Лекция 5

Исчисление предикатов: аксиомы и правила вывода. Метод автоморфизмов.

Метод резолюции.

Пусть есть модель $(\mathbb{Q}; \textcircled{<}; \oplus, 0)$. Мы хотим выразить $(x == 1)$

Но будто в данной модели 1 ничем не примечательна, выразить не получается. Sad story :(

Хотим научиться понимать, можно ли выразить формулу в заданной модели.

Опр Автоморфизм модели – биекция $\varphi: M \to M$ такая, что если возьмём $\forall$ функцию f, то выполняется $\varphi(f(t_1; t_2; \dots t_n)) = f(\varphi(t_1); \varphi(t_2); \dots \varphi(t_n))$, а если $\forall$ предикат P, то выполняется $P(\varphi(t_1); \varphi(t_2); \dots \varphi(t_n)) = P(t_1; t_2 \dots t_n)$.

Утв (метод автоморфизмов)

Если задан автоморфизм модели φ, то всё, что можно выразить в рамках модели будет удовлетворять автоморфизму φ.

Вернёмся к модели $(\mathbb{Q}; \textcircled{<}; \oplus; 0)$.

Зададим отображение $\varphi: x \to 2x$. Докажем, что φ – автоморфизм.

1) φ – биекция

2) $x \textcircled{<} y \Rightarrow 2x \textcircled{<} 2y \Rightarrow$ предикат $\textcircled{<}$ удовлетворяет автоморфизму

3) $$\left.\begin{aligned} &\varphi(\oplus(x; y)) = \varphi(x \oplus y) = 2(x \oplus y) \\ &\oplus(\varphi(x); \varphi(y)) = \oplus(2x; 2y) = 2x \oplus 2y \end{aligned}\right\} \ominus \Rightarrow \text{функция } \oplus \text{ удовлетворяет}$$

4) $\varphi(0) = 0 \Rightarrow 0$ удовлетворяет
$\Downarrow$
φ - автоморфизм

Пусть $(x=1) = I(x)$.

$I(1) = true$

$I(\varphi(1)) = I(2) = false$

$I(1) \neq I(\varphi(1)) \Rightarrow I$ - не подчиняется авторфизму $\Rightarrow I$ - невыразима

Аксиомы исчисления предикатов (A):

$$\left.\begin{aligned} &1)\ (A \to (B \to A)) \\ &2)\ ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))) \\ &3)\ ((\overline{B}) \to (\overline{A})) \to (((\overline{B}) \to A) \to B)) \end{aligned}\right\} \text{аксиомы из ИВ}$$

4) $\forall x((A \to B) \to (A \to \forall x B))$, если в A нет свободных вхождений x.

5) $\forall x(A \to A(x := t))$ ~~можно заменять переменные, если нет свободных вхождений t~~ при выполнении ⊛ (см. сл. стр)

Правила вывода (R):

1) $A \to B; A \vdash B$ - из ИВ

2) $A \vdash \forall x A$

Опр Формула в ИП называется общезначимой, если она истинна в любой интерпретации.

Опр Пусть дана формула $\forall x A$. Тогда A - область действия квантора по x.

Опр Все вхождения x в A называются связанными. Если вхождение переменной не лежит в области действия квантора по данной переменной, то такое вхождение называют свободным.

Пример

$\forall x (x + y < 0)$

связанное вхождение (x); свободное вхождение (y)

* t можно подставлять только если ни одно свободное вхождение x в A не лежит в области действия квантора по переменным, входящим в t; t-терм.

Утв

Если φ - тавтология, то $\overline{\varphi} = 0$. φ - формула в виде КНФ. Хотим понять, выполнима ли она

Утв (метод резолюции).

Пусть $\varphi = (a_1 \vee \overline{a_2} \vee a_3) \wedge (\overline{a_1} \vee a_4 \vee \overline{a_5})$

Тогда $D_1 = (a_1; \overline{a_2}; a_3)$; $D_2 = (\overline{a_1}; a_4; \overline{a_5})$ - обозначим дизъюнкты.

Р-м переменную. Если есть только a в КНФ и нет $\overline{a}$, то $a = 1$ - неинтересно.

Аналогично наоборот.

Тогда рассмотрим две такие скобки: $(a \vee A)$ и $(\overline{a} \vee B)$

$\{a\} \cup D_A \qquad \{\overline{a}\} \cup D_B$

Опр Резольвентой дизъюктов A и B называется $A \vee B$ или же $D_A \cup D_B$

Утв Резольвента - семантическое следствие φ (на этом моменте попросили не грустить)

Перепишем все возможные резольвенты. Повторяем до тех пор, пока не получим полный набор резольвент.

<u>Тв</u> Формула выполнима $\Longleftrightarrow$ Полный набор резольвент не содержит пустой дизъюнкт.