Билет 11

Линейные функции. Сопряжённое пространство. Биортогональный базис. Пространство, сопряжённое сопряжённому пространству (второе сопряжённое)

Опр Пусть L - линейное пространство над полем F. Функция $f: L \to F$ называется линейной функцией, если

1) $\forall x, y \in L$ и $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2) $\forall x \in L$ $\forall \lambda \in F$ и $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Операции над линейными функциями:

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Опр Ядро линейной функции $f(x) \to \ker \varphi = \{x \in L \mid f(x) = 0\}$

Утв

$f \neq 0$: $\dim L = n \Rightarrow \dim \ker f = n-1$

□ По условию $\exists$ вектор ξ: $f(\xi) = a \neq 0$. Т.к. в поле есть обратный по умножению, то $\frac{1}{a} f(\xi) = f(\frac{1}{a}\xi) = 1$. Пусть $\exists y \in L$: $f(y) = b \neq 0$. Тогда заметим, что $f(y) = f(\frac{b}{a}\xi) \Rightarrow y = \frac{b}{a}\xi \Rightarrow$ все векторы не из ядра выразимы через один вектор ■

Опр Линейное пространство L^* всех линейных функций на линейном пространстве L называется сопряжённым для L

Теорема

L^* – линейное пространство, причём $\dim L^* = \dim L$

□ Выполнение аксиом сводится к определению операций и верности этих аксиом в поле F. Докажем, что $\dim L^* = \dim L$. Зафиксируем $(e_1; e_2 \dots e_n)$ - базис в L. Определим функции $f_1; f_2 \dots f_n$ так: $\forall i \in \overline{1..n}$ и $f_i(e_j) = \begin{cases} 1; & i=j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$

Тогда $\forall x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ и $f_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j f_i(e_j) = x_i f_i(e_i) = x_i \Rightarrow$ эти функции - базис в L, т.к. $\forall f \in L^*$ и $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j f_j(e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j$, где a_j - определено единственным образом ■

Опр Базис $(f_1; f_2 \dots f_n)$ в L^* вида $\forall i \in \overline{1..n}$ и $f_i(e_i) = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ 1; & i=j \end{cases}$ называется биортогональным базисом к базису $(e_1; e_2 \dots e_n)$ пространства L.

Теорема

Если $\dim L < \infty$, то $L^{**} \cong L$, причём изоморфизм не зависит от базиса.

~~□ Сопоставим $x \in L$ в пару $f(x) \in L^*$~~

~~Тогда x можно рассматривать как~~

□ Фиксируем $x \in L$ и сопоставим каждому элементу $f \in L^*$ число $f(x)$. Тогда x можно рассматривать, как функцию на L^*. Эта функция линейна, т.к. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow x$ сумме функций сопоставляет сумму чисел, сопоставляемых слагаемым. Аналогично с $(\alpha f)x = \alpha f(x) \Rightarrow x$ можно отождествить с некоторым элементом L^{**} (этой самой функцией над функциями). ■