

# 1 Измеримые множества

Далее мы через  $\bar{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \sqcup \{\infty\}$  будем обозначать множество неотрицательных чисел и добавленный символ бесконечности, при этом будут выполнены следующие аксиомы:  $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad a + \infty = \infty, a \cdot \infty = \infty (a \neq 0), 0 \cdot \infty = 0$  и  $a < \infty, \infty \leq \infty$ .

Какая-то из этих аксиом понадобится, только когда будем рассматривать интеграл Лебега.

**Определение 1.1.**  $\mu: 2^X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$  называется внешней мерой, если

(1) Мера пустого множества равна нулю  $\mu(\emptyset) = 0$ ,

(2)  $\mu A \leq \mu B$ , если  $A \subset B$ ,

(3)  $\mu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ , если  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

**Определение 1.2.** Множество  $E \subset X$  называется измеримым (относительно внешней меры  $\mu$ ), если

$$\mu A = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall A \subset X.$$

В силу свойства 3 полуаддитивности внешней меры, достаточно доказывать только неравенство

$$\mu A \geq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall A \subset X,$$

чтобы показать измеримость множества.

Давайте введём ещё одно обозначение  $AB := A \cap B$ ,  $A' := X \setminus A$ ,  $\mu_A(B) := \mu(AB)$ .

Тогда легко понять, что  $E$  измеримо, если и только если  $\forall A \subset X \quad \mu_A(X) = \mu_A(E) + \mu_A(E')$ .

Давайте ещё через  $\Sigma$  будем обозначать совокупность всех измеримых множеств относительно внешней меры  $\mu$ .

## 1.1 Некоторые свойства измеримых множеств

**Утверждение 1.1.** Если  $\mu E = 0$ , то  $E \in \Sigma$ .

**Доказательство.** Это вытекает из того, что  $\mu_A(E) = 0$  из монотонности меры  $\forall A$ , и тоже в силу монотонности  $\mu_A(X) \geq \mu_A(E) + \mu_A(E')$ . А мы уже знаем, что этого неравенства достаточно. ■

**Утверждение 1.2.** Если  $E_1, E_2 \in \Sigma$ , то  $E = E_1 E_2 \in \Sigma$ .

**Доказательство.** Для доказательства запишем следующие равенства:

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1')$$

в силу измеримости  $E_1$ . А в силу измеримости  $E_2$  можем записать такое неравенство

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1') = \mu_{AE_1}(E_2) + \mu_{AE_1}(E_2') + \mu_A(E_1') = \mu_A(E) + \underbrace{\mu_A(E_1 E_2')}_{E_2' \subset E'} + \underbrace{\mu_A(E_1' E_2')}_{E_1' \subset E'} = \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

**Утверждение 1.3.** Если  $E \in \Sigma$ , то  $E' \in \Sigma$ .

**Доказательство.** Это вытекает из того, что второе дополнение  $E'' = E$  есть само множество. И отсюда  $\mu_A(X) = \mu_A(E') + \mu_A(E'')$ . ■

**Утверждение 1.4.** Если  $E_1, E_2 \in \Sigma$ , то и разность  $E_1 \setminus E_2$ ,  $E_1 \cup E_2 \in \Sigma$ .

**Доказательство.** Это вытекает из таких простых равенств:  $E_1 \setminus E_2 = E_1 E_2'$ ,  $E_1 \cup E_2 = (E_1' E_2')'$ . ■

Таким образом система измеримых множеств является алгеброй. Очевидно же из определения вытекает, что  $\emptyset, X \in \Sigma$ .

**Утверждение 1.5.** Функция  $\mu_A: \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$  является конечно аддитивной мерой на алгебре<sup>1</sup>

**Доказательство.** Пусть  $E = E_1 \sqcup E_2$ ,  $E_1, E_2 \in \Sigma$ . Тогда в силу измеримости

$$\mu_A(E) = \mu_{AE}(E_1) + \mu_{AE}(E_2) = \mu_A(\underbrace{EE_1}_{E_1}) + \mu_A(\underbrace{EE_2}_{E_2}) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_2)$$

Ну и основная теорема.

**Теорема 1.1** (Каратеодори). Пусть  $\mu: 2^X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$  внешняя мера. Тогда

(1)  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра;

(2)  $\mu: \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$  —  $\sigma$ -аддитивная мера.

<sup>1</sup> Потом мы докажем и  $\sigma$ -аддитивность.

**Доказательство.** Пусть  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ,  $E_n \in \Sigma$ . Обозначим  $F_n = \bigcup_{k=1}^n E_k$ ,  $F_n \in \Sigma$ .

Для любого  $A \subset X$

$$\mu_A(X) = \mu_A(F_n) + \mu_A(F'_n) \geq \sum_{k=1}^n \mu_A(E_k) + \mu_A(E').$$

Устремляем  $n \rightarrow \infty$ .

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E') \geq \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

Получаем  $\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ ,  $E \in \Sigma$ ,  $\mu_A(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E')$ . ■

Пусть  $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $S \subset 2^X$  — полукольцо, и мера  $m$   $\sigma$ -аддитивна. Будем также полагать, что она  $\sigma$ -конечна, то есть  $X$  представимо в виде

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in S.$$

У нас мера конечно, поэтому этого будет достаточно.

**Определение 1.3.** Мера заданная на совокупности всех подмножеств  $m^*: 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  называется внешней мерой Лебега, если

$$m^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Инфинум по всем счётным покрытиям.

Сейчас мы докажем, что внешняя мера Лебега является внешней мерой.

**Доказательство.** Обозначение  $(X, \Sigma, \nu)$  — измеримое пространство где  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых множеств  $\mu = m^*$ ,  $\nu := \mu|_{\Sigma}$ .

- (1)  $m^*(\emptyset) = 0$  очевидно;
- (2)  $m^*(A) \leq m^*(B)$ , если  $A \subset B$  тоже;
- (3)  $M^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$ , если  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n$ .

Докажем третье: если  $\exists n: m^*(A_n) = \infty$ , то утверждение верно.

Пусть  $\forall n \in \mathbb{N} \quad m^*(A_n) < \infty$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B_{nk} \in S: A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} m(B_{nk}) < m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Отсюда вытекает, что  $A$  содержится в двойном объединении

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \quad m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m(B_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon.$$

Ещё одно свойство запишем и сделаем перерыв. ■

**Утверждение 1.6.** Если  $A \in S$ , то  $m^*(A) = m(A)$

**Доказательство.** Это вытекает из такого неравенства:

$$m^*(A) \leq m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),$$

если  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $A_n \in S$ . ■

**Теорема 1.2** (о продолжении меры). Пусть  $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$  —  $\sigma$ -аддитивная мера. Тогда

- (1) Внешняя мера  $\mu := m^*: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$   $\sigma$ -аддитивная;
- (2)  $\Sigma$  является  $\sigma$ -алгеброй;
- (3)  $S \subset \Sigma$ ;
- (4)  $\mu|_S = m$ .

**Доказательство.** Всё, кроме свойства три, доказано в теореме Коритоадори. Докажем 3. Пусть у нас  $E \in S$ ,  $A \subset X$  — произвольно множество,  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$\exists B_n \in S: A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Ну теперь применим свойство полуаддитивности и запишем следующее равенство (воспользуемся полуаддитивностью внешней меры)

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(m(B_n \cap E) + m(B_n \setminus E))}_{m(B_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon$  произвольно, тут везде знаки равенства и  $E \in \Sigma$ . ■

**Следствие 1.1.** *Полукольцо содержится в наименьшем кольце, которое содержится в наименьшем  $\sigma$ -кольце, которое содержится в наименьшей  $\sigma$ -алгебре, содержащейся в  $\Sigma$ , то есть*

$$S \subset \mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}_\sigma(S) \subset \mathcal{A}_\sigma(S) \subset \Sigma.$$

**Теорема 1.3** (о единственности продолжения меры). *Пусть  $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$   $\sigma$ -аддитивная и  $\sigma$ -конечная мера. Тогда  $\exists!$   $\sigma$ -аддитивная мера, которая продолжает меру  $m$  на  $\sigma$ -алгебру.*

**Доказательство.** Докажем для случая  $\mu(X) < \infty$  (иначе разобьём множество на измеримые). Пусть имеются два продолжения  $\mu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  и  $\nu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ , где  $\mu = m^*$ . Тогда  $\forall E \in \Sigma \quad \nu E \leq \mu(E)$ , ведь на  $S \quad \mu|_S = \nu|_S = m$ . Осталось заметить, что в силу аддитивности этих мер

$$\nu(E) + \nu(E') = m(X) = \mu(E) + \mu(E').$$

Отсюда видим, что  $\nu(E) = \mu(E)$ . ■

**Лемма 1.1** (об измеримой оболочке). *Пусть  $\mu = m^*$  — внешняя мера Лебега. Тогда  $\forall A \subset X \quad \exists B \in \Sigma: A \subset B$  и  $\mu(A) = \mu(B)$ .*

**Доказательство.**  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists B_{nk} \in S: A \subset B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$  и  $\mu(B_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{nk}) < \mu(A) + \frac{1}{n}$  по определению нижней грани, которая присутствует в определении внешней меры Лебега.

Обозначим  $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \Sigma$ ,  $A \subset B$ . Имеем

$$\mu(B) \leq \mu(B_n) \leq \mu(A) + \frac{1}{n}.$$

Ну и поскольку  $n$  произвольно, то получается равенство. ■

**Определение 1.4.** *Пусть  $\mu = m^*$  и  $\mu(X) < \infty$ . Множество  $E \subset X$  называется измеримым по Лебегу, если  $\mu(X) = \mu(E) + \mu(E')$ .*

Ясно, что если множество измеримо, то оно измеримо по Лебегу. Докажем обратное.

**Доказательство.** Пусть  $E$  измеримо по Лебегу. Тогда существует по лемме об измеримой оболочке

$$\exists A, B \in \Sigma: E \subset A, E' \subset B, \mu(E) = \mu(A), \mu(A') = \mu(B).$$

Отсюда вытекает, что  $A \cup B = X$  и  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$  в силу аддитивности (ну надо на картинку посмотреть, ведь множества  $A$  и  $B$  измеримы). Это всё равно

$$\mu(A \cap B) = \mu(E) + \mu(E') - \mu(X) = 0.$$

Ну а множество меры нуль измеримо, то есть  $A \cap B \in \Sigma$ . Так как  $A \setminus E \subset A \cap B$ ,  $\mu(A \setminus E) = 0$  и разность тоже измерима. Поэтому множество  $E$  можно записать как

$$E = A \setminus (A \setminus E) \in \Sigma.$$

Значит эти определения конечной меры эквивалентны. ■

**Теорема 1.4** (критерий измеримости Ваге—Гуссейна). *Пусть  $\mu = m^*$  и  $\mu(X) < \infty$ . Тогда*

$$E \in \Sigma \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathcal{R}(S): \mu(E \Delta B) < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $E \in \Sigma$  и  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\exists A_k \in S: E \subset A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  и по определению

нижней грани

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leq \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Существует  $n$ , для которого  $\sum_{k=n+1}^{\infty} m(A_k) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Положим  $B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$ . Тогда

$$\mu(E \Delta B_n) \leq \mu(E \setminus B_n) + \mu(B_n \setminus E) \leq \mu(A \setminus B_n) + \underbrace{\mu(A \setminus E)}_{B_n \subset A} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} m(A_k) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть  $E \subset B \cup (E \Delta B)$ . Из этого вытекает

$$|\mu(E) - \mu(B)| \leq \mu(E \Delta B) < \varepsilon, \quad |\mu(E') - \mu(B')| \leq \mu(E' \Delta B') = \mu(E \Delta B) < \varepsilon.$$

Если это сложить, получится неравенство

$$\mu(X) = \mu(B) + \mu(B'), \quad |\mu(E) + \mu(E') - \mu(X)| < 2\varepsilon.$$

Значит,  $E \in \Sigma$ . ■

Помните меру Стильтьеса? Сейчас определим меру Лебега—Стильтьеса

**Определение 1.5.** Пусть есть полукольцо интервалов  $S = \{[a, b] | a, b \in \Sigma, a \leq b\}$ , есть  $\alpha(x) \uparrow$  (неубывает) и  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha(x-0) = \alpha(x)$ . Положим  $m_\alpha([a, b]) := \alpha(b) - \alpha(a)$ . Это  $\sigma$ -аддитивная мера. Пусть  $m = \mu_a^*$  и  $\Sigma_\alpha$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых множеств. Тогда  $\mu: \Sigma_\alpha \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  называется мерой Лебега—Стильтьеса.

Если  $\alpha(x) = x$ , мера называется мерой Лебега.

Приведём пример неизмеримого по Лебегу множества  $E \subset [0, 1]$ . Введём отношение эквивалентности:  $\forall x, y \in [0, 1] \quad x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ . Множество  $[0, 1]$  разбивается на несчётное число классов эквивалентности  $[0, 1] = \bigsqcup_{i \in I} C_i$ , где при  $i \neq j \quad C_i \cap C_j = \emptyset$ . Пусть  $E = \{x_i\}_{i \in I}$ , где  $x_i \in C_i$ . Пусть  $\{e_n\}_{n=1}^\infty = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Тогда определим сдвиг на рациональное число  $E_n = E + r_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Если  $E \in \Sigma$ , то  $E_n \in \Sigma$  (это уже не обязательно подмножество  $[0, 1]$ ) и  $\mu(E) = \mu(E_n)$ . Для  $n \neq m \quad E_n \cap E_m = \emptyset$ . Видим, что  $[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ , а с другой стороны  $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \subset [-1, 2]$ . Можем применить неравенство для измеримых множеств

$$1 = \mu([0, 1]) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) \leq \mu([-1, 2]) = 3.$$

Если  $\mu(E) \neq 0$ , получаем бесконечную расходящуюся сумму, а если  $\mu(E) = 0$ , то противоречие с первым неравенством.

## 2 Измеримые функции

Всюду на этой лекции тройка  $(X, \Sigma, \mu)$  будет обозначать измеримое пространство. Мы сейчас будем использовать только следующие свойства измеримого пространства.

(1)  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра с единицей  $X$ ;

(2)  $\mu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  —  $\sigma$ -аддитивная мера;

(3)  $\forall A \subset B: \mu(B) = 0 \Rightarrow A \in \Sigma$ .

Пусть  $E \subset X$ .

**Определение 2.1.** Функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  называется измеримой, если

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad E(f < c) := \{x \in E | f(x) < c\} \in \Sigma.$$

Понятно, что из определения вытекает, что  $E$  будет измеримо, как счётное объединение этих множеств. Кроме того

$$E(f \leq c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f < c + \frac{1}{n}\right) \in \Sigma; \quad (1)$$

$$E(f \geq c) = E \setminus E(f < c) \in \Sigma; \quad (2)$$

$$E(f > c) = E \setminus E(f \leq c) \in \Sigma; \quad (3)$$

$$E(a \leq f < b) = E(f < b) \setminus E(f < a) \in \Sigma; \quad (4)$$

$$E(a < f < b) = E(f < b) \setminus E(f \leq a) \in \Sigma. \quad (5)$$

Таким образом, все промежутки измеримы.

**Лемма 2.1.**  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  измерима, если и только если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad f^{-1}(B) \in \Sigma.$$

**Доказательство.** Необходимость. Положим  $S := \{A \subset \mathbb{R}B \mid f^{-1}(A) \in \Sigma\}$ . Все интервалы измеримы и лежат в  $S$ .  $S$  —  $\sigma$ -алгебра,  $\mathbb{R} \in S$ .

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B), \quad f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) =$$

Таким образом  $S$  —  $\sigma$ -алгебра,

Достаточность  $E(f < c) = f^{-1}(-\infty, c)$  очевидна. ■

Покажем связь топологии и измеримости. Введём такое определение.

**Определение 2.2.** Пусть  $\mu$  — регулярна. Функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $E \in \Sigma$ , обладает  $C$ -свойством, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ компакт } K, \text{ такой, что } \mu(E \setminus K) < \varepsilon, \quad g = f|_K \text{ — непрерывная функция.}$$

**Теорема 2.1** (Лузина). Пусть  $\mu$  — регулярная мера (в прошлый раз давали: для которой  $X$  является метрическим пространством и ещё другие свойства есть) и все открытые множества измеримы. Тогда функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  измерима  $\Leftrightarrow$  она обладает  $C$ -свойством

**Доказательство.** Необходимость. Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Функция у нас  $f$  измерима. Отсюда вытекает, что  $E \in \Sigma$ . Так как мера регулярна, то  $\exists$  такие измеримые  $A_0, B_0 \in \Sigma$ , такие что  $A_0$  компактно,  $B_0$  открыто,  $A_0 \subset E \subset B_0$  и  $\mu(B_0 \setminus A_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ . (Это всё из регулярности меры.)

Пусть задана система всех интервалов  $\{I_n\}$  с рациональными концами на прямой  $\mathbb{R}$ . Их не более чем счётно, поэтому я их занумеровал натуральными числами. Поэтому также в силу регулярности  $\exists A_n, B_n \in \Sigma$ , такие что  $A_n$  компактно,  $B_n$  открыто,  $A_n \subset f^{-1}(I_n) \subset B_n$ ,  $\mu(B_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ .

Определим  $G := \bigcup_{n=0}^{\infty} (B_n \setminus A_n) \in \Sigma$  — открыто, значит, измеримо, то есть  $G \in \Sigma$ . И его мера (по  $\sigma$ -аддитивности)  $\mu G < \varepsilon$ .

Обозначим  $K = E \setminus G = A_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n)$ . Оно является компактным как разность компактного  $A_0$  и открытого.

Осталось доказать, что ограничение на компакт является непрерывной функцией. Пусть  $g = f|_K$ . Тогда прообраз интервала  $f^{-1}(I_n) = f^{-1}(I_n) \cap K$ . Ну и кроме того легко понять, что пересечение с этим компактом, это всё равно что  $g^{-1}(I_n) = B_n \cap K$ . При этом  $B_n$  открыто, значит,  $g^{-1}(I_n)$  открыто в  $K$ . Значит,  $g$  непрерывна на компакте  $K$ .

Вот мы доказали необходимость.

Достаточность. Пусть  $f$  обладает  $C$ -свойством. Тогда для каждого  $n$  существует измеримый компакт  $K_n \in \Sigma$ , для которого  $K_n \subset E$ ,  $\mu(E \setminus K_n) < \frac{1}{n}$ , ну и ограничение  $g_n|_{K_n}$  непрерывно.

Обозначим  $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus K_n)$ . Значит, функция  $g_n$  непрерывна на компакте  $K_n$ , поэтому  $\forall$  интервала  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  прообраз  $g_n^{-1}(I) = f^{-1}(I) \cap K_n$ . Существуют такие открытые множества  $B_n$ , дающие в перечении  $B_n \cap K_n = g^{-1}(I)$ .

$$f^{-1}(I) \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I) \cap K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap K_n$$

Так как  $B_n$  и  $K_n$  из  $\sigma$ -алгебры, то это всё измеримо. И  $\mu(F) = 0$ ,  $\mu \in \Sigma$ , значит, и прообраз интегралов будет измеримым  $f^{-1}(I) \in \Sigma$ . ■

Следующая лемма нам поможет выяснить алгебраические свойства измеримых функций.

**Лемма 2.2.** Пусть у нас функции  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы, а функция  $h$ , заданная на открытом множестве  $h: D \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна, причём  $D \subset \mathbb{R}^2$  является открытым множеством. Предположим также, что

$\forall x \in E \quad (f(x), g(x)) \in D$ . Тогда можно рассмотреть сложную функцию  $F(x) = h(f(x), g(x))$ , и она окажется измеримой.

**Доказательство.** Пусть  $c \in \mathbb{R}$  рассмотрим  $D(h < c)$  — это множество открыто в  $\mathbb{R}^2$  в силу непрерывности  $h$ . Поэтому всякое открытое множество можно представить в виде объединения открытых прямоугольников не более чем счётного числа

$$D(h < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n, \quad \Pi_n = (a_n, b_n) \times (c_n, d_n).$$

Например, прямоугольники с рациональными вершинами.

Теперь запишем такое множество

$$E((f, g) \in \Pi_n) = E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n).$$

Поэтому множество  $E(F < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E((f, g) \in \Pi_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n)$ . Каждое из этих множеств измеримо, значит, и объединение будет тоже измеримым. Тем самым утверждение леммы доказано. ■

**Следствие 2.1.** Если  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы, то  $f + g$ ,  $fg$ ,  $\frac{f}{g}$  ( $g \neq 0$ ),  $f^p$  ( $p > 0, g \leq 0$ ) измеримы.

**Следствие 2.2.** Пусть теперь у нас задана последовательность измеримых функций  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Предположим, что в каждой точке  $\inf_n f_n$ ,  $\sup f_n$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$  измеримы, если принимают конечные значения.

**Доказательство.** Легко проверяются такие формулы

$$E\left(\inf_n f_n < c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n < c); \quad E\left(\sup_n f_n > c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > c).$$

А для пределов вот такие.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{k \geq 1} \left( \sup_{n \geq k} f_n \right); \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{k \geq 1} \left( \inf_{n \geq k} f_n \right).$$

Таким образом все эти множества измеримы. ■

**Следствие 2.3.** Пусть  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы и  $\forall x \in E \quad \exists f(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Тогда предел  $f$  измерим.

$$f := \overline{\lim} f_n = \underline{\lim} f_n.$$

Введём такие обозначения.  $f_n, f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$

(1)  $f_n \rightarrow f$ , если  $\forall x \in E \quad \exists f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

(2)  $f_n \nearrow f$ , если  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  и  $f_1 \leq f_2 \leq \dots$

(3)  $f_n \searrow f$ , если  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  и  $f_1 \geq f_2 \geq \dots$

**Определение 2.3.** Функция  $h: E \rightarrow \mathbb{R}$  называется простой, если  $h(E) = \{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subset \mathbb{R}$ .

$$h(x) = \sum_{k=1}^n h_k \chi_{H_k}(x),$$

где  $H_k := \{x \in E \mid h(x) = h_k\}$ ,  $\chi_H(x) = \begin{cases} 1, & x \in H; \\ 0, & x \notin H. \end{cases}$

**Теорема 2.2.**  $\forall f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измеримой существует неубывающая последовательность  $h_n \nearrow f$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  $h_n$  — измеримые и простые.

**Теорема 2.3.** Построим по следующей формуле

$$h_n(x) := \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k-1}{2^n} \chi_{H_k^n}(x) + 2^n \chi_{H^n}(x),$$

где  $H_k^n := E\left(\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\right)$ ,  $H^n := E(f \geq 2^n)$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2^{2n}$

Покажем, что эта последовательность функций неубывающая. Ясно, что функции простые, что измеримые. Так как у нас  $H_K^n = H_{2k-1}^{n+1} \sqcup H_{2k}^{n+1}$ ,  $h_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq h_{n+1}(x)$

Кроме того  $|f(x) - h_n(x)| < \frac{1}{2^n}$ , если  $x \in E(f < 2^n)$ .

Поскольку  $n$  убегает в бесконечность.  $h_n \nearrow f$ . Если  $f$  ещё и ограничена, то сходимость будет ещё и равномерной.

**Определение 2.4.**  $f_n \rightarrow f$  почти всюду (п. в.), если  $\exists A \in \Sigma: \mu(A) = 0$ ,  $f_n \rightarrow f$  на  $E \setminus A$ .

**Определение 2.5.**  $f_n \rightarrow f$  почти равномерно (п. р.), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \Sigma: \mu(A) < \varepsilon$  и  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  на  $E \setminus A$ .

**Определение 2.6.**  $f \sim g$  эквивалентны, если  $\exists A \in \Sigma: \mu(A) = 0$  и  $f(x) \equiv g(x) \quad \forall x \in E \setminus A$ .

Пределы почти всюду и почти равномерно определяются с точностью до эквивалентности. Если функция измерима, то и эквивалентная ей измерима.

**Теорема 2.4** (Егорова). Пусть у нас  $\mu(E) < \infty$ , функции  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы. Тогда  $f_n \rightarrow f$  почти всюду на  $E \Leftrightarrow f_n \rightarrow f$  почти равномерно.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть у нас последовательность функций сходится почти всюду  $f_n \rightarrow f$  (п. в.) на  $E$ . Легко видеть, что доказательство из определения почти равномерной сходимости сводится к случаю  $f_n \rightarrow f$  всюду.

Обозначим  $B_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} E(|f_j - f| < \frac{1}{k})$  для  $k \geq 1$ . Объединение таких множеств даст всё  $E$ . Таким образом, последовательность  $B_n \nearrow E$ . Мы доказывали свойство непрерывности меры снизу, поэтому  $\lim \mu(B_n) = \mu(E)$ .

Обозначим дополнение  $A_n := E \setminus B_n$ . Тогда в силу равенства  $\lim \mu(B_n) = \mu(E)$  предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ . Поэтому существует  $n_k$ , такой что  $\mu(A_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$  для любого  $\varepsilon > 0$ .

Обозначим  $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$ . Тогда  $\mu(A) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$ . Дополнение  $E \setminus A$  есть пересечение  $E \setminus A = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{n_k}$ . Поэтому  $\forall j \geq n_k, \forall x \in E \setminus A \quad |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ . Следовательно, последовательность сходится равномерно на множестве  $E \setminus A$ .

Достаточность. Пусть у нас последовательность функций  $f_n \rightarrow f$  (п. р.) на  $E$ . Ну по определению  $\forall n \exists A_n \in \Sigma: \mu(A_n) < \frac{1}{n}, f_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} f$  на  $E \setminus A_n$ .

Обозначим  $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \mu A = 0$ . И  $\forall x \in E \setminus A \Rightarrow f_m(x) \rightarrow f(x)$ . ■

**Определение 2.7.** Пусть  $f, f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы.  $f_n \rightarrow f$  по мере  $\mu$  на  $E$  (здесь мы должны предположить, что функция измерима... сначала), если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E(|f_n - f| \geq \varepsilon)) = 0$  для любого  $\varepsilon > 0$ .

**Теорема 2.5.** Тут два утверждения.

(1) Пусть  $f, f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы, и  $\mu(E) < \infty$ , то из  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  (п. в.) на  $E$  следует, что  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  по мере  $E$ .

(2) Если  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  по мере на  $E$ , то  $\exists$  подпоследовательность  $f_{n_k} \rightarrow f$  (п. в.) на  $E$ .

**Доказательство.** Для доказательства первого утверждения применим теорему Егорова.

$$\varepsilon > 0 \exists A \in \Sigma: \mu(A) < \varepsilon, f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \text{ на } E \setminus A,$$

то есть  $\exists n: \forall k \geq n \quad \mu(E(|f_k - f| \geq \varepsilon)) < \varepsilon$ . Отсюда следует, что  $\mu(E(|f_k - f| \geq \varepsilon)) \leq \mu(A) < \varepsilon$ . Значит, предел  $f_k \rightarrow f$  по мере на  $E$ .

Доказательство второго утверждения. Пусть  $f_n \rightarrow f$  по мере. Существует  $m_k: \mu(E(|f - f_{m_k}| \geq \frac{1}{2^k})) < \frac{1}{2^k}$  (из сходимости по мере следует, что предел этой конструкции равен нулю). Обозначим  $A_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f - f_{m_k}| \geq \frac{1}{2^k})$

и рассмотрим  $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . Имеем  $\mu(A_n) < \frac{1}{2^{n-1}}$ , получаем  $\mu(A) = 0$ .

Если  $x \in E \setminus A$ , то  $x \in E \setminus A_n$  и  $|f(x) - f_{m_k}(x)| < \frac{1}{2^k}$ . Следовательно,  $f_{m_k} \rightarrow f$  на  $E \setminus A$ . ■

Ну и в заключение давайте примерчик один приведём. Пример Риссо. Покажем, что их сходимости по мере не следует сходимость почти всюду. Берём отрезок  $E = [0, 1]$ , разбиваем его на отрезки  $A_n = [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]$ . Каждый отрезок имеет меру  $\mu(A_n) = \frac{1}{2^m}$ . Нумерация такая:  $n = 2^m + k, k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$ , для того, чтобы

нумерация была по одному индексу.  $f_n(x) = \chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_n; \\ 0, & x \notin A_n. \end{cases}$  Тогда мера Лебега

$$\mu(f_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{2^m} \rightarrow 0, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Наша последовательность  $f_n \rightarrow 0$  по мере на отрезке  $[0, 1]$ .

Но эта последовательность не сходится никуда. Легко видеть

$$\overline{\lim} f_n(x) = 1, \quad x \in [0, 1]; \quad \underline{\lim} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

К нулю в том числе не сходится.

### 3 Интеграл Лебега

Значит, у нас в дальнейшем  $(X, \Sigma, \mu)$  — измеримое пространство (на прошлой лекции я говорил, что это такое),  $E \in \Sigma$ , через  $\alpha$  будем обозначать  $\alpha = \{A_k\}_{k=1}^n$  — измеримое разбиение  $E$ , то есть  $E = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$ ,  $A_k \in \Sigma$ .

Пусть также есть  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Введём обозначения  $S_\alpha(f) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k)$  — сумма Дарбу<sup>1</sup>,  $a_k = \inf_{x \in A_k} f(x)$ ,  $a_k = a_k(f)$ .

**Определение 3.1.** Интегралом Лебега измеримой функции  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется верхняя грань сумм Дарбу

$$\int_E f d\mu = \sup_\alpha S_\alpha(f).$$

Если значения функции имеют произвольный знак, то есть  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ . То  $f = f_+ - f_-$ , где  $f_\pm(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$ , то интеграл Лебега определяется, как

$$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu.$$

Функция называется интегрируемой по Лебегу (или суммируемой)  $f \in L(E, \mu)$ , если  $f$  измерима и  $\int_E f_\pm d\mu < \infty$ .

Верхняя грань сумм Дарбу может быть и бесконечной. Это допустимо для неотрицательной функции. А в случае знакопеременной функции может возникнуть неопределённость  $\infty - \infty$ .

Теперь перейдём у свойствам.

**Утверждение 3.1.** Пусть  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измерима. Тогда  $\int_E f d\mu = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$ , то есть  $f = 0$  почти всюду.

**Доказательство.** Необходимость. Если  $\int_E f d\mu = 0$ , то все суммы Дарбу  $S_\alpha(f) = 0$ . Рассмотрим  $E_n = E(g \geq \frac{1}{n})$ .

Ясно, что  $E_n \nearrow E(f > 0)$  и  $\mu(E(f > 0)) = \lim \mu(E_n) = 0$ . Ведь мы можем строить разбиение так, чтобы одно из множеств было  $E_n$ .

Достаточность.  $\mu(E(f > 0)) = 0$ , значит,  $S_\alpha(f) = 0$ . Это из определения вытекает. ■

**Утверждение 3.2.** Пусть  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измеримы и  $f \leq g$  на  $E$ . Тогда  $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$ .

**Доказательство.** Так как сумма Дарбу для любого разбиения удовлетворяет соответствующему неравенству  $S_\alpha(f) \leq S_\alpha(g)$ . ■

**Утверждение 3.3.** Если  $f, g \in L(E, \mu)$  и  $f \leq g$  на  $E$ , то  $\int_E f_+ d\mu \leq \int_E g_+ d\mu$  и  $\int_E f_- d\mu \geq \int_E g_- d\mu$ . А если вычтем, то

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

**Лемма 3.1.** Пусть  $h \in L(E, \mu)$  простая, то есть принимает конечное количество значений. Тогда, как мы знаем, она записывается в виде

$$h(x) = \sum_{k=1}^m h_k \chi_{H_k}(x), \quad H_k = \{x \in X \mid h(x) = h_k\}.$$

Тогда  $\int_E h d\mu = \sum_{l=1}^m h_l \mu(E \cap H_l)$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать для случая неотрицательной функции  $h \geq 0$ .  $a_k(h) \leq h_l$ , если  $B_{kl} = A_k \cap H_l \neq \emptyset$ ,

$$S_\alpha(f) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_k \mu(B_{kl}) \leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m h_l \mu(B_{kl}) = \sum_{l=1}^m h_l \mu(E \cap H_l).$$

Но если мы возьмём разбиение  $\alpha = \{E \cap H_l\}_{l=1}^m$ , будет знак равенства. ■

Из этой леммы вытекают следующие два следствия.

**Следствие 3.1.** Если  $h \in L(E, \mu)$  простая, то её интеграл обладает свойством аддитивности, то есть

$$\int_E h d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} h d\mu, \quad E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \in \Sigma.$$

<sup>1</sup> Так как  $0 \cdot \infty = 0$  по определению, все суммы Дарбу конечные.



**Следствие 3.2.** Если  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измерима, то  $\int_E f d\mu = \sup_{0 \leq h \leq f} \int_E h d\mu$ , где  $h$  — простая измеримая функция.

**Доказательство.** Доказательство последнего следствия. Имеем из свойства 2  $\int_E h d\mu \leq \int_E g d\mu$ . ■

Следующая теорема одна из основных теорем.

**Теорема 3.1** (о монотонной сходимости). Пусть  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  неотрицательны и измеримы, и  $f_n \nearrow f$  на  $E$ . (Интеграл от  $f$  при этом может быть бесконечным, ничего страшного.) Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

**Доказательство.** Давайте обозначим этот предел через  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$ . Так как  $f_n \leq f$  в каждой точке, то этот предел будет оцениваться  $I \leq \int_E f d\mu$ . Для доказательства нам нужно доказать обратное неравенство.

Возьмём произвольную простую функцию  $h: 0 \leq h \leq f$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$  и определим следующие множества  $E_n = E(\varepsilon h \leq f_n) \nearrow E$ . Запишем следующим очевидные равенства

$$\varepsilon \int_{E_n} h d\mu = \int_{E_n} \varepsilon h d\mu \leq \int_{E_n} f_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu \leq I.$$

Ну а теперь заметим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} h d\mu = \int_E h d\mu$  в силу следствия 1. Переходя к пределу получаем  $\varepsilon \int_E h d\mu \leq I$ . В силу произвольности  $\varepsilon$

$$\int_E h d\mu \leq I \quad \forall 0 \leq h \leq f.$$

По свойству 3 имеем  $\int_E f d\mu \leq I$ . ■

Следующее важное свойство четвёртое. Свойство линейности интеграла.

**Утверждение 3.4.** Пусть  $f, g \in L(E, \mu)$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\int_E \lambda f d\mu = \lambda \int_E f d\mu$  и  $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$ .

**Доказательство.** Первое свойство настолько очевидно, что я и доказывать не хочу. Докажем второе. Пусть пока что  $f, g \geq 0$  и простые. Нужно вспомнить доказанную лемму и взять пересечение разбиений.

Второй случай. Пусть у нас теперь  $f$  и  $g$  неотрицательны и измеримы. В этом случае мы с вами доказывали теорему о том, что всякая неотрицательная функция является монотонным пределом неотрицательных простых функций, то есть  $\exists f_n \nearrow f$  и  $g_n \nearrow g$ , где  $f_n, g_n$  — простые. Тогда и  $f_n + g_n \nearrow f + g$ . Ну а теперь применяем теорему о монотонной сходимости.

$$\int_E (f + g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f_n + g_n) d\mu \stackrel{1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu$$

ну и по теореме о монотонной сходимости получаем  $\int_E f d\mu + \int_E g d\mu$ .

Ну и третий случай, когда  $f, g \in L(E, \mu)$ ,  $f = f_+ - f_-$ ,  $g = g_+ - g_-$ . Тогда  $(f + g) = (f + g)_+ - (f + g)_-$ , и мы получим такое равенство

$$(f + g)_+ f_- + g_+ = (f + g)_- + f_+ + g_-.$$

Это равенство можно проинтегрировать по свойству 2, собрать слагаемые обратно и получить результат. ■

**Утверждение 3.5.** Пусть  $f \in L(E, \mu)$ , то  $|f| \in L(E, \mu)$  и выполнены соответствующие неравенства

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

**Доказательство.**  $|f| = f_+ + f_- \in L(E, \mu)$  по доказанным свойствам. Кроме того  $-|f| \leq f \leq |f|$ , применяем свойство 2, получаем  $-\int_E |f| \leq \int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu$ . ■

**Лемма 3.2** (Фату). Пусть  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измеримы и  $f = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  почти всюду на  $E$ . Тогда  $\int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$ .

**Доказательство.** По свойству 4 можно избавиться от требования условия почти всюду. Будем считать, что  $f = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  всюду на  $E$ . Ну и введём такие функции  $g_n = \inf_{m \geq n} f_m$  — это измеримые неотрицательные функции (мы доказывали), ну и кроме того  $g_m \nearrow f$  по определению предела.

Так как  $\forall n \geq m \quad g_m \leq f_n$ , то у нас  $\int_E g_m d\mu \leq \inf_{n \geq m} \int_E f_n d\mu$ . Ну и теперь применяем теорему о монотонной

СХОДИМОСТИ.

$$\int_f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{n \geq m} \int_E f_n d\mu = \underline{\lim} \int_E f_n d\mu.$$

И лемма доказана. ■

**Теорема 3.2** (Лебега о предельном переходе). Пусть  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы,  $f = \lim f_n$  почти всюду на множестве  $E$ , и существует функция  $g \in L(E, \mu)$ ,  $g \geq 0$  и  $|f_n| \leq g^1$  на множестве  $E$  (можно и оставить здесь почти всюду). Тогда  $f, f_n \in L(E, \mu)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ .

**Доказательство.** Не поскольку  $f$  измерима, то  $f_n$  тоже будет измерима. Будут выполнены такие неравенства почти всюду:  $f_{n\pm}, f_{\pm} \leq g$  почти всюду на  $E$ . По свойству 2 интегралы будут конечны, то есть  $f, f_n \in L(E, \mu)$ . Кроме того  $g \pm f_n \geq 0$  в силу того, что  $|f_n| \leq g$  на  $E$ ;  $g \pm f_n \rightarrow g \pm f$ , ну и нижний предел тоже сходится. Можно применить лемму Фату

$$\int_E (f + g) d\mu \leq \underline{\lim} \int_E (g + f_n) d\mu, \quad \int_E (g - f) d\mu \leq \underline{\lim} \int_E (g - f_n) d\mu$$

В силу аддитивности интеграла, на  $g$  погу сократить в каждом неравенстве. Останется два неравенства. Из-за минуса нижний предел сменится на верхний.

$$\overline{\lim} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu.$$

И теорема доказана. ■

**Теорема 3.3** (о  $\sigma$ -аддитивности интеграла Лебега). Пусть  $f \in L(E, \mu)$ ,  $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ,  $E_n \in \Sigma$ . Тогда  $\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$ .

**Доказательство.** Понятно, что  $f = f_+ - f_-$ , и доказательство сводится к случаю  $f \geq 0$ . Пусть сначала  $E = E_1 \sqcup E_2$ ,  $E_1, E_2 \in \Sigma$ . Функция неотрицательна, значит можно рассуждать суммами Дарбу. Пусть  $\alpha$  — разбиение множества  $E$ . Тогда у нас индуцируются разбиения  $\alpha_1 = \alpha \cap E_1$ ,  $\alpha_2 = \alpha \cap E_2$ . Легко понять, что тогда  $S_{\alpha}(f) \leq S_{\alpha_1}(f) + S_{\alpha_2}(f)$ .

С другой стороны. Если  $\alpha_1$  — разбиение  $E_1$ ,  $\alpha_2$  — разбиение  $E_2$ , можно построить  $\alpha = \alpha_1 \sqcup \alpha_2$ . В этом случае у нас будет равенство  $S_{\alpha}(f) = S_{\alpha_1}(f) + S_{\alpha_2}(f)$ . Значит, и верхняя грань будет удовлетворять этому равенству:

$$\int_f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu.$$

Ну и теперь общий случай. Пусть  $f \geq 0$ , положим  $F_n := \bigsqcup_{k=1}^n E_k$ ,  $f_n := \chi_{F_n} \cdot f$ . Тогда  $f_n \nearrow f$  и можно применить теорему о монотонной сходимости

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{F_n} f d\mu.$$

Раз для двух множеств верно, то и для любого конечно числа множеств будет верно и  $\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{E_n} f d\mu$ . ■

**Теорема 3.4** (Неравенство Чебышёва). Пусть  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измерима. Тогда  $\forall t > 0 \quad \mu(E_t) \leq \frac{1}{t} \int_E f d\mu$ ,  $E_+ := E(f \geq t)$ .

С этой теоремы началась теория вероятности. До Чебышёва теория вероятностей было только интуитивной.

**Доказательство.** Имеем по свойству 2:  $\int_E f d\mu \geq \int_{E_t} f d\mu \geq t\mu(E_t)$ . ■

Введём такое определение.

**Определение 3.2.** Пусть  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измерима. Обозначим через  $\lambda_f(t) = \mu(E_t)$ ,  $t > 0$ ,  $E_t := E(f \geq t)$ .  $\lambda_f(t)$  называется функцией распределения (значений  $f$ ).

**Утверждение 3.6.** Свойства. Докажем только последнее.

$$(1) \lambda_f(t) \downarrow;$$

$$(2) \lambda_f(t - 0) = \lambda_f(t);$$

---

<sup>1</sup> Эта функция  $g$  называется интегрируемой мажорантой.

- (3)  $\exists a: 0 < a \leq \infty, \lambda_f(t) = \infty$  при  $t \in (0, a)$ ;
- (4) Если  $f \in L(E, \mu)$ , то  $\lambda_f(t) < \infty$  при  $t > 0$ ;
- (5) Если  $\mu(E(f=t)) > 0$ , то  $t$  — точка разрыва  $\lambda_f$ ;
- (6)  $\lambda_f(t) = \bar{o}\left(\frac{1}{t}\right)$ , если  $f \in L(E, \mu)$ .

**Доказательство.**  $E_t \searrow \emptyset, \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{E_+} f d\mu$ . Ну а следовательно  $t\mu(E_t) \leq \int_{E_+} f d\mu$ . ■

**Определение 3.3.** Если  $f, g \in E: \mathbb{R}_+$  измеримы и  $\lambda_f(t) = \lambda_g(t) \quad \forall t > 0$ , то  $f$  и  $g$  называются равноизмеримыми.

Пусть  $f, g \in L(E, \mu)$ . Тогда применяя теорему Фубини (которая у нас ещё будет) можно написать такие равенства

$$\int_E f d\mu = \int_0^\infty \lambda_f(t) dt; \quad \int_E g d\mu = \int_0^\infty \lambda_g(t) dt.$$

## 4 Абсолютно непрерывные функции

Начнём с определения абсолютной функции множества. У нас будет дальше  $(X, \Sigma, \mu)$  — измеримое пространство. Обозначим через  $\Sigma_E = \{A \subset E | A \in \Sigma\}, E \in \Sigma$ .

**Определение 4.1.** Функция  $\varphi: \Sigma_E \rightarrow \mathbb{R}$  называется зарядом, если  $\varphi$   $\sigma$ -аддитивна. Заряд называется абсолютно непрерывным  $\varphi \ll \mu$  относительно меры  $\mu$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall A \in \Sigma_E, \mu(A) < \delta \Rightarrow |\varphi(A)| < \varepsilon.$$

**Теорема 4.1** (об абсолютной непрерывности интеграла Лебега). Если  $f \in L(E, \mu)$ , то  $\varphi(A) = \int_A f d\mu, A \in \Sigma_E$ , является абсолютно непрерывным зарядом.

**Доказательство.** Что интеграл заряд, мы доказывали в прошлой лекции. Надо доказать только абсолютную непрерывность. Представим  $f = f_+ - f_-$ . Тогда можно считать, что  $f \geq 0$ . Рассмотрим  $E_n = E(f \leq n), E_n \nearrow E$ . Можно воспользоваться свойством непрерывности снизу для меры.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \varphi(E \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А ещё  $\forall A \in \Sigma_E \quad \mu(A) < \delta = \frac{\varepsilon}{2n}, \varphi(A \cap E_n) = \int_{A \cap E_n} f d\mu \leq n\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ . Ну и осталось написать, что  $\varphi(A) = \varphi(A \cap E_n) + \underbrace{\varphi(A \setminus E_n)}_{\leq \mu(E \setminus E_n)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , поскольку у нас  $\varphi$  монотонна (так как  $f$  неотрицательна). ■

Следующая теорема в нашем курсе если и будет доказана, то на последней лекции, если время останется. Кто интересуется, может прочесть в книге Колмогоров—Фомин.

**Теорема 4.2** (Радона—Никодима). Если заряд  $\varphi: \Sigma_E \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет условию

$$\forall A \in \Sigma_E: \mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0.$$

$E$  имеет  $\sigma$ -конечную меру.

Тогда  $\exists!$  (с точностью до эквивалентности)  $f \in L(E, \mu)$  такая, что  $\varphi(A) = \int_A f d\mu \quad \forall A \in \Sigma_E$ .

Помните, что мы называли функции эквивалентными, если они совпадают почти всюду.

**Доказательство.** Единственность легко доказать. Если интегралы совпадают для всех  $A \in \Sigma_E \quad \int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ , то пусть  $\exists B \in \Sigma_E: \mu(B) > 0$ , такой, что  $f(x) > g(x) \quad \forall x \in B$ . Следовательно,  $\int_B (f - g) d\mu > 0$ . ■

Следствие обычно называется свойством абсолютной непрерывности. Его можно было бы и независимо доказать, но это заняло бы определённое время. Так что просто выведем из теоремы Радона—Никодима.

**Следствие 4.1** (критерий абсолютной непрерывности).  $\varphi \ll \mu \Leftrightarrow \forall A \in \Sigma_E: \mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0$ .

**Доказательство.** Необходимость очевидна. Потому что если множеству меры нуль  $\forall \varepsilon > 0 |\varphi(A)| < \varepsilon$ , то  $\varphi(A) = 0$ . А обратное вытекает из теоремы Радона—Никодима. ■

### 4.1 Функции точки

Сначала я вам напомним определение функции ограниченной в вариациях.

**Определение 4.2.**  $F \in B \vee [a, b]$ , если

$$\bigvee_a^b ar(F) := \sup_{\tau} \sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| < \infty, \quad \tau := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}.$$

Пространство будет линейным, и в нём можно ввести норму  $\|F\| = |F(a)| + \bigvee_a^b(F)$ .

Напомним свойства без доказательства. Это должно быть в курсе математического анализа.

**Утверждение 4.1.** Если  $F \in B \vee [a, b]$  и  $a < c < b$ , то  $\bigvee_a^b ar(F) = \bigvee_a^c ar(F) + \bigvee_c^b ar(F)$ .

**Утверждение 4.2.** Если  $F(c-0) = F(c)$ . то  $V(x) = \bigvee_a^x ar(F)$ ,  $V(c-0) = V(c)$ .

**Утверждение 4.3.** Разложение Жордана. Если  $F \in B \vee [a, b]$ , то  $\exists \alpha(x) \uparrow$  и  $\beta(x) \uparrow$ , такая, что

$$\alpha(a) = \beta(a) = 0, \quad F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x), \quad V(x) = \alpha(x) + \beta(x).$$

**Доказательство.**  $\alpha(x) := \frac{1}{2} \{ \bigvee_a^x ar(F) + F(x) - F(a) \}$ ,  $\beta(x) := \frac{1}{2} \{ \bigvee_a^x ar(F) - F(x) + F(a) \}$ . ■

Ещё одну теорему приведу без доказательства.

**Теорема 4.3** (Лебега о производной монотонной функции). Если функция  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  монотонна,  $f(x) \leq f(y)$ , если  $x \leq y$  (или наоборот), то существует производная  $f'(x)$  почти всюду на  $[a, b]$ .

## 4.2 Интеграл Лебега—Стилтьеса

Пусть  $F \in B \vee [a, b]$  непрерывна слева. Тогда по разложению Жордана можем написать  $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ , где  $\alpha, \beta \uparrow$ . Можно построить меры Лебега—Стилтьеса  $\mu_\alpha, \mu_\beta$ . И мы можем тогда построить заряд Лебега—Стилтьеса

$$\varphi_F = \mu_\alpha - \mu_\beta.$$

Заряд определён на  $\Sigma_F := \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ , пересечение  $\sigma$ -алгебр мер  $\mu_\alpha$  и  $\mu_\beta$ . Определение теперь.

**Определение 4.3.** Интеграл Лебега—Стилтьеса  $\int_a^b f d\varphi_F := \int_a^b f d\mu_\alpha - \int_a^b f d\mu_\beta$ . Определён на полуинтервале  $[a, b)$ .

И напомним определение.

**Определение 4.4.** Интеграл Римана—Стилтьеса  $\int_a^b f dF := \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} R_\tau(f, \xi, F)$ , где

$$R_\tau(f, \xi, F) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(F(x_k) - F(x_{k-1})),$$

$\tau$  — разбиение отрезка, то есть  $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ ,  $d(\tau) = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$ ,  $\xi = \{\xi_k\}$  и  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ .

**Лемма 4.1.** Если функция  $F \in C[a, b]$ , то существует интеграл Римана—Стилтьеса.

**Доказательство.** Достаточно рассмотреть, когда  $F$  неубывающая. Тогда интегральная сумма будет являться интегралом Лебега от некоторой простой функции.  $f_\tau(x) = f(\xi_k)$  на  $[x_{k-1}, x_k]$ . Так как функция непрерывна, я могу вместо отрезка брать полуинтервал. Ещё на отрезке  $f_\tau \Rightarrow f$ . По теореме Лебега интеграл существует. ■

Кстати функцию  $F$  можно переопределить в счётном числе точек. От этого интеграл не изменится.

Нам эта лемма в общем-то и не понадобится.

**Теорема 4.4** (о сравнении интегралов). Если функция  $f: [a, b]$  ограничена и  $\exists \int_a^b dF$ , то  $\exists \int_a^b f d\varphi_F$  и они равны.

**Доказательство.** Применяем разложение Жордана. Без ограничения общности считаем  $F(x) = \alpha(x) \uparrow$  и  $f \geq 0$ . Рассмотрим в этом случае интегральные суммы Дарбу—Стилтьеса для заданного разбиения

$$\underline{D}_\tau(f, \alpha) := \sum_{k=1}^n \underline{a}_k m_\alpha([x_{k-1}, x_k]), \quad \overline{D}_\tau(f, \alpha) := \sum_{k=1}^n \overline{a}_k m_\alpha([x_{k-1}, x_k]),$$

где  $\underline{a}_k = \inf_{[x_k, x_{k-1}]} f(x)$ ,  $\overline{a}_k = \sup_{[x_k, x_{k-1}]} f(x)$ ,  $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ . Тогда

$$\underline{D}_\tau(f, \alpha) \leq \overline{D}_\tau(f, \alpha).$$

Осталось доказать равенство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall \tau: d(\tau) < \delta \quad I - \varepsilon \leq R_\tau(f, \xi, \alpha) \leq I + \varepsilon, \quad I = \int_a^b f d\alpha.$$

Тогда суммы Римана будут находиться между суммами Дарбу

$$\forall \varepsilon > 0 \quad I - \varepsilon \leq \underline{D}_\tau(f, \alpha) \leq R_\tau(f, \xi, \alpha) \leq \overline{D}_\tau(f, \alpha) \leq I + \varepsilon$$

**Определение 4.5.**  $f \in AC[a, b]$ , где  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  абсолютно непрерывна, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k) \subset [a, b]: \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Такие функции образуют линейное пространство, где можно ввести норму  $\|f\| := |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt$ , корректность которой мы проверим чуть позже.

**Утверждение 4.4.** Если  $f \in \text{Lip}[a, b]$ , то есть  $\exists C 0: |f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$ , то  $f \in AC[a, b]$ .

**Утверждение 4.5.** Если  $f \in AC[a, b]$ , то  $f \in C \vee [a, b]$ .

**Доказательство.** Берётся разбиение  $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ , такое что  $(x_k - x_{k-1}) = \frac{\delta}{2} = \frac{(b-a)}{n}$ . Тогда вариация

$$\bigvee_a^b ar(f) = RY1n \bigvee_{x_k-1}^{x_k} ar(f) \leq n\varepsilon = \frac{2(b-a)}{\delta} \varepsilon.$$

**Утверждение 4.6.** Если  $f \in AC[a, b]$ , то в разложении Жордана  $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$   $\alpha, \beta \in AC[a, b]$ .

**Доказательство.** Нам нужно доказать, что  $V(x) = \bigvee_a^x ar(f)$  абсолютно непрерывна. Нужно воспользоваться свойством вариации и записать, что

$$\sum_{k=1}^n |V(b_k) - V(a_k)| = \sum_{k=1}^n \bigvee_{a_k}^{b_k} ar(f) \leq \varepsilon.$$

Достаточно заметить, что вариация на отрезке  $[a_k, b_k]$  это точная верхняя грань сумм Дарбу. Нужно вспомнить определение абсолютно непрерывных функций и всё сразу понятно станет.

Ну и последнее свойство.

**Утверждение 4.7.** Если  $f \in AC[a, b]$ , то  $\exists! g \in L[a, b]$  (единственность с точностью до эквивалентности), такая что  $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$ .

**Доказательство.** Разложим  $f$  по формуле Жордана  $f(x) = f(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ ,  $\alpha, \beta \uparrow$ . Затем построим меры Лебега—Стилтьеса  $\mu_\alpha, \mu_\beta$  по функциям  $\alpha, \beta$ . Эти меры будут абсолютно непрерывны  $\mu_\alpha, \mu_\beta \ll \lambda$  ( $\lambda$  — мера Лебега), так как  $\alpha, \beta$  абсолютно непрерывны (у нас было два определения абсолютной непрерывности для разных объектов, тут используются оба).

Отсюда вытекает, что заряд  $\varphi_F \ll \lambda$ . Ну и по теореме Радона—Никодима

$$f(x) - f(a) = \varphi_f([a, x]) = \int_a^x g(t) dt$$

для некоторой функции  $g \in L[a, b]$ . Эта функция будет единственной с точностью до эквивалентности, как и в теореме Радона—Никодима.

**Лемма 4.2.** Пусть  $F \uparrow$  на  $[a, b]$ . Тогда  $\int_a^b F'(t) dt \leq F(b) - F(a)$ . Но если  $F \in \text{Lip}[a, b]$ , то выполняется равенство.

По теореме Лебега производная монотонной функции интегрируема почти всюду. Равенство же может быть и не выполнено, например, если взять функцию Кантора (лесницу Кантора).

**Доказательство.** Давайте мы продолжим нашу функцию за отрезок  $F(x) = F(b)$ ,  $x \in [b, b+1]$ . Функция

останется неубывающе. Ну и возьмём такие функции и применим теорему Лебега

$$F_n(t) = \frac{F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F'(t).$$

Предел есть по теореме Лебега почти всюду на  $[a, b]$ . Теперь применим теорему Фату

$$\int_a^b F'(t) dt \leq \liminf \int_a^b F_n(t) dt = \liminf \left( b \int_b^{b+\frac{1}{n}} F(t) dt - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t) dt \right) \leq F(b) - F(a).$$

Это в силу того, что функция неубывающая.

Осталось вторую часть доказать. Чтобы её доказать, нужно вспомнить определение условия Липшица. Из этого определения вытекает, что производная ограничена почти всюду  $|F'(t)| \leq C$  почти всюду. Ну и тогда вместо леммы Фату можно применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. ■

**Теорема 4.5** (характеристические свойства абсолютно непрерывных функций).  $F \in AC[a, b]$ , если и только если

$$\exists F'(t) \text{ (н. в.) на } [a, b], F' \in L[a, b], F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt \forall x \in [a, b].$$

**Доказательство.** Достаточность вытекает из абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Применяя свойство разложения Жордана, можно считать, что  $F \uparrow$  на  $[a, b]$ . Давайте ещё считать, что  $F(a) = 0$ . Тогда по свойству 4 имеем

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, f \in L[a, b].$$

Поэтому для доказательства необходимости нужно доказать, что  $F'(t) = f(t)$  почти всюду на  $[a, b]$ .

Введём такие функции  $f_n(x) = \min\{f(t), n\}$  — срез функции на уровне  $n$ .  $f$  определена почти всюду, её можно считать неотрицательной. Обозначим  $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ . Запишем разность

$$F(x) - F_n(x) = \int_a^x \underbrace{(f(t) - f_n(t))}_{\geq 0} dt \uparrow.$$

Следовательно  $F'(x) \geq F'_n(x)$  почти всюду на  $[a, b]$ . Производная существует почти всюду по теореме Лебега. Давайте запишем ещё следующее равенство по лемме, используя, что  $F_n(x) \in \text{Lip}[a, b]$ .

$$F_n(x) = \int_a^x F'_n(t) dt = \int_a^x f_n(t) dt,$$

$F'_n(t) = f_n(t)$  почти всюду на  $[a, b]$ .

$$F'(x) \geq F'_n(x) = f_n(x) \text{ п. в.}$$

переходя к пределу, получаем  $F'(x) \geq f(x)$  почти всюду на  $[a, b]$ . Тогда

$$\int_a^b (F'(t) - f(t)) dt \geq 0.$$

А по лемме этот же интеграл будет оцениваться нулём и в другую сторону

$$\int_a^b F'(t) dt \leq F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt \leq 0.$$

Значит, интеграл равен нулю. А поскольку функция неотрицательна, то она равна нулю почти всюду и  $F'(t) = f(t)$  почти всюду. ■

## 5 Теорема Фубини

Сначала мы докажем предварительную теорему, а потом уже теорему Фубини. Рассмотрим  $S_k$  — полукольцо в  $X_k$ , где  $k = 1, \dots, n$ . И рассмотрим прямое произведение этих полуколец  $S := S_1 \times \dots \times S_n = \{A = A_1 \times \dots \times A_n \mid A_k \in S_k, k = 1, \dots, n\}$ . Мы сейчас докажем, что это тоже полукольцо. Пусть у нас ещё заданы меры на каждом полукольце  $m_k: S_k \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Тогда можно ввести понятие прямого<sup>1</sup> произведения мер  $m = m_1 \times \dots \times m_n$ , где  $m(A) := m_1(A_1) \dots m_n(A_n)$ , если  $A = A_1 \times \dots \times A_n$ .

**Теорема 5.1.** Если  $m_k: S_k \rightarrow \mathbb{R}_+$  есть  $\sigma$ -аддитивные меры на полукольцах  $S_k$  при  $k = 1, \dots, n$ , то  $S = S_1 \times \dots \times S_n$  является полукольцом и  $m = m_1 \times \dots \times m_n$  является  $\sigma$ -аддитивной мерой.

**Доказательство.** Приведём доказательство для  $n = 2$ , далее по индукции. Пусть  $S = S_1 \times S_2$  — полукольцо. Берём два множества

$$A = A_1 \times A_2, \quad B = B_1 \times B_2 \in S, \quad A_1, B_1 \in S_1, \quad A_2, B_2 \in S_2.$$

Легко проверяется, что

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2).$$

Можно нарисовать картинку в виде двух прямоугольников.

Теперь разность представляется в виде трёх слагаемых

$$A \setminus B = ((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2)) \sqcup ((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \cap B_2)) \sqcup ((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)).$$

Это тоже можно показать, нарисовав картинку из двух прямоугольников. Таким образом,  $S$  — полукольцо.

Осталось показать, что произведение мер является  $\sigma$ -аддитивной мерой. Пусть множество  $A$  представляется в виде

$$A = \bigsqcup_{l=1}^m B^{(l)}, \quad A = A_1 \times A_2, \quad B^{(l)} = B_1^{(l)} \times B_2^{(l)}.$$

Давайте запишем такую функцию

$$f_l(x_1) := m_2(B_2^{(l)}) \cdot \chi_{B_1^{(l)}}(x_1), \quad x_1 \in A_1.$$

Из этого определения вытекает, что  $A_2 = \bigcup_{l=1}^m B_2^{(l)}$ , но не обязательно дизъюнктное. Отсюда вытекает такое равенство

$$m_2(A_2) = \sum_{l=1}^m f_l(x_1), \quad x_1 \in A_1.$$

Пусть  $\mu_1$  — продолжение меры  $m_1$ . Мы сейчас будем писать интеграл и подставлять определение нашей функции.

$$m(A) := m_1(A_1) \cdot m_2(A_2) = \int_{A_1} m_2(A_2) d\mu_1 = \sum_{l=1}^m \int_{A_1} f_l(x_1) d\mu_1 = \sum_{l=1}^m m_1(B_1^{(l)}) \cdot m_2(B_2^{(l)}).$$

Для  $m = \infty$  нужно лишь применить теорему о монотонной сходимости. Выкладка та же самая. ■

**Определение 5.1.** Пусть у нас заданы измеримые пространства  $(X_k, \Sigma_k, \mu_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Тогда мы можем построить

$$X = X_1 \times \dots \times X_n, \quad S = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n, \quad m = \mu_1 \times \dots \times \mu_n.$$

Если построить внешнюю меру и ограничить на  $\Sigma$ , то  $m^*|_{\Sigma} = \mu$  и тройка  $(X, \Sigma, \mu)$  называется произведением измеримых пространств.

Это произведение обладает свойством ассоциативности. Будем обозначать это произведение не как прямое, а как тензорное

$$\mu := \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n.$$

Свойство ассоциативности тогда записывается так

$$(\mu \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3).$$

Свойство ассоциативности вытекает из ассоциативности прямого произведения. Мы для простоты изложения далее будем рассматривать случай  $n = 2$ .

Пусть  $(X, \Sigma_X, \mu_X)$  и  $(Y, \Sigma_Y, \mu_Y)$  — измеримые пространства. Тогда для  $Z = X \times Y$ ,  $\mu = \mu_X \otimes \mu_Y$ ,  $E \in \Sigma$  обозначим сечения

$$E_X = \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}, \quad E_Y = \{x \in X \mid (x, y) \in E\}.$$

<sup>1</sup> Будет ещё другое произведение мер, поэтому слово прямое не будем опускать.

Сечение объединений будет объединением сечений, относительно пересечения и разности так же. То же самое можем сделать для функций

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_x(y) = f(x, y), \quad f_y(x) = f(x, y).$$

**Теорема 5.2.** Если  $E \in \Sigma$   $\sigma$ -конечной меры, то

$$\mu(E) = \int_X \mu_y(E_x) d\mu_x = \int_Y \mu_x(E_y) d\mu_y.$$

Вообще говоря, не все сечения будут измеримы, функция будет определена почти всюду. Где функция неопределена, положим её равной нулю, это не повлияет на значение интеграла.

**Доказательство.** Доказательство будет проходить в несколько шагов.

1.  $E = A \times B$ ,  $A \in \Sigma_x$ ,  $B \in \Sigma_y$ . Тогда

$$\mu(E) = \mu_x(A) \cdot \mu_y(B) = \int_A \mu_y(B) d\mu_x = \int_A \mu_x(A) d\mu_x.$$

Это равенства симметричны, мы будем доказывать только одно из них.

$$\forall E \in \mathcal{R}(S), \quad S = \Sigma_x \times \Sigma_y.$$

2.  $\mu(E) < \infty$ . Построим измеримую оболочку  $A$  множества  $E$  (была лемма об измеримой оболочке).

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad E \subset A_k, \quad A_k = \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{kl}, \quad A_{kl} \in S, \mu(A_k \setminus E) < \frac{1}{k}.$$

Из этого вытекает, что  $\mu(A \setminus E) = 0$ . Введём теперь следующие множества

$$B_n := \bigcap_{k=1}^n A_k, \quad D_{nm} := \bigcap_{k=1}^n \bigcup_{l=1}^m A_{kl} \in S.$$

Так как оба  $\in S$ , для них уже теорема доказана. Кроме того,  $B_n \searrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ , а  $D_{mn} \nearrow B_n$  при  $m \rightarrow \infty$ . Теперь осталось применить свойства непрерывности меры снизу и сверху. А так как для множеств из полукольца теорема доказана, то и для наших множеств будет доказана. Ну и  $\mu(A \setminus E) = 0$ . Значит, надо доказать ещё для множеств меры нуль.

Пусть  $B = E \setminus A$ ,  $\mu(B) = 0$ . Берём точно так же измеримую оболочку  $C$  этого множества  $C \supset B$ . Для этой измеримой оболочки мы уже доказали теорему. Имеем интеграл

$$\int_X \mu_y(C_x) d\mu_x = \mu(C) = \mu(B) = 0.$$

Так как  $C \supset B$ , то и  $C_x \supset B_x$ . И таким образом, мы доказали теорему полностью для множества конечной меры.

Если множества  $\sigma$ -конечной меры, мы представляем их в виде счётного объединения конечной меры. ■

Теперь то, что оставалось без доказательства: про функцию распределения. Это как пример применения этой теоремы. Пусть  $(X, \Sigma, \mu)$  — измеримое пространство. На множестве  $E \in \Sigma$  задана неотрицательная измеримая функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Рассмотрим множество-подграфик

$$G = \{(x, t) | 0 \leq t \leq f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}_+.$$

Позже мы докажем, что подграфик измеримой функции есть измеримое множество. А сейчас запишем его меру, как интегралы по сечениям

$$\mu(G) = \int_E f d\mu = \int_0^{\infty} \mu(G_t) dt = \int_0^{\infty} \lambda_f(t) dt,$$

где  $G_t$  — функция распределения, а  $\lambda_f(t) = \mu(G_t)$ .



**Лемма 5.1.** Пусть  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измерима. Тогда её подграфик  $G = \{(t, x) | 0 \leq t \leq f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}_+$  является измеримым относительно произведения мер  $\mu \times dt$ .

**Доказательство.** Давайте введём множества  $H_k^n = E \left( \frac{k-1}{2^n}, f, \frac{k}{2^n} \right)$  (множество точек  $x$ , для которых выполняется неравенство) и функции  $h_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \chi_{H_k^n}(x) > f(x)$ . Была у нас лемма о том, что  $h_n \searrow f$ .

У функции  $h_n$  подграфик измерим, а подграфик функции  $f$  будет пересечением этих подграфиков. А пересечения измеримых измеримы. ■

Работаем в тех же обозначениях для произведения измеримых пространств.

**Теорема 5.3** (Фубини). Если  $E \in \Sigma$   $\sigma$ -конечной меры и  $f \in L(E, \mu)$ , то

$$\int_E f d\mu = \int_X \int_{E_x} f_x d\mu_y d\mu_x = \int_Y \int_{E_y} f_y d\mu_x d\mu_y.$$

То есть интеграл по произведению мер равен повторному интегралу.

**Доказательство.** Представим  $f$  в виде разности неотрицательных функций  $f = f_+ - f_-$ , где  $f_{\pm} \geq 0$ . Это даёт нам право без ограничения общности считать, что  $f \geq 0$ . Обозначим  $\lambda = \mu \otimes dt = \mu_x \otimes \mu_y \otimes dt$  в силу ассоциативности. Ещё обозначим  $\nu = \mu_y \otimes dt$ . Тогда  $\lambda = \mu_x \otimes \nu$ . Мера задана на множестве  $X \times Y \times \mathbb{R}_+$ .

Рассмотрим подграфик  $G = \{(x, y, t) | 0 \leq t \leq f(x, y)\} \subset X \times Y \times \mathbb{R}_+$ . Мы доказали, что  $G$  измеримо относительно меры  $\lambda$ .

Теперь давайте вычислять меру этого множества разными способами. Первый способ: фиксируем  $(x, y)$

$$\lambda(G) = \int_E f d\mu.$$

С другой стороны можем фиксировать переменную  $x$ . Тогда будет подграфик сечения функции

$$\lambda(G) = \text{TE}f = \int_X \nu(G_x) d\mu_X.$$

Но сам этот подграфик мы тоже можем вычислить с помощью сечений.

$$\lambda(G) = \text{TE}f = \int_X \nu(G_x) d\mu_X = \int_X \left( \int_{E_x} f_x d\mu_y \right) d\mu_x.$$

А второе равенство доказывается симметрично. ■

А теперь рассмотрим меру Лебега на  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим  $n$  экземпляров измеримых пространств  $(\mathbb{R}, \Sigma_k, \mu_k)$  Лебега в  $\mathbb{R}$ ,  $k = 1 \dots, n$ . Тогда можем рассмотреть измеримое пространство в  $\mathbb{R}^n$

$$(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu), \quad \mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n.$$

Можно было по-другому определять, а именно сразу рассмотреть полукольцо. Но у нас была теорема единственности меры, значит, мы бы получили то же самое.

Пусть  $\Delta = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  —  $n$ -мерный отрезок. Будем обозначать  $R(\Delta)$  — множество функций, измеримых по Риману, а  $L(\Delta)$  — множество функций, интегрируемых по Лебегу на этом отрезке. Будем рассматривать только ограниченные функции  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ . Для заданной функции определим функции Бэра

$$\underline{f}(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \inf_{x \in \Delta \cap S_r(x)} f(x), \quad \bar{f}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \Delta \cap S_r(x)} f(x).$$

Эти функции измеримы, поскольку множества  $\Delta(\underline{f} > c)$  и  $\Delta(\bar{f} < c)$  тех точек отрезка, для которых  $\underline{f} > c$  и множество, где  $\bar{f} < c$  открыты для любого  $c \in \mathbb{R}$ .

Нижняя функция будет совпадать с верхней в точке  $x$ , если и только если функция непрерывна в  $x$ .

**Теорема 5.4** (Лебега о сравнении интегралов Римана и Лебега для  $n$ -мерного отрезка). Пусть функция  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена. Тогда  $f \in R(\Delta) \Leftrightarrow \mu(E_1) = 0$ , где

$$E_f = \{x \in \Delta | \underline{f}(x) \neq \bar{f}(x)\}.$$

$$\text{Если } f \in R(\Delta), \text{ то } f \in L(\Delta) \text{ и } \int_{\Delta} f(x) dx = \int_{\Delta} f d\mu.$$

**Доказательство.** Сначала напомним одно из необходимых и достаточных условий интегрируемости. Когда нижний интеграл Дарбу совпадает с верхним. Мы устраиваем разбиение  $\tau = \{\Delta_l\}_{l=1}^n$  отрезка  $\Delta$ , внутренности

элементов которого не пересекаются, то есть  $\mathring{\Delta}_l \cap \mathring{\Delta}_{l'} = \emptyset$  при  $l \neq l'$ , а  $\Delta = \bigcup_{l=1}^m \Delta_l$ .

$$\underline{D}_\tau(f) = \sum_{l=1}^m a_l \mu(\Delta_l), \quad \underline{a}_l = \inf_{\Delta_l} f(x), \quad \overline{D}_\tau(f) = \sum_{l=1}^m \bar{a}_l \mu(\Delta_l), \quad \bar{a}_l = \sup_{\Delta_l} f(x).$$

Условие выглядит так

$$\int_{\Delta} f(x) dx = \sup_{\tau} \underline{D}_\tau(f) = \inf_{\tau} \overline{D}_\tau(f) = \int_{\Delta} f(x) dx.$$

Пусть  $\tau_k = \{\Delta^{(k)}_l\}_{l=1}^{m_k}$  — последовательность разбиений, удовлетворяющая условиям

1. Диаметр  $f(\tau_k) \rightarrow 0$ ;
2.  $\tau_k \supset \tau_{k+1}$ ;
3.  $\int_{\Delta} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{D}_{\tau_k}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^{(k)} \mu(\Delta_l^{(k)})$ .

Функции  $h_k(x) = \sum_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^{(k)} \chi_{\Delta_l^{(k)}}(x) \nearrow \underline{f}(x)$ ,  $\forall x \in \mathring{\Delta}_l^{(k)}$ ,  $\forall k, l$ . Значит, сходится почти всюду и по одной из теорем имеем

$$\int_{\Delta} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^{(k)} \mu(\Delta_l^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta} h_k d\mu = \int_{\Delta} \underline{f} d\mu.$$

Отсюда мы получаем равенства

$$\int_{\Delta} f(x) dx = \int_{\Delta} \underline{f} d\mu, \quad \int_{\Delta} f(x) dx = \int_{\Delta} \bar{f} d\mu.$$

Мы можем их объединить

$$\int_{\Delta} \underbrace{(\bar{f} - \underline{f})}_{\geq 0} d\mu, \quad \underline{f}(x) \leq f(x) \leq \bar{f}(x).$$

Откуда мы получаем, что  $\underline{f}(x) - \bar{f}(x) = 0$  почти всюду на  $\Delta$ ,  $\underline{f}(x) = f(x) = \bar{f}(x)$  почти всюду на  $\Delta$ . И

$$\int_{\Delta} f(x) dx = \int_{\Delta} f d\mu.$$

■

Сейчас мы построим функцию, которая не интегрируема по Лебегу. То есть никакая ей эквивалентная не интегрируема по Риману. Берём отрезок  $[0, 1]$ , набор  $\{r_n\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  и число  $0 < \varepsilon < 1$ . Положим

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \varepsilon_n, r_n + \varepsilon_n), \quad \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Легко сверху оценить меру  $\mu(A_\varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\varepsilon_n = \varepsilon$ . Мера будет маленькой, но положительной. Положим

$$B_\varepsilon = [0, 1] \setminus A_\varepsilon.$$

Это замкнутое множество, которое состоит только из иррациональных чисел. Оно нигде не плотно. Ну и мера этого множества  $\mu(B_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ . Теперь достаточно взять функцию

$$f(x) = \chi_{B_\varepsilon}(x).$$

И сама функция не интегрируема по Риману, и её нельзя изменить на множестве меры нуль так, чтобы она стала интегрируемой по Риману.