Круглов А.И. 605-204 TS2

$\boxed{1}$ $AR(2)$: $y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$. Док-ть: $|\varphi_2|<1$, $\varphi_1+\varphi_2<1$, $\varphi_2-\varphi_1<1$ необх. для стац. y_t в шир. смысле.

На лекции была теорема: $AR(p)$ стац. $\Leftrightarrow$ все компл. корни $a(z) = 1-\varphi_1 z - \ldots - \varphi_p z^p = 0$ лежат вне ед. круга.

В частности, все (оба) корня $\varphi_2 z^2 + \varphi_1 z - 1 = 0$ лежат вне ед. круга, т.е. $|z_{1,2}|>1$. Найдем корни:

$z_{1,2} = \dfrac{-\varphi_1 \pm \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}$, причем $z_1^* = z_2$ (симметр. отн. действ. оси). $|z_1|^2 = |z_2|^2 = z_1^* z_2 = \dfrac{-1}{\varphi_2}$ (по теореме Виета), $|z_{1,2}|>1 \Rightarrow \dfrac{-1}{\varphi_2} > 1 \Rightarrow 0 > \dfrac{\varphi_2+1}{\varphi_2} \Rightarrow \left[\begin{array}{lll} \varphi_2 < 1 & и\ \varphi_2 > 0 & (\varnothing) \\ \varphi_2 > -1 & и\ \varphi_2 < 0 & (\varphi_2 \in (-1,0)) \end{array}\right. \Rightarrow \varphi_2 \in (-1,0) \Rightarrow \boxed{|\varphi_2|<1}$

ослабим

Изучим корни подробнее: $|z_{1,2}| = \dfrac{|-\varphi_1 \pm \sqrt{\varphi_1^2+4\varphi_2}|}{|2\varphi_2|} > 1 \Rightarrow \left|\sqrt{\varphi_1^2+4\varphi_2} \pm \varphi_1\right| > 2|\varphi_2|$.

Рассмотрим $D := \varphi_1^2 + 4\varphi_2$, пусть $D<0$. Тогда $D<0$ и $\varphi_2<0 \Rightarrow |z_{1,2}|^2 = (\sqrt{D}-\varphi_1)(\sqrt{D}+\varphi_1) = \varphi_1^2 + 4\varphi_2 - \varphi_1^2 > 4\varphi_2^2$, $0 > \varphi_2 > \varphi_2^2$ ↯ $\Rightarrow D \geq 0$. Раскроем модуль:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sqrt{D}-\varphi_1 > 2|\varphi_2| \\ -\sqrt{D}+\varphi_1 > 2|\varphi_2| \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{D}+\varphi_1 > 2|\varphi_2| \\ -\sqrt{D}-\varphi_1 > 2|\varphi_2| \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -\sqrt{D}+\varphi_1 > 2|\varphi_2| \\ \sqrt{D}+\varphi_1 > 2|\varphi_2| \end{array}\right.$$

$\varphi_1>0$: $D > 4\varphi_2^2 + 4|\varphi_2||\varphi_1| + \varphi_1^2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 > \varphi_2 + \frac{\varphi_2}{|\varphi_2|}\varphi_1 \\ 1 > \varphi_2 - \frac{\varphi_2}{|\varphi_2|}\varphi_1 \end{array}\right.$

$\varphi_1<0$: $D > 4\varphi_2^2 - 4|\varphi_2||\varphi_1| + \varphi_1^2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 > \varphi_2 - \frac{\varphi_2}{|\varphi_2|}\varphi_1 \\ 1 < \varphi_2 + \frac{\varphi_2}{|\varphi_2|}\varphi_1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_1+\varphi_2<1}$, $\boxed{\varphi_2-\varphi_1<1}$

$\boxed{2}$ Явл. $(y_t, t\in\mathbb{Z})$ – стац. в шир. смысле? $ARIMA(p,d,q)$ – ? Если стац., $MA(\infty)$ – ?

а) $y_t = 1 + \frac{1}{2}y_{t-1} - \frac{1}{2}y_{t-2} + \frac{1}{4}y_{t-3} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$ (будем рассматривать $y_t - 1$, обозначая так же y_t)

$\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}L+\frac{1}{2}L^2-\frac{1}{4}L^3\right)}_{\varphi(L),\ p=3} y_t = \underbrace{(1-L+L^2)}_{\Theta(L),\ q=2}\varepsilon_t \Rightarrow 1-\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{2}\varphi^2-\frac{1}{4}\varphi^3 = 0$, $\varphi \in \{2, \pm\sqrt{2}i\}$; $1-\theta+\theta^2=0$, $\theta \in \{(1\pm\sqrt{3}i)/2\}$; $\psi_{ij} = \varphi_i\theta_j$

$\Rightarrow |\psi_{ij}| \geq |\theta_i|\cdot|\varphi_2| = \sqrt{2} > 1$ (все корни вне ед. круга). Значит, стац. в шир. смысле доказана ✓ $d=0$

$y_t = 1 + \varphi^{-1}(L)\,\Theta(L)\,\varepsilon_t = 1 + \left(1-\frac{1}{2}L+\frac{1}{4}L^2+\frac{5}{8}L^3+O(L^3)\right)\varepsilon_t \Rightarrow ARIMA(3,0,2)$

(посчитано в wolfram по тейлору)

б) $y_t = 2 + y_{t-1} - \frac{1}{2}y_{t-2} + \frac{1}{2}y_{t-3} + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$ (тоже рассмотрим $y_t := y_t - 2$)

$\underbrace{\left(1-L+\frac{1}{2}L^2-\frac{1}{2}L^3\right)}_{\varphi(L),\ p=3} y_t = \underbrace{(1-2L+L^2)}_{\Theta(L),\ q=2}\varepsilon_t \Rightarrow 1-\varphi+\frac{1}{2}\varphi^2-\frac{1}{2}\varphi^3=0$, $\varphi\in\{1,\pm\sqrt{2}i\}$; $1-2\theta+\theta^2=0$, $\theta\in\{\pm1\}$; $\psi_{ij} = \varphi_i\theta_j$. Значит: $|\varphi_1\theta|=1$ (в ед. круге)

Значит, нет стац. в шир. смысле. Дифференцируем 1 раз: $y'_t = y_t - y_{t-1} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{2}L^2-\frac{1}{2}L^3\right)y_t = (1-2L+L^2)\varepsilon_t \Rightarrow$

$1+\frac{1}{2}\varphi^2-\frac{1}{2}\varphi^3=0$, $\varphi>0$ (wolfram); $1-2\theta+\theta^2$ –‖–; $\psi_{ij}=\varphi_i\theta_j \Rightarrow |\psi_{ij}|>1$ (все корни вне ед. круга) $\Rightarrow$ стац. появилась ✓ $d=1$

$y_t = 2 + \varphi^{-1}(L)\,\Theta(L)\,\varepsilon_t = \left(1-2L+\frac{1}{2}L^2+\frac{3}{2}L^3+O(L^3)\right)\varepsilon_t \Rightarrow ARIMA(3,1,2)$

(тейлор посчитан в wolfram)

в) $y_t = -1 - y_{t-2} - \frac{1}{4}y_{t-4} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-3}$ (тоже рассмотрим $y_t := y_t + 1$)

$\underbrace{\left(1+L^2+\frac{1}{4}L^4\right)}_{\varphi(L),\ p=4} y_t = \underbrace{(1-L^3)}_{\Theta(L),\ q=3}\varepsilon_t \Rightarrow 1+\varphi^2+\frac{1}{4}\varphi^4=0$, $\varphi\in\{\pm\sqrt{2}i\}$; $1-\theta^3=0$, $\theta\in\{\exp(\frac{2\pi}{3}ik), k\in\{0,1,2\}\}$; $\psi_{ij} = \varphi_i\theta_j \Rightarrow |\psi_{ij}| \geq |\varphi_i|\cdot|\theta_2| = \sqrt{2} > 1$ (все корни вне ед. круга)

Значит, есть стац. в шир. смысле ✓ $d=0$. $y_t = -1 + \varphi^{-1}(L)\,\Theta(L)\,\varepsilon_t = -1 + \left(1-L^2-L^3+O(L^3)\right)\varepsilon_t$, $ARIMA(4,0,3)$

(тейлор в wolfram)

$\boxed{3}$ Вр. ряд 2.с ; найти $\mathbb{E}y_t$, $\mathbb{D}y_t$.

Получили (разложением по Тейлору в Wolfram), что $y_t = -1 + \overbrace{\left(1 - L^2 - L^3 + O(L^3)\right)}^{(1-L^3)/(1+L^2+\frac{1}{4}L^4)}\varepsilon_t$. $\mathbb{E}y_t = \mathbb{E}(-1) + (\dots)\overset{0}{\cancel{\mathbb{E}\varepsilon_t}} =$

$$= -1 \; ; \quad \mathbb{D}y_t = \mathbb{E}(y_t^2) - (\mathbb{E}y_t)^2 = \mathbb{E}(y_t^2) - 1 = \mathbb{E}\left(\cancel{1} - 2\frac{1-L^3}{1+L^2+L^4/4}\varepsilon_t + \left(\frac{1-L^3}{1+L^2+L^4/4}\right)^2\varepsilon_t^2\right) - \cancel{1} =$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{16L^6 - 32L^3 + 16}{L^8 + 8L^6 + 24L^4 + 32L^2 + 16}\varepsilon_t^2 + \frac{2L^3 - 2}{1 + L^2 + L^4/4}\varepsilon_t\right) \xrightarrow[\mathbb{E}\varepsilon_t = 0]{} \mathbb{E}\left(\frac{\dots}{\dots}\varepsilon_t^2\right) \underset{\sigma_t = \sigma_{t-1} = \dots = \sigma}{=} \frac{16 + 16 - 32}{1 + 8 + 24 + 32 + 16}\sigma^2 = 0$$