Билет 5

Подпространства в линейном пространстве. Способы задания подпространств. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы двух подпространств. Прямая сумма.

Опр Подмножество L' называется подпространством L, если L' является пространством с теми же операциями и над тем же полем, что и L

Способы задания:

1) Линейная оболочка – $\langle a_1; a_2 \dots a_m \rangle = \{ b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \mid \forall \lambda_1 \dots \lambda_m \in F \}$

Утв Линейная оболочка $\langle a_1; a_2 \dots a_m \rangle$ – подпространство в L, где $\forall i \in 1..m$ и $a_i \in L$ и при этом $\dim \langle a_1 \dots a_m \rangle = rg \langle a_1; a_2 \dots a_m \rangle$

□ Проверим аксиомы: Т.к. можно взять $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, то $\bar{0} \in M$, где $M = \langle a_1 \dots a_m \rangle$. $\forall x \in M \ \exists (-x) \in M$, т.к. можно все коэффициенты умножить на (-1). Аналогично получаем, что есть замкнутость по сложению и умножению на число, коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность пришли из L, как и нейтральный по умножению $\Rightarrow M$ – подпространство. Равенство $\dim M = rg \langle a_1 \dots a_m \rangle$ выполняется по определению ранга и размерности ■

2) ОСЛУ

Пусть дана ОСЛУ $Ax = 0$. Тогда Q – ФСР системы задаёт подпространство $\mathbb{R}^n$, где n – количество переменных и при этом $\dim Q = n - rg A$

□ Ю, что Q – подпространство (аксиомы просто проверяются).

В системе rgA ЛНЗ строк $\Rightarrow$ из каждой можно выразить одну новую переменную через другие $\Rightarrow$ rgA переменных однозначно определяются по другим $n-rgA$. По ним же, в свою очередь, будет подпространство, поскольку там мы можем для каждой переменной ставить $\forall$ число. Т.к. в этом пространстве все возможные векторы из $\mathbb{R}^{n-rgA}$, то его размерность $\dim Q = n-rgA$ ■

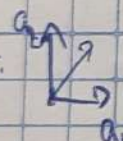
Утв Способы задания подпространств линейной оболочкой и системой уравнений равносильны

□ Невероятно, но факт. Можно решить $\forall$ систему, получить ФСР и из неё составить линейную оболочку, а также можно взять базисные векторы из линейной оболочки, составить по ним ФСР, а по ФСР систему ей соответствующую ■

Утв 1) Если P_1 и P_2 подпространства, то $P_1 \cap P_2$ - подпространство

2) Если P_1 и P_2 подпространства, то $P_1 \cup P_2$ может не быть подпространством

□ 1) h

2) Контрпример:  Пусть $P_1 = \langle a_1 \rangle$; $P_2 = \langle a_2 \rangle$ и они расположены, как на картинке (не коллинеарны). Заметим, что $a_1 + a_2 \notin P_1 \cup P_2$

Опр Суммой подпространств P_1 и P_2 называется $P = \{ x_1 + x_2 \mid \forall x_1 \in P_1\ \forall x_2 \in P_2 \}$

Утв $P_1 + P_2$ - подпространство

□ Опять аксиомы... h ■

Теорема (формула Грассмана)

Если $\dim P_1 < +\infty$ и $\dim P_2 < +\infty$, то $\dim(P_1+P_2) = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(P_1 \cap P_2)$

□ Пусть $\dim P_1 = r_1$; $\dim P_2 = r_2$; $\dim(P_1 \cap P_2) = r$. Выберем базис в P_1, получим r_1 векторов. Теперь мы хотим взять из P_2 векторы, которые ЛНЗ с базисом P_1. Выделим базис P_2. У вектора оттуда 2 варианта: он не выражается через P_1, тогда он уходит в сумму, или выражается, тогда он лежит в $P_1 \cap P_2$ $\Rightarrow$ из r_2 базисных векторов P_2 мы забираем $r_2 - r \Rightarrow \dim(P_1+P_2) = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(P_1 \cap P_2)$ ■

Опр P называется прямой суммой подпространств P_1 и P_2, если $P = P_1 + P_2$ и $P_1 \cap P_2 = \{0\}$

Обозначается $P = P_1 \oplus P_2$.

Ут Следующие утверждения равносильны $P = P_1 +$

1) $\forall x \in P$ и $\exists! x_1; x_2 \in P_1, P_2 : x = x_1 + x_2$

2) $0 = 0 + 0$ - единственный способ

3) $P \cap Q = \{0\}$

4) $\dim P + \dim Q = \dim(P+Q)$

5) Базис в $P_1 + P_2$ - объединение базисов подпространств

□ h ■