Билет 7

Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Операции над линейными преобразованиями в координатной (матричной) форме.

Опр Матрицей линейного отображения φ называется $A_\varphi = (\varphi(e_1)^\uparrow \ \varphi(e_2)^\uparrow \dots \varphi(e_n)^\uparrow)$, где $e_1, e_2 \dots e_n$ - базис в первом пространстве.

Пусть A_φ задана в базисе e. Тогда $\forall i \in \overline{1..n}$ e_i в базисе e выглядит как $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$. Тогда $A_\varphi e_i = \varphi(e_i)$ по определению матрицы A_φ (остаётся только i-ый столбец)

$\forall x \in L_1$ $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Тогда $A_\varphi x = A_\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i A_\varphi e_i =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \varphi(x) \Rightarrow$ так можно находить образ вектора.

Все линейные операции в матричном виде расписываются через обычный, и вместо $\varphi(x)$ надо подставить $A_\varphi x$

Теорема

Пусть e - старый базис в L_1; e' - новый, f - старый в L_2; f' - новый, $\varphi: L_1 \to L_2$. Дана матрица A_φ, которая переводит координаты в базисе e в f. S и T - матрицы перехода $e \to e'$ и $f \to f'$ соответственно.

Тогда $A'_\varphi = T^{-1} A_\varphi S$, где A'_φ - переводит e' в f'.

□ Выберем произвольный вектор x. Пусть его координатный столбец: $\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

~~Тогда $\varphi(x) = A\xi$. Тогда чтобы получить координаты~~

в базисе e. Тогда $\varphi(x) = fA\xi$. При этом требуемый вид: $\varphi(x) = f'A'\xi'$.

Поменяем базис у f. $f' = fT \Rightarrow f = f'T^{-1} \Rightarrow \varphi(x) = f'T^{-1}A\xi$. Теперь

поменяем координаты вектора ξ: $\xi = S\xi' \Rightarrow \varphi(x) = f'T^{-1}AS\xi' \Rightarrow$

$\Rightarrow f'A'\xi' = f'T^{-1}AS\xi' \Rightarrow A' = T^{-1}AS$ ■