Круглов А.И. Б05-204 АВ2 (дорешка)

$\boxed{1}$ решение рассказал студент на семинаре, вот как я понял:

T-тест: $T(X,Y) = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{Y}-\overline{X}}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$, Вальд: $W = \dfrac{(\hat{\theta}_1-\theta_1)^2}{Var\,\hat{\theta}_1} \xrightarrow{d} \chi_1(0,1)$ при $H_0: \theta_1 = 0$.

пусть $Y = \theta_0+\theta_1+\varepsilon$, $X = \theta_0+\varepsilon$, $Z = \begin{pmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_n \\ Y_1 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, модель $Z = K\theta+\varepsilon$, $\hat{v} = Z - K\hat{\theta} = \begin{pmatrix} X_1-\overline{X} \\ \dots \\ Y_n-\overline{Y} \end{pmatrix}$,

$\hat{u} = \hat{v}^2$, $\hat{H} = diag(\hat{u})$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = (K^TK)^{-1}K^TZ = \begin{pmatrix} 2n & n \\ n & n \end{pmatrix}^{-1} K^TZ = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} K^TZ = \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y}-\overline{X} \end{pmatrix}$$

$$Var\,\hat{\theta} = (K^TK)^{-1}K^T\hat{H}K(K^TK)^{-1} = \frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} K^T\hat{H}K \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{S_X^2+S_Y^2}{n}$$