Санкт-Петербургский Национальный Исследовательский Университет

Информационных Технологий, Механики и Оптики

МФКТиУ, ФПИиКТ, СППО

Расчётно-графическая работа

по дисциплине

«Математика»

Вариант - 1

Выполнили:

Анищенко Анатолий Алексеевич

Ефаринов Павел Андреевич

Гогидзе Полина Роиновна

Группа: PЗ112

Санкт-Петербург

2019 г.

Задание №1

Пусть проведена плоскость пересекающая координатные оси в точках .  
Уравнение плоскости:   
Объём отсекаемого тетраэдра:   
Т.к. точка *А* лежит в плоскости, то   
Объём тетраэдра будет минимален только в точке минимума функции   
Минимум функции достигается в точке экстремума.  
Условие экстремума функции:

Значит, .  
При этих значениях получаем вырожденный случай тетраэдра, при котором его объём равен нулю.  
Если предположить, что нельзя провести плоскость через точку , то всегда можно устремить объём тетраэдра к нулю.

Пусть плоскость проходит через точки , где

Тогда уравнение плоскости можно выразить как , тогда детерминант матрицы будет

Известно, что

Подставив , найдём .   
Подставим в

Известно, что минимум будет достигаться только при

Отсюда (остальные решения не подходят по условию), значит

.

Зная , найдём

Проверим, что эта точка является точкой минимума.

Следовательно, найденная точка является точкой минимума объёма для положительных .

Значит

Задание №2

Интеграл Пуассона:

Перейдём к полярным координатам:

Пересчитаем пределы интегрирования:

Вычислим полученный двойной интеграл:

Получаем:

Интеграл Френеля:

Докажем, что:

Воспользуемся уже посчитанным интегралом Пуассона:

Подставим полученный результат в исходный интеграл:

Рассмотрим интеграл по от

Есть несколько вариантов, как вычислять такой интеграл, рассмотрим ***первый*** из них:  
Интегрируем по частям:

Ещё раз интегрируем по частям:

Можем заметить, что интеграл циклический, переносим интеграл в левую часть и выражаем его:

Заметим, что ограничена и умножается на бесконечно малую при , то итоговая функция является бесконечно малой, а значит стремится к нулю

***Второй*** вариант вычисления интеграла   
Рассмотрим , как мнимую часть комплексного числа   
Заменим синус в интеграле:

Заметим, что ограничена и умножается на бесконечно малую при , то итоговая функция является бесконечно малой, а значит стремится к нулю

Вернёмся к вычислению интеграла Френеля:  
Подставим полученное значение в искомый интеграл

Сделаем замену , тогда

Следовательно:

Сделаем замену , тогда , то есть  
То есть Пересчитаем пределы интегрирования:

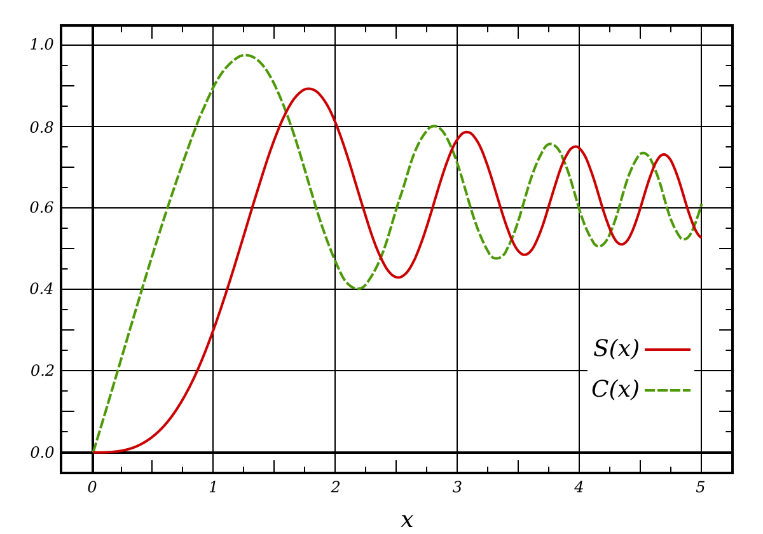
Подставим полученные значения в исходный интеграл:

Получаем:

Вычислим интеграл K:   
Вычислим интегралы:

Графики ошибок и подынтегральных функций интегралов Френеля:

|  |  |
| --- | --- |
| Подынтегральная функция : | Подынтегральная функция : |
| Изображение выглядит как текст  Автоматически созданное описание | Изображение выглядит как текст  Автоматически созданное описание |

График ошибок, где , а :  


Задание №3

Исходное поле:

Убедимся, что исходное поле потенциально:  
Необходимое и достаточное условие, чтобы поле было потенциальным, нужно чтобы

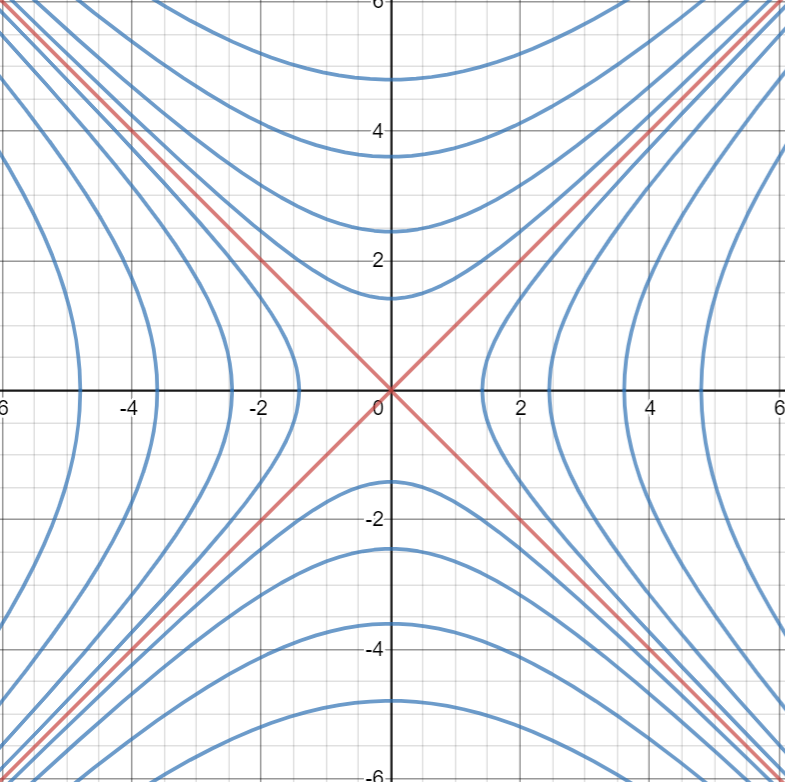
Следовательно поле потенциально.

Найдём векторные линии:  
Векторной линией для поля называется кривая , касательная к которой во всех точках кривой совпадает со значением поля.

Интегрируя, получаем:

Аналогично:

Изобразим полученные векторные линии:

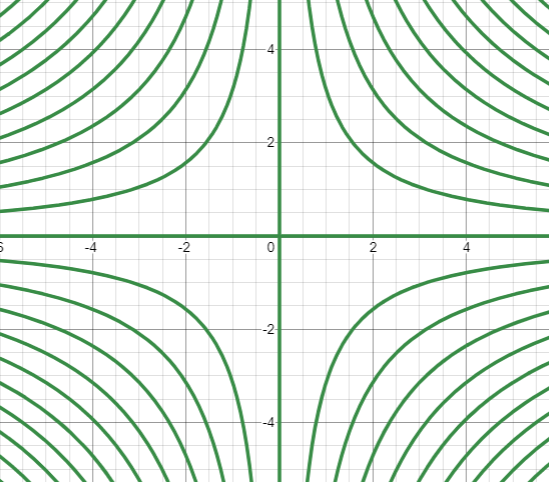
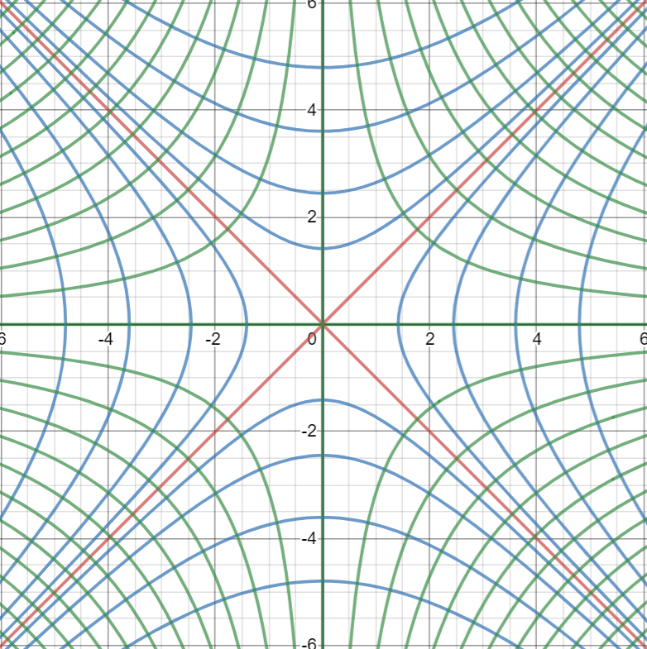


Найдём потенциал для поля при помощи криволинейного интеграла:

Потенциальное поле является полем градиента некоторой скалярной функции , т. е. если , то существует функция такая, что. . Из равенства вытекает что выражение является полным дифференциалом некоторой функции . Отсюда:   
. Следовательно вектор поля является градиентом скалярного поля.

Из равенства следует обратное утверждение: поле градиента скалярной функции   
 является потенциальным. Из равенства следует, что потенциальное поле определяется заданием одной скалярной функции – его потенциала.

В качестве начальной точки возьмём начало координат.

Изобразим линии уровня потенциала:

Для примера, взяты потенциальные линии:

Докажем ортогональность линий уровня и векторных линий:

– касательные к линиям уровня

– касательные к векторным линиям

следовательно они перпендикулярны

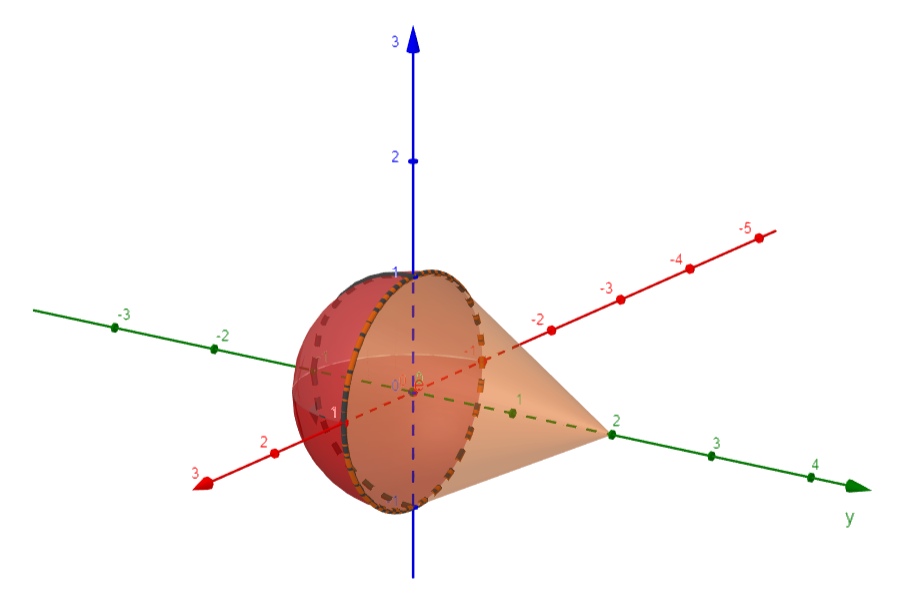
Зафиксируем точки A и B на какой-либо векторной линии. Вычислим работу поля вдоль этой линии

Пусть выбраны точки и и векторные линии .  
Тогда: так как поле потенциально (доказали ранее), то

Тогда

Задание №4  
Исходное тело T:

T в пространстве:



Поле:

Поток поля через боковую поверхность, заданную функцией (1) будем искать с помощью теоремы Гаусса-Остроградского.

Вычислим :

Вывод:   
Наша команда выполнила расчетно-графическую работу, оформила доклад в виде презентации и построила аргументированную защиту. Команда работала сплоченно и слаженно решала возникающие в ходе выполнения задания проблемы быстро и аккуратно. В ходе выполнения заданий использовались такие источники информации как: записи с практических занятий по математике и различные интернет ресурсы.

Оценочный лист:  
Анатолий Анищенко – 5  
Ефаринов Павел – 5  
Гогидзе Полина – 5