Билет 6

Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и множество значений. Ранг линейного отображения. Условия инъективности, сюръективности и биективности. Операции над линейными преобразованиями. ~~Обратное преобразование~~ Обратное преобразование.

Опр Отображение $\varphi: L_1 \to L_2$ называется линейным отображением, если:

1) $\forall x_1; x_2 \in L_1$ ↳ $\varphi(x_1+x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$

2) $\forall x \in L$ $\forall \lambda \in F$ ↳ $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$

Опр $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in L_1 \mid \varphi(x) = 0\}$ - ядро отображения φ

Опр $\operatorname{Im}\varphi = \{y \in L_2 \mid \exists x \in L_1 : \varphi(x) = y\}$ - образ φ (множество значений

Опр Линейное преобразование - линейное отображение $\varphi: L \to L$

Опр Рангом отображения называется размерность его образа: $\operatorname{rg}\varphi = \dim \operatorname{Im}\varphi$

Утв

1) $\varphi(0_1) = 0_2$

2) $\operatorname{Ker}\varphi$ - подпространство в L_1; $\operatorname{Im}\varphi$ - подпространство в L_2

3) φ - инъекция $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

4) φ - сюръекция $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im}\varphi = L_2$

Д 1) $\varphi(x) = \varphi(0+x) = \varphi(0) + \varphi(x) \Rightarrow \varphi(0) = 0$

2) Вау, опять проверка аксиом

3) (⇒) Т.к. $\varphi(0)=0$ и φ – инъекция, то $\forall x \in L \setminus \{0\}$ $\varphi(x) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

(⇐) Предположим противное. Тогда $\exists x_1; x_2 \in L_1: x_1 \neq x_2$ и $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, но $\exists x \in L_1: x_1 + x = x_2$. Тогда в силу линейности φ: $\varphi(x_1 + x) = \varphi(x_1) + \varphi(x) = \varphi(x_2) \Rightarrow \varphi(x) = 0$, что противоречит тому, что $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

4) (⇒) Пусть φ – сюръекция. По опр. сюръекции $\forall y \in L_2\ \exists x \in L_1: \varphi(x) = y$, но тогда по определению $\operatorname{Im}\varphi = L_2$

(⇐) Если $\operatorname{Im}\varphi = L_2$, то $\forall y \in L_2\ \exists x \in L_1: \varphi(x) = y$. Тогда для сюръективности достаточно, чтобы $\nexists x \in L: \varphi(x) = y_1$ и $\varphi(x) = y_2$, а это невозможно по определению отображения ■

<u>Опр</u> Пусть φ, ψ – линейные преобразования $L \to L$, тогда определены операции ~~между~~ над преобразованиями

1) $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ – сложение

2) $(\alpha\varphi)(x) = \alpha\varphi(x)$, где $\alpha \in F$ – умножение на число

3) $(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$ – композиция

<u>Опр</u> Пусть $\varphi: L_1 \to L_2$. Если $\dim L_1 < \infty$, то $\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim L_1$

□ Выберем в L произвольный базис $(e_1; e_2 .. e_n)$. В силу линейности $\dim \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rg}(\varphi(e_1); \varphi(e_2) .. \varphi(e_n)) = \operatorname{rg} A_\varphi$. Векторы $x \in \operatorname{Ker}\varphi$ удовлетворяют системе $A_\varphi x = 0$. Т.к. ~~эта система~~ ФСР имеет размерность $n - \operatorname{rg} A_\varphi$, то $\dim \operatorname{Ker}\varphi = n - \operatorname{rg} A \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\varphi = n = \dim L_1$ ■

Теорема

φ - биективное линейное преобразование $L \to L \Leftrightarrow A_\varphi$ невырождена

$\Rightarrow$

□ В силу инъективности φ и $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. Пусть A_φ вырождена, тогда элементарными ~~линейными~~ преобразованиями столбцов можно получить столбец из 0, но тогда этот столбец был представлен нетривиальной линейной комбинацией образов базисных векторов. В силу линейности φ $\exists x \neq \vec{0}: \varphi(x) = 0$, что противоречит инъективности

$\Leftarrow$ Аналогичными ~~преоб~~ рассуждениями получим, что $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\} \Rightarrow$ т.к. $\dim L = \dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi$, то $\dim L = \dim\operatorname{Im}\varphi$. Тогда по критерию сюръективно ~~инъективности~~ φ инъ. и сюръекзивно $\Rightarrow$ φ - биекция ■

Опр Преобразование ψ называется обратным к ~~мох~~ φ, если $\psi(\varphi(x)) = \varphi(\psi(x)) = x$