Билет 10

Теорема Гамильтона-Кэли. Существование двумерного инвариантного подпространства, отвечающего комплексному корню характеристического многочлена линейного преобразования вещественного линейного пространства.

Теорема (Гамильтона-Кэли)

Пусть $p(\lambda)$ - характеристический многочлен матрицы A. Тогда $p(A)=0$

□ Пусть $p(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_n\lambda^n$. Если записать это в матричном виде, то получим $(a_0+a_1\lambda+\ldots+a_n\lambda^n)E$. Если λ - собственное значение A, то $\det(A-\lambda E)=0 \Rightarrow p(\lambda)=0$. Иначе пусть $\det(A-\lambda E)\neq 0$. Тогда

$$(A-\lambda E)^{-1}=\frac{1}{\det(A-\lambda E)}\cdot B(\lambda) \quad (*)$$, где $B(\lambda)$ - матрица с элементами $b_{ij}=(-1)^{i+j}d_i^j(\lambda)$, где d_i^j - минор порядка $n-1 \Rightarrow$ содержит степень $\lambda \le n-1 \Rightarrow$
$\Rightarrow B(\lambda)=B_0+B_1\lambda+\ldots+B_{n-1}\lambda^{n-1}$ (т.к. в каждой ячейке матрицы многочлен степени $n-1$, то разобьём на сумму по степеням λ). Перепишем $(*)$ в виде:

$\det(A-\lambda E)E=(A-\lambda E)B(\lambda) \Leftrightarrow a_0E+a_1E\lambda+\ldots+a_nE\lambda^n=(A-\lambda E)B(\lambda)$. Соберём коэффициенты перед степенями λ слева и справа:

λ^0: $AB_0 = a_0E$

λ^1: $AB_1-B_0 = a_1E$

λ^2: $AB_2-B_1 = a_2E$

$\vdots$

λ^n: $-B_{n-1} = a_nE$

Подставим A. Получим справа $p(A)$, а слева телескопические суммы дадут 0 ■

Теорема

Пусть A - матрица с вещественными числами $\varphi: L \to L$, где $L \subseteq \mathbb{R}^n$.

Тогда у A есть или одномерное, или двумерное инвариантное подпространство

□ Если у φ есть собственные векторы, то можно взять подпространство $\{x\}$, где x - собственный вектор. Иначе у характеристического многочлена нет действительных корней. Выберем комплексное $\lambda = a + ib$. $\exists\, v \in \mathbb{C}^n: v \neq 0$ и $Av = \lambda v$, где $v = u + iw$, $u, w \in \mathbb{R}^n$. Тогда $A(u+iw) = (a+ib)(u+iw) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{aligned} Au &= au - bw \\ Aw &= bu + aw \end{aligned}$$

Р-м подпространство $L' = \langle v; w \rangle$. Тогда $\varphi(v) \in L'$ и $\varphi(w) \in L'$ $\Rightarrow$ их линейная комбинация тоже $\in L'$. Т.к. $v \neq 0$, то u и v ЛНЗ $\to$ размерность подпространства - 2. ■