Билет 13

Диагональный и канонический вид квадратичных форм. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Лагранжа. Закон инерции квадратичных форм. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра

Опр Квадратичная форма вида $k(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} d_i x_i^2$ называется диагональной. Если $\forall i \in \overline{1..n}$ $d_i \in \{-1;0;1\}$ то форма называется канонической.

Теорема

$\forall\, k(x)$ - квадратичная форма приводима к каноническому виду

□ Воспользуемся методом Лагранжа. Алгоритм следующий:

Пусть есть ненулевой коэффициент перед x_i^2. Тогда сгруппируем все слагаемые, содержащие x_i. Получим слагаемое вида $a x_i^2 + b x_i x_{j_1} + c x_i x_{j_2} + \ldots$ Вынесем за скобки x_i у оставшихся слагаемых (если начиная с $b x_i x_j \ldots$ слагаемые имеются, иначе приводить не надо, можно сделать замену $x_i' = \frac{x_i}{\sqrt{a}}$). Вынесем необходимый коэффициент $2\sqrt{a}$, остальное занесём. В полученном множителе нет x_i. Добавим и вычтем его квадрат, тем самым собрав полный квадрат) Теперь можно сделать замену координат. Получим коэффициент перед новой переменной $+1$ или -1, и старая переменная x_i умрёт. Если же на каком-то шаге нет слагаемого вида $a x_i^2$, где $a \neq 0$, но есть слагаемое вида $b x_i x_j$: $b \neq 0$, то сделаем замену $x_i' = x_i + x_j$; $x_j' = x_i - x_j$, остальные переменные не меняем. Так мы получим квадрат гарантированно.

Такой алгоритм приводит к каноническому виду, т.к. с каждым шагом на 1 минимум переменную мы избавляемся $\Rightarrow$ он конечный ■

Опр Число r, равное количеству „+1" и „-1" в сумме ~~называется~~ в каноническом виде называется рангом квадратичной формы (равно рангу B). Числа p и q, равные соответственно количеству „+1" и „-1" в каноническом виде называются положительным и отрицательным индексами инерции соответственно, а число $\sigma = p - q$ — сигнатурой.

Теорема (закон инерции квадратичных форм)

Положительный и отрицательный индексы инерции не зависят от базиса

□ Пусть в базисе $(e_1; e_2 .. e_n)$ квадратичная форма имеет вид $K(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum\limits_{i=p+1}^{p+q} y_i^2$, а в базисе $(f_1; f_2 .. f_n)$ имеет вид $K(x) = \sum\limits_{i=1}^{s} z_i^2 - \sum\limits_{i=s+1}^{s+t} z_i^2$

Пусть $p > s$. Тогда $q < t$, в силу того ранг матрицы не меняется при смене базиса. Р-м пространства $L_1 = \langle e_1; e_2 .. e_p \rangle$ и $L_2 = \langle f_{s+1} \ldots f_{s+t}; f_{s+t+1} .. f_n \rangle$, т.е. ограничение K на $L_1 > 0$ и $L_2 \leq 0$. При этом $n \geq \dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$
$\dim L_1 + \dim L_2 = p + (n - s) = n + (p - s) > n$, но $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$. Противоречие.

Аналогично при $p < s \Rightarrow p = s$ ■

Опр Если $\forall x \in L$ и $K(x) > 0 / K(x) \geq 0 / K(x) < 0 / K(x) \leq 0$, то K называется положительно определённой / положительно полуопределённой / отрицательно определённой /

отрицательно полуопределённой квадратичной формой. Если $\exists x, y \in L$

$k(x)k(y) < 0$, то квадратичная форма называется знаконеопределённой.

<u>Теорема</u> (критерий Сильвестра)

$\forall x \in L \hookrightarrow k(x) > 0 \iff \forall i \in \overline{1..n} \hookrightarrow M_i > 0$, где $M_i = \left| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1i} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2i} \\ \vdots & & & \\ b_{i1} & \dots & \dots & b_{ii} \end{matrix} \right)$

□ Заметим, что преобразование вычесть из строки/столбца строку/столбец с ненулевым коэффициентом, если они оба лежат внутри матрицы не меняют определитель матрицы. Тогда разрешим преобразования прибавить к строке с номером i ~~столбец~~ строку с номером j, умноженную на коэффициент, если $j < i$. Аналогично со столбцами. Заметим, что такие преобразования не меняют ни один из миноров. Далее будем пользоваться только такими преобразованиями.

$\Rightarrow$ Пользуясь такими преобразованиями, приведём B к диагональному виду. Т.к. $k(x) > 0$, то все элементы на диагонали $> 0 \Rightarrow$ все $M_i > 0$.

$\Leftarrow$ Будем по очереди занулять первые строку + столбец (кроме ~~первого же~~ элемента на диагонали), вторые и т.д. В каждый момент времени M_i считается как произведение диагональных элементов, при этом сначала он положительный. Тогда и каждый следующий будет положительным $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ все диагональные элементы будут положительными $\Rightarrow k(x) > 0$ ■

P.S. Не забудьте сказать, что в силу $B' = S^T B S$ мы применяем преобр. со строкой и потом сразу то же со столбцом