Круглов А.И. БО5-202 ST 13

1 $X_1,\dots,X_n \sim Bin(m,\theta)$, m известно. $I_X(\theta)$ — ? $X_1,\dots,X_n\sim Exp(\theta)$. $i(\theta)$ — ?

а) $L(\theta)=\prod_{i=1}^n P(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^n\binom{m}{x_i}\theta^{x_i}(1-\theta)^{m-x_i}$, $\ell(\theta)=\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^n\ln\binom{m}{x_i}+\sum_{i=1}^n x_i\ln\theta+\sum_{i=1}^n(m-x_i)\ln(1-\theta)=$

$=\sum_{i=1}^n\ln\binom{m}{x_i}+\ln\theta\cdot\sum_{i=1}^n x_i+\ln(1-\theta)\cdot\left(nm-\sum_{i=1}^n x_i\right)$, $\ell'_\theta=\frac{1}{\theta}\cdot\sum_{i=1}^n x_i-\frac{1}{1-\theta}\cdot\left(nm-\sum_{i=1}^n x_i\right)$, $\ell''_\theta=-\frac{1}{\theta^2}\cdot$

$\cdot\sum_{i=1}^n x_i-\frac{1}{(1-\theta)^2}\cdot\left(nm-\sum_{i=1}^n x_i\right)$, $I_X(\theta)=-E(\ell''_\theta)=\frac{1}{\theta^2}\cdot E\sum_{i=1}^n x_i+\frac{1}{(1-\theta)^2}\cdot E\left(nm-\sum_{i=1}^n x_i\right)=\frac{1}{\theta^2}\cdot\sum_{i=1}^n Ex_i+$

$+\frac{1}{(1-\theta)^2}\cdot\left(nm-\sum_{i=1}^n Ex_i\right)=\frac{1}{\theta^2}\cdot n\cdot m\theta+\frac{1}{(1-\theta)^2}\cdot(nm-n\cdot m\theta)=nm\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{1-\theta}\right)=\boxed{\frac{nm}{\theta(1-\theta)}}$

б) Сначала вычислим $I_X(\theta)$, а потом применим пункт теоремы с лекции: $I_X(\theta)=n\cdot i(\theta)$. Тогда

$L(\theta)=\prod_{i=1}^n p(x_i)=\prod_{i=1}^n\theta e^{-\theta x_i}I\{x_i>0\}=\theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^n x_i}I\{x_i>0\ \forall i=\overline{1,n}\}$, $\ell(\theta)=\ln L(\theta)=n\ln\theta-\theta\sum_{i=1}^n x_i$,

$\ell'_\theta=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^n x_i$, $\ell''_\theta=-\frac{n}{\theta^2}$, $I_X(\theta)=-E(\ell''_\theta)=E\frac{n}{\theta^2}=\frac{n}{\theta^2}$, $i(\theta)=\frac{1}{n}I_X(\theta)=\boxed{\frac{1}{\theta^2}}$

2 посчитать $KL(P,Q)$: а) $P=U(0,1)$, $Q=U(0,\theta)$, $\theta>0$ б) $P=Exp(\theta)$, $Q=Exp(\lambda)$ в) $P=Pois(\theta)$, $Q=Pois(\lambda)$

для дискретных: $KL(P,Q)=\sum_{x\in X}P(x)\ln\frac{P(x)}{Q(x)}$, для непрерывных: $KL(P,Q)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\ln\frac{p(x)}{q(x)}dx$

а) $KL(U(0,1),U(0,\theta))=\int_{-\infty}^{+\infty}I\{x\in(0,1)\}\cdot\ln\frac{I\{x\in(0,1)\}}{\frac{1}{\theta}I\{x\in(0,\theta)\}}dx=\int_0^1\ln\frac{1}{1/\theta}dx=\int_0^1\ln\theta\,dx=\boxed{\ln\theta}$

с ростом θ увеличивается "расстояние" между распределениями $U(0,1)$ и $U(0,\theta)$

б) $KL(Exp(\theta),Exp(\lambda))=\int_{-\infty}^{+\infty}\theta e^{-\theta x}I\{x>0\}\cdot\ln\frac{\theta e^{-\theta x}I\{x>0\}}{\lambda e^{-\lambda x}I\{x>0\}}dx=\int_0^{+\infty}\theta e^{-\theta x}\cdot\left(\ln\frac{\theta}{\lambda}+(\lambda-\theta)x\right)dx=-\int_0^{+\infty}\left(\ln\frac{\theta}{\lambda}+(\lambda-\theta)x\right)de^{-\theta x}=$

$=-\left(\left(\ln\frac{\theta}{\lambda}+(\lambda-\theta)x\right)e^{-\theta x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\theta x}(\lambda-\theta)dx\right)=-\left(\cancel{\left(\ln\frac{\theta}{\lambda}-\ln\frac{\theta}{\lambda}\right)}+\int_0^{+\infty}\frac{\lambda-\theta}{\theta}d(e^{-\theta x})\right)=-\int_0^{+\infty}\frac{\lambda-\theta}{\theta}de^{-\theta x}=\frac{\theta-\lambda}{\theta}\cdot$

$\cdot e^{-\theta x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\theta-\lambda}{\theta}\cdot(0-1)=\boxed{\frac{\lambda-\theta}{\theta}}$

полученное выражение напоминает относительную разницу (погрешность) распределения с λ относительно р-я с θ

в) $KL(Pois(\theta),Pois(\lambda))=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!}\cdot\ln\left(\frac{\theta^k e^{-\theta}}{\cancel{k!}}\cdot\frac{\cancel{k!}}{\lambda^k e^{-\lambda}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!}\cdot\left(k\ln\frac{\theta}{\lambda}+(\lambda-\theta)\right)=$

$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!}(\lambda-\theta)+0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!}\cdot k\ln\frac{\theta}{\lambda}=e^{-\theta}(\lambda-\theta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!}+\theta e^{-\theta}\ln\frac{\theta}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!}=$

$=e^{-\theta}(\lambda-\theta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!}+\theta e^{-\theta}\ln\frac{\theta}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}=e^{-\theta}(\lambda-\theta)e^{\theta}+\theta e^{-\theta}\ln\frac{\theta}{\lambda}e^{\theta}=\boxed{\theta\ln\frac{\theta}{\lambda}+\lambda-\theta}$

"Расстояние" между пуассоновскими распределениями характеризуется разностью $(\lambda-\theta)$ и отношением $\left(\frac{\theta}{\lambda}\right)$ параметров

3 В модели лог. рег. построить довер. интервал для ожидаемого отклика

Лог. рег.: $Y_i\sim Bern(p_\theta(x_i))$, где $p_\theta(x_i)=P_{x_i}(Y_i=1)$ — ожидаемый отклик (μ). Оценка отклика: $\hat{y}=$ (σ) $sigmoid(x^T\hat{\theta})$. В лог. рег. $I(\theta)=X^T\cdot diag\left[\sigma(x_i^T\theta)(1-\sigma(x_i^T\theta))\right]\cdot X$. Тогда $\mu\in\sigma\left([x_0^T\hat{\theta}\pm\delta]\right)$,

где $\delta=z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{x_0^T I^{-1}(\hat{\theta})x_0}$

получен из асимпт. нормальности логитов

ДИ: $\left[\sigma\left(x_0^T\hat{\theta}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{x_0^T I^{-1}(\hat{\theta})x_0}\right),\ \sigma\left(x_0^T\hat{\theta}+z_{1+\frac{\alpha}{2}}\sqrt{x_0^T I^{-1}(\hat{\theta})x_0}\right)\right]$, где $I(\hat{\theta})=X^T\cdot diag\left[\sigma(x_i^T\hat{\theta})\cdot(1-\sigma(x_i^T\hat{\theta}))\right]\cdot X$