Лекция 1

Булевы функции и их формы записи

Опр Булева функция – фукция вида: $\{0;1\}^n \to \{0;1\}$

Пусть $f(x_1;x_2 \dots x_n)$ – булева функция от n переменных. Тогда всего 2^n наборов.

Булевы функции задаются таблицами истинности.

Опр Переменная x_i называется существенной для функции $f(x_1;x_2 \dots x_n)$; $i \in \overline{1 \dots n}$, если $\exists$ набор значений $\alpha_1;\alpha_2 \dots \alpha_{i-1};\alpha_{i+1} \dots \alpha_n \in \{0;1\}$ такой, что $f(\alpha_1;\alpha_2 \dots \alpha_{i-1};0;\alpha_{i+1} \dots \alpha_n) \neq f(\alpha_1;\alpha_2 \dots \alpha_{i-1};1;\alpha_{i+1};\dots \alpha_n)$.

В противном случае переменная называется фиктивной (несущественной).

Булевы функции от двух переменных (x и y): 0, 1 (тождественные ложь и истина), x, y, $\bar{x}, \bar{y}$ (инверсия/отрицание), $x \vee y$ (дизъюнкция), $x \wedge y$ (конъюнкция), $x \to y$ (импликация), $x \equiv y$ (эквивалентность/равенство), $x \oplus y$ (XOR), $x \mid y$ (штрих Шефера), $x \downarrow y$ (стрелка Пирса)

Таблица истинности для данных функций:

x	y	0	1	x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \to y$	$x \equiv y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
						I		III	II	V	VI	IV		

Снизу показан приоритет операций

Опр Булевы формулы:

1) ∀ переменная, 0, 1 - формулы
2) Если A - формула, то $\overline{A}$ - формула
3) Если A и B формулы, то $(A \vee B)$; $(A \wedge B)$... $(A \downarrow B)$ - формулы
4) Других формул нет.

Опр КНФ - конъюнктивная нормальная форма, или конъюнкция дизъюнкций.

Пример: $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_4)$

Опр Литерал - переменная или её отрицание.

Опр КНФ такая, что каждый дизъюнкт содержит все переменные ровно по одному разу, и все дизъюнкты различны, называется совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)

СКНФ: $\bigwedge(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n})$, где $x^{\sigma_i} = \begin{cases} x; \sigma=1 \\ 0; \sigma=0 \end{cases}$

СКНФ ∃ для ∀ функции кроме тождественной 1 и строится по нулевым строчкам

Опр ДНФ - дизъюнктивная нормальная форма, или дизъюнкция конъюнкций

Опр ДНФ такая, что каждый конъюнкт содержит все переменные ровно по одному разу, и все конъюнкты различны называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)

СДНФ: $\vee(x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n})$

СДНФ $\exists$ для $\forall$ функции кроме тождественного 0. и строится по единичным строкам

Т.к. $\forall$ функция представима в виде СКНФ или СДНФ, то $\forall$ функцию можно выразить, используя лишь инверсии, конъюнкции и дизъюнкции.

Пример СКНФ и СДНФ по таблице истинности:

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

СКНФ: $(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$

СДНФ: $(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z})$

Если $\exists$ СКНФ(СДНФ) для булевой функции, то она единственна.

□ Следует из построения ■

Допустимые действия с формулами:

1) Замена переменных без отождествления

$x_i \to y_i$ или $x_i \vee y_i \to z_i$

2) Замена переменных с отождествлением

$(a \vee b) \to a$

3) Суперпозиция функций (композиция, подстановка)

$f_1(x;y)$; $f_2(a;b;c)$

Замена $a \to f_1(x;y)$ $\Rightarrow f_2(f_1(x;y);b;c)$

Опр Набор функций называется полным, если $\forall$ функция выразима через них при помощи суперпозиции и замены переменных в том числе с отождествлениями.

Примеры полных наборов: $\{\bar{x};\ x\vee y\}$; $\{1;\ x\oplus y;\ x\wedge y\}$

Опр Форма функции вида $d_0\oplus d_1x_1\oplus d_2x_2\oplus\ldots\oplus d_{2^n-1}x_1x_2\ldots x_n$; $d_i\in\{0;1\}$ называется полиномом Жигалкина.

Для $\forall$ функции $\exists$ полином Жигалкина

Утв Полином Жигалкина единственный

$\square$ $f(x_1;x_2\ldots x_n)$; $p(x_1;x_2\ldots x_n)$; $q(x_1;x_2\ldots x_n)$ - различные функции, причём $p\oplus q = f\oplus f = 0$.

Найдём у p и q младший несовпадающий член: $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$

Тогда в $p\oplus q$ перед ним 1, т.е. $x_j=1 \Leftrightarrow j\in i_1 i_2\ldots i_k$.

Но тогда $p\oplus q\neq 0$. Противоречие, значит $p=q$. $\blacksquare$