Круглов А.И. Б05-204 АВ1

$\boxed{3}$ $X=(X_1,\dots,X_n)$, $Y=(Y_1,\dots,Y_n)$ – независ. выборки. Вывести сходимость относительного t-теста

Согласно ЦПТ: $\sqrt{n}\left[\begin{pmatrix}\bar X\\ \bar Y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}\right] \xrightarrow{d} N(0,\Sigma)$, где $\Sigma = \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0\\ 0 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$ и $X\sim P_X(a_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim P_Y(a_2,\sigma_2^2)$

Рассмотрим $h(x,y)=\frac{x-y}{y}$. Сразу посчитаем $\nabla h^T|_\theta = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\ \ \frac{\partial h}{\partial y}\right)\Big|_\theta = \left(\frac{1}{y}\ \ \frac{-x}{y^2}\right)\Big|_\theta = \left(1/a_2\ \ -a_1/a_2^2\right)$

С помощью δ-метода покажем, что $\sqrt{n}\left[h\begin{pmatrix}\bar X\\ \bar Y\end{pmatrix} - h\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}\right] \xrightarrow{d} N\Big(\underset{①}{0},\ \underset{②}{\frac{\sigma_1^2}{a_2^2} + \frac{a_1^2}{a_2^4}\sigma_2^2}\Big)$ (ф-лу взял из презентации с лекции)

1) $E\left[h\begin{pmatrix}\bar X\\ \bar Y\end{pmatrix} - h\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}\right] = Eh\begin{pmatrix}\bar X\\ \bar Y\end{pmatrix} - Eh\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} = E\frac{\bar X-\bar Y}{\bar Y} - E\frac{a_1-a_2}{a_2} = E\frac{\bar X-\bar Y}{\bar Y} - \frac{a_1-a_2}{a_2} = E\frac{\bar X}{\bar Y} - 1 - \frac{a_1}{a_2} + 1 =$

$= E\frac{\bar X}{\bar Y} - \frac{a_1}{a_2} = E\left(\frac{\bar X}{a_1}\cdot\frac{a_2}{\bar Y}\cdot\frac{a_1}{a_2}\right) - \frac{a_1}{a_2} \overset{\text{Л. Слуцкого}}{=\!=} 1\cdot 1\cdot\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} = 0$ ✓

2) $(\nabla h^T\cdot\Sigma\cdot\nabla h)|_\theta = \left(1/a_2\ \ -a_1/a_2^2\right)\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0\\ 0 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/a_2\\ -a_1/a_2^2\end{pmatrix} = \left(\sigma_1^2/a_2\ \ -\frac{a_1}{a_2^2}\sigma_2^2\right)\begin{pmatrix}1/a_2\\ -a_1/a_2^2\end{pmatrix} = \frac{\sigma_1^2}{a_2^2} + \frac{a_1^2}{a_2^4}\sigma_2^2$ ✓

Сходимость доказана, чтд

$\boxed{4}$ $X=(X_1,\dots,X_n)\sim N(a_1,\sigma^2)$, $Y=(Y_1,\dots,Y_m)\sim N(a_2,\sigma^2)$, $n\neq m$. Распр-е статистики абс. t-теста – ?

С лекции: $T(X,Y) = \frac{\bar X-\bar Y}{S\sqrt{1/n+1/m}} \overset{?}{\sim} T_{n+m-2}$, где $S^2 = \frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2}$ ($\overset{?}{\sim}$ и нужно доказать)

ЦПТ: $\sqrt{n}\left[\begin{pmatrix}\bar X\\ \bar Y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}\right] \xrightarrow{d} N\left(0,\begin{pmatrix}\sigma^2 & \\ & \sigma^2\end{pmatrix}\right)$. $(1\ \ -1)\begin{pmatrix}\bar X\\ \bar Y\end{pmatrix} = \bar X-\bar Y \overset{\text{по св-ву многомер. норм. распр.}}{\sim} N\Big(\overbrace{(1\ -1)\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}}^{0},\ \overbrace{(1\ -1)\begin{pmatrix}\sigma^2 & 0\\ 0 & \sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}}^{2\sigma^2}\Big) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\bar X-\bar Y}{2\sigma^2} =: \xi \sim N(0,1)$. Рассмотрим $\eta := (n+m-2)\cdot\left(\frac{S\sqrt{1/n+1/m}}{2\sigma^2}\right)^2 = \frac{\cancel{(n+m-2)}\left((n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}{\cancel{(n+m-2)}\cdot 4\sigma^4} =$

$= \frac{1}{4\sigma^4}\left(\frac{n-1}{n}S_X^2 + \frac{n-1}{m}S_X^2 + \frac{m-1}{n}S_Y^2 + \frac{m-1}{m}S_Y^2\right) = \frac{n+m}{mn\cdot 4\sigma^2}\Big(\underbrace{(n-1)\frac{S_X^2}{\sigma^2}}_{\sim\chi^2_{n-1}} + \underbrace{(m-1)\frac{S_Y^2}{\sigma^2}}_{\sim\chi^2_{m-1}}\Big) \sim \chi^2_{n+m-2}$

Заметим: $T(X,Y) = \frac{\xi}{\sqrt{\eta/(n+m-2)}}$, $\xi\sim N(0,1)$, $\eta\sim\chi^2_{n+m-2}$ $\Rightarrow$ $T(X,Y)\sim T_{n+m-2}$, ч.т.д.