Билет 16

Линейные преобразования евклидова пространства. Преобразование, сопряжённое данному. Матрица сопряжённого преобразования. Свойства сопряжённого преобразования.

Опр Преобразование φ^* называется сопряжённым к φ, если $\forall x, y \in \mathcal{E}$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $(\varphi(x); y) = (x; \varphi^*(y))$

Теорема

Для $\forall$ φ - линейного преобразования в $\mathcal{E}$ $\exists!$ φ^* - сопряжённое преобразование.

$\square$ Для доказательства выразим A^*.

т.к. $(\varphi(x); y) = (x; \varphi^*(y))$, то $(Ax)^T \Gamma y = x^T \Gamma A^* y \Leftrightarrow x^T A^T \Gamma y = x^T \Gamma A^* y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A^T = \Gamma A^* \Leftrightarrow A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$. В силу существования Γ^{-1} A^* $\exists$, и оно единственно в силу конкретной формулы вычисления. $\blacksquare$

Получили, что $A^* = \Gamma^{-1} A \Gamma$, а в ОНБ $A^* = A^T$

Теорема (интерпретация теоремы Фредгольма)

$Im\,\varphi = (Ker\,\varphi^*)^\perp$

$\square$ Пусть $y \in (Im\,\varphi)^\perp \Leftrightarrow \forall x \in E \hookrightarrow (\varphi(x); y) = 0 = (x; \varphi^*(y)) \Leftrightarrow \varphi^*(y) = 0 \Leftrightarrow$
$y \in ker\,\varphi^* \Rightarrow (Im\,\varphi)^\perp \subseteq Ker\,\varphi^*$. Докажем теперь, что $\dim (Im\,\varphi)^\perp = \dim ker\,\varphi^*$
$\dim Ker\,\varphi^* = n - \dim Im\,\varphi^* = n - \dim Im\,\varphi = \dim (Im\,\varphi)^\perp \Rightarrow (Im\,\varphi)^\perp = Ker\,\varphi^* \Rightarrow$
$\Rightarrow Im\,\varphi = (ker\,\varphi^*)^\perp$ $\blacksquare$

Заметим невероятные свойства сопряжённого преобразования:

1) $(\varphi^*)^* = \varphi$, т.к. в ОНБ $A^* = A^T \Rightarrow (A^*)^* = (A^T)^T = A$

2) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$, т.к. $(AB)^T = B^T A^T$

3) Характеристические многочлены A и A^* совпадают