$$y_t + y_{t-1} - 8y_{t-2} - 12y_{t-3} = \sin t(-2)^t.$$

$$y_t = t^b\big(B_k(t)\sin t + \widetilde{B}_k(t)\cos t\big)$$

Общее решение однородного находить все умеют:v

$$y_t = C_1(-2)^t + C_2t(-2)^t + C_3 3^t;.$$

Для решения неоднородного представим, что есть ещё одно уравнение

$$x_t + x_{t-1} - 8x_{t-2} - 12x_{t-3} = \cos t(-2)^t.$$

И эти уравнения мы вот таким вот образом сложим: $x + iy = z \in \mathbb{C}$.

$$z_t + z_{t-1} - 8z_{t-2} - 12z_{t-3} = \big(-2e^i\big)^t.$$

А это мы решать умеем. Даже формула для частного решения годится:

$$z_t = t^b B_k(t)\lambda_0^t, \qquad \lambda_0 = 2e^i,\ B_k \in \mathbb{C}_k[t].$$

Конкретно мы сейчас для нашего примера ищем решение в виде $z_t = a(-2e^i)^t$, $a \in \mathbb{C}$. Ищем подстановкой

$$a + 2e^i a - 32e^{2i}a - 96e^{3i}a = 1.$$

Вот такое вот коплексное алгебраическое уравнение. Можно вспомнить, что это на самом деле два уравнение, где $a = \mu + i\nu$, а $e^i = \cos 1 + i\sin 1$.

$$\mu\,(1 + 2\cos 1 - 32\cos 2 - 96\cos 3) = 1; \tag{1}$$

$$e^{it} = \cos t + i\sin t.$$

$$\ddot{x} = -x; \qquad x_{oo} = C_1\cos t + C_2\sin t.$$

$$\ddot{x} = -x + \sin t; \qquad x_{no} = x_{oo} + x_{np}.$$

$$x_{np} = at\sin t.$$