Билет 15

Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональное проектирование на подпространство

Опр Пусть $L \subseteq \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ - евклидово пространство, L - его подпространство. Ортогональным дополнением подпространства L называется $L^{\perp} = \{x \in \mathcal{E} \mid \forall y \in L \hookrightarrow (x;y)=0\}$.

Лемма

$L^{\perp}$ - $(n-k)$-мерное подпространство, где $\dim L = k$, $\dim \mathcal{E} = n$.

□ Заметим, что вектор $x \in L^{\perp}$ задаётся СЛОУ: $\begin{cases}(e_1;x)=0\\(e_2;x)=0\\ \vdots \\(e_k;x)=0\end{cases}$, где

$e_1; e_2 \ldots e_k$ - базис L. Если взять этот базис за ОНБ, то получим:

$$\begin{cases} e_1^T x = 0 \\ e_2^T x = 0 \\ \vdots \\ e_n^T x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

. Как мы знаем - решение СЛОУ - подпространство

Как мы знаем, $\operatorname{rg} A = k \Rightarrow$ ~~решений~~ $\dim L^{\perp} = n-k$. Если не ОНБ, то в общем случае аналогичная система, потому что $e_i^T \Gamma$ - строка длины n ■

Опр Т.к. $E = E' + (E')^{\perp}$ из доказанного ранее, то $\forall x \in \mathcal{E}$ можно разложить $x = x_{\parallel} + x_{\perp}$, где $x_{\parallel} \in E'$; $x_{\perp} \in (E')^{\perp}$. Тогда вектор $x_{\parallel}$ называется ортогональной проекцией x на E', аналогично $x_{\perp}$ - ортогональная проекция x на $(E')^{\perp}$

Теорема

Пусть $L, L^{\perp} \subseteq E$. $X = X_1 + X_2$, где $x_1 \in L$; $x_2 \in L^{\perp}$. Тогда $\forall y \in L: y \neq x_1$ и

и $|x_2| < |x-y|$

□ Пусть $z = x_1 - y \in L$. Тогда

$$|x-y|^2 = |x_1+x_2-y|^2 = |x_2+z|^2 = (x_2+z; x_2+z) = (x_2;x_2) + 2(x_2;z) + (z;z) = (x_2;x_2) + (z;z) =$$

$$= |x_2|^2 + |z|^2 > |x_2|^2 \Rightarrow |x_2| < |x-y| \ \blacksquare$$