Круглов А.И. Б05-202 ST II

$\boxed{1}$ $Y = X\theta + \varepsilon$, $Y \in \mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $\theta \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$; ОМП $\hat\theta, \hat\sigma^2$ -? Несмещенность?

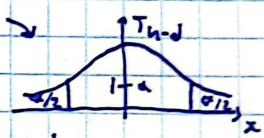
$Y = X\theta + \varepsilon$, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n) \Rightarrow Y \sim N(X\theta, \sigma^2 I_n)$, $f_Y(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \cdot$
$\cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\|Y - X\theta\|^2\right)$. Ф-ция правдоподобия: $L(\theta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f_Y$, $\ell(\theta, \sigma^2) = \ln L(\theta, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) -$
$- \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\|Y - X\theta\|^2$. Тогда $\frac{\partial}{\partial\theta}\ell = -\frac{1}{\sigma^2}(Y - X\theta)^T X = 0 \Rightarrow X^T Y = X^T X\theta \Rightarrow \hat\theta = (X^T X)^{-1} X^T Y$,
$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ell = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\|Y - X\theta\|^2 = 0 \Rightarrow \hat\sigma^2 = \frac{1}{n}\|Y - X\hat\theta\|^2 = \frac{1}{n}\|Y - X(X^T X)^{-1}X^T Y\|^2$

Несмещенность: $E(\hat\theta) = E((X^T X)^{-1} X^T Y) = (X^T X)^{-1} X^T E(Y) = (X^T X)^{-1} X^T X\theta = \theta \Rightarrow \hat\theta$ - несмещенная.

На лекции доказали, что несмещенной оценкой $\hat\sigma^2$ является $\frac{1}{n-d}\|Y - X\hat\theta\|^2$, т.е. наша $\frac{1}{n}\|Y - X\hat\theta\|^2$ - смещ.

$\boxed{2}$ гаусс. лин. модель, $H_0: \theta_1 = \theta_2$; T-критерий -? Обозначим $(X^T X)^{-1}$ как M (пригодится ниже).

Утв. с лекции: $\forall c \in \mathbb{R}^d$ $\frac{c^T(\hat\theta - \theta)}{\hat\sigma\sqrt{c^T(X^T X)^{-1}c}} \sim T_{n-d}$. Возьмем $c^T = (1, -1, 0, \dots, 0)$, тогда $\frac{c^T(\hat\theta - \theta)}{\hat\sigma\sqrt{c^T(X^T X)^{-1}c}} =$
$= \frac{\hat\theta_1 - \theta_1 - \hat\theta_2 + \theta_2}{\hat\sigma\sqrt{M_{11} - M_{12} - M_{21} + M_{22}}} = \frac{(\hat\theta_1 - \hat\theta_2) - (\theta_1 - \theta_2)}{\hat\sigma\sqrt{M_{11} - M_{12} - M_{21} + M_{22}}} \sim T_{n-d}$. Расп.-е и квантили:



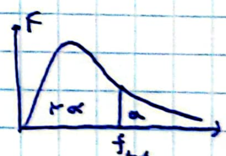
$P\left(\left|\frac{(\hat\theta_1 - \hat\theta_2) - (\theta_1 - \theta_2)}{\hat\sigma\sqrt{M_{11} - M_{12} - M_{21} + M_{22}}}\right| > t_{n-d, 1-\alpha/2}\right) = \alpha \xrightarrow{H_0: \theta_1 = \theta_2} P\left(\left|\frac{\hat\theta_1 - \hat\theta_2}{\hat\sigma\sqrt{M_{11} - M_{12} - M_{21} + M_{22}}}\right| > t_{n-d, 1-\alpha/2}\right) = \alpha$

T-критерий: $S = \left\{\left|\frac{(\hat\theta_1 - \hat\theta_2)}{\hat\sigma\sqrt{M_{11} - M_{12} - M_{21} + M_{22}}}\right| > t_{n-d, 1-\alpha/2}\right\}$

$\boxed{3}$ $X = (X_1, \dots, X_n) \sim N(a_1, \sigma^2)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_m) \sim N(a_2, \sigma^2)$, $Z = (Z_1, \dots, Z_k) \sim N(a_3, \sigma^2)$, $H_0: \left(a_1 = a_2 = \frac{a_3}{2}\right)$; F-критерий?

Пусть $\xi = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - a_1)^2 \sim \chi^2_n$, $\eta = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^m (Y_j - a_2)^2 \sim \chi^2_m$, $\varphi = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=1}^k (Z_t - a_3)^2 \sim \chi^2_k$; $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \perp\!\!\!\perp \varphi$.

По утв. с лекции, $\frac{\xi/n}{\eta/m} \sim F_{n,m}$, $\frac{\xi/n}{\varphi/k} \sim F_{n,k}$, $\frac{\eta/m}{\varphi/k} \sim F_{m,k}$. Распределение ⟶



Например, пусть $G(X, Y) = \frac{\xi/n}{\eta/m}$, тогда $P(G(X, Y) > f_{n,m,1-\alpha}) = \alpha$

F-критерий: $S = \left\{\frac{m \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \hat a_3/2)^2}{n \cdot \sum_{j=1}^m (Y_j - \hat a_3/2)^2} > f_{n,m,1-\alpha}\right\} \cap \left\{\frac{k \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \hat a_3/2)^2}{n \cdot \sum_{t=1}^k (Z_t - \hat a_3)^2} > f_{n,k,1-\alpha}\right\} \cap \left\{\frac{k \cdot \sum_{j=1}^m (Y_j - \hat a_3/2)^2}{m \cdot \sum_{t=1}^k (Z_t - \hat a_3)^2} > f_{m,k,1-\alpha}\right\}$

$\boxed{4}$ гаусс. лин. модель, $H_0: \theta_j = 0$; доказать, что T-крит. и F-крит. совпадают.

На лекции вывели T-критерий: $S_T = \left\{\left|\frac{\hat\theta_j}{\hat\sigma\sqrt{(X^T X)^{-1}_{jj}}}\right| > t_{n-d, 1-\alpha/2}\right\}$ (ур. знач. α)

Выведем F-критерий: согл. лекции, $F(X, Y) = \frac{(n-d)\|X\hat\theta - X\theta\|^2}{d\|Y - X\hat\theta\|^2} \sim F_{d, n-d}$, $P(F(X, Y) > f_{d, n-d, 1-\alpha}) = \alpha$

$\Rightarrow S_F = \left\{\frac{(n-d)\|X\hat\theta - X\theta\|^2}{d\|Y - X\hat\theta\|^2} > f_{d, n-d, 1-\alpha}\right\}$. Осталось показать эквивалентность S_T и S_F.