Билет 1

Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Теорема о базисном миноре

Опр Максимальное число ЛНЗ строк матрицы назовём рангом матрицы по строкам ($strrg\,A$). Строки из этого набора назовём базисными. Аналогично определим ранг по столбцам ($colrg\,A$)

Опр Ранг матрицы — число ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы ($rg\,A$)

Лемма

Элементарные преобразования строк не меняют strrg и colrg.

□ 1) strrg

Выделим базис из строк. При $\forall$ элементарных преобразованиях все базисные строки остаются ЛНЗ, а все остальные так же выражаются в этом базисе (см. прошлый семестр) $\Rightarrow$ strrg не меняется.

2) colrg

Пусть $a_{j_1}\uparrow, a_{j_2}\uparrow \dots a_{j_r}\uparrow$ — базисные столбцы. Тогда $\forall$ столбец $a\uparrow$ матрицы A представляется их линейной комбинацией: $a = x_1 a_{j_1} + x_2 a_{j_2} + \dots + x_r a_{j_r}$

Запишем это в виде системы $A_r X = a$. Т.к. после элементарных преобразований мы получаем эквивалентную систему, то colrg не меняется ■

Теорема (о ранге матрицы)

$strrg\,A = colrg\,A = rg\,A$

□ По лемме, элементарные преобразования строк не меняют strrg и colrg. rg не меняется по определению. Тогда приведём A к ступенчатому виду алгоритмом Гаусса. Докажем, что:

1) strrg = rg

Если strrg > rg, то в наборе ЛНЗ строк есть нулевая, что невозможно. Если strrg < rg, то ∃ некая строка в ступенчатом виде, которая выражается линейной комбинацией других строк, но тогда элементарными преобразованиями её можно занулить ⇒ матрица не приведена к ступенчатому виду. Противоречие ⇒ strrg = rg

2) colrg = rg

Заметим, что в ступенчатом виде матрицы у каждой ненулевой строки есть лидирующий элемент, который в своём столбце единственный ⇒ ⇒ все эти столбцы ЛНЗ ⇒ colrg = rg ■

Опр Пусть B – квадратная подматрица матрицы A. B имеет размер n×n. B называется базисной подматрицей, если $\det B \neq 0$ и если ∃ подматрицы большего размера, то они вырождены.

Опр Если B – базисная подматрица A, то $\det B$ называется базисным минором.

Теорема (о базисном миноре)

Порядок базисного минора равен $rg A$.

□ Выберем эту матрицу B. Т.к. $det B \neq 0$, то все её строки ЛНЗ $\Rightarrow$ все соответствующие строки матрицы A тоже ЛНЗ $\Rightarrow$ $m \geq rg A$, где m - порядок базисного минора. Пусть $m > rg A$. Тогда в A есть m ЛНЗ строк, что противоречит определению ранга $\Rightarrow$ $m = rg A$ ■