Круглов А.И. 605-204 BSI

$$p(\theta|X) = \frac{p(X|\theta)\cdot p(\theta)}{p(X)}$$

$\boxed{1}$ $X_1,\dots,X_n \sim P$. Найти сопр. распр.-е, апостер. распр.-е + его мат.ож./моду/медиану

а) $P = Bin(m,\theta)$, m известно

$p_t(x) = \binom{m}{x} t^x (1-t)^{m-x}$, лайклихуд: $p_t(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n p_t(x_i) = \left[\prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i}\right]\cdot t^{\sum\limits_{i=1}^n x_i}\cdot(1-t)^{\sum\limits_{i=1}^n (m-x_i)}$ — это "$p(X|\theta)$"

Для биномиального распр-я сопряженным является бета-распр.-е (спойлер, проверим). Априорное распр-е θ: $\theta \sim Beta(\alpha,\beta)$, т.е.

$q(t) = \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$. Теперь знаем числитель из ф-лы Байеса: $q(t)\cdot p_t(\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i}}{B(\alpha,\beta)}\cdot t^{\alpha-1+\sum\limits_{i=1}^n x_i}\cdot(1-t)^{\beta-1+mn-\sum\limits_{i=1}^n x_i} \propto$

$\propto t^{\alpha-1+\sum\dots}\cdot(1-t)^{\beta-1+mn-\sum\dots}$. В этом выражении прослеживается бета распр-е $Beta(\alpha+\sum_{i=1}^n x_i,\ \beta+mn-\sum_{i=1}^n x_i)$,

что и требовалось (апостериорное распр.-е нашли). $E(\theta|X) = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}} = \frac{\alpha+\sum_{i=1}^n x_i}{\alpha+\beta+mn}$ (табл. распределений)

б) $P = U(0,\theta)$, + посчитать апостериорный дов. интервал

$p_t(x) = \frac{1}{t}\mathbb{1}[0,t]$, $p_t(\vec{x}) = \frac{1}{t^n}\mathbb{1}\{0\le x_{(1)}\}\mathbb{1}\{x_{(n)}\le t\}$. Сопряженное — Парето (спойлер; сейчас проверим), т.е.

$q(t) = \frac{\alpha t_0^{\alpha}}{t^{\alpha+1}}\mathbb{1}[t_0,+\infty)$. $q(t)\cdot p_t(\vec{x}) = \frac{\alpha t_0^{\alpha}}{t^{\alpha+1+n}}\mathbb{1}\{0\le x_{(1)}\}\mathbb{1}\{x_{(n)}\le t\}\mathbb{1}\{t\ge t_0\} \propto \frac{1}{t^{\alpha+1+n}}$ — угадали правильно,

апостериорное распр.-е — $Pareto(t_0,\ \alpha+n)$. $E(\theta|X) = \frac{\alpha t}{\alpha-1}$, $\alpha>1$; $\mu(\theta|X) = t\cdot 2^{1/\alpha}$; $m(\theta,X) = t$

дов. интервал: $(u_{\alpha/2},\ u_{1-\alpha/2})$, где $\alpha = 0{,}05$, $u_{\dots}$ — квантили Парето $(t_0,\ \alpha+n)$

в) $P = Cat(\theta_1,\dots,\theta_k)$

$p_t(x) = \prod_{j=1}^k t_j^{\mathbb{1}\{x=j\}}$, $p_t(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^k t_j^{\mathbb{1}\{x_i=j\}} = \prod_{j=1}^k t_j^{\sum\limits_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i=j\}}$, $\sum\limits_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i=j\} =: n_j$ — число наблюдений j-ой категории. Сопряженное — Дирихле (спойлер; проверим), т.е.

$q(\vec{t}) = \frac{1}{B(\vec{\alpha})}\prod_{i=1}^k t_i^{\alpha_i-1} \Rightarrow q(\vec{t})\cdot p_t(\vec{x}) = \frac{1}{B(\vec{\alpha})}\prod_{i=1}^k t_i^{\alpha_i-1+n_i}$, т.е. апостериорное — Дирихле$(\alpha_1+n_1,\dots,\alpha_k+n_k)$

$E(\theta_j|X) = \frac{\alpha_j+n_j}{\sum_{i=1}^k(\alpha_i+n_i)}$

$\boxed{2}$ $X_1,\dots,X_n \sim P \in \mathcal{P} = \{P_t \mid t\in\Theta\}$ ∈ эксп. класс распр.-й. Док-ть: $\exists Q$ сопряж. к $\mathcal{P}$ и принадл. эксп. классу

Вспомним def эксп. класса: $p_t(x) = \frac{g(x)}{h(t)}e^{t^T u(x)} \Rightarrow p_t(\vec{x}) = \frac{1}{h^n(t)}\left(\prod_{i=1}^n g(x_i)\right)\cdot e^{t^T\sum\limits_{i=1}^n u(x_i)}$, плюс хотим, чтобы

сопряженное тоже попало в эксп. класс: $q(t) = \frac{G(t)}{H(\theta)}e^{\theta^T V(t)}$. Тогда $f(\vec{x},t) = q(t)\cdot p_t(\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^n g(x_i)}{H(\theta)}\cdot\frac{G(t)}{h^n(t)}e^{\theta^T V(t)}\cdot$

$\cdot e^{t^T\sum\limits_{i=1}^n u(x_i)}$ — видно, что эта плотность факторизовалась так, что соотв. эксп. классу, ч.т.д.

$\boxed{3}$ θ - вер-ть успеха в бернулли. Найти неинф. апр. распр.-е θ методом Джеффриса

Пусть $X_1,\dots,X_n \sim Bern(\theta)$. $p_\theta(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum\limits_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{\sum\limits_{i=1}^n(1-x_i)}$, $\ell_x(\theta) = \ln p_\theta(\vec{x}) = \ln\theta\cdot\sum_{i=1}^n x_i + \ln(1-\theta)\cdot$

$\cdot(n-\sum_i x_i)$,

$\frac{\partial\ell_x(\theta)}{\partial\theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{n-\sum x_i}{1-\theta}$, $\frac{\partial^2\ell_x(\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{\sum x_i}{\theta^2} - \frac{n-\sum x_i}{(1-\theta)^2}$, $I(\theta) = -E_\theta\frac{\partial^2\ell_x(\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$

$p(\theta) \propto \sqrt{\frac{n}{\theta(1-\theta)}} \Rightarrow Beta(1/2,\ 1/2)$