Вспомним, что такое комплексные числа $\mathbb{C}$. Это никакая не мистика. Всё вводим аксиоматически.

Определение 0.1. *$\mathbb{C} = \{z = x + i\,y \mid x, y \in \mathbb{R},\ i$ — символ$\}$*[1]*, где введены операции*

«+» $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$;

«·» $z_1 \cdot z_2 = x_1\,x_2 - y_1\,y_2 + i\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1)$,

где $z_{1,2} = x_{1,2} + i\,y_{1,2}$. z_1 и z_2 различны, если и только если $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$.

Упражнение 0.1. *Доказать, что $\mathbb{C}$ — поле. (Нулём называют $0 + i\,0$, единицей $1 + i\,0$, обратным $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{x^2+y^2} =: \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - i\,y}{x^2+y^2}$.)*

Определение 0.2. *$\overline{z} = x - i\,y$ называется сопряжённым к z.*

Совокупность вида $\{x + i\,0 \mid x \in \mathbb{R}\}$ — это подполе в $\mathbb{C}$, изоморфное $\mathbb{R}$. Будем отождествлять $x + i\,0$ и x, $0 + i\,y$ с $i\,y$.

Посмотрим, чему равняется $i^2 = (0 + i\,1)^2 = -1$.

Хорошо бы это поле уметь интерпретировать по крайней мере геометрически: это просто декартова система координат на плоскости.

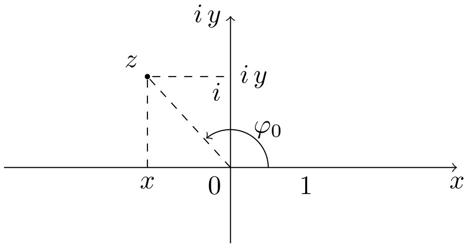


Рис. 1. Геометрическая интерпретация

Каждая z может быть представлена в виде радиус-вектора в декартовой плоскости: $z = x + i\,y \leftrightarrow \{x, y\} \leftrightarrow (x, y)$, где $\{x, y\}$ — радиус-вектор, а (x, y) — точка плоскости. Вектора мы далее будем обозначать фигурными скобками.

Пока мы не умножаем комплексные числа, мы имеем дело с обычным линейным пространством. Геометрическая интерпретация подсказывается ещё одну форму записи z.

0.1 Тригонометрическая форма записи

Пусть $z \neq 0$. Возьмём положительное направление вещественной оси (ox) и в ближайшем к $\{x, y\}$ направлении повернём на угол $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$. Углы у нас считаются в радианах.

С этого момента никогда i не будет индексом, а углы всегда будут в радианах.

Упражнение 0.2. *π иррационально. (Полторы странички за три часа. Кто захочет, расскажу, где прочитать.)*

Определение 0.3. *Главным значением (полярного) аргумента*[2] *числа z называется $\arg(z) = \varphi_0$.*

Совокупным полярным аргументом числа z называется множество $\mathrm{Arg}(z) = \{\varphi_0 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, а $\varphi \in \mathrm{Arg}(z)$ называется представителем.

Пишем, как точку в полярных координатах, $z = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$, последнее выражение называется тригонометрической формой числа z, $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ называется модулем числа z.

Например, пусть $z = 1 + i$. Тогда а тригонометрической форме $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Утверждение 0.1. *Пусть $z_{1,2} \neq 0$ и $z_{1,2} = r_{1,2}(\cos\varphi_{1,2} + i\,\sin\varphi_{1,2})$. Тогда*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Из этого утверждения вытекает ассоциативность умножения.

Оказывается, что именно такое умножение является важным среди для обобщения умножения в $\mathbb{R}$. Один из замечательных примеров, когда появляются комплексные числа. Рассмотрим функцию $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$ при $|x| < 1$. Непонятно, почему в 1 проблема. Никаких перегибов. Но посмотрим на функцию $\frac{1}{1+z^2}$. Тогда функция не определена для $z_{1,2} = \pm i$, и как раз $|z_{1,2}| = 1$.

Следствие 0.1 (Формула Муавра)**.** *Если $z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \neq 0$ и если $n \in \mathbb{Z}$, то $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\,\sin n\varphi)$.*

Определение 0.4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 2$. Тогда корнем n-й степени из числа z называется множество $\sqrt[n]{z} = \{w \mid w^n = z\}$, то есть множество решений уравнения $w^n = z$.*

[1] Запись $z = x + i\,y$ называют алгебраической формой комплексного числа. $x = \mathrm{Re}(z)$ — вещественная часть z, $y = \mathrm{Im}(z)$ — мнимая часть. Символ i играет роль базисного вектора.

[2] Это плохое название. У функции потом само z будет аргументом.

В этом курсе очень часто будут изучаться многозначные функции.

Из формулы Муавра следует, что если $z = 0$, то $\sqrt[n]{z} = 0$, а при $z = r(\cos\varphi_0 + i\,\sin\varphi_0) \neq 0$, где $\varphi_0 = \arg(z)$, имеем $\sqrt[n]{z} = \{w_0, \ldots, w_{n-1}\}$, где

$$w_j = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi j}{n} + i\,\sin\frac{\varphi_0 + 2\pi j}{n}\right), \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

Упражнение 0.3. *Доказать, что* $\sum\limits_{j=0}^{n-1} w_j = 0$ *и что других корней нет.*

Рассмотрим пример: $\sqrt[4]{-1} = \left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\}$. Здесь $\varphi_0 = \pi$.

Теорема 0.1 (Основная теорема алгебры)**.** *Пусть* $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ *— многочлен (от* z*) степени* $n \geqslant 1$*, то есть* $a_n \neq 0$*,* $a_j \in \mathbb{C}$*. Тогда* $\exists\ z_0 \in C\colon p(z_0) = 0$*. Говорят, что поле* $\mathbb{C}$ *алгебраически замкнуто.*

Эта теорема у вас уже была доказана, но мы потом независимо докажем.

Поле $\mathbb{R}$ алгебраически замкнутым не является.

Из теоремы следует, что $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$.

Оказывается, что другого такого обобщения для $\mathbb{R}$ нет.

Теорема 0.2 (Фробениуса)**.** *Пусть* P *— поле, содержащее* $\mathbb{R}$*. И пусть размерность* $p = \dim_{\mathbb{R}} P < +\infty$ *(размерность относительно* $\mathbb{R}$ *означает размерность поля, как линейного пространства над полем* $\mathbb{R}$*). Тогда утверждается, что либо* $p = 1$ *и* $P = \mathbb{R}$*, либо* $p = 2$ *и* $P \cong \mathbb{C}$*.*

Доказательство есть на полутора страничках. Мы его опустим.

0.2 Топология и метрика

У нас всё-таки анализ. Поэтому пора вводить функции и топологию.

Определение 0.5. *Пусть* $z_{1,2} \in \mathbb{C}$*. Расстоянием между* z_1 *и* z_2 *называется*

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

как и в $\mathbb{R}^2$*.*

Все свойства расстояния работают, как и в $\mathbb{R}^2$.

Определение 0.6. *Пусть* $z_0 \in \mathbb{C}$ *и* $\delta > 0$*. Открытый круг с центром* z_0 *и радиусом* δ *будем обозначать*

$$B(z_0, \delta) = \big\{z \in \mathbb{C} \big| |z - z_0| < \delta\big\}$$

и называть δ*-окрестностью точки* z_0*.*

Как только есть понятие окрестности, возникают понятия открытого, замкнутого, ограниченного, компактного и связного множеств. Напомню кое-что.

Определение 0.7. *Множество* $X \subset \mathbb{C}$: $X \neq \varnothing$ *является несвязным, если* $\exists$ *открытые* $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$*, для которых*

- $U_1 \cap X \neq \varnothing$;
- $U_2 \cap X \neq \varnothing$;
- $U_1 \cap U_2 = \varnothing$;
- $X \subset U_1 \cup U_2$.

Если множество непусто и не является несвязным, то оно называется связным.

Определение 0.8. *Путём в* $\mathbb{C}$ *называется всякое непрерывное отображение отрезка* $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ *в* $\mathbb{C}$*. При этом* $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$*.*

Так как $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, то на отрезке возникается индуцированная топология. Непрерывность понимается в смысле этой топологии. Обозначения следующие

$$\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t).$$

Определение 0.9. *Множество* $X \subset \mathbb{C}$ *называется линейно связным, если* $\forall\ z_1, z_2 \in X \ \ \exists$ *путь* $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$*, для которого*

(1) $[\gamma] := \gamma\big([\alpha, \beta]\big) \subset X$[1];

(2) $\gamma(\alpha) = z_1$, $\gamma(\beta) = z_2$.

Упражнение 0.4. *Если* $U \neq \varnothing$*, то* U *связно, если и только если* U *линейно связно.*

[1] $[\gamma]$ называется носителем пути или траекторией.

Определение 0.10. *Всякое открытое и связное множество называется областью.*

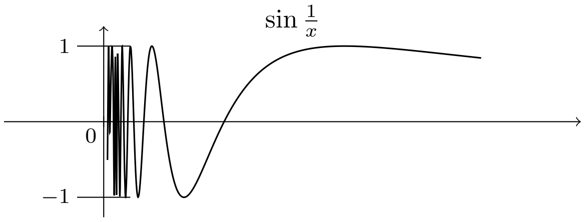


Рис. 2. Связное, но не линейносвязное множество

Определение 0.11. *Пусть есть последовательность* $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$. *Говорят, что последовательность сходится* $c \in C$, *если*

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = c \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \colon \forall\, n > N \;\;\; |z_n - z| < \varepsilon.$$

Упражнение 0.5. *Пусть* $z_n = x_n + i\, y_n$, *а* $c = a + i\, b$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to+\infty} z = c \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a; \\ y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b. \end{cases}$

Упражнение 0.6. *То же самое, только для тригонометрической формы.*

(1) *Пусть* $c = 0$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to+\infty} z_1 = c \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = 0$.

(2) *Пусть* $c \neq 0$ *и* $c = \underbrace{|c|}_{\rho>0}(\cos\psi + i\,\sin\psi)$, $\psi \in \operatorname{Arg}(c)$. *Тогда* $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$, *где* $z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\,\sin\varphi_n)$, *если и только если*

$$\begin{cases} r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \rho; \\ \varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Запись $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi \pmod{2\pi}$ *важна только для* $\psi = \pi$.

1 Экспонента

Вспомним, что

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = c \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = |c|; \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arg}(z_n) = \operatorname{Arg}(c) \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Определение 1.1. $\forall\, z \in \mathbb{C}$ *полагаем* $e^z = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

Утверждение 1.1. $\forall\, z = x + i\, y \in \mathbb{C}$ *последний предел существует и равен* $e^x(\cos y + i\,\sin y)$, *то есть* $|e^z| = e^x > 0$, $\operatorname{Arg} e^z = \{y + 2\pi k\}$.

Доказательство. Пользуемся замечанием о пределе, с которого началась лекция/

(1) Пусть $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Тогда

$$|z_n| = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{n/2} = e^{\frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)} = e^{\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n} + \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x,$$

так как $\ln(1+t) = t + \underset{t\to 0}{\bar{\bar{o}}}(t)$.

(2) Пусть $n \gg 1$. Тогда $1 + \frac{z}{n} \in \left\{(x,y),\ x > 0\right\}$. Значит,

$$\arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \operatorname{arctg}\frac{y/n}{1 + \frac{x}{n}}.$$

Тогда используя формулу Муавра и $\operatorname{arctg} t = t + \underset{t\to 0}{\bar{\bar{o}}}(t)$, получаем

$$\operatorname{Arg}(z_n) = \left\{n \cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{n+x} + 2\pi k\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \ni y + \underset{n\to+\infty}{\bar{\bar{o}}}(1) + 2\pi k \xrightarrow[n\to+\infty]{} y \pmod{2\pi}.$$

■

Итак, если $z = x + i\, y$, то $e^z = e^x(\cos y + i\,\sin y)$. Например, $e^{2\pi i} = 1$, а $e^{\pi i} = -1$.

Упражнение 1.1. $\forall\ z_1$ *и* $z_2 \in \mathbb{C}\quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Отсюда вытекает, что $\forall\ z \in \mathbb{C}\quad e^{z+2\pi\, i} = e^z$.

Определение 1.2. *Говорят, что $2\pi\, i$ — главный мнимый период e^z.*

Заметим, что для $\varphi \in \mathbb{R}$

- $e^{i\,\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$ (если $z \neq 0$, то $r = |z|,\ \varphi = \arg(z)$, получим $z = r \cdot e^{i\,\varphi}$, это называется показательной формой числа z),

- $e^{-i} = \cos\varphi - i\,\sin\varphi$.

Отсюда вытекает, что

$$\begin{cases}\cos\varphi = \frac{e^{i\,\varphi}+e^{-i\,\varphi}}{2};\\ \sin\varphi = \frac{e^{i\,\varphi}-e^{-i\,\varphi}}{2\,i}.\end{cases}$$

Возникает естественное определение

Определение 1.3. $\forall\ z \in \mathbb{C}\quad \cos z = \frac{e^{i\,z}+e^{-i\,z}}{2},\ \sin z = \frac{e^{i\,z}-e^{-i\,z}}{2\,i}$.

Для тех $z \in \mathbb{C}$, что $\cos z \neq 0$ определяем $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$. Для $z \in \mathbb{C}\colon z \sin z \neq 0\quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

Упражнение 1.2. *У основных тригонометрических функций нули только вещественные:*

- $\cos z = 0 \ \Leftrightarrow\ z = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$*;*

- $\sin z = 0 \ \Leftrightarrow\ z = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$*;*

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, z_0 — предельная точка E, то есть

$$\forall\ \delta > 0\quad \exists\ z \in B'(z_0, \delta) \cap E.$$

Определение 1.4. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{C}$ (отображения из подмножества $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ будем называть функциями). Тогда*

$$\lim_{(E\ni) z\to z_0} f(z) = A \in C,$$

если $\forall\ \varepsilon > 0 \exists\ \delta > 0\colon \forall\ z \in B'(z_0, \delta) \cap E\quad \big|f(z) - A\big| < \varepsilon$.

Замечание 1.1. *Если $z_0 \in E$ и $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z) = f(z_0)$, то f называется непрерывной в точке z_0 по множеству E.*

Многое в курсе сохраняется из $\mathbb{R}^2$, надо просто быть осторожным.

Определение 1.5. *Пусть f и g определены в проколотой окрестности точки z_0 и $g(z) \neq 0$ в проколотой окрестности z_0. Пишем, что $f(z) \sim g(z)$ при $z \to z_0$, если*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1;$$

пишем, что $f(z) = \underset{z\to z_0}{\overline{\overline{o}}}\big(g(z)\big)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$.

Добавку «по множеству E» уже не пишем, хотя можно и написать.

Предложение 1.1. $\lim\limits_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z} = 1$*, то есть* $e^z - 1 \sim z$ *при* $z \to 0$ *или* $e^z = 1 + z + \underset{z\to 0}{\overline{\overline{o}}}\,(z)$.

Доказательство. Пусть $z = x + i\,y$. Тогда заметим, что $|x|, |y| \leqslant |z|$, а значит, если некая $h(z) = \overline{\overline{o}}(x)$, то $h(z) = \overline{\overline{o}}(z)$. Аналогично для y. Кроме того, используя последнее упражнение предыдущей лекции, имеем $\overline{\overline{o}}\big(g(x)\big) = \overline{\overline{o}}\Big(\big|g(x)\big|\Big)$. Тогда

$$e^z - 1 = e^x(\cos y + i\,\sin y) - 1 = \big(1 + x + \underbrace{\overline{\overline{o}}(x)}_{\overline{\overline{o}}(z)}\big)\Big(1 + \overline{\overline{o}}(y) + i\big(y + \overline{\overline{o}}(y)\big)\Big) = 1 + x + i\,y + \overline{\overline{o}}(z) - 1 = z + \overline{\overline{o}}(z).$$

■

Упражнение 1.3. *Доказать, что* $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

Пусть $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. $\Pi_{\alpha,\beta} = \{z = x + i\,y \mid \alpha < y < \beta\}$. Для открытых множеств у нас будут соглашение о том, как их рисовать.

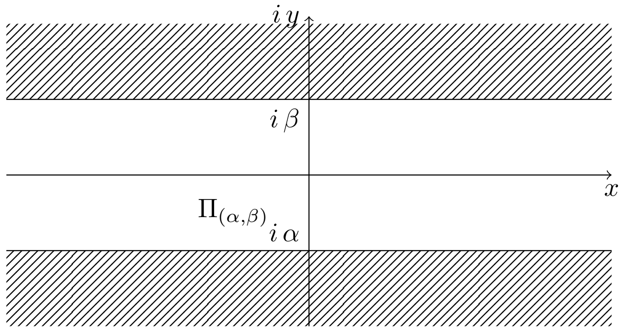


Рис. 3. Когда множество открыто, штрихуем дополнение

Утверждение 1.2. *Пусть в предыдущих обозначениях $\beta \leqslant \alpha + 2\pi$. Тогда функция $w = e^z$ гомеоморфно отображает $\Pi_{(\alpha,\beta)}$ на открытый угол $V_{(\alpha,\beta)}$, где*

$$V_{(\alpha,\beta)} = \{z = re^{i\,\varphi} \mid 0 < r < +\infty,\ \alpha < \varphi < \beta\}.$$

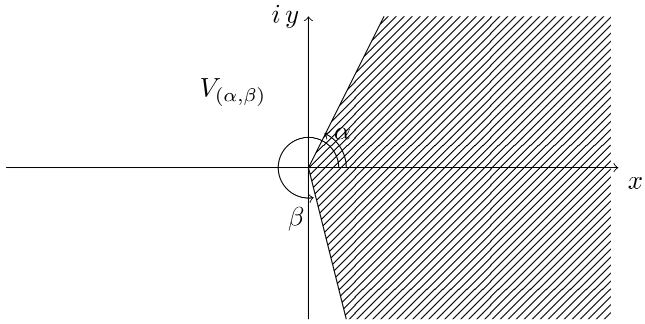


Рис. 4. Отображение «экспонента»

Рассмотрим различные прямые вида $z = z(t) = t + i\,\gamma$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Каждая $\gamma \in (\alpha, \beta)$ задаёт прямую. Эти прямые переходят в лучи $e^z = e^t(\cos\gamma + i\,\sin\gamma)$.

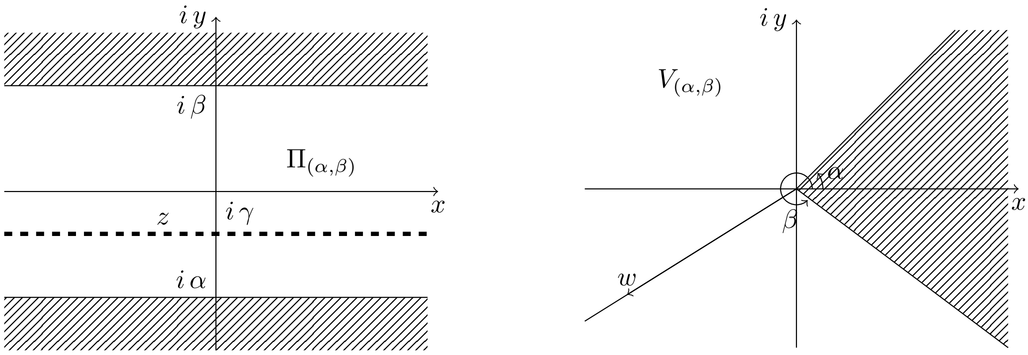


Рис. 5. Образ горизонтальных прямых при экспоненте

Теперь сделаем наоборот. Рассмотрим $z(t) = x_0 + it$, где $t \in (\alpha, \beta)$. Тогда $e^{z(t)} = e^{x_0}(\cos t + i\,\sin t)$ — дуга окружности радиуса e^{x_0}. $\operatorname{Arg}\left(e^{z(t)}\right) \in (\alpha, \beta) \pmod{2\pi}$. Таким образом, куда перейдёт прямоугольник:

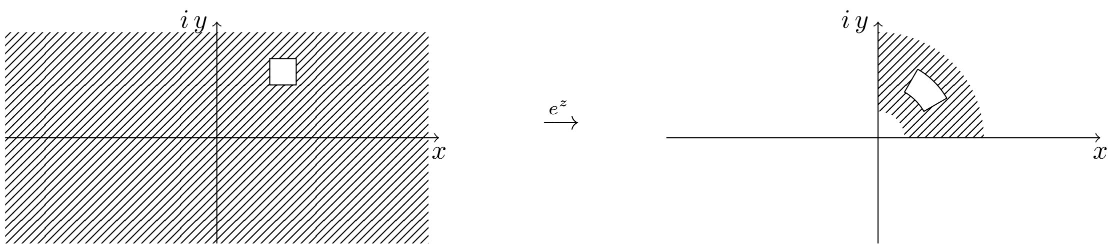


Рис. 6. Образ прямоугольника при экспоненте

В частности посмотрим, куда переходит основная полоса экспоненты $\Pi(-\pi, \pi)$, она ещё называется областью основного периода.

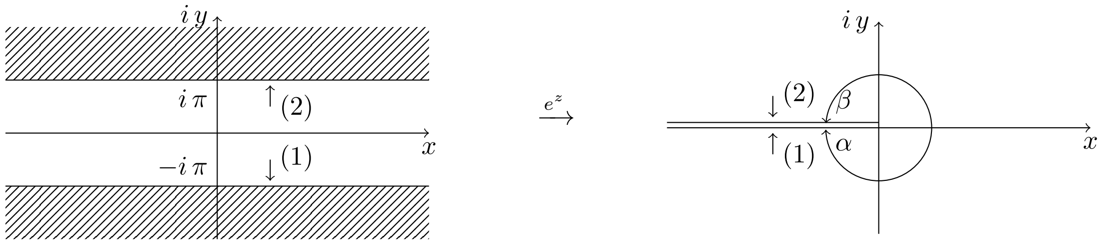


Рис. 7. $\exp\left(\Pi_{(-\pi,\pi)}\right) = \mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

Теперь введём обратную функцию.

Определение 1.6. *Пусть $z \neq 0$. Пишем, что $w \in \mathrm{Ln}(z) \Leftrightarrow z = e^w$.*

Утверждение 1.3. *В указанных обозначениях для $z = x + i\,y \neq 0$ имеем $\mathrm{Ln}\, z = \Big\{ \ln|z| + i\left(\arg(z) + 2\pi k\right) \Big| k \in \mathbb{Z} \Big\}$.*

Легко видеть, что для любого $w_k \in \mathrm{Ln}\, z$ $\;e^{w_k} = e^{\ln|z|}\Big(\cos\left(\arg(z) + 2\pi k\right) + i\,\sin\left(\arg(z) + 2\pi k\right)\Big) = z$.

Упражнение 1.4. *Почему нет других решение уравнения $z = e^w$?*

Например, $\mathrm{Ln}(1 + i) = \left\{ \ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2\pi k) \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Определение 1.7. *Главным значением логарифма при $z \neq 0$ называется $\ln z := \ln|z| + i\,\arg(z)$ ($\arg(z) \in (-\pi, \pi]$).*

Упражнение 1.5 (почти доказано). *Функция $z = \ln w$ является обратной к функции $w = e^z$. Она непрерывно переводит $V_{(-\pi,\pi)}$ в $\Pi_{(\pi,\beta)}$.*

Определение 1.8. *Пусть f определена в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда предел (если он существует) вида*

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

называется комплексной производной функции f в точке z_0.

Например, $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\overbrace{e^{z_0 + \Delta x}}^{e^{z_0} \cdot e^{\Delta z}} - e^{z_0}}{\Delta z} = e^{z_0} \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z} = e^{z_0}$. Будем коротко писать $\left(e^z\right)'\Big|_{z_0} = e^{z_0}$ или ещё короче $\left(e^z\right)' = e^z$.

Упражнение 1.6. *Найти $(\sin z)'$, $(\cos z)'$, $(\mathrm{tg}\, z)'$, $(\mathrm{ctg}\, z)'$.*

Теорема 1.1 (о производной обратной функции). *Пусть f имеет производную в точке z_0, причём $f'(z_0) \neq 0$ (это уже означает, что f определена в некоторой окрестности точки z_0). Пусть f гомеоморфно переводит окрестности точки z_0 на некоторую окрестность точки $w_0 = f(z_0)$. Утверждается, что $g(w) = f^{-1}(w)$ имеет комплексную производную $g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.*

Доказательство. При $\Delta z \to 0$ ($\Delta z \neq 0$) имеем $\Delta w := f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \to 0$ и $\Delta w \neq 0$ из гомеоморфности. Значит,

$$g'(w_0) \leftarrow \frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)} \to \frac{1}{f'(z_0)}.$$

∎

2 Дифференцирование

В прошлый раз определили e^z доказали формулу $e^z = e^x(\cos y + i\,\sin y)$ для $z = x + i\,y$. Показали, что e^z имеет основной период $2\pi\,i$. Достаточно изучать экспоненту на основной полосе периода, то есть $\left\{z \colon y \in (-\pi, \pi)\right\}$. Легко видеть непрерывность. Возникает естественное обратное отображение $\ln(w) = \ln|w| + i\,\arg(w)$ (главная часть логарифма). Мы ввели обозначение $z \in \mathrm{Ln}\, w \Leftrightarrow w = e^z$. Увидели, что $\mathrm{Ln}\, w = \left\{ \ln|w| + i\,(\arg w + 2\pi k) \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Доказали ещё теорему о производной обратной функции. Что даёт нам

$$(\ln w)'\big|_{w_0 = e_{z_0}} = \frac{1}{(e^z)'\big|_{z = z_0}} = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}.$$

Пишем коротко $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ для $z \in \mathbb{C}_-$.

Не все свойства логарифма переносятся из $\mathbb{R}$. Например, $\ln z^2 \neq 2\ln z$, это странная функция.

Ещё одну функцию рассмотрим в качестве примера: $w = z^n$ для $n \geqslant 2$. Эта функция склеивает точки на одной окружности. Легко показать, что $(z^n)' = nz^{n-1}$. А что можно взять в качестве основной области? Нет простой периодичности, но есть инвариантность относительно поворотов.

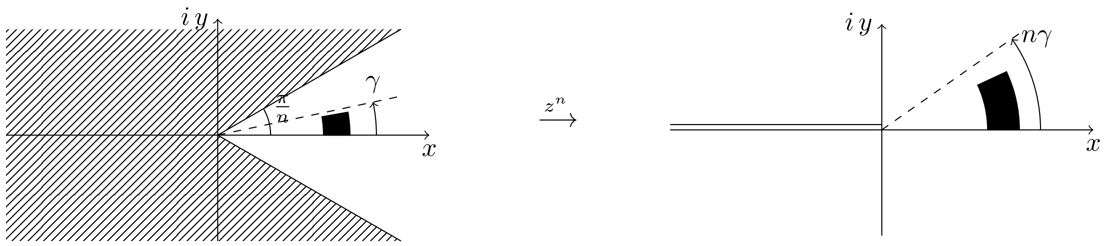


Рис. 8. Степенная функция

Сегодня будем кратко обозначать $V := V_{\left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right)}$. V при отображении z^n перейдёт в $\mathbb{C}_-$. Рассмотрим $z(t) = t \cdot e^{i\gamma}$, $t > 0$. Тогда $\big(z(t)\big)^n = t^n \cdot e^{i\,n\gamma}$. Есть обратная функция $z = \underset{(o)}{\sqrt[n]{w}} = \sqrt[n]{|w|} \cdot e^{\frac{i\,\arg w}{n}}$.

Упражнение 2.1. $\Big(\underset{(o)}{\sqrt[n]{z}}\Big)'_{z_0} = \frac{1}{nz_0} \cdot \underset{(o)}{\sqrt[n]{z_0}}$, *если короче, то* $(\underset{(o)}{\sqrt[n]{z}})' = \frac{1}{nz}\underset{(o)}{\sqrt[n]{z}}$.

Упражнение 2.2. $\underset{(o)}{\sqrt[n]{z}} = e^{\frac{1}{n}\ln z}$.

Просто по определению $\underset{(o)}{\sqrt[n]{z}} = \underset{(o)}{z}^{\frac{1}{n}}$.

Определение 2.1. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — фиксированное число. Тогда $z^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Ln} z}$ — многозначная функция. Можно доопределять в нуле по непрерывности.*

Упражнение 2.3. *Что будет, когда $\lambda \in \mathbb{Z}$? (Оказывается, будет однозначная функция.)*

Упражнение 2.4. *Что будет, когда $\lambda \in \mathbb{Q}$ (вещественные рациональные)?*

Для остальных λ функция z^n оказывается счётнозначной.

Упражнение 2.5. *Доказать, что $i^i \subset \mathbb{R}$.*

Что можем сказать про тригонометрические функции? $\cos z = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2\,i}$ — 2π-периодичные функции, а $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ и $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ — π-периодичны. Но где они определены? Там, где знаменатели не обращаются в ноль.

2.1 $\mathbb{C}$- и $\mathbb{R}$-линейные функции

Определение 2.2. *Функция $w = l(z)$ называется $\mathbb{C}$-линейной, если*

$$\forall\ z_1, z_2, z, \lambda \in \mathbb{C}\quad l(z_1 + z_2) = l(z_1) + l(z_2),\ l(\lambda z) = \lambda l(z).$$

Упражнение 2.6. *$l(z)$ является $\mathbb{C}$-линейной, если и только если $\exists\ A \in \mathbb{C} \colon \forall\ z \in \mathbb{C}\quad l(z) = A \cdot z$.*

Определение 2.3. *Функция $w = L(z)$ называется $\mathbb{R}$-линейной, если*

$$\forall\ z_1, z_2, z \in \mathbb{C},\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\quad L(z_1 + z_2) = L(z_1) + L(z_2),\ L(\lambda z) = \lambda L(z).$$

Такие функции называются линйными формами.

Упражнение 2.7. *$L(z)$ является $\mathbb{R}$-линейной, если и только если $\exists\ A, B \in \mathbb{C} \colon \forall\ z \in \mathbb{C}\quad L(z) = A \cdot z + B \cdot \overline{z}$.*

Упражнение 2.8. *Пусть есть $L(z) = A\,z + B\,\overline{z}$ и $L_1(z) = A_1\,z + B_1\,\overline{z}$. Утверждается, что $L(z) \equiv L_1(z) \Leftrightarrow A = A_1$ и $B = B_1$.*

Надо просто решить систему. Очень просто получается.

Следствие 2.1. *$\mathbb{R}$-линейная функция $L(z) = A\,z + B\,\overline{z}$ является $\mathbb{C}$-линейной, если и только если $B = 0$.*

Давайте посмотрим, чему это соответствует, когда берём дифференциал от функции.

Определение 2.4. *Функция $w = f(z)$ (определённая в окрестности $U(z_0)$ точки $z_0 \in \mathbb{C}$; в этой окрестности для любой точки z определяем $\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\,\Delta y$) называется $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0, если её полное приращение относительно Δz представляется в виде*

$$\Delta f|_{z_0}(\Delta z) = f(z) - f(z_0) = A \cdot \Delta z + \underset{\Delta z \to 0}{\overline{\overline{o}}}(\Delta z),$$

где $A \in \mathbb{C}$ — постоянная. $A \cdot \Delta z$ называется главной линейной по Δz частью приращения, обозначается $df|_{z_0}(\Delta z) \equiv A \cdot \Delta z$, и ещё называется дифференциалом f в точке z_0. Таким образом, функция дифференцируема, если дифференциал является $\mathbb{C}$-линейной функцией относительно Δz.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f|_{z_0}(\Delta z)}{\Delta z} \overset{\exists}{=} f'(z_0)$. Очевидно выполнено

Следствие 2.2. *f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой, если и только если существует $f'|_{z_0}$ и тогда $A = f'_{z_0}$.*

Рассмотрим функцию $f(z) = z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$. Уж куда проще. Фиксируем точку $z_0 \neq 0$.

$$\Delta f|_{z_0}(\Delta z) = (z_0 + \Delta z)(\overline{z}_0 + \overline{\Delta z}) - z_0\overline{z}_0 = \underbrace{\overline{z}_0}_{A}\,\Delta z_0 + \underbrace{z_0}_{B}\,\overline{\Delta z} + \underbrace{|\Delta z|^2}\,\overline{\overline{o}}(|\Delta z|).$$

При этом $\overline{\overline{o}}(\Delta z) = \overline{\overline{o}}\big(|\Delta z|\big) = \overline{\overline{o}}\big(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\big)$. Так как $B \neq 0$, f не является $\mathbb{C}$-дифференцируемой функцией в точке z_0.

Пусть f определена в окрестности $U(z_0)$ точки $z_0 \in \mathbb{C}$. $z = x + i\,y$, $\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\,\Delta y$.

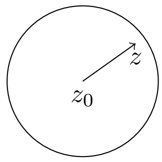


Рис. 9. Окрестность — выпуклое множество

Можно на какое-то время забывать про i и считать, что $f(x)$ — это функция на плоскости $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$.

Например, для $f(z) = e^z$ имеем $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$. Для $f(z) = z^2$ имеем $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$.

Пусть u, v для некоторой $f(z)$ определены в окрестности точки $(x_0, y_0) \sim z_0$.

Определение 2.5. *Функция f называется $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0, если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ одновременно являются дифференцируемыми функциями 2-х вещественных переменных (x,y) в точке $z_0 = (x_0, y_0)$, то есть*

$$\Delta u|_{z_0}(\Delta z) = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{z_0}}_{u'_x|_{z_0}} \cdot \Delta x + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{z_0}}_{u'_y|_{z_0}} \cdot \Delta y + \underbrace{\overline{\overline{o}}(\Delta z)}_{\overline{\overline{o}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

и одновременно

$$\Delta v|_{z_0}(\Delta z) = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{z_0}}_{v'_x|_{z_0}} \cdot \Delta x + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{z_0}}_{v'_y|_{z_0}} \cdot \Delta y + \underbrace{\overline{\overline{o}}(\Delta z)}_{\overline{\overline{o}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}.$$

Бывают функции, не являющиеся $\mathbb{R}$-дифференцируемыми. Для этого достаточно, чтобы хотя бы u не была дифференцируемой в $\mathbb{R}^2$.

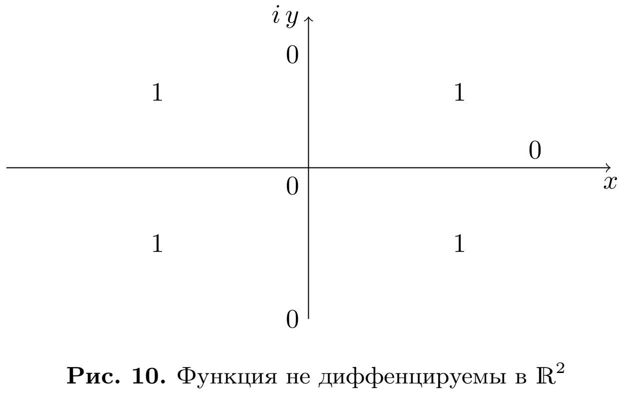


Рис. 10. Функция не диффенцируемы в $\mathbb{R}^2$

Частная производная работает только по двум направлениям, а дифференциал работает по всем.

Приращение можно записать ещё в таком виде.

$$\Delta f|_{z_0}(\Delta z) = \Delta u|_{z_0} + i\,\Delta v|_{z_0}(\Delta z) = \underbrace{(u'_x + i\,v'_x)|_{z_0}}_{f'_x|_{z_0}} \cdot \Delta x + \underbrace{(u'_y + i\,v'_y)|_{z_0}}_{f'_y|_{z_0}} \cdot \Delta y + \underset{\Delta z \to 0}{\overline{\overline{o}}}\,(\Delta z).$$

Возникают есвественные частные производные. А теперь идея такая. Давайте в этом выражении заменим $(x,y) \to (z, \overline{z})$.

$$\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y; \quad \overline{\Delta z} = \Delta x - i\,\Delta y; \quad \Delta x = \frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2}; \quad \Delta y = \frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2\,i}.$$

После подстановки возникают естественные определения для $\frac{\partial f}{\partial z}$ и $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$.

$$\Delta f|_{z_0}(\Delta z) = f'_x|_{z_0}\left(\frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2}\right) + f'_y|_{z_0}\left(\frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2\,i}\right) + \underset{\Delta z\to 0}{\overline{\overline{o}}}\,(\Delta z) =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(f'_x - i\,f'_y)|_{z_0}}_{\frac{\partial f}{\partial z}\big|_{z_0}}\cdot\Delta z + \frac{1}{2}\underbrace{(f'_x + i\,f'_y)|_{z_0}}_{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big|_{z_0}}\cdot\overline{\Delta z} + \underset{\Delta z\to 0}{\overline{\overline{o}}}\,(\Delta z) = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{\Delta z} + \underset{\Delta z\to 0}{\overline{\overline{o}}}\,(\Delta z).$$

Определение 2.6. *В случае $\mathbb{R}$-дифференцируемости, главная линейная часть приращения имеем вид*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{\Delta z},$$

то есть является $\mathbb{R}$-линейной функцией по Δz. Её обозначают $df|_{z_0}(\Delta z)$.

Следствие 2.3. *$\mathbb{R}$-дифференцируемая функция f в точке z_0 является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0, если и только если $\left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} = 0$, если и только если $\exists\ f'(z_0)$.*

Напишем критерий $\mathbb{C}$-дифференцируемости в более понятных терминах.

$$2\left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} = \big(u'_x + i\,v'_x + i(u'_y + i\,v'_y)\big)\big|_{z_0} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'_x - v'_y = 0; \\ v'_x + u'_y = 0. \end{cases}$$

У этого критерия есть название.

Теорема 2.1 (Коши—Римана)**.** *Пусть $f = u + i\,v$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0. Тогда f $\mathbb{C}$-дифференцируема в z_0, если и только если $\exists\ f'(z_0) \Leftrightarrow$*

$$\begin{cases} u'_x = v'_y; \\ u'_y = -v'_x. \end{cases}$$

Бывает так, что только одна точка хорошая. Например, $f(z) = x^2 + y^2 = z\overline{z}$. Только в нуле есть комлексная производная.

Замечание 2.1. *Пусть f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0. Пусть $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y = \underbrace{|\Delta z|}_{\neq 0}e^{i\,\theta}$, где $\theta = \arg(\Delta z)$ — фиксирована. Рассмотрим предел*

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ \arg(\Delta z)=\theta}} \frac{\Delta f|_{z_0}(\Delta z)}{\Delta z}.$$

Он является производной f по направлению $e^{i\,theta}$, где $\theta \in (-\pi, \pi]$. Что получим, если этот пределе преобразуем, используя $\mathbb{R}$-дифференцируемость:

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ \arg(\Delta z)=\theta}} \frac{\Delta f|_{z_0}(\Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ \arg(\Delta z)=\theta}} \frac{\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0}\Delta z + \left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0}\overline{\Delta z} + \overline{\overline{o}}(\Delta z)}{|\Delta z|e^{i\,\theta}} = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0} + \left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} e^{-2\,i\,\theta},$$

так как $\overline{\Delta z} = \Delta x - i\,\Delta y = |\Delta z|e^{-i\,\theta}$.

Получается следующее замечательное следствие.

Следствие 2.4. *В указанных обозначениях совокупность всех производных по направлению дважды пробегает (по часовой стрелке) окружность с центром $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0}$ и радиусом $\left|\left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0}\right|$ при θ, один раз пробегающей $(-\pi, \pi]$.*

Следствие 2.5. *Все производные по направлению $\left.\frac{\partial f}{\partial z_\theta}\right|_{z_0}$ совпадают, если и только если $\left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} = 0$. В этом случае все они равны $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0}$ и совпадают с $f'(z_0) =: \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_0}$.*

3 Сложная функция. Конформность. Голоморфность. ДЛО

Вводили частные производны каким-то странным образом. Покажем, что $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ ведут себя так, будто бы z и $\overline{z}$ независимые переменные.

Предложение 3.1. *Пусть f и g являются $\mathbb{R}$-диффенцируемыми в точке z_0. Тогда $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (если $g(z_0) \neq 0$) тоже являются $\mathbb{R}$-дифференцируемыми. Причём*

$$\left.\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial z}\right|_{z_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0} g(z_0) + f(z_0) \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{z_0},$$

аналогично для $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$. А также

$$\left.\frac{\partial (f/g)}{\partial z}\right|_{z_0} = \frac{\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0} g(z_0) - f(z_0) \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{z_0}}{\big(g(z_0)\big)^2},$$

аналогично для $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$.

Следствие 3.1. *Если f и g являются $\mathbb{C}$-дифференцируемыми, то $f \cdot g$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемой и верна формула для комплексной производной.*

Теперь посмотрим на сложную функцию.

Предложение 3.2. *Пусть g является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $w_0 = g(z_0)$. Тогда $h(z) = f\big(g(z)\big)$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в z_0, причём*

$$\left.\frac{\partial h}{\partial z}\right|_{z_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{w_0} \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{z_0} + \left.\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}\right|_{w_0} \cdot \left.\frac{\partial \overline{g}}{\partial z}\right|_{z_0}.$$

Следствие 3.2 (Теорема о комплексной производной сложной функции)**.** *Пусть f, g $\mathbb{C}$-дифференцируемы. Тогда $f \circ f$ $\mathbb{C}$-дифференцируема и $h'(z_0) = f'(w_0) \cdot g'(z_0)$.*

Замечание 3.1. *Таблица производных, как обычно.*

- $\underset{(o)}{z^p} \equiv= e^{p \ln z}$. *Если $p \in \mathbb{Z}$, всё однозначно. В общем случае диффенцируема основная ветвь:*

$$(\underset{(o)}{z^p})' = e^{p \ln z} \frac{1}{z} \cdot p = \underset{(o)}{z^p} \frac{p}{z}.$$

- $(e^z)' = e^z$;
- $(\cos z)' = -\sin z$;
- $(\sin z)' = \cos z$;
- $(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$;
- $(\operatorname{ctg} z)' = \frac{-1}{\sin^2 z}$;
- $(\ln z)' = \frac{1}{z}$.

Это надо всё вывести.

Замечание 3.2. *Достаточным условием дифференцируемости функции двух вещественных переменных является непрерывность частных производных.*

Определение 3.1. *Пусть f является $\mathbb{R}$-диффенцируемой в точке z_0. Функция f называется конформной (сохраняющей форму) в точке z_0, если её дифференциал в точке z_0 $df|_{z_0}(\Delta z)$ является композицией гоотетии с положительным коэффициентом и поворота, оба с центром $\Delta z = 0$, то есть*

$$df|_{z_0}(\Delta z) = k e^{i\,\theta} \Delta z, \quad k = k_{z_0} > 0,\ \theta = \theta_{z_0} \in \mathbb{R}.$$

Здесь k, θ не зависят от Δz.

Утверждение 3.1. *f является конформной в z_0, если и только если f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$.*

На самом деле $f'(z_0) = k e^{i\,\theta}$, то есть $k = \big|f'(z_0)\big| > 0$, а $\theta \in \operatorname{Arg} f'(z_0)$. В этом состоит геометрический смысл комплексной производной, если она не равна нулю.

Например, $f(z) = e^z$. Тогда $f'(z_0) = e^{z_0}$. Здесь $k = e^{x_0}$, $\theta = y_0 \pmod{2\pi}$. Значит, на мнимой оси нет растяжения, а на прямых $y = 2\pi k$ нет поворота.

Определение 3.2. *Функция называется локально конформной в области $D \subset \mathbb{C}$, если f является конформной в каждой точке $z_0 \in D$, то есть $\forall\ z_0 \in D \quad \exists\ f'(z_0) \neq 0$.*

Определение 3.3. *Функция f называется конмормной в области D, если f локально конформна и взаимно-однозначна в D.*

Например, $f(z) = z^2$. $f'(z) = 2z$, значит, f локально конформна в $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. z^2 склеивает z и $-z$, но в любой полуплоскости, у которой граница содержит ноль, является конформной.

Ещё пример: e^z локально конформна в $\mathbb{C}$. Просто конформна в $\Pi_{(\alpha, \alpha+2\pi)}$. Такие области называются максимальными областями конформности для e^z.

Определение 3.4. *Функция f называется голоморфной (простой формы) в точке z_0, если f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в некоторой окрестности точки z_0.*
Определение 3.5. *Функция f называется голоморфной в области $D \subset \mathbb{C}$, если $f(z)$ всюду в D имеет комплексную производную. Класс всех голоморфных функций в области D будем обозначать $\mathcal{A}(D)$.*

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, многочлены $p(z)$ голоморфны в $\mathbb{C}$. Функции, голоморфные на всей комплексной плоскости называют целыми.

Например, $f(z) = z\overline{z} = x^2 + y^2$ — $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция, а $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = z$. Значит, $z = 0$ — единственная точка $\mathbb{C}$-дифференцируемости, причём $f'(0) = 0$. Таким образом, эта функция нигде не конформна и нигде не голоморфна.

3.1 Дробно-линейные отображения

Определение 3.6. *ДЛО — это функции вида*

$$\Lambda(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, то есть $\Lambda \neq \mathrm{const}$.

Обсудим свойства такого отображения.
Утверждение 3.2. *Любое ДЛО является гомеоморфизмом $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$, где $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость, представляющаяся, как сфера Римана.*

Когда $z \to z_0 \in \mathbb{C}$, всё как раньше. Оставшийся случай $z \to \infty \in \overline{\mathbb{C}} \Leftrightarrow |z| \to +\infty$. Символу ∞ соответствует полюс сферы.

Если $c = 0$, то $a \neq 0$ и $d \neq 0$. Можно считать, что $d = 1$. Тогда $\Lambda(z) = \underbrace{a}_{ke^{i\,\theta}} \left(z + \frac{b}{a}\right)$ и считаем $\Lambda(\infty) = \infty$.

Пусть далее $c \neq 0$. Тогда есть особая точка $z_0 = -\frac{d}{c} \in \mathbb{C}$. Полагаем $\Lambda(z_0) = \infty$, $\Lambda(\infty) = \frac{a}{c}$.
Упражнение 3.1. *Проверить, что указанное отображение является гомеоморфизмом.*
Утверждение 3.3. *Все ДЛО образуют группу относительн комфозиции.*
Утверждение 3.4. *Любое ДЛО конформно отображает $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$.*
Доказательство. Считаем производную

$$\Lambda'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cz+d)^2}$$

при $z \neq z_0$. ■ Таким образом, ДЛО сохраняют углы между гладкими кривыми.
Утверждение 3.5 (круговое свойство). *Любое ДЛО обобщённую окружность переводит в обобщённую окружность.*

Обобщённая окружность в $\overline{\mathbb{C}}$ — это обыкновеная окружность или прямая, объединённая с ∞.

При $c \neq 0$ считаем $c = 1$ можно ДЛО представить в виде $\Lambda(z) = \frac{\gamma}{z - z_0} + b$. В данном случае Λ является композицией

- сдвига $z_1 = z - z_0$;
- симметрии и инверсии $z_2 = \frac{1}{z_1}$;
- гомотетии $z_3 = az_2$;
- и поворота $z = z_3 + b$.

Таким образ, доказывать круговое свойство достаточно для отображения $\frac{1}{z}$. Остальные этапы очевидны.

4 Свойства ДЛО. Функция Жуковского

ДЛО — это отображение вида $w = \frac{az+b}{cz+d}$. Обозначаем $\Lambda(z)$. Интересные случаи, когда $c \neq 0$, тогда функция нелинейная, существует точка $z_0 = -\frac{d}{c}$, при стремлении $z \to z_0$ имеем $\Lambda(z) \to \infty$.
Утверждение 4.1. *ДЛО — гомеоморфизм $\overline{C}$ на $\overline{C}$.*

Сегодня мы введём на $\overline{C}$ структуру гладкого многообразия, и всё станет ясно.
Утверждение 4.2. *Групповое свойство: ДЛО вместе с операцией композиции образуют группу. Причём матрица композиции — произведение матриц.*
Утверждение 4.3. *Круговое свойства: обобщённая окружность переходит в обобщённую окружность.*

Доказательство. Идея здесь такая. Линейный случай совсем простой. А при $c \neq 0$

$$\Lambda(z) = \frac{a}{c} + \frac{\alpha}{z - z_0},\ \alpha \neq 0.$$

Это композиция $z - z_0$, $\frac{1}{z}$, αz, $z + \frac{a}{c}$. Нетривиальный случай $w = \frac{1}{z}$. ∎

Упражнение 4.1. *Любую обобщённую окрудность S в $\overline{C}$ можно записать так*

$$S\colon A\,z\,\overline{z} + \overline{B}\,z + B\,\overline{z} + C = 0, \quad A > 0,\ B \in \mathbb{C},\ C \in \mathbb{R}\ AC < |B|^2.$$

Показать, что при подстановке $w = \frac{1}{z}$ получается уравнение такого же виде.

Утверждение 4.4. *Любое ДЛО Λ конформно отображает $\overline{C}$ на $\overline{C}$.*

Что означает конформность в любой точке $z \in \mathbb{C}$? Если $z_1 \in \mathbb{C}$, то утверждается, что $\Lambda'(z_1) \neq 0$. А что делать, если $z_1 = z_0$ или ∞? Или когда $\Lambda(z_1) = \infty$. Надо вводить атлас на $\overline{C}$.

$$\varphi_1(z) = z \quad (z \in \mathbb{C}); \qquad \varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C}_*; \\ 0, & z = \infty. \end{cases}$$

Тогда склейка будет такая: $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$. Как тогда определить конформность в точке z_0?

Определение 4.1. *Пусть $z_1 \in \mathbb{C}$, f определена в окрестности z_1 и $f(z_1) = \infty$. Говорят, что f конформна в точке z_1, если отображение*

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_1; \\ 0, & z = z_1, \end{cases}$$

конформно в z_1.

Это просто мы записали конформность во второй карте.

Определение 4.2. *Если $z_1 = \infty$ и f определена в окрестности z_1 в $\overline{C}$ и $f(\infty) \neq \infty$, то f конформна в z_1, если и только если*

$$g(\zeta) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\zeta}\right), & \zeta \neq 0; \\ f(\infty), & \zeta = 0, \end{cases}$$

конформно в точке 0.

Здесь мы ввели карту $\zeta = \frac{1}{z}$ около ∞_z.

Упражнение 4.2. *Случай $z_1 = \infty = f(z_1)$ определить самостоятельно.*

Утверждение 4.5. *Любое ДЛО конформно в каждой точке $z_1 \in \overline{C}$.*

Замечание 4.1. *Пусть $f \in C^1\big(U(z_0)\big)$, то есть в некоторой окрестности $U(z_0)$ точки z_0 компоненты $u, v\colon f = u + i\,v$, имеют непрерывные частные производные. Пусть ещё $\exists\ f'(z_0) \neq 0$ (то есть f конформна в z_0). Тогда f сохраняет улы между гладкими кривыми, пересекающимися в точке z_0.*

Определение 4.3. *Пусть путь γ есть отображение $[\alpha, \beta]_t \to \mathbb{C}$ и $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$. Пусьт $t_0 \in (\alpha, \beta)\colon \gamma(t_0) = z_0$. Тогда $\dot{\gamma}(t_0) = \dot{x}(t_0) + i\,y\dot{y}(t_0)$ — касательный вектор пути γ в точке t_0. Путь называется гладким, если $\gamma \in C^1\big([\alpha, \beta]\big)$ и $\forall\ t \in [\alpha, \beta]\quad \big|\dot{\gamma}(t)\big| \neq 0$.*

Пусть есть другой гладкий путь $\gamma_1(t)\big|_{[\alpha_1, \beta_1]}$, есть $t_1 \in (\alpha, \beta)\colon \gamma_1(t_1) = z_0$. Рассмотрим новые пути $\widetilde{\gamma}(t)$ и $\widetilde{\gamma}_1(t)$ в окрестностях t_0 и t_1 соответственно, такие, что

$$\widetilde{\gamma}(t) = f\big(\gamma(t)\big); \quad \widetilde{\gamma}_1(t) = f\big(\gamma_1(t)\big).$$

Из теоремы о производной сложной функции легко показать, что

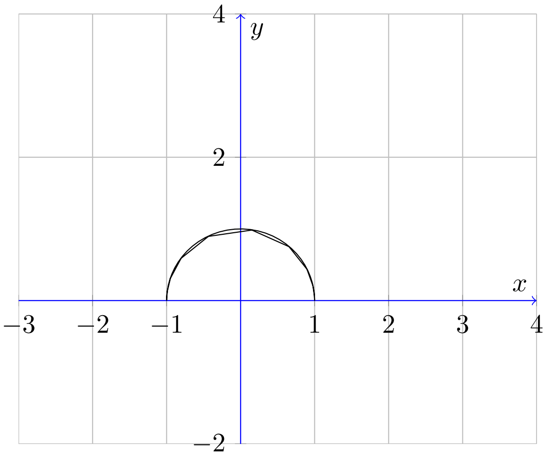
$$\dot{\widetilde{\gamma}}(t_0) = f'(z_0)\dot{\gamma}(t_0),\ \dot{\widetilde{\gamma}}_1(t_1) = f'(z_0)\dot{\gamma}_1(t_1)$$

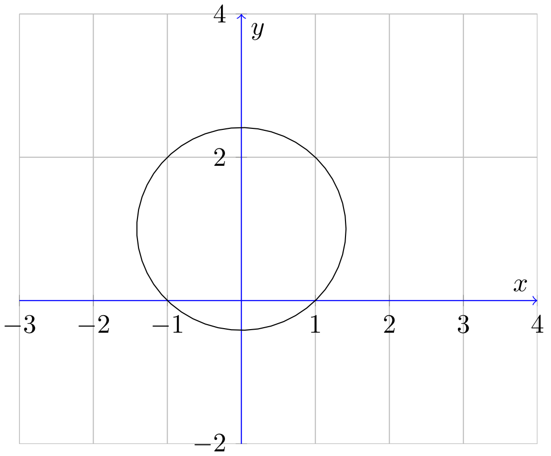
являются комнозициями растяжения и поворота, применённого к старому вектору скорости. Отсюда получается сохранение углов между образами гладких кривых.

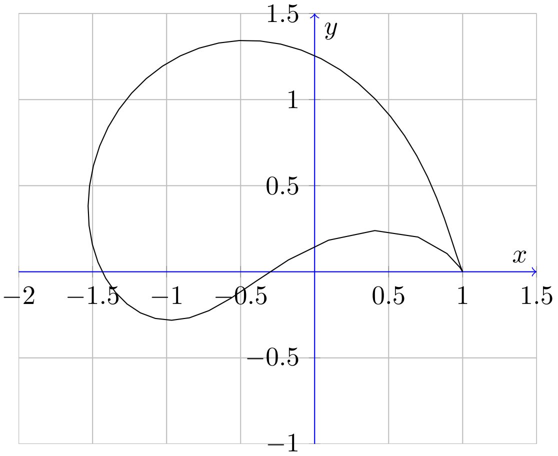
Пусть $f(z) = z + z^1\chi(z)$, где $\chi(z)$ — функция Дирихле. $f(z)$ конформна в 0.

Следствие 4.1. *Любое ДЛО созраняет углы между гладкими кривыми (в частности, между обобщёнными окружностями).*

Утверждение 4.6. *Сохранение симметрии относительно обобщённой окружности. Утверждаеся, что если z_1 и z_2 симметричны относительно обобщённой окрежности S, то $\Lambda(z_1)$ и $\Lambda(z_2)$ симметричны относительно $\Lambda(S)$.*


4
2
−2
y
x
−3
−2
−1
1
2
3
4


4
2
−2
y
x
−3
−2
−1
1
2
3
4


1.5
1
0.5
−0.5
−1
y
x
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5