Дорешка x0.35

$\boxed{2}$ Найти ОМП θ по выборке размера n $(X_1,\dots,X_n = X)$

а) $U(a,b)$, $\theta = (a,b)$, $a<b$. Было на семинаре: $\hat\theta = (X_{(1)}, X_{(n)})$. Носитель $[a,b]$ зависит от θ, т.е. не вып. L2, но как я понял, это не мешает получить ОМП $\hat\theta = (X_{(1)}, X_{(n)})$.

б) $U(-\theta,\theta)$, $\theta>0$. $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\theta} I\{-\theta < X_i < \theta\} = \frac{1}{(2\theta)^n} \prod_{i=1}^n I\{-\theta < X_i < \theta\} = \frac{1}{(2\theta)^n} I\{-\theta < X_{(1)} < \dots < X_{(n)} < \theta\} = \frac{1}{(2\theta)^n} I\{\max(|X_{(1)}|, |X_{(n)}|) < \theta\} \to \max$ при $\hat\theta = \max(|X_{(1)}|, |X_{(n)}|)$. Д-но.

в) $U(\theta, 1+\theta)$, $\theta>0$. $L(\theta) = \prod_{i=1}^n I\{\theta < X_i < 1+\theta\} = I\{\theta < X_{(1)} < \dots < X_{(n)} < 1+\theta\}$. Значит, $\hat\theta = X_{(1)}$, $(1+\hat\theta) = X_{(n)}$, т.е. (разобр. на семинаре) $\hat\theta \in (X_{(n)}-1, X_{(1)})$. Д-но.

г) $p_\theta(x) = \frac{2\theta^2}{x^3} I\{x>\theta\}$, $\theta>0$. $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{2\theta^2}{X_i^3} I\{X_i>\theta\} = \frac{2^n\theta^{2n}}{\prod_{i=1}^n X_i^3} I\{\theta < X_{(1)}\} \to \max$ при $\hat\theta < X_{(1)}$ и $\hat\theta \to \max$, поэтому $\hat\theta \to X_{(1)}$ снизу. Д-но.

Дорешка x0.35

$\boxed{6}$ $X_1,\dots,X_n \sim Exp(\beta,\alpha)$, т.е. $p_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\beta - x}{\alpha}} I\{x \geq \beta\}$

а) ОМП $\theta = (\alpha,\beta)$ — ? $L(\theta) = \prod_{i=1}^n p_{\alpha,\beta}(X) = \frac{1}{\alpha^n} \exp\left(\frac{1}{\alpha}(n\beta - \sum_{i=1}^n X_i)\right) I\{\beta \leq X_{(1)}\} \to \max$ при $\beta \leq X_{(1)}$ и $\beta - \max$, т.е. $\underline{\hat\beta = X_{(1)}}$, подставим: $L(\theta) = \frac{1}{\alpha^n}\exp\left(\frac{1}{\alpha}(nX_{(1)} - \sum_{i=1}^n X_i)\right)$; $\ell(\theta) = -n\ln\alpha + \frac{n}{\alpha}X_{(1)} - \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n X_i$, $\frac{\partial\ell}{\partial\alpha} = \frac{-n}{\alpha} - \frac{n}{\alpha^2}X_{(1)} + \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^n X_i = 0 \Rightarrow \overline{X} = \hat\alpha + X_{(1)} \Rightarrow \underline{\hat\alpha = \overline{X} - X_{(1)}}$

Ответ: $\theta = (\overline{X} - X_{(1)}, X_{(1)})$

б) Носитель явно зависит от θ (от β) $\Rightarrow$ Д-но.

в) $\hat\alpha$ — А.Н.О.? А.Э.? L1–L9 проверять долго, но они выполнены.

дорешка ×0.75

$\boxed{9}$ $X_1, \dots, X_n \sim$ Cauchy (Коши), т.е. $p_\theta(x) = \dfrac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}$

Было: ~~$\hat{\theta} = X_{(n/2)}$ (медиана выборки) – о.м.п. (было в лекции/семинаре), причем $X_{(n/2)} \sim$ ... (смотри)~~

~~Интервал: $\hat{\theta} \pm t_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{n}$, где t – квантиль Коши.~~

выб. медиана

Новое: На лекции было, что А.Д. выб. медианы $= \pi^2/4$. Тогда интервал $\hat{\theta} \pm q_{\frac{1+\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\pi^2}{4n}}$