Круглов А.И. Б05-202 ST8

1 $X=(X_1,\dots,X_n)\sim P\in\{P_\theta \mid \theta\in\Theta\}$, $H_0: \theta\in[-1,1]$ vs $H_1: \theta\notin[-1,1]$, $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid T(x)>1\}$, $T(x)\sim N(\theta,1)$. Какие ответы возможны? Найти $P(I)$.

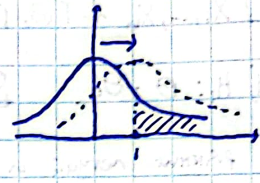
Возможные исходы	H_0 верна	H_0 ложна
Не отвергаем H_0	:)	ош. II рода
Отвергаем H_0	ош. I рода	:)

При проверке гипотезы можно отвергнуть ее или сказать "отвергнуть нельзя". Все 4 варианта приведены в таблице.

В этой задаче H_0 и H_1 дополняют друг друга. Т.е. исключительная особенность задачи состоит в том, что при отвержении H_0 можно сказать, что есть достаточное подтверждение верности H_1.

$P(I_S)=\sup\limits_{P\in\mathcal{P}_0} P(X\in S)=\sup\limits_{\theta\in[-1,1]} P(T(X)>1)=P(T(X)>1 \mid T(X)\sim N(1,1))=$ (хотим максимизировать "массу" колокола справа от 1)

$=P(T(X)>0 \mid N(0,1))=\frac{1}{2}$



2 Рост песиков: $X\sim\Gamma(6/7,2)$, рост единорогов: $X\sim\Gamma(5/44,3)$, наиб. мощные критерии "песик vs единорог" и "единорог vs песик". Ответ при $X=6.66$? Мощности критериев?

Формализуем: $H_0: \theta=(6/7,2)$, $H_1: \theta=(5/44,3)$. Th. Неймана-Пирсона: если $\exists c$, такое что $P_{\theta_0}(\Lambda_{\theta_1\theta_0}>c)=\alpha$, то $S=\{\Lambda_{\theta_1\theta_0}>c\}$ имеет max мощность среди всех критериев уровня значимости α. Тут $\Lambda_{\theta_1\theta_0}=L(\theta_1)/L(\theta_0)$

а) $\Lambda_{\theta_1\theta_0}(x)=\frac{P_{\theta_1}(x)}{P_{\theta_0}(x)}=\frac{(5/44)^3 x^{3-1}\exp(-\frac{5}{44}x)\cdot\Gamma(2)}{(6/7)^2 x^{2-1}\exp(-\frac{6}{7}x)\cdot\Gamma(3)}$, $x>0$. $\exists? c: P_{\theta_0}(\Lambda_{\theta_1\theta_0}>c)=\alpha \overset{\text{по монотонности}}{=}$

$=P_{\theta_0}(X>\tilde{c}) \Rightarrow \tilde{c}=\gamma_{1-\alpha}$ (квантиль $\Gamma(6/7,2)=\Gamma(\theta_0)$) $\Rightarrow c=\Lambda_{\theta_1\theta_0}(\tilde{c})$, нашли, можем построить критерий: $S=\{\Lambda_{\theta_1\theta_0}(x)>\Lambda_{\theta_1\theta_0}(\gamma_{1-\alpha})\}$. С помощью scipy.stats (sps.gamma.ppf(q=0.95, a=2, scale=7/6)): $\gamma_{1-\alpha}\approx 5.53$, т.е.

$6.66\in S \Rightarrow$ отвергаем H_0. Мощность: $\beta_S=1-P(II_S)=1-P(X\notin S \mid \theta=(5/44,3))\approx\boxed{0.97}$

(посчитано как 1-sps.gamma.cdf(x=$\gamma_{1-\alpha}$, a=3, scale=44/5))

б) $\Lambda_{\theta_0\theta_1}(x)=\frac{P_{\theta_0}(x)}{P_{\theta_1}(x)}=(\Lambda_{\theta_1\theta_0}(x))^{-1}$, $x>0$. $\exists? c': P_{\theta_1}(\Lambda_{\theta_0\theta_1}>c')=\alpha \overset{\text{по монотонности}}{=} P_{\theta_1}(X<\tilde{c}')$

$\Rightarrow \tilde{c}'=\gamma'_\alpha$ (квантиль $\Gamma(5/44,3)=\Gamma(\theta_1)$) $\Rightarrow c'=\Lambda_{\theta_0\theta_1}(\tilde{c}')$, нашли, построим критерий: $S'=$

$=\{\Lambda_{\theta_0\theta_1}(x)>\Lambda_{\theta_0\theta_1}(\gamma'_\alpha)\}$. С помощью scipy.stats (sps.gamma.ppf(q=0.05, a=3, scale=44/5)): $\gamma'_\alpha\approx 7.20$, т.е. $6.66\in S'\Rightarrow$ отвергаем H_1.

Мощность: $\beta_{S'}=1-P(II_{S'})=1-P(X\notin S' \mid \theta=(6/7,2))\approx\boxed{0.98}$ (посчитано как sps.gamma.cdf(x=

$=\gamma'_\alpha$, a=2, scale=7/6)). Отметим, что $\beta_{S'}\approx 0.98 > 0.97\approx\beta_S$

Посчитаем итоговый ответ при $x=6.66$. Критерий S' предпочтительнее, т.к. более мощный $\Rightarrow$ поверим ему. Отвергаем $H_1 \Rightarrow$ не единорог

4 Для крит. Вальда проверки $H_0: \theta=\theta_0$, $H_1: \theta>\theta_0$ построить ДИ, вычислить p-value отвержения H_0.

Семинар: $S=\left\{\sqrt{n}\frac{\hat\theta-\theta_0}{\hat\sigma}\geqslant z_{1-\alpha}\right\}$, $P(I_S)=P_{\theta_0}\left(\sqrt{n}\frac{\hat\theta-\theta_0}{\hat\sigma}\geqslant z_{1-\alpha}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\alpha$, $P_{\theta_0}\left(\sqrt{n}\frac{\hat\theta-\theta_0}{\hat\sigma}<z_{1-\alpha}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1-\alpha \Rightarrow$

$C=\left[\hat\theta-\frac{\hat\sigma z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}},+\infty\right)$ - ДИ ур-ня доверия $1-\alpha$. Если оценка параметра попадает в C, то отвергаем H_0.

$\boxed{3}$ $X \geq 0$, $H_0: X \sim U[0,1]$, $H_1: X \sim Exp(1)$. Построить наиб. мощный критерий ур. знач. $\alpha = 0.05$, вычислить его мощность

$$\Lambda_{\theta_1\theta_0}(X) = \frac{L_X(\theta_1)}{L_X(\theta_0)} = \frac{1 e^{-1X} I\{X>0\}}{\frac{1}{1-0} I\{X\in[0,1]\}} = e^{-X} I\{X \in (0,1]\} \; ; \quad S = \{\Lambda_{\theta_1\theta_0} > c\} = \alpha \xrightarrow{\text{по монотонности}}$$

$$\Rightarrow P_{\theta_0}(e^{-X} I\{X\in(0,1]\} > c) = P(X > \tilde{c}) = \alpha \Rightarrow \tilde{c} = q_{1-\alpha} \text{ (квантиль } U[0,1]) = 0.95 \Rightarrow c = e^{-q_{1-\alpha}} \cdot$$

$$\cdot I\{q_{1-\alpha} \in (0,1]\} = e^{-0.95} \approx 0.39 \Rightarrow S = \{X < 0.95 \text{ и } X \in (0,1]\} = \boxed{(0, 0.95)}$$

Мощность: $\beta_S = 1 - P(II_S) = 1 - P\{X \notin S \mid X \sim Exp(1)\} = 1 - P(X \geq 0.95 \mid X \sim Exp(1)) =$ sps.expon.cdf(0.95) $\approx \boxed{0.61}$

• $\boxed{5}$ $X_1, \dots, X_n \sim \Gamma(\theta, \beta)$, β неизв. Построить крит. Вальда ур. зн. α для $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \overset{<}{\underset{>}{\neq}} \theta_0$. Мощ-?

1) $H_1: \theta > \theta_0$. $S = \{\sqrt{n}\,\frac{\hat\theta - \theta_0}{\hat\sigma} \geq z_{1-\alpha}\}$, где $\hat\theta$ − а.н.о. θ, $\hat\sigma$ − сос. оценка σ. По материалам разных лекций и ДЗ, возьмем $\hat\theta = \overline{X}$, $\hat\sigma^2 = \left(\frac{\overline{X}}{\hat\beta}\right)^2 = S^2$. Тогда $S = \{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \theta_0}{S} \geq z_{1-\alpha}\}$ ⇒ мощность:
$\beta_S = 1 - P(II_S) = 1 - P(X \notin S \mid \theta > \theta_0)$

2) $H_1: \theta \neq \theta_0$. $S' = \{|\sqrt{n}\,\frac{\hat\theta - \theta_0}{\hat\sigma}| \geq z_{1-\alpha/2}\} = \{|\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \theta_0}{S}| \geq z_{1-\alpha/2}\}$ ⇒ мощность: $\beta_{S'} =$

3) $H_1: \theta < \theta_0$. $S'' = \{\sqrt{n}\,\frac{\hat\theta - \theta_0}{\hat\sigma} \leq z_\alpha\} = \{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \theta_0}{S} \leq z_\alpha\}$ ⇒ мощность: $\beta_{S''} =$

• $\boxed{6}$ Формулировки

а) ст. гипотеза − утв. вида "$P \in \mathcal{P}$"; ст. критерий − мн-во S: H_0 отвергаем ⇔ $\underset{\text{выборка}}{X} \in S$; ст. значимый результат − вывод о ложности H_0 на основании критерия с уровнем значимости α (т.е. гарантируемым max размером ошибки I рода равным α); ошибка I рода: отвергли верную H_0, т.е. $P(I_S) = P(X \in S \mid H_0)$; ошибка II рода: не отвергли ложную H_0, т.е. $P(II_S) = P(X \notin S \mid \neg H_0)$; ур-нь значимости − max гарантируемый размер $P(I)$; мощность критерия $\beta_S = 1 - P(II_S)$; ас. крит. ур. знач. α − критерий, дающий ур. зн. α на бескон. выборке; А.Н.О. − $\hat\theta$: $\sqrt{n}(\hat\theta - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \Sigma(\theta))$

б) Th Неймана-Пирсона: если $\exists c_\alpha$: $P_{\theta_0}(\Lambda_{\theta_1\theta_0} > c_\alpha) = \alpha$, то $S = \{\Lambda_{\theta_1\theta_0} > c_\alpha\}$ имеет max мощность из всех критериев ур. зн. α

7. $X_1,\dots,X_n \sim N(\theta,1)$. Построить РНМК ур. зн. α а) $H_0: \theta \geq \theta_0$, $H_1: \theta < \theta_0$ б) $H_0: \theta \leq \theta_0$, $H_1: \theta > \theta_0$; мощность?

б) пусть $\theta_1 > \theta_0$.

$$\lambda_{\theta_1\theta_0}(x) = \frac{L_x(\theta_1)}{L_x(\theta_0)} = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}(x_i-\theta_1)^2)}{\prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}(x_j-\theta_0)^2)} = \exp\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n (x_j-\theta_0)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i-\theta_1)^2\right)\right] = \exp\left[\frac{1}{2}\left(\cancel{\sum_{j=1}^n x_j^2} - 2\theta_0 \sum_{j=1}^n x_j +\right.\right.$$

$$\left.\left. + n\theta_0^2 - \cancel{\sum_{i=1}^n x_i^2} + 2\theta_1 \sum_{i=1}^n x_i - n\theta_1^2\right)\right] = \exp\left[\frac{1}{2}\left(n\overline{x}(2\theta_1 - 2\theta_0) + n(\theta_0^2 - \theta_1^2)\right)\right] = \exp\left[n\left(\overline{x}(\theta_1-\theta_0) + \frac{\theta_0^2-\theta_1^2}{2}\right)\right] =$$

$$= \exp\left[n\underbrace{(\theta_1-\theta_0)}_{>0}\left(\overline{x} - \frac{\theta_1+\theta_0}{2}\right)\right]$$, $T(x) = \underset{\hat\theta}{\overline{X}}$ ($\lambda_{\theta_1\theta_0}(x)$ монот. $\uparrow$ по $T(x)$) $\Rightarrow S = \{\overline{X} > c_\alpha\}$

c_α: $P_{\theta_0}(T(x) > c_\alpha) = \alpha$, т.е. $P_{\theta_0}(\overline{X} > c_\alpha) = \alpha \Rightarrow c_\alpha = z_{1-\alpha}$ (α-квантиль $N(0,1)$) $\Rightarrow S = \{\overline{X} > z_{1-\alpha}\}$

sps.norm.ppf(0.95)

$\beta_S = 1 - P(X \notin S \mid \theta > \theta_0) = P(\overline{x} > z_{1-\alpha} \mid \theta > \theta_0) = \alpha$

а) те же действия, но по свойству ч с семинара нужно поменять знак: $S = \{\overline{X} < c_\alpha\}$, c_α:

$P_{\theta_0}(\overline{X} < c_\alpha) = \alpha \Rightarrow c_\alpha = z_\alpha$ (α-квантиль $N(0,1)$) $\Rightarrow S = \{\overline{X} < z_\alpha\}$

sps.norm.ppf(0.05)

$\beta_S = 1 - P(X \notin S \mid \theta < \theta_0) = P(\overline{X} < z_\alpha \mid \theta < \theta_0) = \alpha$

(используя th о монот. отн. правдоподобия)

8. $X_1,\dots,X_n \sim \Gamma(\theta,\beta)$, β известно. РНМК ур. зн. α – ? а) $H_0: \theta \geq \theta_0$, $H_1: \theta < \theta_0$ б) $H_0: \theta \leq \theta_0$, $H_1: \theta > \theta_0$; мощность?

б) пусть $\theta_1 > \theta_0$. $$\lambda_{\theta_1\theta_0}(x) = \frac{L_x(\theta_1)}{L_x(\theta_0)} = \frac{\prod_{i=1}^n \theta_1^\beta \cancel{x_i^{\beta-1}} e^{-\theta_1 x_i} / \cancel{\Gamma(\beta)}}{\prod_{j=1}^n \theta_0^\beta \cancel{x_j^{\beta-1}} e^{-\theta_0 x_j} / \cancel{\Gamma(\beta)}} = \frac{\theta_1^{n\beta} e^{\theta_0 \sum x_i}}{\theta_0^{n\beta} e^{\theta_1 \sum x_j}} = \underbrace{\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)}_{>1}^{n\beta} e^{n\overline{x}\underbrace{(\theta_0-\theta_1)}_{<0}},$$

$T(x) = \overline{X}$ ($\lambda_{\theta_1\theta_0}(x)$ монот. $\downarrow$ по $T(x)$) $\Rightarrow S = \{\overline{X} < c_\alpha\}$. c_α: $P_{\theta_0}(\overline{X} < c_\alpha) = \alpha \Rightarrow c_\alpha =$

$= \gamma_\alpha$ (α-квантиль Γ) $\Rightarrow S = \{\overline{X} < \gamma_\alpha\}$, γ_α: sps.gamma.ppf (0.05)

$\beta_S = P(\overline{X} < \gamma_\alpha \mid \theta > \theta_0) = \alpha$

а) те же действия, но по свойству ч с семинара нужно поменять знак: $S = \{\overline{X} > c_\alpha\}$, c_α:

$P_{\theta_0}(\overline{X} > c_\alpha) = \alpha \Rightarrow c_\alpha = \gamma_{1-\alpha}$ ($1-\alpha$-квантиль Γ) $\Rightarrow S = \{\overline{X} > \gamma_{1-\alpha}\}$, $\gamma_{1-\alpha}$ = sps.gamma.ppf (0.95)

$\beta_S = P(\overline{x} > \gamma_{1-\alpha} \mid \theta < \theta_0) = \alpha$

(используя th о монот. отн. правдоподобия)

9. $X_1,\dots,X_n \sim Bern(\theta)$, док-ть, что $\nexists$ РНМК $\forall \alpha$, $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta \neq \theta_0$

$$\lambda_{\theta_1\theta_0} = \frac{L_x(\theta_1)}{L_x(\theta_0)} = \frac{\prod_{i=1}^n (1-\theta_1)^{1-x_i} \theta_1^{x_i}}{\prod_{j=1}^n (1-\theta_0)^{1-x_j} \theta_0^{x_j}} = \frac{(1-\theta_1)^{n-\sum x_i} \theta_1^{\sum x_i}}{(1-\theta_0)^{n-\sum x_i} \theta_0^{\sum x_i}} = \frac{(1-\theta_1)^{n-n\overline{x}} \theta_1^{n\overline{x}}}{(1-\theta_0)^{n-n\overline{x}} \theta_0^{n\overline{x}}} = \left(\frac{(1-\theta_1)^{1-\overline{x}} \theta_1^{\overline{x}}}{(1-\theta_0)^{1-\overline{x}} \theta_0^{\overline{x}}}\right)^n = \left[\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{1-\overline{x}} \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{\overline{x}}\right]^n$$

В выражении фигурирует только $T(x) = \overline{X}$, но $\lambda_{\theta_1\theta_0}$ $\underbrace{\text{не монотонна}}$ по $\overline{X}$ $\Rightarrow$ РНМК для произвольного

(т.к. в двустороннем случае не понятно, $\theta_0 \lessgtr \theta_1$)

ур. зн. α построить нельзя, ч.т.д.