Однокубитовые операторы (гейты)

исходный кубит —$\boxed{\text{гейт}}$— преобразованный кубит

$$a|0\rangle + b|1\rangle - \boxed{X} - b|0\rangle + a|1\rangle$$

$$a|0\rangle + b|1\rangle - \boxed{Y} - -ib|0\rangle + ia|1\rangle$$

$$a|0\rangle + b|1\rangle - \boxed{Z} - a|0\rangle - b|1\rangle$$

$$a|0\rangle + b|1\rangle - \boxed{H} - a\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + b\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$a|0\rangle + b|1\rangle - \boxed{P(c,d)} - ae^{ic}|0\rangle + be^{id}|1\rangle,$$

$$X : (a|0\rangle + b|1\rangle) = b|0\rangle + a|1\rangle;$$
$$Y : (a|0\rangle + b|1\rangle) = -ib|0\rangle + ia|1\rangle;$$
$$Z : (a|0\rangle + b|1\rangle) = a|0\rangle - b|1\rangle;$$
$$H : (a|0\rangle + b|1\rangle) = a\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + b\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}};$$
$$\mathrm{P}(\vartheta) : (a|0\rangle + b|1\rangle) = a|0\rangle + b\,e^{i\vartheta}|1\rangle.$$

Квантовые гейты являются унитарными операторами, осуществляющими преобразование кубита. В общем случае произвольный унитарный однокубитовый оператор может быть записан в виде

$$U = \exp(i\alpha)\, R_{\mathbf{n}}(\theta) = \exp(i\alpha)\left[\cos(\theta/2) - i(\vec{\sigma}\cdot\mathbf{n})\sin(\theta/2)\right], \quad (5.19)$$

где $R_{\mathbf{n}}(\theta)$ – оператор поворота (2.39) спинового состояния на угол θ вокруг оси, определённой единичным вектором $\mathbf{n}$, α и θ – действительные числа.

Без учёта глобального экспоненциального множителя вентили, соответствующие повороту состояния кубита на сфере Блоха вокруг осей x, y, z, принято обозначать,например, для составления схем на IBM квантовом компьютере, следующим образом:

$$RX(\vartheta) \equiv R_x(\vartheta) = \exp(-i\frac{\vartheta}{2}X) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} & -i\sin\frac{\vartheta}{2} \\ -i\sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$$

$$RY(\vartheta) \equiv R_y(\vartheta) = \exp(-i\frac{\vartheta}{2}Y) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} & -\sin\frac{\vartheta}{2} \\ \sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

$$RZ(\vartheta) \equiv R_z(\vartheta) = \exp(-i\frac{\vartheta}{2}Z) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\vartheta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\vartheta}{2}} \end{pmatrix}$$

Квантовый интерферометр

$$|0\rangle \;—\boxed{\mathrm{H}}—\; |q'\rangle \;—\boxed{\mathrm{P}}—\; |q''\rangle \;—\boxed{\mathrm{H}}—\; |q\rangle$$

$$|q'\rangle = H\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$$

$$|q''\rangle = P(\phi_1,\phi_2)\,|q'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\phi_1}|0\rangle + e^{i\phi_2}|1\rangle\right)$$

$$|q'''\rangle = H\,|q''\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}\right)|0\rangle + \left(e^{i\phi_1} - e^{i\phi_2}\right)|1\rangle\right]$$

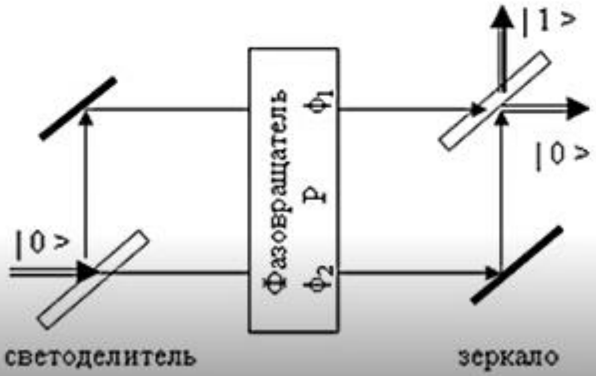
$$e^{i\phi_1} \pm e^{i\phi_2} = e^{i(\phi_1+\phi_2)/2}\left(e^{i(\phi_1-\phi_2)/2} \pm e^{-i(\phi_1-\phi_2)/2}\right).$$

$$|q'''\rangle = \exp\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)|q\rangle\,; \qquad |q\rangle = \cos(\frac{\delta\phi}{2})\,|0\rangle + i\sin(\frac{\delta\phi}{2})\,|1\rangle$$

Квантовый интерферометр

$$|q\rangle = \cos(\frac{\delta\phi}{2})\ |0\rangle + i\sin(\frac{\delta\phi}{2})\ |1\rangle\,, \qquad \delta\phi \equiv \phi_1 - \phi_2$$

$$P_0 = \cos^2\left(\frac{\delta\phi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[1+\cos(\delta\phi)\right] \qquad P_1 = \sin^2\left(\frac{\delta\phi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[1-\cos(\delta\phi)\right]$$



2-х кубитовый квантовый регистр

$$|q\rangle_2 \equiv |q_1 q_2\rangle = |q_1\rangle \otimes |q_2\rangle = (\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle) \otimes (\alpha'\,|0\rangle + \beta'\,|1\rangle) =$$

$$= c_1\,|0\rangle \otimes |0\rangle + c_2\,|0\rangle \otimes |1\rangle + c_3\,|1\rangle \otimes |0\rangle + c_4\,|1\rangle \otimes |1\rangle$$

$$c_1 = \alpha \cdot \alpha';\ c_2 = \alpha \cdot \beta';\ c_3 = \beta \cdot \alpha';\ c_4 = \beta \cdot \beta',$$

$$|0\rangle_2 \equiv |00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$|1\rangle_2 \equiv |01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$|2\rangle_2 \equiv |10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$$

$$|q\rangle_2 \equiv \sum_{k=0}^{3} c_k\ |k\rangle_2$$

$$|3\rangle_2 \equiv |11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

Квантовый регистр

$$|q\rangle_2 \equiv \sum_{k=0}^{3} c_k \ |k\rangle_2 \, ; \qquad \sum_{k=0}^{3} |c_k|^2 = 1.$$

$$|0\rangle_2 \equiv |0_a 0_b\rangle = |0_a\rangle \otimes |0_b\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$|1\rangle_2 = |0_a 1_b\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad |2\rangle_2 = |1_a 0_b\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad |3\rangle_2 = |1_a 1_b\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Матричные обозначения

$$|0\rangle_n \equiv |00\ldots0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}$$

Матричные обозначения

$$|1\rangle_n \equiv |00\ldots0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \cdots \otimes |1\rangle$$

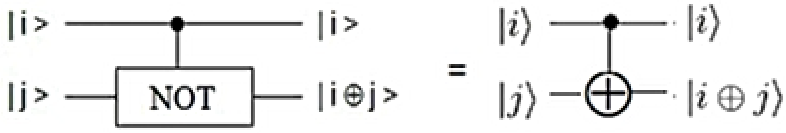
$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}$$

Матричные обозначения

$$|2^n - 1\rangle_n \equiv |11\ldots1\rangle = |1\rangle\otimes|1\rangle\otimes\cdots\otimes|1\rangle =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\cdots\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\ldots\\1\end{pmatrix}$$

Многокубитовые квантовые гейты

$CNOT =$ 

$$CNOT\ :\ |k\rangle_2 \equiv CNOT\ :\ |i,\, j\rangle = |i\,, i \oplus j\rangle$$

$$CNOT\ :\ \sum_{k=0}^{3} c_k\ |k\rangle_2 \quad \equiv CNOT\ :\ \sum_{i,j=0}^{1} \gamma_{ij}\ |i,j\rangle \ = \sum_{i,j=0}^{1} \gamma_{ij}\, |i,\, i \oplus j\rangle$$

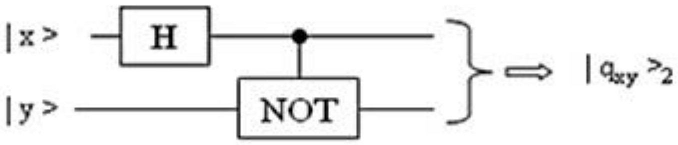
Матричное и алгебраическое представление

$$|q\rangle_2 = \sum_{k=0}^{3} c_k\, |k\rangle_2 = c_0\,|00\rangle + c_1\,|01\rangle + c_2\,|10\rangle + c_3\,|11\rangle \equiv \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \text{так как}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_3 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

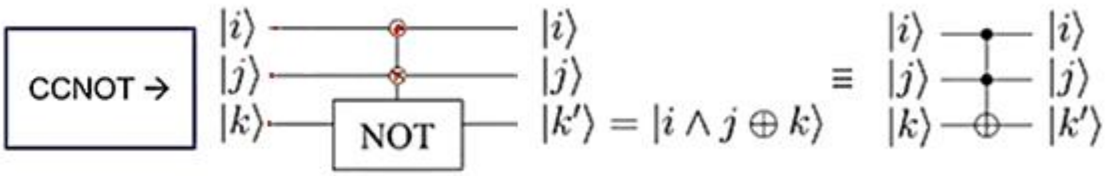
$$\mathrm{CNOT}\ :\ |q\rangle_2 = \mathrm{CNOT}\ :\ (c_0\,|00\rangle + c_1\,|01\rangle + c_2\,|10\rangle + c_3\,|11\rangle) =$$
$$= c_0\,|00\rangle + c_1\,|01\rangle + c_3\,|10\rangle + c_2\,|11\rangle\,.$$

Запутанные состояния

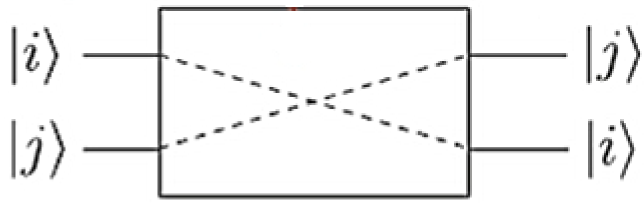


вход	выход
$\vert 0,0\rangle \equiv \vert 0\rangle_2$	$(\vert 0,0\rangle + \vert 1,1\rangle)/\sqrt{2} \equiv \vert q_{00}\rangle_2$
$\vert 0,1\rangle \equiv \vert 1\rangle_2$	$(\vert 0,1\rangle + \vert 1,0\rangle)/\sqrt{2} \equiv \vert q_{01}\rangle_2$
$\vert 1,0\rangle \equiv \vert 2\rangle_2$	$(\vert 0,0\rangle - \vert 1,1\rangle)/\sqrt{2} \equiv \vert q_{10}\rangle_2$
$\vert 1,1\rangle \equiv \vert 3\rangle_2$	$(\vert 0,1\rangle - \vert 1,0\rangle)/\sqrt{2} \equiv \vert q_{11}\rangle_2$

Многокубитовые квантовые гейты (гейт Тоффоли)



Оператор обмена



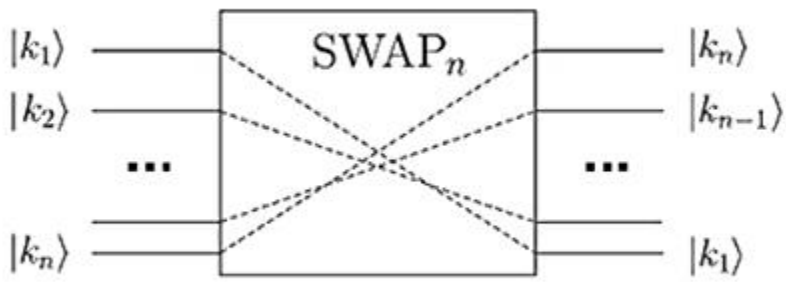
$$\mathrm{SWAP}_2 \ : \ |k_1, k_2\rangle = |k_2, k_1\rangle$$

$$\mathrm{SWAP}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

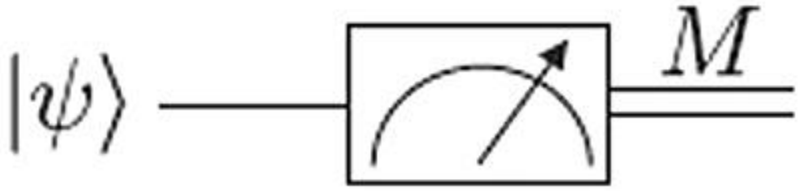
$$\mathrm{SWAP}_3 \ : \ |k_1, k_2, k_3\rangle = |k_3, k_2, k_1\rangle \, .$$

Оператор обмена

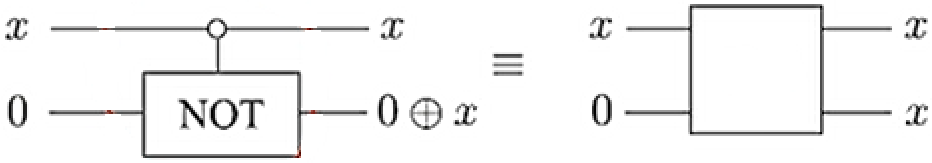
$$\mathrm{SWAP}_n \ : \ |k_1, k_2, k_3 \dots k_{n-1}, k_n\rangle = |k_n, k_{n-1} \dots k_3, k_2, k_1\rangle \, .$$

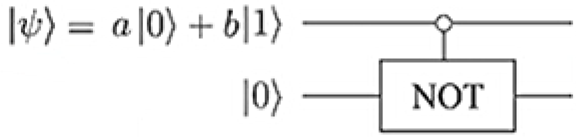


Измерение кубита



Невозможность клонирования кубита

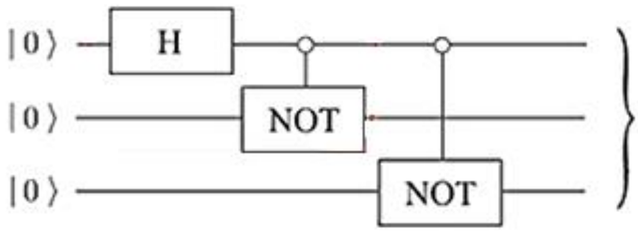




выход $\Rightarrow\; a\,|0,0\rangle + b\,|1,1\rangle$

$$|\psi\rangle \otimes |0\rangle = \{a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\} \otimes |0\rangle = a\,|0\rangle \otimes |0\rangle + b\,|1\rangle \otimes |0\rangle =$$
$$= a\,|0,0\rangle + b\,|1,0\rangle\,.$$

Запутанные состояния

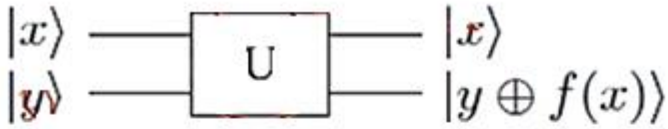


$$\Rightarrow \frac{|0,0,0\rangle + |1,1,1\rangle}{\sqrt{2}}$$

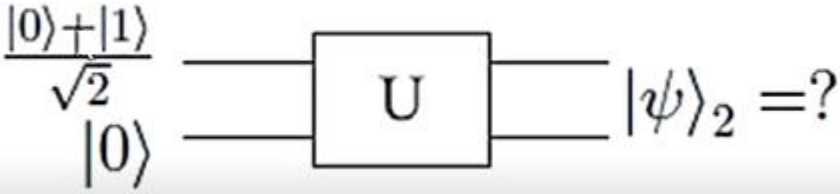
ГХЦ – состояния
Гринберга –Хорна-Цайлингера

Составить квантовую цепь для построения четырехкубитового запутанного состояния

Квантовый параллелизм



$$U \;:\; |x,\,0\rangle \;\rightarrow\; |x,\;f(x)\rangle$$



Квантовый параллелизм