Круглов А.И. Б05-202 ST3

1. $X_1, \dots, X_n \sim U[0,\theta]$, $\theta > 0$. Построить точный довер. интервал для θ ур-ня доверия α, используя статистику $X_{(n)}$.

Введем случайные величины $Y_i = \frac{X_i}{\theta}$, $i = 1, \dots, n$. Заметим: $Y_1, \dots, Y_n \sim U[0,1]$, причем распределение $Y_{(n)} = \frac{X_{(n)}}{\theta}$ не зависит от θ. Найдем $t \in (0,1)$ для которого $P(t < Y_{(n)} < 1) = \alpha$. Ф-ция распределения $Y_{(n)}$ равна $F_{Y_{(n)}}(y) = y^n$, $0 \le y < 1$ (это доказывалось в первой задаче ST2, по крайней мере в моем решении).

Тогда $1 - t^n = \alpha \Rightarrow t = (1-\alpha)^{1/n}$. Довер. интервал для θ: $\alpha = P\left(t < \frac{X_{(n)}}{\theta} < 1\right) = P\left(\frac{1}{t} > \frac{\theta}{X_{(n)}} > 1\right) = P\left(X_{(n)} < \theta < \frac{X_{(n)}}{t}\right) \Rightarrow$ ответ: $\left(X_{(n)}, X_{(n)}/(1-\alpha)^{1/n}\right)$

2. $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\theta)$, т.е. $p_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$. Построить точный довер. интервал для θ ур-ня доверия α методом центр. ф-ции.

Удобно рассмотреть статистику (центр. функцию) $T = \theta(X_1 + \dots + X_n)$, т.к. её распределение не зависит от θ. Действительно: $X_i \sim Exp(\theta) \overset{(\text{св-во } \Gamma)}{\Rightarrow} (X_1 + \dots + X_n) \sim \Gamma(n, \frac{1}{\theta}) \overset{(\text{св-во } \Gamma)}{\Rightarrow} \theta(X_1 + \dots + X_n) \sim \Gamma(n,1)$.

Рассмотрим квантили Г-распределения $q_{\frac{1-\alpha}{2}}$ и $q_{\frac{1+\alpha}{2}}$. Тогда $\alpha = P\left(q_{\frac{1-\alpha}{2}} < T < q_{\frac{1+\alpha}{2}}\right) = P\left(q_{\frac{1-\alpha}{2}}/(X_1 + \dots + X_n) < \theta < q_{\frac{1+\alpha}{2}}/(X_1 + \dots + X_n)\right)$, дов. интервал построен.

Ответ: $\left(q_{\frac{1-\alpha}{2}} / \sum_{i=1}^n X_i, \; q_{\frac{1+\alpha}{2}} / \sum_{i=1}^n X_i\right)$

3. Чипировали $a = 100$ котов из N живущих в городе. Отловили 100, из них 20 оказались с чипом. Построить асимп. довер. интервал ур-ня доверия $\alpha = 0{,}95$ и его реализацию для N.

Вероятность, что пойманный кот чипирован, равна $p = \frac{a}{N}$. Эксперимент поставлен так, что на выходе получена выборка $X_1, \dots, X_{100} \sim Bern(p)$, где $X_i = 1$ если i-тый кот чипирован и $X_i = 0$ иначе. Соответственно, хотим оценить параметр p, и по нему вычислить N. Обозначим n – индекс у X_n.

По ЦПТ: $\sqrt{n}(\underset{\hat{p}_n}{\overline{X}} - p) \xrightarrow{d_p} \xi \sim N(0, p(1-p))$. Функция $f(p) = \sqrt{p(1-p)}$ – непрерывна по $p \in (0,1) \Rightarrow$ по лемме Слуцкого: $\sqrt{n}\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}} \xrightarrow{d_p} \xi' \sim N(0,1)$. Рассмотрим квантили $N(0,1)$: $q_{\frac{1-\alpha}{2}}$ и $q_{\frac{1+\alpha}{2}}$. Также обозначим $T_1^{(n)} = \hat{p}_n - \sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}\, q_{\frac{1+\alpha}{2}}$, $T_2^{(n)} = \hat{p}_n - \sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}\, q_{\frac{1-\alpha}{2}}$. Тогда $\lim_{n\to\infty} P(T_1^{(n)} < p < T_2^{(n)}) = \alpha$, т.е. $(T_1^{(n)}, T_2^{(n)})$ – асимп. довер. интервал ур-ня доверия α, но для p, а мы хотим для N. $\alpha = \lim_{n\to\infty} P\left(T_1^{(n)} < \frac{a}{N} < T_2^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{a}{T_1^{(n)}} > N > \frac{a}{T_2^{(n)}}\right)$, т.е. асимп. довер. интервал ур-ня доверия α для N – это $\left(\frac{a}{T_2^{(n)}}, \frac{a}{T_1^{(n)}}\right)$. Реализация $\equiv$ подставим числа

Из задачи: $\bar X = \hat p_n = \frac{20}{100} = \frac15$, $n = 100 = a$, $q_{\frac{1-\alpha}{2}} = q_{0.025} = -1.96$, $q_{\frac{1+\alpha}{2}} = q_{0.975} = 1.96$.
Тогда $T_1^{(n)} = \frac15 - \sqrt{\frac{1/5 \cdot 4/5}{100}} \cdot 1.96 = \frac15 - 0{,}04 \cdot 1{,}96 = 0.1216$, $T_2^{(n)} = \frac15 + \sqrt{\frac{1/5\cdot 4/5}{100}}\cdot 1.96 = \frac15 + 0{,}04\cdot 1{,}96 = 0.2784 \Rightarrow \frac{a}{T_2^{(n)}} \approx 359$, $\frac{a}{T_1^{(n)}} \approx 822 \Rightarrow$ реализация: $(359, 822)$.

Ответ: ас. дов. инт. ур-ня дов. α: $\left(\frac{100}{T_2^{(n)}}, \frac{100}{T_1^{(n)}}\right)$, где $T_1^{(n)} = \bar X - \sqrt{\frac{\bar X(1-\bar X)}{n}}\cdot q_{\frac{1+\alpha}{2}}$,
$T_2^{(n)} = \bar X - \sqrt{\frac{\bar X(1-\bar X)}{n}} \cdot q_{\frac{1-\alpha}{2}}$; реализация в задаче: $(359, 822)$

$\boxed{4}$ $X_n \sim t(n)$. Показать, что $X_n \xrightarrow{d} N(0,1)$ при $n \to \infty$ (т.е. $t(\infty) = N(0,1)$).

$$\lim_{n\to\infty}\left(F_t(x) - F_N(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{x} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\pi n}\;\Gamma(\frac n2)}dt - \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right) \overset{\text{т. Лебега}}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\pi n}\;\Gamma(\frac n2)}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\right]dt.$$ Рассмотрим предел отдельно: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\pi n}\;\Gamma(\frac n2)} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(\frac n2)}\Big(\underbrace{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{n}}_{e^{t^2}}\Big)^{-\frac12}\cdot \overset{1}{\cancel{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac12}}}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(\frac n2)} \overset{n=2m}{=} e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\lim_{m\to\infty}\frac{\Gamma(m+\frac12)}{\sqrt{2\pi}\sqrt m\,\Gamma(m)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\lim_{m\to\infty}\frac{\Gamma(m+\frac12)}{\Gamma(m)\cdot\sqrt m} \overset{\text{ф-ла Стирлинга}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi(m-\frac12)}\left(\frac{m-\frac12}{e}\right)^{m-\frac12}}{\sqrt{2\pi(m-1)}\left(\frac{m-1}{e}\right)^{m-1}\cdot\sqrt m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{m\to\infty}\frac{\cancel{\sqrt{m-\frac12}}\,(m-\frac12)^m\,\cancel{(m-\frac12)^{-\frac12}}\;e^{\frac12-\cancel{m}}}{\sqrt m\sqrt{m-1}\,(m-1)^m\,(m-1)^{-1}\;e^{1-\cancel{m}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m-1}{\sqrt{m-1}\sqrt m}\cdot\left(\frac{m-1+\frac12}{m-1}\right)^m e^{-\frac12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{m\to\infty}\left(\sqrt{\frac{(m-1)^2}{m(m-1)}}\cdot\underbrace{\sqrt{\left(1+\frac{1}{2m}\right)^{2m}}}_{e^{1/2}}e^{-\frac12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\lim_{m\to\infty}\sqrt{\frac{(m-1)^2}{m(m-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}.$$ Таким образом,

$\forall x$ – т. непр-ти F_N: $F_t(x) \to F_N(x)$, т.е. по опр. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$, ч.т.д.

$\boxed{5}$ $X_1,\dots,X_n \sim N(a,\Sigma)$, Σ известно. Построить точную довер. обл. для a ур-ня доверия α.

Заметим, что одномерная задача была разобрана на лекции. По Th о разложении гауссового вектора, можем перейти к решению m покомпонентных задач:

$$\begin{array}{ccccccl}
X_1 & \dots & X_n & \sim & N(a, \Sigma) & , & \text{довер. обл. } -?\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\begin{pmatrix}X_{11}\\X_{21}\\\vdots\\X_{m1}\end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix}X_{1n}\\X_{2n}\\\vdots\\X_{mn}\end{pmatrix} & \begin{matrix}\sim\\\sim\\ \\\sim\end{matrix} & \begin{matrix}N(a_1,\sigma_1)\\N(a_2,\sigma_2)\\\vdots\\N(a_m,\sigma_m)\end{matrix} & \begin{matrix},\\,\\ \\,\end{matrix} & \left.\begin{matrix}a_1 \in \left(\overline{row_1} \pm \frac{1}{\sqrt n}\sigma_1 q_{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\\ a_2 \in \left(\overline{row_2} \pm \frac{1}{\sqrt n}\sigma_2 q_{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\\ \vdots \\ a_m \in \left(\overline{row_m} \pm \frac{1}{\sqrt n}\sigma_m q_{\frac{1+\alpha}{2}}\right)\end{matrix}\right\} a \in \left(\bar X \pm \frac{\Sigma}{\sqrt n}q_{\frac{1+\alpha}{2}}\right)
\end{array}$$

имеем в виду вектор (diag)

$\boxed{6}$ $X_1,\dots,X_n \sim N(a,\sigma^2)$. Построить довер. обл. ур-ня доверия α для параметра $\theta = (a,\sigma)^T$.

$\frac{\sqrt n(\bar X - a)}{\sigma} \sim N(0,1)$, причем эта случайная распределена не зав. от θ образом. Тогда

$\alpha = P\left(q_{\frac{1-\alpha}{2}} < \frac{\sqrt n(\bar X - a)}{\sigma} < q_{\frac{1+\alpha}{2}}\right)$. Распишем систему:

$$\begin{cases} q_{\frac{1-\alpha}{2}}\sigma < \sqrt n(\bar X - a)\\ q_{\frac{1+\alpha}{2}}\sigma > \sqrt n(\bar X - a)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{q_{\frac{1-\alpha}{2}}}{\sqrt n}\sigma < \bar X\\ a + \frac{q_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt n}\sigma > \bar X\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\theta[0] + A\theta[1] < C\\ \theta[0] + B\theta[1] > D\end{cases}$$ (угол, огр. двумя прямыми на м-ти)

В матричном виде: $\begin{pmatrix}1 & A\\ -1 & -B\end{pmatrix}\theta < \begin{pmatrix}C\\-D\end{pmatrix}$ (покомпонентно)

$\boxed{7}$ $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{U}[0,\theta]$. а) показать, что $2\bar{X}$ – А.Н.О. θ, построить довер. инт. заданного ур-ня доверия α; б) найти $\delta>0$ и P_θ (не const): $n^\delta (X_{(n)} - \theta) \xrightarrow{d_\theta} P_\theta$ при $n\to\infty$; в) построить ас. дов. инт. ур-ня дов. α на основе сх-ти из (б)

а) Для $\mathcal{U}[0,\theta]$ известно: $\mu = \frac{\theta}{2}$, $\sigma^2 = \frac{\theta^2}{12}$. По ЦПТ: $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1) \Rightarrow \bar{X} \to N\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta^2}{12n}\right) \Rightarrow 2\bar{X} \to N\left(\theta, \frac{\theta^2}{3n}\right)$, т.е. $2\bar{X}$ – а.н.о. θ с дисперсией $\frac{\theta^2}{3n}$. Построим довер. интервал: $2\bar{X} \pm q_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\theta^2}{3n}} \xrightarrow{\hat{\theta} = 2\bar{X}} 2\bar{X} \pm q_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{\frac{4\bar{X}^2}{3n}} = 2\bar{X}\left(1 \pm \frac{q_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{3n}}\right)$. Ответ: $\left(2\bar{X} - 2\bar{X}\frac{q_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{3n}},\ 2\bar{X} + 2\bar{X}\frac{q_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{3n}}\right)$

б) $F_{X_{(n)}}(t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n$ – доказывалось в ST2 (по крайней мере, в моем решении). $X_{(n)} \to \theta$, поэтому сделаем грубую оценку: $X_{(n)} \approx \theta - \frac{\theta}{n}$. Тогда $X_{(n)} - \theta \approx -\frac{\theta}{n}$ подставим в выражение из условия: $n^\delta \cdot \left(-\frac{\theta}{n}\right) = -\theta n^{\delta-1}$. Сходится (не к расп. const) только при $\delta - 1 < 0$, т.е. $\delta < 1$. Ответ: $\delta < 1$

в)

$\boxed{8}$ Формулировки

а) Вер. распределение – закон, связывающий значения СВ и вероятности их появления. Задается, например, функцией распределения $F_X(t) = P\{\omega : X(\omega) \le t\}$

Статистика – измеримая числовая функция от выборки. Например, $\bar{X}$, $X_{(n)}$, ...

Оценка – частный случай статистики, используемой для оценивания какого-либо параметра распределения. Собственно, найти значения параметра – основная задача статистической науки, поэтому оценки так важны.

а.н.о. – $\hat{\theta}_n$ наз. а.н.о. параметра θ с асимпт. дисперсией Σ, если $\forall \theta \in \Theta$ $(\hat{\theta}_n - \theta)\sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0, \Sigma)$ при $n \to \infty$

Асимпт. дов. инт. – пара статистик $T_1^{(n)}$, $T_2^{(n)}$, таких что $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\theta \in (T_1^{(n)}, T_2^{(n)})\} = \alpha$ $\forall \theta$, где α – уровень доверия. Т.е. в пределе интервал покроет параметр θ с данной вероятностью

Сх-ть по расп.: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x$ где $F_\xi(x)$ – непрерывна: $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ при $n\to\infty$

б) ЦПТ: $\exists X_i$ – послед-ть НОРСВ с конечными EX_i, $DX_i = \sigma^2$. Тогда $\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$, $n\to\infty$.