Билет 19

Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства и матриц. Сингулярное разложение

Лемма

Пусть φ - невырожденное линейное преобразование. Тогда $\varphi^*\varphi$ - самосопряжённое преобразование с положительными собственными значениями.

□ По свойствам сопряжённого преобразования получаем:

$(\varphi^*\varphi)^* = \varphi^* \cdot \varphi^{**} = \varphi^*\varphi \Rightarrow \varphi^*\varphi$ - самосопряжённое.

Заметим, что $(\varphi^*(\varphi(x)); x) = \lambda(x; x)$, если x - собственный вектор, а λ - соответствующее ему собственное значение. С другой стороны:

$(\varphi^*(\varphi(x)); x) = (\varphi(x); (\varphi^*)^*(x)) = (\varphi(x); \varphi(x)) > 0$. Т.к. φ - невырожденное $\Rightarrow \ker\varphi = \{0\}$, $x \neq 0$.

$\Rightarrow \lambda(x; x) > 0 \Rightarrow \lambda > 0$. В силу свойств самосопряжённого преобразования, все корни ХМ ~~собственные значения~~ действительные, получили, что ещё и положительные. ■

Теорема (полярное разложение)

Любое невырожденное преобразование $\varphi: E \to E$ $\in \mathbb{R}^n$ может быть единственным образом представлено композицией ортогонального преобразования и самосопряжённого преобразования с положительными собственными значениями, т.е $\exists! Q, V$:

$A = QV$; $Q^T = Q^{-1}$; $V^T = V$; $\lambda_i > 0$ у V

□ Пусть мы представили в виде $A = QV$, где $Q^T = Q^{-1}$; $V^T = V$. Тогда

$A^T = V^T Q^T = VQ^{-1}$. Тогда ~~A=QV~~. $A^T A = VQ^{-1}QV = V^2$.

Т.к. V - самосопряжённое, то $V^* = V \Rightarrow V^2 = V^* V \Rightarrow$ по лемме преобразование V^2 - самосопряжённое преобразование с положительными собственными значениями.

Т.к V^2 - самосопряжённое, то $\exists$ОНБ из собственных векторов. Тогда в нём это преобразование будет иметь матрицу $\Lambda^2 = diag(\lambda_1; \lambda_2 \dots \lambda_n)$. Пусть S - матрица перехода к этому базису. Тогда $\Lambda^2 = S^T V^2 S$. Заметим, что $\Lambda = diag(\sqrt{\lambda_1}; \sqrt{\lambda_2} \dots \sqrt{\lambda_n}) : \Lambda^2$. Тогда, чтобы получить V надо вернуться в старый базис. В силу того, что $S_{e' \to e} = -S_{e \to e'}$ и S - ортогональная матрица, т.е. $S^{-1} = S^T$ получаем $V = (S^T)^{-1} \Lambda S^{-1} = S \Lambda S^{-1}$. Т.к. корни характеристического многочлена не меняются при смене базиса, то V - самосопряжённое преобразование с положительными собственными значениями.

Тогда определим $Q = AV^{-1}$. Докажем, что Q - ортогональная:

$Q^T = (AV^{-1})^T = (V^{-1})^T A^T = V^{-1} A^T$

Тогда $Q^T Q = V^{-1} A^T A V^{-1} \ominus$ Вспомним, что $A^T A = V^2 \Rightarrow \ominus V^{-1} V^2 V^{-1} = E \Rightarrow$

$\Rightarrow Q^T = Q^{-1} \Rightarrow \varphi$ можно разложить как композицию ортогонального преобразования и самосопряжённого с положительными значениями.

Теперь докажем единственность: Пусть $A = QV = \tilde{Q}\tilde{V}$. Тогда $A^T A = V^2 = \tilde{V}^2$. Тогда собственные значения V и $\tilde{V}$ совпадают $\rightarrow$ их можно привести в один и тот же базис из собственных векторов. Тогда в нём $\Lambda = \tilde{\Lambda}$. Возвращаясь в исходный, получаем $V = \tilde{V} \Rightarrow Q = \tilde{Q} \Rightarrow$ полярное разложение единственно ■

Теорема (сингулярное разложение)

$\forall$ невырожденное преобразование φ с матрицей A представимо единственным образом в виде $A = U_1 \Lambda U_2$, где U_1 и U_2 - ортогональные преобразования, Λ - самосопряжённое преобразование с положительными собственными значениями, причём Λ - диагональная.

$\square$ В силу существования и единственности полярного разложения $\exists! \, Q; V$: $Q^T = Q^{-1}$, $V = V^T$, все собственные значения V положительные и $A = QV = QS^{-1}\Lambda S$, определяются как в доказательстве полярного разложения. При этом $U_1 = QS^{-1}$ и $U_2 = S$ - ортогональные матрицы $\blacksquare$