alpha_i,$$

откуда

$$(2S)^n \leq \prod_{i=1}^n a_i^2 \prod_{i=1}^n \sin \alpha_i < \prod_{i=1}^n a_i^{2*},$$

то есть

$$2S < \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{2/n}$$

Но

$$\left(\prod_i a_i \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n^{**}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n},$$

поэтому

$$2S < \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \right)^2.$$

Пусть p_i и q_i – длины проекций i -й стороны n -угольника на вертикальную и горизонтальную стороны квадрата. Тогда $a_i \leq p_i + q_i$, то есть $\sum_i a_i \leq \sum_i p_i + \sum_i q_i \leq 4$

Поэтому

$$2S < \left(\frac{4}{n} \right)^2,$$

откуда

$$S < \frac{8}{n^2}.$$

Получившаяся оценка довольно груба – мы с самого начала отбросили $\prod_{i=1}^n \alpha_i$, оценив это произведение единицей. Уточним эту оценку. Имеем:

$$(2S)^n \leq \prod_{i=1}^n a_i^2 \cdot \prod_{i=1}^n \alpha_i,$$

то есть

$$2S \leq \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{2/n} \cdot \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right)^{1/n} \leq \frac{16}{n^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \sin \alpha_i}{n}.$$

*) Здесь \prod_i – знак произведения: $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$.

**) Мы воспользовались неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Так как я совсем забыл про таблицу, то я вставил её отдельно на следующей стрпнице. Заполнив её списком заданий на данную лабораторную работу.

Задание		
Номер задания	Проценты	Текст задания
Обязательно задание	$\leq 75\%$	Сверстать страницу, максимально похожую на выбранную страницу из журнала «Квант».
Необязательное задание №1	+10%	<p><i>Выполнение данного задания позволяет получить до 10 дополнительных баллов.</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Сверстать титульный лист 2. Создать файл <i>main.tex</i>, в котором будет содержаться преамбула и ссылки на 2 документа: титульный лист и статью (ссылки создаются с помощью команды <code>\input</code>)
Необязательное задание №2	+15%	<p><i>Выполнение данного задания позволяет получить до 15 дополнительных баллов.</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Рассчитать номер варианта по следующей схеме: N_1 – количество букв в фамилии, N_2 – количество букв в имени $\text{Номер варианта} = 1 + ((N_1 * N_2) \bmod 8)$ 2. Выполнить задание из полученного варианта, используя средства $L^A T_E X$ <p>В каждом варианте указаны пакеты или классы документов, использование которых необходимо или полезно для выполнения задания.</p>