Билет 12

Билинейные и квадратичные функции (формы). Их координатное представление. Изменение матриц билинейных и квадратичных форм при изменении базиса

Опр Билинейной формой (функцией) на линейном пространстве L называется отображение $b: L\times L \to F$, линейное по каждому аргументу, т.е.

$\forall x_1; x_2; x; y_1; y_2; y \in L \ \forall \alpha, \beta \in F$:

1) $b(x_1+x_2; y) = b(x_1; y) + b(x_2; y)$

2) $b(x; y_1+y_2) = b(x; y_1) + b(x; y_2)$

3) $b(\alpha x; y) = \alpha b(x; y)$

4) $b(x; \beta y) = \beta b(x; y)$

Опр Билинейная форма $b(x;y)$ называется симметричной, если $\forall x, y \in L$ $\hookrightarrow$

$b(x;y) = b(y;x)$

Опр Пусть $b(x;y)$ - симметричная билинейная форма. Тогда квадратичной формой, порожденной $b(x;y)$, называется отображение $k: L \to F$: $k(x) = b(x;x)$.

Замечание

$k(x_1+x_2) = b(x_1+x_2; x_1+x_2) = b(x_1;x_1) + 2b(x_1;x_2) + b(x_2;x_2) = k(x_1) + 2b(x_1;x_2) + k(x_2)$

Пусть есть базис $(e_1; e_2 \dots e_n)$ в L. Выберем $x, y \in L$. Тогда

$b(x;y) = b(x_1e_1 + \dots + x_ne_n; y_1e_1 + \dots + y_ne_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i b(e_i; e_j) y_j \Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно записать ~~квадратичную~~ билинейную форму ~~как~~ в координатах.

С другой стороны, этот вид можно записать, так:

$$b(x;y) = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n) \begin{pmatrix} b(e_1;e_1) & b(e_1;e_2) & \ldots & b(e_1;e_n) \\ b(e_2;e_1) & b(e_2;e_2) & \ldots & b(e_2;e_n) \\ \vdots & & & \\ b(e_n;e_1) & \ldots & \ldots & b(e_n;e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Матрицу $B = \begin{pmatrix} b(e_1;e_1) & b(e_1;e_2) & \ldots & b(e_1;e_n) \\ \vdots & \ldots & & \vdots \\ b(e_n;e_1) & & \ldots & b(e_n;e_n) \end{pmatrix}$ назовём матрицей билинейной формы

Тогда $b(x;y) = x^T B y$

Утв

$b(x;y)$ симметрична $\Leftrightarrow$ B симметрична

$\square$ $(\Rightarrow)$ $\forall i,j \in \overline{1,n}$ и $b(e_i;e_j) = b(e_j;e_i)$ в силу симметричности билинейной формы $\Rightarrow$ B симметрична

$(\Leftarrow)$ $B = B^T \Leftrightarrow \forall i,j \in \overline{1,n}$ и $b(e_i;e_j) = b(e_j;e_i)$. Но тогда $b(x;y) = \ldots + x_i b(e_i;e_j) y_j + \ldots =$
$= \ldots + y_j (e_j;e_i) x_i + \ldots = b(y;x)$ $\blacksquare$

Переход в новый базис:

Пусть $b(x;y) = x^T B y$; S - матрица перехода к новому базису. Хотим найти $b(x;y) = (x')^T B' y'$. По формуле смены базиса $x = Sx'$; $y = Sy'$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow b(x;y) = (Sx')^T B S y' = (x')^T S^T B S y'$. Тогда $B' = S^T B S$.