Билет 3

Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Размерность и базис.

Опр Пространство L называется линейным (векторным) пространством над полем F, если выполнены аксиомы:

1) $\forall a, b, c \in L$ и $(a+b)+c = a+(b+c)$ - ассоциативность

2) $\exists 0 \in L: \forall a \in L$ и $a+0 = 0+a = a$ - нейтральный элемент по сложению

3) $\forall a \in L: \exists x \in L: a+x = x+a = 0$ - обратный элемент

4) $\forall a, b \in L$ и $a+b = b+a$ - коммутативность

5) $\forall a, b \in L\ \forall \lambda \in F$ и $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ - дистрибутивность 1

6) $\forall a \in L\ \forall \lambda, \mu \in F$: $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$ - дистрибутивность 2

7) $\forall a \in L$ и $1 \cdot a = a$ - нейтральный элемент по умножению

8) $\forall a \in L\ \forall \lambda, \mu \in F$ и $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ - ещё одна ассоциативность

Опр Пусть $a_1; a_2 \ldots a_k \in L$; $\lambda_1; \lambda_2 \ldots \lambda_k \in F$. Сумма $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ называется линейной комбинацией векторов $a_1 \ldots a_k$ с коэффициентами $\lambda_1 \ldots \lambda_k$. Если $\forall i \in 1..k$ и $\lambda_i = 0$, то комбинация называется тривиальной.

Опр Система векторов в L называется линейно независимой, если нулевой вектор раскладывается единственным образом по этой системе векторов.

Опр Если $\exists$ нетривиальная комбинация векторов, равная 0, то такая система векторов линейно зависимая.

<u>Набор невероятных и удивительных фан-фактов:</u>

1) Система из $k>1$ векторов ЛЗ $\Leftrightarrow$ хотя бы один вектор этой системы - линейная комбинация остальных

2) Если в системе есть 0, то она ЛЗ.

3) Если подсистема некоторой системы векторов ЛЗ, то и вся система ЛЗ.

4) Всякая подсистема ЛНЗ системы является ЛНЗ системой.

5) Разложение $\forall$ вектора по ЛНЗ системе единственно.

<u>Опр</u> Целое неотрицательное число r называется размерностью (рангом) линейного пространства L (обозначается $\dim L$), если в линейном пространстве L найдётся ЛНЗ набор из r векторов и $\forall$ система из $r+1$ векторов из L ЛЗ.

Аналогично можно написать для системы векторов.

<u>Опр</u> Базисом линейного пространства L называется конечная упорядоченная ЛНЗ система векторов такая, что каждый из векторов L по ней раскладывается.