

Билет 18

Ортогональные преобразования, их матрицы. (Свойства ортогональных преобразований.

Свойства корней характеристического многочлена и собственных векторов ортогональных преобразований.

Опр Ортогональное преобразование евклидова пространства E — это такое преобразование φ , что $\forall x, y \in E, (x; y) = (\varphi(x); \varphi(y))$

Теорема

φ — ортогональное $\Leftrightarrow \varphi^* = \varphi^{-1}$

□ \Rightarrow Т.к. $A^* = \Gamma^{-1} A \Gamma$, то $A^T = \Gamma A^* \Gamma^{-1}$.

Распишем $(x; y) = (\varphi(x); \varphi(y))$ в матричном виде:

$$x^T \Gamma y = (Ax)^T \Gamma Ay \Leftrightarrow \Gamma = A^T \Gamma A \Leftrightarrow \Gamma = \Gamma A^* \Gamma^{-1} \Gamma A \Leftrightarrow A^* A = E \Rightarrow A^* = A^{-1}$$

□ По условию $\varphi^*(\varphi(x)) = x$. Тогда

$$(\varphi(x); \varphi(y)) = (x; \varphi^*(\varphi(y))) = (x; y) \rightarrow \varphi \text{ — ортогональное} \blacksquare$$

Лемма

φ — ортогональное $\Leftrightarrow A_\varphi$ в ОНБ ортогональная

□ В ОНБ $A^* = A^T$ и φ — ортогональное, то есть $A^* = A^{-1} \Leftrightarrow A^T = A^{-1} \blacksquare$

Теорема

$\varphi: E \rightarrow E$ — ортогональное преобразование. Тогда $|\lambda| = 1$, где λ — корень

характеристического многочлена φ .

□ 1) Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда λ -собственное значение $\Rightarrow \exists x \in E: x \neq 0$ и $\varphi(x) = \lambda x$

Из определения ортогонального преобразования $(x, x) = (\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda^2 (x, x) =$
 $\Rightarrow (\lambda^2 - 1)(x, x) = 0$. Т.к. $(x, x) \neq 0$, то $\lambda^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$

2) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда обобщим φ на \mathbb{C}^n так. При $z \in \mathbb{C}^n$ и $\varphi(z) = Az$

и введём скалярное произведение $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$. Это всё в

ОНБ. Тогда введённое скалярное произведение соответствует введённому

нам при $x, y \in E$. В этом пространстве λ -собственное значение \Rightarrow

$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{C}^n: \varphi(z) = \lambda z$. В силу того, что A — над действительными

числами, это всё ещё матрица ортогонального преобразования $\Rightarrow (z, z) =$

$$(\varphi(z), \varphi(z)) \Rightarrow |z|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda \cdot z_k \cdot \overline{\lambda z_k} = \sum_{k=1}^n \lambda \overline{\lambda} z_k \overline{z_k} = \lambda \overline{\lambda} |z|^2 \Rightarrow \lambda \overline{\lambda} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1 \quad \blacksquare$$

Лемма

Собственные векторы ортогонального преобразования, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

□ Пусть собственные векторы x и y отвечают разным собственным значениям

$$\lambda \text{ и } \mu. \text{ Тогда } (x, y) = (\varphi(x), \varphi(y)) = (\lambda x, \mu y) = \lambda \mu (x, y) \Rightarrow (1 - \lambda \mu)(x, y) = 0$$

Т.к. λ, μ могут быть равны 1 или -1, и они разные, то $\lambda \mu = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x, y) = 0 \quad \blacksquare$$