Билет 4

Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Матрица перехода. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве. Теорема об изоморфизме.

Опр Если $(e_1; e_2 \dots e_n)$ – базис пространства L, то линейная комбинация $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, где $x_i \in F \; \forall i \in \overline{1..n}$ называется разложением вектора x в пространстве L по базису $(e_1; e_2 .. e_n)$. Числа $x_1 \dots x_n$ называются координатами вектора x.

По определению базиса набор $x_1; x_2 .. x_n$ единственный.

Линейным операциям над векторами отвечают такие же линейные операции над столбцами их координат, т.е.

$$x+y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda x \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Опр Матрицей перехода от базиса e к базису e' называется матрица S, столбцами которой являются координаты векторов базиса e' в базисе e.

Тогда из определения: $e' = eS$

Чтобы найти координаты вектора в новом базисе, можно воспользоваться формулой $x = Sx'$, где x' - координаты вектора в новом базисе.

Т.к. $e' = e S_{e\to e'} \Rightarrow e = e'(S_{e\to e'})^{-1}$

При этом $e = e' S_{e'\to e} \Rightarrow S_{e'\to e} = (S_{e\to e'})^{-1}$

Опр Отображение $\varphi: L_1 \to L_2$ называется изоморфизмом, если:

1) φ - биективно

2) φ - линейно, т.е. $\forall x, y \in L$ и $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$; $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$

Если между L_1 и L_2 $\exists$ изоморфизм, то такие пространства называются изоморфными (обозначается $L_1 \cong L_2$)

Теорема (об изоморфизме)

$L_1 \cong L_2 \Leftrightarrow \dim L_1 = \dim L_2$

□ ($\Rightarrow$) Из определения изоморфизма следует, что если $(e_1; e_2 \ldots e_n)$ - базис L_1, то $\varphi(e_1); \varphi(e_2) \ldots \varphi(e_n)$ - базис L_2. Действительно $\forall x \in L_1 \; \exists! \; x_1 \ldots x_n$: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) \cdot x_i \Rightarrow \forall \varphi(x)$ расписали через $\varphi(e_1) \ldots \varphi(e_n) \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim L_2 \geq \dim L_1$. Ввиду ~~обратимости~~ симметричности изоморфизма получаем обратное неравенство

($\Leftarrow$) Выберем $(e_1; e_2 \ldots e_n)$ и $(f_1; f_2 \ldots f_n)$ - базисы в L_1 и L_2 соответственно.

Построим изоморфизм $\varphi: L_1 \to L_2$ так: $\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) =$
$= \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$. Ввиду единственности разложения по базису получаем биекцию ■