Лекция 13

Регулярные языки и выражения. ДКА. НКА. Диаграмма Мура

Опр $\Sigma = \{a_1; a_2 \dots a_n\}$; $n \in \mathbb{N}$ → алфавит, конечное множество

Опр Слово – конечная последовательность символов алфавита.

Опр $w[i]$ – i-й элемент слова w.

Опр $|w|_a$ – количество букв a в слове w

Опр ε – пустое слово (слово нулевой длины

Опр w^n – слово, получаемое, если записать слово w ровно n раз подряд

Опр w^R – слово, получаемое, если записать слово w побуквенно в обратном порядке.

Опр Σ^* – множество всех конечных слов над алфавитом Σ.

Опр Языком L над алфавитом Σ называют подмножество Σ^*.

Операции над языками:

1) Конкатенация: $XY = \{xy \mid x \in X; y \in Y\}$

2) Возведение в степень: $X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot \ldots \cdot X}_{n}$

3) Объединение: $X|Y = X+Y = X \cup Y$

4) Итерация (звезда Клини): $X^* = \varepsilon + X + X^2 + \ldots + X^n + \ldots$

Пусть задан алфавит Σ. Определим на нём индуктивно регулярные языки и регулярные выражения их задающие:

Регулярный язык	Регулярное выражение
1) $\varnothing \in REG$	$\varnothing$
2) $\forall a \in \Sigma \hookrightarrow \{a\} \in REG$	a
3) $\forall X, Y \in REG \hookrightarrow XY \in REG$	$X \cdot Y$ или XY
4) $\forall X, Y \in REG \hookrightarrow X+Y \in REG$	$X+Y$
5) $\forall X \in REG \hookrightarrow X^* \in REG$	X^*

Утв Не все языки регулярные

□ Пусть $|\Sigma| = n$. Посчитаем количество регулярных языков. Заметим, что любой регулярный язык определяется формулой, а формул счётно $\Rightarrow |REG| = \aleph_0$

Теперь посчитаем количество языков. Любое слово можно представить, как бесконечное число ячеек, на каждой из которых написано ε или символ из Σ, т.е. для каждого из $\aleph_0$ положений есть $n+1$ вариант $\Rightarrow (n+1)^{\aleph_0} = \aleph_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ всего языков несчётно. Ещё можно сказать, что $|\Sigma^*| = \aleph_0$, при этом для каждого слова есть 2 варианта: включено оно в язык или нет. Получаем то же самое. Т.к. $\aleph_0 < \aleph_1$, то не все языки регулярные ■

Опр Детерминированный конечный автомат (ДКА) — это набор $(\Sigma; Q; Q_f; \delta; q_0)$, где:

- Σ — алфавит, слова над которым обрабатывает ДКА

• Q - конечное множество состояний автомата

• Q_F - множество принимающих состояний $Q_F \subseteq Q$

• δ - функция (таблица) переходов $\delta: \Sigma \times Q \to Q$

• q_0 - начальное состояние. $q_0 \in Q$

Принцип работы:

Читает слово один раз слева направо. Если слово дочитано до конца, и ДКА находится в принимающем состоянии, то слово принято, иначе - отвергнуто

Как выглядит:

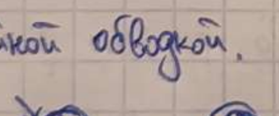
ДКА удобно представить как граф (диаграмма Мура):

• Каждому состоянию автомата соответствует вершина графа.

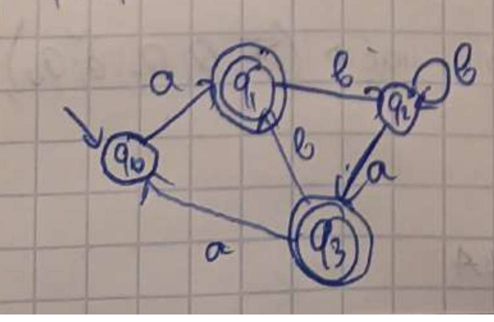
• Вершины соединены направленными дугами, помеченными символами алфавита. Они соответствуют функции δ.

$\delta(a, q_1) = q_2 \iff q_1 \xrightarrow{a} q_2$

• Начальное состояние обозначают „входящей стрелкой", а принимающее - двойной обводкой.



Пример ДКА:



Полный ДКА - ДКА, в котором из каждой вершины выходят рёбра со всеми символами алфавита.

Чтобы его построить по ДКА введём дополнительную вершину $\rightarrow (T)$ - помойка (Brawl Stars). В неё проведём все отсутствующие рёбра, и петли по всем символам. Из (T) нельзя выбраться, и она отвергает слово

Опр Недетерминированный конечный автомат (НКА) - это набор $(\Sigma; Q; Q_F; \delta; q_0)$, где:

- Σ - алфавит
- Q - конечное множество состояний автомата
- Q_F - множество принимающих состояний: $Q_F \subseteq Q$
- δ - функция переходов $\delta: \{\Sigma \cup \varepsilon\} \times Q \to 2^Q$
- q_0 - начальное состояние; $q_0 \in Q$

Функция переходов у НКА неоднозначная.

НКА принимает слово, если возможно достижение принимающего состояния при полном считывании слова.

Фан-Утв Недерменированные конечные автоматы и машины Тьюринга порождают мультивселенную.

Утв Проверка принятия слова НКА конечна. (Ситуация некатастрофическая)

□ Пусть $|\Sigma| = n$. Тогда между $\forall$ двумя буквами $\le n$ ε-переходов $\Rightarrow$ перебор конечный ■