# Лекция 10

## Теорема Райса. Теорема Тарского. Теорема Гёделя

Пусть $\mathfrak{A}$ (А красивое) – некоторое нетривиальное семейство вычислимых функций, т.е. $\exists$ такие вычислимые функции $f_1$ и $f_2$ такие, что $f_1 \in A$; $f_2 \notin A$.

**Теорема (Райса)** Алгоритмически неразрешима следующая проблема:

По описанию МТ М решить, придлежит ли вычисляемая М функция $f$ семейству $\mathfrak{A}$.

$\square$ Р-м 2 множества:

$A = \langle M \mid M$ останавливается на $\varepsilon \rangle$

$B = \langle M \mid M$ реализует функцию $f \in \mathfrak{A} \rangle$.

По условию $\exists$ функции $f_0 \notin \mathfrak{A}$ и $f_1 \notin \mathfrak{A}$.

Пусть есть код $x$ МТ $M$, и мы хотим понять $x \overset{?}{\in} A$. Хотим построить $\varphi$ – вычислимую функцию, преобразующую $x$ в $\varphi(x)$, чтобы был вопрос $\varphi(x) \overset{?}{\in} B$, т.е. построить $\varphi$ – значит построить m-сводимость.

Опишем МТ, вычисляющую $\varphi(x)$:

На входной ленте (I) изначально слово $x$.

На ленте II будет новый код.

Действия:

1) $\varphi(x)$ печатает на II ленту код МТ, переносящий входное слово $w$ на

III ленту и стирает всё с ленты I. Заканчивает в $\tilde{q}_0$.

2) На ленте II печатает код $x$, заменяя $q_0$ на $\tilde{q}_0$.

3) Из всех финальных состояний МТ $x$ переходит в $q_{01}$

4) Из $q_{01}$ запускает код $МТ_1$ (которая вычисляет $f_1$), работает на ленте III.

Тогда $\varphi(x)$ вычисляет $f_0$ или $f_1$. Это зависит от того, останавливается ли $x$ на пустом входе $\Rightarrow$ m-сведем к stop $\Rightarrow$ неразрешима $\blacksquare$

---

Р-м исчисление предикатов:

1) Множество формул - разрешимо

2) Множество аксиом - разрешимо

3) Множество правил вывода - разрешимо

4) Множество выводов - разрешимо

5) Множество общезначимых формул - перечислимо, но не разрешимо.

<u>Утв</u> Для произвольной ФС: Если множества аксиом и правил вывода разрешимы, то множество выводимых в этой ФС формул перечислимо.

<u>Утв</u> Из неперечислимости множества формул следует невозможность построения формальной системы с разрешимыми множествами аксиом и правил вывода, которая выводила бы в точности формулы из этого множества.

---

**Опр** Стандартная модель формальной арифметики: $(\mathbb{N}; 0; \underbrace{E}_{\text{равенство}}; \underbrace{\gamma}_{\text{следующий}}; +; \times)$

**Теорема (Тарского)** Множество формул формальной арифметики, истинных в стандартной интерпретации, неперечислимо

**Теорема (Гёделя)** Формальная арифметика неполна.