Лекция 3. Линейные системы

(Теория управления моб.роботами)

Нехаев И.Н., доцент каф. ПМиИТ, ВолгаТех

Georgia Tech

Dr. Magnus Egerstedt
Professor
School of Electrical and
Computer Engineering

Control of Mobile Robots

Module 3
Linear Systems

How make mobile robots move in effective, safe, predictable, and collaborative ways using modern control theory?

В этой лекции изучаем:

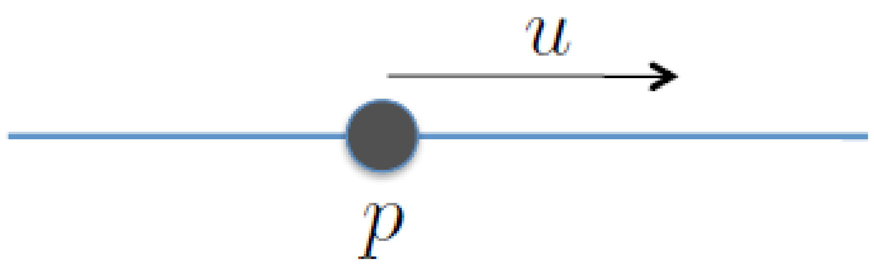
- Модель линейной системы управления (ЛСУ).
- Примеры ЛСУ: движение точ.массы, круиз – контроль.
- Линеаризация нелинейных систем.
- Аналитическое решение линейных систем. Матрица перехода.
- Свойство СУ: Управляемость. Критерий управляемости

Почему линейные системы ?

- Простота ЛСУ.
- Богатство ЛСУ: круиз – контроль.
- Возможность линеаризации нелинейных систем.
- Возможность получения аналитического решения линейных систем. Изучение свойств СУ. Возможность на простых моделях проиллюстрировать важные свойства систем управления: управляемость, наблюдаемость.

Простейшая модель ЛСУ

- *Уравнение движения точечной массы*



$$\ddot{p} = u$$

- *Попробуем записать его в универсальной форме:*

$$\begin{aligned} x_1 &= p \\ x_2 &= \dot{p} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}$$

Модель движения точечной массы

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$\dot{x}_2 = u$$

- *Рассмотрим векторную переменную состояния x*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = p = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Линейная система управления (ЛСУ)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = p = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

- *В общем виде это можно переписать так:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}}$$

Модель ЛСУ в общем виде

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

- *Это и есть линейная система управления, определенная в пространстве состояний (фазовом пространстве) x*

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \Re^n \\ u \in \Re^m \\ y \in \Re^p \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A: \; n \times n \\ B: \; n \times m \\ C: \; p \times n \end{array}$$

$$\underset{n \times 1}{\dot{x}} = \underset{\substack{(n \times n)(n \times 1) \\ n \times 1}}{A \; x} + \underset{\substack{(n \times m)(m \times 1) \\ n \times 1}}{B \; u}$$

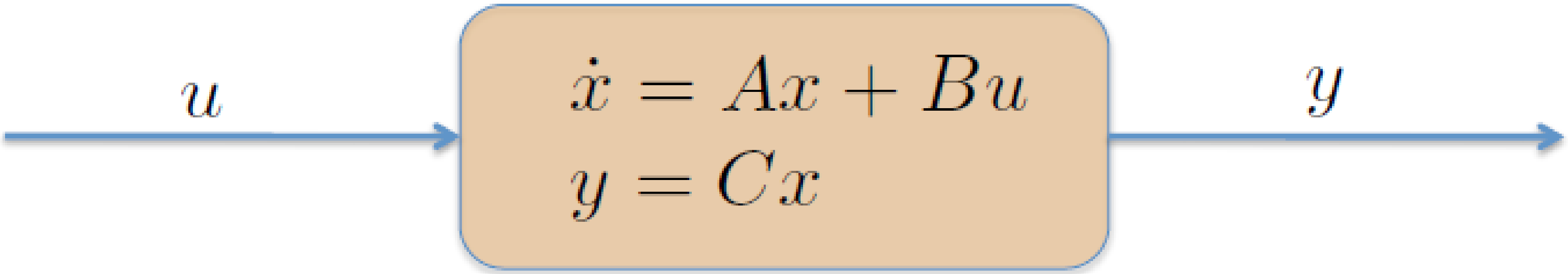
$$\underset{p \times 1}{y} = \underset{\substack{(p \times n)(n \times 1) \\ p \times 1}}{C \; x}$$

ЛСУ как частный случай СУ

x – *состояние* (*параметры состояния*)

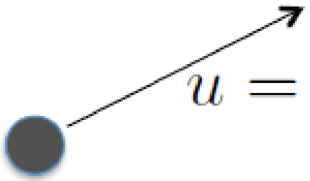
y – *выход* (*наблюдаемые параметры*)

u – *управление* (*управляемые параметры*)



Еще примеры…Управление в 2D

$$\ddot{p}_x = u_x$$
$$\ddot{p}_y = u_y$$



$$u = (u_x, u_y)$$

$$p = (p_x, p_y)$$

$$x_1 = p_x \qquad x_2 = \dot{p}_x \qquad x_3 = p_y \qquad x_4 = \dot{p}_y$$
$$u_1 = u_x \qquad u_2 = u_y$$
$$y_1 = p_x \qquad y_2 = p_y$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Еще примеры…Круиз-контроль

$$\dot{v} = \frac{c}{m}u - \gamma v$$

- *Если мы измеряем скорость, то имеем такую систему:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned} \qquad A = -\gamma,\ B = \frac{c}{m},\ C = 1$$

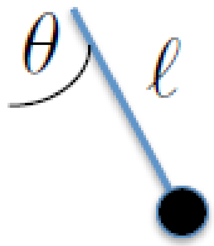
- *Если мы измеряем местоположение x, то имеем то же уравнение, но с другой матрицей*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ c/m \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Еще примеры… Маятник

- *2-й закон Ньютона дает модель:*

нелинейная !



$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta) + cu$$

$$\theta \ll 1 \;\; \Rightarrow \;\; \sin\theta \approx \theta$$

- *Для небольших углов можно использовать ЛСУ*

$$\dot{x} = Ax + Bu, \;\; y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/\ell & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Линеаризация

- *Для нелинейной СУ имеем:*

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x)$$

- *предположим, что мы хотим получить линейную модель, которая хорошо описывает поведение системы вблизи некоторой точки:*

$$(x_o, u_o) \quad \rightarrow \quad (x = x_o + \delta x, \quad u = u_o + \delta u)$$

- *Тогда уравнение движения можно переписать в следующем виде:*

$$\dot{\delta x} = \dot{x} - \dot{x}_o = \dot{x} = f(x_o + \delta x, u_o + \delta u)$$

Линеаризация

$$\dot{\delta x} = f(x_o + \delta x, u_o + \delta u)$$

разложение в ряд Тейлора:

$$= f(x_o, u_o) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, u_o)}_{A}\delta x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(x_o, u_o)}_{B}\delta u + \text{H.O.T}$$

$$y = h(x_o + \delta x) = h(x_o) + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x}(x_o)}_{C}\delta x + \text{H.O.T}$$

примем допущение:

$$f(x_o, u_o) = 0$$

$$h(x_o) = 0$$

Линеаризация

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \\ \\ f(x_o, u_o) = 0 \\ h(x_o) = 0 \end{cases}$$

$$x = x_o + \delta x$$
$$u = u_o + \delta u$$

$$\begin{cases} \dot{\delta} x = A\delta x + B\delta u \\ y = C\delta x \\ \\ A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, u_o) \\ \\ B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_o, u_o) \\ \\ C = \frac{\partial h}{\partial x}(x_o) \end{cases}$$

Вычисление матрицы Якоби

$$x \in \Re^n,\ u \in \Re^m,\ y \in \Re^p,\ f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},\ h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$n \times n$

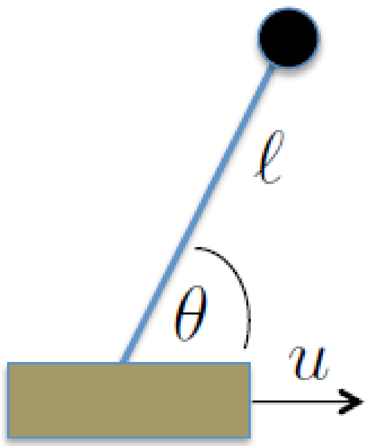
$$x \in \Re^n,\ u \in \Re^m,\ y \in \Re^p,\ f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},\ h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

$n \times m$

Пример линеаризации: маятник



$$\ddot{\theta} = \frac{g}{\ell}\sin\theta + u\cos\theta$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_2 &= \dot{\theta} \\ y &= x_1 \end{aligned}\ , \qquad \begin{aligned} f(x,u) &= \begin{bmatrix} x_2 \\ g/\ell\sin(x_1) + u\cos(x_1) \end{bmatrix} \\ h(x) &= x_1 \end{aligned}$$

$$(x_o, u_o) = (0,0)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell\cos(x_1) & 0 \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell & 0 \end{bmatrix}$$

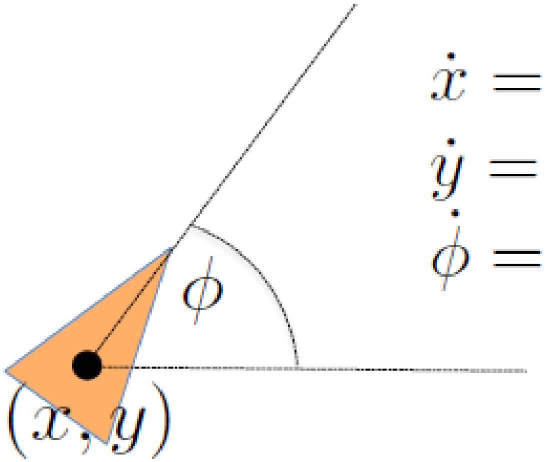
Пример линеаризации: маятник

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(x_1) \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример бесполезной линеаризации

Unicycle



$$\dot{x} = v\cos\phi \qquad \dot{y} = v\sin\phi \qquad \dot{\phi} = \omega$$

$$\begin{cases} x_1 = x,\ \ x_2 = y,\ \ x_3 = \phi \\ y_1 = x_1,\ \ y_2 = x_2,\ \ y_3 = x_3 \\ u_1 = v,\ \ u_2 = \omega \\ (x_o, u_o) = (0, 0) \end{cases}$$

$$A = 0,\ \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\dot{x}_2 = 0$???

Решение ЛСУ (u=0)

- *Если x - просто скаляр:*

$$\dot{x} = ax, \quad x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0$$

- *Как проверить?*

$$x(t_0) = e^{a(t_0-t_0)}x_0 = e^0 x_0 = x_0$$ ☑ *Начальные условия*

$$\frac{d}{dt}x(t) = ae^{a(t-t_0)}x_0 = ax$$ ☑ *Производная*

- *Для векторных систем имеем матричную экспоненту*

$$\dot{x} = Ax, \; x(t_0) = x_0 \; \Rightarrow \; x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$$

matrix exponential

Матричная экспонента

- *определение такое же как и для скалярной экспоненты*

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!}, \qquad e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

- Derivative:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k A^k t^{k-1}}{k!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}}$$

Матрица перехода. Решение ЛСУ

- *Такая матрица имеет даже собственное название: матрица перехода (из состояния в момент t0 в состояние в момент t)*

$$e^{A(t-t_0)} = \Phi(t, t_0)$$

$$\dot{x} = Ax \quad \Rightarrow \quad x(t) = \Phi(t, \tau)x(\tau) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t, t) = I \end{cases}$$

- But what if we have the controlled system: $\dot{x} = Ax + Bu$
- Claim:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau$$

Решение ОДУ. Проверка

- Claim:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = A\Phi(t, t_0)x(t_0) + \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = A\left(\Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau\right) + Bu(t)$$

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu \quad ☑$$

Решение ОДУ. Итог

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

$$y(t) = C\Phi(t, t_0)x(t_0) + C\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$$

Устойчивость СУ

- *Ассимтотически стабильна:* $x(t) \to 0, \ \forall x(0)$
- *Неустойчива:* $\exists x(0) : \ \|x(t)\| \to \infty$
- *Пограничная устойчивость - не расходится, но и не сходится*

$$\dot{x} = ax \ \Rightarrow \ x(t) = e^{at}x(0)$$

$$\begin{cases} a > 0 : & \text{unstable} \\ a < 0 : & \text{asymptotically stable} \\ a = 0 : & \text{critically stable} \end{cases}$$

Устойчивость СУ

$$\dot{x} = Ax \;\Rightarrow\; x(t) = e^{At}x(0)$$

- *В векторном случае, для проверки устойчивости используются собственные числа:*

$$\underbrace{A v = \lambda v}$$

λ — eigenvalue $\in \mathcal{C}$

v — eigenvector $\in \Re^n$

- *Собственные числа показывают - как ведет себя отображение с матрицей A в определенных направлениях (v)*

- In MATLAB:

```
>> eig(A)
```

Устойчивость СУ

$$\dot{x} = Ax \;\Rightarrow\; x(t) = e^{At}x(0)$$

- Asymptotically Stable (if and only if):

$$\mathrm{Re}(\lambda) < 0,\ \forall \lambda \in \mathrm{eig}(A)$$

Нам надо этого добиться!

- *Неустойчива, если:*

$$\exists \lambda \in \mathrm{eig}(A):\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0$$

- *Критическая (пограничная) устойчивость, если:*

$$\mathrm{Re}(\lambda) \le 0,\ \forall \lambda \in \mathrm{eig}(A)$$

В следующей лекции разберемся с построением устойчивого регулятора…