Лекция 2

Классы и критерий Поста

<u>Опр</u> Класс функций K замкнут, если $\forall$ суперпозиция функций из данного класса и замена переменных в том числе с отождествлением даёт функцию из этого же класса.

<u>Опр</u> Классы поста - следующие замкнутые классы функций:

1) $T_0 = \{f \mid f(0, 0 \dots 0) = 0\}$
2) $T_1 = \{f \mid f(1, 1 \dots 1) = 1\}$
3) $L = \{f \mid \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n x_n\}$ - линейные полиномы Жигалкина
4) $S = \{f \mid f(\overline{x_1}; \overline{x_2}; \dots \overline{x_n}) = \overline{f}(x_1; x_2 \dots x_n)\}$ - самодвойственные функции
5) $M = \{f \mid \forall \alpha, \beta \in \{0,1\}^n : \alpha \geq \beta \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)\}$ - монотонные функции

$\alpha \geq \beta$, если $\forall i \in \overline{1 \dots n} \hookrightarrow \alpha_i \geq \beta_i$

<u>Теорема</u> (Критерий Поста)

K - полный набор функций $\Leftrightarrow$ K не содержится целиком ни в одном из классов Поста ($T_0; T_1; L; S; M$)

$\square$ $\textcircled{\Rightarrow}$ Пусть K лежит в одном из классов Поста, б.о.о. в T_0. Т.к. T_0 - замкнут, то $\forall$ функция, получаемая суперпозицией и заменой переменных с возможным отождествлением лежит в K $\Rightarrow$ лежит в T_0. Т.к. T_0 не совпадает со множеством всех функций алгебры логики $\Rightarrow$ не все функции могут быть получены из K $\Rightarrow$ K - не полный. Противоречие.

($\Leftarrow$) Т.к. K не лежит ни в одном из классов поста, то $\exists$ функции: $f_{\bar 0}; f_{\bar 1}; f_{\bar L}; f_{\bar M}; f_{\bar S} \in K$: $f_{\bar 0} \notin T_0$; $f_{\bar 1} \notin T_1$; $f_{\bar L} \notin L$; $f_{\bar M} \notin M$; $f_{\bar S} \notin S$.

Р-м функцию $f_{\bar 0}(x_1; x_2 \ldots x_n)$. Сделаем замену с отождествлением:

$f_{\bar 0}(x; x \ldots x) = \varphi_{\bar 0}(x)$. При этом $\varphi_{\bar 0}(0) = 1$; $\varphi_{\bar 0}(1) = ? \Rightarrow$

$\Rightarrow$ это функция $\varphi_{\bar 0}(x) = 1$, если $\varphi_{\bar 0}(1) = 1$ или $\varphi_{\bar 0}(x) = \bar x$, если $\varphi_{\bar 0}(1) = 0$.

Р-м функцию $f_{\bar 1}(x_1; x_2 \ldots x_n)$. Сделаем замену с отождествлением:

$f_{\bar 1}(x; x \ldots x) = \varphi_{\bar 1}(x)$. При этом $\varphi_{\bar 1}(1) = 0$; $\varphi_{\bar 1}(0) = ? \Rightarrow$

это функция $\varphi_{\bar 1}(x) = 0$, если $\varphi_{\bar 1}(0) = 0$ или $\varphi_{\bar 1}(1) = \bar x$, если $\varphi_{\bar 1}(0) = 1$

Мы хотим получить набор из всех трёх функций: $0; 1; \bar x$.

Р-м все 4 варианта возможных наборов функций, полученных из T_0 и T_1:

1) <u>Получено 1 и $\bar x$</u>. Тогда получаем из них 0, т.к. $\bar 1 = 0$.

2) <u>Получено $\bar x$ и 0</u>. Тогда получаем из них 1, т.к. $\bar 0 = 1$.

3) <u>Получено $\bar x$.</u>

Р-м $f_{\bar S} \notin S$. Тогда $\exists\, \alpha \in \{0;1\}^n$: $f_{\bar S}(\alpha) = f_{\bar S}(\bar \alpha)$, если α и $\bar\alpha$ сравним

Пусть $f_{\bar S}(x^{\alpha_1}; x^{\alpha_2} \ldots x^{\alpha_n}) = f_{\bar S}(x; x \ldots x) = \varphi_{\bar S}(x)$ (замена с отождествлением)

Тогда $\varphi_{\bar S}(0) = f_{\bar S}(\alpha)$

$\varphi_{\bar S}(1) = f_{\bar S}(\bar \alpha)$ $\Rightarrow$ $\varphi_{\bar S}(0) = \varphi_{\bar S}(1)$ $\Rightarrow$ $\varphi_{\bar S}(x) = const$.

Аналогично п. 1 и 2 из $\bar{x}$ и const получаем другую const, т.е. получили весь набор $0, 1, \bar{x}$

4) <u>Получено 1 и 0.</u>

Р-м $f_{\bar{M}} \notin M$. $\Rightarrow \exists \alpha \geq \beta$: $f_{\bar{M}}(\alpha) < f_{\bar{M}}(\beta)$, т.е. $f_{\bar{M}}(\alpha) = 0$; $f_{\bar{M}}(\beta) = 1$

Находим путь по диаграмме Хасса от α до β. На каком-то шаге будет ребро $a \to b$, отличающееся одним разрядом такое, что $f_{\bar{M}}(a) < f_{\bar{M}}(b)$ и $a \geq b$

Пусть этот различающийся разряд - t. Тогда $a_t = 1$; $b_t = 0$. Тогда ~~fmf~~ Подставим в $f_{\bar{M}}$ следующее: $\begin{cases} x_i = 1; a_i = 1 \\ x_i = 0; a_i = 0 \end{cases}$ $\forall i \neq t$. А для t подставляем 0 и 1. Получаем $\varphi_{\bar{M}}(x)$; $\varphi_{\bar{M}}(0) \neq \varphi_{\bar{M}}(1)$, но $f_{\bar{M}}(1) = f_{\bar{M}}(a) = 0$; $f_{\bar{M}}(0) = f_{\bar{M}}(b) = 1 \Rightarrow$ получили $\bar{x}$

Таким образом, используя классы T_0; T_1; S и M получаем функции 0; 1 и $\bar{x}$.

Теперь р-м $f_{\bar{L}} \notin L$. $f_{\bar{L}} = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_{2^n-1} x_1 x_2 \ldots x_n$. Т.к. $f_{\bar{L}} \notin L$, то $\exists \min t$: $\alpha_t = 1$ и слагаемое с ним $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ содержит $k \geq 2$ множителей.

Подставим $x_{i_1} = x$; $x_{i_2} = y$; $x_{i_3} = x_{i_4} = \ldots = x_{i_k} = 1$. $\underline{\text{ост. перем}} = 0$ Получаем xy. Р-м все варианты такой функции после подстановки:

$xy + x + y + 1$
$xy + x + y$
$xy + x + 1$
$xy + x$
$xy + y + 1$
$xy + y$
$xy + 1$

Если есть слагаемые помимо xy, то прибавим полученные ранее функции 0, 1 или $\bar{x}$; $\bar{y}$, если надо, чтобы избавиться от слагаемых $\Rightarrow$ мы получим конъюнкцию.

Набор $\bar{x}$ и xy - полный $\Rightarrow$ K- полный набор ■