Контрольная на начало декабря третьего семестра у Алексея Константиновича

Вариант 1

1. Исследовать на равномерную сходимость

   (a) $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\alpha^2 x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ на множестве $\alpha \in [-1, 1]$.

      i. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$.

      - $\forall\ b > 1\quad \left|\int\limits_1^b \cos x\,dx\right| = |\sin b - \sin 1| \leqslant 2$.
      - $\frac{1}{\sqrt{x}} \searrow 0$.

      Значит, по признаку Дирихле $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится. Так как не зависит от параметра, сходится равномерно.

      ii. $e^{-\alpha^2 x}$ монотонна при любом α и $\forall\ x \in [1, +\infty), \forall\ \alpha \in [-1, 1]\quad \left|e^{-\alpha^2 x}\right| \leqslant 1$.

   Значит, по признаку Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром имеем равномерную сходимость.

   (b) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2(x^2+4)}\operatorname{arctg}\alpha\,dx$ на множестве $\alpha \in \mathbb{R}$. Посмотрим, а куда вообще сходится этот интеграл. Делаем замену $u = \alpha x$, считаем для $\alpha > 0$.

$$I(\alpha) = e^{-4\alpha^2}\frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha}\int\limits_0^{\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}\operatorname{arctg}\alpha}{2\alpha e^{4\alpha^2}}.$$

   Заметим ещё $I(0) = 0$. Тогда $\lim\limits_{\alpha\to 0+} I(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to 0+} \frac{\sqrt{\pi}\operatorname{arctg}\alpha}{2\alpha e^{4\alpha^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \neq 0 = I(0)$. Значит, функция $I(\alpha)$ не является непрерывной. Следовательно, сходимость неравномерная.

   (c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{1 + x^\alpha}\,dx$ на множестве $\alpha > 0$.

2. Вычислить

   (a) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x(1+x^2)}\,dx = \int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x(1+x^2)}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x(1+x^2)}\,dx.$

   - Интегрируем неотрицательную функцию, если $\alpha \geqslant 0$. В нуле подынтегральная функция $f(x,\alpha) \sim \alpha$, в бесконечности — $f(x,\alpha) \sim \frac{\pi}{2x^3}$. Значит, интеграл сходится при любом фиксированном $\alpha \geqslant 0$; видим, что $I(0) = 0$. Отрицательные значения не будем рассматривать, так как функция нечётная.
   - $\forall\ b, d > 0\quad f'_\alpha(x,\alpha) = \frac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+x^2)} \in C\big([0,b]\times[0,d]\big)$. Считаем интеграл для $|\alpha| \neq 1$.

$$\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \frac{1}{1-\alpha^2}\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} - \int\limits_0^{+\infty}\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2x^2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha^2}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty} - \alpha\operatorname{arctg}\alpha x\Big|_0^{+\infty}\right) = \frac{1}{1-\alpha^2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2(1+\alpha)}.$$

   А если всё-таки $|\alpha| = 1$, то вспоминаем такие обозначения $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$.

$$I_1 = \int\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{x}{1+x^2} + 2I_1 - 2I_2; \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{x}{2(1+x^2)}.$$

Значит, нужный нам интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,1)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty} + \frac{x}{2(1+x^2)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{4}\pi$. Производная получилась непрерывной. Посчитали интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ с одной особенностью $+\infty$. Подынтегральное выражение мажорируется функцией $\frac{1}{1+x^4}$ при $x \geqslant 1$. Значит, $\int\limits_1^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса на $\alpha \geqslant 0$, а интеграл $\int\limits_0^1 f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ собственный.

Значит, можно утверждать, что для $\alpha \geqslant 0$ функция $I(\alpha)$ дифференцируема и $I'(\alpha) = \frac{\pi}{2(1+\alpha)}$. Тогда $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha) + C$. $I(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. В ответ идёт $I(\alpha) = \operatorname{sgn}\alpha \frac{\pi}{2}\ln(1+|\alpha|)$.

(b) $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. Замена $y = x^3$, $dy = 3x^2$, $dx = \frac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}}$.

$$I = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 y^{\frac{1}{3}-1}(1-y)^{\frac{2}{3}-1}\,dy = \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(1/3, 2/3\right) = \frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Вариант 2

1. Исследовать на равномерную сходимость

   (a) $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\cos \alpha x}{\sqrt{x}}\, dx$ на множестве $\alpha > 0$.

   Особенность у интеграла только одна.

   - Частичные интегралы $\forall\ b \in (1, \infty)$ $\int\limits_1^b \cos \alpha x\, dx = \sin \alpha x\Big|_1^b = -\sin \alpha b$ равномерно ограничены ограничены по модулю единицей.
   - Для абсолютно произвольного $\alpha > 0$ функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$, вообще не зависящая от параметра, монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$. Так как функция не зависит от параметра, $\frac{1}{\sqrt{x}} \overset{(0,+\infty)}{\underset{x\to+\infty}{\rightrightarrows}} 0$.

   Значит, по признаку Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x}}\, dx \overset{(0,+\infty)}{\underset{x\to+\infty}{\rightrightarrows}}$.

   (b) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x}}{1 + x^2}\, dx$ на множестве $\alpha \in (0, 2)$. Что происходит в нуле: $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x} = \frac{\pi}{2}$. А в бесконечности: $\lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x} = \alpha$.

   - Интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ сходится равномерно, так как сходится и подынтегральное выражение не зависит от параметра.
   - Попробую изо всех сил доказать, что всё остальное $f(x, \alpha) = x \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x}$ — монотонная и равномерно ограниченная на $\alpha \in (0, 2)$ функция.

     $$f'_x(x, \alpha) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x} - x\frac{\alpha}{x^2}\frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{x^2}} = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha x}{x^2 + \alpha^2};$$

     Получается, что $\forall\ \alpha \in (0, 2)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x, \alpha) = 0 - 0 = 0$.

     $$f''_{xx}(x, \alpha) = \frac{-\alpha}{x^2\left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right)} - \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} + \frac{2\alpha x^2}{(x^2 + \alpha^2)^2} = -\frac{2\alpha}{x^2 + \alpha^2} + \frac{2\alpha x^2}{(x^2 + \alpha^2)^2} =$$
     $$= \frac{-2\alpha x^2 - 2\alpha^3 + 2\alpha x^2}{(x^2 + \alpha^2)^2} = -\frac{2\alpha^3}{(x^2 + \alpha^2)^2} < 0.$$

     Отсюда видим, что $\forall\ \alpha \in (0, 2)$ $f'_x(x, \alpha)$ монотонно убывает на множестве $x \in (0, +\infty)$. Значит, $\forall\ \alpha \in (0, 2)$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f'_x(x, \alpha) = \inf\limits_{(0,+\infty)} f'_x(x, \alpha)$. Но мы уже знаем этот предел, значит, мы только что поняли, что 0 — нижняя грань $f'_x(x, \alpha)$ на $(0, +\infty)$. А значит, $f(x, \alpha)$ не убывает.
     Когда мы уже знаем, что $f(x, \alpha)$ не убывает, $\forall\ \alpha \in (0, 2)$ $\sup\limits_{(0,+\infty)} f(x, \alpha) = \lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x} = \alpha < 2$.

     Вот нам и равномерная ограниченность.

   То есть мы доказали равномерную сходимость интеграла по признаку Абеля.

   (c) $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^\alpha} \sin \dfrac{1}{x^2}\, dx$ на множестве $\alpha \in (0, 3)$. Сделаем замену, не зависящую от параметра $x = t^{-\frac{1}{2}}$, $dx = \frac{-t^{-\frac{3}{2}}\, dt}{2}$.

   Получаем интеграл $\frac{1}{2}\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{\alpha-3}{2}}} \sin t\, dt$. Докажем от противного, что равномерной сходимости нет. Допустим, сходится равномерно. Тогда выполнено условие критерия Коши, то есть

   $$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ b_0 \in (1, +\infty)\colon \forall\ b_1, b_2 \in (b, +\infty)\quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{1}{t^{\frac{\alpha-3}{2}}} \sin t\, dx\right| < \varepsilon.$$

- Зафиксируем $\varepsilon = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.
- Найдём из критерия Коши $b_0 \in (1, +\infty)\colon \forall\, b_1, b_2 \in (b, +\infty) \quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{1}{t^{\frac{\alpha-3}{2}}} \sin t\, dt\right| < \varepsilon$.
- Найдём $n \in \mathbb{N}\colon n > \max\left\{2, \frac{b_0}{2\pi}\right\}$.
- Положим $b_1 = 2\pi n + \frac{\pi}{4}$, $b_2 = 2\pi n + \frac{3\pi}{4}$, $\alpha = 3 - 2\log_{b_2} 2$.

Тогда $\forall\, t \in [b_1, b_2] \quad \sin t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. Подынтегральная функция неотрицательна.

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{1}{t^{\frac{\alpha-3}{2}}} \sin t\, dt \geqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{1}{b_2^{\frac{\alpha-3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}}\, dt = \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\, dt = \frac{b_2 - b_1}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

2. Вычислить

(a) $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}}\, dx$. Делаем замену $\sqrt[3]{x} = y$, $x = y^3$, $dx = 3y^2\, dy$. $I = 3\int\limits_0^{+\infty} e^{-y} y^{3-1}\, dy = 3\Gamma(3) = \Gamma(4) = 3! = 6$.

(b) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. Подынтегральное выражение определено для всех $x \in [0, 1)$ при $|\alpha| \leqslant 1$. Если $I(\alpha)$ определена (если интеграл сходится), то $I(\alpha) = I(-\alpha)$, поэтому будем рассматривать $\alpha \in [0, 1]$, причём $I(0) = 0$, можно заметить сразу. Но так как позже мы увидим проблемы с производной в нуле, будем рассматривать $I(\alpha)$ на полуинтервале $(0, 1]$.

- $I(1/2) = \int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1-(1/2)^2 x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ — интеграл от неположительной функции, можно оценить числитель $\forall\; x \in [0, 1) \quad 0 \geqslant \ln\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) > -\ln\frac{4}{3}$, а интеграл $\int\limits_0^1 \frac{-\ln\frac{4}{3}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\ln\frac{4}{3} \arcsin x\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{3}$. Значит, в одной точке интеграл сходится по признаку сравнения.
- Обозначим подынтегральное выражение через $f(x, a)$. Тогда

$$f'_\alpha(x, \alpha) = \frac{-2\alpha x^2}{(1-\alpha^2 x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{1-\alpha^2x^2-1}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\right).$$

$\forall\; c, d \in (0, 1) \quad f'_\alpha(x, \alpha) \in C\big([0, c] \times [d, 1]\big)$. Посчитаем интеграл при фиксированном $\alpha \in (0, 1)$ с заменой $x = \sin t$, $dx = \cos t\, dt$.

$$\int\limits_0^1 f'_\alpha(x, \alpha)\, dx = \frac{2\arcsin x}{\alpha}\Bigg|_0^1 - \frac{2}{\alpha}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\alpha^2\sin^2 t} \cdot \frac{\cos t}{\cos t}\, dt = \frac{\pi}{\alpha} - \frac{2}{\alpha}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 t} - \alpha^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 t}\, dt =$$

снова замена $u = \operatorname{ctg} t$, $du = \frac{-1}{\sin^2 t}\, dt$, $1 + u^2 = \frac{1}{\sin^2 t}$.

$$= \frac{\pi}{\alpha} - \frac{2}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2-\alpha^2} = \frac{\pi}{\alpha} - \frac{2\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1-\alpha^2}}}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right).$$

Установим равномерную сходимость интеграла от производной на произвольном вложенном отрезке вида $\alpha \in [d, 1-d] \subset (0, 1)$, где $d \in (0, 1/2)$.

$$\left|\frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\right)\right| \leqslant \frac{2}{d}\left|\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right|$$

Построили мажорирующую функцию, установили равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса. Правда на вложенных отрезка.

Получается, что на любом отрезке вида $\alpha \in [d, 1-d] \subset (0,1)$ функция $I(\alpha)$ существует, дифференцируема и $I'(\alpha) = \int\limits_0^1 f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \frac{\pi}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$. Ну значит, всё на том же произвольном отрезке

$$I(\alpha) = \int \frac{\pi}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\,dx = \pi \ln \alpha - \pi \int \frac{1}{\alpha^2\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1}}\,d\alpha =$$

$$= \pi\left(\ln\alpha + \ln\left(\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-1}\right)\right) + C = \pi\left(\ln\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right)\right) + C.$$

Теперь надо найти константу. Когда оценивался $I(1/2)$, делал примерно то же самое:

$$\forall\ |\alpha| < \frac{1}{2},\ \forall\ x \in [0,1) \quad 0 \geqslant \ln\left(1-\alpha^2x^2\right) > -\ln\frac{4}{3}; \Rightarrow \left|\frac{\ln\left(1-\alpha^2x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}\right| \leqslant \frac{\ln 4 - \ln 3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Делаем третий вывод из сходимости интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{=} \arcsin x\Big|_0^1 = \pi/2$. На этот раз можем сказать, что по признаку Вейерштрасса $I(\alpha)$ сходится равномерно на $\alpha \in (-1/2, 1/2)$. Значит, $I(\alpha)$ непрерывна, например, в точке $\alpha = 0$. То есть

$$I(0) = \lim_{\alpha\to 0} I(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0+} I(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0+} \pi\left(\ln\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right)\right) + C; \Rightarrow C = -\pi\ln 2.$$

Осталось учесть, что функция чётная. Значит, $\forall\ \alpha \in (-1,1) \quad I(\alpha) = \pi\left(\ln\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right)\right) - \pi\ln 2$.