Лекция 4

Исчисление предикатов: алфавит и формулы. Сигнатура

Исчисление высказываний неудобно, т.к. можно вывести только тавтологии на множестве булевых переменных и функций.

Зададим формальную систему - исчисление предикатов:

Алфавит (Σ):

1) Все символы из ИВ для записи формул: $\{ (;); \to; \neg \}$

2) X - не более чем счётное множество символов переменных. Переменные могут принимать значения произвольного множества M.

3) F - не более чем счётное множество функциональных символов. Функции из F задают отображение $M^k \to M$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, т.е. функции дают в ответе элементы множества M. Если $k=0$, то под такой функцией подразумевается константа $c \in M$.

4) P - не более чем счётное множество предикатных символов. Предикаты из P задают отображение $M^k \to Bool$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, т.е. ~~фун~~ предикаты возвращают true или false.

5) $;$ - разделительный символ

6) $\forall$ - квантор всеобщности

Формулы (F).

Все формулы – выражения, возвращающие bool.

<u>Опр</u> Терм:

1) Символ переменной

2) Если $f \in F_k$; $t_1; t_2 \dots t_k$ – термы, то $f(t_1; t_2 \dots t_k)$ – терм

<u>Опр</u> Элементарные формулы:

Если $A \in P_m$; $t_1; t_2 \dots t_m$ – термы, то $A(t_1; t_2 \dots t_m)$ – элементарная формула

<u>Опр</u> Формула:

1) Если A – элементарная формула, то A – формула

2) $(\neg A)$ – формула, если A – формула

3) $(A \to B)$ – формула, если A и B – формулы

4) $(\forall_x A)$ – формула, если $x \in X$ и A – формула

<u>Опр</u> Сигнатура – конечное количество предикатных и функциональных символов с указанием арности.

<u>Пример 1</u> Выразим некоторые формулы в простейшей арифметике.

Сигнатура: $\{+; \cdot; =; >; 0; 1\}$.

В качестве множества M берём $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

$+$ и $\cdot$ $\in F_2$, т.е являются функциональными символами арности 2 (принимают 2 переменных)

$=$; $>$ $\in P_2$, т.е. предикаты арности 2

$0; 1 \in F_0$, т.е. функции арности 0.

Хотим записать утверждение ~~„$\forall x\; x \geq 0$"~~ „0-наименьший элемент" на языке ИП.

$\vee$-выражается через $\neg$ и $\to$ $\Rightarrow$ можно её использовать

Формула: $(\forall x(>(x;0) \vee =(x;0)))$

<u>Опр</u> Модель:

1) Сигнатура

2) Область интерпретации (M)

3) Интерпретация символов сигнатуры (придаём функциям и предикатам смысл),

переход от синтаксиса к семантике.

<u>Пример 2</u>

Работаем в той же сигнатуре арифметики.

Выразим квантор существования:

$(\exists x\, B) = (\neg(\forall x(\neg B)))$

Выразим $A_0(x)$ - предикат 0, т.е. $A_0(0) = true$, иначе $false$:

$A_0(x) = \forall y(=(x; \oplus(x;y)))$

Выразим $A_1(x)$ - предикат 1:

$A_1(x) = \forall y(=(x; \odot(x;y)))$

Выразим $B_{\vdots}(x;y)$ - предикат кратности, т.е. $x \vdots y$:

$B_{\vdots}(x;y) = \exists c(=(x; \odot(y;c)))$

Выразим формулу: „x - степень 2"

x - степень 2 $\Leftrightarrow$ Если $x \vdots t$, то $t=1$ или $t \vdots 2$. Тогда:

$$„x\text{-степень } 2" = \forall t \left(B_{\vdots}(x; t) \rightarrow \left(A_1(t) \vee B_{\vdots}(t; 2) \right) \right)$$