Билет 14

Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и её свойства. Ортогональные базисы. Процесс ортогонализации. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональные матрицы.

Опр Линейное пространство $E \subseteq \mathbb{R}^n$ называется евклидовым пространством, если каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in E$ поставлено в соответствие вещественное число $(x;y)$, называемое скалярным произведением, если выполнены аксиомы:

1) $\forall x,y \in E \hookrightarrow (x;y)=(y;x)$

2) $\forall x,y \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \hookrightarrow (\lambda x;y) = \lambda(x;y)$

3) $\forall x_1,x_2,y \in E \hookrightarrow (x_1+x_2;y) = (x_1;y)+(x_2;y)$

4) $\forall x \in E:\ x \neq 0 \hookrightarrow (x;x)>0$

Из определения следует, что скалярное произведение - симметричная билинейная форма.

Опр Пусть E - евклидово пространство. Длиной (или нормой) вектора x назовём число $|x| = \sqrt{(x;x)}$, расстоянием между двумя элементами x и y называется $\rho(x;y) = |x-y|$.

Теорема (неравенство Коши-Буняковского)

$\forall x,y \in E \hookrightarrow |(x;y)| \leq |x||y|$

□ Введём функцию $f(t) = (tx+y; tx+y) = t^2(x;x) + 2t(x;y) + (y;y) \geq 0$

Тогда относительно t имеет $D \le 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = (x;y)^2 - (x;x)(y;y) \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x;y)^2 \le |x|^2|y|^2 \Rightarrow |(x;y)| \le |x||y|$. ■

Теорема (неравенство треугольника)

$\forall x,y \in E$ и $|x+y| \le |x|+|y|$

□ $(x+y;x+y) = |x|^2 + 2(x;y) + |y|^2 \le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2 \Rightarrow |x+y| \le |x|+|y|$ ■

Опр Матрица Γ, соответствующая квадратичной форме, которая является скалярным произведением в E, называется матрицей Грама.

Поэтому $(x;y) = x^T \Gamma y$. Из определения следует, что:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1;e_1) & (e_1;e_2) & \dots & (e_1;e_n) \\ (e_2;e_1) & (e_2;e_2) & \dots & (e_2;e_n) \\ \vdots & & & \\ (e_n;e_1) & \dots & & (e_n;e_n) \end{pmatrix}$$

Т.к. скалярное произведение - симметричная билинейная форма, то $\Gamma = \Gamma^T$

Опр Пусть $\forall i,j \in 1..n$ и $(e_i;e_j) = \begin{cases} a_i \ne 0; & i=j \\ 0; & i \ne j \end{cases}$. Тогда базис $(e_1;e_2..e_n)$ называется ортогональным. Если $\forall i \in \overline{1..n}$ и $a_i = 1$, то базис называется ортонормированным.

Заметим, что в ОНБ $\Gamma = E$.

Разложение $\forall$ вектора $x \in L$ по ОНБ $(e_1;e_2..e_n)$ имеет вид $x = \sum_{i=1}^{n} (x;e_i)e_i$

Теорема

Пусть $\mathcal{E}$ - евклидово пространство. В $\mathcal{E}$ $\exists$ ОНБ.

□ Пусть $\dim \mathcal{E} = n$. Пусть дано $L \subseteq \mathcal{E}$ - подпространство такое, что $\dim L = k \leq n$.

Приведём алгоритм построения по какому-то базису L, его ОНБ. В частности можно взять $L = \mathcal{E}$. Пусть в L задан базис $(a_1; a_2 .. a_k)$. Мы получим базис $(b_1; b_2 .. b_k)$, задающий L. Более того, $\forall i \in 1..k$ будет выполнено

$\langle a_1; a_2 .. a_i \rangle = \langle b_1; b_2 .. b_i \rangle$.

Сначала приведём алгоритм Грама-Шмидта ортогонализации базиса:

1) Пусть $b_1 = a_1$. Вектор b_2 тогда должен быть представим в виде: $b_2 = a_2 - \alpha b_1$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Т.к. $(b_1; b_2) = 0$, то $(b_1; a_2 - \alpha b_1) = 0 \Rightarrow (b_1; a_2) - \alpha(b_1; b_1) = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{(b_1; a_2)}{(b_1; b_1)}$

2) Теперь пусть $(b_1 .. b_m)$ - первые $m-1$ векторов искомого базиса. Построим m-ный. Строить будем в виде $b_m = a_m - \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i^{(m)} b_i$. Тогда так, чтобы $b_m \perp b_1; b_2 ... b_{m-1}$.

Тогда $(b_m; b_j) = (a_m; b_j) - (\alpha_j^{(m)} b_j; b_j) \Rightarrow \alpha_j^{(m)} = \dfrac{(a_m; b_j)}{(b_j; b_j)}$. Тогда мы однозначно установили формулу нахождения каждого следующего вектора: $b_k = a_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{(a_k; b_i)}{(b_i; b_i)}$

Ввиду ЛНЗ всех векторов получим, что каждый b_i получается ненулевой $\Rightarrow$ полученный набор векторов ортогональный базис.

Теперь, чтобы получить ОНБ, достаточно отнормировать векторы $(b_1 ... b_n)$. Для этого возьмём $c_i = \dfrac{b_i}{|b_i|}$ ■

Опр Матрица S называется ортогональной, если $S^{-1} = S^T$.

Теорема

Пусть e и e' – ОНБ; S – матрица перехода $\Leftrightarrow S^{-1} = S^T$

□ $\Rightarrow$ Т.к. e и e' – ОНБ, то $\Gamma = \Gamma' = e \Rightarrow \Gamma' = S^T \Gamma S \Leftrightarrow E = S^T E S = S^T S$

$\Leftarrow$ $\Gamma' = S^T \Gamma S = S^T E S = S^T S = E \Rightarrow e'$ – ОНБ ■