Билет 20

Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых положительно определена

Опр Пусть в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ задана билинейная форма $b(x;y)$. Тогда линейное преобразование φ называется присоединённым к b, если $\forall x,y \in \mathcal{E} \hookrightarrow b(x;y) = (x; \varphi(y))$

Лемма

$\forall$ ~~квад~~ билинейной формы $b(x;y)$ $\exists!$ присоединённое преобразование φ.

$\square$ Пусть B - матрица билинейной формы, A - матрица присоединённого к ней преобразования. Тогда $\forall x,y \in \mathcal{E} \hookrightarrow b(x;y) = (x; \varphi(y)) \Leftrightarrow x^T B y = x^T \Gamma A y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A = \Gamma^{-1} B \Rightarrow \exists! A$ всегда $\blacksquare$

Заметим, что в ОНБ $A = B \Rightarrow$ если B - симметричная, то $A = A^T \Rightarrow A$ - самосопряжённое.

Т.к. $\forall$ квадратичная форма задаётся симметричной B, то ей соответствует присоединённое самосопряжённое преобразование A. По свойствам самосопряжённого преобразования $\exists$ ОНБ из собственных векторов, таких, что в нём $A' = \mathrm{diag}(\lambda_1; \lambda_2 .. \lambda_n)$. Т.к. в ОНБ $B' = A'$, то чтобы найти ОНБ, в котором квадратичная форма диагональна, нужно найти собственные векторы матрицы $A = \Gamma^{-1} B$, составить из них ОНБ.

Теорема

Пусть f и g - квадратичные формы в некотором линейном пространстве L. Пусть g - положительно определена. Тогда $\exists$ базис, в котором обе квадратичные формы имеют диагональный вид

$\square$ Т.к. g - положительно определённая квадратичная форма, то её матрица G может быть матрицей Грама $\Rightarrow$ зададим скалярное произведение с $\Gamma = G$. Тогда заметим, что приведение f к диагональному виду эквивалентно предыдущей задаче. И в этом базисе $G' = E$, т.к. это ОНБ $\Rightarrow$ обе матрицы будут диагональны. Теперь объясним одно упрощение при решении задачи. $A = \Gamma^{-1}F = G^{-1}F \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \det(G^{-1}F - \lambda E) = \det(G^{-1}F - \lambda G^{-1}G) = \det G^{-1} \det(F - \lambda G)$. Т.к. $\det G^{-1} \neq 0$, то можно искать собственные векторы и собственные значения как $\det(F - \lambda G) = 0$ $\blacksquare$