Билет 2

Системы линейных уравнений. Общее решение системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема Фредгольма.

__Опр__ Систему уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

назовём системой линейных уравнений.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$ называется матрицей системы ; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - столбцов свободных членов

Матрица $(A|b)$ называется расширенной матрицей системы.

__Опр__ Если $b = 0$, то система называется однородной (ОСЛУ), иначе неоднородной (НСЛУ)

__Опр__ Фундаментальная система решений - базис в пространстве решений ОСЛУ.

Фундаментальная матрица - матрица, столбцами которой является ФСР.

__Теорема__ (о вычислении общего решения СЛУ)

Пусть $AX = b$, а $AY = 0$ - соответствующая ей ОСЛУ. Тогда $\forall$ решение системы $Ax = b$ представляется в виде $X = X_r + Y$, где X_r - частное решение, Y - произвольное решение ОСЛУ

□ ($\Rightarrow$) В силу того, что X_2 - частное решение $AX=B$, то из $AX=B \Rightarrow AX_2=B$.

Тогда $A(X-X_2)=0 \Rightarrow Y$ - решение системы $AY=0$, или $X+X_2=Y$

($\Leftarrow$) Пусть Y - решение системы $AY=0$: $X=X_2+Y$ - есть решение $AX=B$, т.к.

$A(X_2+Y)=AX_2+AY=AX_2+0=B \Rightarrow X_{общ}=X_2+Y_{одн}$ ■

Теорема (Кронекера-Капелли)

СЛУ $Ax=B$ совместна $\Leftrightarrow rg(A)=rg(A|B)$

□ ($\Rightarrow$) Пусть $\exists$ решение x. Тогда $x_1 a_1\uparrow + x_2 a_2\uparrow + \ldots + x_n a_n\uparrow = B\uparrow \Rightarrow B\uparrow$ - линейная комбинация $a_1\uparrow \ldots a_n\uparrow \Rightarrow$ дописывание $B\uparrow$ к матрице не увеличит её ранг

($\Leftarrow$) Пусть $rg(A)=rg(A|B) \Rightarrow$ у них один и тот же базисный минор $\Rightarrow B\uparrow$ - линейная комбинация столбцов базисного минора $\Rightarrow Ax=B$ совместима. ■

Теорема (Фредгольма)

СЛУ $Ax=B$ совместна $\Leftrightarrow \forall y$: y - решение системы $A^Ty=0 \hookrightarrow B^Ty=0$

□ ($\Rightarrow$) Пусть $\exists x_0$: $Ax_0\uparrow=B\uparrow$ и y - некоторое решение системы $A^Ty=0$. Эта система эквивалентна: $y^TA=0$. Домножим равенство $Ax_0=B$ слева на y^T:

$(y^TA)x_0 = y^TB = 0 = B^Ty$

($\Leftarrow$) Пусть $Ax=B$ несовместна. Тогда в матрице $(A|B)$ элементарными преобразованиями строк можно получить строку $(0..0|1)$. Т.к. эта строка получается линейной комбинацией строк матрицы $(A|B) \Rightarrow \exists$ столбец y_0: $y_0^T(A|B)=(00..0|1) \Leftrightarrow y_0^TA=0$ и $y_0^TB=1$, что противоречит условию $\Rightarrow Ax=B$ совместна ■