Круглов А.И. Б05-202 ST 4

$\boxed{1}$ Найти ОМП параметра θ, если $X_1,\dots,X_n \sim$: а) $\Gamma(\theta,\beta)$, $\theta>0$, $\beta>0$ изв.; б) $Pois(\theta)$, $\theta>0$. Посчитать А.А., если оценка - А.Н.О. Проверить L1-L9.

а) $X_1,\dots,X_n \sim \Gamma(\theta,\beta)$, $L_X(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^\beta X_i^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\theta X_i} = \left(\frac{\theta^\beta}{\Gamma(\beta)}\right)^n \cdot \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\theta \sum_{i=1}^n X_i}$, $\ell_X(\theta) =$

$= \ln L_X(\theta) = n\beta \ln\theta - n\ln\Gamma(\beta) + (\beta-1)\sum_{i=1}^n \ln X_i - \theta\sum_{i=1}^n X_i$, $\frac{\partial}{\partial\theta}\ell_X(\theta) = \frac{n\beta}{\theta} - \sum_{i=1}^n X_i =$

$= 0 \rightarrow n\beta = \hat\theta \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \hat\theta = \beta/\overline{X}$

L1: плотность $\Gamma(\theta,\beta)$ известна (непр.) $\Rightarrow \mathcal{P} = \{P_\theta : \theta\in\Theta\}$ - доминируемое

L2: носитель мотнос.. - $\mathbb{R}_+$, не зависит от θ

L3: $X_1,\dots,X_n \sim P \in \mathcal{P}$ по постр.

L4: ограничения на θ в $\Gamma(\theta,\beta)$ известны $\Rightarrow \Theta$ - откр. интервал в $\mathbb{R}$

L5: $\forall x\in A$ $p_\theta(x)$ дифф-ма по θ как композиция дифф-мых: $\frac{\partial}{\partial\theta} p_\theta(x) = \frac{\beta\theta^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\theta x}\cdot(-x)$

L6: $p_\theta(x) \in D^3$ $\forall x\in A$

L7: $\int_A p_\theta(x)dx \in D^3$

L8: $i(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ell_{X_1}(\theta)\right)^2 = E_\theta\left(\frac{n\beta}{\theta} - X_1\right)^2 = E_\theta\left(\frac{n^2\beta^2}{\theta^2} - 2\frac{n\beta}{\theta}X_1 + X_1^2\right) = \frac{n^2\beta^2}{\theta^2} - 2\frac{n\beta}{\theta}\cdot$

$\cdot E_\theta X_1 + E_\theta(X_1^2) = \frac{n^2\beta^2}{\theta^2} - 2\frac{n\beta}{\theta}\cdot\frac{\beta}{\theta} + DX_1 + (EX_1)^2 = \frac{n^2\beta^2}{\theta^2} - 2n\frac{\beta^2}{\theta^2} + \frac{\beta}{\theta^2} + \frac{\beta^2}{\theta^2} =$

$= \frac{\cancel{\beta^2(n-1)^2} + \beta}{\theta^2} \in (0,+\infty)$ $n=1$

L9: $\forall \theta_0\in\Theta$ $\exists c>0$ $\exists H(x)$ $\forall\theta\in(\theta_0\pm c)$: $\left|\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\ln p_\theta(x)\right| < H(x)$ и $E_\theta H(X_1) < +\infty$

L1-L9 ✓ $\Rightarrow$ А.Н.О.; А.А. $= i(\theta)^{-1} = \frac{\theta^2}{\beta}$

б) $X_1,\dots,X_n \sim Pois(\theta)$, $L_X(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{X_i}e^{-\theta}}{X_i!} = \theta^{\sum X_i} e^{-n\theta}\cdot\frac{1}{\prod(X_i!)}$, $\ell_X(\theta) = \ln L_X(\theta) =$

$= \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\cdot\ln\theta - n\theta - \sum_{i=1}^n X_i!$, $\frac{\partial}{\partial\theta}\ell_X(\theta) = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n X_i - n = 0 \rightarrow \hat\theta = \overline{X}$

L1: мотнос.. $Pois(\theta)$ известна (дискрет.) $\Rightarrow \mathcal{P}$ - доминируемое

L2: носитель мотнос.. - $\mathbb{R}_+$, не зависит от θ

L3: $X_1,\dots,X_n \sim P\in\mathcal{P}$ по постр.

L4: -//- $\Rightarrow \Theta$ - откр. интервал в $\mathbb{R}$

L5: $\forall x\in A$ $p_\theta(x)$ дифф-ма по θ как композиция дифф-мых: $\frac{\partial}{\partial\theta}p_\theta(x) = \frac{x\theta^{x-1}e^{-\theta}\cdot(-1)}{x!}$

L6: $p_\theta(x)\in D^3$ $\forall x\in A$

L7: $\int_A p_\theta(x)dx \in D^3$

L8: $i(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ell_{X_1}(\theta)\right)^2 = E_\theta\left(\frac{1}{\theta}\sum X_i - n\right)^2 = E_\theta\left(\frac{(\sum X_i)^2}{\theta^2} - 2\frac{\sum X_i}{\theta}n + n^2\right) = \frac{1}{\theta} \in (0,+\infty)$ $n=1$

L9: $\forall\theta_0\in\Theta$ $\exists c>0$ $\exists H(x)$ $\forall\theta\in(\theta_0\pm c)$: $\left|\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\ln p_\theta(x)\right| < H(x)$ и $E_\theta H(X_1) < +\infty$

L1-L9 ✓ $\Rightarrow$ А.Н.О.; А.А. $= i(\theta)^{-1} = \theta$

$\boxed{3}$ $X_1,\dots,X_n \sim$ кат. расп., т.е. $P_\theta(X_1=j)=\theta_j$, $j\in\overline{1,k}$, $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_k)$, $\theta_j\geq 0$, $\theta_1+\dots+\theta_k=1$.
Найти ОМП параметра θ, проверить на состоятельность. Усл. рег. проверять не нужно

Введем частоты появления каждой категории в выборке: $n_j=\sum_{i=1}^n I(X_i=j)$ $j\in\overline{1,k}$, тогда $L(\theta)=\prod_{j=1}^k \theta_j^{n_j}$, $\ell(\theta)=\ln L(\theta)=\sum_{j=1}^k n_j\ln\theta_j$. Теперь нужно оптимизировать $\ell(\theta)$ с учетом ограничений на θ. Применим метод Лагранжа, пусть $H(\theta,\lambda)=\sum_{j=1}^k n_j\ln\theta_j + \lambda\left(1-\sum_{j=1}^k\theta_j\right)$, $\frac{\partial H}{\partial\theta_j}=\frac{n_j}{\theta_j}-\lambda=0\to\theta_j=\frac{n_j}{\lambda}$, $\sum_{j=1}^k\theta_j=1\to\sum_{j=1}^k\frac{n_j}{\lambda}=1 \Rightarrow \lambda=\sum n_j=n$, т.е. $\hat\theta_j=\frac{n_j}{n}$, $j=\overline{1,k}$. Проверим состоятельность: $\hat\theta_j$ есть выборочное среднее частоты появления категории j, т.е. по ЗБЧ $\hat\theta_j\xrightarrow{P}\theta_j$ при $n\to\infty$ $\Rightarrow$ $\hat\theta_j$ – сост. оценка θ_j

$\boxed{5}$ $X_1,\dots,X_n\sim N(a,\sigma^2)$, $\theta=(a,\sigma)$ неизвестно. Для 0.95-квантили: а) найти ОМП и ее А.Д., если она А.Н.О. б) сравнить ее с выборочной квантилью и ее А.Д. Усл. рег. не проверять

а) $L(a,\sigma)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(X_i-a)^2}{2\sigma^2}\right)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-a)^2\right)$, $\ell(a,\sigma)=-\frac n2\ln 2\pi - n\ln\sigma-\frac{\sum(X_i-a)^2}{2\sigma^2}$,

$\frac{\partial\ell}{\partial a}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-a)=0\to na=\sum_{i=1}^n X_i\to\hat a=\bar X$, $\frac{\partial\ell}{\partial\sigma}=-\frac n\sigma+\frac1{\sigma^3}\sum_{i=1}^n(X_i-a)^2=0\to\hat\sigma^2=\frac1n\cdot\sum_{i=1}^n(X_i-a)^2=\frac1n\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2=S^2\Rightarrow\hat\sigma=S$. Для 0.95 квантили нужна величина $\hat a+z_{0.95}\hat\sigma=$
$=\bar X+z_{0.95}S$ – а.н.о. (как блд асимпт. норм.).

А.Д. $= i(a,\sigma)^{-1}=\frac{\sigma^2}{n}+z_{0.95}\cdot\frac{2\sigma^4}{n}=\frac{\sigma^2}{n}(1+2z_{0.95}\sigma^2)$

б) $Q_{0.95}=X_{(\lceil 0.95n\rceil)}$; по ЦПТ $\sqrt n(Q_{0.95}-a)\xrightarrow{d}N\left(0,\frac{\sigma^2}{(\Phi^{-1}(0.95))^2}\right)$, где $\Phi^{-1}(0.95)\approx1.64$, т.е.
А.Д. $(Q_{0.95})\approx\frac{\sigma^2}{(1.64)^2}\approx\frac{\sigma^2}{2.7}$

$\boxed{4}$ $X_1,\dots,X_n$ – выборка, $X_1=e^{\xi}$, $\xi\sim U[0,\theta]$. ОМП θ – ? сост.? L_1–L_9?

$p(\xi)=\frac1\theta I\{\xi\in[0,\theta]\}$, $\tilde p(x)=p(\ln x)\cdot\frac1x=\frac{1}{\theta x}I\{\ln x\in[0,\theta]\}$

$L_X(\theta)=\frac{1}{(\theta x)^n}I\{0\leq\ln X_{(1)}$ и $\ln X_{(n)}\leq\theta\}$, макс. $L_X(\theta)$ при $\theta\to\min$, т.е. $\hat\theta=\ln X_{(n)}$

На сем./лекции показывали, что для $U[0,\theta]$ носитель зависит от параметра $\Rightarrow$ $\cancel{L2}$

Состоятельность: $P(|\ln X_{(n)}-\theta|>\varepsilon)=P(\ln X_{(n)}>\theta+\varepsilon)+P(\ln X_{(n)}<\theta-\varepsilon)=$
$=\prod_{i=1}^n(\ln X_i<\theta-\varepsilon)=\left(\underbrace{\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}}_{<1}\right)^n\Rightarrow\to0$ при $n\to\infty$, т.е. оценка состоятельная

$\boxed{8}$ $n = 1M$, $d = \theta$, $X_1, \ldots, X_n \sim \underset{\text{со сдвигом}}{\text{Cauchy}}(\theta)$, т.е. $p(x) = \dfrac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}$ а) ОМП θ б) А.Д.

То, что выборка из Коши со сдвигом, доказывалось на лекции. ОМП θ: $L_x(\theta) = \frac{1}{\pi^n} \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(X_i-\theta)^2}$,

$l_x(\theta) = -n\ln\pi - \sum\limits_{i=1}^{n} \ln(1+(X_i-\theta)^2)$, $\frac{\partial}{\partial\theta} l_x(\theta) = -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(X_i-\theta)^2} \cdot 2(X_i-\theta)\cdot(-1) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2(X_i-\theta)}{1+(X_i-\theta)^2} = 0$

при $n=1$: $\dfrac{2X_1-\theta}{1+(X_1-\theta)^2} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = 2X_1$, при $n=2$: $\dfrac{2X_1-\theta}{1+(X_1-\theta)^2} + \dfrac{2X_2-\theta}{1+(X_2-\theta)^2} = 0 \Rightarrow \theta^3 + \theta^2(-2X_1-2X_2) +$

$+\theta\left(1+\frac{X_1^2+X_2^2}{2}+4X_1X_2\right) + (X_1^2X_2 - X_1X_2^2 - X_1 - X_2) = 0$, $\hat{\theta}$ - решение кв. ур-я. (лекция, А.Д. $= \frac{\pi^2}{4}$

Теорему применить нельзя, т.к. у расп. Коши слишком тяжелые хвосты (в частности, $\nexists E$)

Оц. с пом. выборочной медианы: рассм. $|X_1|, \ldots, |X_n|$, $F_{|X|,\theta}(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\theta}\right)$, $F_{|X|,\theta}(\mu) = \frac{1}{2}$,

решаем $\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\mu}{\theta}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \mu = \theta$ (с семинара), А.Н.О. с А.Д. $\pi^2\theta^2$ (тоже с семинара)

Оценку по ОМП в общем случае нельзя получить, т.к. нужно решать ур-я высокой степени (что начиная с некоторой степени даже невозможно). Поэтому оценка по выб. медиане удобнее

$\boxed{9}$ $X_1, \ldots, X_n \sim \underset{\text{со сдвигом}}{\text{Cauchy}}$, т.е. $p_\theta(x) = \dfrac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}$

$\hat{\theta} = X_{(n/2)}$ (медиана выборки) - а.н.о. (было в лекции/семинаре), причем $X_{(n/2)} \sim$ Cauchy (с лекции)

Интервал: $\hat{\theta} \pm t_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{n}$, где t - квантиль Коши