Билет 9

Характеристическое уравнение. Инвариантность характеристического многочлена. Выражение определителя и следа матрицы через корни характеристического многочлена. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализируемости матрицы линейного преобразования.

Опр Пусть A – матрица линейного преобразования φ:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{Тогда } \det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

называется характеристическим многочленом матрицы A.

Уравнение $|A-\lambda E|=0$ называют характеристическим уравнением.

Теорема

Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса

□ $\det(A'-\lambda E)=\det(S^{-1}AS-\lambda E)=\det(S^{-1}AS-\lambda S^{-1}S)=\det(S^{-1}(A-\lambda E)S)=$
$=\det S^{-1}\det(A-\lambda E)\det S=\det(A-\lambda E)$ ■

Утв Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ – корни характеристического многочлена (с учётом совпавших и комплексных) $\det(A-\lambda E)=0$. Тогда $tr(A)=\lambda_1+\lambda_2 \dots +\lambda_n$, $\det A=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$

□ С одной стороны $\det(A-\lambda E)=a(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_n)$.

С другой стороны $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}trA\,\lambda^{n-1}+\ldots+\det A$

Тогда коэффициенты при всех степенях совпадают $\Rightarrow a = (-1)^n$;

$(-1)^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n) = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A \Rightarrow \operatorname{tr} A = \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$ и $(-1)^n(-1)^n \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n = \det A \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$ ■

Теорема

Если собственное значение λ_0 преобразования φ — корень характеристического многочлена кратности S, то размерность соответствующего собственного подпространства $\leq S$

□ Пусть λ_0 соответствует пространство размерности k. Выберем там базис $e_1, e_2, \ldots e_k$. В нём ограничение φ на L_{λ_0} имеет матрицу $\lambda_0 E$. Характер. многочлен этой матрицы $q(\lambda) = (\lambda_0-\lambda)^k$. Т.к. основной многочлен делится на $(\lambda_0-\lambda)^k \Rightarrow k \leq S$ ■

Теорема

Пусть все корни $\lambda_1 \ldots \lambda_k \in \mathbb{F}$. Тогда равносильны утверждения

1) φ диагонализируемо ($\Leftrightarrow \exists$ базис из собственных векторов)

2) $\forall i \in \overline{1..k}$ $\dim L_{\lambda_i} = k_i$, где k_i — кратность λ_i

3) $L = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_k}$.

(1→2)

□ (⇒) Пусть $\exists$ базис из собственных векторов. Т.к. $\sum_{i=1}^{k} k_i = n$ и по лемме $\dim L_{\lambda_i} \leq k_i$, то чтобы получить базис из n собственных векторов необходимо, чтобы $\dim L_{\lambda_i} = k_i$

(2→3) По доказанному ранее $\forall i,j \in \overline{1..k},\ i \neq j \Rightarrow L_i \cap L_j = \{\bar{0}\} \Rightarrow$ т.к. ~~можно~~ ~~составить~~ базис из собственных векторов $\dim L_i = k_i$, то если взять базисы всех подпространств, то получим n векторов ЛНЗ $\Rightarrow L = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus L_{\lambda_k}$

(3→1) Выберем базисы в каждом из $L_{\lambda_1} \dots L_{\lambda_k}$. Составим по ним A_φ - получим диагональный вид ■