# Лекция 9

## Разрешимость, полуразрешимость, перечислимость. m-сводимость

Разрешимые языки замкнуты относительно:

1) Объединения

2) Пересечения

3) Конкатенации

4) Дополнения

5) Декартова произведения

6) Итерации

Пусть есть язык $L$ и $n \in \mathbb{N}$. Итерацией $L$ назовём:

$L^* = \{\varepsilon\} \cup L \cup L^2 \cup \ldots \cup L^n \cup \ldots L^\infty$

$x \in L^* \Leftrightarrow \exists$ разбиение $x$ на подслова $x_1, x_2 \ldots x_n$ такие, что $x_i \in L$ $\forall i \in \overline{1 \ldots n}$ или $\varepsilon$.

Утв Разрешимые языки замкнуты относительно итерации

□ Пусть на вход дано слово $x$. Тогда мы разбиваем не более чем, на $|x|$ подслов. Всего так $2^{|x|-1}$ разбиений $\Rightarrow$ надо конечное число действий, чтобы определить $x \in L^*$ или нет $\Rightarrow$ $L^*$ - разрешим ■

Утв Конечные языки разрешимы

□ См №3 из д/з ■

**Опр** Язык $L$ называется полуразрешимым (допустимым), если $\exists$ такая МТ $M$, что:

1) на $\forall$ входе $w \in L$ $M$ останавливается в состоянии $q_{yes}$

2) на $\forall$ входе $w \notin L$ $M$ не останавливается в состоянии $q_{yes}$ (может остановиться в $q_{no}$ или зациклиться)

**Утв** Пусть язык $L$ - полуразрешим. Язык $\overline{L}$ - дополнение $L$ тоже полуразрешим $\Rightarrow$ $\Rightarrow L$ - разрешим.

□ $L$-полуразрешим $\Rightarrow \exists$ МТ $M$: $\forall w \in L \to q_{yes}$
$\overline{L}$ - полуразрешим $\Rightarrow \exists$ МТ $\overline{M}$: $\forall w \notin L \to q_{yes}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ запустим одновременно $M$ и $\overline{M}$. Одна из них остановится и выдаст ответ $\Rightarrow$ $\forall w$ можно определить, ~~язык~~ лежит ли оно в $L \Rightarrow L$ - разрешим ■

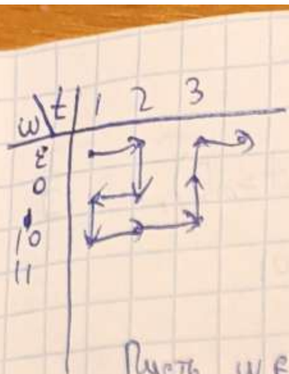
---

**Опр** Язык $L$ называется перечислимым, если $\exists$ МТ, которая, работая с пустого входа напечатает на выходной ленте все слова языка $L$, разделяя их специальными символами. При этом МТ никогда не изменяет непустые символы выходной ленты.

Язык $L$ может быть бесконечным. Имеется в виду, что каждое слово языка появится на ленте за конечное время.

**Утв** Язык $L$ - полуразрешим $\Leftrightarrow$ $L$ - перечислим

□ ($\Rightarrow$) Надо построить МТ $M$, которая перечислит $M$. Построим следующую таблицу:



По горизонтали стоят все слова ~~языка~~ в лексиграфическом порядке. По вертикали количество тактов.

Идём змейкой, и если слово есть в $L$, то выводим его.

Пусть $w \in L$. Т.к. $L$ - полуразрешим, то МТ $M$ выведет $q_{yes}$ на нём и остановится за конечное число тактов т. клетку $(m; w)$ мы когда-то посетим $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ слово $w$ выведем $\Rightarrow$ $L$ - перечислим

($\Leftarrow$) $L$ - перечислим. Тогда $\forall w \in L$ будет когда-то выведено. Будем перебирать все слова в порядке вывода. Т.к. они все $\in L$, то МТ от них остановится и выдаст $q_{yes}$ $\Rightarrow$ $\forall$ слово $w \in L$ можно проверить на МТ $M$, если оно $\in L$ $\Rightarrow$ $L$ - полуразрешим ■

---

<u>Утв</u> Множество перечислимо, если оно есть область определения вычислимой функции

<u>Утв</u> Множество перечислимо, если оно есть область значений вычислимой функции.

<u>Утв</u> Если язык и его дополнение перечислимы, то язык разрешим.

□ $L$ - перечислим $\Leftrightarrow$ $L$ - полуразрешим. Уже доказано ранее ■

Перечислимые языки замкнуты относительно:

1) Объединения

2) Пересечения

3) Конкатенации

4) Декартова произведения

5) Итерации

**Утв** Перечислимые языки не замкнуты относительно дополнения

**Опр** Язык $A \in \mathbb{N}$ m-сводится к языку $B \in \mathbb{N}$ (обозначается $A \leq_m B$), если $\exists$ всюду определённая вычислимая функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что:

$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$

Свойства m-сводимости:

1) $A \leq_m A$ (рефлексивность)

2) $A \leq_m B;\ B \leq_m C \Rightarrow A \leq_m C$ (транзитивность)

3) $A \leq_m B \Rightarrow \mathbb{N} \setminus A \leq_m \mathbb{N} \setminus B$

Если $A \leq_m B$, то:

1) B - разрешим $\Rightarrow$ A - разрешим

2) B - перечислим $\Rightarrow$ A - перечислим