Математические классы

Следующие разделы

- Численные методы: Линейная алгебра

::TOC

Математические структуры („,) задаются перечислением множеств и методов.

Математические классы - понятие вводится в курсе теории функции и функциональном анализе [^1] и близко к определениям классов в ООП. Базовым понятием являются *множества* - абстрактные типы данных и алгебра абстрактная (общая) над множествами с переопределением операций типа сложения и умножения, и операцией сопряжения. А также вводятся абстрактные методы принимающие тип от элемента множества, к которому они применяются - лямбда функции и лямбда выражения. В таком виде множества вводятся в математической логике[^2].

В курсе анализа[^1] вводятся сигма-алгебра множеств, которой сопоставляется алгебра над множеством вещественных чисел - операции с *мерой* (плотностью) множества.

Свойства меры:

- Неотрицательность
- счетная аддитивность
- полнота

Абстрактная алгебра множеств включает операции пересечения, объединения и дополнения до целого. Сигма-алгебра сопоставляет им операции сложения, вычитания и обращения чисел (дополнения до инварианта). Сигма-алгебра определяется для непересекающихся элементов разбиения множества.

Множества могут быть упорядоченными, если можно ввести функцию сравнения. Множества могут быть измеримые, если возможно измерить дистанцию между элементами.

Есть понятия из теории функции - *сужение*, *расширение*, *композиция*, *свертка*, *суперпозиция*. Есть смысл выстраивать теорию функций на абстрактной алгебре.

Понятие *пространство* вводится абстрактно, как тройка - математическая структура состоящая из трех элементов: множества, разбиения (разложение по выбранному базису) и меры. Мера- числовая характеристика элементов множества, обобщающее понятие от объема, площади, массы, плотности элементов разбиения.

Связанные понятия из теории функции: Измеримые пространства, Вероятностное пространство, Метрические пространства, Нормируемые пространства, Линейное пространство, Векторное пространство, Аффинные пространства, Евклидово пространство, Гильбертово пространство, пространство непрерывных квадратично-суммируемых функций...

Цепочка этих понятий приводит к математическому аппарату квантовой физики: *линейные операторы* и *функционалы* в гильбертовом пространстве. Операторы определены в некотором базисе ортогональных функций, существует множество базисов, в которых можно представить разложение.

Пространство операторов может дополняться операциями преобразования между базисами - образуют аффинные пространства.

[^1]: "Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа Изд. 7. 2023. 572 с. ISBN 978-5-9221-0266-7."

[^2]: "Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика: ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЛОГИКУ. Изд. 6. 2023. 240 с. ISBN 978-5-9519-3878-7."

Абстрактная алгебра и переопределение операций

Аксиоматику можно выстраивать на базе определений абстрактных операций на множестве объектов. Операции с двумя аргументами: операции типа умножения и сложения и операции инверсии (сопряжения, дополнения) с одним аргументом. Определение операций происходит вместе с инвариантом, константой которая задает понятие обратный элемент для данной операции.

Есть еще одна возможность определения операций типа умножения на скаляр - через абстрактную операцию сдвига (удвоения) и сложения. Обратной операцией является уполовинивание и вычитание. На подобных операциях строятся понятие умножение элемента абстрактного множества на скаляр из множества целых чисел или операция возведения в степень.

Введение операции сравнения элементов множества позволяет говорить про *упорядоченные множества*.

Полем в абстрактной алгебре называются множества, над которыми мы можем определить две операции типа сложения и типа умножения со своими инвариантами и операцией обращения.

В общей алгебре есть понятие *алгебраическое расширение поля*, *алгебраическое замыкание поля* и *композит полей*. Эти понятия также следует отнести к математическим структурам и классам математического языка.

Множество может быть *дискретным* и *непрерывным*. Так в теории вероятностей вводят понятие непрерывное распределение вероятности и осуществляется переход к интегралу (Лебега) по плотности вероятности. Непрерывность пространства можно ввести, как аксиому непрерывности (см. Аксиоматика Колмогорова [^4]).

[^4]: "Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей Изд. стереотип. 120 с. ISBN 978-5-9519-4114-5."

Группа. Множество Γ с определенной над ним операцией называется группой, если выполняются следующие условия:

1. определена операция $A \cup B = C$ результат $C \in \Gamma$,
2. операция ассоциативна $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. существует выделенный элемент $\emptyset$- инвариант, пустое множество такой, что $\emptyset \cup A = A$
4. для каждого элемента множества A существует обратный $\bar{A}$ (дополнение), такой, что $A \cup \bar{A} = \emptyset$

Так определяется понятие Группа. В определении мы использовали символ $\cup$ - объединения множеств, но группу можно определить относительно любой другой операции. В теории множеств так же определяется операция пересечения $\cap$ со своим инвариантом Ω - полное множество.

Если операция коммутативна, то группа называется *коммутативной*, или *Абелевой*. В противном случае группа называется *некоммутативной*.

Множество $\Kappa$, над которым заданы две операции: типа сложения и типа умножения называют Кольцом, если выполнены условия:

1. относительно операции сложения множество - коммутативная Группа.
2. операция умножения ассоциативна
3. операции на множестве линейны (дистрибутивность) $(a+b)c = a\cdot c + b \cdot c$, $c(a+b) = c\cdot a + c \cdot b$

Если операция умножения коммутативна: $a\cdot b=b\cdot a$, то кольцо называется коммутативным, в противном случае кольцо называется некоммутативным. Если для операции умножения существует единичный элемент $e\colon,a\cdot e=e\cdot a=a$, то говорят, что кольцо $\Kappa$ — кольцо с единицей.

Кольцами с единицей являются множества целых, рациональных, действительных чисел.

Кольцо — это множество, в котором определены три операции: сложение, умножение и вычитание. Вычитание определяется через существование обратного (сопряженного) элемента, не обязательно обратная операция должна быть арифметической.

Поле — это множество, в котором определены четыре операции: сложение, умножение, вычитание и деление. Заметим, что операции деления и вычитания определяются через существование обратного (сопряженного) элемента.

Множество Π, на котором заданы две операции типа сложение и типа умножение, называется полем, если выполнены условия:

1. Π — коммутативное кольцо с единицей $e \neq \emptyset$;
2. для каждого элемента $a\in\Pi$, отличного от нулевого $a\ne\emptyset$, существует обратный элемент $a^{-1}\in\Pi\colon, a\cdot a^{-1}=e$

Полями, например, являются множества рациональных и действительных чисел.

Так алгебра множеств определяется через переопределение операций сложения и умножения.

Есть и другие определения математических структур тип

Тело Алгебра с двумя операциями и с делением - Тело. Кватернионы - пример некоммутативной алгебры с единицей и делением. Те́ло — кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим.

Отдельно стоило бы углубиться в Алгебры Ли в контексте теории групп симметрий.

Кольцо многочленов Алгебра над множеством многочленов (пример). Кольцо многочленов не является полем. Можно определить операции сложения, вычитания и умножения над полиномами. Причем сами полиномы и операции над коэффициентами могут определяться в своем множестве скаляров, со своей операцией сложения и умножения. Например полиномы могут образованы на арифметике Галуа и булевой алгебре или на модульной арифметике. Алгебра над множеством полиномов описывается рядом аксиом.

1. $(P+Q)+R = P+(Q+R)$ -- ассоциативность сложения;
2. $P+0 = P$ -- существование нейтрального элемента по сложению;
3. $P+(-P)=0$ -- существование обратного элемента по сложению;
4. $P+Q = Q+P$ -- коммутативность;
5. $1\cdot P= P$ -- существование инварианта по умножению;
6. $(P+Q)R = PR+QR$, $P(Q+R) = PQ+PR$ - дистрибутивность;
7. $PQ = QP$ -- коммутативность умножения.

Полиномы - кольцо коммутативное с единицей

Линейная Алгебра - линейное (векторное) пространство V над кольцом K, на котором ввели операцию векторного произведения $V \times V \to V$ такую, что операция линейна по каждому из аргументов. В зависимости от свойств операции $\times$ - алгебра может быть коммутативная, и/или кольцом с единицей.

Векторное произведение ${a}\times {b}$ произвольных векторов $a,b \in V$ можно определить, полагая операцию $\times$ билинейной: $$\displaystyle (\lambda a_{1}+\mu a_{2})\times b=\lambda ,a_{1}\times b+\mu ,a_{2}\times b,$$ $$a\times (\lambda b_{1}+\mu b_{2})=\lambda ,a\times b_{1}+\mu ,a\times b_{2},$$ где $\lambda ,\mu \in K$

Алгебраические свойства векторного произведения $[\cdot,\cdot]$ в евклидовом пространстве:

- $[a,b] = - [b,a]$ - антикоммутативность, $[a,a]=0$
- $[\alpha a, b] = [a, \alpha b] =\alpha[a,b]$ - ассоциативность умножения на скаляр,
- $[a+b,c] = [a,c] + [b,c]$ - дистрибутивность по сложению.

Алгеброй Ли называется векторное пространство $\mathbb{L}$ над полем K, снабжённое билинейным отображением ${\mathbb{L}}^{2}\to \mathbb{L},\ \ (x,y)\mapsto [x,y]$, удовлетворяющим следующим двум аксиомам:

- $[x,y]=-[y,x]$, $[x,x]=0$;
- $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$ (тождество Якоби). Другими словами, в алгебре Ли задана антикоммутативная операция, удовлетворяющая тождеству Якоби. Такая операция называется коммутатором.

В физике группы Ли появляются как группы симметрии физических систем. Произвольная ассоциативная алгебра над K с умножением: $(x,y) \mapsto xy обладает естественной структурой алгебры Ли над K, если определить скобку Ли через ассоциативное умножение по формуле: $[x,y]=xy-yx$, это выражение называется *коммутатором*.

Вероятностное пространство — Тройку (Ω, A , P), где Ω — множество элементарных событий, A — σ-алгебра подмножеств Ω, называемых событиями, P — числовая функция, определенная на событиях и называемая вероятностью, будем называть *вероятностным пространством*, если выполнены следующие аксиомы:

1. $P(a) \geqslant 0$ для всех $a \in A$ (неотрицательность P);
2. $P(\Omega) = 1$ (нормированность P);

3. $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если $A \cap B = \emptyset$ (счетная аддитивность P);
4. Если последовательность разбиений бесконечна $A_n ↓ ∅$, т.е. $A_1 ⊇ A_2 ⊇ ...$ и $\displaystyle\bigcap_{n=1}^\infty A_n=∅,$ то $\displaystyle\lim_{n \to \infty} P(A_n)=0$(непрерывность P).

Набор этих аксиом выглядит, как определение свойств меры

Заметим, вероятности можно суммировать тогда и только тогда, когда события независимы. И только в этом случае мы можем использовать знак суммы над элементами разбиения.

Определение 1. Класс подмножеств A пространства Ω назовем алгеброй множеств, полем вероятностей.

Определение 2. Алгебру множеств A назовем σ-алгеброй, если для любого разбиения $A_n \in A$ выполняется:

```
\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in A; \quad \bigcap_{k=1}^\infty A_k \in A;
```

- результат принадлежит множеству.

Аксиоматика Колмогорова[^1] для каждого пространства вводит меру, сигма-алгебру множеств, которому сопоставляется суммируемость меры и понятие непрерывности.

Мне бы хотелось ввести понятие вероятностное пространство в соответствии с аксиоматикой Колмогорова[^4]. Для любого множества можно сопоставить нормируемую числовую характеристику-вероятность на множестве чисел $[0,1]$, так чтобы сумма элементарных вероятностей при данном разложении давала единицу.

Для любого множества можно построить класс *вероятностное пространство*! Причем все другие пространства при других разбиениях будут изоморфны - это следует из формулы полной вероятности. Любому множеству при данном разбиении можно сопоставить вектор бинарных признаков и множество булевых функций для заполнения этих признаков - это следует из мат.логики. Причем для всех других разбиений существует матрица отображения в данный базис булевых функций.

Базовым оказывается понятие множества ${0,1}$, из которого можно составлять вектора и применять к ним матрицы аффинного преобразования, также как к множеству целых, действительных и комплексных чисел. *Забавно выглядит интерполяция полиномами Лагранжа в булевой алгебре.*

Определить понятие непрерывности в дискретном пространстве через инвариант - единицу, а не через предел. Определить понятие плотность вероятности и функция распределения в линейном (векторном) пространстве. Определить понятие причинность в дискретном и непрерывном пространстве (аксиома причинности).

Метри́ческое простра́нство — множество вместе со способом измерения расстояния между его элементами. Пара (M,d), состоящая из множества M и функции $d: M\times M\to \mathbb{R}$ из его декартова квадрата в множество вещественных чисел, называется метрическим пространством, если выполняется ряд аксиом:

1. $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ (аксиома тождества);

2. $d(x,y)\geqslant 0$ (аксиома положительности);
3. $d(x,y)=d(y,x)$ (аксиома симметричности);
4. $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$ (неравенство треугольника).

Этот класс экспортирует метод `distance(M a, M b)` для любой пары элементов множества M.

Линейное (Векторное) пространство Вектора определены над *полем* комплексных чисел или вещественных чисел (в общем случае любым, включая рациональные числа, конечные числа), с заданной операцией сложения векторов и операцией умножения на скаляр.

Этот класс определяет два множества: множество векторов и множество скаляров.

Свойство линейности определяется через восемь аксиом.. которые вытекают из аксиом абстрактной алгебры для математических структур типа поле:

1. $\mathbf{x} +\mathbf{y} =\mathbf{y} +\mathbf{x}$ для любых $\mathbf{x} ,\mathbf{y} \in V$ (коммутативность сложения);
2. $\mathbf{x} +(\mathbf{y} +\mathbf{z})=(\mathbf{x} +\mathbf{y})+\mathbf{z}$ для любых $\mathbf{x} ,\mathbf{y} ,\mathbf{z} \in V$ (ассоциативность сложения);
3. существует такой элемент $\mathbf{0} \in V$, что $\mathbf{x} +\mathbf{0} =\mathbf{0} +\mathbf{x} =\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in V$ (существование нейтрального элемента относительно сложения);
4. для любого $\mathbf{x} \in V$ существует такой элемент $-\mathbf {x} \in V$, что $\mathbf{x} +(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$, называемый вектором противоположным вектору $\mathbf{x}$;
5. $\alpha (\beta \mathbf{x})=(\alpha \beta)\mathbf{x}$ (ассоциативность умножения на скаляр);
6. $1\cdot \mathbf{x} =\mathbf{x}$ (унитарность: умножение на нейтральный элемент поля F).
7. $(\alpha +\beta)\mathbf{x} =\alpha \mathbf{x} +\beta \mathbf{x}$ (дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров);
8. $\alpha (\mathbf{x} +\mathbf{y})=\alpha \mathbf{x} +\alpha \mathbf{y}$ (дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов).

Вектор - это коэффициенты разложения по данному базису. Полиномы, например, определяют вектор коэффициентов по степенному базису. Но отдельно дается метод расчета полинома, который рассчитывает значения базисных функций для данного параметра с учетом коэффициентов разложения. В этом случае говорят про линейное пространство суммируемых функций. В многомерном пространстве, когда функции зависят более чем от одного переменного, возникает пространство квадратично-суммируемых функций.

Нормированное пространство — векторное пространство с заданной на нём нормой

Нормированным пространством называется математическая структура $(V,|\cdot |)$ из векторного пространства V над *полем* действительных или комплексных чисел и отображения $|\cdot |: V\to \mathbb{R}$ таких, что выполняются следующие свойства для любых $x,y\in V$ и скаляра λ:

1. $|x|\geqslant 0,\quad|x|=0\Rightarrow x=0$ (положительная определённость)
2. $|\lambda x|=|\lambda |\cdot |x|$ (однородность)
3. $|x+y|\leqslant |x|+|y|$ (неравенство треугольника)

Норма -- обобщенное понятие длины вектора.

Если определена норма, метрику можно определить через норму $d(x,y)=|x-y|$.

Класс экспортирует функцию `norm(V a)` и `distance(V a, V b)`

Евклидово пространство Конечномерное вещественное векторное пространство $\mathbb{R}^{n}$ с введённым на нём положительно определённым скалярным произведением.

Скалярным произведением в вещественном линейном пространстве $V(\mathbb{R}^n)$ называется действительная функция $\langle x,y \rangle$, определенная для каждой пары элементов $x,y \in \mathbb{R}$, и удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$,
2. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$,
3. $\langle \lambda x,y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle$,
4. $\langle x,x \rangle \geqslant 0$, причем $\langle x,x \rangle=0$ только при $x=0$.

Скалярное произведение `dot(V a, V b)` (dot product) может порождать метрику и норму вектора. А также используется для вычисления углов между векторами и для определения ортогональности векторов.

В евклидовом пространстве норма вводиться с помощью формулы

```
\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}
```

Угол между векторами определяется формулой

```
\cos\phi = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\|\cdot \|y\|}
```

Два вектора взаимно ортогональны если $\langle x, y \rangle = 0$

Унитарное пространство - векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}^{n}$ с положительно определенным эрмитовым скалярным произведением. В анализе [1] вводится комплексное евклидово пространство с теми же определением.

Комплексное евклидово пространство В комплексном пространстве скалярное произведение мы определяем как числовую комплекснозначную функцию двух векторов, удовлетворяющую условиям:

1. $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$,
2. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$,
3. $\langle \lambda x,y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle$,
4. $\langle x,x \rangle \geqslant 0$, причем $\langle x,x \rangle=0$ только при $x=0$.

Заметим, из 1. и 3. следует $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$, $\langle \alpha x, \beta y \rangle = \alpha\bar{\beta} \langle x, y \rangle$

Пример комплексного n-мерного евклидова пространства - линейное (векторное) пространство $\mathbb{C}^n$, в котором скалярное произведение определено формулой $$\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} = \mathbf{x}\cdot\overline{\mathbf{y}}$$

Всякое комплексное евклидово пространство размерности n изоморфно этому пространству. Всякое иное пространство можно определить через матрицу аффинного (изоморфного) преобразования.

Пример, пространство $C_2[a,b]$ комплексно-значных непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ со скалярным произведением

```
(f,g) = \int_{a}^b f(t) \overline{g(t)} dt
```

Аффи́нное простра́нство — математическая структура над векторным пространством, дополняет евклидову геометрию матрицей аффинного (обратимого) преобразования. Аффинное пространство оперирует с объектами двух типов: «векторами» и «точками». Матрицы аффинного преобразования подчиняются своей алгебре, определены операции наложения матриц и обращения. Координаты точек задают вектора единственным образом.

Не пустое множество $\mathbb{A} \neq \emptyset$ называется аффинным пространством над векторным пространством V, если задано отображение, сопоставляющее любой упорядоченной паре точек из A некоторый вектор из V $g: A \times A \to V$ и удовлетворяющее двум аксиомам (аксиомы Вейля)

1. Для любой точки $\forall A \in \mathbb{A}$ и любого вектора $\forall \vec{a} \in V$ существует единственная точка $\forall B \in \mathbb{A}$, для которой $g(A,B) = \vec{a}$.
   (далее будем обозначать $g(A,B)=\vec{AB}$)
2. Для любых трех точек $\forall A,B,C \in \mathbb{A}$ имеет место равенство $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$

Ги́льбертово простра́нство — обобщение евклидова пространства, допускающее бесконечную размерность и *полное* по метрике, порождённой скалярным произведением.

Абстрактные Ряды Фурье

Множество ортонормированных функций позволяют построить ряд Фурье. В общем случае ряд Фурье может быть построен от любого полного набора ортонормированных функций ${e_k}$ с определенным скалярным произведением.

```
f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \phi_k~, \quad x \in \mathbb{H}
```

тогда

```
\langle f, \phi_n \rangle = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \langle \phi_k,
\e_n \rangle = \alpha_n~.
```

Если x рскладывается по базису ${e_k}$, то $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ - коэффициенты Фурье. Такие ряды называют абстрактными рядами Фурье. Набор ортонормированных функций ${e_k}$

является подмножеством гильбертово пространства. Все возможные функции являются линейной комбинацией базисных функций. Расширение множества обозначают $span{e_k}$ - линейная оболочка.

Вместе образуют линейное пространство суммируемых функций на интервале $L^2([a,b])$ - гильбертово пространство. Скалярное произведение непрерывных функций определяется

```
\langle f, g \rangle:= \int_{a}^{b} f(x) \overline{g(x)}d\mu(x)
```

-- тут применяется интеграл в форме Лебега по мере. В нашем изложении интеграл в форме Лебега вводится в курсе теории вероятностей, как аксиома непрерывности.

Утверждение. От любого множества с разбиением на подмножества с попарно непересекающимися элементами разбиения можно образовать вероятностное пространство. Интеграл по числовой мере интерпретируется, как интеграл по плотности вероятности, а числовая мера - вероятность. Таким образом от полного набора ортонормированных функций можно образовать вероятностное пространство. Причем все пространства данной размерности будут изоморфны между собой (не уверен что корректно сформулировал). Разложение по аналитическим ортогональным функциям можно представить в разных ортонормированных базисах и построить матрицу аффинного(обратимого) преобразования из одного базиса в другой.

С точки зрения математических классов. Есть понятие пространство (абстрактный класс)- тройка: множество, разбиение и мера со своими функциями дистанции, нормы и скалярного произведения. Множество в данном случае составлено из функций, которые можно получить используя разложение по ортонормированному базису.

Мы образовываем (класс) аффинное пространство, которое "точкам", в базисе ортонормированном, сопоставляет "вектора" в гильбертовом пространстве функций. Аффинное преобразование это матрица.

Это два класса. Один работает с векторами, а второй с "координатами точек" и матрицами аффинного (обратимого) преобразования. В классе пространство определены операции суммирования "векторов", а в классе "аффинное пространство" пространство определены операции над матрицами преобразования и коэффициенты разложения по выбранному базису.

Функцию $f \in \mathbb{H}$ можно разложить в ряд по базису функций ${\phi_k}$ - представить в виде линейной комбинации. $$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$$

Домножим ряд на ϕ_k. С учетом ортогональности базисных функций ${\phi_k}$, все элементы обращаются в ноль кроме слагаемого с номером k:

$$\langle f, \phi_k \rangle = c_k |\phi_k|^2$$

Числа $$c_k = \frac{\langle f, \phi_k\rangle}{|\phi_k|^2}$$ называются "координатами точки" или коэффициентами разложения в ряд Фурье f по базису ${\phi_k}$.

Ортогонолизация базиса. Процесс Грама — Шмидта

Следующие разделы (аффинное пространство):

- аппроксимация аналитических функции, системы ортогональных полиномов,
- линейная алгебра - разложения LU, QR, обращение матриц, ортогональные матрицы, собственные числа.
- тринадцатая проблема Гильберта - любую непрерывную (аналитическую) функцию можно представить, как суперпозицию и аффинное преобразование.