Лекция 8

Алгоритмически неразрешимые проблемы

1) Проблема самоприменимости

Множество алгоритмов счётно. Зафиксируем их нумерацию $A_0, A_1 \dots$

Повторения допустимы.

Число входов тоже счётно, поэтому без ограничения общности считаем, что на вход алгоритму подаётся натуральное число.

Определим функцию $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таким образом:

$$\begin{cases} F(i) = 1, & \text{если } A_i \text{ останавливается на входе } i. \\ F(i) = 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Проблема самоприменимости состоит в вычислении функции f.

<u>Утв</u> f алгоритмически неразрешима при $\forall$ нумерации алгоритмов.

☐ Предположим противное: $f(n)$ – вычислима. Тогда $\exists$ МТ M_f, её вычисляющая, $M_f(n)$ – результат.

Построим M_F' так:

Она пишет 1 и останавливается, если $M_f(n) = 0$

Она зацикливается, если $M_f(n) = 1$.

Раз $M_f'(m)$ – машина Тьюринга, то у её алгоритма есть некий номер $m \to$
$\to A_m$.

Запустим $A_m(m)$. Пусть она остановится $\Rightarrow F(m) = 1 \Rightarrow M_F(m) = 1 \Rightarrow$

⇒ $M'_f(m)$ – не останавливается. Противоречие.

Тогда пусть $M'_f(m)$ не останавливается $\Rightarrow F(m)=0 \Rightarrow M_f(m)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_f'(m)=1 \Rightarrow M_f'(m)$ останавливается. Противоречие ⇒

⇒ f – невычислима ■

2) Проблема остановки

Определим функцию $f_S: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ таким образом: $f_S(i,j)=1$, если алгоритм A_i останавливается на входе j и $f_S(i,j)=0$ в противном случае.

Проблема остановки заключается в вычислении функции f_S. Она алгоритмически неразрешима при ∀ нумерации алгоритмов.

<u>Утв</u> f_S неразрешима.

□ Сначала построим МТ M_w следующим образом

1) С пустого входа печатает w

2) Смещается на первый символ

3) Запускает M на w

Тогда свели задачу к тому, что нужно доказать, что мы не можем гарантированно отвечать, остановится ли МТ на пустом входе.

Пусть ∃ оракул O (сущность в виде гномика), который получает на вход МТ M, а на выходе отвечает, остановится ли МТ M на пустом входе.

$$O(M) = \begin{cases} 0; & M \text{ - не остановится} \\ 1; & M \text{ - остановится} \end{cases}$$

$\Downarrow$

Если $\exists\, O(M)$, то M_w разрешима $\Rightarrow$ f_s разрешима, но т.к. $\nexists\, O(M)$ по проблеме самоприменимости $\Rightarrow$ f_s - неразрешима ■

Построим M_w явно:

$\delta(q_0; \Lambda) = (w_1; +1; q_1)$

$\delta(q_1; \Lambda) = (w_2; +1; q_2)$

Здесь w_i - i-ый символ слова w

$\vdots$

a - любой символ, кроме Λ

$\delta(q_{|w|-1}; \Lambda) = (w_{|w|}; 0; q_\Lambda)$

$\delta(q_\Lambda; a) = (a; -1; q_\Lambda)$

$\delta(q_\Lambda; \Lambda) = (\Lambda; +1; q_{0M}) \Leftarrow$ пришли к МТ M.

Обозначим через stop язык в алфавите $\{0; 1\}$, состоящий из тех описаний $\langle M; w \rangle$ МТ M и входного слова w, для которых M останавливается на входе w.

<u>Утв</u> Язык stop неразрешим

3) Достижимость в ассоциативном исчислении

Заданы правила преобразования слов в алфавите A: $L_i \to R_i \in A^*$:

$L_1 \to R_1; L_2 \to R_2 \dots L_n \to R_n$, то есть $\forall$ вхождение L_i в слово можно заменить на R_i.

Задача достижимости: по двум заданным словам и набору правил определить, можно ли одно слово получить из другого заданными преобразованиями.

<u>Утв</u> Задача достижимости неразрешима.

□ Сведём проблему остановки к этой, то есть к вопросу, останавливается ли МТ M на пустом входе. Построим новую МТ M' так: ко всем финальным состояниям M добавим стирание всего с ленты (+ Garbage Collector, java moment) и переход в единственное финальное состояние – q_f. Тогда если задача решилась, то M' остановилась на пустом входе, а иначе – нет => Если умеем решать эту задачу, то проблема остановки разрешима. Противоречие => задача достижимости неразрешима ■

4) Равенство слов в полугруппе

Заданы правила преобразования слов в алфавите A; $L_i, R_i \in A^*$ (опять отсылка на звездец в алгосах)

$L_1 \leftrightarrow R_1; L_2 \leftrightarrow R_2 \dots L_n \leftrightarrow R_n$, то есть ∀ вхождение L_i в слово можно заменить на R_i и наоборот.

Задача достижимости: по двум заданным словам и набору правил определить, можно ли одно слово получить из другого заданными преобразованиями.

<u>Утв</u> Эта задача достижимости неразрешима.

□ Можно сделать $2n$ односторонних замен и получим предыдущую задачу ■

5) Проблема соответствий Поста

Системой соответствий Поста называется набор пар слов в конечном алфавите A:

$(u_1; b_1); (u_2; b_2) \dots (u_n; b_n)$

Решением системы соответствий называется такая конечная последовательность

$i_1; i_2 \dots i_k$, что $u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} = b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_k}$

Утв Задача о $\exists$ решения системы является алгоритмически неразрешимой

6) Функция трудолюбия Радо

Функция трудолюбия Радо $R(n)$ определяется как максимальное количество единиц в результате работы на пустом входе МТ с n состояниями и алфавитом $\{1; \wedge\}$ при условии, что МТ останавливается на пустом входе.

Вычислим $R(1)$ и $R(2)$.

$R(1) = 0$, потому что $q_0 = q_f$, и МТ сразу остановилась

$R(2) = 1$

Q\A	$\wedge$	1
q_0		
q_f	x	x

1) $(q_0; \wedge) = (q_f; \forall; \forall)$ – max одна „1" и сразу останавливается

2) $(q_0; \wedge) = (q_0; \wedge; \forall \text{сдвиг})$ – зациклилась. Невозможно

$(q_0; 1; \pm 1)$ – зациклилась. Невозможно

$(q_0; 1; 0)$ – единственный вариант. Появилась одна „1"

3) $(q_0; 1) \rightarrow$ если не переходит в q_f, то остановилась $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ переходим в q_f, и кол-во „1" не увеличивается

$\Downarrow$

$R(2) = 1$

Есть оценка $R(3k+3) \geq 4k$

<u>Утв</u> $R(n)$ невычислима

□ Пусть $\exists$ МТ M_R, которая её вычисляет. Тогда на вход она получает $\underbrace{11\ldots1}_{n}$,

а выводит $\underbrace{11\ldots1}_{R(n)}$. Пусть количество состояний M_R — $c \in \mathbb{N}$

Возьмём МТ M':

1) С пустого входа работает как M_{3k+3} и „q_f" в M_{3k+3} больше не финальное,

а запускает п. 2 ($3k+3$ состояния использовано)

2) Переход на левую „1", не меняя ленту (хватит 3 состояния)

3) Запуск M_R

На выход $R(4k)$ единиц

Всего состояний $3k+\cancel{6}+c$ ~~...~~. При $3k+3+c$ напечатали $R(4k)$ „1" $\Rightarrow$

$\Rightarrow R(3k+3+c) \geq R(4k)$

Выберем $k \gg 3+c$ так, что $3k+3+c < 4k$. Но $\vdash$, что $R(n)$ — монотонно неубывает.

Противоречие $\Rightarrow R(n)$ — невычислима ▨

Примечания: $\vdash$ — квантор очевидности