Билет 17

Самосопряжённое преобразование. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряжённого преобразования.

<u>Опр</u> Преобразование называется самосопряжённым, если $\varphi = \varphi^*$.

<u>Теорема</u>

Все корни характеристического многочлена действительные.

□ Пусть есть 2 комплексных корня $a \pm bi$, $b \neq 0$. По теореме из п.10 $\exists$ двумерное инвариантное подпространство, не содержащее собственных векторов, соответствующее данным комплексным корням. Обозначим за A' ограничение A на это подпространство. Т.к. A' - самосопряжённое преобразование, то в ОНБ оно имеет симметричную матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$. $\det(A' - \lambda E) = (\alpha - \lambda)(\gamma - \lambda) - \beta^2 = \lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + (\alpha\gamma - \beta^2)$

Заметим, что $D = (\alpha+\gamma)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2) = (\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2 \geq 0 \Rightarrow$ не может иметь комплексных корней $\Rightarrow$ выбранные λ действительные. Противоречие ■

<u>Теорема</u>

Собственные векторы самосопряжённого преобразования, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

□. Пусть x - собственный вектор с λ; y - с μ. и $\lambda \neq \mu$. Тогда

$(\varphi(x); y) = (x; \varphi(y)) \Rightarrow \lambda(x;y) = \mu(x;y) \Rightarrow (\lambda - \mu)(x;y) = 0 \Rightarrow (x;y) = 0$ ■

Лемма

Пусть E' инвариантно относительно самосопряжённого φ. Тогда $(E')^{\perp}$ инвариантно относительно φ.

□ Пусть $y \in (E')^{\perp}$. Если $x \in E'$, то $\varphi(x) \in E'$ в силу инвариантности φ.

$0 = (\varphi(x); y) = (x; \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(y) \in (E')^{\perp}$ ■

Теорема

A - самосопряжённое преобразование $\Leftrightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов

□ ($\Rightarrow$) Обозначим через L сумму собственных подпространств преобразования A и докажем, что она совпадает с E. Т.к. L - инвариантное подпространство, то по лемме $L^{\perp}$ - тоже инвариантное подпространство. Пусть $L^{\perp}$ ненулевое. Рассмотрим ограничение A' преобразования A на $L^{\perp}$. A' - самосопряжённое $\Rightarrow$ все его собственные значения действительные $\Rightarrow$ есть хотя бы один собственный вектор. Этот вектор собственный и для $A \Rightarrow$ он должен лежать в $L \Rightarrow$ $\Rightarrow L^{\perp}$ = нулевое $\Rightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов.

($\Leftarrow$) Перейдём в ОНБ из собственных векторов. В нём $A = \mathrm{diag}(\lambda_1; \lambda_2 \ldots \lambda_n)$. Но тогда $A = A^T \Rightarrow A$ - самосопряжённое ■