IV семестр

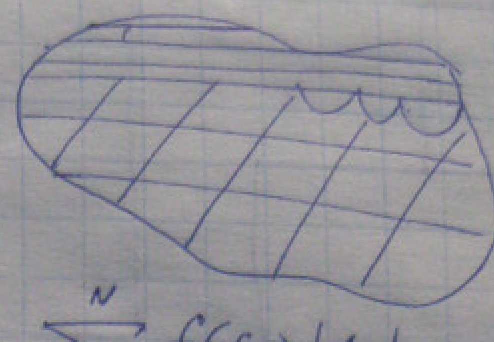
Математический анализ

Цветкова Виктория Андреевна 224 гр.

Лекция №1

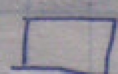
07.02.14

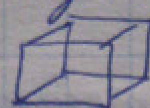
$$\sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)|\Delta_j|$$



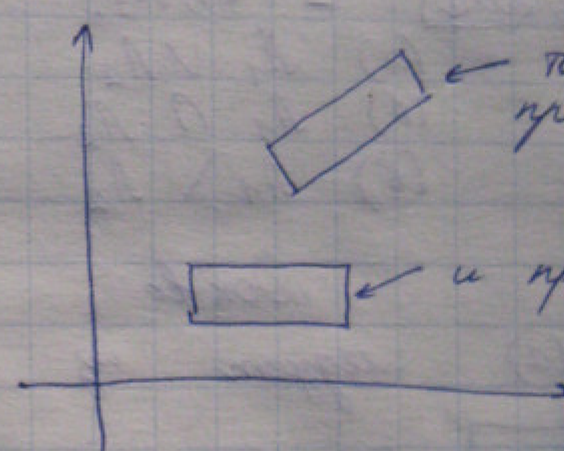
$$\sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)|\Delta_j|$$

$\boxed{\text{Опр}}$ $\exists\ I_1, \dots, I_N$ — огранич. промежутки числовой прямой $\mathbb{R}$. Декарт. произв. $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N \subset \mathbb{R}^N$ наз-ся (...)

на пл-ти: прямоуг. 

в $\mathbb{R}^3$: 

(...) N-мерным брусом.



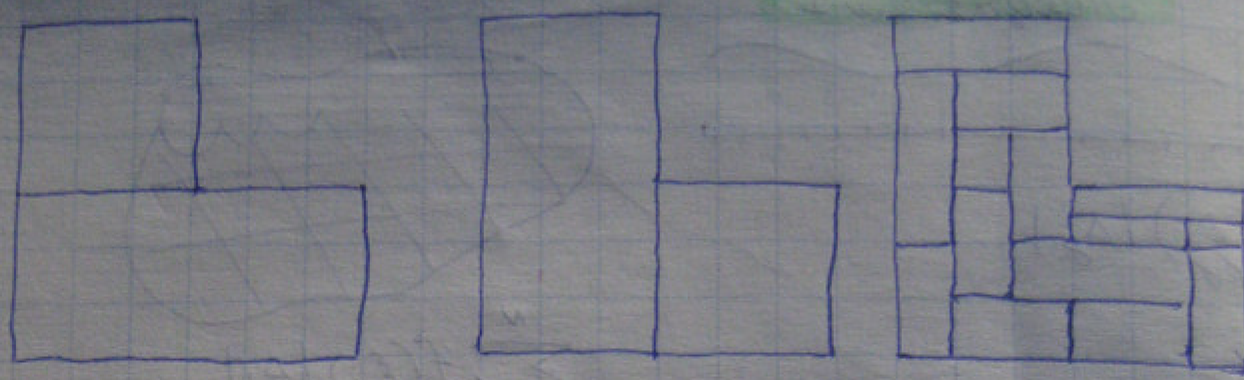
Если все промеж. $I_1, \dots, I_N$ невырожд, то брус наз. невырожд. В прот. случае брус наз. вырожд.
Если все $I_1, \dots, I_N$ замкн, то брус наз. замкн.
Если все $I_1, \dots, I_N$ откр, то брус наз. откр.

<u>Упр 1</u> Верно ли, что брус явл. откр. (замкн) подмно-вом $\mathbb{R}^N$ е.и.т.е. он откр (замкн)

<u>Упр 2</u> Верно ли, что $\begin{cases} \text{брус замкнут е.и.т.е. он содержит свою границу} \\ \text{брус откр е.и.т.е.} \end{cases}$

$\boxed{\text{Опр}}$ Мерой бруса $\Pi = I_1 \times \dots \times I_N \in \mathbb{R}^N$ наз. $|I_1| \cdot |I_2| \cdot \ldots \cdot |I_N| = \prod_{j=1}^{N} |I_j|$

Если брус вырожд, то мера $= 0$.



$\boxed{\text{Опр}}$ Мн-во $A \in \mathbb{R}^N$ наз. простым, если оно представимо в виде конечного объединения N-мерных брусов.

$\boxed{\text{Теорема}}$] $A_1, A_2, \ldots$ — простые мн-ва $\mathbb{R}^N$. Тогда
(а) $A_1 \cup A_2$
(б) $A_1 \cap A_2$
(в) $A_1 \setminus A_2$ — простейшие мн-ва в $\mathbb{R}^N$

Док-во.

(а) следует из опр.

$\boxed{\text{Лемма}}$] $\Pi = I_1 \times \ldots \times I_N$ и $\tilde{\Pi} = \tilde{I}_1 \times \ldots \times \tilde{I}_N$ — брусы в $\mathbb{R}^N$.
Тогда (i) $\Pi \cap \tilde{\Pi}$ — брус
(ii) $\Pi \setminus \tilde{\Pi}$ — простое мн-во

Док-во.

(i) $\Pi \cap \tilde{\Pi} = (I_1 \cap \tilde{I}_1) \times (I_2 \cap \tilde{I}_2) \times \ldots \times (I_N \cap \tilde{I}_N)$.

ср. пром. (из усл.)

(ii) индукц. по размерности N.
$N = 1$ — верно.
Предп., что утв. верно для $N = m$. Док. его для $N = m+1$.

$$\Pi \setminus \tilde{\Pi} = (\underbrace{I_1 \times \ldots \times I_m}_{\Pi'} \times I_{m+1}) \setminus (\underbrace{\tilde{I}_1 \times \ldots \times \tilde{I}_m}_{\tilde{\Pi}'} \times \tilde{I}_{m+1}) =$$

$$= \underbrace{(\Pi' \setminus \tilde{\Pi}')}_{(P_1 \cup \ldots \cup P_k)} \times I_{m+1} \cup \Pi' \times (I_{m+1} \setminus \tilde{I}_{m+1}) =$$

$(P_1 \cup \ldots \cup P_k)$ — конечное объед. m-мерных брусов по предпол. инд.

$(I_{m+1} \setminus \tilde{I}_{m+1})$ — один или два пр-ка $(J_1 \cup J_2)$

$= (P_1 \times J_{m+1}) \cup (P_2 \times J_{m+1}) \cup \ldots \cup (P_k \times J_{m+1}) \cup (\Pi' \times J_1) \cup (\Pi' \times J_2)$ -

конечное объединение $(m+1)$-мерных брусов.

Док-во теор:

(б) $A_1 = \Pi_1 \cup \ldots \cup \Pi_K$
$A_2 = P_1 \cup \ldots \cup P_M$ — конечное объедин. N мерных брусов

$$(A_1 \cap A_2) = \left(\bigcup_{k=1}^{K} \Pi_k\right) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{M} P_m\right) = \bigcup_{\substack{k=1..K \\ m=1..M}} (\underbrace{\Pi_k \cap P_m}_{\text{брус}})$$ - прост. мн-во

в) $$A_1 \setminus A_2 = \left(\bigcup_{k=1}^{K} \Pi_k\right) \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{M} P_m\right) = \bigcup_{k=1}^{K} \left(\Pi_k \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{M} P_m\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\bigcup_{k=1}^{K} \underbrace{\bigcap_{m=1}^{M} (\underbrace{\Pi_k \setminus P_m}_{\text{прост. мн-во по 1ой части леммы.}})}_{\text{по п (б) - простое мн-во}}}_{\text{по (а) - простое мн-во.}}$$

$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$ - неверно $\quad \cup \sim +$

аналог $(a_1 b_1 + a_2 b_2) = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$ - неверно. $\quad \cap \sim \cdot$

<u>Обозн</u>: Если в объед. $\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$ объединяемые мн-ва попарно не пересек., то иногда пишут $\bigsqcup_{\alpha \in A} A_\alpha$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Прост. мн-во яв. конечным объединением попарно не пересек. брусов.

Док-во.

(1) д-м, что разность брусов представима как конечн. объедин. попарно не пересек. мн-в

Док-во проведем индукцией по размерности пр-ва N.

$N = 1$ - верно.

Предп. что утв. верно для $N = m$. Док. его для $N = m+1$

$$(\underbrace{J_1\times\dots\times J_m}_{\Pi'}\times J_{m+1})\setminus(\underbrace{\tilde J_1\times\dots\times\tilde J_m}_{\tilde\Pi'}\times\tilde J_{m+1}) =$$

$$= \underbrace{(\Pi'\setminus\tilde\Pi')}_{P_1\sqcup\dots\sqcup P_k}\times\underbrace{(J_{m+1}\cap\tilde J_{m+1})}_{J_1}\sqcup\underbrace{(\Pi'\cap\tilde\Pi')}_{\text{брус }\tilde P}\times\underbrace{(J_{m+1}\setminus\tilde J_{m+1})}_{\text{или } \tilde J_1\sqcup\tilde J_2}\sqcup$$

брус $\tilde P$ (пересечение брусов - брус)

~~(пр-к $\tilde F$)~~ или $\tilde J_1\sqcup\tilde J_2$ б.м. $\varnothing$

$$\sqcup\underbrace{(\Pi'\setminus\tilde\Pi')}_{P_1\sqcup\dots\sqcup P_k}\times\underbrace{(J_{m+1}\setminus\tilde J_{m+1})}_{\tilde J_1\sqcup\tilde J_2} =$$

$$= (P_1\times J_1)\sqcup(P_2\times J_1)\sqcup\dots\sqcup(P_k\times J_1)\sqcup(\tilde P\times\tilde J_1)\sqcup(\tilde P\times\tilde J_2)\sqcup$$

$$\sqcup(P_1\times\tilde J_1)\sqcup\dots\sqcup(P_k\times\tilde J_1)\sqcup(P_1\times\tilde J_2)\sqcup\dots\sqcup(P_k\times\tilde J_2).$$

Док-на перв. часть теор.

(2) перейдем к док-ву т. Проведем его индукц. по числу брусов K, сост. простое мно-во.

$K=1$ - верно

Предп, что верно для $K=m$. Док-м для $K=m+1$.

$$\Pi_1\cup\dots\cup\Pi_m\cup\Pi_{m+1} = (\Pi_1\cup\dots\cup\Pi_m)\sqcup\Pi_{m+1}\setminus\bigcup_{j=1}^{m}\Pi_j =$$

По предпол. индукции $= (P_1\sqcup P_2\sqcup\dots\sqcup P_l)\sqcup\left(\bigcap_{j=1}^{m}\underbrace{(\Pi_{m+1}\setminus\Pi_j)}_{\bigsqcup_{s=1}^{S_j}\tilde P_s^j}\right)$

конечное объед. попарно не пересек. брусов

$$\bigsqcup_{s_1=1}^{S_1}\bigsqcup_{s_2=1}^{S_2}\dots\bigsqcup_{s_m=1}^{S_m}(\tilde P^1_{s_1}\cap\tilde P^2_{s_2}\cap\dots\cap\tilde P^m_{s_m})$$

Лекция №2

11.02.1

$П = J_1 \times \ldots \times J_N$

$|П| = \mu П = |J_1| \ldots |J_N|$

$\boxed{\text{Опр}}$ Брусы $П, \tilde{П}$ лежащ. в $\mathbb{R}^N$, не перекрываются, если мера их пересеч. $= 0$: $\mu(\underbrace{П \cap \tilde{П}}_{\text{брус}}) = 0$

Упр. Д-ть, что брусы не перекр. если $\underbrace{\mathrm{int}\, П}_{\text{мн-во внутр точек}} \cap\, \mathrm{int}\, \tilde{П} = \varnothing$

$\mathrm{int}\, П$ - откр. брус.

$П \qquad П \cup \partial П$

граница

$\mathrm{int}\, П \subset П \subset П \cup \partial П = \overline{П}$ замкн. брус.

// $\mu П = \mu \overline{П}$

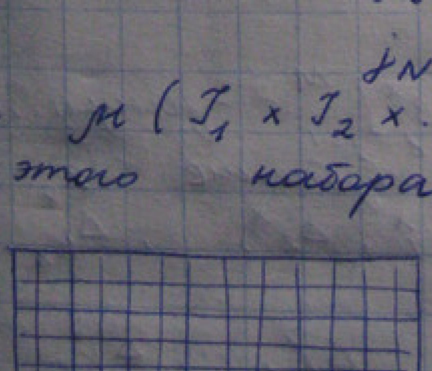
$\mu(\mathrm{int}\, П)$

$\boxed{\text{Л1.}}$ Į для всех $n \in \{1 \ldots N\}$ пром-к J_n явл. конечным объединением попарно неперекрывающихся пром-ов $J_1^n, J_2^n, \ldots, J_{m_n}^n$ -

Рассм. набор брусов.

$$\left\{ J^1_{j_1} \times J^2_{j_2} \times \ldots \times J^N_{j_N} \right\} \quad \begin{array}{l} j_1 = 1 \ldots m_1 \\ j_2 = 1 \ldots m_2 \\ j_N = 1 \ldots m_N \end{array}$$

Тогда $\mu(J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_N)$ равна сумме мер брусов из этого набора.



Док-во.

$(N=3)$

$$\sum_{j_x=1}^{m_x}\sum_{j_y=1}^{m_y}\sum_{j_z=1}^{m_z}|J_{j_1}^x|\cdot|J_{j_2}^y|\cdot|J_{j_3}^z| =$$

$$=\sum_{j_x=1}^{m_x}\sum_{j_y=1}^{m_y}\left(|J_{j_1}^x|\cdot|J_{j_2}^y|\cdot\left(\sum_{j_z=1}^{m_z}|J_{j_z}^z|\right)\right) =$$

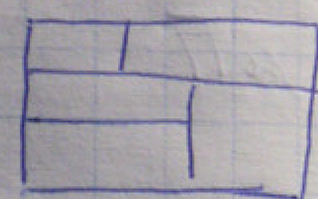
$$=|J_z|\cdot\sum_{j_x=1}^{m_x}\left(|J_{j_x}^x|\underbrace{\left(\sum_{j_y=1}^{m_y}|J_{j_y}^y|\right)}_{|J_y|}\right)=|J_z|\cdot|J_y|\cdot|J_x| = \mu(J_x\times J_y\times J_z).$$

чтд.

$\boxed{Л2.}$ $]$ $\Pi = J_1\times J_2\times\ldots\times J_N$ – брус.

$\{P_j\}_{j=1}^M$ – набор попарно не перекрывающихся брусов;

$\bigcup_{j=1}^M P_j = \Pi$. Тогда $\underbrace{|\Pi|}_{\text{мера}} = \sum_{j=1}^M |P_j|$



Док-во

Перейдем к замык. и будем считать, что исх. брус Π и все P_j – замкнутые брусы.

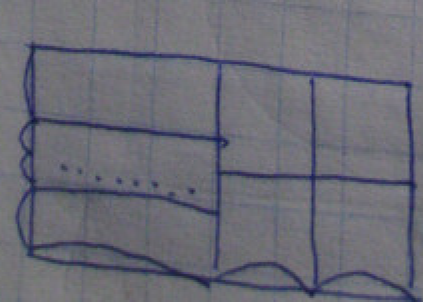
Перейдем к расс. при $N=3$ (общ. сл-й аналог.)

$]$ $P_j = \underbrace{[\alpha_j^x, \beta_j^x]}_{\text{отрезок}}\times[\alpha_j^y, \beta_j^y]\times[\alpha_j^z, \beta_j^z]$

Рассм. мн-во точек $\{\alpha_j^x\}_{j=1}^M \cup \{\beta_j^x\}_{j=1}^M$ – занум. точки в порядке возр., получим разбиение J_x. Отрезок этого разбиения обозн. ч/з $\Delta_1^x, \Delta_2^x, \ldots, \Delta_{K_x}^x$.

Аналог. опр. разбиение J_y: $\Delta_1^y, \ldots, \Delta_{K_y}^y$

J_z: $\Delta_1^z, \ldots, \Delta_{K_z}^z$.

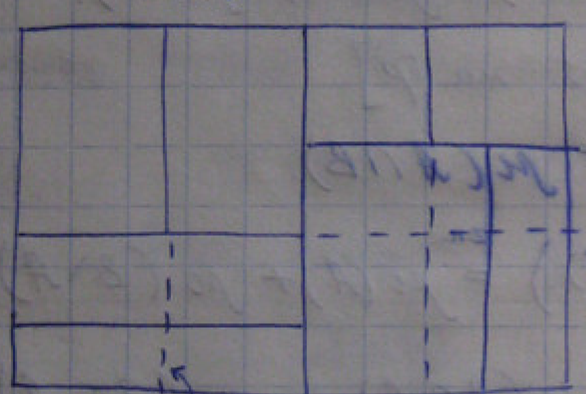


Рассм. (невырожд, замкн.) брусы $\underbrace{\Delta^x_{jx} \times \Delta^y_{jy} \times \Delta^z_{jz}}\ \widetilde{P}_{jx,jy,jz}$

Мера исх. бруса П: $\mu\Pi \underset{\text{по лемме 1}}{=} \sum\limits_{\substack{jx=1\ldots k_x\\ jy=1\ldots k_y\\ jz=1\ldots k_z}} \mu \widetilde{P}_{jx,jy,jz} =$

$$= \sum_{j=1}^{M}\left(\sum_{\substack{jx,jy,jz:\\ \widetilde{P}_{jx,jy,jz}\subset P_j}} \mu\, \widetilde{P}_{jx,jy,jz}\right) \underset{\text{по лемме 1}}{=} \sum_{j=1}^{M} \mu(P_j)$$ чтд.

было



стало

Теорема Пусть A – простое множество в $\mathbb{R}^N$

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{M} \Pi_j = \bigsqcup_{k=1}^{K} P_k. \text{ Тогда } \sum_{j=1}^{M} \mu(\Pi_j) = \sum_{k=1}^{K} \mu(P_k).$$

Док-во

Рассм. $\widetilde{P}_{jk} = \Pi_j \cap P_k$ – попарно не пересек. брусы

$$\sum_{j=1}^{M} \mu(\Pi_j) \underset{\text{по Л2}}{=} \sum_{j=1}^{M}\Big(\sum_{k=1}^{K} \mu(\underbrace{\Pi_j \cap P_k}_{\text{попарно не пересек. брусы}})\Big) \; ? \; \sum_{k=1}^{K} \mu(P_k) \underset{\text{Л2}}{=} \sum_{k=1}^{K}\Big(\sum_{j=1}^{M} \mu(P_k \cap \Pi_j)\Big)$$

$=$ чтд.

] A – простое мн-во.
$$A = \bigsqcup_{j=1}^{M} \Pi_j$$

$\boxed{\text{Опр}}$ $\mu A = \sum_{j=1}^{M} \mu(\Pi_j)$.

Замеч. Док-м, что μA не зависит от способа разбиения A на кон. не пересек. брусы

] A, B – простые мн-ва.

1) $\mu A \geq 0$
2) Если $A \cap B = \emptyset$, то $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
[A разб. на брусы, B разб. на бр]
3) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

Д-во: $\mu(A \cup B) = \mu(A \sqcup (B \setminus A)) \overset{2п.}{=} \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

$\mu(B) = \mu((B \cap A) \sqcup (B \setminus A)) \overset{2п.}{=} \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \Rightarrow$

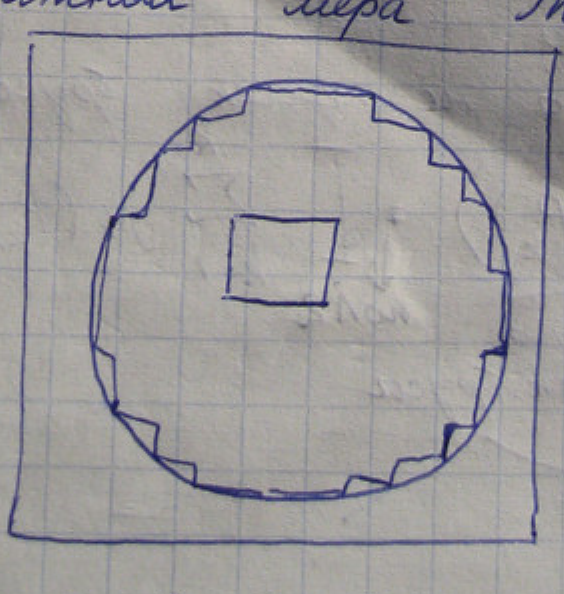
$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

4) Если $A \subset B$, то $\mu A \leq \mu B$.

$\mu(B) = \mu(\underbrace{(B \cap A)}_{A} \sqcup (B \setminus A)) = \mu A + \mu(B \setminus A) \geq \mu A$

] A – произвольное огр. мн-во в $\mathbb{R}^N$

$\boxed{\text{Опр}}$ Нижняя мера Жордана $\mu_* A = \sup\limits_{\substack{P\text{ – прост. мн-ва} \\ P \subset A}} \mu P$



Замеч. Нижн. мера мн-ва всегда конечна

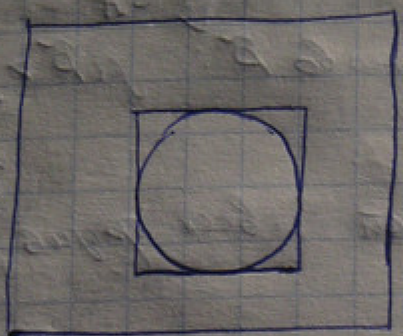
$0 \leq \mu_* A < \infty$.

(Найдем брус Π, содержащий A)

$\forall P \subset A: P \subset \Pi \Rightarrow \mu P \leq \mu \Pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\limits_{\substack{P-\text{прост.}\\ P\subset A}} P \leq \mu \Pi)$

$\boxed{\text{Опр}}$ Верхная мера Жордана $\mu^* A = \inf\limits_{\substack{P-\text{прост}\\ P\supset A}} \mu P.$



Замеч Если A - простое мн-во, то $\mu_* A = \mu^* A = \mu A.$

из опр-я и св-в

Замеч Для произв. огранич. A $\mu_* A \leq \mu^* A$

Док-во.

$\forall P, \widetilde{P}$ - пр. мн-в $P \subset A \subset \widetilde{P}$

$\mu P \leq \mu \widetilde{P}.$

$\Rightarrow \forall$ мн-ва $\widetilde{P}$ - прост. и сод A $(A \subset \widetilde{P})$: $\mu_* A = \sup\limits_{\substack{P-\text{прост}\\ P\subset A}} \mu \Pi \leq \mu \widetilde{P}.$

$\Rightarrow \mu_* A \leq \inf\limits_{\substack{\widetilde{P}\supset A\\ \widetilde{P}-\text{прост.}}} \mu \widetilde{P} = \mu^* A$

$\boxed{\text{Опр}}$ Огр. мн-во A наз. измеримым по Жордану, если $\mu_* A = \mu^* A$. В этом случае $\mu A := \mu_* A = \mu^* A$ назыв. мерой Жордана мн-ва A.

Замеч Рассм. нижн. меру Ж μ_*, дост. огран^ичиться^ прост. мн-ми, явл конечн. объедин. открытых брусов.

Рассматривая верх. м. Ж. μ^*, дост. ограничиваться прост. мн-ми, явл. конечным объединением замкнутых брусов

$\boxed{\text{Утв}}$ $\exists$ A - огр. мно-во. Тогда:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ P - простое мно-во, явл. конечным объединением откр. брусов: $P \subset A$

$$\mu_* A < \mu P + \varepsilon$$ (почти нижняя мера Жордана)

Док-во.

Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$. Найдем пр. мно-во $\tilde{P}$: $\tilde{P} \subset A$, $\mu \tilde{P} > \underline{\mu_* A - \varepsilon}$.

это число верхней грани, не явл.

(Заменим) Получим P из $\tilde{P}$ заменой всех брусов, сост. $\tilde{P}$, на откр.

Тогда $\mu P = \mu \tilde{P} > \mu_* A - \varepsilon$.

$$P \subset \tilde{P} \subset A$$

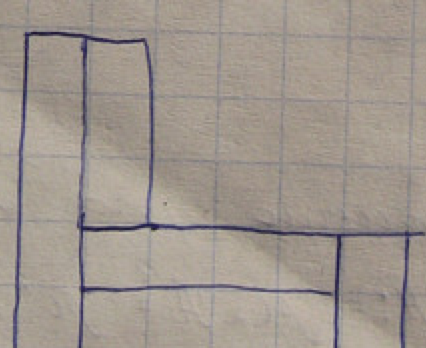
18.02.14.

Лекция №3.

$\Pi = J_1 \times \ldots \times J_N$ брус

$|\Pi| = \underbrace{m\Pi = \mu\Pi}_{=} = |J_1| \cdot \ldots \cdot |J_N|$

$P = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} \Pi_j$ мера $\mu P = \sum\limits_{j=1}^{k} |\Pi_j|$



Док-ем, что если P_1 и P_2 - простые мно-ва, то:

$$\mu(P_1 \cup P_2) = \mu P_1 + \mu P_2 - \mu(P_1 \cap P_2)$$

$$P_1 \subset P_2 \Rightarrow \mu P_1 \le \mu P_2$$

Если $P_1 \subset P_2$, то $\mu P_2 - \mu P_1 = \mu(P_2 \setminus P_1)$

Брус Π $\quad \operatorname{int}\Pi \subset \Pi \subset \overline{\Pi}$

внутр. часть $\quad$ замыкание (заменив все промеж. на отр.)

$$\mu(\operatorname{int}\Pi) = \mu\overline{\Pi} \Rightarrow \mu(\overline{\Pi} \setminus \operatorname{int}\Pi) = 0.$$

$$\Rightarrow \mu(\overline{\Pi} \setminus \Pi) = \mu(\Pi \setminus \operatorname{int}\Pi) = 0.$$

A - произв. огр. подмнво $\mathbb{R}^N$, то $\mu_* A$ ← нижн. мера Жордана мноваA

$$\mu_* A = \sup_{\substack{P - \text{простое} \\ P \subset A}} \mu P$$

$$\mu^* A = \inf_{\substack{P - \text{прост.} \\ P \supset A}} \mu P \quad \text{- верхняя мера Жордана.}$$

(P содержит A)

$$\mu_* A \le \mu^* A$$

A_1 входит в A_2

Если $A_1 \subset A_2$, то $\mu_* A_1 \le \mu_* A_2$

$$\mu^* A_1 \le \mu^* A_2$$

Огр. Мново A (лежащ. в $\mathbb{R}^N$) измеримо по Жордану, если $\mu_* A = \mu^* A$ и мерой Жордана мно-ва A назыв. $\mu_* A = \mu^* A$ $\quad (\mu A)$

Замеч. Простое мново измеримо по Жорд. Мера Жордана прост. мнова совпадает с мерой, введенной изначально.

$\mathbb{R}^1$: $[0,1] \cap \mathbb{Q}$

нижн. м. Жор. - 0 => не измеримо

верхняя м. Ж. - 1

$\mathbb{R}^2$: $[0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$

декарт. произвед (обе коорд. рацион)

нижн. м. ~~0~~ 1 => не измеримо

верх м 0

Критерий измеримости по Жордану

Теор. Огр. подмно-во $A \subset \mathbb{R}^N$ измеримо по Жордану т. и т. т., к:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ P_0$ - откр простое мно-во

$\overline{P}$ - замкнутое простое мно-во:

$P_0 \subset A \subset \overline{P}$ и $\mu \overline{P} - \mu \overline{P_0} < \varepsilon$.

Док-во:

$\Rightarrow$ ∃ A измеримо по Жордану.

[$\exists x: f(x) \Rightarrow \forall x \ f(x)$ - женская индукция]

Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$. Найдем P_1 - простое мно-во:

$P_1 \subset A \qquad \mu P_1 > \sup\limits_{\substack{P\text{-прост.}\\ P \subset A}} \mu P - \frac{\varepsilon}{2} \ =$

P_1 входит в A

$= \mu_* A - \frac{\varepsilon}{2} = \mu A - \frac{\varepsilon}{2}$

∃ P_1 (простое мно-во) $= \bigsqcup\limits_{j=1}^{M} \Pi_j$

конечное объединение попарно не пересек. брусов

$P_0 = \bigsqcup\limits_{j=1}^{M} \operatorname{int} \Pi_j$

P_0 - откр. простое мно-во. $\quad P_0 \subset P_1 \subset A \quad \mu P_0 = \mu P_1 > \mu A - \frac{\varepsilon}{2}$

Найдем P_2 - простое мно-во: $P_2 \supset A$:

P_2 содержит A

$: \mu P_2 < \inf\limits_{\substack{P\text{-прост}\\ P \supset A}} \mu P + \frac{\varepsilon}{2}$

∃ $P_2 = \bigsqcup\limits_{j=1}^{K} \widetilde{\Pi}_j$

в кач-ве $\overline{P}$ (P замкн.) $= \bigcup\limits_{j=1}^{K} \overline{\widetilde{\Pi}_j}$ замкн.

$\overline{P}$ - простое мно-во, замкн., $\overline{P} \supset P_2 \supset A$,

$\mu \overline{P} = \mu P_2 < \mu A + \frac{\varepsilon}{2}$

мно-во измеримо (что верхн. м. Ж, что нижн. м. Ж - одинаково)

$\Rightarrow \mu\overline{P} - \mu P_0 < \mu A + \frac{\varepsilon}{2} - (\mu A - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$ ◪

$\Leftarrow$ $0 \le \mu^* A - \mu_* A \le \mu\overline{P} - \mu P_0 < \varepsilon$

(Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$ - и по условию)

В силу произвольности ε: $\mu_* A = \mu^* A$, т.е. мно-во A измеримо по Жорд. ■

A - мно-во.
$\mathrm{int}\, A$ - внутр. т. мнова A
$\mathrm{ext}\, A$ - внешние т. мнова A.
∂A - граница мно-ва A.

Теорема Критерий измеримости по Жордану.

$\mu A = 0$ (A измеримо по Жорд. и мера $= 0$)
$\Updownarrow$
$\mu^* A = 0$

Замечание

Огранич. мнова A, лежащ. в $\mathbb{R}^N$, измеримо по Жордану е.и.т.е. $\mu(\partial A) = 0$ (мера границы $A = 0$)
(т.и.т.т.к. $\mu^*(\partial A) = 0$)

Док-во.

$\Rightarrow$ $\exists$ A - измеримо. Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$. Найдем простые мно-ва P_0 (откр.) и $\overline{P}$ (замкн.): $P_0 \subset A \subset \overline{P}$;

$\mu\overline{P} - \mu P_0 = \mu(\overline{P} \setminus P_0) < \varepsilon$.

$P_0 \subset \mathrm{int}\, A$ (P_0 вход. во внутренность A)
($x \in P_0 \Rightarrow \exists\ \delta > 0: B_\delta(x) \subset P_0 \subset A \Rightarrow x \in \mathrm{int}\, A$)

$\overline{P} \supset A \cup \partial A$
(если $x \notin \overline{P}$: $\exists\ \delta > 0$: $B_\delta(x) \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{P} \subset \mathbb{R}^N \setminus A$
$\Rightarrow x \in \mathrm{ext}\, A$)

$\partial A \subset \overline{P} \setminus P_0$

$\Rightarrow \mu^*(\partial A) \le \mu(\overline{P} \setminus P_0) < \varepsilon$. — В силу произвольности ε

$\mu^*(\partial A) = 0 \Rightarrow \partial A$ измерима и $\mu(\partial A) = 0$.

граница — мера границы

$\Leftarrow$] ∂A измерима и ее мера $= 0$: $\mu(\partial A) = 0$.

Док-м, что A измер.

<u>Лемма</u>: Если Π — брус : $\Pi \cap \partial A = \varnothing$

$\Rightarrow \Pi \subset \operatorname{int} A$ или $\Pi \subset \operatorname{ext} A$.

Док-во:

От противного:] брус $\Pi \cap \partial A = \varnothing$, но $\exists\ x_{ext} \in \operatorname{ext} A$

$\exists\ x_{int} \in \operatorname{int} A \cap \Pi$

Соединим точки x_{int} и x_{ext} отрезком. Будем делить отрезок пополам, выбирая каждый раз половину, у которой каждый конец лежит в $\operatorname{ext} A$, другой $\in \operatorname{int} A$.

Общая точка этих отр. (пред. точка концов этих отрезков) $\in \Pi \cap \partial A$. — противоречие.

$\boxtimes$ лемма

Найдем замкнутый брус $\mathcal{P} \supset A$. содержит все предел. т. мн-ва A.

($\mathcal{P}$ содержащий все мн-во A)

$(\Rightarrow \mathcal{P} \supset A \cup \partial A)$

Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$.

Найдем P — простое мн-во: $P \supset \partial A$ и $\mu P < \varepsilon$

Заменив P на $P \cap \mathcal{P}$ можно считать, что $P \subset \mathcal{P}$ (P целиком входит в рассматриваемый брус)

] $P = \bigsqcup_{j=1}^{M} \Pi_j$: Положим:

$\overline{P} = \bigcup_{j=1}^{M} \overline{\Pi}_j$ (Давайте положим и забудем =))

] $\underbrace{\mathcal{P} \setminus P}_{\text{простое}} = \bigsqcup_{j=1}^{K} \widetilde{\Pi}_j$

$\forall j \in \{1..K\}$ $\widetilde{\Pi}_j \cap \partial A = \varnothing \Rightarrow$ эти брусы лежат либо в $\operatorname{int} A$ (согл. лемме), либо в $\operatorname{ext} A$.

$$P_0 := \bigsqcup_{j:\,\widetilde{\Pi}_j \subset \operatorname{int} A} \widetilde{\Pi}_j \subset A$$

простое мн-во

$$P_e := \bigsqcup_{j:\,\widetilde{\Pi}_j \subset \operatorname{ext} A} \widetilde{\Pi}_j \subset \operatorname{ext} A$$

содержит

$$P_1 = P_0 \sqcup P \supset \operatorname{int} A \cup \partial A \supset A.$$

простое мн-во

было изначально (покрывает границу)

$$\left(\operatorname{int} A \cup \partial A \subset \mathcal{P} = P \sqcup P_0 \sqcup P_e\right)$$

не содержит точек внутр. A и границы A

$$0 \le \mu^* A - \mu_* A \le \mu P_1 - \mu P_0 \ominus$$

простое мн-во влож. в P_1

$$\ominus\ \mu(P_1 \setminus P_0) = \mu P < \varepsilon$$

границу покрыли

В силу произвольности ε $\mu^* A = \mu_* A$, т.е. A измеримо по Жордану ■

Лекция №4

21.02.14

$$\mu_* A = \sup_{\substack{P - \text{прост} \\ P \subset A}} \mu P \qquad \mu^* A = \inf_{\substack{P - \text{прост} \\ P \supset A}} \mu P$$

мн-во измеримо, если верхняя мера = нижней

Теорема Критерий изм.
Огр. множ-во $A \subset \mathbb{R}^N$ изм $\Leftrightarrow \mu^*(\partial A) = 0$

Лемма Пусть A, B — огр. подмнож-ва $\mathbb{R}^N$
Тогда $\mu^*(A \cup B) \le \mu^* A + \mu^* B$

Док-во

Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$.
Найдем P_1 — простое множ-во $P_1 \supset A$, $\mu P_1 \le \mu^* A + \varepsilon$
Найдем P_2 — простое множ-во $P_2 \supset B$, $\mu P_1 \le \mu^* B + \varepsilon$
Тогда $P_1 \cup P_2$ — простое множ-во, $P_1 \cup P_2 \supset A \cup B$.

$$\mu(P_1 \cup P_2) \le \mu P_1 + \mu P_2 \le \mu^* A + \mu^* B + \varepsilon.$$
$$\geq$$
$$\mu^*(A \cup B)$$

В силу произвольности ε $\mu^*(A \cup B) \le \mu^* A + \mu^* B$ ∎

Сл. Пусть A, B — огр. подмнож-ва $\mathbb{R}^N$,
$\mu^* A = \mu^* B = 0$
Тогда $\mu^*(A \cup B) = 0$

(= Если A изм. и имеет меру 0, B изм. и имеет меру 0, то $A \cup B$ изм и имеет меру 0)

Замеч. Если $\mu^* B = 0$ и $A \subset B$, то $\mu^* A = 0$.

Лемма Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^N$. Тогда

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$$
$$\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$$
$$\partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B$$

$A \cup B$	int B	ext B	∂B
int A	int	int	int
ext A	int	ext	
∂A	int		

$\partial(A \cup B) \subset \cup \cup \subset (\partial A \cup \partial B)$

$A\cap B$	$\operatorname{int} B$	$\operatorname{ext} B$	∂B
$\operatorname{int} A$	int	ext	
$\operatorname{ext} A$	ext	ext	ext
∂A		ext	

$$\partial(A\cap B) \subset \ \cup \ \cup \ \subset (\partial A \cup \partial B)$$

$A\setminus B$	$\operatorname{int} B$	$\operatorname{ext} B$	∂B
$\operatorname{int} A$	ext	int	
$\operatorname{ext} A$	ext	ext	ext
∂A	ext		

$$\partial(A\setminus B) \subset \ \cup \ \cup \ \subset (\partial A \cup \partial B)$$ ■

$\boxed{\text{Лемма}}$] A, B - огр. подмн-ва $\mathbb{R}^n$, $A\cap B = \varnothing$.
Тогда $\mu_*(A \underset{?}{\sqcup} B) \geq \mu_* A + \mu_* B$.

Док-во

Заф. произв. $\varepsilon > 0$. Найдем P_1 - простое мн-во, $P_1 \subset A$, $\mu P_1 \geq \mu_* A - \frac{\varepsilon}{2}$.
Найдем P_2 - простое мн-во, $P_2 \subset B$, $\mu P_2 \geq \mu_* B - \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $P_1 \cup P_2$ - простое мн-во, $(P_1 \cup P_2) \subset (A\cup B)$

$$\mu_*(A\cup B) \geq \mu(P_1 \cup P_2) = \mu P_1 + \mu P_2 \geq \mu_* A + \mu_* B - \varepsilon$$

не пересек

В силу произв. ε устремим к 0. ■

Теорема ∃ A, B − изм. по J. подмн-ва $\mathbb{R}^N$.

Тогда $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ − изм. по J.

Док-во:

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$$

$$\mu^* = 0 \quad \mu^* = 0 \quad \leftarrow \mu^* = 0$$

$\mu^*(\partial(A \cup B)) = 0 \Rightarrow A \cup B$ изм.

Теорема ∃ A, B − измеримые по J подмн-ва $\mathbb{R}^N$,

$A \cap B \neq 0$. Тогда $\mu(A \sqcup B) = \mu A + \mu B$.

Док-во:

$$\mu(A \sqcup B) = \mu^*(A \sqcup B) \leq \mu^* A + \mu^* B$$

$$\mu_*(A \sqcup B) \geq \mu_* A + \mu_* B$$

■

Сл-вие ∃ A, B − измеримые подмн-ва $\mathbb{R}^N$. Тогда

$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B - \mu(A \cap B)$$

$$\mu(A) = \mu((A \cap B) \sqcup (A \setminus B)) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B)$$

$$\Rightarrow \mu(A \setminus B) = \mu A - \mu(A \cap B)$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(B \sqcup (A \setminus B)) = \mu B + \mu(A \setminus B) =$$

$$= \mu B + \mu A - \mu(A \cap B)$$

■

∃ A, B − изм. по J подмн-ва $\mathbb{R}^N$

Опр A и B не перекрываются, если $\mu(A \cap B) = 0$

Утв A и B не перекрыв. е. и т. е. $A \cap B \subset (\partial A \cup \partial B)$.

Док-во

$\Leftarrow$ $\mu(\partial A) = \mu(\partial B) = 0$.

Значит $\mu(A \cap B) \le \mu(\partial A) + \mu(\partial B) = 0$, т.е. A и B не перекрыв.

$\Rightarrow$ Предп. что $A \cap B \not\subset \partial A \cup \partial B$. Тогда $\exists\, x \in A \cap B$

$x \in \operatorname{int} A$

$x \in \operatorname{int} B$

Значит $x \in \operatorname{int}(A \cap B)$, т.е. $\exists\, \delta > 0$ $B_\delta(x) \subset (A \cap B)$

$\Rightarrow \exists\, \Pi$ - брус положит. меры: $\Pi \subset B_\delta(x) \subset (A \cap B)$

Тогда $0 < \mu \Pi \le \mu(A \cap B)$ Значит A и B перекрыв.

] X - непустое подмнов-во $\mathbb{R}^N$.

$\operatorname{diam} X := \sup\limits_{x_1 x_2 \in X} \rho(x_1, x_2)$.

$\operatorname{diam} \varnothing := 0$

] A - измеримое по J подмно-во $\mathbb{R}^N$.

$\boxed{\text{Опр}}$ Конечная совокупность T мно-в

$T = \{A_j\}_{j=1}^M$ наз. разбиением A, если A_j - измеримые по J, попарно не перекрыв. мно-ва, $\bigcup\limits_{j=1}^M A_j = A$.

$\boxed{\text{Опр}}$ Отмеч. разбиением A наз. упорядоч. пара

$\Pi = (T, \xi)$, где $T = \{A_j\}_{j=1}^M$ - разбиение A,

а $\xi = \{\xi_j\}_{j=1}^M$ - набор отм. точек $\xi_j \in A_j$ $(j = 1 \dots M)$

$\boxed{\text{Опр}}$ Диаметром разб. (отм. разб) $(\operatorname{diam} T, \operatorname{diam} \Pi)$ будем наз-ть наиб. из diam мнов $A_1 \dots A_M$.

$\operatorname{diam} T = \max\limits_{j=1 \dots M} (\operatorname{diam} A_j)$

~~Мнов-во огр. если его диам.~~

] $f: A \to \mathbb{R}$.

Введем интегр. суммы Римана

$$\sigma(f, \Pi) = \sum_{j=1}^{M} f(\xi_j)\, \mu A_j.$$

Опр Ф-я f интегрир. по R на A и J - интеграл f по мнову A, если: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \Pi$ - отм. разб. с $\operatorname{diam} \Pi < \delta$

$$|\sigma(f, \Pi) - J| < \varepsilon$$

Обозн. ч/з $\mathcal{A}$ мнново всех отмеч. разбиений A. Будем считать, что ф- f фикс. и рассм. $\sigma(f, \Pi)$ как ф-ю Π. ч/з B_δ обозн мнове всех отм. разбиений с $\operatorname{diam} < \delta$.

$$\mathcal{B}_R = \{B_\delta\}_{\delta > 0} \quad \mathcal{B}_R \text{ - база на } \mathcal{A}$$

В этих обознач. интеграл R - это предел интегральных сумм по базе $\mathcal{B}_R$.

[рассм. непустые измеримые мнова]

$$\int_A f\, d\mu \qquad \text{пл-ть: } \iint_A f(x,y)\, dx\, dy \qquad \iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{N} f(x_1 \ldots x_N)\, dx_1 \ldots dx_N.$$

Если $\mu A = 0$, то $\forall$ ф-я f интегр. по A и $\int_A f\, d\mu = 0$

(все инт. суммы $\sigma \equiv 0$)

$\exists$ $f: A \to \mathbb{R}$

Введем интегр. суммы Римана

$$\sigma(f, \Pi) = \sum_{j=1}^{M} f(\xi_j)\,\mu A_j.$$

$\boxed{\text{Опр}}$ Ф-я f интегрир. по R на A и I - интеграл f по мн-ву A, если:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall \Pi$ - отм. разб. с $\operatorname{diam} \Pi < \delta$

$$|\sigma(f, \Pi) - I| < \varepsilon$$

Обозн. ч/з $\mathcal{A}$ мн-во всех отмеч. разбиений A.

Будем считать, что ф. f фикс. и рассм. $\sigma(f, \Pi)$ как ф-ю Π

ч/з B_δ обозн мн-во всех отм. разбиений с $\operatorname{diam} < \delta$.

$$\mathcal{B}_R = \{B_\delta\}_{\delta > 0} \qquad \mathcal{B}_R \text{ - база на } \mathcal{A}$$

В этих обознач. интеграл R - это предел интегральных сумм по базе $\mathcal{B}_R$.

[рассм. непустые измеримые мн-ва]

$$\int_A f\,d\mu \qquad \text{пл-ть: } \iint_A f(x, y)\,dx\,dy \qquad \iiint_A f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\underbrace{\int \dots \int}_{N} f(x_1 \dots x_N)\,dx_1 \dots dx_N.$$

Если $\mu A = 0$, то $\forall$ ф-я f интегр. по A и $\int_A f\,d\mu = 0$

(все инт. суммы $\sigma \equiv 0$)

25.02.14

A - изм. подмнов-во $\mathbb{R}^N$

Опр. Сов-сть непустых мн-в $\{A_j\}_{j=1}^M$ из $\mathbb{R}^N$ наз. разбиением A, если все A_j измеримы, A_j попарно не перекрыв.

$$\bigcup_{j=1}^M A_j = A.$$

Утв.] $\{A_j\}_{j=1}^M$ - разб. A. Тогда $\mu A = \sum_{j=1}^M \mu A_j$

Сформ. - частный случай след. утв:] $\{A_j\}_{j=1}^M$ измер. попарно не перекрыв. мн-ва.

Тогда $\mu\left(\bigcup_{j=1}^M A_j\right) = \sum_{j=1}^M \mu A_j$

Инд. по M

$M=2$ $\quad \mu(A_1 \cup A_2) = \mu A_1 + \mu A_2 - \cancel{\mu(A_1 \cap A_2)} \to 0$

Предп., что док-но для $M=m$. Д-м для $M=m+1$.

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m+1} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j \cup A_{m+1}\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) + \mu(A_{m+1}) -$$

$$- \mu\left(\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) \cap A_{m+1}\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu A_j + \mu A_{m+1} - \cancel{\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} (A_j \cap A_{m+1})\right)} \to 0$$

чтд ∎

Отмеч. разбиение - $\Pi = (T, \xi)$, где $T = \{A_j\}_{j=1}^M$,

а $\xi = \{\xi_j\}_{j=1}^M$ - набор отмеч. точек: $\xi_j \in A_j$. $(j = 1..M)$

Ф-я $f(x)$ действ. значен. ф-я : $\int\limits_A f(x)\,d\mu = J \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \Pi$ отмеч. разб. A

с $\operatorname{diam} A < \delta$ $\quad \left| \left(\sigma(f, \Pi) \equiv \sum_{j=1}^M f(\xi_j)\, \mu A_j\right) - J \right| < \varepsilon.$

$$\int\limits_A 1\, d\mu = \mu A$$

] A - непустое измеримое мн-во.

$\delta > 0$ - число.

$$A_\delta := \{x \in A : \underbrace{\rho(x, \overbrace{int A}^{}) }_{} \le \delta\}$$

замкнутость

внутр-ть

$$\rho(x, int A) = \inf_{y \in int A} \rho(x, y)$$

$$\mu A = 0 \qquad \int_A f \, d\mu = 0.$$

$\boxed{\text{Замечание}}$ Для произв. $\delta > 0$ A_δ - огр. замкн. подмн-во $\mathbb{R}^N$

Огр-сть: $A_\delta \subset A$, A изм. $\Rightarrow$ огр.

Зам-сть:] т. $x \notin A_\delta$, т.е. $\rho(x, int A) = \delta + \gamma$, где $\gamma > 0$

Тогда $\forall \tilde{x} \in B_{\frac{\gamma}{2}}(x)$, $\forall y \in int A$ $\quad \rho(\tilde{x}, y) \geq \rho(x, y) - \rho(x, \tilde{x}) \geq$

нерво Δ.

$\geq \delta + \gamma - \frac{\gamma}{2} = \delta + \frac{\gamma}{2}$, т.е. $\rho(\tilde{x}, int A) \geq \delta + \frac{\gamma}{2} > \delta \Rightarrow$

$\tilde{x} \notin A_\delta$.

$\Rightarrow B_{\frac{\gamma}{2}}(x) \cap A_\delta = \varnothing$ (не пересек.)

$\boxed{\text{Утв}}$] A - измеримое непустое подмн-во $\mathbb{R}^N$

$f \in R(A)$, g - ф-я, определ. на A и $\exists \delta > 0$: $f \equiv g$ на A_δ

Тогда

$g \in R(A)$ и $\displaystyle\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$.

Док-во.

Обоз.: $\int f \, d\mu = I$. Из о.р-я интеграла.

Зафикс. пр. $\varepsilon > 0$.

Найдем $\delta_0 > 0$: $\forall \Pi = \{T, \xi\}$

$(T = \{A_j\}_{j=1}^{M}$, $\xi \in \{\xi_j\}_{j=1}^{M})$ - отмеч. разб. A

с $\operatorname{diam} T < \delta_0$ $\quad |\sigma(f,\Pi) - J| < \varepsilon$

Положим $\delta_k = \min\{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{усл}}}{\delta}, \delta_0\}$. Рассм. произв. отмеч.

разбиение $\Pi = (T, \xi)$ мн-ва A с $\operatorname{diam} \Pi < \delta_k$.

Заметим, что если отмеч. точка ξ_j (для некот. j) $\notin A_\delta$,

то $A_j \subset \underbrace{B_{\delta_k}(\xi_j)}_{\substack{\text{не сод.} \\ \text{т. } \operatorname{int} A, \text{ т.к.}}} \cap A \subset \partial A$, $\quad \mu(\partial A) = 0 \Rightarrow \mu A_j = 0$

(или δ)

$\rho(\xi_j, \operatorname{int} A) > \delta$.

Тогда $|\sigma(g,\Pi) - J| = \left|\sum\limits_{j=1}^{M} g(\xi_j)\mu A_j - J\right| =$

$= \left|\sum\limits_{j=1}^{M} f(\xi_j)\mu A_j - J\right| < \varepsilon.$ ч.т.д. ■

$\boxed{\text{Утв}}$ Пусть A – непуст. изм. подмн-во $\mathbb{R}^N$. $f \in R(A)$.

Тогда $\exists\, \delta > 0$: f огр. на A_δ.

Док-во.

Взяв в кач-ве ε – единицу найдем такое $\delta > 0$:

$\forall\, \Pi$ – отм. разб. с $\operatorname{diam} \Pi \le 100\delta N$ $\quad \left|\sigma(f,\Pi) - \int\limits_A f\,d\mu\right| < \underset{=1}{\varepsilon}$

$\operatorname{diam}\Pi_1 < \frac{100}{\delta N}$ $\quad \overset{\|}{J}$

Отметим, что тогда $\forall\, \Pi_1, \Pi_2$ отм. разб. с $\operatorname{diam}\Pi_1 < 100\delta N$

$\operatorname{diam}\Pi_2 < 100\delta N$

$|\sigma(f,\Pi_1) - \sigma(f,\Pi_2)| < 2$

Возьмем произв. т. $x \in A_\delta$, ч/з K_x обозн. открытый кубик с центром в т. x. и длиной ребер 3δ

$B_{1{,}5\delta}(x) \subset K_x$. т.к. $\rho(x, \operatorname{int} A) \le \delta$

$B_{1{,}5\delta}(x) \cap \operatorname{int} A \ne \varnothing \Rightarrow K_x \cap \operatorname{int} A \ne \varnothing$.

$\Rightarrow K_x \cap \operatorname{int} A$ – изм, непустое откр. мн-во.

$\mu(K_x \cap \operatorname{int} A) > 0.$

$\Rightarrow \mu(K_x \cap A) > 0.$

$\operatorname{diam}(K_x \cap A) \le \operatorname{diam} K_x = \sqrt{9\delta^2 \cdot N} \le 100\delta N$

Обозн. $K_x \cap A$ ч/з A_1.

Дополним A_1 произв. образом до разбиения всего A с $\operatorname{diam} < 100\delta N$. $\left(T = \{A_j\}_{j=1}^{M}\right.$ - разб. A, $\left.\operatorname{diam} T < 100\delta N\right)$

Выб. произв. т. $\xi_2 \in A_2$, $\xi_3 \in A_3$ ..., $\xi_M \in A_M$.

Зафикс. пр. т. $\xi_1 \in A_1$. $\exists\ \xi$ - пр. т. A_1.

Положим $\xi = \{\overset{\text{абы какая}}{\xi}, \dots, \xi_M\}$ — отлич. только перв.

$\xi_\Phi = \{\xi_1, \dots, \xi_M\}$

$\Pi_1 = (T, \xi)$, $\Pi_2 = (T, \xi_\Phi)$

$\underbrace{|\sigma(f, \Pi_1) - \sigma(f, \Pi_2)|}_{<\varepsilon} = |f(\xi)\mu A_1 - f(\xi_1)\mu A_1|$

$|f(\xi)\mu A_1| \le \underline{|f(\xi_1)\mu A_1| + \varepsilon}$

не превосх. конст. не зав. от ξ.

$|f(\xi)| < C_x$ Т.е. ф-я f огр. на $K_x \cap A$

Набор кубиков $\{K_x\}_{x \in A}$ обр. открытое покрытие A_γ. $(x \in K_x)$

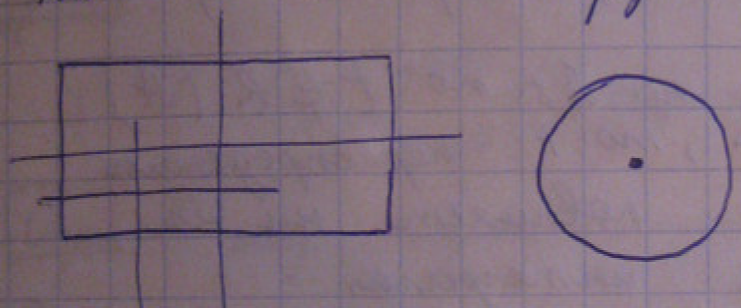
Выберем конечное подпокрытие: $K_{x_1}, \dots, K_{x_L}$ - конечная

система кубиков, покрыв. A_δ.
На каждом кубике, $\cap$ с A (тем более с A_δ) f огр.
Взяв наиб. из констант, огранич f на каждом из
этих кубиков, получим const, огранич. f на всем A_δ.

$\blacksquare$

① Из $\forall$ покрытия замкн. бруса откр. мн-вами можно выделить конечное подпокрытие.

Док-во совп. с 1-мерным. На каждом шаге брус делится пополам по кажд. ребру, т.е. на 2^N меньших брусов



F - огр. замкн. мно-во.

$\{G_\lambda\}$ - откр. покрытие F.

Найдем Π - замкн. брус $\supset F$, содержащий F.

$\{ G_\lambda \} \cup (\mathbb{R}^N)$ - откр. покрытие Π. Выделим конечное подпокрытие бруса Π. Выкинов из него (если надо) $(\mathbb{R}^N \setminus F)$, получим конечное подпокр. F.

Лекция №6

$A \subset \mathbb{R}^N$ - непустое измеримое мно-во

$\Pi = (T, \xi)$

$$\sigma(f, \Pi) = \sum_{j=1}^{K} f(\xi_j)\, \mu A_j$$

$A_\delta = \{x \in A : \rho(x, \operatorname{int} A) \le \delta\}$.

$\boxed{\text{Утв. 1}}$ Если для некот. $\delta > 0$ $f = g$ на A_δ, то f и g одновр. инт. или неинтегрир. на A и в случае инт-сти:

$$\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu.$$

$\boxed{\text{Утв. 2}}$ Если $f \in R(A)$, то $\exists$ $\delta > 0$: f огр. на A_δ.

Обсуждая интегрируемость по R, дост. рассм. огр. на A ф-ции.

(i) если для $\forall \delta > 0$ f не огр. на A_δ, то $f \notin R(A)$

(ii) если $\exists \delta > 0$: f огр. на A_δ, то f переопределим на $A \setminus A_\delta$ нулем. Это не повлияет ни на интегрируемость, ни на значение интеграла.

Но после этого переопределения f стан. огр. на A.

A - измеримое непустое подмно-во $\mathbb{R}^n$ и f огр. на A.

] $T = \{A_j\}_{j=1}^{K}$ - разбиение A.

Положим $m_j = \inf\limits_{x \in A_j} f(x)$

$$M_j = \sup_{x \in A_j} f(x) \qquad j = 1 \dots K.$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $\sum\limits_{j=1}^{K} m_j \mu A_j$ наз. нижней суммой Дарбу, соотв. разбиению T и обознач. $s_*(T) = s_*(f, T)$.

$\sum\limits_{j=1}^{K} M_j \mu A_j$ наз. верхней суммой Дарбу, соотв. разбиению T, и обозн. ч/з $S^*(T) = S^*(f, T)$

$\boxed{\text{Утв}}$ $s_*(T) = \inf\limits_{\substack{\xi = \{\xi_j\}_{j=1}^{K} \\ \xi_j \in A_j}} \sigma(f, (T, \xi))$ $\quad S^*(T) = \sup\limits_{\substack{\xi \in \{\xi_j\}_{j=1}^{K} \\ \xi_j \in A_j}} \sigma(f, (T, \xi))$

Док-во. ①

Зафикс. пр. $\varepsilon > 0$. Найдем для каждого $j \in \{1, \dots, K\}$ найдем $\xi_j \in A_j$

$$f(\xi_j) < m_j + \frac{\varepsilon}{\mu A + 1} \quad \Big| \cdot \mu A_j \ \sum_j$$

$$\sigma(f, (T, \xi)) < s_*(T) + \varepsilon.$$

С другой стороны, $\forall (T, \xi)$ – отм. разб. $f(\xi_j) \geq m_j \ \Big| \times \mu A_j \ \sum_j$

$\sigma(f, (T, \xi)) \geq s_*(T)$ чтд. ■

$\boxed{\text{Утв}}$ $\forall T \quad s_*(T) \leq s^*(T)$.

] $\widetilde{T} = \{B_m\}_{m=1}^{M}$ – ещё одно разбиение A.

$\boxed{\text{Опр}}$. $\widetilde{T}$ наз. измельчением T, если $\forall m \in \{1, \dots, K\}$ $\exists j \in \{1, \dots, K\}$ $B_m \subset A_j$

$\boxed{\text{Замечание}}$ Если $B_m \subset A_{j_1}$, $B_m \subset A_{j_2}$ $(j_1 \neq j_2) \Rightarrow$

$B_m \subset A_{j_1} \cap A_{j_2} \Rightarrow \mu B_m = 0$

$\boxed{\text{Утв}}$ Если $\widetilde{T}$ – измельчение T, то $s_*(T) \leq \underbrace{s_*(\widetilde{T}) \leq s^*(\widetilde{T})} \leq s^*(T)$.

Док-во (правое).

$$s^*(\widetilde{T}) = \sum_{m=1}^{M} \sup_{B_m} f(x)\, \mu B_m = \sum_{j=1}^{K} \sum_{m:\, B_m \subset A_j} \sup_{B_m} f(x)\, \mu B_m \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{K} \sum_{m:\, B_m \subset A_j} \sup_{A_j} f(x)\, \mu B_m = \sum_{j=1}^{K} \sup_{A_j} f(x)\, \mu A_j = s^*(T)$$

■

лев. аналог.

] $\overset{\star}{T} = \{\overset{\star}{A}_l\}_{l=1}^{L}$ – разбиение A

Опр. разбиение $\widetilde{T} = \{B_m\}_{m=1}^{M}$ след. образом.

Рассматриваем всевозм. попарные пересеч. $A_j \cap \overset{\star}{A}_l$

($j = 1 \dots k$, $l = 1 \dots L$) и выкидываем пустые.

$\widetilde{T}$ – измельчение T и одновр. изм. $\overset{\star}{T}$

$\widetilde{T}$ наз. объединением разб. T и $\overset{\star}{T}$.

$\boxed{\text{Утв}}$ $\forall\, T, \overset{\star}{T}$ – разб. A

$$s_*(T) \le s^*(\overset{\star}{T})$$

Док-во:

$\exists\, \widetilde{T}$ – объединение разбиений T и $\overset{\star}{T}$. Тогда

$$s_*(T) \le s_*(\widetilde{T}) \le s^*(\widetilde{T}) \le s^*(\overset{\star}{T}). \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Опр}}$ Нижний интеграл Дарбу $J_* = \sup\limits_{T\text{-разб.}} s_*(T)$

Верхний интеграл Дарбу $J^* = \inf\limits_{T\text{-разб-ем } A} s^*(T)$

$\boxed{\text{Утв}}$ $J_* \le J^*$

Док-во.

Для произв. (фикс) разбиение $\overset{\star}{T}$ мн-ва A. Для всех разбиений T мн-ва A: $s_*(T) \le s^*(\overset{\star}{T})$.

$\Rightarrow J_* = \sup\limits_{T} s_*(T) \le s^*(\overset{\star}{T})$

$\Rightarrow \forall\, \overset{\star}{T} \quad s^*(\overset{\star}{T}) \ge J_* \Rightarrow J^* = \inf\limits_{\overset{\star}{T}} s^*(\overset{\star}{T}) \ge J_* \quad \blacksquare$

[Нижн. и верх $\int$ Дарбу всегда $\exists$!!!!!!]

$\boxed{\text{Теорема}}$ Критерий интегрируемости Дарбу.

След. утв. эквивал.:

(1) $f \in R(A)$ (и $\int\limits_A f\, d\mu = J$)

(2) $J_* = J^*$ $(= J)$

Док-во:

(1) $\Rightarrow$ (2) $\quad \exists\, f \in R(A)$ и $\int\limits_A f\, d\mu = J$.

Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$.
Найдем $\delta > 0$: $\forall\, \Pi = (T, \xi)$ отм. разб. A с $\operatorname{diam} \Pi < \delta$

$|\sigma(f, \Pi) - J| < \varepsilon$.

Тогда $\forall\, \xi = \{\xi_j\}_{j=1}^{K}$ $\quad (\xi_j \in A_j)$

$$J - \varepsilon \le \sigma(f, (T, \xi)) \le J + \varepsilon$$

$$J - \varepsilon \le \inf_{\xi} \sigma(f, (T, \xi)) = s_*(T) \le J_* \le$$

$$\le J^* \le S^*(T) = \sup_{\xi} \sigma(f(T, \xi)) \le J + \varepsilon.$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

$\exists\ \Pi$ - произв. брус. B-мнво: $B \cap \Pi \ne \varnothing$ и $(\mathbb{R}^N \setminus B) \cap \Pi \ne \varnothing$

Тогда $\Pi \cap \partial B \ne \varnothing$.

Док-во

(В брусе Π находим 2 т: x, y: $x \in B$, $y \in \mathbb{R}^N \setminus B$. Рассм. отр., соедин. т. x и y.

Т.к. Π - брус, этот отр. целиком лежит в Π. Будем делить отр. пополам, каждый раз выбирая ту половину, у которой один конец лежит в B, а второй в $\mathbb{R}^n \setminus B$.
Общая т. этих отр. будет лежать в $\Pi \cap \partial B$.

Док-во.

$\exists\, J_* = J^*$ (обозн. это число ч/з J).
Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$. Положим const $C = 4 \cdot 3^N \sup\limits_A |f| + 1^2$.

Найдем разбиение T_1 и T_2 мн-ва A: $s_*(T_1) \ge \underset{\overset{\parallel}{J}}{J_*} - \frac{\varepsilon}{C}$

$S^*(T_2) \le \underset{\overset{\parallel}{J}}{J^*} + \frac{\varepsilon}{C}$

чтобы не делить на 0 вдруг $= 0$.

∃ T_0 - объединение разбиений T_1 и T_2. Тогда:

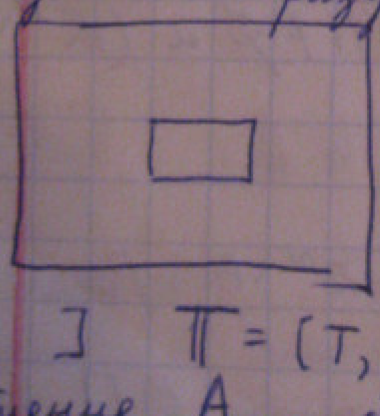
$$I - \frac{\varepsilon}{C} \le S_*(T_1) \le S_*(T_0) \le S^*(T_0) \le S^*(T_2) \le I + \frac{\varepsilon}{C}$$

∃ $T_0 = \{A_j\}_{j=1}^{K}$

Рассмотрим $\bigcup\limits_{j=1}^{K} \partial A_j$ ← имеет меру 0. Покроем это объединение конечной совокупностью брусов с суммой мер $< \frac{\varepsilon}{C}$. Если среди брусов оказ. вырожд. (хоть 1 ребро $=0$), то заменим их на невырожд (содерж. исх) так, что сумма мер остается $< \frac{\varepsilon}{C}$. Все ребра положит. длины.

Ч/з δ обозн. min длину ребер этих брусов. ($\delta > 0$) а ч/з P - объединение брусов, полученн. из брусов этой совокупности раздуванием в 3 раза отн. центра бруса

лин. размер.



$$\mu P \le \sum \mu \Pi_s \cdot 3^N \le \varepsilon \cdot \frac{3^N}{C}$$

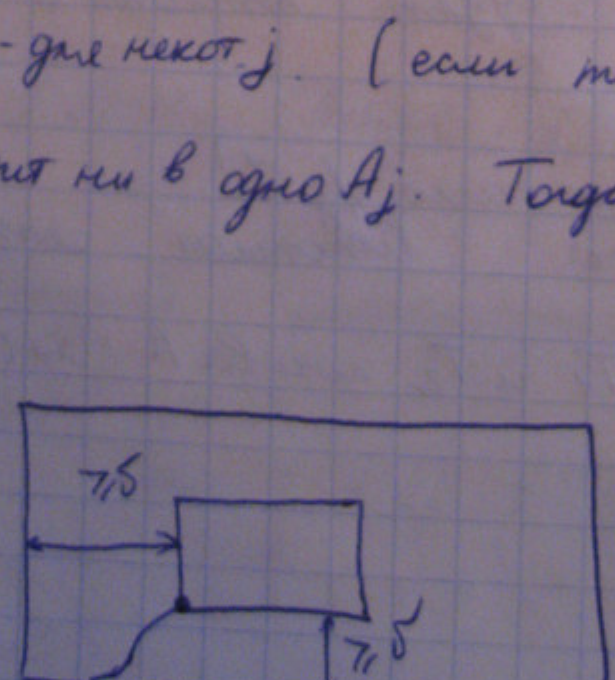
∃ $\Pi = (T, \xi)$ → $\left(T = \{B_m\}_{m=1}^{M}\right)$ → произв. отмеч. разбиение A с $\operatorname{diam} \Pi < \delta$.

Заметим, что B_m дел. на 2 категории.

(1) $B_m \subset A_j$ - для некот. j. (если таких j неск., то $\mu B_m = 0$)

(2) B_m не входит ни в одно A_j. Тогда $B_m \cap$ с ∂ хотя одной границей A_j. (исп. лемму выше)

Тогда $B_m \subset P$



Тогда $\sigma(f,\Pi) = \sum_{m=1}^{M} f(\xi_m)\mu B_m = \sum_{j=1}^{K} \sum_{m: B_m \subset A_j} f(\xi_m)\mu B_m +$

$+ \sum_{\substack{m: B_m \text{ не входят в } A_j \\ \text{ни в одно}}} f(\xi_m)\mu B_m \le$

$\le \sum_{j=1}^{K} \sum_{m: B_m \subset A_j} \sup_{B_m \to A_j} f \cdot \mu B_m + \sum_{m: \text{оставшиеся}} \sup_A |f| \mu B_m$

$\le \underbrace{\sum_{j=1}^{K} \sup_{A_j} f \left(\mu A_j\right.} - \mu\left(A_j \setminus \bigcup_{m: B_m \subset A_j} B_m\right)\Big) + \sup_A |f| \mu P \le$

$\le \underbrace{S^*(T_0)} + 2\sup_A |f| \mu P \le S^*(T_0) + 2\sup_A |f| \cdot 3^N \frac{\varepsilon}{C} \le$

$\le S^*(T_0) + \frac{\varepsilon}{2}$

Аналогично $\sigma(f,T) \geqslant S_*(T_0) - \frac{\varepsilon}{2}$.

$S^*(T_0) < \mathcal{J} + \frac{\varepsilon}{C} < \mathcal{J} + \frac{\varepsilon}{2}$.

$\Rightarrow \sigma(f,\Pi) < S^*(T_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \mathcal{J} + \varepsilon$

Аналогично: $\sigma(f,\Pi) > \mathcal{J} - \varepsilon$

$\Rightarrow$ По опр. $f \in R(A)$ и $\int_A f\, d\mu = \mathcal{J}$.

Лекция № 7

A - изм. подмн-во $\mathbb{R}^N$ ($A \ne \varnothing$) f огр. на A.

для $T = \{A_j\}_{j=1}^{K}$ - разб. A.

$m_j = \inf\limits_{x \in A_j} f(x)$ $M_j = \sup\limits_{x \in A_j} f(x)$

$s_*(T) = \sum\limits_{j=1}^{K} m_j \cdot \mu A_j$ $S^*(T) = \sum\limits_{j=1}^{K} M_j \, \mu A_j$

$J_* = \sup\limits_{T} s_*(T)$ $J^* = \inf\limits_{T} S^*(T)$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Критерий интегрир. Дарбу)

$\exists$ f огр. на измеримом непустом подмнове $\mathbb{R}^N$

Тогда $f \in R(A)$ $\left(\text{и } \int\limits_A f \, d\mu = J\right) \iff J_* = J^* (= J)$

$\boxed{\text{Следствие}}$ (Кр. интегрируемости Дарбу).

$$f \in R(A) \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; T\text{-разб. } A: \quad S^*(T) - S_*(T) < \varepsilon.$$

($\Rightarrow$)

Док-во.

Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$. Найдем разбиение T_1: $s_*(T_1) > J_* - \frac{\varepsilon}{2}$.

T_2: $S^*(T_2) < J^* + \frac{\varepsilon}{2}$.

Т.к. $f \in R(A)$, $J_* = J^*$, значит

$$S^*(T_2) - s_*(T_1) < J^* + \frac{\varepsilon}{2} - J_* + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Возьмем в кач-ве T объединение разбиений T_1 и T_2 (Явл. измельчением одновр. T_1 и T_2)

Тогда $S^*(T) - s_*(T) \le S^*(T_2) - s_*(T_1) < \varepsilon$.

($\Leftarrow$)

Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$.

Найдем разбиение T: $S^*(T) - s_*(T) < \varepsilon$

Тогда $\underset{0}{\underset{\vee|}{J^* - J_*}} < S^*(T) - s_*(T) < \varepsilon$.

В силу произвольности ε $J_* = J^*$, значит $f \in R(A)$

Всё

В случае, когда $N=1$; $A=[a,b]$ имеем: „старый" инт. R (разбиение только на подотрезки) и „новый" интеграл R (разбиение на произв. измеримые мн-ва).

Сл-вие На отр. „старый" интеграл R эквивал. „новому" R.

Док-во

Если $f \in R([a,b])$ в „новом" смысле, то интегрируема и в „старом", причем интегралы совпадают.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0: \ \forall (T, \xi)$ с $\operatorname{diam} T < \delta$ $\quad |\sigma(f(T,\xi)) - J| < \varepsilon$

В др. сторону.] $f \in R([a,b])$ в „старом" смысле. Тогда (по крит. Дарбу - „старому")

$\exists$ T-разбиение (сост. из подотрезков отр. $[a,b]$) -

$S^*(T) - S_*(T) < \varepsilon$. Взяв это разбиение T и исп. „новый" кр. Дарбу, получ., что $f \in R([a,b])$ и в новом смысле. Рав-во интегралов док-но и в прошлом смысле ■

Опр: Подмн-во E в $\mathbb{R}^N$ наз. мн-вом меры 0 по Лебегу, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \{\Pi\}$ - не более чем счетный набор брусов: $\bigcup_j \Pi \supset E$, $\sum_j \mu \Pi_j < \varepsilon$.

Замеч. В этом определении дост. рассм лишь открытые брусы.

Замкнутые: $\Pi_j \to \widetilde{\Pi}_j$

Открытые: зафикс. пр. $\varepsilon > 0$ Для $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ найдем $\{\widetilde{\Pi}_j\}$

$\sum_j \mu \overline{\Pi}_j < \varepsilon_1$

Для кажд. j найдем Π_j - откр. брус. $\Pi_j \supset \overline{\Pi}_j$

$\mu \Pi_j \le \mu \overline{\Pi}_j + \frac{\varepsilon_1}{2^j}$

Тогда $\bigcup\limits_j \Pi_j \supset \bigcup\limits_j \widetilde{\Pi}_j \supset E$

$$\sum_j \mu \Pi_j < \sum_j \left(\mu \widetilde{\Pi}_j + \frac{\varepsilon_1}{2^j} \right) < 2\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Замеч. Мно-во меры 0 по J явл. мно-вом меры 0 по Лебегу. Обр. неверно.

Утв. Не более чем счетное объединение мно-в меры 0 L явл. мновом меры 0 по L.

Док-во.

$\exists$ $\{E_m\}$ - мнова меры 0 по L.
Заф. произв. $\varepsilon > 0$. Для кажд. m найдем не более чем счетную систему брусов $\{\Pi_j^m\}_j$: $\bigcup\limits_j \Pi_j^m \supset E_m$,

$$\sum_j \mu \Pi_j^m < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Тогда $\{\Pi_j^m\}_{m,j}$ - не более чем сч. система брусов

$$\bigcup_{m,j} \Pi_j^m = \bigcup_m \left(\bigcup_j \Pi_j^m \right) \supset \bigcup_m E_m.$$

$$\sum_{m,j} \mu \Pi_j^m = \sum_m \sum_j \mu \Pi_j^m < \sum_m \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon.$$

Опр Гов. что сво-во вып. почти всюду, если мно-во точек, где оно не вып, явл. мновом меры 0 по L.

Теорема (Критерий L интегр-сти по R)

Огр. на непустом измеримом мнове A (в $\mathbb{R}^n$) ф-я f интегр. по R
$\Longleftrightarrow$ f непр. почти всюду на A (т.е. мново точек разрыва f на A явл. мновом меры 0 по L)

Док-во.

$\Longleftarrow$ f огр. и непр. почти всюду на A. Док-ем, что $f \in R(A)$

(1) A - замкнуто (и ограничено, т.к. измеримо).

Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$. Для $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{4 \sup\limits_A |f| + 1}$ найдем $\{\Pi_j\}$ – не более чем счетную совок. открытых брусов, покрывающих все множество точек разрыва f на A и имеющую сумму мер $< \varepsilon_1$

$\exists$ x – произв. точка непрерывности f из множества A.

Найдем $\delta_x > 0$: $\forall\ \tilde{x} \in B_\delta(x) \cap A$ $\quad |f(x) - f(\tilde{x})| < \dfrac{\varepsilon}{2\mu A + 2}$.

Найдем брус Π_x – открытый, содержащий т. X с diam

$\{\tilde{\Pi}_j\}_j \cup \{\Pi_x\}$

Построим разбиение T множества A.

$A_1 = A \cap \Pi_{j_1}$

$A_2 = (A \cap \Pi_{j_2}) \setminus A_1$

$A_3 = (A \cap \Pi_{j_3}) \setminus (A_1 \cup A_2)$

$\vdots$

$A_L = (A \cap \Pi_{j_L}) \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{L-1})$

$A_{L+1} = (A \cap \Pi \quad) \setminus ($

(A) При необходимости выкинем из получ. совокупности множ в.

Тогда $S^*(T) - S_*(T) \overset{*}{=} \sum_{j=1}^{L}\left(\sup_{A_j} f - \inf_{A_j} f\right)\mu A_j + \sum_{k=1}^{M} \left(\sup_{A_{L+k}} f - \inf_{A_{L+k}} f\right)\mu A_{L+k}$

$\le \underbrace{2\sup_A |f| \cdot \underbrace{\sum_j \mu \Pi_j}_{<\varepsilon_1}}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2\mu A+1} \underbrace{\sum_{k=1}^{L} \mu A_{L+k}}_{\le \mu A}}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$ — по

кр. интегрир. Дарбу $f \in R(A)$.

(2) $\rceil$ A — незамкнуто. $\bar{A}$ — замыкание для A. $\bar{A} := A \cup \partial A$ — замкнутое измеримое мн-во.

Доопределим $\bar{A} \setminus A$ нулем. Тогда f — огр. непрер. почти всюду на $\bar{A}$ функция; в соотв. с п. 1 $f \in R(\bar{A})$. $\Rightarrow \exists\, T_0$ — разбиение $\bar{A}$ $(T_0 \equiv \{A_j^0\}_{j=1}^{K})$: $S^*(T_0) - S_*(T_0) < \varepsilon$

$A_j := A_j^0 \cap A$

$T = \{A_j\}_{j=1}^{K}$ (включим при необходимости $\varnothing$).

Тогда T — разбиение A. Тогда $S^*(T) - S_*(T) = \sum_{j=1}^{K}\left(\sup_{A_j} f - \inf_{A_j} f\right)\mu A_j$

$\le \sum_{j=1}^{K}\left(\sup_{A_j^0} f - \inf_{A_j^0} f\right)\mu A_j^0 = S^*(T_0) - S_*(T_0) < \varepsilon$. $\Rightarrow$

f интегрир. по $R(A)$. Док-ли достаточность.

Докажем необходимость.

$\Rightarrow$ $\rceil$ $f \in R(A)$. Докажем, что ф-я f непр почти всюду на мн A. Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$.

Найдем T_1 — разбиение, сост из мн-в $\{A_j^1\}_{j=1}^{K_1}$: $S^*(T_1) - S_*(T_1) < \varepsilon \cdot 2^{-2}$.

Найдем $T_2 = \{A_j^2\}_{j=1}^{K_2}$: $S^*(T_2) - S_*(T_2) < \varepsilon \cdot 2^{-4}$.

Для всех $n \in \mathbb{N}$ найдем:

$$S^*(T_n) - S_*(T_n) < \varepsilon \cdot 2^{-2n}.$$

$$\parallel$$

$$\sum_{j=1}^{K_n} \left(\sup_{A_j^n} f - \inf_{A_j^n} f \right) \mu A_j^n .$$

Отметим, что суммой мер тех A_j^n, для которых $\left(\sup_{A_j^n} f - \inf_{A_j^n} f \right) \geqslant 2^{-n}$. меньше, чем $\varepsilon \cdot 2^{-n}$

Для каждого n через P_n обозн. объединение таких A_j^n, дополнительно объединенное с ∂A_j $(j = 1, \dots, K)$

$\mu P_n < \varepsilon \cdot 2^{n}$. Найдем $\{ \Pi_\ell^n \}_\ell$ – конечная совокупн-сть брусов с суммой мер $< \varepsilon$..

Тогда $\{ \Pi_\ell^n \}_{n,\ell}$ – не более чем счетн. сов-сть брусов с суммой мер $< \varepsilon$

Осталось показать, что эта совок-сть брусов покрывает все точки разрыва f на A.

Возьмем пр. т. $x \in A \setminus \bigcup_{n,\ell} \Pi_\ell^n$ и покажем, что f непр. в т. x.

Заф. произв. $\gamma > 0$. Найдем $n \in \mathbb{N}$: $2^{-n} < \gamma$.

Найдем мно-во A_j^n, содержащ. т. x.

$$\sup_{A_j^n} f - \inf_{A_j^n} f < 2^{-n}, \qquad x \in \operatorname{int} A_j^n.$$

Найдем $\delta > 0$ $B_\delta(x) \subset A_j^n$. Тогда $\forall \tilde{x} \in B_\delta(x)$

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| \le \sup_{A_j^n} f - \inf_{A_j^n} f < 2^{-n} < \gamma$$

Док-на непр-сть f т. x.

Лекция №8

A - непустое измеримое подмно-во $\mathbb{R}^N$, $f: A \to \mathbb{R}$.

$$\sigma_f(\Pi) = \sigma(f, (T, \xi)) = \sum_{j=1}^{K} f(\xi_j)\,\mu A_j.$$

$$\sigma_f(\Pi) + \sigma_g(\Pi) = \sigma_{f+g}(\Pi).$$

$$\sigma_{\alpha f}(\Pi) = \sigma_f(\Pi)\cdot\alpha.$$

линейная штука.

B - мн-во всех отмеч. разбиений A

B_δ $(\delta > 0)$ - мн-во всех отмеч. разбиений A с $\operatorname{diam} < \delta$.

$\mathcal{B} = \{B_\delta\}_{\delta>0}$ - база на B.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall \Pi = (T, \xi)$ - разбиение A с $\operatorname{diam} T < \delta$

$$|\sigma(f, \Pi) - I| < \varepsilon$$

$$\int_A f\,d\mu = \lim_{\mathcal{B}} \sigma_f(\Pi)$$

Из линейности перехода от ф-ций к суммам Римана, а также линейности пределов по базе:

если $f, g \in R(A)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то $f+g$, $\alpha f \in R(A)$ и

$$\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu; \quad \int_A \alpha f\,d\mu = \alpha \int_A f\,d\mu.$$

Если $f \le g$ всюду на A, то для $\forall \Pi$ - отм. разб. A $\sigma_f(\Pi) \le \sigma_g(\Pi)$. Т.к. предел по базе также сохран. неравенства, получаем: если $f, g \in R(A)$, $f \le g$ всюду на A, то:

$$\int_A f\,d\mu \le \int_A g\,d\mu.$$

Если $\mu A = 0$, то произв. ф-я $f \in R(A)$ и $\int\limits_A f\,d\mu = 0$.

Для произв. измер. мно-ва. $1 \in R(A)$ и

$\int\limits_A 1\,d\mu = \mu A$.

[Если ф-я $f \in R(A)$, $f \geq 0$ на A, причем $\exists x_0 \in \underbrace{\operatorname{int} A}_{\text{внутр. } A}$: (*)
f-непр. в т. x_0 и принимает в этой точке положит. значения
Тогда $\int\limits_A f\,d\mu > 0$.]

$\boxed{\text{Утв}}$ Пусть ф. $f \in R(A)$, $B \subset A$. Тогда:

подмно-во. B-измеримое

$f \in R(B)$, $f \in R(A \setminus B)$ и

$$\int\limits_A f\,d\mu = \int\limits_B f\,d\mu + \int\limits_{A\setminus B} f\,d\mu.$$

Док-во:

Дост. рассм. сл-й: $B \neq \varnothing$, $B \neq A$.
Докажем, что $f \in R(B)$.
Найдем такое $\delta > 0$: f огр. на $A_\delta = \{x \in A : \rho(x, \operatorname{int} A) \leq \delta\}$.
Отметим, что $B_\delta \subset A_\delta$. Переопределим ф-ю f нулем на $A \setminus A_\delta$.
Это переопределение превращает ф-ю f в огр. на A, но не влияет ни на интегрируемость, ни на интегр. по A, B, $A\setminus B$

Согласно кр. Лебега ф. f непр. почти всюду на A, т.е мно-во точек разрыва имеет меру 0 по L.
Тогда f - непр. почти всюду на B. $\Rightarrow$ по критерию Лебега

$f \in R(B)$. Аналогично $f \in R(A \setminus B)$

Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$
Докажем равенство. Найдем величину $\delta_1 > 0$:
$\forall$ $\Pi = (T, \xi)$ - отм. разб. A с $\operatorname{diam} T < \delta_1$

$$\left|\sigma(f, \Pi) - \int\limits_A f\,d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Найдем $\delta_2>0$: $\forall\ \Pi_1=(T_1,\xi_1)$ - отм. разб. B с $\operatorname{diam} T_1<\delta_2$:

$$\left|\sigma(f,\Pi_1)-\int_B f\,d\mu\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Найдем $\delta_3>0$: $\forall\ \Pi_2=(T_2,\xi_2)$ - отмеч. разб. $A\setminus B$ с $\operatorname{diam} T_2<\delta_3$:

$$\left|\sigma(f,\Pi_2)-\int_{A\setminus B} f\,d\mu\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Положим: $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$. Найдем $\Pi_1=(T_1,\xi_1)$ - отмеч. разб. B с $\operatorname{diam} T_1<\delta$.

Найдем $\Pi_2=(T_2,\xi_2)$ - отм. разб. $A\setminus B$ с $\operatorname{diam} T_2<\delta$.

Положим $\Pi=(T_1\cup T_2,\ \xi_1\cup\xi_2)$. Получим отмеч. разб. A с $\operatorname{diam} T<\delta$.

Тогда:

$$\left|\int_A f\,d\mu-\left(\int_B f\,d\mu+\int_{A\setminus B} f\,d\mu\right)\right|=\left|\int_A f\,d\mu-\sigma(f,\Pi)+\right.$$

$$\left.+\sigma(f,\Pi_1)+\sigma(f,\Pi_2)-\int_B f\,d\mu-\int_{A\setminus B} f\,d\mu\right|\le$$

$$\le\left|\int_A f\,d\mu-\sigma(f,\Pi)\right|+\left|\int_B f\,d\mu-\sigma(f,\Pi_1)\right|+$$

$$+\left|\int_{A\setminus B} f\,d\mu-\sigma(f,\Pi_2)\right|<\varepsilon$$

В силу произв-сти ε $\int_A f\,d\mu=\int_B f\,d\mu+\int_{A\setminus B} f\,d\mu$ ■

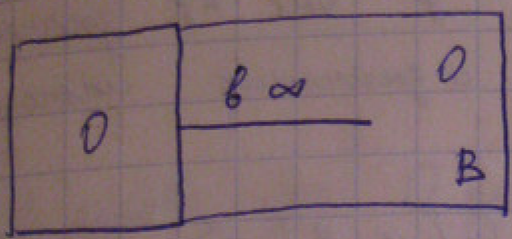
$\boxed{\text{Следствие}}$ Пусть A и B - измеримые подмнова $\mathbb{R}^N$, $f\in R(A\cup B)$.

Тогда

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu=\int_A f\,d\mu+\int_B f\,d\mu-\int_{A\cap B} f\,d\mu.$$

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu=\int_A f\,d\mu+\int_{B\setminus A} f\,d\mu$$

$$\int_B f\,d\mu = \int_{B\setminus A} f\,d\mu + \int_{B\cap A} f\,d\mu$$



$A\cup B$ – f не инт. т.к. неогранич. – корень зла в огр-сти! ©.

$\boxed{\text{Утв}}$ Пусть A, B – измеримые подмнова $\mathbb{R}^N$, $f\in R(A)$ и огр. на A, $f\in R(B)$ и огр. на B. Тогда $f\in R(A\cup B)$.

Док-во – (исп. крит. Лебега в док-ве) с пом. крит. Дарбу.

Дост. рассм. сл-й, когда A и B не пересек. ($A\cap B=\varnothing$)
(В прот. сл-е: $B := B\setminus A$)
Зафикс. пр. $\varepsilon>0$.
Найдем T_1 разбиение A: $S^*(T_1)-S_*(T_1)<\frac{\varepsilon}{2}$

Найдем T_2 разбиение B: $S^*(T_2)-S_*(T_2)<\frac{\varepsilon}{2}$. делим на 2 пары

Положим $T=T_1\cup T_2$ – получ. разбиение $A\cup B$. и
$S^*(T)-S_*(T) = S^*(T_1)+S^*(T_2)-S_*(T_1)-S_*(T_2)<\varepsilon$. ■

[(*)]

Док-во:
Пусть $x_0\in \operatorname{int} A$. Найдем величину $\delta>0$: $B_\delta(x_0)\subset A$ и
$\forall x\in B_\delta(x_0)$ $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$

Найдем Π – брус положит. меры, вход в окр-ть $B_\delta(x_0)$.
Тогда $\int_A f\,d\mu = \int_\Pi f\,d\mu + \int_{A\setminus\Pi} f\,d\mu \geq \int_\Pi \frac{f(x_0)}{2}\,d\mu + \int_{A\setminus\Pi} 0\,d\mu =$
$= \frac{f(x_0)}{2}\mu\Pi>0$.

$\boxed{\text{Утв}}$ $\rceil$ $f \in R(A)$; $f(A) \subset [\alpha, \beta]$ (IR), $\varphi \in C[\alpha, \beta]$. (IR)

Тогда: $\varphi(f(x)) \in R(A)$.

огр. или — вся числ. пр.

Док-во:

Ищем $\delta > 0$: f огр. на A_δ. Переопределяем f вне A_δ значением $\frac{\alpha+\beta}{2}$ (или 0 если IR). Это не влияет на интегрируемость и значение интеграла, но f становится огранич.

f стало огр. $\Rightarrow$ $f(A) \subset [\alpha, \beta]$, $\varphi \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow \varphi$ огр. на $[\alpha, \beta]$ $\Rightarrow$ ф-я $\varphi(f(x))$ огр. на A.

f непр. почти всюду на A. $\Rightarrow$ $\varphi(f(x))$ непр. почти всюду на A. $\Rightarrow$ $\varphi(f(x)) \in R(A)$ по критерию Лебега. ∎

$\boxed{\text{Следствие}}$ Если $f \in R(A)$, то $|f| \in R(A)$ и $\left|\int\limits_A f\,d\mu\right| \le \int\limits_A |f|\,d\mu$

из только что доказанного

$$\left(-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|\right)$$

$\boxed{\text{Следствие}}$ Если $f, g \in R(A)$, то $\overbrace{f \cdot g}^{\text{произведение}} \in R(A)$.

$$\left(f^2, g^2, (f+g)^2 \in R(A) \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)}_{=\, f \cdot g} \in R(A)\right)$$

$\boxed{\text{Утв}}$ $\rceil$ $f \in R(A)$, g огр. на A, $g = f$ на A всюду, за исключением мн-ва меры 0 по J.

Тогда $g \in R(A)$, $\int\limits_A g\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu$.

Док-во.

$B := \{x \in A : f(x) \ne g(x)\}$

$g \in R(B)$, $\int\limits_B g\,d\mu = \int\limits_B f\,d\mu = 0$ $(\mu B = 0)$.

$f = g \in R(A \setminus B)$. $\int\limits_{A \setminus B} f\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu - \cancel{\int\limits_B f\,d\mu}_{\to 0} \Rightarrow$

$\int\limits_{A \setminus B} f\,d\mu = \int\limits_{A\setminus B} g\,d\mu$

мн-во меры 0.

$\Rightarrow g \in R(\underbrace{(A\setminus B)\cup B}_{A})$, причем $\int\limits_A g\,d\mu = \int\limits_{A\setminus B} g\,d\mu + \underbrace{\int\limits_B g\,d\mu}_{0} =$

$= \int\limits_A f\,d\mu.$ ∎

($\forall$ мн-во меры 0 по L явл. мн. меры 0 по J $\not\Leftarrow$)

~~Утв~~ $\boxed{\text{Лемма}}$] D - огр. замкн. подмн-во $\mathbb{R}^N$ меры 0 по L. Тогда D имеет меру 0 по J.

Док-во:

Зафикс. пр. $\varepsilon > 0$.
Найдем $\{\Pi_j\}$ - не более чем сч. систему открытых брусов:

$\sum \mu \Pi_j < \varepsilon$; $\bigcup\limits_j \Pi_j \supset D$.

Выдел. конечное подпокрытие $\Pi_{j_1} \dots \Pi_{j_L}$.

$P = \Pi_{j_1} \cup \Pi_{j_2} \cup \dots \cup \Pi_{j_L}$.

P - простое мн-во, содержащее D $(P \supset D)$, $\mu P \le \mu \Pi_{j_1} + \mu \Pi_{j_2} + \dots + \mu \Pi_{j_L} \le \sum\limits_j \mu \Pi_j < \varepsilon \Rightarrow \mu^* D = 0 \Rightarrow$

D измеримо по J и $\mu D = 0$. ∎

Лекция №9

$\boxed{\text{Лемма}}$. Огр. замкн. мн-во меры 0 по L явл. мн-вом меры 0 по J.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$] A - изм. подмн-во $\mathbb{R}^N$, $E \subset A$. Тогда E изм. $\Leftrightarrow$ $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{характ. ф-я}}}{\chi_E} \in R(A)$.

При этом (в сл. инт-ти)

$$\mu E = \int\limits_A \chi_E \, d\mu.$$

Док-во

$\Rightarrow$ Пусть E - изм. Тогда $A \setminus E$ - изм.
тождественный $0 \in R(A \setminus E)$, $1 \in R(E)$.
Тогда в силу адд-ти инт. $\mathbb{R}$ по мн-вам (для огр. ф-ий):

$$\exists \int\limits_A \chi_E \, d\mu = \int\limits_E 1 \, d\mu + \int\limits_{A \setminus E} 0 \, d\mu = \mu E.$$

2 сл.

Пусть $\chi_E \in R(A)$. Найдем откр. брус (или $\forall$ откр. изм мн-во) $\Pi \supset A$. Тогда $\chi_E \in R(\Pi)$.

содержащий

$\Rightarrow \chi_E$ непр. почти всюду на брусе Π, т.е.
мн-во т. разрыва явл. мн-вом меры 0 по L.
Но это мн-во т. разрыва совпадает с ∂E.

Но ∂E - огр., замкнуто Мера J $\partial E = 0$.
$\Rightarrow E$ изм. по J

■

Пусть A - изм. подмн-во $\mathbb{R}^N$
f - огр. и неотр. на A.
A_f - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{N+1} : x \in A; 0 \le y \le f(x)\}$.

$\boxed{\text{Теорема}}$ Ф-я $f \in R(A)$ е.и.т.е. A_f изм. по J.
При этом в сл-е интегрируемости (измеримости)

$$\int\limits_A f\,d\mu = \mu A_f.$$

Док-во.

$\Rightarrow$] $f \in R(A)$. Вне мн-ва A доопределим (переопр.) f нулём.
Найдем Π-брус $\Pi \supset A$.

$$\Pi_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{N+1} : x \in \Pi,\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Тогда $f \in R(\Pi)$, $\int\limits_\Pi f\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu + \cancel{\int\limits_{\Pi\setminus A} f\,d\mu} \to 0$.

$\Pi_f \supset A_f$, $\Pi_f \setminus A_f \subset \Pi \times \{0\}$.
содержится

Т.е. Π_f отлич. от A_f на мн-во меры 0 по J.

$\Rightarrow$ Π_f и A_f одновр. изм. или неизм., причем в случае измеримости меры равны.

Обозн. $\int\limits_\Pi f\,d\mu$ ч/з J.

Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$. Найдем $\delta > 0$: $\forall$ (T,ξ) - отмеч. разб. Π с $\operatorname{diam} T < \delta$ $|\sigma(f,(T,\xi)) - J| < \varepsilon$, т.е.

$$J - \varepsilon < \sigma(f,(T,\xi)) < J + \varepsilon.$$

$\downarrow \inf\limits_\xi$ $\qquad \downarrow \sup\limits_\xi$

$J - \varepsilon \le S_*(T) \le S^*(T) \le J + \varepsilon$ для $\forall$ разб. T с $\operatorname{diam} T < \delta$.

$T = \{\Pi_j\}_{j=1}^{K}$ - разб. Π на попарно не пересек. брусы с $\operatorname{diam} < \delta$

$m_j = \inf\limits_{x \in \Pi_j} f(x)$ $\qquad M_j = \sup\limits_{\Pi_j} f(x)$

$P_1 = \bigsqcup_{j=1}^{K} \Pi_j \times (0, m_j)$. $\quad P_1 \subset \Pi_f$.

$$\mu P_1 = \sum_{j=1}^{K} m_j \mu \Pi_j$$

$$\overset{\parallel}{S_*(T)}.$$

$P_2 = \bigsqcup_{j=1}^{K} \Pi_j \times [0, M_j] \quad P_2 \supset \Pi_f$

$$\mu P_2 = S^*(T)$$

$\Rightarrow \quad J - \varepsilon \le S_*(T) = \mu P_1 \le \mu_* \Pi_f \le$

$$\le \mu^* \Pi_f \le \mu P_2 = S^*(T) \le J + \varepsilon$$

в силу произв-сти ε $\mu_* \Pi_f = \mu^* \Pi_f = J$, т.е.

Π_f - измеримо по J (=> и A_f), причем

$$\mu A_f = \mu \Pi_f = \int_\Pi f \, d\mu = \int_A f \, d\mu$$

$\Leftarrow$ Зафикс. пр. $\varepsilon > 0$ $\exists$ A_f изм. Найдем $P_1 = \bigsqcup_{m=1}^{M} \Pi_m' \times J_m'$ (интервальчик)

и $P_2 = \bigsqcup_{l=1}^{L} \Pi_l'' \times J_l''$: $P_1 \subset A_f \subset P_2$ и

$$\mu P_2 - \mu P_1 < \varepsilon.$$

$$\cup \Pi_l'' =: \tilde{A} \supset A.$$

Найдем $T = \{A_j\}_{j=1}^{K}$ - разб. $\tilde{A}$, удовл. след. св-ву:

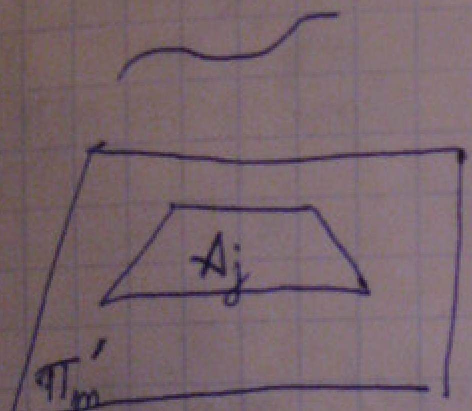
если для некот. (j, m) $A_j \cap \Pi_m' \ne \varnothing$, то

$A_j \subset \Pi_m'$; если для некот (j, l) $A_j \cap \Pi_l'' \ne \varnothing$,

то $A_j \subset \Pi_l''$ (Построение сводится к измельчению всех разбиений $\{\Pi_l', \tilde{A}\setminus\Pi_l'\}$, $\{\Pi_m'', A\setminus\Pi_m''\}$)

$$m_j = \inf_{A_j} f(x), \qquad M_j = \sup_{A_j} f(x)$$

$$\bigcup_j A_j \times [0; m_j] \supset P_1. \ (\text{т.к. } P_1 \subset A_f).$$



$$\underbrace{\bigcup_j A_j \times (0, M_j)} \subset \underbrace{P_2} \qquad (\text{т.к. } P_2 \supset A_f).$$

P_2 содержит

$\Rightarrow$ $S_*(T) \geqslant \mu P_1$

$S^*(T) \leqslant \mu P_2$.

$\Rightarrow$ $S^*(T) - S_*(T) \leqslant \mu P_2 - \mu P_1 < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ по кр. Дарбу $f \in R(\tilde{A}) \Rightarrow f \in R(A)$. ∎

$\rceil$ A – измеримое подмнов $\mathbb{R}^N$, f – огр. на A.

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0 \\ 0, & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leqslant 0 \\ 0, & \text{если } f(x) > 0 \end{cases}$$

Замечание $f \in R(A)$ еиие $\begin{cases} f^+ \in R(A) \\ f^- \in R(A) \end{cases}$

$\Leftarrow$ $f = f^+ + f^-$

$\Rightarrow$ $f, |f| \in R(A) \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{f+|f|}{2} = f^+ \\ \frac{f-|f|}{2} = f^- \end{matrix}\right\rangle \in R(A).$

$A_f^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{N+1}, x \in A, 0 \le y \le f(x)\}.$

$A_f^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{N+1}: x \in A, f(x) \le y \le 0\}.$

A_f^+ и A_{f^+} отлич. на подмнов. $A \times \{0\}$, т.е. на мнов. меры 0 по J.

$\Rightarrow$ они одновр. изм. или неизмеримы и в сл-ае изм-ти меры равны.

Аналог: A_f^-, симм. отраженное отн. гиперплоскости $y = 0$, изм. или неизм. одноврем. с A_{f^-} (с совп. мер).

$\boxed{\text{Утв}}$ f (огр. на A) $\in R(A)$ еиие A_f^+ и A_f^- изм. по J.

В сл-е и теор./ измеримости $\int f d\mu = \mu A_f^+ - \mu A_f^-$.

Док-во: $f \in R(A) \Rightarrow f^+ \in R(A) \Rightarrow A_{f^+}$ измеримо и $\mu A_{f^+} = \int_A f^+ d\mu \Rightarrow \mu A_f^+ = \mu A_{f^+}$.

$\Rightarrow f^- \in R(A) \Rightarrow -f^- \in R(A) \Rightarrow A_{-f^-}$ измеримо $\Rightarrow \mu A_{-f^-} = \mu A_f^- = \int_A -f^- d\mu$

$\int_A f d\mu = \int_A (f^+ + f^-) d\mu = \mu A_f^+ - \mu A_f^-$

$\left[\begin{matrix} \Pi = \Pi' \times \Pi'' & (x,y) \\ \Pi & (x \; y) \end{matrix} \quad \int_\Pi f(x,y)\, dx\,dy = \int_{\Pi''} \left(\int_{\Pi'} f(x,y)\, dx \right) dy \right]$

В др. ст.:

Если A_f^+ и A_f^- измеримы $\Rightarrow$ A_{f^+} и A_{f^-} измеримы $\Rightarrow$

f^+ и $f^- \in R(A) \Rightarrow f \in R(A)$ (аналог провер. равво утв)

чтд.

Лекция № 10.

Π' - нев. брус в $\mathbb{R}^N$

Π'' - нев. брус в $\mathbb{R}^M$

$\Pi' \times \Pi''$ - нев. брус в $\mathbb{R}^{N+M}$.

Π''

$$f(\underset{\mathbb{R}^N}{x}, \underset{\mathbb{R}^M}{y}) : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Теорема Фубини.

] ф-я $f \in R(\Pi)$

Значит f огр. на Π.

Для $\varphi \in \Pi''$ ч/з $\mathcal{I}_*(\varphi)$ обозн. нижний инт. Дарбу по Π' от ф-ии $f(x, \varphi)$, рассм. как ф-я от x (при фиксир. φ)

$\mathcal{I}^*(\varphi)$ обозн. верхний инт. Дарбу по Π' от ф. $f(x, \varphi)$, рассм. как ф-я от x (при фикс. φ).

Тогда $\mathcal{I}_*(\varphi), \mathcal{I}^*(\varphi) \in R(\Pi'')$, причем

$$\int_{\Pi} f\,dx\,dy = \int_{\Pi''} \mathcal{I}_*(\varphi)\,d\varphi = \int_{\Pi''} \mathcal{I}^*\,d\varphi.$$

Лемма 1] A - измеримое подмнов $\mathbb{R}^l$. ф-я f опред. и огранич. на A и

$\exists$ число $I \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ T-разбиение мнова A

$$I - \varepsilon \le S_*(f, T) \le S^*(f, T) \le I + \varepsilon$$

Тогда ф. $f \in R(A)$, причем $\int_A f\,d\mu = I$

Док-во:

Интегрируемость следует из критерия Дарбу,

$$I - \varepsilon \le S_*(f, T) \le \mathcal{I}_* = \int\limits_A f\,d\mu = \mathcal{I}^* \le S^*(f, T) \le I + \varepsilon,$$

т.е. $\left| \int\limits_A f\,d\mu - I \right| \le \varepsilon$. Ост. исп. произвольность ε.

Док-во теор. Фубини.

Обозначим $\int\limits_\Pi f\,dx\,dy$ ч/з I (этот $\int$ $\exists$ по условию).

Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$. Найдем $\delta > 0$: $\forall\ (T, \xi)$ - отмеч. разб. бруса Π с $\operatorname{diam} T < \delta$ $|\sigma(f, (T, \xi)) - I| < \varepsilon$.

Или эквив.: $I - \varepsilon < \sigma(f, (T, \xi)) < I + \varepsilon$

$$\Rightarrow I - \varepsilon \le S_*(T) \le S^*(T) \le I + \varepsilon$$

$\exists$ $\{\Pi'_i\}_i$ - разбиение бруса Π' на попарно не пересек. ~~перекрыв.~~ брусы с $\operatorname{diam} < \delta/2$.

$\{\Pi''_j\}_j$ - разб. Π'' на попарно не пересек. брусы с $\operatorname{diam} < \delta/2$.

Тогда $\{\Pi'_i \times \Pi''_j\}_{i,j}$ - разб. $\Pi = \Pi' \times \Pi''$ с $\operatorname{diam} < \delta$

Значит верхн. и нижн. суммы Д зажаты между $I - \varepsilon$ и $I + \varepsilon$.

$$I - \varepsilon \le S_*(T) \le S^*(T) \le I + \varepsilon$$

ч/з m_{ij} обозн. $\inf\limits_{\substack{x \in \Pi'_i \\ y \in \Pi''_j}} f(x, y)$. Для $\xi \in \Pi''$

ч/з $m_i(\xi)$ обозн. $\inf\limits_{x \in \Pi'_i} f(x, \xi)$

Аналог. M_{ij} и $M_i(\xi)$

$\exists$ $\{\xi_j\}$ - произв. набор точек, в кот. $\xi_j \in \Pi''_j$

Тогда для произвольных i и j в разрешенных границах

$$m_{ij} \le m_i(\xi_j) \le M_i(\xi_j) \le M_{ij} \quad \Big| \cdot \mu\Pi_i' \;\; \cdot\mu\Pi_j'' \text{ и } \sum_{i,j}$$

$$\underbrace{\sum_{ij} m_{ij}\,\mu(\Pi_i' \times \Pi_j'')}_{} \le \sum_j \Big(\sum_i m_i(\xi_j)\mu\Pi_i'\Big)\mu\Pi_j'' \le$$

$$\le \sum_j \Big(\sum_i M_i(\xi_j)\mu\Pi_i'\Big)\mu\Pi_j'' \le \sum_{i,j} M_{ij}\mu(\Pi_i' \times \Pi_j'').$$

$$I-\varepsilon \le S_*(\{\Pi_i' \times \Pi_j''\}) \le \sum_j s_*(f(x,\xi_j), \{\Pi_i'\}_i)\mu\Pi_j'' \le$$

$$\le \sum_j I_*(\xi_j)\mu\Pi_j'' \le \sum_j J^*(\xi_j)\mu\Pi_j'' \le$$

$$\le \sum_j S^*(f(x,\xi_j), \{\Pi_i'\}_i)\mu\Pi_j'' \le S^*(\{\Pi_i' \times \Pi_j''\}) \le I+\varepsilon$$

$$\Rightarrow I-\varepsilon \le S_*(J_*(y), \{\Pi_j''\}) \le S^*(J_*(y), \{\Pi_j''\}) \le I+\varepsilon.$$

Согласно Лемме 1: $J_* \in R(\Pi'')$, причем $\int\limits_{\Pi''} J_*(y)\,d\mu = I$

Аналог. утв. и для J^*. ■

<u>Замечание 1</u>

В усл. теор. Фубини $J_*(y) = J^*(y)$ почти всюду на Π'', т.е. $f(x,y)$ (как ф-я x) инт. на Π' для почти всех $y \in \Pi''$.

($J^*(y) - J_*(y) \geqslant 0$ всюду и непр. по критерию Леб. почти всюду. Т.к. $\int\limits_{\Pi''}(J^*-J_*)\,d\mu = 0$ не м.б. строгого нер-ва в точке непрерывности)

<u>Замечание 2</u>

$\exists$ $J(y)$ — произв. ф-я, определенная на Π'' и удовл. нер-ву $J_*(y) \le J(y) \le J^*(y)$. Тогда $J(y) \in R(\Pi)$, причем $\int\limits_{\Pi''} J(y)\,dy = \int\limits_{\Pi} f(x,y)\,dx\,dy$

Док-во:

Из усл. сразу следует, что

$$0 \le J(y) - J_*(y) \le J^*(y) - J(y)$$

Аналог. оценка получ. верной и для сумм Римана этих ф-ий (при произв. разбиении Π'')

Перейдем к lim по „базе Римана" (т.е. базе разбиений с diam → 0)

Ост. исп. теор о зажатой ф-ии

→

] f огр. на брусе $\Pi = \Pi' \times \Pi''$, причем $\forall y \in \Pi''$ $f(x,y)$ (как ф-я x) инт. на Π'.

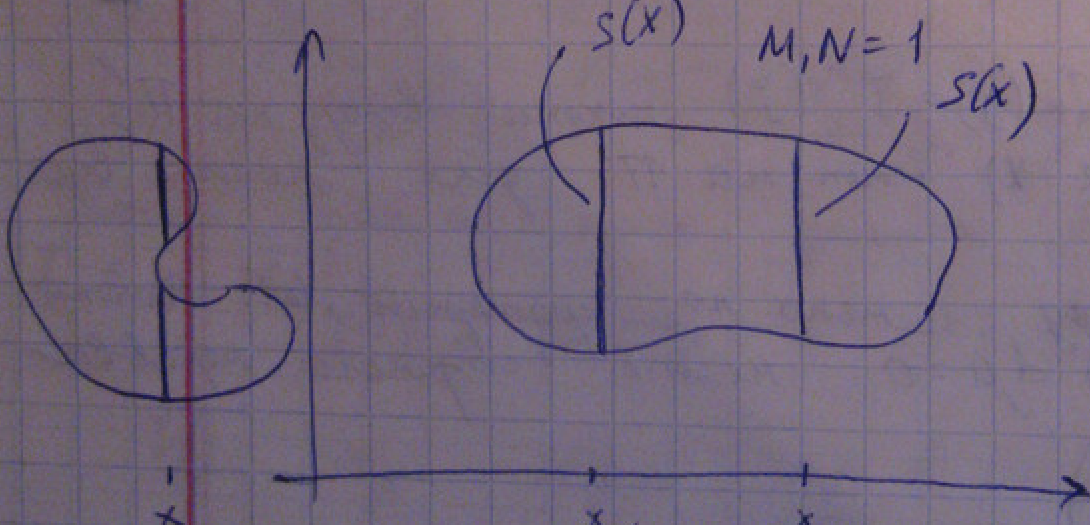
Тогда $$\int\limits_{\Pi} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\Pi''} \left(\int\limits_{\Pi'} f(x,y)\,dx \right) dy$$

x и y можно менять местами

инт. Дарбу превращ. в самый обычный инт.

→

] мн-во A — измеримое подмн-во $\mathbb{R}^{N+M}$. Для точки x, лежащего в проекции A на $\mathbb{R}^N$, ч/з $S(x)$ обозначим (M-мерное) сечение мн-ва A, соответствующее x.



A - пл-ть

пл. сеч. - отр.

если $\mathbb{R}^3$

→

] f огр. и инт. по R на A. Тогда $$\int\limits_A f(x,y) \underbrace{dx\,dy}_{d\mu} = \int\limits_{Pr(A)} \left(\int\limits_{S(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

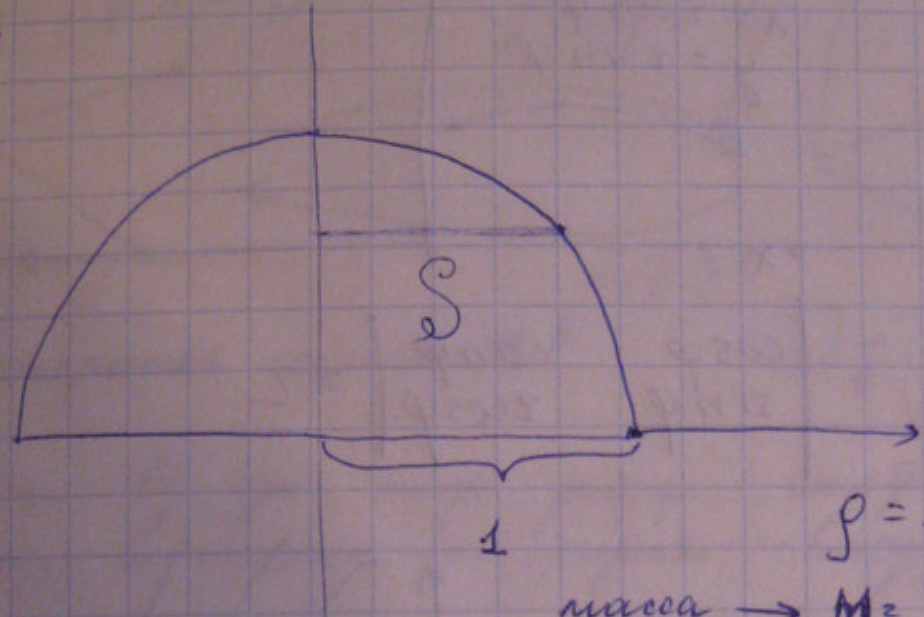
все $S(x)$ измеримы

$Pr(A)$ измеримы.

Док-во:

Находим брус $\Pi = \Pi' \times \Pi''$, содерж. A.
Продолжаем f на брус $\Pi \setminus A$ нулем. Была интегрир. — остал. интегрируемой.
Исп. док. теор. Фубини на брусе.

Пример:



$\rho = 1$

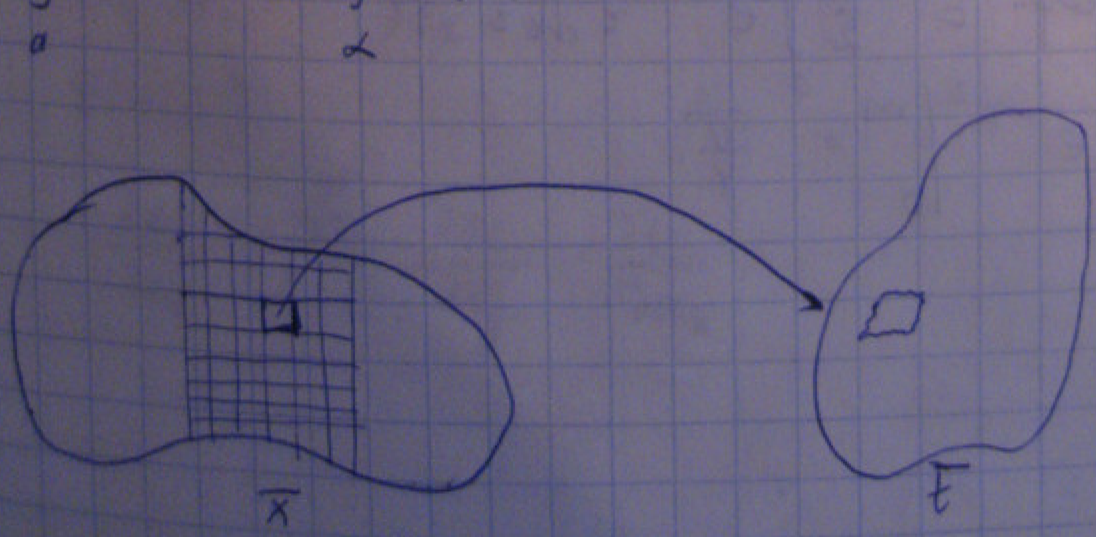
масса пластинки $\longrightarrow$ $M = \frac{\pi}{2}$

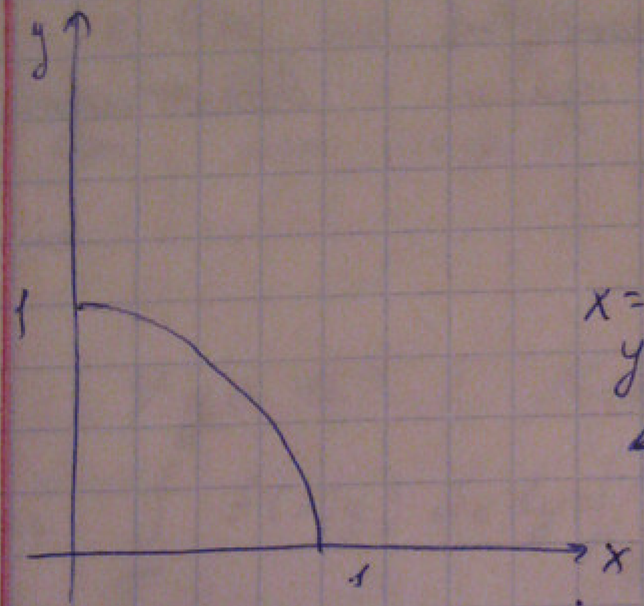
$$\frac{1}{M}\iint\limits_S y\,dx\,dy = \frac{2}{M}\int_0^1 y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1\,dx\,dy = \frac{2}{M}\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\cdot y\,dy =$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,d(y^2) = -\frac{1}{M}(1-y^2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{M}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3\pi}.$$

$\longrightarrow$

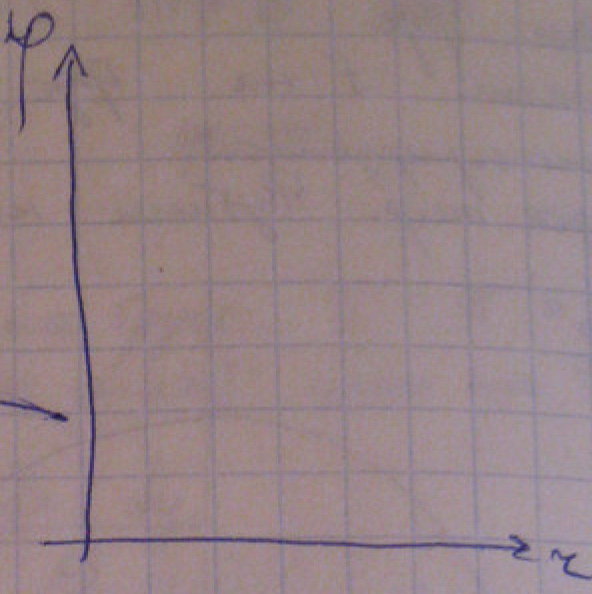
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\,x'(t)\,dt.$$





$x = r\cos\varphi$

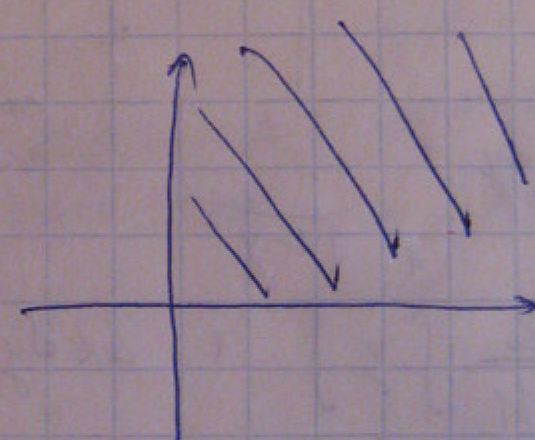
$y = r\sin\varphi$



$$\begin{vmatrix}\cos\varphi & r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix} = r.$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

$$\iint \underbrace{e^{-x^2-y^2}}_{e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}}dx\,dy =$$



$$\underbrace{\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dy\right)dx}_{} = I^2$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr\right)d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr$$

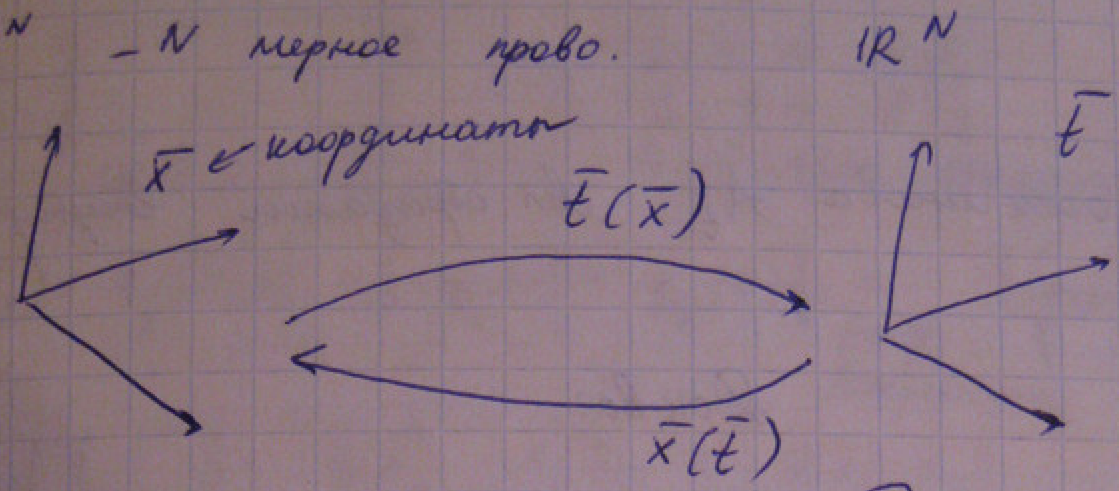
$$= -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

$$I^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Лекция № 11

$\mathbb{R}^N$ – N мерное прово.



$\Omega_{\vec{x}}$ - открытое подмново $\mathbb{R}^N$. $\Omega_{\vec{t}}$ - откр. подмново $\mathbb{R}^N$.

$\bar{t}(\bar{x})$ – вз. одн. непр. дифф. отобр. $\Omega_{\bar{x}}$ на $\Omega_{\bar{t}}$ с якобианом, отличным от нуля всюду на $\Omega_{\bar{x}}$.

Обр. отобр. обозн. ч/з $\bar{x}(t)$

$$\bar{x}(\bar{t}) = \left(x_1(t_1 \dots t_N), x_2(t_1, \dots, t_N), \dots, x_N(t_1, \dots, t_N)\right)^T.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_N} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial t_N} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_N}{\partial t_1} & \frac{\partial x_N}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_N}{\partial t_N} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - \varphi_1(t_1 \dots t_N) = 0 \\ x_2 - \varphi_2(t_1 \dots t_N) = 0 \\ \vdots \\ x_N - \varphi_N(t_1 \dots t_N) = 0 \end{cases}$$

по т. о неявн. ф-ции

$\bar{x}(\bar{t}(\bar{u}))$.

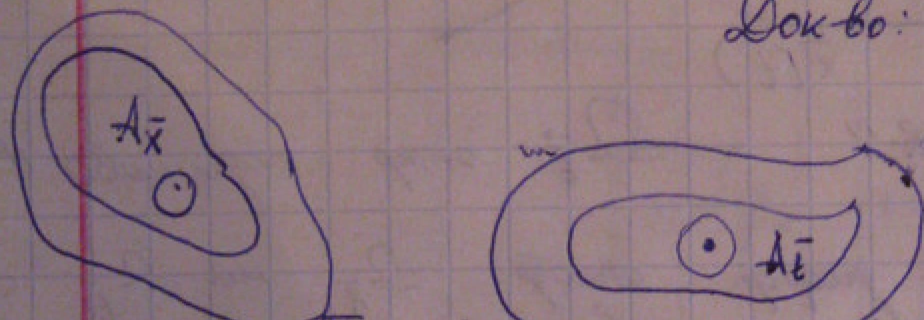
$$\frac{\partial x_i}{\partial u_k} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \cdot \frac{\partial t_j}{\partial u_k}.$$

$\exists\ A_{\bar{x}} \subset \Omega_{\bar{x}}$. $\quad \overset{\text{образ}}{t(A_{\bar{x}})}$ обозн. ч/з $A_{\bar{t}}$.

подмн-во $\Omega_{\bar{x}}$

$\boxed{\text{Утв}}$ Внутр. точки мн-ва $A_{\bar{t}}$ явл. образами внутренних точек $A_{\bar{x}}$.

Док-во:



Зафикс. t_0 - внутр. т. $A_{\bar{t}}$. Ее прообраз обозн. ч/з $\bar{x}_0$

Найдем $\varepsilon > 0$: $\quad B_\varepsilon(\bar{t}_0) \subset A_{\bar{t}}$.

Найдем $\delta > 0$: $\quad \forall\, \bar{x} \in B_\delta(\bar{x}_0)$. $\quad \bar{t}(\bar{x}) \in B_\varepsilon(\underbrace{\bar{t}(\bar{x}_0)}_{t_0})$

$\in A_{\bar{t}}$

Обр. отобр. обозн. ч/з $\bar{x}(t)$

т. е. $\bar{t}(B_\delta(\bar{x}_0)) \subset A_{\bar{t}}$

$\Rightarrow B_\delta(\bar{x}_0) \subset A_{\bar{x}} \Rightarrow x_0$ - внутр. т. $A_{\bar{x}}$.

<u>Следствие</u> Внутр. т. переход. во внутр.

Аналог., внешние перех. во ~~граничные~~ внешние.

$\Rightarrow$ Граничные перех. в граничные.

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\exists\ \Pi$ - замкнутый брус, лежащий в $\Omega_{\bar{x}}$.

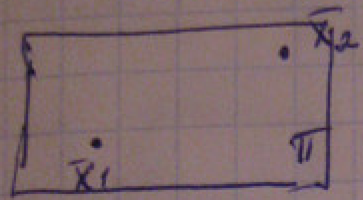
Тогда $\exists\ C \geq 0$: $\quad \forall\ \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \Pi \quad \underbrace{\|\bar{t}(\bar{x}_1) - \bar{t}(\bar{x}_2)\|}_{\text{длина}} \leq C\,\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$.

$$\operatorname{grad} t_j(\bar{x})\Big|_{\bar{x}_0} = \left(\frac{\partial t_j}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x}_0}, \ldots, \frac{\partial t_j}{\partial x_n}\Big|_{\bar{x}_0}\right)$$

$$C_j = \max_{\bar{x} \in \Pi} \|\operatorname{grad} t_j(\bar{x})\|$$

Рассм. скал. ф-цию.

$\varphi_j(\lambda) = t_j(\bar{x}_1 + \lambda(\bar{x}_2 - \bar{x}_1))$ – ф-я от λ, $\lambda \in [0, 1]$



$\lambda = 0 \to$ в $\bar{x}_1$

$\lambda = 1 \to$ в $\bar{x}_2$

$\lambda \in [0,1] \to$ бежим по отр.

$$|t_j(\bar{x}_2) - t_j(\bar{x}_1)| = |\varphi_j(1) - \varphi_j(0)| \underset{\text{теор. Лагранжа}}{=} \left| \left(\operatorname{grad} t_j \Big|_{\xi}, \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \right) \right| \le$$

$$\le \left\| \operatorname{grad} t_j \Big|_{\xi} \right\| \cdot \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \le C_j \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$$

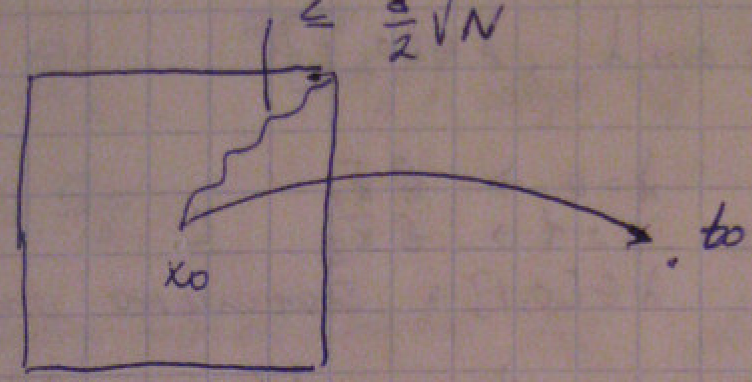
Ост. заметить, что длина вектора не превосходит сумму модулей его координат и взять в кач-ве C сумму $C_1 + C_2 + \dots + C_N$.

Лемма] мн-во A в $\mathbb{R}^N$ можно покрыть кон. (счетной) сов-ю брусов с суммой мер $< C$.
Тогда A можно покрыть кон. (счетной) совокупностью кубов с суммой мер $< C \cdot 2^N$.

1) Вырожденные брусы заменим на содержащие их невыр., так, что сумма мер ост. $< C$.
2) Будем резать брусы по всем ребрам, за исключ. наименьшего до тех пор, пока отношение длин наиб. и наим. ребер не попадет в пром-ок $[1, 2)$
3) Заменим каждый брус на содержащий его куб с длиной ребра, равной длине наим. ребра бруса, умн на 2.

При этом длины ребер увелич. не более чем вдвое $\Rightarrow$ объем $\uparrow$ не более чем в 2^N раз. ∎

Лемма] K - куб в $\mathbb{R}^N$ с длиной ребра d, $\varphi(\bar{x})$ - отображение K в $\mathbb{R}^N$, удовл. след. условию:
$\exists\, C \ge 0 : \forall\, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K \quad \|\varphi(\bar{x}_1) - \varphi(\bar{x}_2)\| \le C \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$.
Тогда образ $\varphi(K)$ лежит в кубе с длиной ребра $\le d \cdot C \cdot \sqrt{N}$



$\overline{x_0}$ - центр K $\Rightarrow$ расст от t_0 до произв. т. $\varphi(K)$ не превосх $\frac{d}{2}\sqrt{N}\cdot C$ $\Rightarrow$ по кажд. коорд. отл. $\le \frac{d}{2}\sqrt{N}\,C$.

Ост. взять куб с цен. в т. t_0 и длиной ребра $d < \sqrt{N}$.

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\exists$ Π - замкн. брус в $\mathbb{R}^N$, $A \subset \Pi$, A имеет меру 0 по J / по L.

$\varphi(\overline{x})$ - непр. диффеф. ~~вз-однозн.~~ (не надо) отображение бруса Π на подмнов $\mathbb{R}^N$.

Тогда $\varphi(A)$ имеет меру 0 по J / по L.

Док-во.

Заф. произв. $\varepsilon > 0$. Найдем кон (для J) (сч) (по L) сов-ть брусов, покрыв. A и им. суммарную меру $< \dfrac{\varepsilon}{2^N(\sqrt{N}C+1)^N}$ (const из L)

Заменем брусы на кубы с возрастанием меры не более чем в 2^N раз

Получим сов-сть кубов $K_1, K_2, \dots$,

Посмотрим на образы $K \cap \Pi$ (они покрыв. $\varphi(A)$). Образ каждого из этих кубов лежит в кубе с длиной ребра, равной длине ребра исх. куба, умн. на $C\sqrt{N}$. ($\Rightarrow$ с мерой, превосх. меру исх. в $(C\sqrt{N})^N$ раз)

Получ, что $\varphi(A)$ покрыт кон/сч. совок-ю кубов с суммой мер $< \varepsilon$.

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\exists A$ - измер. подмнож. $\Omega_{\bar{x}}$. $\partial A \subset \Omega_{\bar{x}}$.
Тогда $\bar{t}(A)$ - изм.

Док-во:

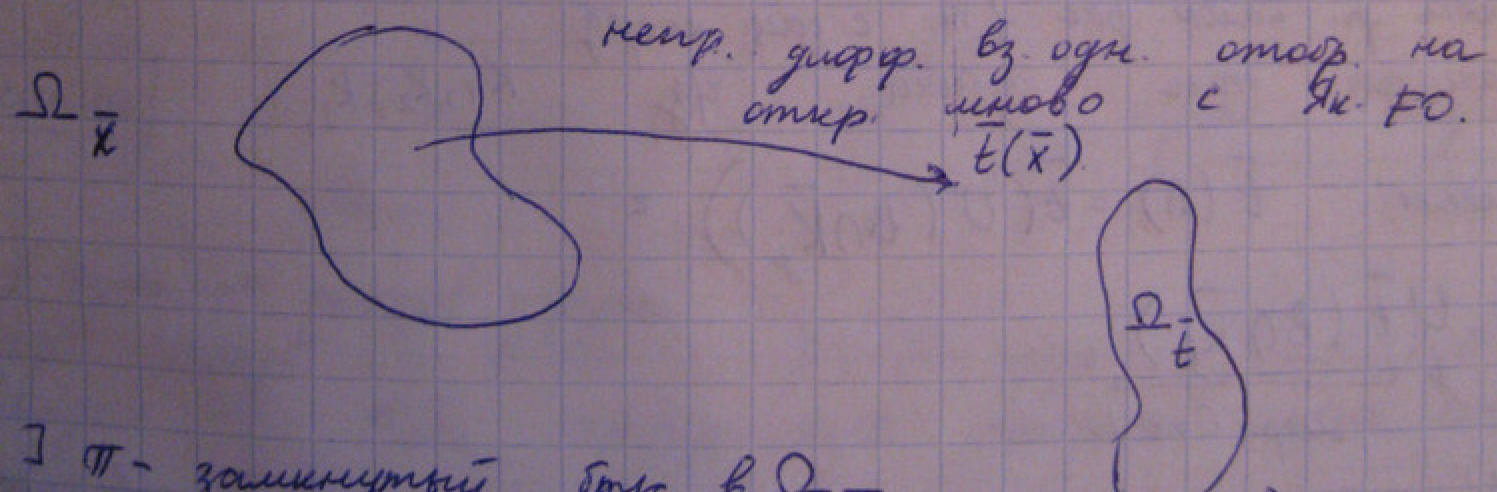
Рассмотрим границу ∂A - огр. замкн. множ-во.
Для произв. т. $\bar{x} \in \partial A$ найдем $B_\delta(\bar{x}) \subset \Omega_{\bar{x}}$
Найдем невыр. откр. брус Π_x : $\Pi_x \subset B_\delta(\bar{x})$
Получили открытое покрытие ∂A. $(x \in \Pi_x)$.
Выделим конечное подпокрытие $\Pi_{x_1} \dots \Pi_{x_k}$.
∂A распалась на конечное число частей $(\partial A \cap \overline{\Pi}_{x_1}) \subset \overline{\Pi}_{x_1}$

$(\partial A \cap \overline{\Pi}_{x_2}) \subset \overline{\Pi}_{x_2}, \dots, (\partial A \cap \overline{\Pi}_{x_N}) \subset \overline{\Pi}_{x_N}$

Каждый кусок имеет меру 0 по J и лежит в замкн. брусе => перех. в множ-во меры 0 по J.
=> граница $\bar{t}(A)$ имеет меру 0 по J. => $\bar{t}(\bar{A})$ измеримое множ-ва

Лекция № 12

$\mathbb{R}^N_{(\bar{x})}$ $\mathbb{R}^N_{(\bar{t})}$



$\exists \Pi$ - замкнутый брус в $\Omega_{\bar{x}}$, $A \subset \Pi$, A имеет меру 0 по J (по L).
Тогда $\bar{t}(A)$ также имеет меру 0 по J (по L)

Если $\bar{A} \subset \Omega_{\bar{x}}$, A изм. по J, то образ этого множ-ва $\bar{t}(A)$ также изм. по J.

A $\boxed{\text{Лемма.}}$ ~~$\exists\ \bar{A} \subset \Omega_{\bar{x}}$~~

] $B \subset \Omega_{\bar{x}}$ B имеет меру 0 по L.

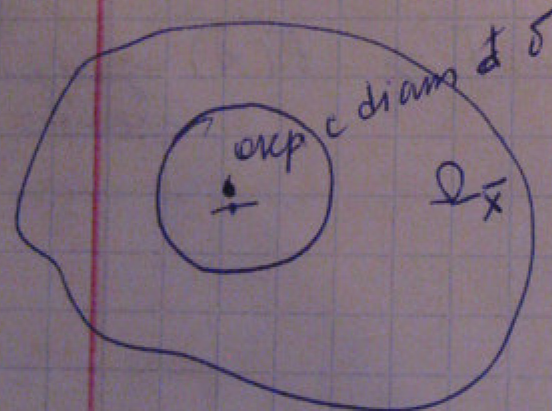
Тогда образ $\bar{t}(B)$ имеет меру 0 по L.

Док-во

Рассм. сист. открытых кубов, длина сторон которых явл. рац. числом, центр имеет (все) рац. коорд., замык. куба $\subset \Omega_{\bar{x}}$

$\longrightarrow$ Таких кубиков счетный набор.

Объединение этих кубиков совпадает с Ωx.



но люб. ур. малом. рас $\exists$ т. с рац. коорд

Обозначим эти кубики ч/з $K_1, K_2, K_3, \ldots$

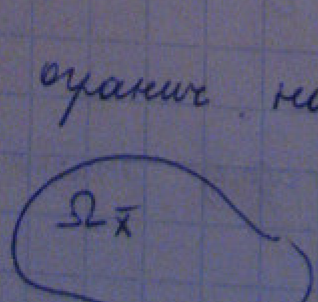
Имеем: $\bar{t}(B) = \bar{t}(\cup(B \cap \bar{K}_j)) =$

$$= \bigcup_j \underbrace{\bar{t}(B \cap \bar{K}_j)}_{\text{мера 0 по } L}$$

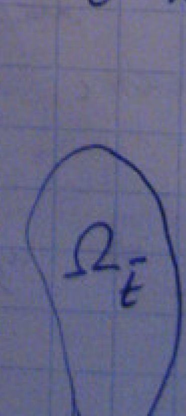
$\cup$ не бол. чем сч. мн. меры 0 по L —

$\longrightarrow$ мн-во меры 0 по L

$f(\bar{x})$ — огранич. на $\Omega_{\bar{x}}$



$f(\bar{x})$



$f(\bar{x}(\bar{t}))$.

Рассмотрим ф-ю $F(M)$, определенную на измеримых (по J) подмновах $\Omega_{\bar{x}}$ и приним. действит. значения

/* $M \to \int\limits_M f\, d\mu$, где f - интегрир по J ф-я. */

Потребуем от ф-ии f след свова:

1) аддитивность:
Если $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, то $F(M_1 \cup M_2) = F(M_1) + F(M_2)$

2) $\exists\, C>0: \quad |F(M)| \leq C \mu M$

$|f| \leq C: \quad \left|\int\limits_M f\, d\mu\right| \leq \int\limits_M |f|\, d\mu \leq \int\limits_M C\, d\mu = C \mu M$

$\boxed{\text{Опр}}$

$F(M)$ имеет в т. $x_0 \in \Omega_{\bar{x}}$ произв, равную α, если $\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0: \forall K$ - куба: $\bar{x}_0 \in K \subset \Omega_{\bar{x}}$, $\mu K < \delta$.

$$\left|\frac{F(K)}{\mu K} - \alpha\right| < \varepsilon.$$

$\boxed{\text{Лемма}}$] F обращ в 0 на всех кубах. Тогда $F \equiv 0$.

Док-во.

(1) Кубы $\to$ произв брусы.
Заф. произв $\varepsilon > 0$.] Π - брус, лежащий в $\Omega_{\bar{x}}$
Найдем $K_1 \dots K_N$ совокупность непересек. кубов, леж. в Π:
$\mu(\Pi \setminus \bigcup_j K_j) < \frac{\varepsilon}{C}$. Тогда.

$$|F(\Pi)| = |\underbrace{F(K_1)}_{0} + \underbrace{F(K_2)}_{0} + \dots + \underbrace{F(K_N)}_{0} + F(\Pi \setminus \bigcup_j K_j)| \leq \underbrace{C \mu(\Pi \setminus \bigcup_j K_j)}_{<\varepsilon}$$

по условию

$\Rightarrow F(\Pi)$ это 0.

(2) произв. брус — простые мн-ва.

кон. объед. попарно непересек. брусы

(3) простые мн-ва — произв. изм. мн-ва.

$\rceil$ A — произв. измер. подмн-во $\Omega_{\bar{x}}$.

Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$.

$\exists$ P — простое мн-во кот. вложено в A $(P \subset A)$ и

$\mu(A \setminus P) < \frac{\varepsilon}{C}$ (по опр. нижней меры)

Тогда $|F(A)| = |\underbrace{\cancel{F(P)}}_{\text{производная} \to 0} + F(A \setminus P)| \leq C \cdot \mu(A \setminus P) < \varepsilon$.

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\rceil$ $F' \equiv 0$ на $\Omega_{\bar{x}}$. Тогда $F \equiv 0$.

Док-во.

Дост. док-ть, что F на всех кубах обращ. в 0.

От противного:

$\rceil$ K — замкн. брус : $F(K) = \alpha \neq 0$.

Предпол, что $\alpha > 0$. (случай $\alpha < 0$ — аналогично).

Положим: $K_1 = K$. Разобьем K_1 по каждому ребру пополам (сам куб K_1 разбили на 2^N замкн. кубов)

В кач-ве K_2 возьмем тот из них, на кот. $F \geqslant \frac{\alpha}{2^N}$.

Аналог. разоб. K_2 на 2^N равных замкнутых кубов и в кач-ве K_3 выб. тот из них, на кот. $F \geqslant \left(\frac{\alpha}{2^N}\right) \cdot \frac{1}{2^N}$

$\rceil$ x_0 — общ. точка построенной посл-ти кубов.

$$\frac{F(K_j)}{\mu K_j} \geqslant \frac{\alpha \,/\, \cancel{(2^N)^{j-1}}}{\mu K_1 \,/\, \cancel{(2^N)^{j-1}}} = \frac{\alpha}{\mu K_1} > 0$$

фиксир. положит. величина.

Противоречит тому, что

$F'(x_0) = 0$.

$A_{\vec{x}}$ – измеримое подмнов. $\Omega_{\vec{x}}$: $\bar{A}_{\vec{x}} \subset \Omega_{\vec{x}}$

его замыкание

Через $A_{\vec{t}} = \vec{t}\,(A_{\vec{x}})$ – измеримо.

замыкание $\bar{A}_t \subset \Omega_{\vec{t}}$

Пусть $Q_{\vec{t}}$ – произв. изм. подмнов. $A_{\vec{t}}$.

$\vec{x}\,(Q_{\vec{t}}) = Q_{\vec{x}}$ $\quad (\vec{t}\,(Q_{\vec{x}}) = Q_{\vec{t}})$

$\boxed{\text{Лемма}}$ Для изм. $Q_{\vec{t}} \subset A_{\vec{t}}$ опред. две ф-ии мнова

$$F_1(Q_{\vec{t}}) = \int_{Q_{\vec{t}}} \left|\det\left(\frac{\partial x_j}{\partial t_k}\right)\right| d\vec{t},$$

$$F_2(Q_{\vec{t}}) = \int 1\, d\vec{x} = \mu Q_{\vec{x}}. \qquad F_1 \equiv F_2.$$

$Q_{\vec{x}} = \vec{x}\,(Q_{\vec{t}})$

$\boxed{\text{Теорема}}$ о замене переменных в кратных интегралах.

Пусть $f(\vec{x})$ доп. огранич. на $\Omega_{\vec{x}}$.

Тогда $\displaystyle\int_{A_{\vec{x}}} f(\vec{x})\,d\vec{x}$ и $\displaystyle\int_{A_{\vec{t}}} f(\vec{x}(\vec{t}))\left|\det\left(\frac{\partial x_j}{\partial t_k}\right)\right| d\vec{t}$

одноврем. $\exists$ или не $\exists$. и в случае $\exists$ они $=$.

(1) одноврем. интегрируемость – критерий Лебега.

(2) $\displaystyle J := \int_{A_{\vec{x}}} f(\vec{x})\,d\vec{x}$. Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$

Найдем $\{A_j\}_{j=1}^{K}$ – разб. $A_{\vec{x}}$ на попарно не пересек. мнова. $S^*(T) < J + \varepsilon$

$S_*(T) > J - \varepsilon.$

$m_j = \inf\limits_{\vec{x} \in A_j} f(\vec{x})$ $\qquad$ $M_j = \sup\limits_{\vec{x} \in A_j} f(\vec{x})$

$B_j = \vec{t}(A_j)$ $\qquad$ $\{B_j\}$ - разбиение $A_{\vec{t}}$.

Имеем: $\forall j$ на A_j: $\quad m_j \le f(\vec{x}) \le M_j \quad \cancel{\Big| \times \Big|\det \frac{\partial x_i}{\partial t_k}\Big|}$

на B_j: $\quad m_j \le f(\vec{x}(\vec{t})) \le M_j \quad \Big| \times \Big|\det\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right)\Big|$.

$m_j |\det(\;)| \le f(\vec{x}(\vec{t})) |\det(\;)| \le M_j |\det(\;)|$.

инт. это всё по B_j.

$m_j \mu A_j \le \int\limits_{B_j} f(\vec{x}(\vec{t})) |\det(\;)| \, d\vec{t} \le M_j \mu A_j . \quad \Big| \sum\limits_j$

применяем лемму

$$J - \varepsilon < S_*(T) \le \underbrace{\int\limits_{A_{\vec{t}}} f(\vec{x}(\vec{t})) |\det(\;)| \, d\vec{t}}_{= J} \le S^*(T) < J + \varepsilon$$

■

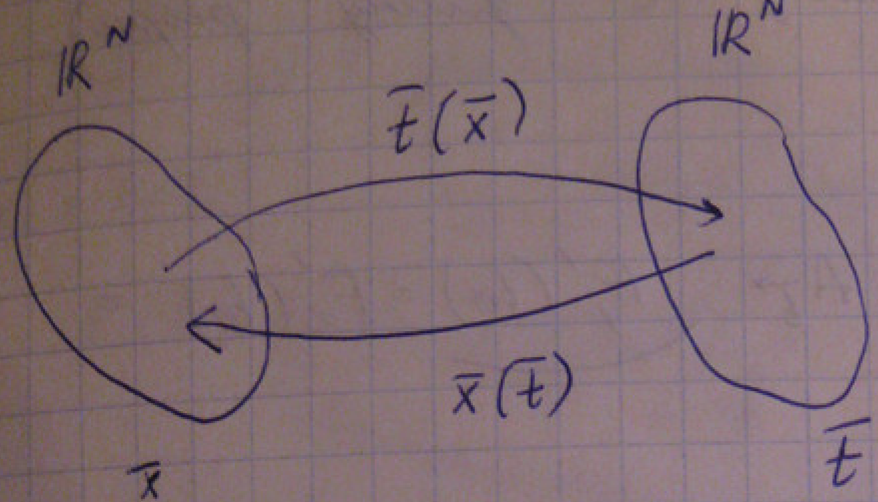
Док-во леммы

Для произв. т. $\vec{t_0} \in A_{\vec{t}}$ дост. док-ть след:

$$F_1'(\vec{t_0}) = F_2'(\vec{t_0}) = \left|\det\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right)\right|_{\vec{t_0}}$$

Док-м огр-ть F_1 и делаем вид про F_2.

Лекция № 13.



Отображ. хорошее

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\exists\ A_{\vec{x}} \subset \Omega_{\vec{x}}$, $\bar{A}_{\vec{x}} \in \Omega_{\vec{x}}$

$A_{\vec{t}} = \vec{t}\,(A_{\vec{x}})$

$A_{\vec{x}}$ - изм. по $J \Rightarrow A_{\vec{t}}$ тоже измеримо.

Ф-я $f(\vec{x})$ ограничена, опр-на на $A_{\vec{x}}$.

Тогда $\int\limits_{A_{\vec{x}}} f(\vec{x})\,d\vec{x}$ и $\int\limits_{A_{\vec{t}}} f(\vec{x}(\vec{t}))\cdot\left|\det\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{t}}\right)\right| d\vec{t}$

одновр. $\exists$ или $!\exists$ и в случае $\exists$-ния равны.

Док-во леммы

Определим на изм. подмнож-ах $Q_{\vec{t}} \subset A_{\vec{t}}$ след ф-ии множ-в

$$F_1(Q_{\vec{t}}) = \int\limits_{Q_{\vec{t}}} \left|\det\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{t}}\right)\right| d\vec{t}$$

и $F_2(Q_{\vec{t}}) = \int\limits_{\vec{x}(Q_{\vec{t}})} 1\,d\vec{x} = \mu\left(x\left(Q_{\vec{t}}\right)\right)$

$F'(x_0) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0: \forall K$ – куба и содерж. т. x_0 и им. меру (или даже длину ребра)

$$\left| \frac{F(K)}{\mu K} - A \right| < \varepsilon.$$

Ост. док-ть: $\forall$ т. $\vec{t}_0 \in A_{\vec{t}}$ $\underbrace{F_1'(t_0) = F_2'(t_0)}$ =

$$= \underbrace{\left| \det\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{t}}\right)\Big|_{\vec{t}_0} \right|}_{J_я(t_0)}$$

Заф. пр. $\varepsilon > 0$. Найдем такую величину $\delta > 0$:

$\forall$ точки $t \in B_{\delta\sqrt{N}}(\vec{t}_0)$ $\quad \left| J_я(\vec{t}) - J_я(\vec{t}_0) \right| < \varepsilon$

Возьмем произв. куб K, содержащий т. $\vec{t}_0$ и имеющий длину ребра $< \delta$.

Тогда куб K целиком лежит в $B_{\delta\sqrt{N}}(\vec{t}_0)$

Тогда: $\dfrac{F_1(K)}{\mu K} = \dfrac{\int\limits_K |J_я(t)| \, d\vec{t}}{\mu K}$

$$\left| \frac{F_1(K)}{\mu K} - |J_я(t_0)| \right| = \left| \frac{\int\limits_K |J_я(\vec{t})| d\vec{t}}{\mu K} - \frac{\int\limits_K |J_я(t_0)| d\vec{t}}{\mu K} \right| \leq$$

$$\leq \frac{\int\limits_K \left| |J_я(\vec{t})| - |J_я(\vec{t}_0)| \right| d\vec{t}}{\mu K} \leq \frac{\int\limits_K \varepsilon \, d\vec{t}}{\mu K} = \varepsilon$$

Для F_1 факт строго доказан

Для F_2:

] K - куб с длиной ребра α, содержащий т. $\vec{t_0}$.

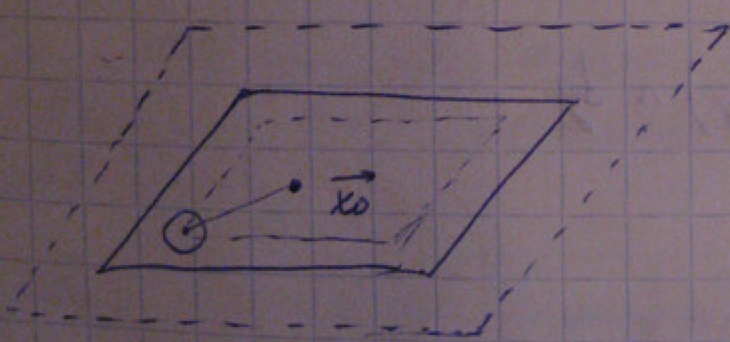
$x_0 = x(\vec{t_0})$, $L_Я$ - сама матрица Якоби. Для $t \in K$:

$$\vec{x}(\vec{t}) = \underbrace{\vec{x_0} + L_Я \underbrace{\vec{\Delta t}}_{\vec{t}-\vec{t_0}}}_{} + \underset{\alpha\to 0}{\bar{\bar{o}}}(\|\vec{\Delta t}\|)$$

параллелепипед с мерой $|\det L_Я|_{\vec{t_0}}|\mu K = |J_Я(\vec{t_0})|\mu K$

возмущ. паралл. лежит внутри „невозмущ“ увелич. в $(1+C_\alpha)$ раз, где C - конст, огр. сверху отн. погр-тью и покрыв. „невозмущ“ параллелепипед $(1+C_\alpha)$ раз, где $C_\alpha \to 0$ $(\alpha \to 0)$

К лин. отобр добавл. возмущение.

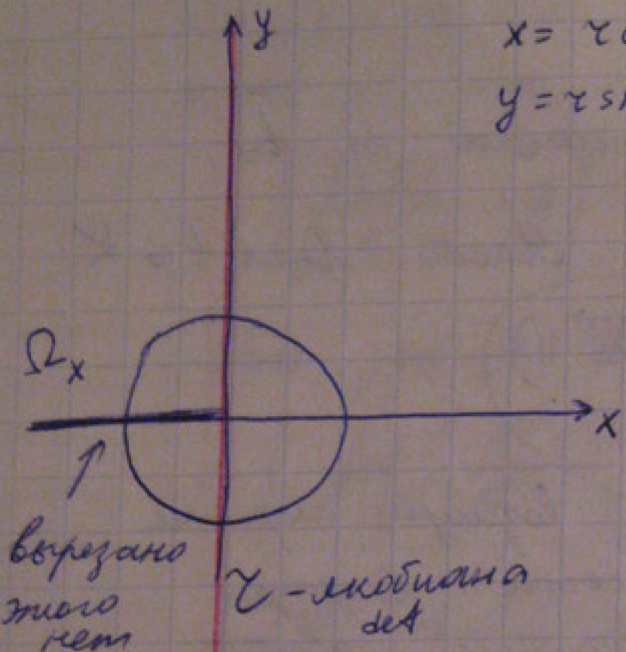


по которому ребру.

Тогда $\frac{F_2(K)}{\mu K} \le \frac{\cancel{\mu K}\,|J_Я(\vec{t_0})| \cdot (1+C_\alpha)^N}{\cancel{\mu K}}$

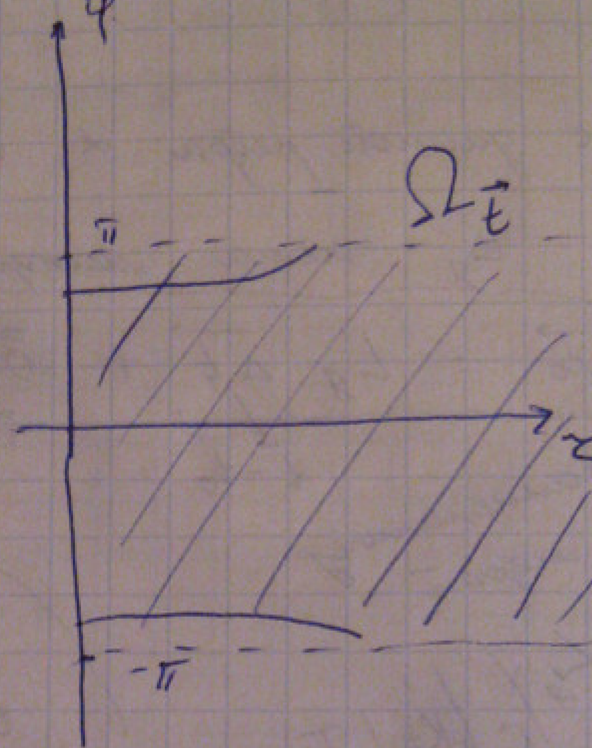
$\ge \frac{\cancel{\mu K}|J_Я(\vec{t_0})|}{\cancel{\mu K}(1+C_\alpha)^N} \to |J_Я(\vec{t_0})|$

Полярная замена:



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$



$f(x, y) \qquad dx \wedge dy = -dy \wedge dx$

$f'_x\,dx + f'_y\,dy$

$(f''_{xy}\,dy)dx + (f''_{xy}\,dx + f''_{yy}\,dy) \wedge dy$

$f''_{xy}\,dx\,dy$

$dx \wedge dy = d(r\cos\varphi) \wedge d(r\sin\varphi) =$

$= (\cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi) \wedge (\sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi) =$

$= \begin{bmatrix} dr \wedge dr = 0 \\ d\varphi \wedge d\varphi = 0 \end{bmatrix} = \underbrace{(r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi)}_{r}\,dr \wedge d\varphi$

$dx_1, dx_2 \ldots dx_N = d((x_1)'_{t_1}\,dt_1 + (x_1)'_{t_2}\,dt_2 + \ldots + (x_1)'_{t_N}\,dt_N) \wedge$
$\wedge ((x_2)'_{t_1}\,dt_1 + (x_2)'_{t_2}\,dt_2 + \ldots + (x_2)'_{t_N}\,dt_N) \wedge \ldots$
$\ldots \wedge ((x_N)'_{t_1}\,dt_1 + (x_N)'_{t_2}\,dt_2 + \ldots + (x_N)'_{t_N}\,dt_N).$

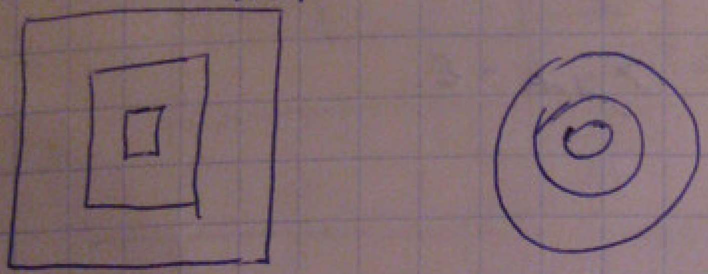
] $A \subset \mathbb{R}^N$

$\boxed{\text{Опр}}$ Сов-ть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ наз. исчерпыванием A, если

(1) все E_n измеримы

(2) $E_1 \subset E_2 \subset \dots$

(3) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = A$.



$\boxed{\text{Т.}}$] A — изм. мн-во, $\{E_n\}$ — исчерп. A. Тогда

$\mu E_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu A$

Док-во:

Заф. произв. $\varepsilon > 0$.

Найдем P — замкнутое простое мн-во $P \subset A$,

$\mu P > \mu A - \frac{\varepsilon}{2}$.

$P_n \supset E_n$

Для $\forall\, n \in \mathbb{N}$ найдем P_n — простое откр. мн-во:

$\mu P_n < \mu E_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

$G_n = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ — простое мн-во, откр. $G_n \supset E_n$

$\mu G_n < \mu E_n + \frac{\varepsilon}{2}$.

заменим n на k

$(\mu(G_n \setminus E_n) = \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \setminus E_n\right) \le \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} (P_k \setminus \cancel{E_n} E_k)\right) \le$

$\le \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(P_k \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{16} + \dots \le \frac{\varepsilon}{2}$.

$G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \dots$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \underset{\text{откр.}}{G_n} \supset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = A \supset \underset{\text{замкн. огр.}}{P}$ Выберем конечное подпокрытие : $G_{j_1} \dots G_{j_L} \dots \quad j_1 < j_2 \dots < j_L$

Положим: $M = j_L$.

Тогда $G_M = G_{j_L} \supset G_{j_1} \cup \dots \cup G_L \supset P$

вывод1: $\mu E_M \leq \mu A$

вывод 2: $\mu E_M > \mu C_M - \frac{\varepsilon}{2} \geq \mu P - \frac{\varepsilon}{2} > \mu A - \varepsilon$.

$\mu A - \varepsilon \leq \mu E_M \leq \mu A$

Тогда $\forall \ n \geq M$

$|\mu E_n - \mu A| < \varepsilon$, т.к. $\mu A - \varepsilon < \mu E_M \leq \mu E_n \leq \mu A$

это и значит, что $\mu E_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu A$.

Лекция № 14

$\mathbb{R}^N \quad A \quad \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$

изм.

$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \qquad \cup A_n = A$.

$\underline{Л}$. Если A изм. по J, и $\{A_n\}$ - исчерп. A, то $\mu A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu A$

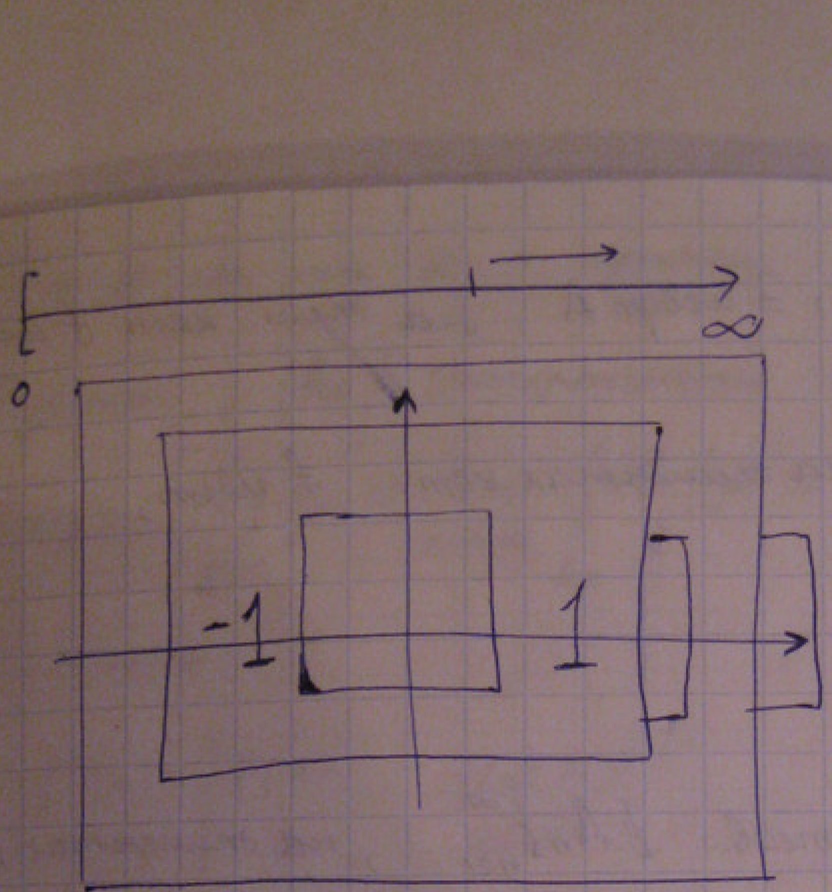
$f: A \to \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Опр}}$ f инт. по R в несоб. смысле по множ-ву A, и J - ее интеграл если

$\forall \ \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ - исчерпывание множ-ва A, такого, что

f интег. на каждом из A_n

$\int_{A_n} f \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} J$, и хотябы одно такое исчерпывание



$\boxed{\text{Лемма}}$] $f \in R(A)$ и ее инт-л $= I$. Тогда f инт. в несобств. смысле по A и ее несобств инт-л равен I.

Док-во. (0) Найдем $\delta > 0$: f - огр. на A_δ. вне A_δ переопр. f (нулем).

Это не повлияет на инт-ть и значение инт. по A и изм $\Rightarrow$ дост. рассм. огр. f.

(0,5) Исчерпывание, на элементах кот. f интегрируема, $\exists$ $(A, A, A, A, \dots)$

(1) Найдем $C > 0$ $|f| < C$ на A.

Возьмем пр. исчерпыв $\{A_n\}$ мн-ва A, на элементах кот. f интегрир., тогда

$$\int_{A_n} f\,d\mu \longrightarrow \int_A f\,d\mu = I \text{, т.к.}$$

$$\left|\int_A f\,d\mu - \int_{A_n} f\,d\mu\right| = \left|\int_{A \setminus A_n} f\,d\mu\right| \le \int_{A \setminus A_n} |f|\,d\mu \le \int_{A \setminus A_n} C\,d\mu = C\mu(A \setminus A_n) =$$

$$= C(\mu A - \mu A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\boxed{\text{Лемма}}$] $f \geq 0$ на A, $\exists$ исчерп. A, на элем. кот f инт. Тогда $\exists$ $I \in [0; +\infty]$:

$\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ - исчерп. A, на элементах кот. f инт.,

$$\int\limits_{A_n} f\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} I.$$

Док-во:

Возьмем произв. исчерпыв. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, на элементах кот. f интегрир.

Посл-ть $\int\limits_{A_n} f\, d\mu$ явл. неубывающей.

$\Rightarrow \exists$ число $I \in [0; +\infty]$: $\int\limits_{A_n} f\, d\mu \longrightarrow I$.

Возьмем произв. исчерпывание $\{\tilde{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$, на элем. кот. f инт. Аналог. найдем $\tilde{I} \in [0; +\infty]$:

$\int\limits_{\tilde{A}_n} f\, d\mu \longrightarrow \tilde{I}$. Дост. док-ть, что $I = \tilde{I}$.

Возьмем пр. $n \in \mathbb{N}$.

$\{A_n \cap \tilde{A}_k\}_{k=1}^{\infty}$ - исч. A_n

$$f \in R(A_n) \Rightarrow \int\limits_{A_n} f\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{A_n \cap \tilde{A}_k} f\, d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\tilde{A}_k} f\, d\mu = \tilde{I}$$

$n \to \infty$: $I \leq \tilde{I}$. ан-но $\tilde{I} \leq I$, т.е. $I = \tilde{I}$.

$\boxed{\text{Сл 1}}$] $0 \leq g \leq f$ на A.

] также $\exists$ исчерп. на элементах кот. инт. f и g, f инт. в несоб. смысле на A. Тогда g инт.

в несоб. см на A, причем $\int\limits_A g\,d\mu \le \int\limits_A f\,d\mu$.

Возьмем $\{A_n\}$ - исчерпывание на элем. кот. f и g инт.

Тогда $\int\limits_A g\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} g\,d\mu \le \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} f\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu < +\infty$.

$\longrightarrow$

f:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) > 0 \\ -f(x), & f(x) \le 0 \end{cases}$$

Далее будем считать, что $\exists$ исчерп., на элементах кот. f инт. Тогда на элементах этого исчерп. инт. f^+ и f^-.

$\boxed{\text{Утв 1}}$ Если f^+ и f^- инт. в несоб. см на A, то f и $|f|$ инт. в несоб. смысле на A, при этом

$$\left|\int\limits_A f\,d\mu\right| \le \int\limits_A |f|\,d\mu$$

$$I_+ := \int\limits_A f^+\,d\mu \qquad I_- := \int\limits_A f^-\,d\mu$$

$\exists$ $\{A_n\}$ - пр. исчерп., на элем. кот. f инт. Тогда

$$\int\limits_A f\,d\mu \xleftarrow{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_{A_n} (f^+ + f^-)\,d\mu = \int\limits_{A_n} f^+\,d\mu - \int\limits_{A_n} f^-\,d\mu. = I_+ - I_-$$

Аналогично (т.к. $|f| = f^+ + f^-$) $\int\limits_A |f|\,d\mu = I_+ + I_-$

$\longrightarrow$

$|I_+ - I_-| \le |I_+| + |I_-|$

$\boxed{\text{Утв 2}}$ Если $\int\limits_A f^+ d\mu = +\infty$ и $\int\limits_A f^- d\mu < \infty$,

то $\int\limits_A |f| d\mu = +\infty$ и $\forall$ исч. $\{A_n\}$ на эл-тах кот.

f инт, $\int\limits_{A_n} f d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$\boxed{\text{Утв. 3}}$ Если $\int\limits_A f^+ d\mu < +\infty$ $\int\limits_A f^- d\mu = \infty$, то

$\int\limits_A |f| d\mu = +\infty$ и $\forall$ исч. $\{A_n\}$ на эл-тах кот. f инт.

$\int\limits_{A_n} f d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

$\boxed{\text{Сл}}$ Если $|f|$ инт в несоб. см. на A, то f инт. в несоб. смысле на A, причём

$$\left|\int\limits_A f d\mu\right| \le \int\limits_A |f| d\mu$$

$$\left.\begin{matrix} 0 \le f^+ \le |f| \\ 0 \le f^- \le |f| \end{matrix}\right. \Rightarrow \text{инт. в несоб. смысле } f^+ \text{ и } f^-.$$

$\boxed{\text{Утв 4}}$ Пусть $\int\limits_A f^+ d\mu = +\infty$, $\int\limits_A f^- d\mu = +\infty$. Тогда $\int\limits_A |f| d\mu = +\infty$

$\exists \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ - исчерп. A, на элементах кот. f инт., то

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} f\,d\mu$ не $\exists$, т.е. f не инт. в несоб. смысле на A.

(Аналогично предыдущему: $\int\limits_A |f|\,d\mu = \mathcal{I}_+ + \mathcal{I}_- = +\infty$.)

$\boxed{\text{Сл}}$ f и $|f|$ одновр. инт. или не инт. в несобств. смысле на A

$\boxed{\text{Л}}$ Пусть $f \in R(B)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ B_+ – измеримое подмн. B.

$f > 0$ на B_+, $\int\limits_{B_+} f\,d\mu \geqslant \int\limits_B f^+ d\mu - \varepsilon$.

Док-во:

Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$.

При необход-ти переопределим f так, что f станет огр., но на инт. это переопределение не влияет.

Найдем $T = \{B_j\}_{j=1}^K$ – разбиение B.

$$S_*(T, f^+) > \int\limits_B f^+ d\mu - \varepsilon.$$

Положим $B_+ = \bigcup\limits_{\substack{j \\ \inf\limits_{B_j} f^+ > 0}} B_j$

Тогда $f > 0$ на B_+, $\int\limits_{B_+} f\,d\mu = \sum\limits_{\substack{j: \\ \inf\limits_{B_j} f^+ > 0}} \int\limits_{B_j} f^+ d\mu \geqslant \sum\limits_{j\text{ –"– }} \int\limits_{B_j} \inf f^+ d\mu =$

$$= \sum_{j=1}^K \inf_{B_j} f^+ \mu B_j = S_*(T, f^+) > \int\limits_B f^+ d\mu - \varepsilon.$$

$\exists$ $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ – пр. исчерп. A, на элем. кот. f инт.

$$\int\limits_{B_n} f^+ d\mu \to \infty \qquad \int\limits_{B_n} f^- d\mu \longrightarrow \infty.$$

Найдем n_1: $\int\limits_{B_{n_1}} f^+ d\mu > 2$. Найдем $A_1 \subset B_{n_1}$: $f > 0$ на A_1 и

$$\int\limits_{A_1} f d\mu > 1.$$

Найдем $n_2 > n_1$: $\int\limits_{B_{n_2}} f^- d\mu > \int\limits_{B_{n_1}} f^+ d\mu + 3$

Найдем $\tilde{A}_2 \subset B_{n_2}$: $f^- > 0$ на $\tilde{A}_2$ и

$$\int\limits_{\tilde{A}_2} f^- d\mu > \int\limits_{B_{n_1}} f^+ d\mu + 2$$

Положим, $A_2 = B_{n_1} \cup \tilde{A}_2 \subset B_{n_2}$.

$$\int\limits_{A_2} f d\mu = \int\limits_{\cancel{A_2}\ B_{n_1}} f^+ d\mu + \int\limits_{A_2} f^- d\mu < -2$$

Найдем: $n_3 > n_2$: $\int\limits_{B_{n_3}} f^+ d\mu > \int\limits_{B_{n_2}} f^- d\mu + 4$

Найдем $\tilde{A}_3 \subset B_{n_3}$: $f^+ > 0$ на $\tilde{A}_3$ и $\int\limits_{\tilde{A}_3} f^+ d\mu > \int\limits_{B_{n_2}} f d\mu + 3$

$$\int_{A_3} f\,d\mu = \int_{A_3} f^+ d\mu - \int_{\cancel{A_3}\ B_{n_2}} f^- d\mu > 3$$

Найдем $n_4 > n_3$: $\int_{B_{n_4}} f^- d\mu > \int_{B_{n_3}} f^+ d\mu + 5.$ Найдем

$\tilde{A}_n \subset B_{n_4}$. $f^- > 0$ на $\tilde{A}_n$.

$$\int_{\tilde{A}_n} f^- d\mu > \int_{B_{n_3}} f^+ d\mu + 4.$$

Положим $A_n = B_{n_3} \cup \tilde{A}_4 \subset B_{n_4}$.

Тогда $\int_{A_4} f\,d\mu = \int_{\cancel{A_4}\ B_{n_3}} f^+ d\mu - \int_{A_4} f^- d\mu < -4$ что

Лекция № 16.

$\mathbb{R}^N$

Путь. $\underset{\text{непр.}}{x(t)} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$\overline{x}'(t)$

$$l = \int_a^b \|\overline{x}'(t)\|\,dt.$$

<u>Следствие</u> Формула верна и для кусочно-гладких путей

$\exists$ $x(t)$ – путь конечной длины.

Через $s(\cancel{t})(\tau)$ обозначим длину части этого пути, соотв. $t \in [0, \tau]$

$s(\tau) \nearrow$

Если путь непрер.-дифф.(в частн. гладкий) или

Мех. смысл в дек. коорд.

[P_{12}^{2} — проекция на ось X_1 вектора напряжений, действ-щего на площадке, которая $\perp$ оси X_2].

Лекция 15

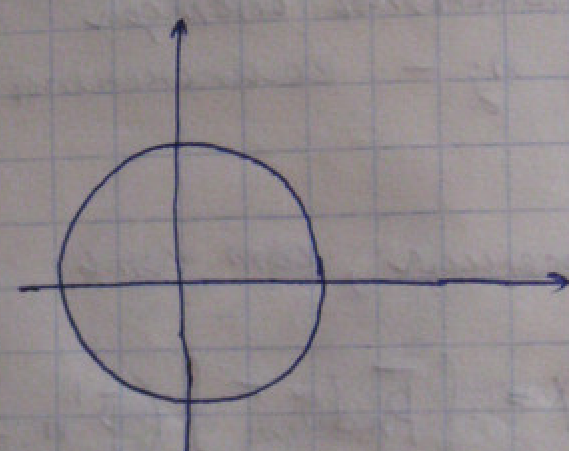
пр-во $\mathbb{R}^N$

Опр Путь в $\mathbb{R}^N$ — это непр. отобр. отр. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^N$.

Образ отр $[a, b]$ при этом отобр назыв. траекторией (кривой) в $\mathbb{R}^N$.

отр $[0; 2\pi]$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$



] $T = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b\}$ — произв. разб. отр. $[a, b]$.

$\varphi(t)$ — непр отобр $[a, b]$ — в $\mathbb{R}^N$ (путь)

Рассм. ломаную с последоват. вершинами $\varphi(t_0), \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_k)$

Эта ломан. наз. вписанной в путь $\varphi(t)$.

Опр Длина пути $\varphi(t)$ — это sup длин впис. в этот путь ломаных

Теорема] $\varphi(t)$ — путь, $l \in \mathbb{R}$ — его длина (кон. ~~или ∞~~).

тогда: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall T$ разбиение $[a, b]$ с $\operatorname{diam} T < \delta$ длина впис. ломаной, соотв. разбиению T, $> (l - \varepsilon)$

(т.е. при diam разб. $\to 0$ длина впис. ломаных $\to$ длине пути)

Док-во.

Заф. произв. $\varepsilon > 0$. Найдем T_0 — разбиение отр $[a, b]$ ($T_0 = \{\hat{t}_0, \hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_L\}$): длина соотв. впис. ломаной $> \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)$

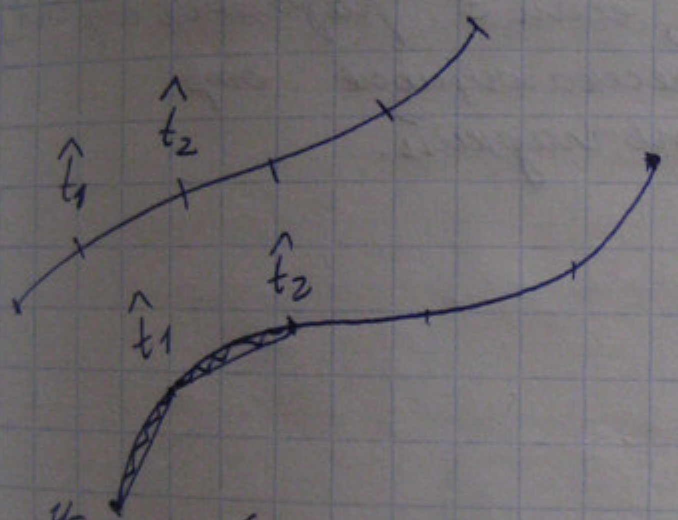
Найдем $\delta_1>0$: $\forall$ точек $\tilde t, \tilde{\tilde t} \in [a,b]$, $|\tilde t - \tilde{\tilde t}| < \delta_1$ $\|\varphi(\tilde t)-\varphi(\tilde{\tilde t})\| < \frac{\varepsilon}{4L}$.

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \operatorname{diam} T_0 \frac{1}{2014}\}$. δ удовл. усл. т.

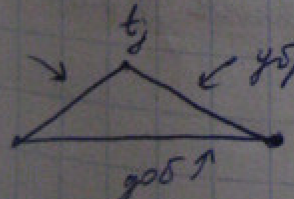
Действ. $\exists$ T – пр. разб. $[a,b]$ с $\operatorname{diam} T<\delta$,
T^+ – объед. разб. T и T_0 (т.е. к точкам разбиения T доб. $\hat t_1, \dots, \hat t_{L-1}$).

Тогда длина лом, соотв разб. T_+, $> (l - \frac{\varepsilon}{2})$ (по нер-ву Δ)

$\geq$ длин. ломан., соотв разбиению T_0.



Убирая (при необходимости) из разб. T^+ точки $\hat t_1, \dots, \hat t_{L-1}$, получаем при удалении каждой точки уменьшение длины ломан. на величину $< \frac{\varepsilon}{2L}$. Суммарное уменьшение длины лом. будет $< \frac{\varepsilon}{2}$.



$\Rightarrow$ Длина ломаной, соотв. разб. T будет $>$, чем дл. лом, соотв. разб T_+ $> \underbrace{l-\frac{\varepsilon}{2}} - \frac{\varepsilon}{2} = l-\varepsilon$ чтд.

$\boxed{\text{Замечание}}$ Аналог. легко док-ть, что если длина пути $\varphi(t)$ беск-ть, то $\forall C>0$ $\exists \delta>0$ $\forall T$ разб. отр $[a,b]$ с $\operatorname{diam} T<\delta$ длина впис. ломаной, соотв. разб. T, $> C$.

$\boxed{\text{Опр}}$ Путь $\varphi(t)$ – непр. дифф, если отобр. $\varphi(t)$ непр. дифф. (т.е. непр. диффер. по каждой координате образа)

Опр] $\varphi(t)$ дифф в т. t_0, $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t))$

Тогда вектор $(\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0), \dots, \varphi_N'(t_0))$ (кот. мы будем обозначать через $\varphi'(t_0)$) назыв. вектором скорости пути $\varphi(t)$ в т. t_0.

Опр Путь $\varphi(t)$ наз. гладким, если он непр. дифф. и вектор скорости отличен от 0 в каждой точке.

Опр Путь $\varphi(t)$ кусочно-гладкий, если $\exists$ разбиение отр $[a,b]$ на конечное число попарно не пересекающихся отр.: на каждом отрезке разбиения путь гладкий.

Утв] $\varphi(t)$ непр. отобр. $[a,b]$ в $\mathbb{R}^N$ („дл. путь"), $c \in (a,b)$, $\varphi: [a,c] \to \mathbb{R}^N$ („левый путь") $\varphi: [c,b] \to \mathbb{R}^N$ („правый путь")

Тогда длина „длинного пути" = сумме длин „левого" и „правого пути".

Док-во.

] l_1 – длина „левого пути"
l_2 – длина „правого пути".

(1) Возьмем произв разб. T всего отр. $[a,b]$. Рассмотрим T_c – разб., получ. добавл. к T точки c.

Длина лом, соотв. разб. T $\leq$ длине ломан, соотв. разбиению T_c. $\leq l_1 + l_2$

(2) Зафикс произв. $\varepsilon > 0$ Найдем T_1 – разб. $[a,c]$, для кот. длина впис. ломаной $> l_1 - \frac{\varepsilon}{2}$

Найдем T_2 – разб. $[c,b]$, для кот. длина впис. лом. $> l_2 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Объединив T_1 и T_2, получим ломан, впис. в „длинный путь" с длиной $> l_1 + l_2 - \varepsilon$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть $\varphi(t)$ непр. дифф. путь. Тогда длина этого пути конечна и равна

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt.$$

Док-во:

$\int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt$ обозн. ч/з I, длину пути обозн. ч/з l, ч/з $l(T)$ обозн. длину впис. лом., соотв. разб. T.

Нужно док-ть, что $I = l$, для этого дост. док-ть, что $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \mathbb{T} = (T, \xi)$ отм. разб. $[a, b]$ с $\operatorname{diam} T < \delta$

$$\left|\sigma\left(\|\varphi'(t)\|, (T, \xi)\right) - l(T)\right| < \varepsilon$$

Зафикс. произв. $\varepsilon > 0$. Заметим, что ф-я $\sqrt{\cdot}$ из чего-нибудь равном. непрер. на $[0; \infty)$
найдем $\gamma > 0$: $\forall \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \quad |\alpha_1 - \alpha_2| < \gamma$

$$|\sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2}| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

~~Найдем~~ Для каждого $j \in \{1, \dots, N\}$ найдем $\delta_j > 0$:
$\forall \tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in [a, b], \ |\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}| < \delta_j \quad \left|\varphi_j'^2(\tilde{t}) - \varphi_j'^2(\tilde{\tilde{t}})\right| < \frac{\gamma}{N}$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N\}$

Пусть (T, ξ) — произв. отмеч. разб. отр. $[a, b]$ с $\operatorname{diam} T < \delta$

$T = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_L = b\}$

Оценим $\left|\sigma\left(\|\varphi'(t)\|, (T, \xi)\right) - l(T)\right|$

$$\left|\sum_{j=1}^{L} \|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\| - \sum_{j=1}^{L} \|\varphi'(\xi_j)\|\, |\Delta_j|\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{L} \sqrt{\left(\varphi_1(t_j) - \varphi_1(t_{j-1})\right)^2 + \left(\varphi_2(t_j) - \varphi_2(t_{j-1})\right)^2 + \dots + \left(\varphi_N(t_j) - \varphi_N(t_{j-1})\right)^2} \right. -$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть $\varphi(t)$ непр. дифф. путь. Тогда длина этого пути конечна и равна
$$\int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt.$$

Док-во:

$\int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt$ обозн. ч/з I, длину пути обозн. ч/з l, ч/з $l(T)$ обозн. длину впис. ломаной, соотв. разб. T.

Нужно док-ть, что $I = l$, для этого дост. док-ть, что $\forall \varepsilon>0 : \exists \delta>0: \forall \mathbb{T} = (T, \xi)$ отм. разб. $[a,b]$ с $\operatorname{diam} T < \delta$
$$\left|\sigma\left(\|\varphi'(t)\|, (T,\xi)\right) - l(T)\right| < \varepsilon$$

Зафикс. произв. $\varepsilon>0$. Заметим, что ф-я $\sqrt{\cdot}$ из чего-нибудь равном. непрер. на $[0;\infty)$
найдем $\gamma>0$: $\forall \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ $|\alpha_1-\alpha_2|<\gamma$
$$|\sqrt{\alpha_1}-\sqrt{\alpha_2}| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

~~Найдем~~ Для каждого $j\in\{1, \ldots, N\}$ найдем $\delta_j>0$:
$\forall \tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in [a,b]$, $|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|<\delta_j$ $\left|\varphi_j'^2(\tilde{t}) - \varphi_j'^2(\tilde{\tilde{t}})\right| < \frac{\gamma}{N}$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N\}$

Пусть (T, ξ) - произв. отмеч. разб. отр. $[a,b]$ с $\operatorname{diam} T<\delta$

$T = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_L = b\}$

Оценим $\left|\sigma\left(\|\varphi'(t)\|, (T,\xi)\right) - l(T)\right|$
$$\left|\sum_{j=1}^{L}\|\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})\| - \sum_{j=1}^{L}\|\varphi'(\xi_j)\|\,|\Delta_j|\right| =$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{L}\sqrt{(\varphi_1(t_j)-\varphi_1(t_{j-1}))^2 + (\varphi_2(t_j)-\varphi_2(t_{j-1}))^2 + \ldots + (\varphi_N(t_j)-\varphi_N(t_{j-1}))^2} \right. -$$

$$- \sum_{j=1}^{L} \|\varphi'(\xi_{\gamma_j})\| \; |\Delta_j| \Big| \underset{\text{по т. Лагранжа}}{=}$$

$$= \Big| \sum_{j=1}^{L} \sqrt{\Big(\varphi_1'(\tilde{\xi}^1_{\gamma_j})\underbrace{\Delta t_j}_{|\Delta_j|}\Big)^2 + \Big(\varphi_2'(\tilde{\xi}^2_{\gamma_j})|\Delta_j|\Big)^2 + \ldots + \Big(\varphi_N'(\tilde{\xi}^N_{\gamma_j})|\Delta_j|\Big)^2} -$$

$$- \sum_{j=1}^{L} \|\varphi'(\xi_{\gamma_j})\| |\Delta_j| \Big) =$$

$$= \Big| \sum_{j=1}^{L} \sqrt{\varphi_1'^2(\tilde{\xi}^1_j) + \ldots + \varphi_N'^2(\tilde{\xi}^N_{\gamma_j})} \; |\Delta_j| - \sum_{j=1}^{L} \|\varphi'(\xi_{\gamma_j})|\Delta_j| \Big| =$$

$$\underset{\mathrm{diam}\, T < \delta}{=} \Big| \sum_{j=1}^{L} \sqrt{\varphi_1'^2(\xi_{\gamma_j}) + \varphi_2'^2(\xi_{\gamma_j}) + \ldots + \varphi_N'^2(\xi_{\gamma_j}) + \underset{\hat{\gamma}}{\theta_j}} \; |\Delta_j| - \sum_{j=1}^{L}$$

$$= \Big| \sum_{j=1}^{L} \big(\|\varphi'(\xi_{\gamma_j})\| + \mu_j\big)|\Delta_j| - \sum_{j=1}^{L} \|\varphi'(\xi_{\gamma_j})\| \cdot |\Delta_j| \Big| =$$

$$|\mu_j| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$= \Big| \sum_{j=1}^{L} \mu_i$$

Замеч. Ф-ла выч. длины кривой ост. верна и для кусочно-гладких кривых

$$\int\limits_{A_3} f\,d\mu = \int\limits_{A_3} f^+ d\mu - \int\limits_{\cancel{A_3}\ B_{n_2}} f^- d\mu > 3$$

Найдем $n_4 > n_3$: $\int\limits_{B_{n_4}} f^- d\mu > \int\limits_{B_{n_3}} f^+ d\mu + 5.$ Найдем

$\tilde{A}_n \subset B_{n_4}$. $f^- > 0$ на $\tilde{A}_n$.

$$\int\limits_{\tilde{A}_n} f^- d\mu > \int\limits_{B_{n_3}} f^+ d\mu + 4.$$

Положим $A_n = B_{n_3} \cup \tilde{A}_4 \subset B_{n_4}$.

Тогда $\int\limits_{A_4} f\,d\mu = \int\limits_{\cancel{A_4}\ B_{n_3}} f^+ d\mu - \int\limits_{A_4} f^- d\mu < -4$ что

Лекция № 16.

$\mathbb{R}^N$

Путь. $x(t) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$
непр.

$\overline{x}'(t)$

$$l = \int_a^b \|\overline{x}'(t)\|\, dt.$$

<u>Следствие</u> Формула верна и для кусочно-гладких путей

$\exists$ $x(t)$ - путь конечной длины.
Через $s(\cancel{t})(\tau)$ обозначим длину части этого пути, соотв. $t \in [0, \tau]$

$s(\tau) \nearrow$

Если путь непрер-дифф (в частн. гладкий) или кусочно-гладкий, то $s(\tau) = \int\limits_a^\tau \| x'(t) \| \, dt =$

$$= \int\limits_a^\tau \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \, dt.$$

Для непр.-дифф. пути $s(\tau) = C^1[a, b]$

$s'(\tau) =$ знач. подинтегр. ф-ии в рассм. точке

$= \| x'(\tau) \|$

Интегралы Римана-Ст. - когда одну ф-ию интегр по другой.

$$\int\limits_a^b f(x) \, dg(x)$$

$$\sigma(f dg, (T, \xi)) = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j) \left(g(x_j) - g(x_{j-1}) \right)$$

Если $\exists \int\limits_a^b f dg$, то $\forall$ т. $c \in (a, b)$ $\exists \int\limits_a^c f dg$, $\exists \int\limits_c^b f dg$

и $\int\limits_a^b f dg = \int\limits_a^c f dg + \int\limits_c^b f dg.$

$\longrightarrow$

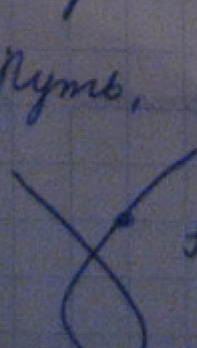
Если $f \in C[a, b]$, $g \in C^1[a, b]$, то

$$\exists \, (R\text{-}S) \int\limits_a^b f dg = (R) \int\limits_a^b f g' \, dx.$$

2 Поле скалярное и векторное.

Скал. поле - приписывание каждой точке числа.

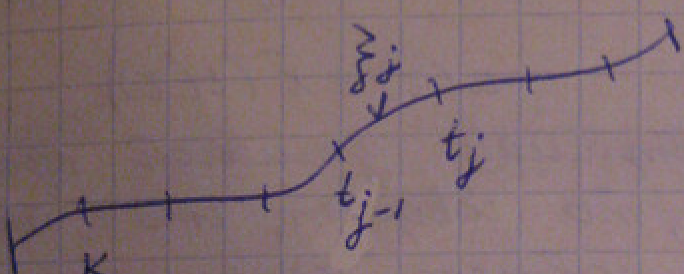
Путь, пути соотв-ет траектория и скал. пол. на траект.



$f(\bar{x})$ скал. поле на траект.

$\boxed{\text{Опр}}$ Криволин. интеграл I рода ф-ии $f(\bar{x})$ (или скал. поля), определенного на траект., заданной путем $\bar{x}(t)$ по этому пути — это

$$(R\text{-}S)\ \int_a^b f(\bar{x}(\tau))\,ds(\tau).$$



$$\sum_{j=1}^{k} f(\bar{x}(\xi_j))\,\underbrace{(s(t_j)-s(t_{j-1}))}_{|\Delta_j|}$$

$$\int_\Gamma f\,ds$$ ← инт I рода.

по кривой

Св-ва криволин. инт.

1) $x(t)$ — путь конечной длины, задающий траекторию Γ. Тогда $\exists \int_\Gamma 1\,ds$, равн. длине Γ.

2) если $f(x)$ — непрер. ф-я, а путь — гладкий, то $\exists$ $\int_\Gamma f\,ds = \int_a^b f(x(t))\,\underbrace{\|\bar{x}'(t)\|}_{\text{длина вектора скорости}}\,dt$

Двумерный случай:

$$\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

<u>Замечание</u> Формула верна и в случае кусочно-гладких кривых.

] $\bar{x}(t): [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$\bar{u}(\tau): [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ — 2 пути в $\mathbb{R}^N$

Эти пути наз. эквивалентными, если $\exists$ непрер строго монот. отображение $t(\tau): [\alpha,\beta] \to [a,b]$:

$u(\tau) \equiv \bar{x}(t(\tau))$.

Отображение $t(\tau)$ наз. допустимой заменой переменных. Если $t(\tau)$ возраст., то говорят, что оно сохр. ориент., если $\searrow$, то говорят, что оно изменяет ориент. кривой.

[$\forall$ путь эквив. себе]

③ Гл. эквивалентность гладких кривых: $t(\tau)$ доп. C^1, $t' \neq 0$.

] f непр., путь гл. Тогда гл. доп. замена перем. (как сохр. так и измен. ориент.) не измен. значение криволин. инт. I рода.

Докажем в случае $\mathbb{R}^3$ (общ. случай анало

(1) замена перем. сохраняет ориентацию.

произв. ≥ 0

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t) + z_t'^2(t)}\, dt = $$

$$= \left[\begin{array}{l} t = t(\tau) - \text{допуст. замена перем} \\ dt = t'_\tau d\tau \end{array}\right]$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \sqrt{(x_t'^2(t(\tau))\, t_\tau(\tau))^2 + (y_t'^2(t(\tau))\, t'_\tau(\tau))^2 + (z_t'^2(t(\tau)), t'_\tau(\tau)}\, d\tau$$

$\cdot\, t'_\tau(\tau))^2$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))) \sqrt{x'^2_\tau + y'^2_\tau + z'^2_\tau}\, d\tau$$

(2) мен. ориент. – произв. отриц. (начало → в конец, конец → в начало), тоже самое $\underbrace{\left(-\int_{\beta}^{\alpha} = \int_{\alpha}^{\beta}\right)}_{\text{компенсируют}}$

Путь без самопересечений.

при $t_1 \neq t_2$ $\bar{x}(t_1) \neq \bar{x}(t_2)$.

Путь простой (замкнутый) контур

(1) $\bar{x}(a) = x(\bar{b})$

(2) при $t_1 \neq t_2$ и $t_1, t_2 \in [a, b)$

$\bar{x}(t_1) \neq \bar{x}(t_2)$.

$x(t)$

$t \to s(t) = \int_a^b \|x'(\tau)\| d\tau$ натур. парам.

[на выходе – число !!!]

Криволин. интеграл II рода.

Будем рассм. для гл. кривых (а также для кус-гл как сумму инт. по гл. кускам)

$\bar{x}'(t)$ вектор скорости

$\bar{F}(\bar{x}(t))$ – векторное поле. (силы, скор., не темпер.)

$$\int_\Gamma \bar{F}\, d\bar{s} = \int_\Gamma \frac{(\bar{F}, \bar{x}')}{\|x'(t)\|} ds.$$

1) $\int\limits_{\Gamma} \frac{x'(t)}{\|\bar{x}'(t)\|} \, d\bar{s}$ – длину кривой Г.

2) $\{x'(t), y'(t), z'(t)\}$ вектор скорости.

$\bar{F} = (P, Q, R)$

вект. поле

скал поле

$$\int\limits_{\Gamma} \bar{F} \, d\bar{s} = \int\limits_a^b \frac{P(x(t), y(t), z(t)) \, x'(t) + Q(\dots) \, y'(t) + R(\dots) \, z'(t)}{\cancel{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}} \cdot$$

$$\cdot \cancel{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} \, dt = \int\limits_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

$x'(t) dt$

[На вход – вект. поле; на выход – число]

③ Допуст. замена перем., сохран. ориент. не изменеют кр. инт. 2 рода

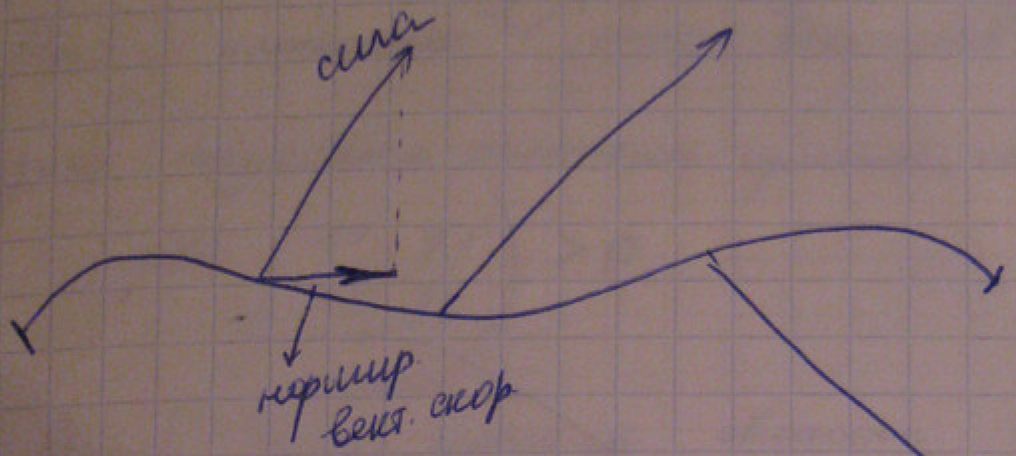
Доп. зам. перем., измен. ориент., изменеют знак криволин. инт. 2 рода

$$\left(\bar{F}, \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|} \right)$$

в $\mathbb{R}^3$

$$\frac{(x'_t(t), y'_t(t), z'_t(t))}{\sqrt{x'^2_t(t) + y'^2_t(t) + z'^2_t(t)}} \cdot \frac{t'_\tau(\tau)}{t'_\tau(\tau)} = \frac{(x'_\tau, y'_\tau, z'_\tau)}{\sqrt{x'^2_\tau + y'^2_\tau + z'^2_\tau}}$$

ничего не поменяется.

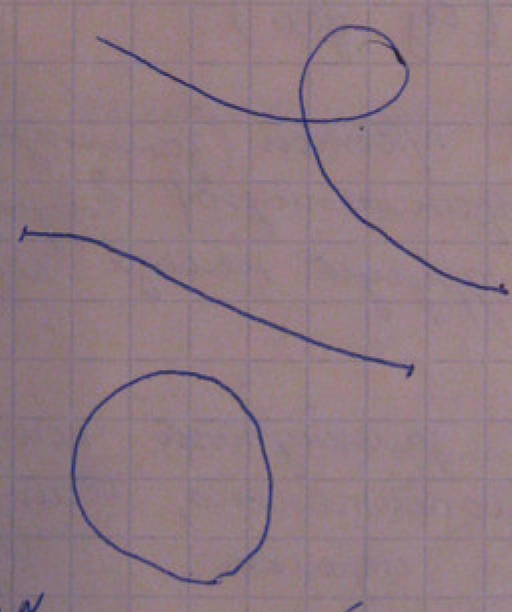


Мех. смысл - работа.

Лекция № 17

$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

$\int_\Gamma f\,ds.$



$\boxed{\text{Опр}}$ Мн-во в $\mathbb{R}^N$ назыв. (линейно) связным, если $\forall x_1, x_2 \in A \ \exists \ \varphi(t)$ - непр. отобр. $[a, b] \longrightarrow A$:

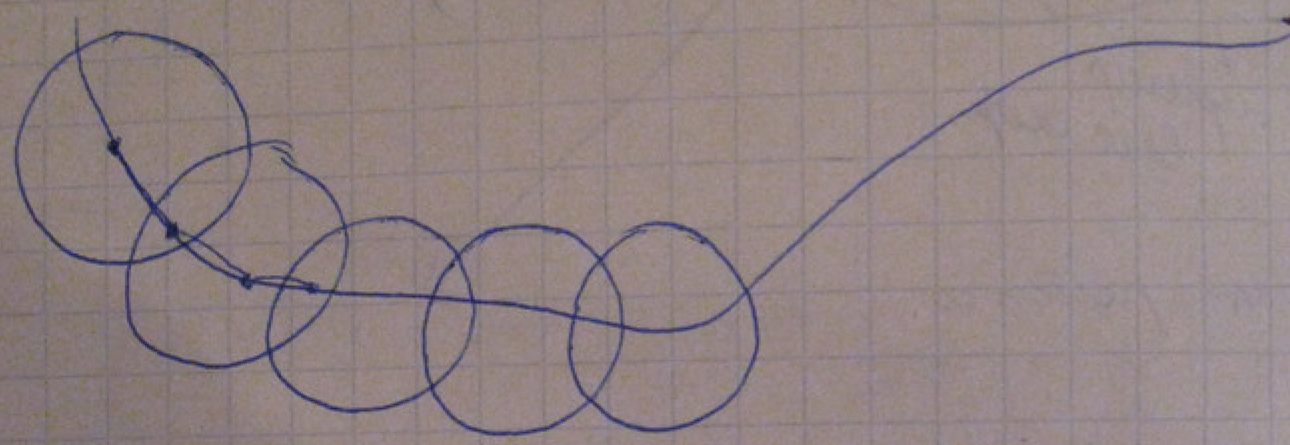
$\varphi(a) = x_1$

$\varphi(b) = x_2$.

Др. словами, $\forall$ 2 точки A можно связать путем, целиком лежащим в A

$\boxed{\text{Опр}}$ Областью в $\mathbb{R}^N$ наз. откр. (лин) связное мн-во.

<u>Замечание:</u> В области $\forall$ 2 точки можно соединить <u>ломаной</u>, целиком лежащ. в этой обл-ти.

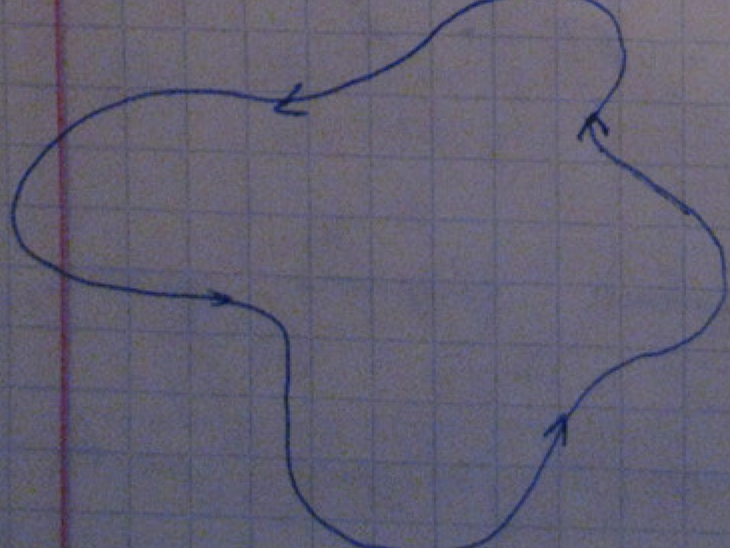


$\boxed{\text{Опр}}$ Замкнутая область - это замыкание обл-ти.

$\boxed{\text{Теорема}}$ Жордана (без док.)

На пл-ти (в $\mathbb{R}^2$) простой (замкнутый) контур определяет 2 обл-ти ограниченную (внутр.) и неогр. (внешнюю). Из одной обл-ти в другую нельзя перейти, не наступив на контур.

~~Будем~~ Простой замкнутый контур на плоскости ориентирован положительно, если он пробегает против часовой стрелки.

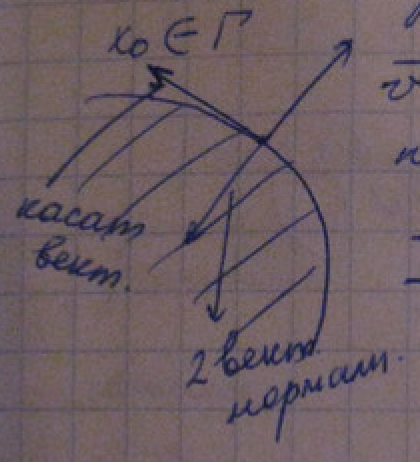


На плоскости упорядоченную пару векторов $\bar{x}=(x_1,x_2)$, $\bar{y}=(y_1,y_2)$ будем называть положит. ориент, если

$$\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}>0.$$

[Область должна оставаться слева!]

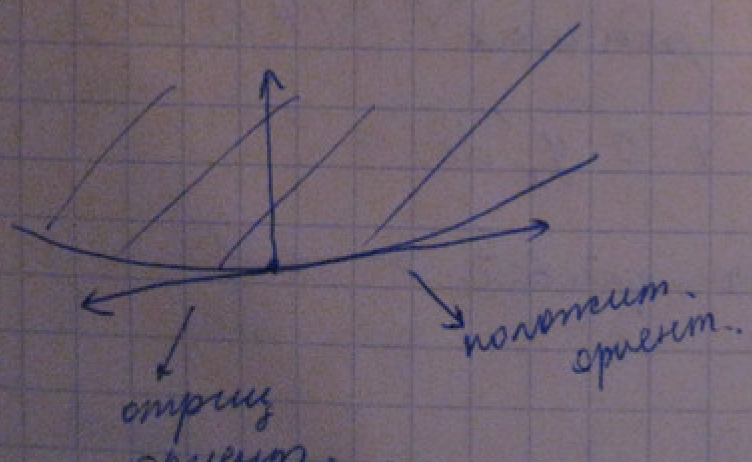
] Γ - гладкий кусок границы области G.

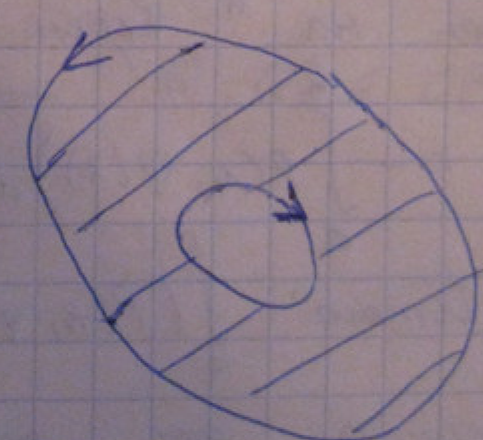


$\bar{v}$ - вектор скорости в т. x_0 (соотв. рассм. парам. ориент)

] $\bar{n}$ - един. вектор внутр. нормали в т. x_0.
Рассм. внутр. нормаль.

Граница ориентиров. ориент. положит., если пара $(\bar{v}, \bar{n})$ положит.



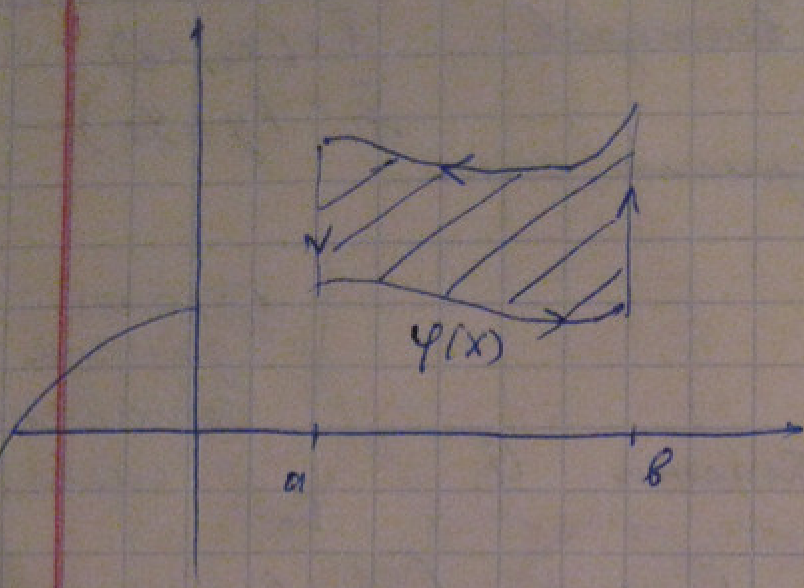


$\oint \quad \oint$

Опр. Область G в $\mathbb{R}^2$ наз. элементарной отн. оси Ox, если

$$G=\{(x,y):\ x\in(a,b),\quad \varphi(x)<y<\psi(x)\}$$

φ, ψ - непрер. на $[a,b]$ ф-ции, $\varphi<\psi$.



$\boxed{\text{Лемма 1}}$ $\rceil$ G – обл-ть, элементарная отн. Ox
Γ – гр. G. $\bar{G}$ – замыкание G $(\bar{G} = G \cup \Gamma)$

$P \in C^1(\bar{G})$. Тогда:

$$\oint_\Gamma (P, 0)\, \vec{ds} = \oint_\Gamma P\, dx = \iint_G -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy.$$

$\boxed{\text{Лемма 2}}$ На левой $\downarrow$ и правой $\uparrow$ границах $\overset{\text{инт.} = 0}{\vee}$ $((P, 0) \perp v)$

на $\xrightarrow{\text{нижн. ч. кр.}}$ $\int_a^в P(x, (x))\, dx + 0 \cdot y_x'\, dx.$

Аналог. на верхн. части кривой

$$\int_в^a = -\int_a^в P(x, \psi(x))\, dx.$$

Итого: $\int_a^в (P(x, \varphi(x)) - P(x, \psi(x))\, dx.$

Аналогично посч. правую часть.

$$\iint_G -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^в \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} -P_y'(x, y)\, dy \right) dx =$$

$$= -\int_a^в \left(P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x)) \right) dx.$$

Замечание. Вместо требования $P \in C^1(G)$ можно было написать треб. $P, P'_y \in C(\overline{G})$.

Следствие. Пусть замкнутая обл-ть $\overline{G}$ допускает разбиение на конечное число замкн. областей $\overline{G_1}, \dots, \overline{G_k}$, элемент. отн. Ox.

] $P, P'_y \in C(\overline{G})$. Тогда $\int P\,dx = \iint\limits_{G} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx$

(применяем лемму к ∂G каждой из $G_1, \dots, G_k$, суммируем и сокращаем кратные инт. по общим участкам границ.)

Аналог.

$\boxed{\text{Опр}}$ Обл-ть G элем. отн. Oy, если

$G = \{(x, y, z);\ y \in (a, b),\ \varphi(y) < x < \psi(y)\}$, где

φ, ψ — непр. дифф. на $[a, b]$ ф-ции.

] G — обл-ть, элементарная отн. Oy.
Q — непр. диф. $C^1(\overline{G})$. (или $Q, Q'_x \in C(\overline{G})$).

Тогда
$$\oint\limits_{\partial G} Q\,dy = \iint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Ф-ла Грина.

] G — обл-ть на плоскости: $\overline{G}$ допускает разбиение на конечное число областей, элемент. относит. Ox, а также —— " —— Oy

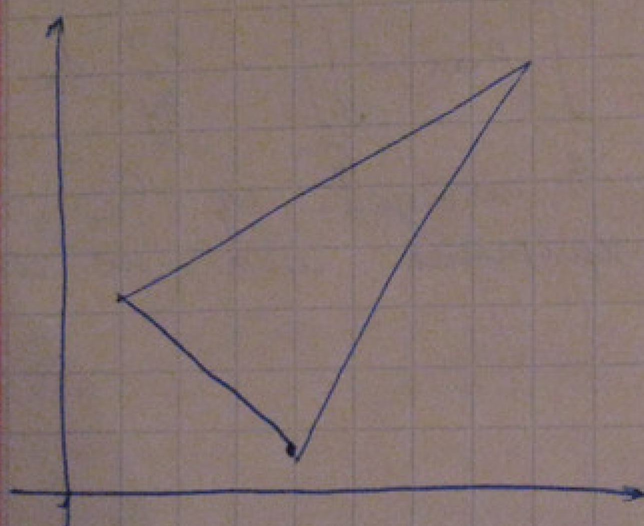
] вект. поле $(P, Q) \in C^1(\overline{G})$ (или $P, P'_y, Q, Q'_x \in C(\overline{G})$)

Тогда:
$$\oint\limits_{\partial G} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$
ориент. положит.

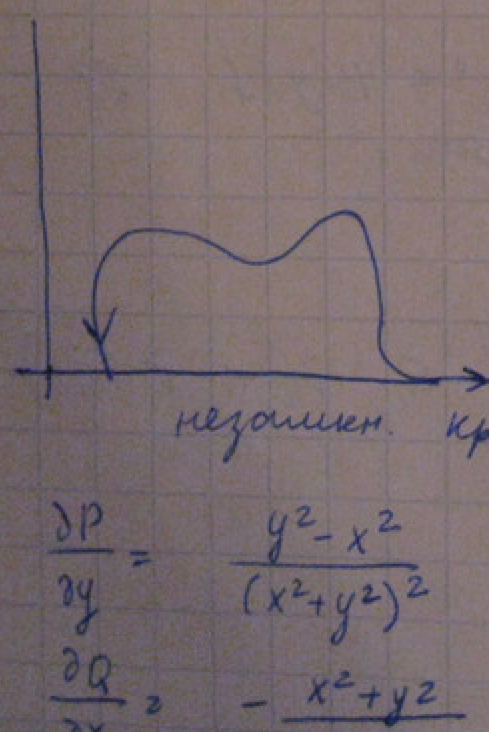
Следствие

$$\mu G = \int\limits_{\partial G} x\,dy = -\int\limits_{\partial G} y\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial G} x\,dy - y\,dx.$$

ориент. положит.



$$\int\limits_{\Gamma} dx + 2y\,dy = 0.$$



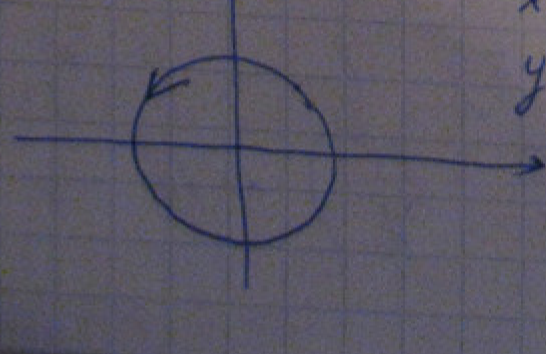
незамкн. кр.

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

$$\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

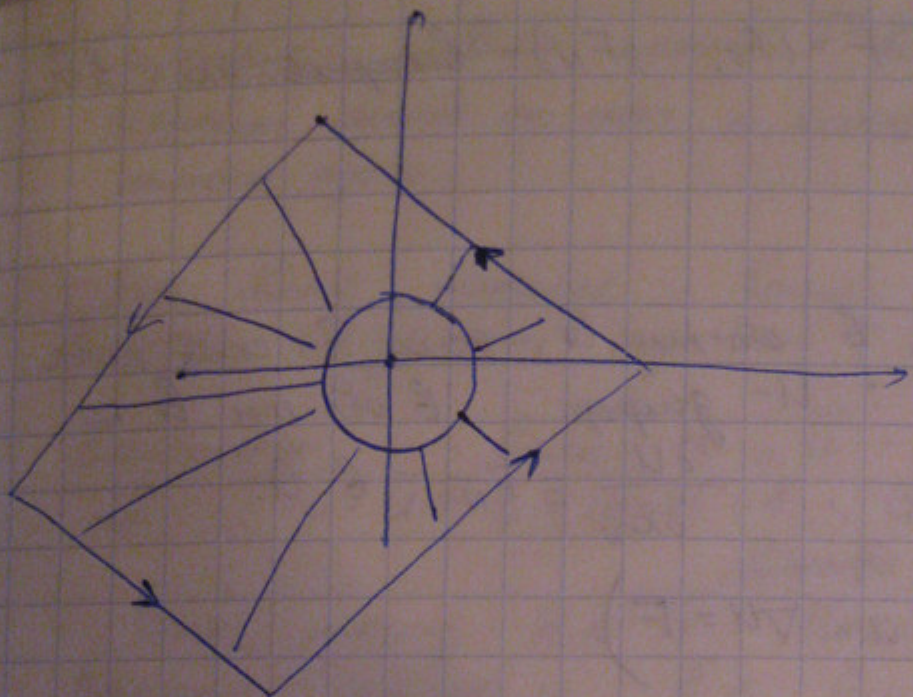
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$ $\quad \varphi \in [0; 2\pi].$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}{r^2}\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} 1\,d\varphi = 2\pi$$



$$\oint_{\circlearrowleft} + \oint_{\circlearrowright} = 0$$
$$\qquad\ \ \diamond \qquad\ \ 0$$

$$\oint_{\diamond} = -\oint_{0} = \oint_{0}$$

Лекция 15

$x(t)$
$y(t)$ $\quad t \in [a, b]$

$F = (P, Q)$

$P(x,y)\ \ Q(x,y)$

$$\int_{\Gamma} \bar{F}\, d\bar{s} = \int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \int_a^b (P x'(t) + Q\, y'(t))\,dt.$$

Γ

$(P, Q) \in C^1$

$$\oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

] G - обл-ть в $\mathbb{R}^N$, $\bar{F} = (F_1, \ldots, F_N)$ - векторное поле в G.

$\left(F_j = F_j(\bar{x}) \colon G \to \mathbb{R} \right)$

точка

Опр Вект. поле $\bar{F}$ потенц. в обл-ти G, если $\exists$ скал. поле u $\left(u = u(\bar{x}) \colon G \to \mathbb{R} \right)$: u - дифф. в обл-ти G и

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \equiv F_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \equiv F_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_N} \equiv F_N \quad \text{в } G.$$

(иными словами $\operatorname{grad} u = \nabla u = F$)

Теорема (ф-ла Н-Л)

] $\bar{F}$ - непр. потенц. поле в обл-ти G

u - потенциал F

Γ - гл./кус.-гл. путь, лежащий в G, с нач. в т. $\bar{a}$ и концом в т. $\bar{b}$.

Тогда $\displaystyle\int_\Gamma \bar{F}\, d\bar{s} = u(\bar{b}) - u(\bar{a})$

Док-во:

Утв. дост. док-ть для гладких кривых.

Рассмотрим параметризацию Γ:
$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \vdots \\ x_N = x_N(t) \end{cases}$$

$t \in [\alpha, \beta]$

$\bar{x}(\alpha) = \bar{a}$; $\bar{x}(\beta) = \bar{b}$.

$$\int_\Gamma F\, d\bar{s} = \int_\alpha^\beta \Big(F_1(\bar{x}(t))\, x_1'(t) + F_2(\bar{x}(t))\, x_2'(t) + \ldots + F_N(x(t))\, x_N'(t) \Big)\, dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big(u(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)) \Big)_t'\, dt \overset{\text{по обычн. ф. Н-Л}}{=}$$

$$= u(\bar{x}(\beta)) - u(\bar{x}(\alpha)) = u(\bar{b}) - u(\bar{a}) \quad \blacksquare$$

Следствие. Для потенц. вект. поля криволин. инт. II р. зависит лишь от нач. и конца пути, не завися от самого пути.

Сл. Для потенц. вект. поля криволин. инт. II рода по замкн. путям $= 0$.

Следствие. Если u и $\tilde{u}$ - потенциалы F в обл-ти G, то $u - \tilde{u} = C = const$ в G

Док-во:

Заф. точку $\bar{a} \in G$. Положим $C = -\tilde{u}(\bar{a}) + u(\bar{a})$
Возьмем произв. т. $\bar{b} \in G$ и Γ - путь - (кус. гл.) с началом в $\bar{a}$ и концом в $\bar{b}$.
Тогда криволин. инт. $\int\limits_{\Gamma} \bar{F} ds = u(\bar{b}) - u(\bar{a}) = \tilde{u}(\bar{b}) - \tilde{u}(\bar{a}) \Rightarrow$

$$u(\bar{b}) - u(\bar{a}) = \tilde{u}(\bar{b}) - \tilde{u}(\bar{a})$$

$$u(\bar{b}) - \tilde{u}(\bar{b}) = u(\bar{a}) - \tilde{u}(\bar{a}) = C$$

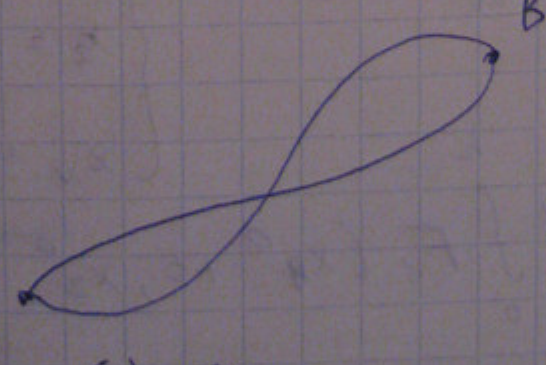
■

Теорема.] $\bar{F}$ - непрер. вект. поле в обл. G.
След. утв. экв-в:

(1) вект. поле $\bar{F}$ - потенц.
(2) Криволин. инт. 2ого рода от F по кус.-гл. крив, лежащ. в G, зависят лишь от нач. и конца пути
(3) Криволин. инт 2ого рода от F по замкн. кус.гл. крив, лежащим в $G = 0$.

Док-во.

(1) $\Rightarrow$ (2) есть
(1) $\Rightarrow$ (3) есть.
(3) $\Rightarrow$ (2) трив.



Ост док-то, что (2) $\Rightarrow$ (1)

Зафикс. произв. т. $\bar{a} \in G$. Для произв. т. $\bar{x_0} \in G$ рассм. (произв) кус.-гл. путь Γ с нач. в $\bar{a}$ и концом в $\bar{b}$.

Положим $U(\bar{x_0}) = \int\limits_\Gamma \bar{F}\, d\bar{s}$

Покажем, что U — потенциал вект. поля $\bar{F}$.

Покажем, что для $\forall \bar{x_0} \in G$:

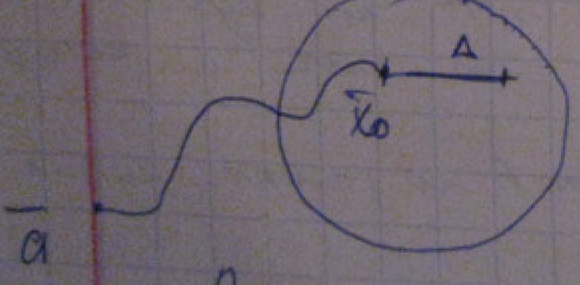
$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_1}\right|_{\bar{x_0}} = F_1(\bar{x_0})$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_1}\right|_{\bar{x_0}} = \lim_{h\to 0} \frac{U(x_1^0+h, x_2^0, \ldots, x_N^0) - U(x_0)}{h} = \ldots \circledeq$$

] Γ — произв. кус.-гл. путь, соед. $\bar{a}$ и $\bar{x_0}$

Γ_h — Γ, дополненн. отрезком с нач. $\bar{x_0}$ и концом $(x_1^0+h, x_2^0, \ldots, x_N^0)$

$$\circledeq \lim_{h\to 0} \frac{\int\limits_{\Gamma_h} \bar{F}\, d\bar{s} - \int\limits_{\Gamma} \bar{F}\, d\bar{s}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int\limits_{\Delta} \bar{F}\, ds}{h} \circledeq$$



Параметризуем Δ:
$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + t \\ x_2 = x_2^0 \\ \ldots \\ x_N = x_N^0 \end{cases}$$

$$\circledeq \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h F_1(x_1^0+t, x_2^0, \ldots, x_N^0)\, dt + \cancel{F_2 \cdot dt} \ldots$$

$$= F_1(x_1^0, \ldots, x_N^0) = F_1(\bar{x_0})$$

по теор. о дифф. обычн. однокр. инт. с перем. в. пред.

Аналогично, $\forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$ $\frac{\partial U}{\partial x_j} = F_j$

По т-о дост. условии дифф-сти потенциал U также дифф-м.

на цифтн. уровне: ■

Замеч. В пунктах (2), (3) дост. огр. ломан.
В п (3) дост огр. прост. (замкн.) контуры.

$\boxed{\text{теорема}}$ Необход. усл. потенциальности.

$\exists$ дифф-мое вект. поле $F = (F_1, \ , F_N)$ потенц. в обл-ти G.
Тогда: $\forall j, k \in \{1, \dots, N\}$ $\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$ в G.

Док-во:

Дост. рассм. случай $j \neq k$.
$\exists$ U - потенциал

смеш. частн. производ, взятые в разном пор. $=$.

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial U}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$$ ■

в $\mathbb{R}^2$ - проще: (P, Q)
Для дифф-ых P, Q теор. принимает вид:
Если P, Q - потенц, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Замеч. Вместо дифф-ти P, Q можно требовать непрерывность P'_y и F'_x

в $\mathbb{R}^3$. (P, Q, R)

$$\begin{cases} P'_y = Q'_x \\ P'_z = R'_x \\ Q'_z = R'_y \end{cases}$$

Попишем на плоскости

! Условие $P'_y \equiv Q'_x$ не явл. дост. усл. потенц-сти в $\mathbb{R}^2$

$G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$, $\quad P = -\frac{y}{x^2+y^2}$

$Q = \frac{x}{x^2+y^2}$

$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$

Опр Обл-ть G на плоскости наз. односвязной, если внутренность каждого простого замк-го контура, лежащего в G, сама целиком лежит в G.

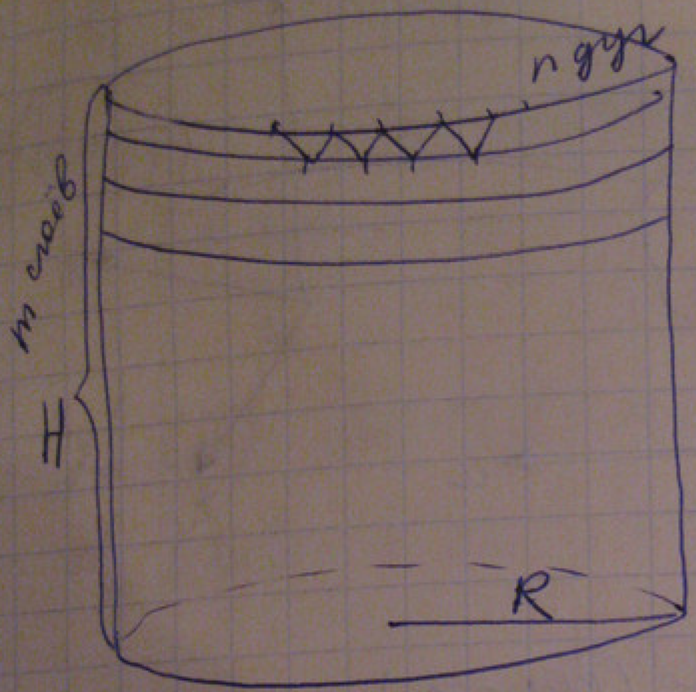
(Эквив $\forall$ простой замкнутый контур в G можно стянуть в точку, оставаясь в G.
На пл-ти односвязности эквив. связности границы G)

$\boxed{\text{Теорема}}$] $F = (P, Q)$ - непр. дифференц-ое вект. поле в односв. обл-ти $G \subset \mathbb{R}^2$.
Тогда рав-во $P'_y \equiv Q'_x$ (в G) явл необх. и дост. условием потенц-ти F в G.

Ост. док-ть дост-ть
Для этого дост. док-ть, что: $\forall$ простого замкн. кус.-гл.-ого контура Γ, лежащ. в G, $\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = 0$

Но действит. $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy \underset{\text{ф. Грина}}{=} \iint \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx\,dy$ внутр-сть, опр конт. Γ $= 0$. ■

Замеч Вместо требов. непр-ти P, Q, P'_y, Q'_x $P, Q \in C^1(G)$ дост. треб

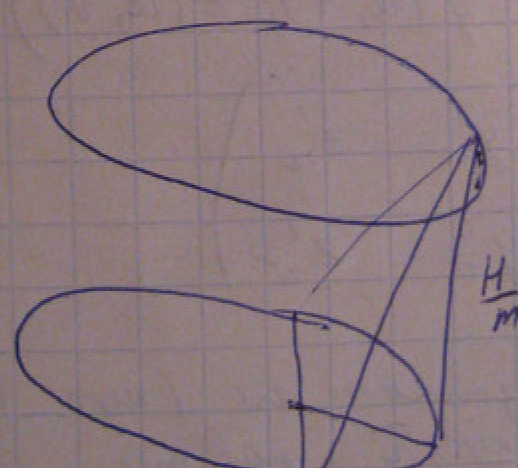


$2\pi RH$.

Посчитаем суммарную S Δ-ков.

$$S_\Delta = R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\left(\frac{H}{m}\right)^2 + R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}$$

высота.



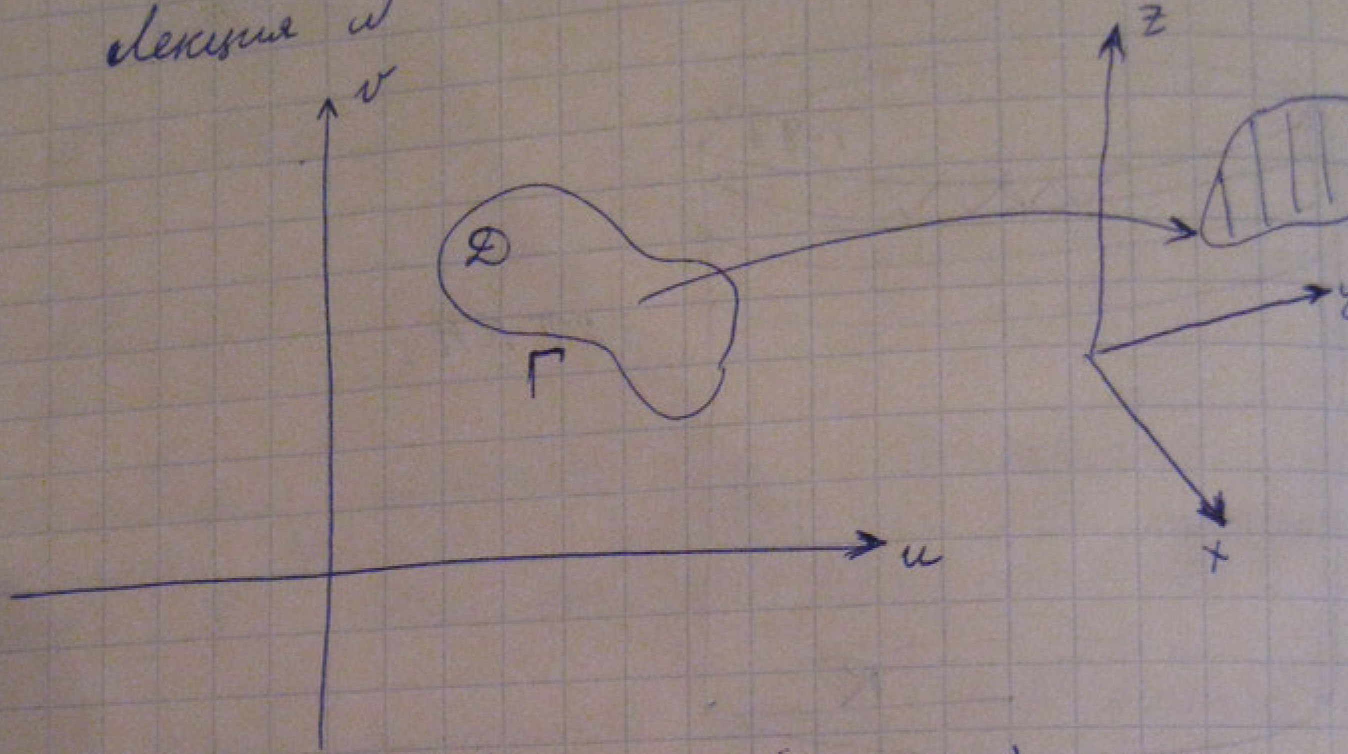
$$S_{пов\Delta} = 2R\underbrace{n\,\cancel{R}\sin\frac{\pi}{n}}_{\to\pi}\sqrt{R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+H^2}$$

$$\boxed{\lim\frac{m}{n^2}=q}$$

$q\in[0;+\infty)$

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty\\ \frac{m}{n^2}\to q}} S_{пов\Delta} = 2\pi R\sqrt{H^2+\frac{\pi^4R^2}{4}q^2}$$

Лекция 5



] Γ − простой замкнутый гл. (кус.-гл.) контур на пл-ти, огр. обл-ть $\mathcal{D}$

] на замыкании $\mathcal{D}$ $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \Gamma$ задано непр.-дифф. отобр $\overline{x}(u,v): \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}^3$ причем это отобр. инъективно и $\mathrm{rk}\, J(\overline{x}) \equiv 2$ в $\overline{\mathcal{D}}$. Тогда это отображение, (а иногда его образ) наз. простым гл. куском пов-ти в $\mathbb{R}^3$.

$$\overline{x}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

$$J(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

$\overline{x}(\Gamma)$ − простая замкн. гл (кус-гл) кр. в $\mathbb{R}^3$ − наз. границей рассм. куска пов-ти.

Зафикс. произв. т. $(u_0, v_0) \in \mathcal{D}$. Рассм. всевозможные гл. кривые $(u(t), v(t))$, проходящие ч/з (u_0, v_0)

$(u(t), v(t)) : [a,b] \to \mathcal{D},\ C^1$.

Для некот. $t_0 \in (a,b)$: $u(t_0) = u_0$
$v(t_0) = v_0$.

Рассм. образ этой кривой на нашем гл. куске пов-ти.

$$x(u(t), v(t)),\ y(u(t), v(t)),\ z(u(t), v(t)).$$

$x_0 := x(u_0, v_0)$
$y_0 := y(u_0, v_0)$
$z_0 := z(u_0, v_0)$.

Найдем вектор скорости получ. кривой в т. t_0.

$$x'_u\underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{\overline{x_0}}\, u'(t_0) + x'_v(\overline{x_0})\cdot v'(t_0)$$

$$y'_u(\overline{x_0})\cdot u'(t_0) + y'_v(\overline{x_0})\cdot v'(t_0)$$

$$z'_u(\overline{x_0})\cdot u'(t_0) + z'_v(\overline{x_0})\cdot v'(t_0)$$

Обозн. $(x'_u(\overline{x_0}), y'_u(\overline{x_0}), z'_u(x_0))$ ч/з $v_u(\overline{x_0})$
Аналог. введем обозн. $v_V(\overline{x_0})$

В этих обознач. найденный вектор скорости:

$$v_u(\overline{x_0})\cdot u'(t_0) + v_V(\overline{x_0})V'(t_0)$$

Для всевозможных гл. кривых, лежащих на рассм. куске пов-ти и прох. ч/з т. $\overline{x_0}$, вектор скорости лежит в лин. оболочке $\langle v_u(\overline{x_0}), v_V(\overline{x_0})\rangle$

С др. стор, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ $\exists$ гл. кривая, прох. ч/з (u_0, v_0).

$u'(t_0) = \alpha$, $V'(t_0) = \beta$ $\quad \left(\begin{array}{l} u = u_0 + t\alpha \\ V = V_0 + t\beta \end{array}, \begin{array}{l} t \in [-\delta, \delta] \\ t_0 = 0 \end{array} \right)$

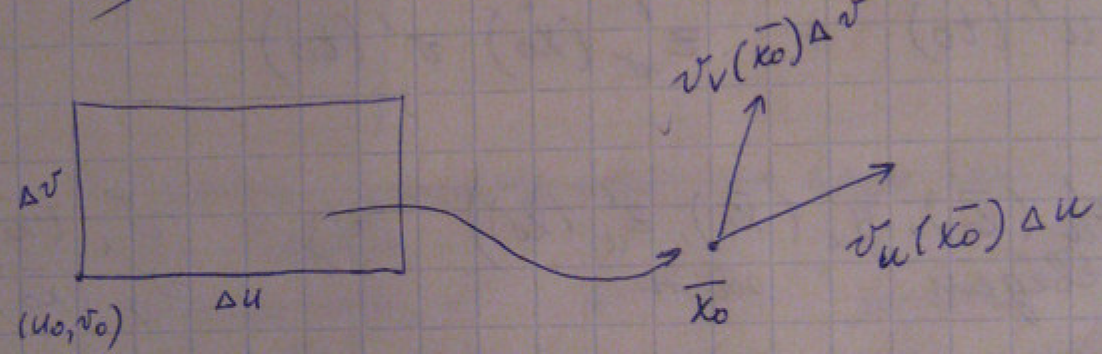
Значит, $\forall$ вектор из лин. оболочки $\langle v_u(\overline{x_0}), v_V(\overline{x_0})\rangle$ явл. вектором скорости в т. $\overline{x_0}$, для нек. гл. кр., леж. на рассм. куске пов-ти и прох. ч/з $\overline{x_0}$.

$\boxed{\text{Опр}}$ Пл-ть, проход. ч/з $\overline{x_0}$ и натянутая на вект. $v_u(\overline{x_0})$, $v_V(\overline{x_0})$ наз-ся касат. пл-тью к рассм. куску пов-ти в т. $\overline{x_0}$.

Замеч Для нул. вект. скорости либо отд., либо гл. заменить на непр.-дифф.

$\boxed{\text{Опр}}$ ч/з вектор нормали $N(\overline{x_0}) := [\,v_u(\overline{x_0}) \times v_v(\overline{x_0})\,]$ — всегда ненулевой.

$$x(u,v) = x(u_0,v_0) + x'_u(u_0,v_0)\,\Delta u + x'_v(u_0,v_0)\,\Delta v + \cancel{\bar{o}\,\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}$$



$S_{\text{пря-г пол}} = \Delta u \cdot \Delta v$ $\qquad$ $S_{\text{парал}} = \Delta u\,\Delta v\;\|N(x_0)\|$

$\boxed{\text{Опр}}$ $\|N(\overline{x_0})\|$ наз. (лок.) коэфф. измен. площади

$\boxed{\text{Опр}}$ S рассм. куска пов-ти $\iint\limits_{D} \|N(u,v)\|\,du\,dv$

Пов. инт. I рода

Обозн. рассм. кусок. пов-ти ч/з $\overline{\Sigma}$ ← с границей.

$\exists$ на $\overline{\Sigma}$ задано скал. поле $f(x,y,z)$

(т.е. $f(x,y,z) : \overline{\Sigma} \to \mathbb{R}$)

$\boxed{\text{Опр}}$ Пов. инт. I рода скал. поля f по пов. $\overline{\Sigma}$ наз.

$$\iint\limits_{D} f\big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big)\cdot \big\|N\big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big)\big\|\,du\,dv$$

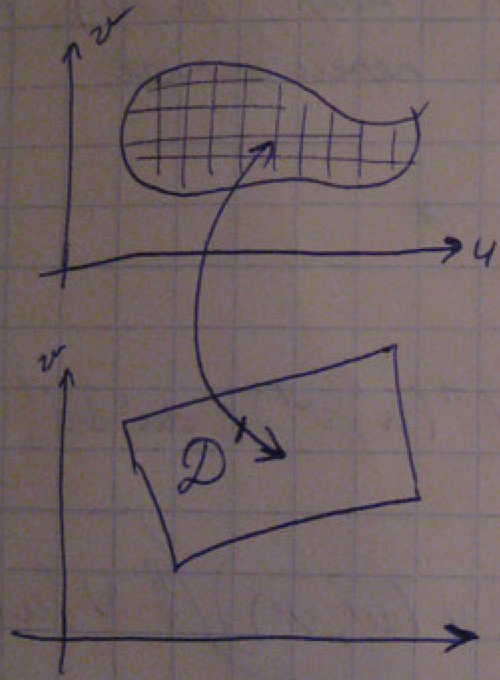
Обозн: $\iint\limits_{\overline{\Sigma}} f\,dS$

Св-ва

1) Если $f \in C(\overline{\Sigma})$, то инт. точно $\exists$.

2) $\iint\limits_{\Sigma} 1\, dS = |\Sigma|$ — получим площадь пов-ти.

$\rceil$ имеется такие обл-ть D' в пл-ти (u', v'), огр. простой замкн. гл. (кус.-гл) кр. Γ'



$\rceil$ $\bar{x}^н : \overline{D}' \to \mathbb{R}^3$ задает гл. прост. кусок пов-ти.

Говорят, что этот кусок эквив. $\overline{\Sigma}$, если $\exists$ вз. однозн. непр. дифф. отображение
$$u = u(u', v')$$
$$v = v(u', v')$$

$\overline{D}' \xrightarrow{на} \overline{D}$ с якобианом не обращ. в 0.

$$\bar{x}^н(u', v') = \bar{x}(u(u', v'), v(u', v')) \text{ на } \overline{D}'$$

Переход от (u, v) и (u', v') (или обр.) называв. заменой перем.

$$v^н_{u'} = \left(x'_u\, (u)'_{u'} + x'_v\, (v)'_{u'},\; y'_u\, (u)'_{u'} + y'_v\, (v)'_{u'},\; z'_u\, (u)'_{u'} + z'_v\, (v)'_{u'} \right) = v_u \frac{\partial u}{\partial u'} + v_v \frac{\partial v}{\partial u'}$$

$$v^н_{v'} = v_u \frac{\partial u}{\partial v'} + v_v \frac{\partial v}{\partial v'}$$

$$N^н(x^н(u', v')) = [v^н_{u'}, v^н_{v'}] = [\ ,\ ] =$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'} \right)} \quad \underbrace{\left[\sigma_u, \sigma_v \right]}$$

$$N(\overline{x}(u,v)).$$

$$\det \text{матр Якоби} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}$$

<u>Следствие</u> пов. инт. I рода (от непрер. ф-ии) не измен. при допустимых заменах переменных.

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(\overline{x}(u,v)) \, \| N(u,v) \| \, du \, dv = *$$

$$\iint\limits_{\overline{D}'} f(\overline{x}(u(u',v'), v(u',v')) \, \| N^{H}(u',v') \| \, du' \, dv'.$$

$$* \overset{\text{замена перем.}}{=} \iint\limits_{\overline{D}'} f(\overline{x}(u(u',v'), v(u',v')) \, \underbrace{\| N(u(u',v'), v(u',v')) \| \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} \right|}_{\| N^{H}(u',v') \|} \, du' \, dv'.$$

$\| N^{H}(u',v') \|$ => как хотим, так и параметризуем.

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x,y) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = (-z'_x, z'_y, 1)$$

$$\| N \| = \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}.$$

$x = x(u, v)$
$y = y(u, v)$
$z = z(u, v)$

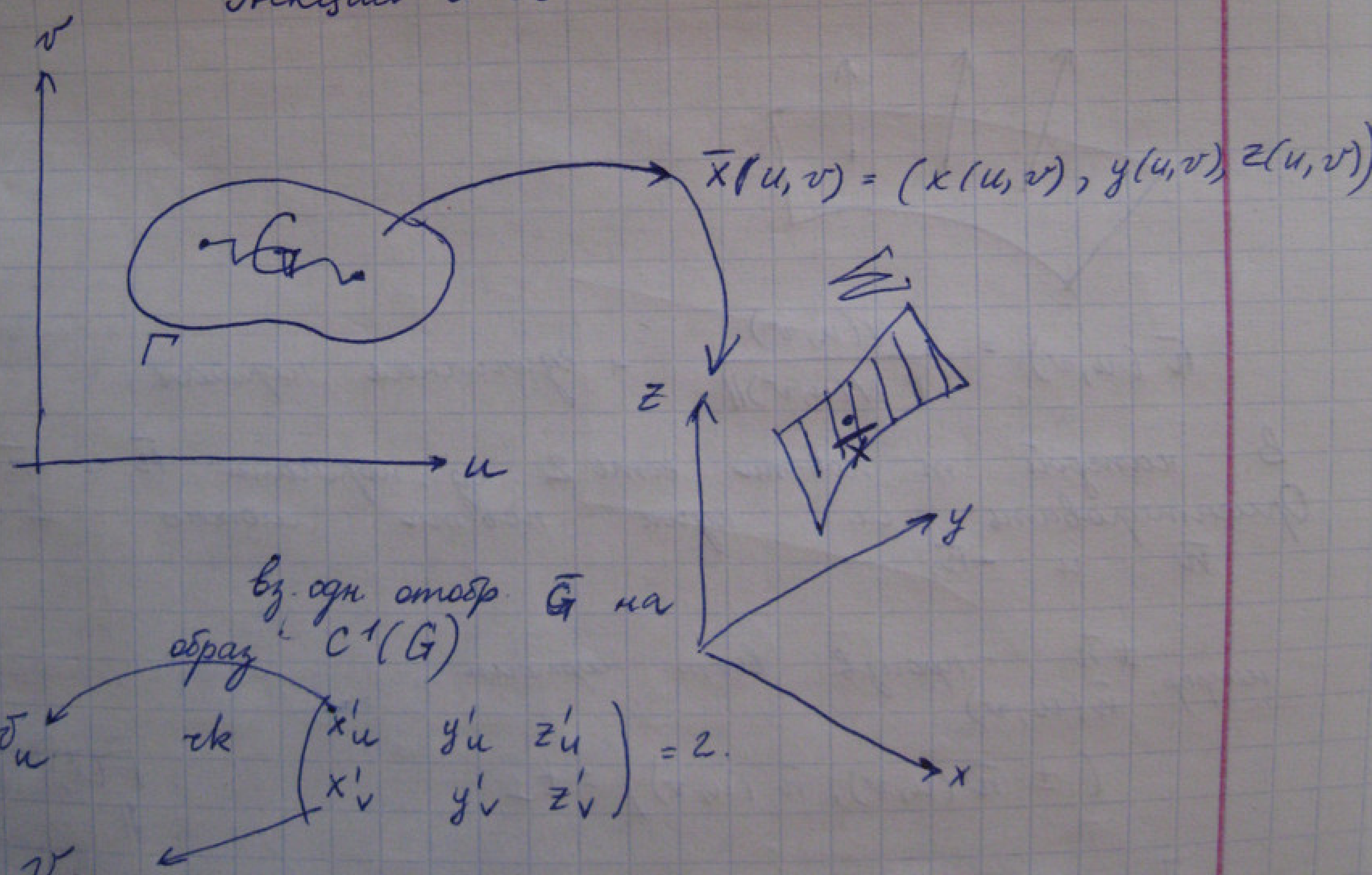
$$E = {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2$$

$$G = {x'_v}^2 + {y'_v}^2 + {z'_v}^2$$

$$F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v$$

$$\| N \| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Лекция № 20



вз. одн. отобр. $\bar{G}$ на
$C^1(G)$

$$\begin{array}{l} \text{образ} \\ v_u \quad \operatorname{rk} \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2. \\ v_v \end{array}$$

$$N(u, v) = [\, v_u \times v_v \,] \Big|_{(u,v)}$$

$\| N \|$ – коэфф. изменение площади.

$$\int_G \| N(u,v) \| \, du \, dv.$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint_{G} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, \|N(u,v)\|\, du\,dv$$

Опр. Вектор нормали к гл. куску пов-ти в т $\overline{x}$ - это ненулевой вектор, перпенд. к касат. пл-ти пов-ти в т. $\overline{x}$.

Опр Единичная нормаль - это вект. нормали единичной длины.

Опр Ориентация простого гл. куска пов-ти - это задание на нем непр. поля ед. нормалей.

$$\overline{n}(u,v) = \frac{N(u,v)}{\|N(u,v)\|} \text{ - единичная нормаль}$$

В каждой т. пов-ти есть 2 ед. нормали: $\overline{n}$ и $-\overline{n}$. Ориентировать гл. кусок пов-ти можно 2 спос.: $\overline{n}$ и $-\overline{n}$.

непрер. $\pm\overline{n}$ - произв. вект нормали
$\overline{n}(u,v)$

$$(\pm \overline{n}(u,v), \overline{n}(u,v)) = \pm 1$$

$\exists$ на Σ ($\overline{\Sigma}$) задано вект. поле $\overline{F}(\overline{x}) = (P(\overline{x}), Q(\overline{x}), R(\overline{x}))$

$\exists$ Σ ориент. полем непрер. ед. нормалей $\nu(\overline{x})$

Опр Пов. инт. II рода вект. поля $\overline{F}(\overline{x})$ по ориент. пов-ти Σ - это

$$\iint_{\Sigma} (F, \overline{\nu})\, dS.$$

Обозн. $\iint\limits_{\Sigma} \bar F d\bar s$

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

] вект. поле совп. с полем един. нормалей:
$\bar\nu \equiv \bar n$ (в прот. сл-ае нужно просто изменить знак)

$$\iint\limits_{\Sigma} \bar F\, d\bar s = \iint\limits_{\Sigma} \left(\bar F, \frac{\bar N}{\|\bar N\|}\right) dS = \iint\limits_{G} \left(F, \frac{\vec N}{\|N\|}\right)\|N\|\,du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{G} \left(\bar F(\bar x(u,v)), N(u,v)\right) du\,dv.$$

$$N(u,v) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

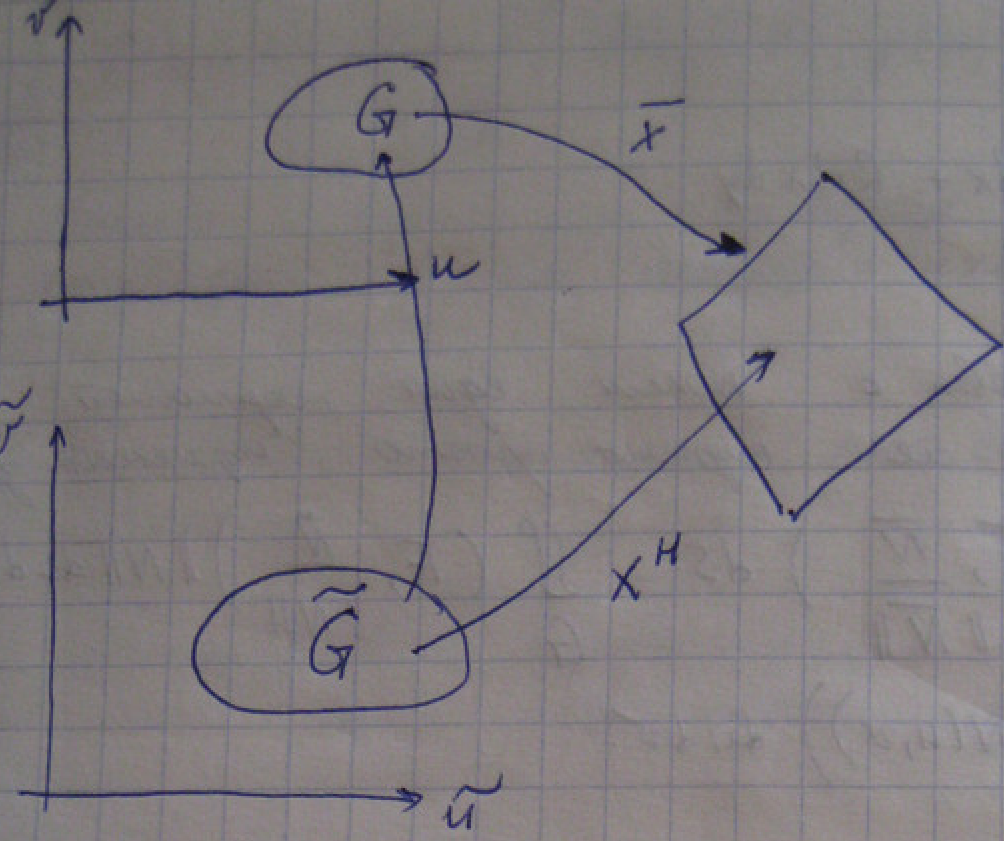
$$\iint\limits_{G} \Big(P(\bar x(u,v))(y'_u z'_v - y'_v z'_u) + Q(\bar x(u,v))(x'_v z'_u - x'_u z'_v) + \dots\Big)\,du\,dv$$

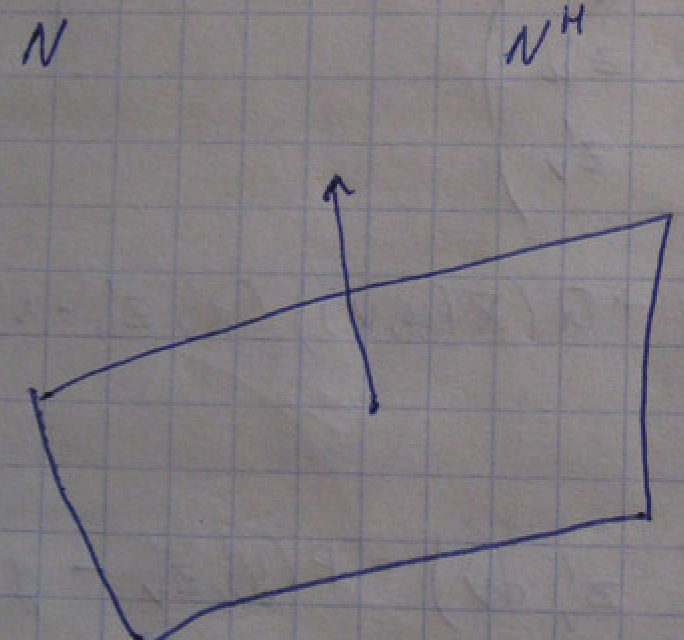
$$P(\underbrace{y'_u du + y'_v dv}_{dy}) \wedge (\underbrace{z'_u du + z'_v dv}_{dz}) = P(y'_u z'_v - y'_v z'_u)\,du\,dv$$

Св-ва:
1) если вект. поле $\bar F$ – непр., то инт. $\exists$.
2) если Σ ориент. полем един. нормалей $\bar\nu$, то $\iint\limits_{\Sigma} \bar\nu\, d\bar s$ равен площади Σ

~~3)] (u,v) и $(\tilde u, \tilde v)$~~

3)] $\bar x(u,v)$ и $\bar x^{н}(\tilde u, \tilde v)$ эквив. гл. куски пов-ти.





если N и N^H (в какр. т.) сонаправлены, то гов., что допустимая замена перем. сохр. ориент.
В прот. случае гов., что ориент. изменяется.

По умолчанию считается, что запись $\iint\limits_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy$ обознач. пов. инт. II р по Σ, ориент. полем $\bar{n} = \frac{N}{\|N\|}$

3) допуст. зам. перем., сохр. ориент., не изм. знач. пов. инт. II р
допуст. зам. перем, не сохр. ориент. изменяет

знак пов. инт. II рода.

3*) Изменение ориент. пов-ти изменяет знак пов. инт. II рода.

Поток вект. поля ч/з пов-ть.

] Σ_1 и Σ_2 – простые гл. куски пов-ти. Говорят, что они соседние, если $\overline{\Sigma_1} \cap \overline{\Sigma_2} = \partial\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_2$ и явл. простой кривой в $\mathbb{R}^3$.

$\tilde{\Sigma}$ Кус-гл. пов-ть – это конеч. набор пр. гл. кусков пов-ти $=\{\Sigma_1 \dots \Sigma_k\}$: ($\forall$ 2 куска Σ_j и Σ_l $(j \neq l)$ либо соседние, либо $\overline{\Sigma_j} \cap \overline{\Sigma_l} = \varnothing$)

(2) $\forall$ (j, l) $(j, l \in \{1 \dots k\},\ j \neq l)$ $\exists$ набор индексов $k_0, k_1, \dots, k_m$: $k_0 = j$, $k_m = l$,

Σ_{k_0} и Σ_{k_1} – сос.

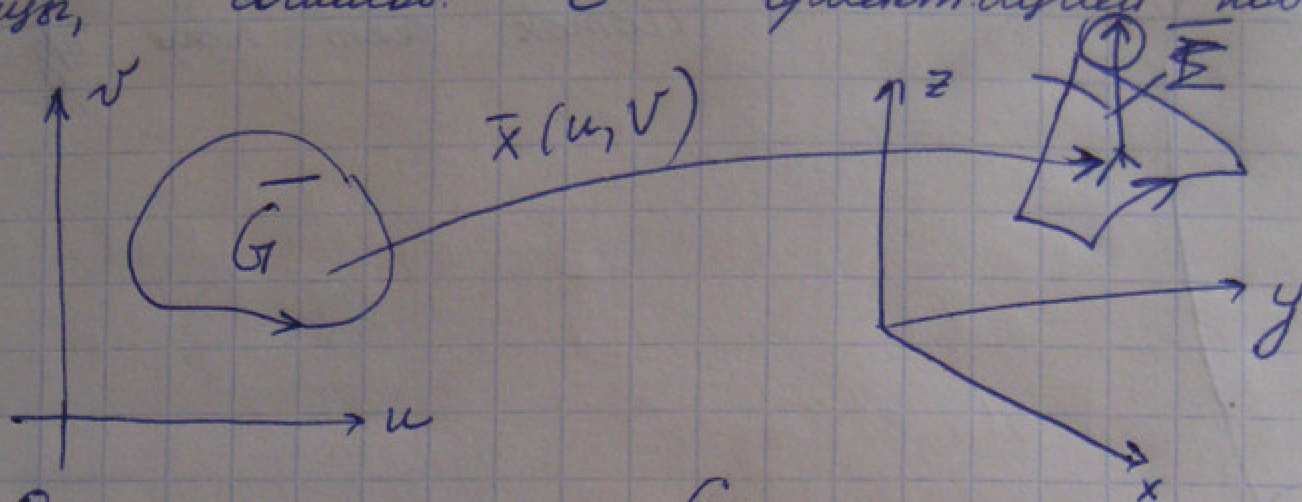
Σ_{k_1} и Σ_{k_2} – сос, .., $\Sigma_{k_{n-1}}$ и Σ_{k_n} – сос.

Если на кус-гл. пов-ти Σ задано скал. поле f, то пов. инт. I рода f по Σ ($\iint\limits_{\Sigma} f\,dS$) – это

$$\sum_{j=1}^{k} \iint\limits_{\Sigma_j} f\,dS$$

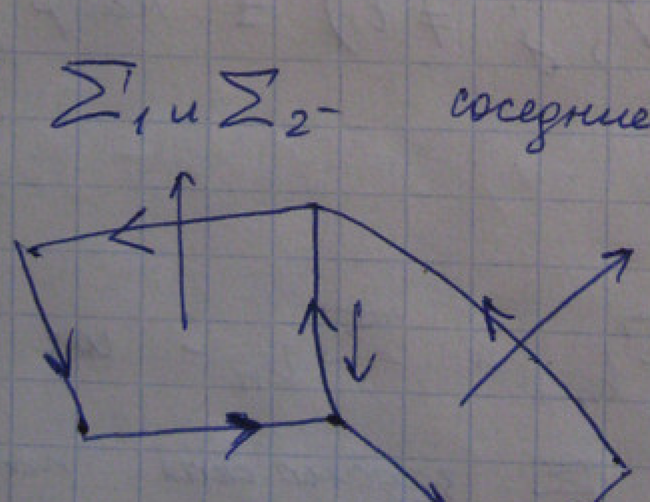
гл. кусок пов-ти Σ_1 / Σ_2

Для $\forall$ гл. куска пов-ти определим ориентацию границы, согласов. с ориентацией пов-ти.



Ориентируем гр. обл. G положит.
Эта ориент. порождает ориент. границу $\partial\bar{\Sigma}$.
Если Σ ориент. $\bar{n} = \dfrac{N}{\|N\|}$, то именно такую ориентацию границы будем наз. согласов. с ориент. куска пов-ти.
Если Σ ориент. полем $-\bar{n}$, то противоп. ориент. $\partial\bar{\Sigma}$ будем наз. соглас. с ориент. куска пов-ти

] Σ_1 и Σ_2 – соседние ориент. простые гл. куски пов-ти



Ориент. кусков согл., если при ориент. $\partial\bar{\Sigma}_1$ и $\partial\bar{\Sigma}_2$, согл. с ориент. Σ_1 и Σ_2 соотв. напр. обхода общего куска гран. противопол.

Кус. гл. пов-ть ориент., если она состоит из ориент. пр. гл. кусков пов-ти, причем все пары сос кусков пов-ти ориент. согласованно

Кус. гл. пов ориентируема, если ее можно ориентировать

] Σ - ориентир. кус-гл. пов-ть, сост. из кусков $\Sigma_1 \ldots \Sigma_k$

$$\iint_{\Sigma} \bar{F} d\bar{S} = \sum_{j=1}^{k} \iint_{\Sigma_j} \bar{F} d\bar{S}$$