Круглов А.И. 605-202 ST 2

$\boxed{1}$ $X_1, \dots, X_n \sim U(0,\theta)$. Сразу отметим: $EX_1 = \frac{\theta}{2}$. Вспомним определения:

$\hat\theta$ - несмещенная оценка θ $\overset{def}{\iff}$ $E_\theta \hat\theta = \theta$ $\forall \theta \in \Theta$ (1)

$\hat\theta$ - состоятельная оценка θ $\overset{def}{\iff}$ $\hat\theta \xrightarrow{P_\theta} \theta$ при $n\to\infty$ $\forall\theta\in\Theta$ (2)

$\hat\theta$ - сильно сост. оценка θ $\overset{def}{\iff}$ $\hat\theta \xrightarrow{п.н.} \theta$ при $n\to\infty$ $\forall\theta\in\Theta$ (3)

а) $\hat\theta = 2\bar X = 2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Проверим (1): $E_\theta\hat\theta = E_\theta\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n E_\theta X_i = \frac{2}{n}\cdot n E_\theta X_1 = 2\cdot\frac{\theta}{2} = \theta$ $\forall\theta \Rightarrow$ <u>несмещенная</u>. Проверим (2): по ЗБЧ $\bar X \xrightarrow{P} EX_1 = \frac{\theta}{2}$, значит $\hat\theta = 2\bar X \xrightarrow{P} \theta$ при $n\to\infty$ $\forall\theta \Rightarrow$ <u>состоятельная</u>. Проверим (3): по УЗБЧ $\bar X \xrightarrow{п.н.} EX_1 = \frac{\theta}{2}$, значит $\hat\theta = 2\bar X \xrightarrow{п.н.} \theta$ при $n\to\infty$ $\forall\theta \Rightarrow$ <u>сильно сост.</u>

б) $\hat\theta = 2\bar X + \frac{X_{(n)}}{2}$. Проверим сначала (1). $E\hat\theta = E(2\bar X) + \frac{1}{2}EX_{(n)} = \theta + \frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\theta = \frac{3n+2}{2n+2}\theta \neq \theta$, но $\to\theta$ при $n\to\infty$ $\Rightarrow$ <u>смещенная</u>, (было в семинаре)

но явл. несмещенной в пределе при $n\to\infty$. Проверим (2): уже доказано, что $2\bar X \xrightarrow{P}\theta$ при $n\to\infty$ $\forall\theta$, осталось изучить второе слагаемое. Распределение X_1: $F_{X_1}(t) = P(X_1 \leq t) = \frac{t}{\theta}$ $(0\leq t\leq\theta)$, распределение максимума $(X_{(n)})$: $F_{X_{(n)}}(t) = P(X_{(n)}\leq t) = P(X_1\leq t, X_2\leq t, \dots, X_n\leq t) = P^n(X_1\leq t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n$ $(0\leq t\leq\theta)$. Покажем, что $\forall\varepsilon>0$ $P(|X_{(n)}-\theta|\geq\varepsilon)\to 0$ при $n\to\infty$. Рассмотрим $P(X_{(n)} < \theta-\varepsilon) = F_{X_{(n)}}(\theta-\varepsilon) = \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n = \left(1-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \to 0$ при $n\to\infty$. Рассмотрим $P(X_{(n)} > \theta+\varepsilon) = 1 - P(X_{(n)}\leq\theta+\varepsilon) = 1 - F_{X_{(n)}}(\theta+\varepsilon) = 1-1 = 0$ (т.к. $F_{X_{(n)}} = 1$ при аргументе $>\theta$). В итоге $P(|X_{(n)}-\theta|\geq\varepsilon) = P(X_{(n)}<\theta-\varepsilon) + P(X_{(n)}>\theta+\varepsilon) \to 0$ при $n\to\infty$ $\Rightarrow$ $X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$. Но тогда $\hat\theta = 2\bar X + \frac{X_{(n)}}{2} \xrightarrow{P} \theta + \frac{\theta}{2}$ при $n\to\infty$ $\forall\theta$, что $\neq\theta$ $\Rightarrow$ <u>не состоятельная</u>. Проверим (3): уже доказано, что $2\bar X \xrightarrow{п.н.}\theta$ при $n\to\infty$ $\forall\theta$, изучим второе слагаемое. Из ранее доказанного для $X_{(n)}$ видно, что $P(X_{(n)}\to\theta) = P(X_{(n)}\geq\theta-\varepsilon\ \forall\varepsilon>0) = 1$, т.е. $X_{(n)}\xrightarrow{п.н.}\theta$ при $n\to\infty$ $\forall\theta$. Но тогда $\hat\theta = 2\bar X + \frac{X_{(n)}}{2} \xrightarrow{п.н.} \theta + \frac{\theta}{2}$ при $n\to\infty$ $\forall\theta$, что $\neq\theta$ $\Rightarrow$ <u>не явл. сильно состоятельной</u> (или могли вспомнить, что сильно сост. всегда сост.)

в) $\hat\theta = (n+1)X_{(1)}$. Проверим (1): $E\hat\theta = (n+1)EX_{(1)} \overset{*}{=} (n+1)\cdot\frac{\theta}{n+1} = \theta$ $\forall\theta \Rightarrow$ <u>несмещ.</u>

(* доказывается аналогично $EX_{(n)}$: $F_X(t) = \frac{t}{\theta}$ $(0\leq t\leq\theta)$, $F_{X_{(1)}}(t) = 1 - P(X_{(1)}>t) = 1 - \left(1-\frac{t}{\theta}\right)^n$ $(0\leq t\leq\theta)$, $f_{X_{(1)}}(t) = \frac{d}{dt}F_X(t) = \frac{n}{\theta}\left(1-\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}$ $(0\leq t\leq\theta)$, и тогда $EX_{(1)} = \int_0^\theta t f_{X_{(1)}}(t)\,dt = \frac{\theta}{n+1}$). Про (2) было доказано на семинаре: <u>не явл. состоятельной</u>. Про (3) ясно, что оценка <u>не явл. сильно состоятельной</u>, т.к.

сильно сост. оценка всегда состоятельная, но наша $\hat{\theta}$ - нет.

2) $\hat{\theta} = X_{(1)} + X_{(n)}$. Проверим (1): $E\hat{\theta} = EX_{(1)} + EX_{(n)} = \frac{\theta}{n+1} + \frac{n\theta}{n+1} = \theta \Rightarrow$ <u>Несмещенная</u>.

Проверим (2): $\hat{\theta} = X_{(1)} + X_{(n)} \xrightarrow{P} 0 + \theta = \theta \Rightarrow$ <u>состоятельная</u>. Проверим (3): $\hat{\theta} = X_{(1)} + X_{n} \xrightarrow{п.н.} 0 + \theta = \theta \Rightarrow$ <u>сильно состоятельная</u> (сх-ти в (2) и (3) доказаны ранее)

д) $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$. Проверим (1): $E\hat{\theta} = E\left(\frac{n+1}{n} X_{(n)}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \theta = \theta \Rightarrow$ <u>Несмещенная</u>. Проверим (2): $\hat{\theta} = \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$ при $n \to \infty$ $\forall \theta \Rightarrow$ <u>состоятельная</u>. Проверим (3): $\hat{\theta} \xrightarrow{п.н.} \theta$ при $n \to \infty$ $\forall \theta \Rightarrow$ <u>сильно состоятельная</u>

$\boxed{2}$ $\exists\ \hat{\theta}_n(X)$ - а.н.о. параметра θ с А.Д. $\sigma^2(\theta)$. Док-ть: $\hat{\theta}_n(X)$ - состоятельная оценка θ

Вспомним определения: $\hat{\theta}_n$ - а.н.о. θ с А.Д. $\sigma^2(\theta) \overset{def}{\Leftrightarrow} \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta))$,

$\hat{\theta}_n(X)$ - сост. оценка $\theta \overset{def}{\Leftrightarrow} \hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ при $n \to \infty$ $\forall \theta$. По сути, нужно доказать, что из $(\xrightarrow{d})$ следует $(\xrightarrow{P})$, т.е. сх-ть по расп. происходит к константе: $\hat{\theta}_n(X) - \theta = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \to$

$\xrightarrow[n\to\infty]{d_\theta} 0 \cdot N(0, \sigma^2(\theta)) = 0$ (const), а значит $\hat{\theta}_n - \theta \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} 0$, т.е. $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} \theta$ $\forall \theta$.

Получаем, $\hat{\theta}_n(X)$ - сост. оценка θ, ч.т.д.

$\boxed{3}$ Дана выборка из $Exp(\theta)$, $\theta > 0$ - размерность времени (т.е. $F(t) = 1 - e^{-t/\theta}$, $t \geq 0$). Для какой величины $\tau(\theta)$ статистика $\bar{X}\ln\bar{X}$ явл. А.Н.О.? Ее А.Д. -?

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $EX_1 = \theta$, $DX_1 = \theta^2$, по ЦПТ: $\sqrt{n}(\bar{X} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \theta^2)$ при $n \to \infty$.

Ищем асимпт. расп. статистики $y(\bar{X}) = \bar{X}\ln\bar{X}$, $y'(\theta) = \frac{d}{dx}(x\ln x)\big|_{\theta = x} = \ln\theta + 1$

А.Д. $\Sigma\, y(\bar{X}) \approx (y'(\theta))^2 \cdot \frac{D\bar{X}}{n} = (\ln\theta + 1)^2 \cdot \frac{\theta^2}{n} \Rightarrow \bar{X}\ln\bar{X}$ - А.Н.О. $\tau(\theta) = \theta\ln\theta$, где

А.Д. $\Sigma = \frac{(\ln\theta+1)^2\theta^2}{n}$

$\boxed{4}$ $X_1, \dots, X_n \sim \Gamma(\theta, \beta)$, $p_{\theta\beta}(x) = \frac{\theta^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\theta x}$, $x > 0$. Построить асимпт. довер. интервал Вальда уровня доверия α для θ, если а) β известно, б) β неизвестно.

а) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ - оценка θ. По ЦПТ: $\sqrt{n}(\bar{X} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, DX_1)$, где $DX_1 = \frac{\beta}{\theta^2}$ (Γ-расп.).

Тогда А.Д. $\bar{X}$ равна $\frac{DX_1}{n} = \frac{\beta}{n\theta^2}$. Довер. интервал: $\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\beta}{n\theta^2}}$, где $z_{\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль N

б) $\hat{\beta} = \frac{2\bar{X}^2}{DX} = \frac{2\bar{X}^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$. Пусть оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$, оценка дисперсии $DX_i \approx \frac{\hat{\beta}}{\hat{\theta}^2}$. Тогда

довер. интервал: $\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\sqrt{\frac{\hat{\beta}}{n\hat{\theta}^2}}$, t - квантиль

$\boxed{5}$ $X_1, \ldots, X_n \sim P$, $DX_1 = \sigma^2 < +\infty$, σ неизвестно, 1-4 моменты P конечны. Док-ть:

S^2 - А.Н.О. σ^2, А.Д. - ? Асимпт. довер. интервал для σ^2 - ?

Вспомним, что $S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$, где $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. По ЦПТ, $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$,

где $\mu = EX_1$. Выразим S^2: $S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$. $X_1, \ldots, X_n$ - НОРСВ с конечными 1-4

моментами $\Rightarrow$ $E(S^2) = \sigma^2$ и $D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$ при больших n $\Leftrightarrow$ А.Д. $S^2 \approx \frac{2\sigma^4}{n}$.

Нормальное приближение: $\sqrt{n}(S^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} N(0, \frac{2\sigma^4}{n})$, $S^2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{2\sigma^4}{n}}$ - довер. интервал (z -

квантиль N).