Билет 8

Собственные векторы и собственные значения. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Ограничение преобразования на инвариантное подпространство. Собственные подпространства

Опр Пусть L - линейное пространство; $\varphi: L \to L$ - линейное преобразование, L над полем F. Вектор $x \in L$ называется собственным, если $x \neq 0$ и $\varphi(x) = \lambda x$, где $\lambda \in F$. Данное число λ называется собственным значением

Опр Для $\lambda \in F$ обозначим $L_\lambda = \{x \in L \mid \varphi(x) = \lambda x\}$ - собственное пространство преобразования φ, соответствующее собственному значению λ

Пусть в каком-то базисе φ имеет матрицу A_φ: $x \in L$, тогда чтобы λ было собственным значением, оно должно удовлетворять уравнению $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = 0$. Тогда ненулевое решение системы $\exists$ только когда $\det(A - \lambda E) = 0$

Теорема

Пусть $x_1, x_2 \ldots x_m$ собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ ЛНЗ

$\square$ Докажем по индукции:

База: $m=1$. Т.к. $x \neq 0$, то $\{x\}$ - ЛНЗ система

Пусть верно для $m-1$. Докажем, что верно для m

Запишем $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = 0$ (*) Надо доказать, что равенство верно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Умножим равенство на λ_m: $\alpha_1 \lambda_m x_1 + \alpha_2 \lambda_m x_2 + \ldots + \alpha_m \lambda_m x_m = 0$ (**)

Теперь подействуем φ на (*):

$$\alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2) + \ldots + \alpha_m \varphi(x_m) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \alpha_m \lambda_m x_m = 0$$

Вычтем из полученного (**):

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_m)x_2 + \ldots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x_{m-1} = 0$$

Т.к. все λ разные, то в силу ЛНЗ векторов $x_1, x_2 \ldots x_m$ получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{m-1}$.

Подставим в (*): $\alpha_m x_m = 0$. Т.к. $x_m \neq 0$, то $\alpha_m = 0$ ■

<u>Опр</u> L' - подпространство L называется инвариантным относительно φ, если $\varphi(L') \subseteq L'$

<u>Опр</u> Если числу λ соответствуют собственные вектора с собственным значением λ, то множество всех векторов, соответствующих λ называется собственным подпространством

<u>Теорема</u>

Если $\varphi: L \to L$ - линейное преобразование, то 1) $\ker \varphi$; 2) $\mathrm{Im}\, \varphi$; 3) $\forall M: M \supseteq \mathrm{Im}\, \varphi$ и M - подпространство 4) L_λ, где λ - собственное значение являются инвариантными подпространствами

□ 1) $0 \in \ker \varphi$:D

2) $\forall x \in \mathrm{Im}\, \varphi$ и $\varphi(x) \in \mathrm{Im}\, \varphi$ (что???)

3) $\forall x \in M$ и $\varphi(x) \in \mathrm{Im}\, \varphi \subseteq M$

4) Пусть $x \in L_\lambda$. Тогда $\varphi(x) = \lambda x$. При этом $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) = \lambda(\lambda x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda x \in L_\lambda$ ■

<u>Утв</u> Матрица A в каком-либо базисе диагональна $\Leftrightarrow$ все базисные векторы собственные

□ Df, определение ■