Задача №2

Интеграл Пуассона: $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-y^2} dy$$

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy$$

Перейдём к полярным координатам:

$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$

Пересчитаем пределы интегрирования:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho$$

Вычислим полученный двойной интеграл:

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty \rho e^{-(\rho\sin\varphi)^2} e^{-(\rho\cos\varphi)^2} d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty \rho e^{-\rho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty \rho e^{-\rho^2} d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty e^{-\rho^2} d(-\rho^2) = -\frac{\pi}{4} \lim_{\rho\to\infty}\left(e^{-\rho^2} - e^0\right) = -\frac{\pi}{4}(0-1) = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Получаем:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Интеграл Френеля: $J = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$

Докажем, что: $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2 t} du$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2 t} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} * \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-\left(u\sqrt{t}\right)^2} d(u\sqrt{t})$$

Воспользуемся уже посчитанным интегралом Пуассона:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} * \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-\left(u\sqrt{t}\right)^2} d(u\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi t}} * \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Подставим полученный результат в исходный интеграл:

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-u^2 t} \sin t \, du$$

Рассмотрим интеграл по t от $J(u^2)$

$$J(u^2) = \int_0^\infty e^{-u^2 t} \sin t \, dt$$

Есть несколько вариантов, как вычислять такой интеграл, рассмотрим ***первый*** из них:

Интегрируем по частям:

$$\left| \begin{matrix} w = \sin t & dw = \cos t \, dt \\ dv = e^{-u^2 t} dt & v = -\frac{1}{u^2} e^{-u^2 t} \end{matrix} \right|$$

$$J(u^2) = -\frac{1}{u^2} e^{-u^2 t} \sin t + \frac{1}{u^2} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \cos t \, dt =$$

Ещё раз интегрируем по частям:

$$\left| \begin{matrix} w = \cos t & dw = -\sin t \, dt \\ dv = e^{-u^2 t} dt & v = -\frac{1}{u^2} e^{-u^2 t} \end{matrix} \right|$$

$$= -\frac{1}{u^2} e^{-u^2 t} \sin t + \frac{1}{u^2} \left(-\frac{1}{u^2} e^{-u^2 t} \cos t \; - \frac{1}{u^2} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \sin t \, dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{u^2} e^{-u^2 t} \sin t - \frac{1}{u^4} e^{-u^2 t} \cos t - \frac{1}{u^4} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \sin t \, dt$$

Можем заметить, что интеграл циклический, переносим интеграл в левую часть и выражаем его:

$$\left(1 + \frac{1}{u^4}\right) \int_0^\infty e^{-u^2 t} \sin t \, dt = -\frac{e^{-u^2 t}}{u^4} (\cos t - u^2 \sin t)$$

$$(u^4 + 1) \int_0^\infty e^{-u^2 t} \sin t \, dt = -e^{-u^2 t} (\cos t - u^2 \sin t)$$

$$\int_0^\infty e^{-u^2 t} \sin t \, dt = -\frac{e^{-u^2 t}}{1 + u^4} (\cos t - u^2 \sin t) \Big|_0^\infty =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{e^{-u^2 t}}{1 + u^4} (\cos t - u^2 \sin t) \right) - \lim_{t \to 0} \left(-\frac{e^{-u^2 t}}{1 + u^4} (\cos t - u^2 \sin t) \right) =$$

Заметим, что $(\cos t - u^2 \sin t)$ ограничена и умножается на бесконечно малую $e^{-u^2 t}$ при $t \to \infty$, то итоговая функция является бесконечно малой, а значит стремится к нулю

$$= 0 - \left(-\frac{e^0}{1 + u^4} (\cos 0 - u^2 \sin 0) \right) = \frac{1}{1 + u^4}$$

Второй вариант вычисления интеграла $J(u^2)$

Рассмотрим $\sin t$, как мнимую часть комплексного числа $\sin t = -Im\left(e^{it}\right)$

Заменим синус в интеграле:

$$J(u^2) = \int\limits_0^\infty e^{-u^2 t}\,\sin t\,dt = -Im\int\limits_0^\infty e^{-u^2 t}\,e^{it}dt =$$

$$= -Im\frac{1}{i-u^2}\int\limits_0^\infty e^{t(i-u^2)}\,d\big(t(i-u^2)\big) = -Im\frac{1}{i-u^2}\left(\lim_{t\to\infty}\left(e^{t(i-u^2)}\right) - e^0\right) =$$

$$= -Im\frac{1}{i-u^2}\left(\lim_{t\to\infty}\left(e^{-u^2 t}(\cos t - i\sin t)\right) - 1\right) =$$

Заметим, что $(\cos t - i\sin t)$ ограничена и умножается на бесконечно малую $e^{-u^2 t}$ при $t\to\infty$, то итоговая функция является бесконечно малой, а значит стремится к нулю

$$= -Im\frac{1}{i-u^2}(0-1) = Im\frac{1}{i-u^2} = Im\frac{u^2+i}{1+u^4} = \frac{1}{1+u^4}$$

Вернёмся к вычислению интеграла Френеля:

Подставим полученное значение в искомый интеграл J

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+u^4}du$$

Сделаем замену $u = \frac{1}{g}$, тогда $du = -\frac{dg}{g^2}$

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+u^4}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_\infty^0 \frac{1}{1+\frac{1}{g^4}}\left(-\frac{dg}{g^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{g^2}{1+g^4}dg\,J = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{u^2}{1+u^4}du$$

Следовательно:

$$J = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{1+u^4}du + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{u^2}{1+u^4}du\right)}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1+u^2}{1+u^4}du =$$

Сделаем замену $g = u - \frac{1}{u} = \frac{(u^2-1)}{u}$, тогда $g^2 = \frac{(u^2-1)^2}{u^2} = \frac{u^4+1}{u^2} - 2$, то есть $u^4+1 = u^2(g^2+2), dg = \frac{u^2+1}{u^2}du$

То есть $u^2+1 = u^2\frac{dg}{du}$ Пересчитаем пределы интегрирования:

$$\lim_{u\to\infty}\left(u-\frac{1}{u}\right) = +\infty, \lim_{u\to 0}\left(u-\frac{1}{u}\right) = -\infty$$

Подставим полученные значения в исходный интеграл:

$$J = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dg}{g^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\lim_{g\to+\infty}\left(\tan^{-1}\frac{g}{\sqrt{2}}\right) - \lim_{g\to-\infty}\left(\tan^{-1}\frac{g}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Получаем:

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Вычислим интеграл K: $K = \int_0^\infty \frac{\cos\left(4t - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{t}} dt$

$$K = \int_0^\infty \frac{\cos\left(4t - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{t}} dt = \int_0^\infty \frac{\sin 4t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{4} \int_0^\infty \frac{\sin 4t}{\sqrt{4t}} d(4t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

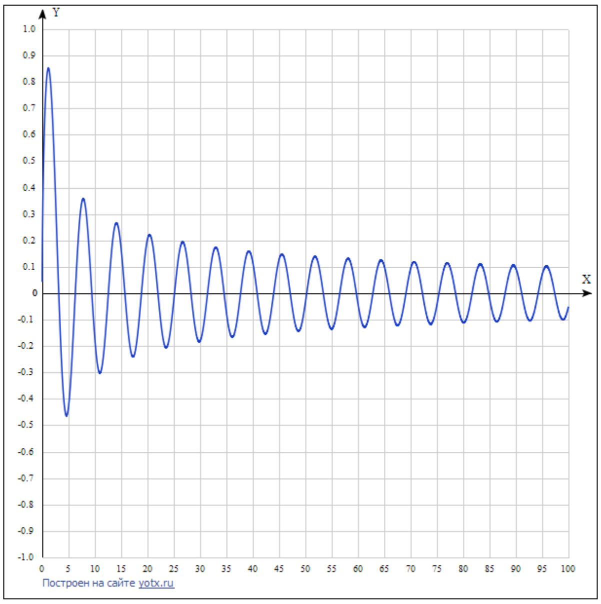
Вычислим интегралы: $\int_0^\infty \sin x^2\, dx$, $\int_0^\infty \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx$

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x = \sqrt{t} \end{matrix} \right| = \int_0^\infty \frac{\sin t\, dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx = \left| \begin{matrix} t = \dfrac{\pi x^2}{2} \\ dt = \pi x dx \\ x = \sqrt{\dfrac{2t}{\pi}} \\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{2t\pi}} \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2}$$

Графики ошибок и подынтегральных функций интегралов Френеля:

Подынтегральная функция $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$:



Подынтегральная функция $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$:

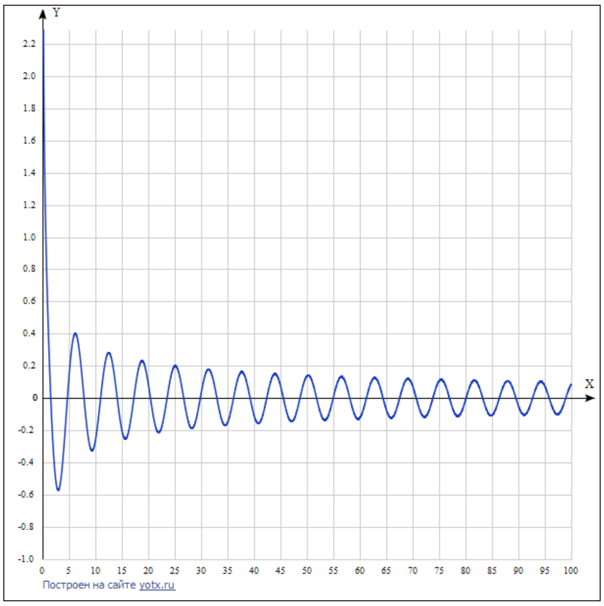


График ошибок, где $S(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$, а $C(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$: