□ 1) Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда λ - собственное значение $\Rightarrow \exists x \in \mathcal{E}: x \neq 0$ и $\varphi(x) = \lambda x$

Из определения ортогонального преобразования $(x;x) = (\varphi(x); \varphi(x)) = \lambda^2 (x;x) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda^2 - 1)(x;x) = 0$. Т.к. $(x;x) \neq 0$, то $\lambda^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$

2) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда обобщим φ на $\mathbb{C}^n$ так. При $z \in \mathbb{C}^n$ и $\varphi(z) = Az$

и введём скалярное произведение ~~...~~ $(x;y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$. Это всё в

ОНБ. Тогда введённое скалярное произведение соответствует введённому

нами при $x, y \in \mathcal{E}$. В этом пространстве λ - собственное значение $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{C}^n: \varphi(z) = \lambda z$. В силу того, что A - над действительными

числами, это всё ещё матрица ортогонального преобразования $\Rightarrow (z;z) =$

$(\varphi(z); \varphi(z)) \Rightarrow |z|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda \cdot z_k \cdot \overline{\lambda z_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda \overline{\lambda} z_k \overline{z_k} = \lambda \overline{\lambda} |z|^2 \Rightarrow$ ~~...~~ $\lambda \overline{\lambda} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$ ■

<u>Лемма</u>

Собственные векторы ортогонального преобразования, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

□ Пусть собственные векторы x и y отвечают разным собственным значениям λ и μ. Тогда $(x;y) = (\varphi(x); \varphi(y)) = (\lambda x; \mu y) = \lambda\mu (x;y) \Rightarrow (1 - \lambda\mu)(x;y) = 0$

Т.к. λ, μ могут быть равны 1 или -1, и они разные, то $\lambda\mu = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x;y) = 0$ ■

Билет 18

Ортогональные преобразования, их матрицы. Свойства ортогональных преобразований. Свойства корней характеристического многочлена и собственных векторов ортогональных преобразований.

Опр Ортогональное преобразование евклидова пространства E – это такое преобразование φ, что $\forall x, y \in E \hookrightarrow (x;y) = (\varphi(x); \varphi(y))$

Теорема

φ - ортогональное $\Leftrightarrow \varphi^* = \varphi^{-1}$

$\square$ $(\Rightarrow)$ Т.к. $A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$, то $A^T = \Gamma A^* \Gamma^{-1}$.

Распишем $(x;y) = (\varphi(x); \varphi(y))$ в матричном виде:

$$x^T \Gamma y = (Ax)^T \Gamma A y \Leftrightarrow \Gamma = A^T \Gamma A \Leftrightarrow \Gamma = \Gamma A^* \Gamma^{-1} \Gamma A \Leftrightarrow A^* A = E \Rightarrow A^* = A^{-1}$$

$(\Leftarrow)$ По условию $\varphi^*(\varphi(x)) = x$. Тогда

$$(\varphi(x); \varphi(y)) = (x; \varphi^*(\varphi(y))) = (x;y) \rightarrow \varphi \text{ - ортогональное } \blacksquare$$

Лемма

φ - ортогональное $\Leftrightarrow A_\varphi$ в ОНБ ортогональная

$\square$ В ОНБ $A^* = A^T$ и φ - ортогональное, то есть $A^* = A^{-1} \Leftrightarrow A^{-1} = A^T$ $\blacksquare$

Теорема

$\varphi: E \to E$ – ортогональное преобразование. Тогда $|\lambda| = 1$, где λ - корень характеристического многочлена φ.