## Билет 1

Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Теорема о базисном миноре

**Опр** Максимальное число ЛНЗ строк матрицы назовём рангом матрицы по строкам ($strrg\,A$). Строки из этого набора назовём базисными.

Аналогично определим ранг по столбцам ($colrg\,A$)

**Опр** Ранг матрицы – число ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы ($rg\,A$)

**Лемма**

Элементарные преобразования строк не меняют strrg и colrg.

□ 1) strrg

Выделим базис из строк. При $\forall$ элементарных преобразованиях все базисные строки остаются ЛНЗ, а все остальные так же выражаются в этом базисе (см. прошлый семестр) $\Rightarrow$ strrg не меняется.

2) colrg

Пусть $a_{j_1}\uparrow; a_{j_2}\uparrow \dots a_{j_r}\uparrow$ – базисные столбцы. Тогда $\forall$ столбец $a\uparrow$ матрицы $A$ представляется их линейной комбинацией: $a = x_1 a_{j_1} + x_2 a_{j_2} + \dots + x_r a_{j_r}$

Запишем это в виде системы $A_r X = a$. Т.к. после элементарных преобразований мы получаем эквивалентную систему, то colrg не меняется ■

Теорема (о ранге матрицы)

$\text{strrg}\, A = \text{colrg}\, A = \text{rg}\, A$

□ По лемме, элементарные преобразования строк не меняют strrg и colrg. rg не меняется по определению. Тогда приведём A к ступенчатому виду алгоритмом Гаусса. Докажем, что:

1) strrg = rg

Если strrg > rg, то в наборе ЛНЗ строк есть нулевая, что невозможно.
Если strrg < rg, то ∃ некая строка в ступенчатом виде, которая выражается линейной комбинацией других строк, но тогда элементарными преобразованиями её можно занулить ⇒ матрица не приведена к ступенчатому виду. Противоречие
⇒ strrg = rg

2) colrg = rg

Выберем rg столбцов, в которых стоят лидеры строк. Из этих столбцов выберем строки, которые ненулевые. Получим матрицу размера rg×rg. Т.к. в ней все строки ЛНЗ, то по теореме Крамера система $Ax = a_i$ совместна
см. сл. стр

Опр Пусть B – квадратная подматрица матрицы A. B имеет размер n×n. B называется базисной подматрицей, если $\det B \neq 0$ и если ∃ подматрицы большего размера, то они вырождены.

Опр Если B – базисная подматрица A, то $\det B$ называется базисным минором.

Теорема (о базисном миноре)

Порядок базисного минора равен $\mathrm{rg}\,A$.

□ Выберем эту матрицу $B$. Т.к. $\det B \neq 0$, то все её строки ЛНЗ $\Rightarrow$ все соответствующие строки матрицы $A$ тоже ЛНЗ $\Rightarrow$ $m \geq \mathrm{rg}\,A$, где $m$ - порядок базисного минора. Пусть $m > \mathrm{rg}\,A$. Тогда в $A$ есть $m$ ЛНЗ строк, что противоречит определению ранга $\Rightarrow$ $m = \mathrm{rg}\,A$ ■

Продолжение теоремы о ранге

где $A$ - наша матрица $\mathrm{rg} \times \mathrm{rg}$, $a_i$ - произвольный ~~вектор~~ столбец $\Rightarrow$ $\forall$ столбец матрицы выражается по данным $\mathrm{rg}$ столбцам, т.к. 0 координаты не влияют $\Rightarrow$ $\mathrm{col\,rg} = \mathrm{rg}$