Лекция 11

Арифметическая иерархия. Универсальная функция. Универсальное множество

Опр Графиком функции f с натуральными аргументами и значениями называется множество $F = \{\langle x;y\rangle \mid \exists f(x) = y\}$

Утв Функция f вычислима $\Leftrightarrow$ её график F перечислим.

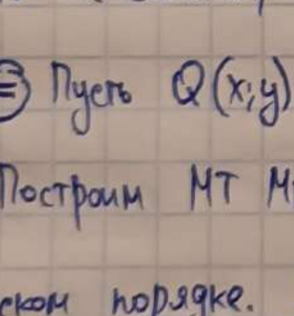
Опр Проекцией множества Q пар натуральных чисел называется множество P такое, что $x \in P \Leftrightarrow \exists y: \langle x;y\rangle \in Q$

Утв Множество P перечислимо $\Leftrightarrow \exists Q$ – разрешимое множество, такое, что P – проекция Q

$\square$ ($\Rightarrow$) P-перечислимо $\Rightarrow \exists$ МТ M_P, его перечисляющая $\Rightarrow$ язык пар $\langle t;x\rangle$, где x появляется на ленте не более чем за t шагов, ~~переза~~ разрешим. Назовём это Q. Заметим, что P – проекция Q.

($\Leftarrow$) Пусть $Q(x;y)$ – разрешимое свойство, МТ M_Q – его разрешает.

Построим МТ M_P перечисляющую так. Упорядочим все слова в лексикографическом порядке. Будем идти по таблице: змейкой.



На каждой паре $(x_i; y_j)$ запустим M_Q. Она гарантированно выдаст ответ. Если $\langle x;y\rangle \in Q$, то выведем x. Таким образом, $\forall x$ появится на ленте за конечное время $\blacksquare$

Утв ∀ перечислимый язык P можно задать, как проекцию разрешимого множества Q., или же:

$$x \in P \Leftrightarrow \exists y: \langle x; y \rangle \in Q.$$

Назовём это Σ_1

Опр Языки, дополнение которых является перечислимым, называют коперечислимыми.

Утв ∀ коперечислимый язык L можно задать в виде:

$x \in L \Leftrightarrow \forall y: \langle x; y \rangle \in Q_L$, где Q_L – разрешимое множество.

Назовём это Π_1.

Опр Свойство (язык, множество) A принадлежит классу Σ_n, если его можно представить в виде $A(x) \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \dots ?y_n\, B(x; y_1; y_2 \dots; y_n)$, где B – разрешимое свойство. Кванторы чередуются. $?$ – какой-то квантор, зависит от чётности n.

Опр Свойство (язык, множество) A принадлежит классу Π_n, если его можно представить в виде $A(x) \Leftrightarrow \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \dots ?y_n\, B(x; y_1; y_2; y_3 \dots y_n)$, где B – разрешимое свойство. Кванторы чередуются.

Свойства классов Σ_n и Π_n:

1) $\Sigma_1 \cap \Pi_1$ – множество разрешимых языков
2) Σ_n и Π_n замкнуты относительно объединения и пересечения
3) Классы Σ_n и Π_n „наследственны вниз" относительно m-сводимости. Это значит:

$$A \leq_m B;\ B \in \Sigma_n(\Pi_n) \Rightarrow A \in \Sigma_n(\Pi_n)$$

4) $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$

5) $\Sigma_n \subset \Sigma_{n+1}$; $\Pi_n \subset \Pi_{n+1}$

6) $L \in \Sigma_n \Leftrightarrow \overline{L} \in \Pi_n$

Опр Функция U двух натуральных аргументов называется универсальной для класса вычислимых функций одного аргумента, если $\forall n \in \mathbb{N}$ функция $U_n : x \to U(n; x)$, т.е. сечение функции U при фиксированном n является вычислимой функцией, и все вычислимые функции встречаются среди U_n

Утв $\exists\ U(n; x)$ – вычислимая функция двух аргументов, являющаяся универсальной для класса вычислимых функций одного аргумента.

□ Машин Тьюринга, принимающих на вход один аргумент, счётно. Запишем коды всех таких МТ. Эти коды упорядочим по возрастанию. Так мы всем МТ, вычисляющим функции одного аргумента, присвоили вычислимый номер. Строим МТ, которая по двум аргументам: номеру n и входу w запускает МТ с номером n на входе М. Данная МТ вычисляет нужную нам универсальную функцию двух аргументов ■

Опр Множество $W \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ называется универсальным для некоторого класса множеств натуральных чисел, если все сечения $W_n = \{x \mid \langle n; x \rangle \in W\}$ множества W принадлежат этому классу и других множеств в этом классе нет.

<u>Утв</u> $\exists$ перечислимое множество пар натуральных чисел, универсальное для класса всех перечислимых множеств натуральных чисел.

$\square$ Можно взять область определения универсальной функции для класса вычислимых. $\blacksquare$

<u>Утв</u> Для $\forall n \in \mathbb{N}$ в классе Σ_n $\exists$ множество, универсальное для всех множеств класса Σ_n. Его дополнение будет универсальным в классе Π_n.

<u>Утв</u> Универсальное Σ_n (Π_n) множество не принадлежит классу Π_n (Σ_n).