Круглов А.И. Б05-207 АЗ 9

$\boxed{1}$

а) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\overline{X}X_i + \overline{X}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\overline{X}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + \frac{1}{n}\cdot n\overline{X}^2 = \overline{X^2} - 2\overline{X}\cdot\overline{X} + \overline{X}^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2 =$

$= S^2$, ч.т.д.

б) пусть $\mathbb{E}X = m$, тогда $E(S^2) \overset{\text{сог. 1.а}}{=} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right) \overset{\pm m,\ \text{группировка}}{=} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((X_i-m)-(\overline{X}-m))^2\right) =$

$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2 - \frac{2}{n}(\overline{X}-m)\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-m) + \frac{n}{n}(\overline{X}-m)^2\right)$ раскрыл скобки, вынес константы

Заметим: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m) = \overline{X} - \frac{1}{n}\cdot nm = \overline{X}-m \Rightarrow E(S^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2 - (\overline{X}-m)^2\right) =$

$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2\right) - E((\overline{X}-m)^2) = E_1 - E_2$

линейность мат. ож.

$E_1:\ E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2\right) = \frac{1}{n}\cdot nE(\cancel{X}-m)^2 = E(X-m)^2 \overset{\text{определение дисперсии}}{=} \sigma^2$

$E_2:\ E(\overline{X}-m)^2 = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)\right)^2 = E\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2 + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1,j=1,i<j}^{n}(X_i-m)(X_j-m)\right) \overset{\text{лин.-ть мат. ож.}}{=}$

$= \frac{1}{n}\cdot E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2\right) + \frac{2}{n^2}\sum_{\dots}E(X_i-m)(X_j-m) \overset{E_1,\ \text{независимость } X_i \text{ и } X_j}{=} \frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{2}{n^2}\sum_{\dots}E(X_i-m)E(X_j-m) \overset{E(X_i-m)=E(X_j-m)=0}{=} \frac{1}{n}\sigma^2$

Тогда $E(S^2) = E_1 - E_2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 < \sigma^2 \Rightarrow S^2$ - смещенная оценка σ^2

$\boxed{2}$ оценка S^2 - смещенная, по ранее доказанному (1.б). Исследуем оценку $\frac{n}{n-1}S^2$:

$E\left(\frac{n}{n-1}S^2\right) \overset{\text{линейность мат. ож.}}{=} \frac{n}{n-1}ES^2 \overset{1.б}{=} \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$ $\forall$ значения параметра $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{n}{n-1}S^2$ - несмещенная оценка σ^2

$\boxed{4}$ ф-ла Байеса: $P(y=k|x) = \frac{P(x|y=k)\,P(y=k)}{\sum_i P(x|y=i)\,P(y=i)}$, в QDA\LDA: $P(x|y=k) = \left((2\pi)^{d/2}\cdot|\Sigma_k|^{1/2}\right)^{-1}\cdot$

$\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}(X-\mu_k)^T\Sigma_k^{-1}(X-\mu_k)\right)$ (согласно открытой документации sklearn). Тогда:

LDA: $\ln P(y=k|x) = -\frac{1}{2}(X-\mu_k)^T\Sigma^{-1}(X-\mu_k) + \ln P(y=k) + C = Ax + B$, где $A = (\Sigma^{-1}\mu_k)^T$, $B =$

$= -\frac{1}{2}\mu_k^T\Sigma^{-1}\mu_k + \ln P(y=k) + C$, т.е. разделяющие поверхности линейны ($\forall k\ \Sigma_k = \Sigma$)

QDA: $\ln P(y=k|x) = -\frac{1}{2}\ln|\Sigma_k| - \frac{1}{2}(x-\mu_k)^T\Sigma^{-1}(x-\mu_k) + \ln P(y=k) + C$ - по виду ф-лы видно, что

в общем случае $\ln P(y=k|x)$ - некоторая квадратичная форма от x, т.е. разделяющие поверхности (в общем случае) квадратичны. Отметим, что LDA - частный случай QDA.

При $d=2$ приведем примеры μ_k, Σ_k, $P(y=k)$, чтобы разд. пов-ть QDA была:

1) гипербола: $\ln P(y=k|x) \sim (x-\mu_k)^T\Sigma^{-1}(x-\mu_k)$. Возьмем $\mu=0$, матрицу $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Тогда:

$\ldots \sim (x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - x_2^2 = const \Rightarrow$ поверхность: $\frac{x_1^2}{1^2} - \frac{x_2^2}{1^2} = const$, гипербола

2) ПАРАБОЛОИД: АНАЛОГИЧНО, $\ldots \sim$

3) 2 пл $\parallel$ прямыми: $\ldots \sim (x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 = const \Rightarrow$ пов-ть: $x_1 = \pm const$, $\parallel$е прямые

4) 2 пл X прямыми: $\ldots \sim$