$\hat{\theta}$ - несмещенная оценка θ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $E_\theta \hat{\theta} = \theta \quad \forall \theta \in \Theta$ (1)

$\hat{\theta}$ - состоятельная оценка θ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\hat{\theta} \xrightarrow{P_\theta} \theta$ при $n \to \infty \quad \forall \theta \in \Theta$ (2)

$\hat{\theta}$ - сильно сост. оценка θ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\hat{\theta} \xrightarrow{п.н.} \theta$ при $n \to \infty \quad \forall \theta \in \Theta$ (3)

$\boxed{1\text{б}}$ (Дорешка, "Неправильно переписал усл. $2^{го}$ пункта (−3.0)") Почему-то поставил 2 перед $\bar{X}$))

$\hat{\Theta} = \bar{X} + \frac{X_{(n)}}{2}$. Проверим (1): $E\hat{\Theta} = E(\bar{X}) + \frac{1}{2}E(X_{(n)}) \overset{1.a)}{=} \frac{1}{2}\Theta + \frac{1}{2}E(X_{(n)}) \overset{\text{семинар}}{=} \frac{1}{2}\Theta + \frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\Theta = \frac{2n+1}{2n+2}\Theta \neq \Theta$,

но $\to \Theta$ при $n \to \infty$ $\Rightarrow$ <u>смещенная</u>, но явл. несмещенной в пределе при $n \to \infty$. Проверим

(2): уже доказано, что $\bar{X} \xrightarrow{P} \Theta/2$ при $n \to \infty$ $\forall \Theta$ (в 1.а)), плюс в ориг. решении 1.б вывел

для $2^{го}$ слагаемого: $\frac{1}{2}X_{(n)} \xrightarrow{P} \Theta/2$ при $n \to \infty$ $\forall\Theta$. Тогда $\hat{\Theta} = \bar{x} + \frac{X_{(n)}}{2} \xrightarrow{P} \Theta$ при $n \to \infty$ $\forall\Theta$ $\Rightarrow$

<u>состоятельная</u>. Проверим (3): уже доказано, что $\bar{X} \xrightarrow{п.н.} \frac{\Theta}{2}$ (в 1.а)), в орig. решении 1.б

вывел для $2^{го}$ слагаемого: $X_{(n)} \xrightarrow{п.н.} \frac{\Theta}{2}$. Тогда $\hat{\Theta} \xrightarrow{п.н.} \Theta$ при $n \to \infty$ $\forall\Theta$ $\Rightarrow$ <u>сильно сост.</u>

(Ансевшка, "не указаны названия теорем, которые были использованы (-2.0))

$\boxed{2}$ $\exists\ \hat{\theta}_n(X)$ - а.н.о. параметра θ с а.д. $\sigma^2(\theta)$. Док-ть: $\hat{\theta}_n(X)$ - состоятельная оценка θ

Вспомним определения: $\hat{\theta}_n$ - а.н.о. θ с а.д. $\sigma^2(\theta)$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta))$, (определение а.н.о. с а.д. σ^2)

$\hat{\theta}_n(X)$ - сост. оценка θ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ при $n \to \infty$ $\forall \theta$. (определение сост. оценки) По сути, нужно доказать, что

из $(\xrightarrow{d})$ следует $(\xrightarrow{P})$, т.е. сх-ть по расп. приходит к константе (св-во сх-ти по распределению к константе): $\hat{\theta}_n(X) - \theta = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \to$

$\xrightarrow[n\to\infty]{d_\theta \text{ ЦПТ}} 0 \cdot N(0, \sigma^2(\theta)) = 0$ (const), а значит $\hat{\theta}_n - \theta \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} 0$, т.е. $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} \theta$ $\forall \theta$.

Получили, $\hat{\theta}_n(X)$ - сост. оценка θ, ч.т.д.

$\boxed{3}$ (доперешка, много комментариев, суммарно снято -8.5)

Дана выборка $\{X_i\} \sim Exp(\theta)$; для какой $\tau(\theta)$ $\bar{X}\ln\bar{X}$ – А.Н.О.? Ее А.Д.?

Вспомним, что мы знаем для $X_i \sim Exp(\theta)$: $EX_i = \frac{1}{\theta}$, $DX_i = \frac{1}{\theta^2}$; $\theta > 0$.

ЦПТ: $\sqrt{n}(\bar{X} - EX) = \sqrt{n}(\bar{X} - \frac{1}{\theta}) \xrightarrow{d} N(0, DX) = N(0, \frac{1}{\theta^2}) \Rightarrow \bar{X}$ – а.н.о. $\frac{1}{\theta}$ с А.Д. $\frac{1}{\theta^2}$

Хотим применить дельта-метод. Во-первых, применить можем: $\bar{X}$ – а.н.о. $\frac{1}{\theta}$, $\tau = x\ln x$ – непр. дифф на R_{++}. Тогда $\bar{X}\ln\bar{X}$ – А.Н.О. $-\frac{\ln\theta}{\theta}$ с А.Д. $\frac{\partial}{\partial\theta}\tau(\frac{1}{\theta})\cdot\frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\tau(\frac{1}{\theta}) = \frac{(1-\ln\theta)^2}{\theta^2}$

$\Rightarrow \bar{X}\ln\bar{X}$ – А.Н.О. $-\frac{\ln\theta}{\theta}$ с А.Д. $\frac{(1-\ln\theta)^2}{\theta^2}$

$\boxed{5}$ (Перешка, "не посчитана А.Д. (-5,0)")

$X_1, \dots, X_n \sim P$, $DX_1 = \sigma^2 < +\infty$, σ неизвестно. Док-ть: первые 4 момента P конечны $\overset{?}{\Rightarrow}$ S^2 - А.Н.О. σ^2, найти: А.Д., ас. дов. инт. Вальда для σ^2.

На семинаре рассказали более правильное решение, распишу, как я его понял.

Рассмотрим $V = \begin{pmatrix} X \\ X^2 \end{pmatrix}$. Для $\bar V$ применима ЦПТ: $\sqrt{n}\begin{pmatrix} \bar X - EX \\ \overline{X^2} - EX^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N\left(0, \overbrace{\begin{pmatrix} EX^2 - (EX)^2 & EX^3 - EX\,EX^2 \\ EX^3 - EX\,EX^2 & EX^4 - (EX^2)^2 \end{pmatrix}}^{\Sigma}\right)$

Обозначим разность компонент V как $g(V) = V_2 - V_1^2$, $\nabla g = \begin{pmatrix} -2X \\ 1 \end{pmatrix}$. Хотим применить дельта-метод.

Во-первых, применить можем: $\bar V$ - А.Н.О., $g \in C^1$. Во-вторых, А.Д. $= \nabla g^T \Sigma \nabla g = \ldots = -4(EX)^4 - (EX^2)^2 + 8(EX)^2 EX^2 - 4\,EX\,EX^3 + EX^4$. Интервал Вальда построим, получив нормальное стандартное распределение: $\sqrt{n}\frac{\sigma^2 - \hat\sigma^2}{\sqrt{А.Д.}} \xrightarrow{d} N(0,1)$, т.е. $\sqrt{n}\frac{\sigma^2 - \hat\sigma^2}{\sqrt{А.Д.}} \in \left(q_{\frac{1-\alpha}{2}}, q_{\frac{1+\alpha}{2}}\right) \Rightarrow \sigma^2 \in \left(q_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{А.Д.}{n}} + DX,\ q_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{А.Д.}{n}} + DX\right)$, где А.Д. приведена выше, а q - квантили $N(0,1)$