Круглов А.И. Б05-202 ST. 1

[1] $E|\xi|^n - ?$

a) $\xi \sim Laplace$, $p_\xi(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}$

$$E|\xi|^n = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n \cdot \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} dx = 2\int_0^{+\infty} x^n \cdot \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} dx = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x}{\theta}} d\left(\frac{x}{\theta}\right) \overset{x=t\theta}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty} t^n \theta^n e^{-t} dt =$$

$$= \theta^n \cdot \int_0^{+\infty} t^{(n+1)-1} e^{-t} dt = \theta^n \cdot \Gamma(n+1)$$

b) $\xi \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, $p_\xi(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x}$, $x > 0$.

$$E|\xi|^n = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n \cdot \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x} dx = \int_0^{+\infty} x^n \cdot \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} x^{n+\beta-1} e^{-\alpha x} dx \overset{\alpha x = t}{=\!=\!=}$$

$$= \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+\beta-1}}{\alpha^{n+\beta-1}} e^{-t} d\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^n \Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} t^{(n+\beta)-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(n+\beta)}{\alpha^n \Gamma(\beta)}$$

[2] $E|\xi|^n < +\infty$. Док-ть: $\forall k < n$ $E|\xi|^k < +\infty$

$$E|\xi|^n = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n \cdot p_\xi(x) dx < +\infty, \quad E|\xi|^k = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \cdot p_\xi(x) dx = \underbrace{\int_{|x|\geq 1} |x|^k p_\xi(x) dx}_{a} + \underbrace{\int_{|x|<1} |x|^k p_\xi(x) dx}_{b}$$

a: для $\forall x \in (-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$ $k < n \Rightarrow |x|^k \leq |x|^n$

Значит, $\int_{|x|\geq 1} |x|^k p_\xi(x) dx \leq \int_{|x|\geq 1} |x|^n p_\xi(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n p_\xi(x) dx < +\infty$

b: интеграл по конечной области $x \in (-1, 1)$, где $|x|^k$ ограничено (<1) $\Rightarrow I_b < +\infty$

Получается, $E|\xi|^k = I_a + I_b < +\infty$ $\forall k < n$, ч.т.д.

[3] $X_1, \ldots, X_n$ - выборка, $F(x)$ - ф-ция распр., $p(x)$ - плотность. Распр. k-й порядковой статистики $X_{(k)}$ - ? Для выборки из $U[0,1]$ $EX_{(k)}$, $DX_{(k)}$ - ? Зависимость E, D от k?

$$f_{X_{(k)}}(x) = \binom{n}{k} \cdot \underbrace{P(X_1 \leq x) \cdot \ldots \cdot P(X_{k-1} \leq x)}_{\text{первые k-1 СВ меньше k-ой пор. стат.}} \cdot \underbrace{(1 - P(X_{k+1} \leq x)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(X_n \leq x))}_{\text{остальные - больше}} \cdot p(x) =$$

$= \binom{n}{k} \cdot F^{k-1}(x) \cdot (1 - F(x))^{n-k} \cdot p(x)$. Для выборки из $U[0,1]$ известно, что $F(x) = x$ для $0 \leq x \leq 1$, $p(x) = 1$ для $0 \leq x \leq 1$, и тогда $f_{X_{(k)}} = \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$. Т.е. $X_{(k)} \sim Beta(k, n-k+1)$, а для него E, D известны: $EX_{(k)} = \frac{k}{n+1}$, $DX_{(k)} = \frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)}$.

Видно, что $EX_{(k)}$ пропорционально k, т.е. чем больше k, тем больше и E. Например, при $k=1$ $EX_{(k)} = \frac{1}{n+1}$ (min), а при $k=n$ $EX_{(k)} = \frac{n}{n+1}$ (max)

У дисперсии зависимость от k квадратичная за счет числителя $k(n-k+1) = -k^2 + k(n+1)$, исследуем его: $\text{числ.}'_k = -2k + (n+1) = 0 \to k = \frac{n+1}{2}$. В этой точке достигается max: $DX_{(k)} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 / (n+1)^2(n+2) = \frac{1}{4(n+2)}$. При $k=1$ и $k=n$ дисперсия min: $DX_{(k)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$

[4] группа из n чел., вер-ть найти заболевание у чел. $= p$; выгодные p - ?

Индивидуальное тестирование: тестируем всех, $E(\#)_{\text{инд.}} = n$

↘

Групповое тестирование: рассмотрим для простоты только при четных n, будет $\frac{n}{2}$ пар.

Тогда $$E_{\text{пары}}(\#) = \underbrace{(1-p)^2\cdot 1}_{\substack{\text{оба здоровы,}\\ \text{1 тест}}} + \underbrace{(1-p)p\cdot 2}_{\substack{\text{есть антитела,}\\ \text{но 1-й здоров,}\\ \text{2 теста}}} + \underbrace{p(1-p)\cdot 3}_{\substack{\text{1-й болен,}\\ \text{2-го тоже тестируем,}\\ \text{3 теста}}} + \underbrace{p^2\cdot 3}_{\substack{\text{оба больны,}\\ \text{3 теста}}} = -3p^2+5p+1$$

кол-во пар

$$E_{\text{групп}}(\#) = \frac{n}{2}\cdot E_{\text{пары}}(\#) = \frac{n}{2}(1+5p-3p^2)$$

Сравним стратегии: $\frac{n}{2}(1+5p-3p^2) < n$ при $3p^2-5p+1>0$, корни: $p_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$, но только 1 корень $\in[0,1]$ $\Rightarrow$ $p<\frac{5-\sqrt{13}}{6}$, чтобы стратегия была экономичнее

$\boxed{5}$ $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послед-ти СВ, для $\forall n\geq 1$ ξ_n и η_n независ., $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$, $\eta_n\xrightarrow{P}\eta$.

ξ,η – независимы?

$\forall n\geq 1$ ξ_n и η_n независимы $\Rightarrow$ $\varphi_{\xi_n+\eta_n}(t)=\varphi_{\xi_n}(t)\cdot\varphi_{\eta_n}(t)$. Действительно, достаточно воспользоваться определением хар. ф-ции и матожидания: $\varphi_{\xi_n+\eta_n}(t) =$

$= Ee^{it(\xi_n+\eta_n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{itx}e^{ity}\,p_{\xi_n}(x)\,p_{\eta_n}(y)\,dx\,dy \overset{\text{Фубини}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}p_{\xi_n}(x)\,dx\cdot\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ity}p_{\eta_n}(y)\,dy =$

$= Ee^{it\xi_n}\cdot Ee^{it\eta_n} = \varphi_{\xi_n}(t)\cdot\varphi_{\eta_n}(t)$. В этом выражении перейдем к пределу:

$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{\xi_n+\eta_n}(t) = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{\xi_n}(t)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{\eta_n}(t) = \varphi_\xi(t)\cdot\varphi_\eta(t)$ $\Rightarrow$ ξ,η – независимы

$\boxed{6}$ $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – НОРСВ, невырожд. и с конеч. 2-м моментом; $E\xi_i=a$, $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Док-ть, что у

$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n}-a\right)$ есть lim по расп., но нет lim по вер-ти.

Заметим: $\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n}-a\right)=\frac{S_n-an}{\sqrt{n}}$, причем выполнены условия ЦПТ $\Rightarrow$ $\frac{S_n-an}{\sqrt{n}}\to$

$\to N(0,\sigma^2)$ по расп. при $n\to\infty$, т.е. $\forall x$: F непр. в x $F_{\text{наша}}\to F_{\text{норм}}$ при $n\to\infty$

Покажем, что нет lim по вер-ти, с помощью отрицания определения: $\exists\,\varepsilon>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}(P($

$|\eta_n(x)-\eta(x)|>\varepsilon)\neq 0$ (где $\eta_n=\frac{S_n-an}{\sqrt{n}}$, а η – ее предполагаемый предел). Это

следует из выведенной ранее сх-ти по расп. к $N(0,\sigma^2)$ $\Rightarrow$ lim по вер-ти нет