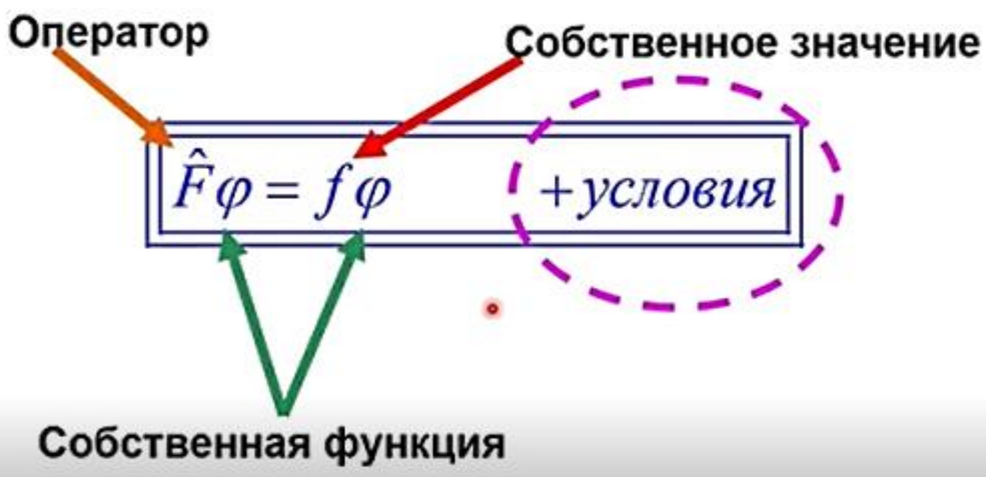
$$\hat{A} = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad ; \qquad \hat{A}^{*} = i\frac{\partial}{\partial\varphi} \; ;$$

$$0 < \varphi < 2\pi; \qquad \psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$$

$$\int_0^{2\pi}\psi_1^*(\varphi)\hat{A}\,\psi_2(\varphi)d\varphi = -i\int_0^{2\pi}\psi_1^*\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi_2 d\varphi =$$

$$-i\psi_1^*\psi_2\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\psi_2\left(i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi_1^* d\varphi$$

§ Собственные функции и собственные значения оператора



$ Собственные функции и собственные значения оператора
Оператор

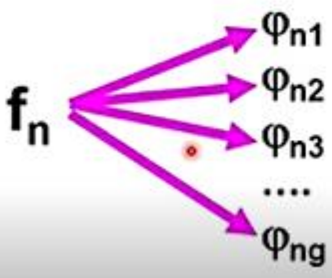
Собственное значение
+ условия
Собственная функция

Спектр оператора
Спектр оператора – дискретный, непрерывный, смешанный
Дискретный спектр
Непрерывный спектр

Вырожденный спектр

- **Вырождение**

$$\boxed{\hat{F}\varphi_{n,k} = f_n\varphi_{n,k}}$$



g – степень вырождения

Вырожденный спектр
Вырождение
g – степень вырождения

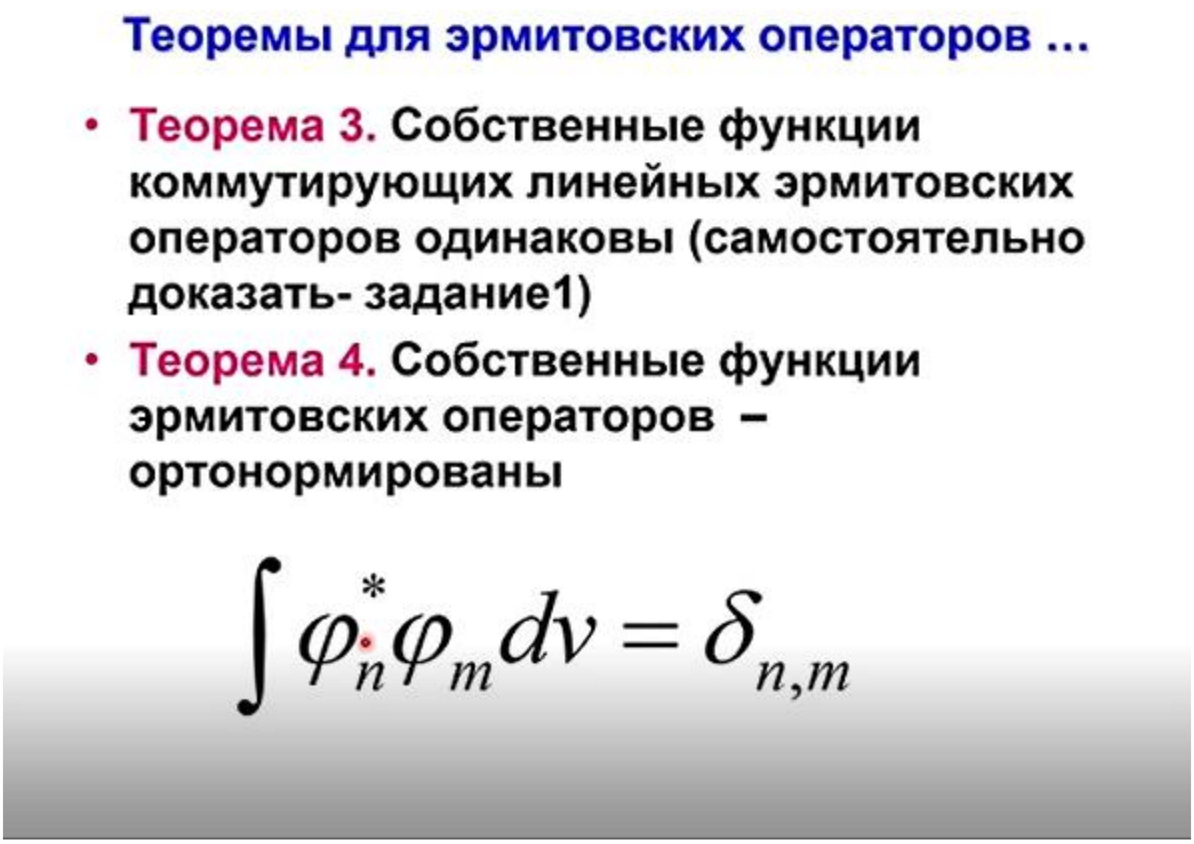
Теоремы для эрмитовских операторов

- **Теорема 1. Собственные значения – действительные числа!**

- **Теорема 2. Собственные функции φ_n образуют полный набор.**

$$\Phi = \sum_n c_n\varphi_n$$

Теоремы для эрмитовских операторов
Теорема 1. Собственные значения – действительные числа!
Теорема 2. Собственные функции образуют полный набор.



Теоремы для эрмитовских операторов …
Теорема 3. Собственные функции коммутирующих линейных эрмитовских операторов одинаковы (самостоятельно доказать- задание 1)
Теорема 4. Собственные функции эрмитовских операторов - ортонормированы

Теорема 1

$$\hat{F}\varphi_n = f_n\varphi_n \qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_n^* \text{ и } \int \dots dx \\ \varphi_n \text{ и } \int \dots dx \end{array}\right.$$

$$\hat{F}^*\varphi_n^* = f_n^*\varphi_n^*$$

$$-\left\{\begin{array}{l} \int \varphi_n^* \hat{F}\varphi_n dx = f_n \int \varphi_n^* \varphi_n dx \\ \int \varphi_n \hat{F}^* \varphi_n^* dx = f_n^* \int \varphi_n^* \varphi_n dx \end{array}\right.$$

$$\int \varphi_n^* \hat{F}\varphi_n dx - \int \varphi_n \hat{F}^* \varphi_n^* dx = (f_n - f_n^*) \int \varphi_n^* \varphi_n dx$$

$$0 = (f_n - f_n^*) \int |\varphi_n|^2 dx; \qquad \int |\varphi_n|^2 dx > 0$$

$$0 = (f_n - f_n^*) \dashrightarrow f_n \to Re$$

Теорема 1

Теорема 4

$$\hat{F}\varphi_n = f_n\varphi_n \qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_m^* \text{ и } \int \dots dx \\ \varphi_n \text{ и } \int \dots dx \end{array}\right.$$

$$\hat{F}^*\varphi_m^* = f_m\varphi_m^*$$

$$-\left\{\begin{array}{l} \int \varphi_m^* \hat{F}\varphi_n dx = f_n \int \varphi_m^* \varphi_n dx \\ \int \varphi_n \hat{F}^* \varphi_m^* dx = f_m \int \varphi_m^* \varphi_n dx \end{array}\right. \qquad \int \varphi_m^* \varphi_n dx = \delta_{nm}$$

$$\int \varphi_m^* \hat{F}\varphi_n dx - \int \varphi_n \hat{F}^* \varphi_m^* dx = (f_n - f_m) \int \varphi_m^* \varphi_n dx$$

1) $n = m$; $(f_n - f_m) = 0$; $\int \varphi_m^* \varphi_n dx \neq 0$

2) $n \neq m$; $(f_n - f_m) \neq 0$; $\int \varphi_m^* \varphi_n dx = 0$

Теорема 4

Ортонормировка

Дискретный спектр

$$\boxed{\int \psi_n^*(x,t)\psi_m(x,t)dx = \delta_{n,m}}$$

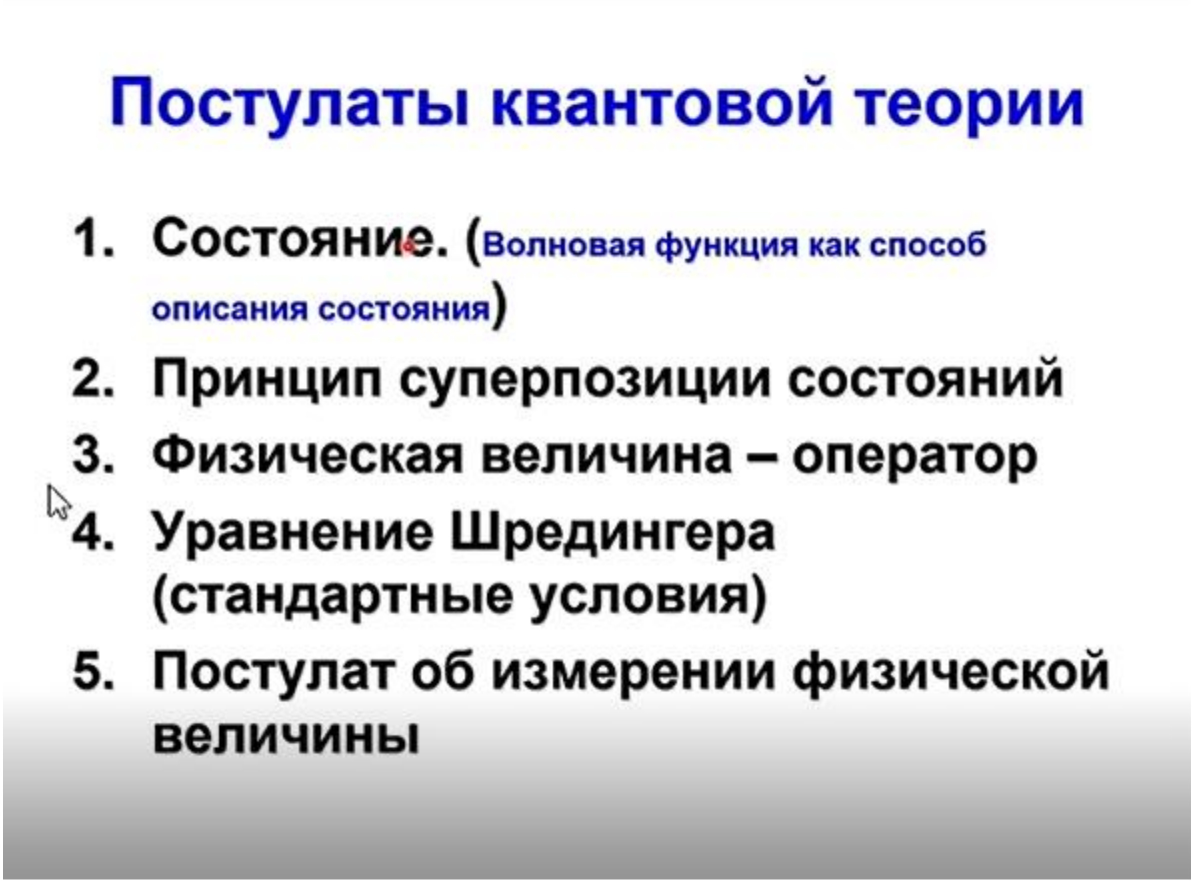
Непрерывный спектр

$$\boxed{\int \psi_F^*(x,t)\psi_{F'}(x,t)dx = \delta(F - F')}$$

Ортонормировка
Дискретный спектр
Непрерывный спектр

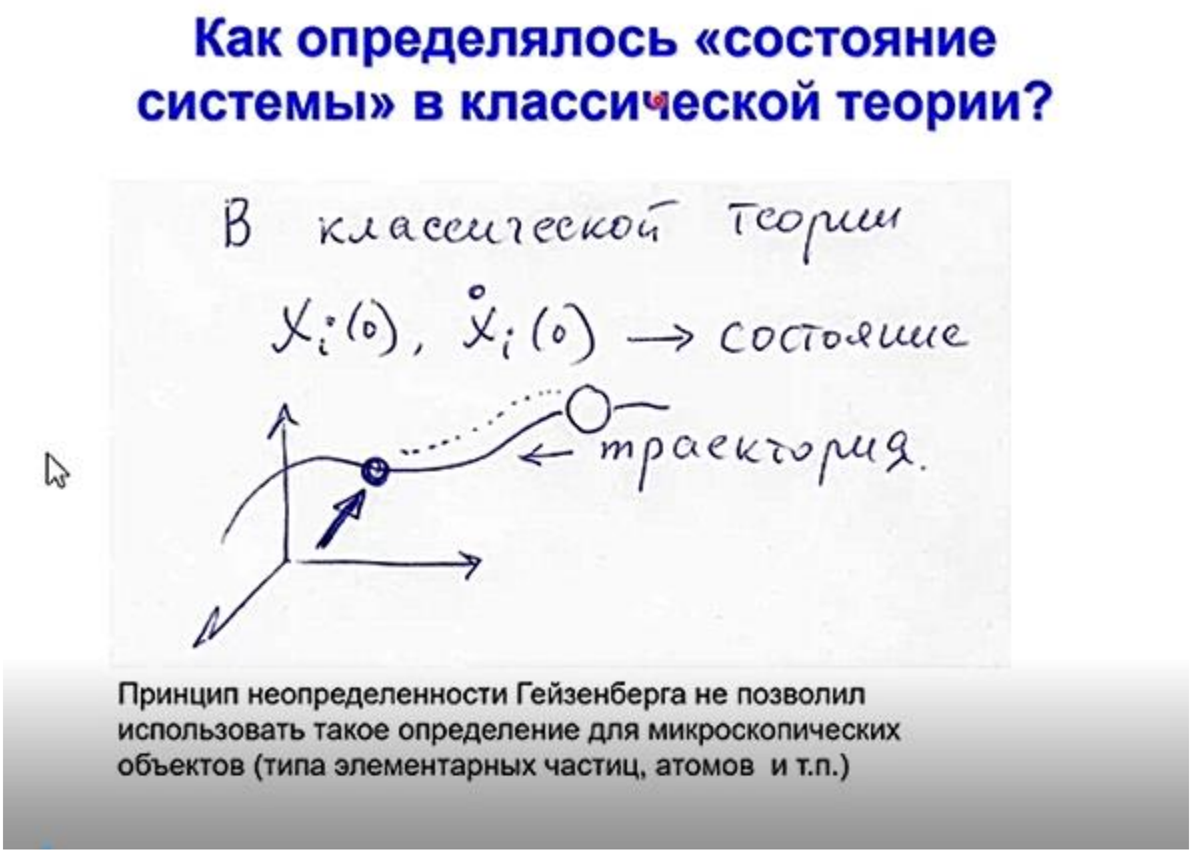
Часть 1

Постулаты Квантовой Теории

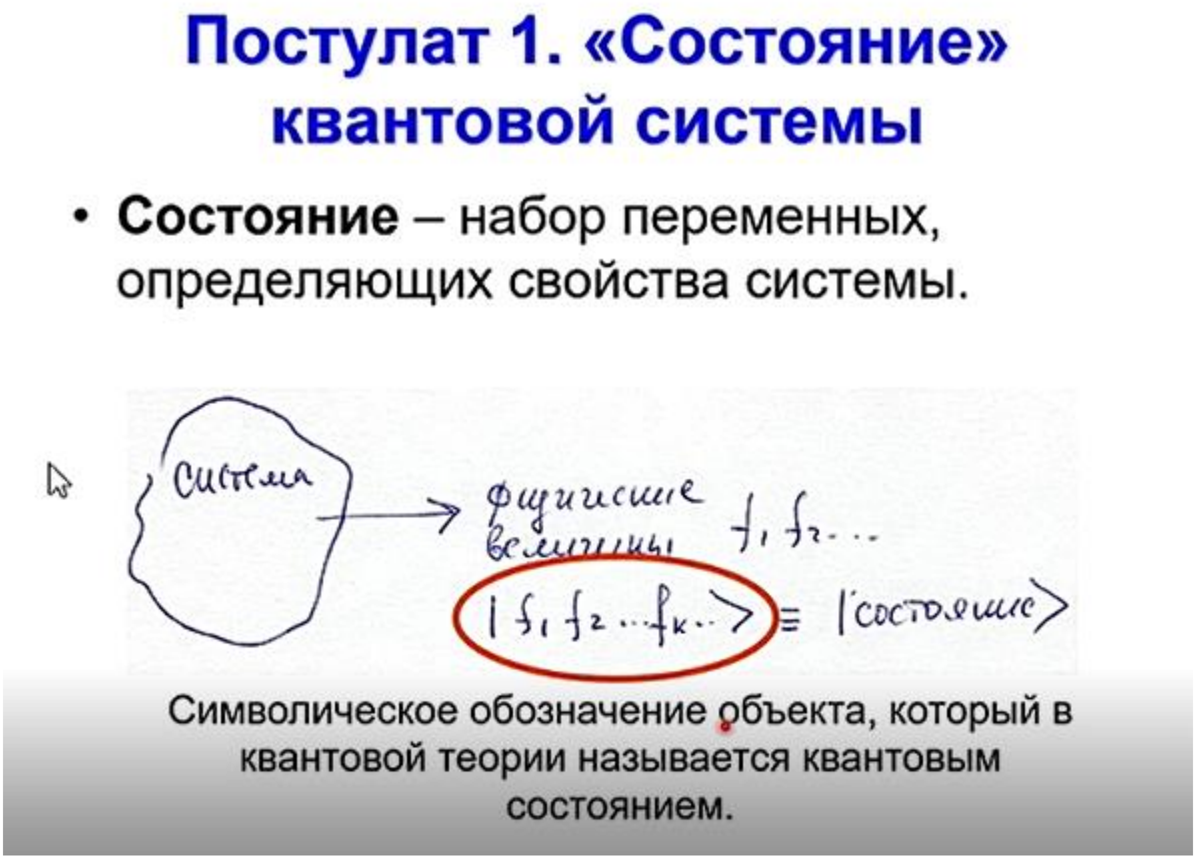


Постулаты квантовой теории

1. Состояние. (Волновая функция как способ описания состояния)
2. Принцип суперпозиции состояний
3. Физическая величина – оператор
4. Уравнение Шредингера (стандартные условия)
5. Постулат об измерении физической величины



Как определялось “состояние системы” в классической теории?
В классической теории
состояние
траектория
Принцип неопределенности Гейзенберга не позволил использовать такое определение для микроскопических объектов (типа элементарных частиц, атомов и т.п.)



Постулат 1. “Состояние” квантовой системы

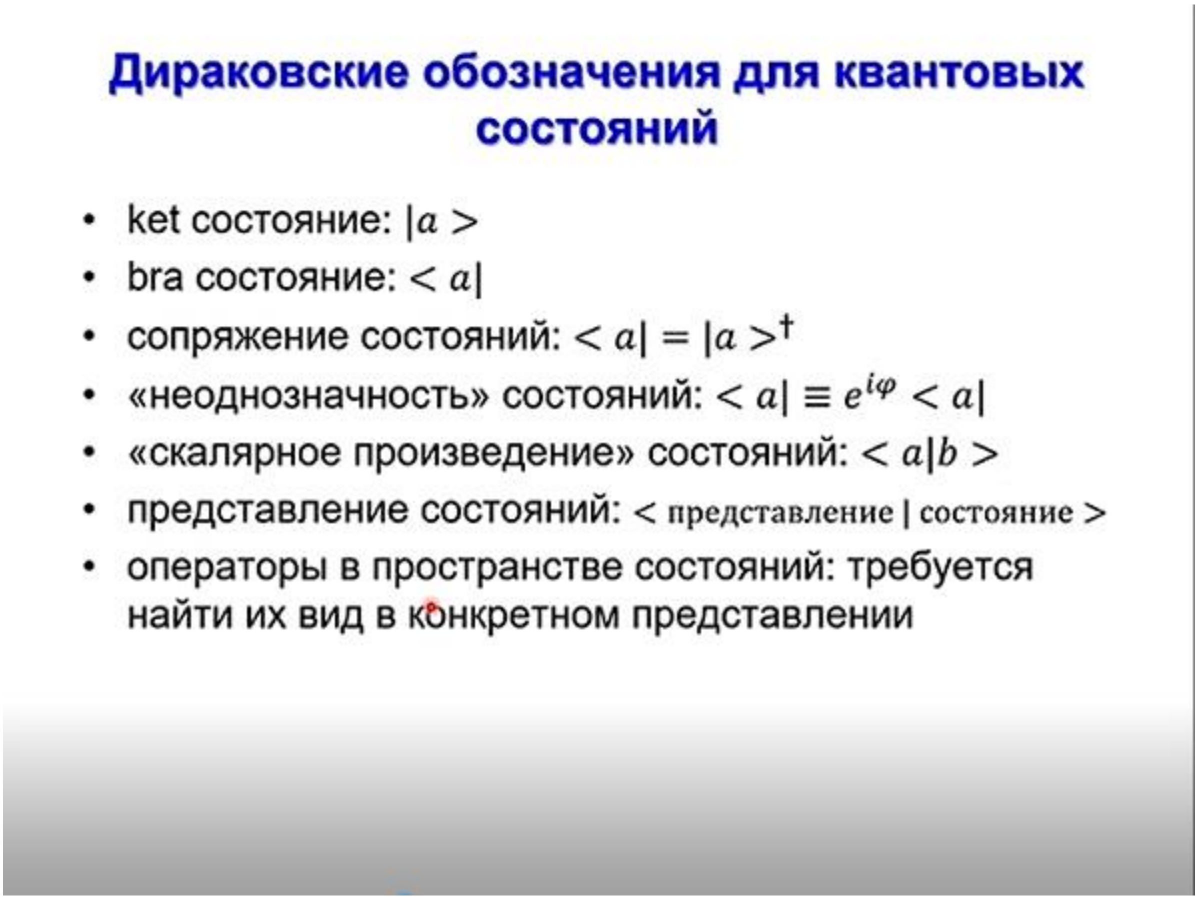
Состояние – набор переменных, определяющих свойства системы.

система

физические величины

состояние

Символическое обозначение объекта, который в квантовой теории называется квантовым состоянием.



Дираковские обозначения для квантовых состояний

ket состояние

bra состояние

сопряжение состояний

“неоднозначность” состояний

“скалярное произведение” состояний

представление состояний: < представление | состояние >

операторы в пространстве состояний: требуется найти их вид в конкретном представлении

Волновая функция – способ описания состояния
система
представление
А - состояние
< представление | состояние >

Волновая функция

$$\Psi(x,t)=\Psi_A(x,t)=<x|A>$$

$$\Psi(x,y,t)=\Psi_A(x,y,t)=<x,y|A>$$

$$\Psi(x,y,z,t)=\Psi(\vec{r},t)$$

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots\vec{r}_n,t)$$

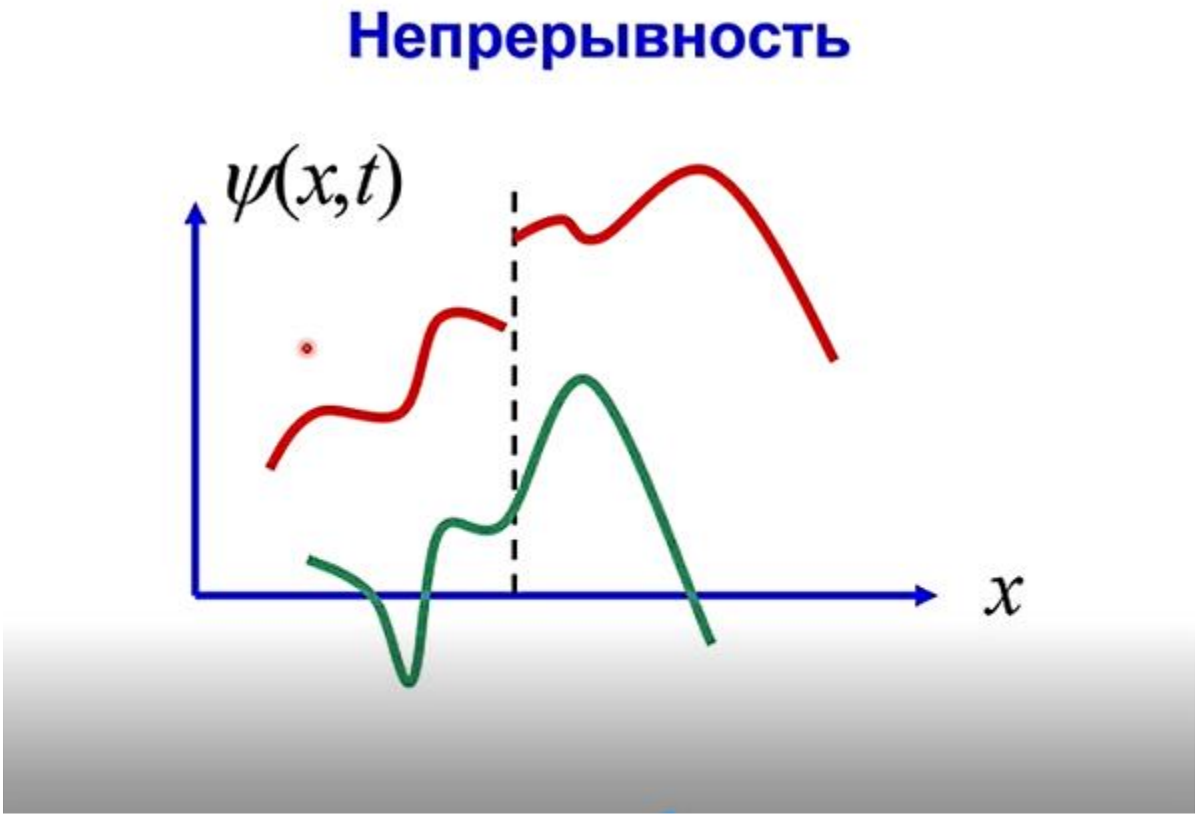
Волновая функция

Стандартные условия

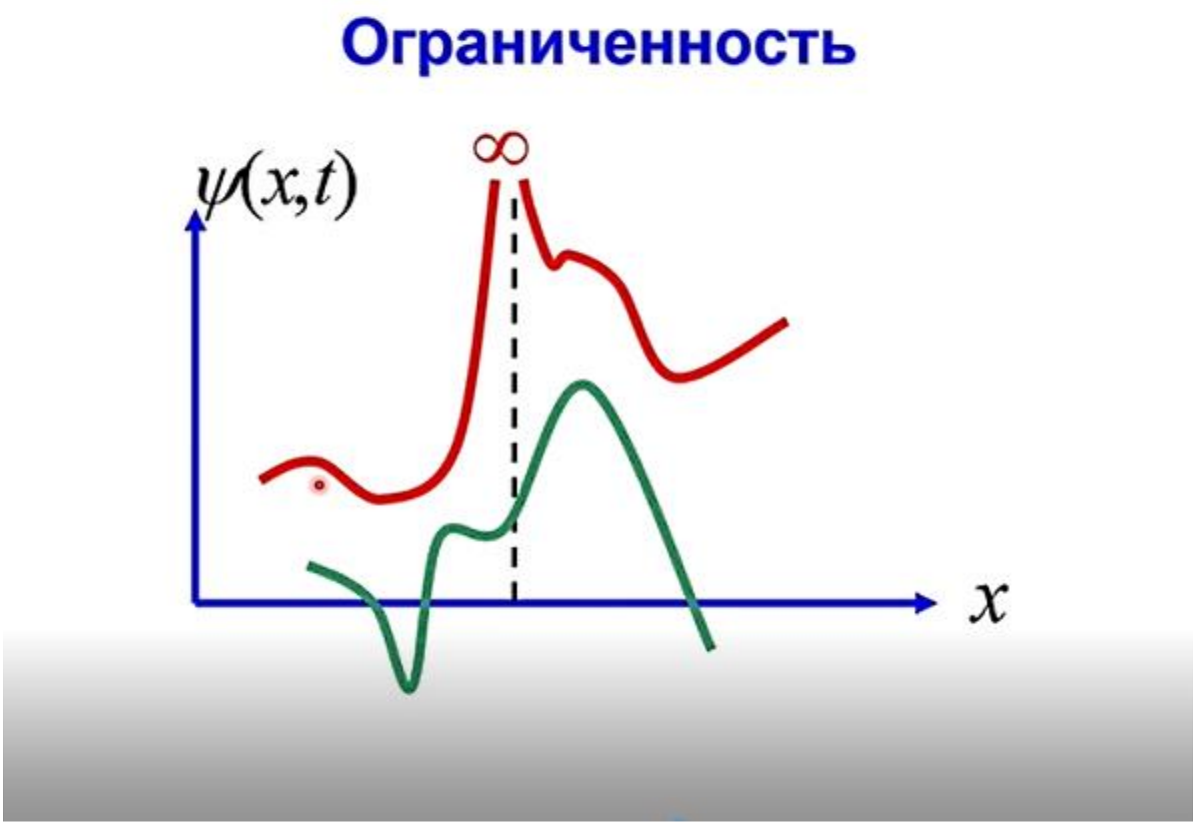
- **Непрерывность**
- **Ограниченность**
- **Однозначность**

Стандартные условия
Непрерывность
Ограниченность

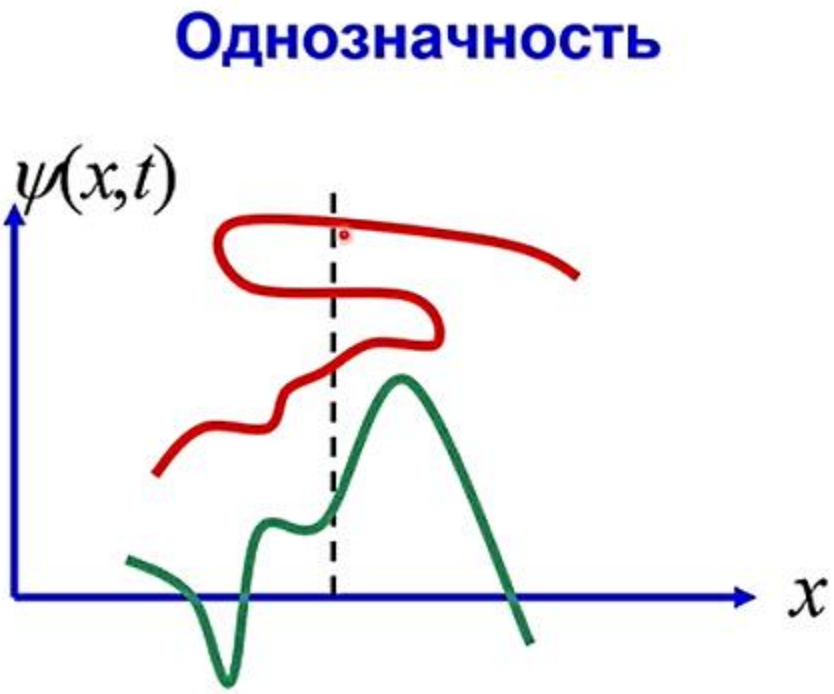
Однозначность



Непрерывность



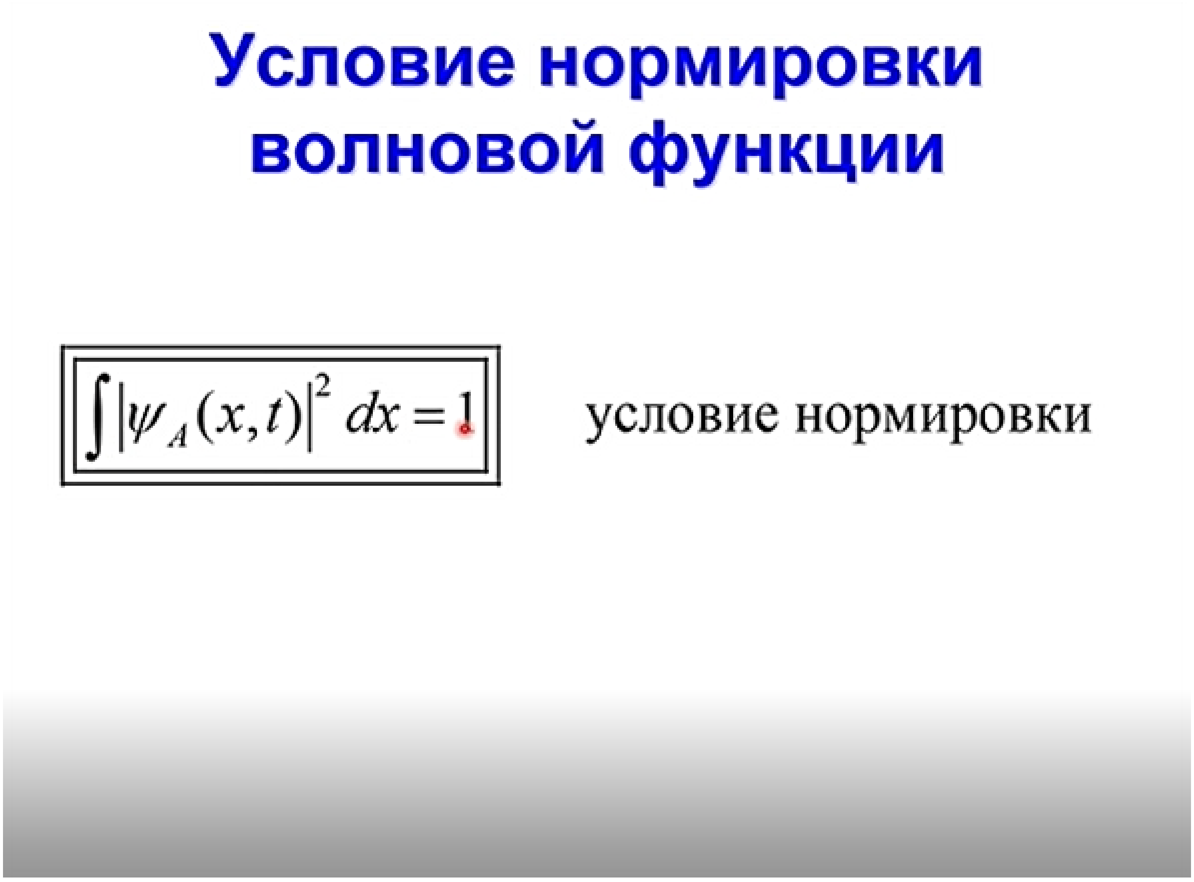
Ограниченность



Однозначность

Статистическая интерпретация волновой функции
вероятность найти частицу внутри интервала
плотность вероятности

вероятность



Условие нормировки волновой функции
условие нормировки

Постулат 2. Принцип суперпозиции состояний

Постулат 3. Оператор – физическая величина

- Каждой физической величине соответствует линейный эрмитовский оператор
- Вид оператора зависит от представления квантовой теории
- Операторы в координатном представлении (то что использовано в курсе)

Постулат 3. Оператор – физическая величина
Каждой физической величине соответствует линейный эрмитовский оператор
Вид оператора зависит от представления квантовой теории
Операторы в координатном представлении (то что использовано в курсе)

Оператор импульса

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\widehat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla$$

Оператор импульса

Собственная функция оператора импульса

$$\hat{p}_x\psi(x)=p\psi(x)$$

$$\downarrow$$

$$\psi=\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}}\exp\left(i\frac{p}{\hbar}x\right)$$

Собственная функция оператора импульса

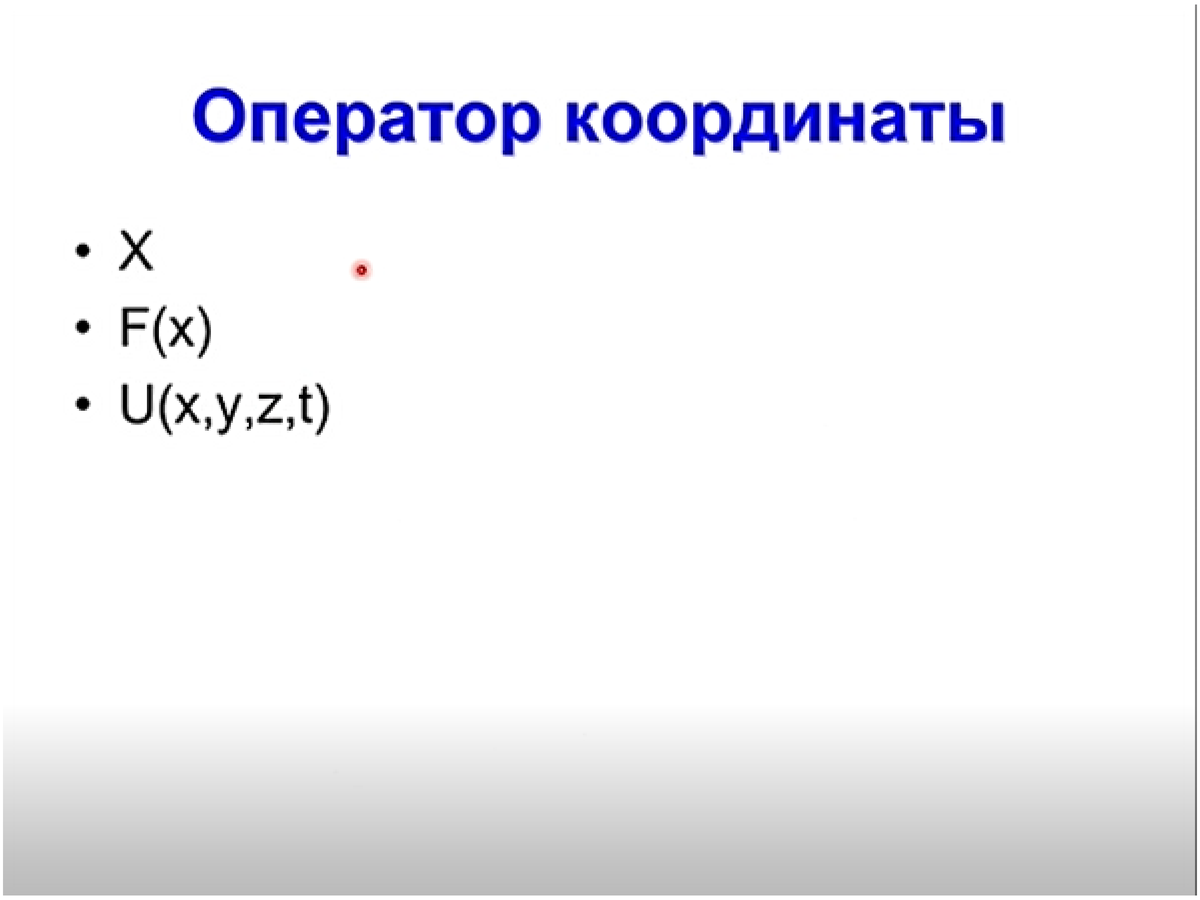
Операторы содержащие импульс p

$$\hat{p}_x^2=\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2=-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

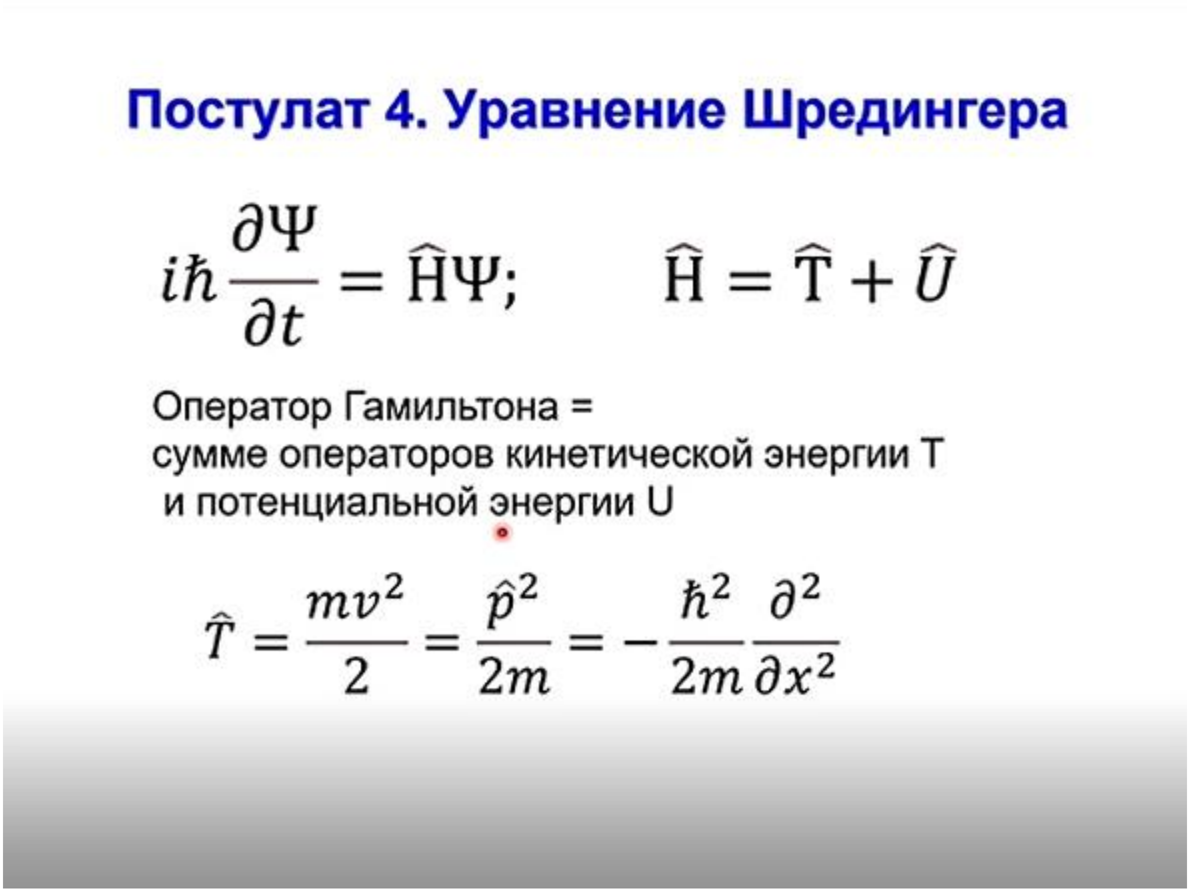
$$\hat{T}=\frac{mv^2}{2}=\frac{\hat{p}^2}{2m}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$f(\hat{p})=f\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Операторы содержащие импульс p



Операторы координаты



Постулат 4. Уравнение Шредингера

Оператор Гамильтона = сумме операторов кинетической энергии T и потенциальной энергии U

Одномерное уравнение Шредингера

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x,t) \right] \Psi(x,t)}$$

Одномерное уравнение Шредингера