Лекция 3

Семантическое и синтаксическое следствие. Формальные системы.

Исчисление высказываний

Сравнение функций на языке алгебры логики и теории множеств:

$A \subseteq U \quad a(x) = \begin{cases} 1; x \in A \\ 0; x \notin A \end{cases}$; $B \subseteq U \quad b(x) = \begin{cases} 1; x \in B \\ 0; x \notin B \end{cases}$

U - множество всех рассматриваемых объектов.

1) $A \cap B \Leftrightarrow a \wedge b$

2) $A \cup B \Leftrightarrow a \vee b$

3) $A \subseteq B \Leftrightarrow a \to b$

Введение. Анализ следствия на примере обычных фраз:

$\begin{cases} \text{Если погода хорошая, и Дима выучил уроки, то Диме можно поиграть в футбол, а иначе нельзя} \\ \text{Дима не учит уроки} \Rightarrow \text{у мамы плохое настроение} \\ \text{Сейчас Дима играет в футбол. Верно ли, что у мамы хорошее настроение?} \end{cases}$

P.S. фигурные скобки sad story

Пусть p - погода (хорошая - 1; плохая - 0); u - уроки (1 - сделаны; 0 - нет); f - футбол (1 - играется; 0 - нет); n - настроение (1 - хорошее, 0 - нет)

Запишем на языке алгебры логики:

$p \wedge u \to f; \quad \bar{u} \to \bar{n}, \quad f$. Верно ли n?

Ответ: нет; Пример: $n=0$; $f=1$; p и y - любые.

Перепишем условие:

Погода хорошая, и Дима выучил уроки $\Leftrightarrow$ Диме разрешают играть в футбол

Дима не учит уроки $\Leftrightarrow$ у мамы портится настроение

$$\begin{cases} f \Leftrightarrow u \wedge p \\ u \Leftrightarrow n \\ f \end{cases} \quad \text{Тогда } f = u = n = p = 1$$

Вывод: в повседневной речи может быть много слов, надо формализовать, т.к. нельзя сделать нормальное следствие.

Опр Пусть f - функция алгебры логики; Γ - некоторое множество функций алгебры логики, f называют семантическим следствием Γ и обозначают $\Gamma \models f$, если f истинно на всех наборах значений переменных, на которых истинны все функции Γ.

Пример: $(A; A \to B) \models B$

Опр Формальная система - набор $(\Sigma; F; A; R)$.

Σ - алфавит, счётное множество (из алфавита строят слова)

F - формулы (счётное множество конечных слов)

$F \subseteq \Sigma^*$ (Σ^* - множество конечных слов)

Пустое слово обычно обозначают ε.

A - аксиомы; $A \subseteq F$

синтаксическое следствие

R - правила вывода$((f_1, f_2, \dots f_k) \vdash f_{k+1})$: $F^k \to F$

Опр Формальная система исчисления высказываний (синтаксис алгебры логики):

Выберем $(\neg, \to)$ в качестве логических операций (полная система)

$\Sigma = \{\neg; \to; (;);$ счётное множество переменных $(x_1; x_2 \dots)\}$

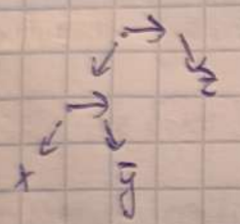
F: 1) x – формула, если x – переменная

2) $(\neg x)$ – формула, если x – формула

3) $(x \to y)$ – формула, если x, y – формулы

4) Других формул нет

$((x \to (\neg y)) \to z)$



– дерево разбора

Если дерево разбора строится, то формула, иначе – нет.

A: счётное множество аксиом

Схемы аксиом:

$A; B$ и C – формулы

1) $(A \to (B \to A))$

2) $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

3) $(((\neg B) \to (\neg A)) \to (((\neg B) \to A) \to A))$

R: $A; A \to B \vdash B$

f выводится в исчислении высказываний, если $\exists (f_1; f_2 \dots f_n);\ n \in \mathbb{N}$

и $f_n = f$; f_i - аксиома, или $\exists j, k < i$: $f_j = (f_k \to f_i)$; n - длина вывода

Выведем $(A \to A)$:

1) Берём схему 2: $A = A$; $B = (A \to A)$, $C = A$

f_1: $((A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)))$ - аксиома

2) Берём схему 1: $A = A$; $B = A \to A$:

f_2: $(A \to ((A \to A) \to A))$ - аксиома

3) $mp(f_1, f_2)$: $\{f_1; f_2\} \vdash f_3$: $((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$

↓

modus ponens - правило вывода

4) Берём схему 1: f_4: $(A \to (A \to A))$ (подставили $A = A$; $B = A$)

5) $mp(f_3, f_4)$: $(f_3, f_4) \vdash f_5$: $(A \to A)$ - вывели

<u>Утв</u> Исчисление высказываний полно и корректно.

<u>Опр</u> f выводится из гипотез Γ, если $\exists$ цепочка $(f_1; f_2 \dots f_n) \vdash f$, где

f_i - аксиома или гипотеза.

<u>Теорема</u> (критерий условной выводимости)

$\Gamma \vdash f \iff \Gamma \models f$

□ Доказательства нет, выдыхаем: h/