1 Мера множеств

Пусть X — множество. Тогда 2^X — совокупность всех его подмножеств, а $S \subset 2^X$ называется системой множеств.

Положим по определению $E = \bigcup A \in SA$. Это называется единицей системы S.

Определение 1.1. *Система S называется кольцом, если $\forall\ A, B \in S \quad A \cup B, A \setminus B \in S$, то есть кольцо замкнуто относительно конечного числа объединений и разностей. Если кольцо $S \supset E$, оно называется алгеброй.*

Пусть $S \subset 2^X$. Тогда $\mathcal{R}(S)$ — наименьшее кольцо, содержащее систему S, а $\mathcal{A}(S)$ — наименьшая алгебра, содержащая S, то есть $\mathcal{R}(S)$ пересечение всех колец, содержащих S, $\mathcal{A}(S)$ — пересечение всех алгебр, содержащих S.

Утверждение 1.1. *S — кольцо, если и только если $\forall\ A, B \in S \quad A \cap B \in S$ и $A \triangle B \in S$.*

Доказательство. Это доказывается с помощью таких равенств

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B); \quad A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A); \quad A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B); \quad A \setminus B = A \triangle (A \cap B).$$

■

Определение 1.2. *Кольцо (алгебра) S называется σ-кольцом (-алгеброй), если*

$$\forall\ A_n \in S \quad \bigcup_{1=n}^{\infty} A_n \in S.$$

Определение 1.3. *Кольцао (алгебра) S называется δ-кольцом (-алгеброй), если*

$$\forall\ A_n \in S \quad \bigcap_{1=n}^{\infty} A_n \in S.$$

Утверждение 1.2. *Условия для σ и δ алгебры совпадают.*

Доказательство. Запишем формулы двойственности.

$$E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E \setminus A_n), \quad E \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus A_n).$$

Утверждение, очевидно, доказано. ■

$\mathcal{R}_\sigma(S)$ — это наименьшее σ-кольцо, содержащее S, $\mathcal{A}_\sigma(S)$ — это наименьшая σ-алгебра, содержащая S.

Определение 1.4. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, τ — топология. Тогда $\mathcal{A}_\sigma(\tau) =: \mathcal{B}(X)$ называется борелевской σ-алгеброй метрического пространства X.*

Определение 1.5. *S называется полукольцом, если $\forall\ A, B \in S \quad A \cap B \in S$ и $A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i$, где $C_i \in S$.*

Утверждение 1.3. *Если S — полукольцо, то $\forall A, B_i \in S \quad A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{j=1}^{n} C_j$, где $C_j \in S$.*

Доказательство. По индукции. Для $n = 1$ верно. Пусть верно для n, докажем для $n + 1$.

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i = A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i \setminus B_{n+1},$$

что есть $\bigsqcup_{j=1}^{m} (C_j \setminus B_{n+1}) = \bigsqcup_{j=1}^{m} \bigsqcup_{i=1}^{n} C_{ij}$, где $C_{ij} \in S$, что и требовалось доказать. ■

Лемма 1.1. *Пусть S — полукольцо. Тогда $A \in \mathcal{R}(S)$ если и только если $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \in S$.*

Доказательство. Положим $R = \{A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \mid n \in \mathbb{N},\ A_i \in S\}$. Отметим, что $R \subset \mathcal{R}(S)$. Покажем, что R — кольцо.

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j, \quad A_i, B_j \in S.$$

$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} (A_i \setminus B)$. В силу доказанного выше утверждения это является $\bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m} C_{ij} C_{ij}$, где $C_{ij} \in S$. Следовательно, $A \setminus B \in R$.

$A \cup B = A \setminus B \sqcup B \in R$. Следовательно R — кольцо. И, следовательно, $R = \mathcal{R}(S)$. ■

Пусть X — множество. Опять же $S \subset 2^X$. И функция $\varphi\colon S \to \mathbb{F}$, где $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Определение 1.6. *Функция φ называется аддитивной, если $\varphi(A \sqcup B) = \varphi(A) + \varphi(B) \quad \forall\ A, B, A \sqcup B \in S$. φ называется конечно аддитивной, если $\varphi\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(A_i) \quad A_i, \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in S \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.*

Определение 1.7. *φ называется σ-аддитивной, если $\varphi\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i) \quad A_i, \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.*

Так как $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty}$ не зависит от порядка множеств, то ряд сходится абсолютно.

Определение 1.8. *Функция $m\colon S \to \mathbb{R}_+$ называется конечно-аддитивной мерой (σ-аддитивной мерой), если*

1. *S — это полукольцо;*
2. *m конечно (или σ-) аддитивна.*

Определение 1.9. *Мера $m_1\colon S_1 \colon R_+$ называется называется продолжением меры $m\colon S \to \mathbb{R}_+$, если $S \subset S_1$ и ограничение $m_1\big|_{S_1} = m$.*

Теорема 1.1. *Для любой меры $m\colon S \to \mathbb{R}_+ \quad \exists!\ m_1\colon S_1 \to \mathbb{R}_+$ продолжение, где $S_1 \in \mathcal{R}(S)$.*

Доказательство. Определим $m_1(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$, где $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in S$. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j$. Тогда одновременно выполнится $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)$ и $m_1(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} m(A_i \cap B_j)$ не зависит от разложения A.

Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in \mathcal{R}(S)$. В свою очередь $A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_i} A_{ij}$, где $A_{ij} \in S$. Соответственно,

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m_i} A_{ij}, \quad m_1(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} m(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} m_1(A_i).$$

Таким образом доказана конечная аддитивность. Устремив $n \to \infty$ в предыдущих рассуждениях, докажем σ-аддитивность. ■

1.1 Свойства σ-аддитивной меры

Пусть $m\colon S \to \mathbb{R}_+$ — σ-аддитивная мера. Тогда

Утверждение 1.4. $m(\varnothing) = m(\varnothing \sqcup \varnothing) = 2m(\varnothing) \Rightarrow m(\varnothing) = 0$.

Утверждение 1.5 (монотонность). *Если $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$, причём $A_i, A \in S$, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leqslant m(A)$.*

Доказательство. Возьмём фиксированное $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A$ и $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \sqcup \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j$, $A_i, B_j \in S$. Тогда

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \sum_{j=1}^{n} m(B_j) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i).$$

Устремим $n \to \infty$ и получим требуемое. ■

Утверждение 1.6 (полуаддитивность). *Пусть $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A, A_i, \bigcup\limits_{1=i}^{\infty} A_i =: B \in S$. Тогда $m(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.*

Доказательство. Берём $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i\right)$, где $k = 2, 3, \ldots$ $B_k \in \mathcal{R}(S)$. Считаем, что m определена для B_k, как продолжение меры. $B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ и $m(B) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Так как $A \subset B$, $m(A) \leqslant m(B) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.
■

Утверждение 1.7 (непрерывность снизу). *Если $A_i \uparrow A$, $A, A_i \in S$, то $\lim\limits_{i \to \to} \infty m(A_i) = m(A)$.*

Доказательство. Что значит стрелочка вверх: $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A$. Пусть $A_0 = \varnothing$, $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$. Тогда

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i, \quad B_i \in \mathcal{R}(S).$$

Считаем меру m продолженной на $\mathcal{R}(S)$. Тогда $m(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(B_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i-1}) = \lim\limits_{i \to \infty} m(A_i)$. ■

Сформулируем обратное утверждение.

Утверждение 1.8. *Если конечно аддитивная мера непрерывна снизу, то она σ-аддитивна.*

Доказательство. Путьс $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i, A \in S$. Положим, $B_n = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Тогда $B_n \uparrow A$ и $m(A) = \lim\limits_{n\to\infty} m(B_n) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$. ■

Утверждение 1.9 (непрерывность сверху). *Если $A_i \downarrow A$, $A_i, A \in S$, то $\lim\limits_{i\to\to} \infty m(A_i) = m(A)$.*

Доказательство. $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A$. Обозначим $B = A_1 \setminus A$, $B_i := A_1 \setminus A_i$, $i = 1, 2, \dots$ Тогда $B_i \uparrow B$ и $m(B) = \lim\limits_{i\to\infty} m(B_i)$. $m(A_i) - m(A) = m(A_i) - \lim\limits_{i\to\infty} m(A_i)$, следовательно, $m(A) = \lim\limits_{i\to\infty} m(A_i)$. ■

Утверждение 1.10. *Если конечно аддитивная мера непрерывна сверху, то она σ-аддитивна.*

Доказательство. $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A, A_i \in S$, $B_n = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $B_n \downarrow \varnothing$. $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = 0$. Тогда

$$m(A) - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(A_i) = 0.$$

Что и требовалось доказать. ■

Определение 1.10. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, S — полукольцо в X. Мера $m\colon S \to \mathbb{R}_+$ называется регулярной, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, A \in S \quad \exists\, B, C \in S\colon \overline{B} \text{ компактно},\ \overline{B} \subset A \subset C^0, m(C \setminus B) < \varepsilon.$$

Теорема 1.2. *Каждая регулярная мера $m\colon S \to \mathbb{R}_+$ является σ-аддитивной.*

Доказательство. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i, A \in S$. $m(A) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$. Существуют $B, C, B_i, C_i \in S\colon \overline{B}, \overline{B}_i$ — компакты, $\overline{B} \subset A \subset C^0, \overline{B}_i \subset A_i \subset C_i^0$ и $m(C \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2}$, $m(C_i \setminus B_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$.

$\overline{B} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i^0$. Из компактности следует, что $\overline{B} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i^0$. Следовательно, $m(B) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m(C_i)$.

$$m(A) \leqslant m(C) \leqslant m(B) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(C_i) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(B_i) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) + \varepsilon.$$

Так как ε — произвольная постоянная, получаем требуемое. ■

1.2 Мера Стилтьеса в $\mathbb{R}$

Пусть $S = \{[a, b) \,|\, a, b \in \mathbb{R},\ a \leqslant b\}$. Это полукольцо. Пусть $\alpha(x)$ — неубывающая функция на $\mathbb{R}$.

Определение 1.11. $m_\alpha\big([a, b)\big) = \alpha(b) - \alpha(a)$. *$\alpha$ называется функцией распределения, а m_α — конечно-аддитивная мера.*

Теорема 1.3. *Мера m_α является σ-аддитивной, если и только если $\alpha(x)$ непрерывна слева.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_n \uparrow x$. Тогда полуинтервал $[x_n, x) \downarrow \varnothing$. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} m_\alpha\big([x_n, x)\big) = 0$. Следовательно, $\alpha(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha(x_n)$, то есть α непрерывна слева.

Достаточноть. Пусть $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \alpha(x - 0) = \alpha(x)$. Полуинтервал $[a, b - \delta) \subset [a, b) \subset (a - \delta, b) \quad \forall\, \delta > 0$.

$$m_\alpha\big([a - \delta, b) \setminus [a, b - \delta)\big) = m_\alpha\big([a - \delta, a)\big) + m_\alpha\big([b - \delta, b)\big) = \alpha(a) - \alpha(a - \delta) + \alpha(b) - \alpha(b - \delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Мера Стилтьеса регулярна, следовательно, σ-аддитивна. ■

2 Измеримые множества

Далее мы через $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \sqcup \{\infty\}$ будем обозначать множество неотрицательных чисел и добавленный символ бесконечности, при этом будут выполнены следующие аксиомы: $\forall\, a \in \mathbb{R}_+ \quad a + \infty = \infty$, $a \cdot \infty = \infty$ $(a \neq 0)$, $0 \cdot \infty = 0$ и $a < \infty$, $\infty \leqslant \infty$.

Какая-то из этих аксиом понадобится, только когда будем рассматривать интеграл Лебега.

Определение 2.1. *$\mu\colon 2^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется внешней мерой, если*

(1) Мера пустого множества равна нулю $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) $\mu A \leqslant \mu B$, если $A \subset B$,

(3) $\mu A \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, если $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$.

Определение 2.2. *Множество $E \subset X$ называется измеримым (относительно внешней меры μ), если*

$$\mu A = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall\ A \subset X.$$

В силу свойства 3 полуаддитивности внешней меры, достаточно доказывать только неравенство

$$\mu A \geqslant \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall\ A \subset X,$$

чтобы показать измеримость множества.

Давайте введём ещё одно обозначение $AB := A \cap B$, $A' := X \setminus A$, $\mu_A(B) := \mu(AB)$.

Тогда легко понять, что E измеримо, если и только если $\forall\ A \subset X \quad \mu_A(X) = \mu_A(E) + \mu_A(E')$.

Давайте ещё через Σ будем обозначать совокупность всех измеримых множеств относительно внешней меры μ.

2.1 Некоторые свойства измеримых множеств

Утверждение 2.1. *Если $\mu E = 0$, то $E \in \Sigma$.*
Доказательство. Это вытекает из того, что $\mu_A(E) = 0$ из монотонности меры $\forall\ A$, и тоже в силу монотонности $\mu_A(X) \geqslant \mu_A(E) + \mu_A(E')$. А мы уже знаем, что этого неравенства достаточно. ∎
Утверждение 2.2. *Если $E_1, E_2 \in \Sigma$, то $E = E_1E_2 \in \Sigma$.*
Доказательство. Для доказательства запишем следующие равенства:

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1')$$

в силу измеримости E_1. А в силу измеримости E_2 можем записать такое неравенство

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1') = \mu_{AE_1}(E_2) + \mu_{AE_2}(E_2') + \mu_A(E_1') = \mu_A(E) + \underbrace{\mu_A(E_1E')}_{E_2' \subset E'} + \underbrace{\mu_A(E_1'E')}_{E_1' \subset E'} = \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

∎

Утверждение 2.3. *Если $E \in \Sigma$, то $E' \in \Sigma$.*
Доказательство. Это вытекает из того, что второе дополнение $E'' = E$ есть само множество. И отсюда $\mu_A(X) = \mu_A(E') + \mu_A(E'')$. ∎
Утверждение 2.4. *Если $E_1, E_2 \in \Sigma$, то и разность $E_1 \setminus E_2$, $E_1 \cup E_2 \in \Sigma$.*
Доказательство. Это вытекает из таких простых равенств: $E_1 \setminus E_2 = E_1E_2'$, $E_1 \cup E_2 = (E_1'E_2')'$. ∎

Таким образом система измеримых множест является алгеброй. Очевидно же из определения вытекает, что $\varnothing, X \in \Sigma$.
Утверждение 2.5. *Функция $\mu_A \colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ является конечно аддитивной мерой на алгебре*[1]
Доказательство. Пусть $E = E_1 \sqcup E_2, E_1, E_2 \in \Sigma$. Тогда в силу измеримости

$$\mu_A(E) = \mu_{AE}(E_1) + \mu_{AE}(E_1') = \mu_A(\underbrace{EE_1}_{E_1}) + \mu_A(\underbrace{EE_1'}_{E_2}) = \mu_A(E) + \mu_A(E_2)$$

∎

Ну и основная теорема.
Теорема 2.1 (Каратеодори). *Пусть $\mu \colon 2^X \to \overline{R}_+$ внешняя мера. Тогда*

(1) $\Sigma - \sigma$-алгебра;

(2) $\mu \colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+ - \sigma$-аддитивная мера.

Доказательство. Пусть $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \in \Sigma$. Обозначим $F_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, $F_n \in \Sigma$.

Для любого $A \subset X$

$$\mu_A(X) = \mu_A(F_n) + \mu_A(F_n') \geqslant \sum_{k=1}^{N} \mu_A(E_k) + \mu_A(E').$$

Устремляем $n \to \infty$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E') \geqslant \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

Получаем $\mu(E) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$, $E \in \Sigma$, $\mu_A(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E')$. ∎

[1] Потом мы докажем и σ-аддитивность.

Пусть $m\colon S\to\mathbb{R}_+$, $S\subset 2^X$ — полукольцо, и мера m σ-аддитивна. Будем также полагать, что она σ-конечна, то есть X представимо в виде

$$X=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}A_n,\quad A_n\in S.$$

У нас мера конечно, поэтому этого будет достаточно.
Определение 2.3. *Мера заданная на совокупности всех подмножеств $m^*\colon 2^X\to\overline{\mathbb{R}}_+$ называется внешней мерой Лебега, если*

$$m^*(A)=\inf_{A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n}\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n).$$

Инфинум по всем счётным покрытиям.

Сейчас мы докажем, что внешняя мера Лебега является внешней мерой.
Доказательство. Обозначение (X,Σ,ν) — измеримое пространство где Σ — σ-алгебра измеримых множеств $\mu=m^*$, $\nu:=\mu\big|_{\Sigma}$.

(1) $m^*(\varnothing)=0$ очевидно;

(2) $m^*(A)\leqslant m^*(B)$, если $A\subset B$ тоже;

(3) $M^*(A)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}m^*(A_n)$, если $A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_n$.

Докажем третье: если $\exists\ n\colon m^*(A_n)=\infty$, то утверждение верно.
Пусть $\forall\ n\in\mathbb{N}\ \ m^*(A_n)<\infty$.

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ B_{nk}\in S\colon A_n\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{nk}\ \text{и}\ \sum_{k=1}^{\infty}(B_{nk})<m^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Отсюда вытекает, что A содержится в двойном объединении

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{nk},\quad m^*(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}m(B_{nk})\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(A_n)+\varepsilon.$$

■

Ещё одно свойство запишем и сделаем перерыв.
Утверждение 2.6. *Если $A\in S$, то $m^*(A)=m(A)$*
Доказательство. Это вытекает из такого неравенства:

$$m^*(A)\leqslant m(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n),$$

если $A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, $A_n\in S$. ■

Теорема 2.2 (о продолжении меры). *Пусть $m\colon S\to\mathbb{R}_+$ — σ-аддитивная мера. Тогда*

(1) Внешняя мера $\mu:=m^*\colon\Sigma\to\overline{\mathbb{R}}_+$ σ-аддитивная;

(2) Σ является σ-алгеброй;

(3) $S\subset\Sigma$;

(4) $\mu\big|_S=m$.

Доказательство. Всё, кроме свойства три, доказано в теореме Коритоадори. Докажем 3. Пусть у нас $E\in S$, $A\subset X$ — произвольно множество, $\varepsilon>0$. Тогда

$$\exists\ B_n\in S\colon A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\ \text{и}\ \sum_{n=1}^{\infty}m(B_n)<\mu^*(A)+\varepsilon.$$

Ну теперь применим свойство полуаддитивности и запишем следующее равенство (воспользуемся полуаддитивностью внешней меры)

$$m^*(A)\leqslant m^*(A\cap E)+m^*(A\setminus E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\big(\underbrace{m(B_n\cap E)+m(B_n\setminus E)}_{m(B_n)}\big)=\sum_{n=1}^{\infty}\leqslant m^*(A)+\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, тут везде знаки равенства и $E \in \Sigma$. ■

Следствие 2.1. *Полукольцо содержится в наименьшем кольце, которое содержится в наименьшем σ-кольце, которое содержится в наименьшей σ-алгебре, содержащейся в Σ, то есть*

$$S \subset \mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}_\sigma(S) \subset \mathcal{A}_\sigma(S) \subset \Sigma.$$

Теорема 2.3 (о единственности продолжения меры)**.** *Пусть $m\colon S \to \mathbb{R}_+$ σ-аддитивная и σ-конечная мера. Тогда $\exists!$ σ-аддитивная мера, которая продолжает меру m на σ-алгебру.*

Доказательство. Докажем для случая $\mu(X) < \infty$ (иначе разобьём множество на измеримые). Пусть имеются два продолжения $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\mu\colon \Sigma\overline{\mathbb{R}}_+$, где $\mu = m^*$. Тогда $\forall\ E \in \Sigma\ \ \nu E \leqslant \mu(E)$, ведь на S $\mu\big|_S = \nu\big|_S = m$. Осталось заметить, что в силу аддитивности этмх мер

$$\nu(E) + \nu(E') = m(X) = \mu(E) + \mu(E').$$

Отсюда видим, что $\nu(E) = \mu(E)$. ■

Лемма 2.1 (об измеримой оболочке)**.** *Пусть $\mu = m^*$ — внешняя мера Лебега. Тогда $\forall\ A \subset X\ \ \exists\ B \in \Sigma\colon A \subset B$ и $\mu(A) = \mu(B)$.*

Доказательство. $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ \exists\ B_{nk} \in S\colon A \subset B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ и $\mu(B_n) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_{nk}) < \mu(A) + \frac{1}{n}$ по определению нижней грани, которая присутствует в определении внешней меры Лебега.

Обозначим $B := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \Sigma$, $A \subset B$. Имеем

$$\mu(B) \leqslant \mu(B_n) \leqslant \mu(A) + \frac{1}{n}.$$

Ну и поскольку n произвольно, то получается равенство. ■

Определение 2.4. *Пусть $\mu = m^*$ и $\mu(X) < \infty$. Множество $E \subset X$ называется измеримым по Лебегу, если $\mu(X) = \mu(E) + \mu(E')$.*

Ясно, что если множество измеримо, то оно измеримо по Лебегу. Докажем обратное.

Доказательство. Пусть E измеримо по Лебегу. Тогда существует по лемме об измеримой оболочке

$$\exists\ A, B \in \Sigma\colon E \subset A,\ E' \subset B,\ \mu(E) = \mu(A),\ \mu(A') = \mu(B).$$

Отсюда вытекает, что $A \cup B = X$ и $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cup B)$ в силу аддитивности (ну надо на картинку посмотреть, ведь множества A и B измеримы). Это всё равно

$$\mu(A \cap B) = \mu(E) + \mu(E') - \mu(X) = 0.$$

Ну а множество меры нуль измеримо, то есть $A \cap B \in \Sigma$. Так как $A \setminus E \subset A \cap B$, $\mu(A \setminus E) = 0$ и разность тоже измерима. Пожтому множество E можно записать как

$$E = A \setminus (A \setminus E) \in \Sigma.$$

■

Значит эти определения конечной меры эквивалентны.

Теорема 2.4 (критерий измеримости Ваме—Гуссейна)**.** *Пусть $\mu = m^*$ и $\mu(X) < \infty$. Тогда*

$$E \in \Sigma \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ B \in \mathcal{R}(S)\colon \mu(E \vartriangle B) < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $E \in \Sigma$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\ A_k \in S\colon E \subset A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и по определению нижней грани

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leqslant \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Существует n, для которого $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} m(A_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $B_n := \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Тогда

$$\mu(E \vartriangle B_n) \leqslant \mu(E \setminus B_n) + \mu(B_n \setminus E) \leqslant \mu(A \setminus B_n) + \underbrace{\mu(A \setminus E)}_{B_n \subset A} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} m(A_k) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть $E \subset B \cup (E \vartriangle B)$. Из этого вытекает

$$\left|\mu(E) - \mu(B)\right| \leqslant \mu(E \vartriangle B) < \varepsilon, \qquad \left|\mu(E') - \mu(B')\right| \leqslant \mu(E' \vartriangle B') = \mu(E \vartriangle B) < \varepsilon.$$

Если это сложить, получится неравенство

$$\mu(X) = \mu(B) + \mu(B'), \qquad \left|\mu(E) + \mu(E') - \mu(X)\right| < 2\varepsilon.$$

Значит, $E \in \Sigma$. ■

Помните меру Стилтьеса? Сейчас определим меру Лебега—Стилтьеса

Определение 2.5. *Пусть есть полукольцо интервалов $S = \big\{[a,b)\big|a,b \in \Sigma, a \leqslant b\big\}$, есть $\alpha(x)\uparrow$ (неубывает) и $\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \alpha(x-0) = \alpha(x)$. Положим $m_\alpha\big([a,b)\big) := \alpha(b) - \alpha(a)$. Это σ-аддитивная мера. Пусть $m = \mu_a^*$ и Σ_α — σ-алгебра измеримых множеств. Тогда $\mu\colon \Sigma_\alpha \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется мерой Лебега—Стилтьеса.*

Если $\alpha(x) = x$, мера называется мерой Лебега.

Приведём пример неизмеримого по Лебегу множества $E \subset [0,1]$. Введём отношение эквивалентности: $\forall\ x,y \in [0,1] \quad x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Множество $[0,1]$ разбивается на несчётное число классов эквивалентности $[0,1] = \bigsqcup\limits_{i \in I} C_i$, где при $i \neq j \quad C_i \cap C_j = \varnothing$. Пусть $E = \big\{x_i\big\}_{i \in I}$, где $x_i \in C_i$. Пусть $\big\{e_n\big\}_{n=1}^\infty = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Тогда определим сдвиг на рациональное число $E_n = E + r_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Если $E \in \Sigma$, то $E_n \in \Sigma$ (это уже не обязательно подмножество $[0,1]$) и $\mu(E) = \mu(E_n)$. Для $n \neq m \quad E_n \cap E_m = \varnothing$. Видим, что $[0,1] \subset \bigcup\limits_{n=1}^\infty E_n$, а с другой стороны $\bigcup\limits_{n=1}^\infty E_n \subset [-1,2]$. Можем применить неравенсто для измеримых множеств

$$1 = \mu\big([0,1]\big) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) \leqslant \mu\big([-1,2]\big) = 3.$$

Если $\mu(E) \neq 0$, получаем бесконечную расходящуюся сумму, а если $\mu(E) = 0$, то противоречие с первым неравенством.

3 Измеримые функции

Всюду на этой лекции тройка (X, Σ, μ) будет обозначать измеримое пространство. Мы сейчас будем использовать только следующие свойства измеримого пространства.

(1) Σ — $sigma$-алгебра с единицей X;

(2) $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — σ-аддитивная мера;

(3) $\forall\ A \subset B\colon \mu(B) = 0 \quad A \in \Sigma$.

Пусть $E \subset X$.

Определение 3.1. *Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется измеримой, если*

$$\forall\ c \in \mathbb{R} \quad E(f < c) := \big\{x \in E\big|f(x) < c\big\} \in \Sigma.$$

Понятно, что из определения вытекает, что E будет измеримо, как счётное объединение этих множеств. Кроме того

$$\begin{aligned}
E(f \leqslant c) &= \bigcap_{n=1}^\infty E\left(f < c + \frac{1}{n}\right) \in \Sigma; && (1)\\
E(f \geqslant c) &= E \setminus E(f < c) \in \Sigma; && (2)\\
E(f > c) &= E \setminus E(f \leqslant c) \in \Sigma; && (3)\\
E(a \leqslant f < b) &= E(f < b) \setminus E(f < a) \in \Sigma; && (4)\\
E(a < f < b) &= E(f < b) \setminus E(f \leqslant a) \in \Sigma. && (5)
\end{aligned}$$

Таким образом, все промежутки измеримы.

Лемма 3.1. $f\colon E \to \mathbb{R}$ *измерима, если и только если*

$$\forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad f^{-1}(B) \in \Sigma.$$

Доказательство. Необходимость. Положим $S := \{A \subset \mathbb{R}\mathcal{B} \big| f^{-1}(A) \in \Sigma\}$. Все интервалы измеримы и лежат в S. S — σ-алгебра, $\mathbb{R} \in S$.

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B), \quad f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) =$$

Таким образом S — σ-алгебра,

Достаточность $E(f < c) = f^{-1}(-\infty, c)$ очевидна. ■

Покажем связь топологии и измеримости. Введём такое определение.

Определение 3.2. *Пусть μ — регулярна. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, где $E \in \Sigma$, обладает C-свойством, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ компакт } K, \text{ такой, что } \mu(E \setminus K) < \varepsilon, \quad g = f\big|_K \text{ — непрерывная функция.}$$

Теорема 3.1 (Лузина)**.** *Пусть μ — регулярная мера (в прошлый раз давали: для которой X является метрическим пространством и ещё другие свойства есть) и все открытые множества измеримы. Тогда функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ измерима $\Leftrightarrow$ она обладает C-свойством*

Доказательство. Необходимость. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Функция у нас f измерима. Отсюда вытекает, что $E \in \Sigma$. Так как мера регулярна, то $\exists$ такие измеримые $A_0, B_0 \in \Sigma$, такие что A_0 компактно, B_0 открыто, $A_0 \subset E \subset B_0$ и $\mu(B_0 \setminus A_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. (Это всё из регулярности меры.)

Пусть задана система всех интервалов $\{I_n\}$ с рациональными концами на прямой $\mathbb{R}$. Их не более чем счётно, поэтому я их занумеровал натуральными числами. Поэтому также в силу регулярности $\exists\, A_n, B_n \in \Sigma$, такие что A_n компактно, B_n открыто, $A_n \subset f^{-1}(I_n) \subset B_n$, $\mu(B_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Определим $G := \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (B_n \setminus A_n) \in$ — открыто, значит, измеримо, то есть $G \in \Sigma$. И его мера (по σ-аддитивности) $\mu G < \varepsilon$.

Обозначим $K = E \setminus G = A_0 \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n$. Оно является компактным как разность компактного A_0 и открытого.

Осталось доказать, что органичение на компакт является непрерывной функцией. Пусть $g = f\big|_K$. Тогда прообраз интервала $f^{-1}(I_n) = f^{-1}(I_n) \cap K$. Ну и кроме того легко понять, что пересечение с этим компактом, это всё равно что $g^{-1}(I_n) = B_n \cap K$. При этом B_n открыто, значит, $g^{-1}(I_n)$ открыто в K. Значит, g непрерывна на компакте K.

Вот мы доказали необходимость.

Достаточность. Пусть f обладает C-свойством. Тогда для каждого n существует измеримый компакт $K_n \in \Sigma$, для которого $K_n \subset E$, $\mu(E \setminus K_n) < \frac{1}{n}$, ну и ограничение $g_n\big|_{K_n}$ непрерывно.

Обозначим $F := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E \setminus K_n)$. Значит, функция g_n непрерывна на компакте K_n, поэтому $\forall$ интервала $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ прообраз $g_n^{-1}(I) = f^{-1}(I) \cap K_n$. Существуеют такие открытые множества B_n, дающие в перечении $B_n \cap K_n = g^{-1}(I)$.

$$f^{-1}(I) \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I) \cap K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap K_n$$

Так как B_n и K_n из σ-алгебры, то это всё измеримо. И $\mu(F) = 0$, $\mu \in \Sigma$, значит, и прообраз интегралов будет измеримым $f^{-1}(I) \in \Sigma$. ■

Следующая лемма нам поможет выяснить алгебраические свойства измеримых функций.

Лемма 3.2. *Пусть у нас функции $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы, а функция h, заданная на открытом множестве $h\colon D \to \mathbb{R}$ непрерывна, причём $D \subset \mathbb{R}^2$ является открытым множеством. Предположим также, что $\forall\, x \in E \quad \big(f(x), g(x)\big) \in D$. Тогда можно рассмотреть сложную функцию $F(x) = h\big(f(x), g(x)\big)$, и она окажется измеримой.*

Доказательство. Пусть $c \in \mathbb{R}$ рассмотрим $D(h < c)$ — это множество открыто в R^2 в силу непрерывности h. Поэтому всякое открытое множество можно представить в виде объединения открытых прямоугольников не более чем счётного числа

$$D(h < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n, \quad \Pi_n = (a_n, b_n) \times (c_n, d_n).$$

Например, прямоугольники с рациональными вершинами.

Теперь запишем такое множество

$$E\big((f, g) \in \Pi_n\big) = E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n).$$

Поэтому множество $E(F < c) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\big((f, g) \in \Pi_n\big) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n)$. Каждое из этих множеств измеримо, значит, и объединение будет тоже измеримым. Тем самым утверждение леммы доказано. ■

Следствие 3.1. *Если $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы, то $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$, f^p $(p > 0, g \leqslant 0)$ измеримы.*

Следствие 3.2. *Пусть теперь у нас задана последовательность измеримых функций $f_n\colon E\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Предположим, что в каждой точке $\inf\limits_n f_n,\ \sup f_n,\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n,\ \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$ измеримы, если принимают конечные значения.*
Доказательство. Легко проверяются такие формулы

$$E\left(\inf_n f_n<c\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n<c);\qquad E\left(\sup_n f_n>c\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n>c).$$

А для пределов вот такие.

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n=\inf_{k\geqslant 1}\left(\sup_{n\geqslant k} f_n\right);\qquad \varliminf_{n\to\infty} f_n=\sup_{k\geqslant 1}\left(\inf_{n\geqslant k} f_n\right).$$

Таким образом все эти множества измеримы. ∎
Следствие 3.3. *Пусть $f_n\colon E\to\mathbb{R}$ измеримы и $\forall\ x\in E\ \ \exists\ f(x)=\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда предел f измерим.*

$$f:=\varlimsup f_n=\varliminf f_n.$$

Введём такие обозначения. $f_n,f,g\colon E\to\mathbb{R}$

(1) $f_n\to f$, если $\forall\ x\in E\ \ \exists\ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(2) $f_n\nearrow f$, если $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{} f$ и $f_1\leqslant f_2\leqslant\dots$

(3) $f_n\searrow f$, если $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{} f$ и $f_1\geqslant f_2\geqslant\dots$

Определение 3.3. *Фнкция $h\colon E\to\mathbb{R}$ называется простой, если $h(E)=\{h_1,h_2,\dots,h_n\}\subset\mathbb{R}$.*

$$h(x)=\sum_{k=1}^{n}h_k\chi_{H_k}(x),$$

где $H_k:=\big\{x\in E\big|h(x)=h_k\big\}$, $\chi_H(x)=\begin{cases}1, & x\in H;\\ 0, & x\notin H.\end{cases}$
Теорема 3.2. *$\forall\ f\colon E\to\mathbb{R}_+$ измеримой существует неубывающая последовательность $h_n\nearrow f$ $(n\to\infty)$, h_n — измеримые и простые.*
Теорема 3.3. *Построим по следующей формуле*

$$h_n(x):=\sum_{k=1}^{2^{2n}}\frac{k-1}{2^n}\chi_{H_k^n}(x)+2^n\chi_{H^n}(x),$$

где $H_k^n:=E\left(\frac{k-1}{2^n}\leqslant f<\frac{k}{2^n}\right)$, $H^n:=E(f\geqslant w^n)$, $k=1,2,\dots,k^{2n}$

Покажем, что эта последовательность функций неубывающая. Ясно, что функции простые, что измеримые. Так как у нас $H_K^n=H_{2k-1}^{n+1}\sqcup H_{2k}^{n+1}$, $h_n(x)=\frac{k-1}{2^n}=\frac{2k-2}{2^{n+1}}\leqslant h_{n-1}(x)$

Кроме того $\big|f(x)-h_n(x)\big|<\frac{1}{2^n}$, если $x\in E(f<2^n)$.

Поскольку n убегает в бесконечность. $h_n\nearrow f$. Если f ещё и ограничена, то сходимость будет ещё и равномерной.
Определение 3.4. *$f_n\to f$ почти всюду (п. в.), если $\exists\ A\in\Sigma\colon\mu(A)=0,\ f_n\to f$ на $E\setminus A$.*
Определение 3.5. *$f_n\to f$ почти равномерно (п. р.), если $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ A\in\Sigma\colon\mu(A)<\varepsilon$ и $f_n\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $E\setminus A$.*
Определение 3.6. *$f\sim g$ эквивалентны, если $\exists\ A\in\Sigma\colon\mu(A)=0$ и $f(x)\equiv g(x)\ \ \forall\ x\in E\setminus A$.*

Пределы почти всюду и почти равномерно определяются с точностью до эквивалентности. Если функция измерима, то и эквивалентная ей измерима.
Теорема 3.4 (Егорова). *Пусть у нас $\mu(E)<\infty$, функции $f_n\colon E\to\mathbb{R}$ измеримы. Тогда $f_n\to f$ почти всюду на E $\Leftrightarrow$ $f_n\to f$ почти равномерно.*
Доказательство. Необходимость. Пусть у нас последовательность функций сходится почти всюду $f_n\to f$ (п. в.) на E. Легко видеть, что доказательство из определения почти равномерной сходимости сводится к случаю $f_n\to f$ всюду.

Обозначим $B_n=\bigcap\limits_{j=n}^{\infty}E\left(|f_j-f|<\frac{1}{k}\right)$ для $k\geqslant 1$. Объединение таких множеств даст всё E. Таким образом, последовательность $B_n\nearrow E$. Мы доказывали свойство непрерывности меры снизу, поэтому $\lim\mu(B_n)=\mu(E)$.

Обозначим дополнение $A_n:=E\setminus B_n$. Тогда в силу равенства $\lim\mu(B_n)=\mu(E)$ предел $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$. Поэтому существует n_k, такой что $\mu(A_{n_k})<\frac{\varepsilon}{2^k}$ для любого $\varepsilon>0$.

Обозначим $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$. Тогда $\mu(A) < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Дополнение $E \setminus A$ есть пересечение $E \setminus A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}$. Поэтому $\forall\, j \geqslant n_k,\ \forall\, x \in E \setminus A\ \ \bigl|f_j(x) - f(x)\bigr| < \frac{1}{k}$. Следовательно, последовательность сходится равномерно на множестве $E \setminus A$.

Достаточность. Пусть у нас последовательность функций $f_n \to f$ (п. р.) на E. Ну по определение $\forall\, n\ \ \exists\, A_n \in \Sigma \colon \mu(A_n) < \frac{1}{n},\ f_m \underset{m\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $E \setminus A_n$.

Обозначим $A := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu A = 0$. И $\forall\, x \in E \setminus A \Rightarrow f_m(x) \to f(x)$. ■

Определение 3.7. *Пусть $f, f_n \colon E \to \mathbb{R}$ измеримы. $f_n \to f$ по мере μ на E (здесь мы должны предположить, что функция измерима… сначала), если $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\Bigl(E\bigl(|f_n - f| \geqslant \varepsilon\bigr)\Bigr) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Теорема 3.5. *Тут два утверждения.*

(1) Пусть $f, f_n \colon E \to \mathbb{R}$ измеримы, и $\mu(E) < \infty$, то из $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ (п. в.) на E следует, что $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ по мере E.

(2) Если $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ по мере на E, то $\exists$ подпоследовательность $f_{n_k} \to f$ (п. в.) на E.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения применим теорему Егорова.

$$\varepsilon > 0\quad \exists\, A \in \Sigma \colon \mu(A) < \varepsilon,\ f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows},$$

то есть $\exists\, n \colon \forall\, k \geqslant n\ \ \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\mu\Bigl(E\bigl(|f_k - f| \geqslant \varepsilon\bigr)\Bigr) \leqslant \mu(A) < \varepsilon$. Значит, предел $f_k \to f$ по мере на E.

Доказательство второго утверждения. Пусть $f_n \to f$ по мере. Существует $m_k \colon \mu\Bigl(E\bigl(|f - f_{m_k}| \geqslant \frac{1}{2^k}\bigr)\Bigr) < \frac{1}{2^k}$ (из сходимости по мере следует, что предел этой конструкции равен нулю). Обозначим $A_n := \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E\bigl(|f - f_{m_k}| \geqslant \frac{1}{2^k}\bigr)$ и рассмотрим $A := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Имеем $\mu(A_n) < \frac{1}{2^{n-1}}$, получаем $\mu(A) = 0$.

Если $x \in E \setminus A$, то $x \in E \setminus A_n$ и $\bigl|f(x) - f_{m_k}(x)\bigr| < \frac{1}{2^k}$. Следовательно, $f_{m_k} \to f$ на $E \setminus A$. ■

Ну и в заключение давайте примерчик один приведём. Пример Риссо. Покажем, что их сходимости по мере не следует сходимость почти всюду. Берём отрезок $E = [0,1]$, разбиваем его на отрезки $A_n = \bigl[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^n}\bigr]$. Каждый отрезок имеет меру $\mu(A_n) = \frac{1}{2^m}$. Нумерация такая: $n = 2^m + k$, $k = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$, для того, чтобы нумерация была по одному индексу. $f_n(x) = \chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_n; \\ 0, & x \notin A_n. \end{cases}$ Тогда мера Лебега

$$\mu\left(f_n \geqslant \varepsilon\right) = \frac{1}{2^m} \to 0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Наша последовательность $f_n \to 0$ по мере на отрезке $[0,1]$.

Но эта последовательность не сходится никуда. Легко видеть

$$\varlimsup f_n(x) = 1, \quad x \in [0,1]; \qquad \varliminf f_n(x) = 0, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

К нулю в том числе не сходится.

4 Интеграл Лебега

Значит, у нас в дальнейшем (X, Σ, μ) — измеримое пространство (на прошлой лекции я говорил, что это такое), $E \in \Sigma$, через α будем обозначать $\alpha = \bigl\{A_k\bigr\}_{k=1}^{n}$ — измеримое разбиение E, то есть $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in \Sigma$.

Пусть также есть $f \colon E \to \mathbb{R}_+$. Введём обозначения $S_\alpha(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$ — сумма Дарбу[1], $a_k = \inf\limits_{x \in A_k} f(x)$, $a_k = a_k(f)$.

Определение 4.1. *Интегралом Лебега измеримой функции $f \colon E \to \mathbb{R}_+$ называется верхняя грань сумм Дарбу*

$$\int\limits_E f\, d\mu = \sup_\alpha = S_\alpha(f).$$

[1] Так как $0 \cdot \infty = 0$ по определению, все суммы Дарбу конечные.

Если значения функции имеют произвольный знак, то есть $f\colon E \to \mathbb{R}$. То $f = f_+ - f_-$, где $f_\pm(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$, то интеграл Лебега определяется, как

$$\int\limits_E f\,d\mu := \int\limits_E f_+\,d\mu - \int\limits_E f_-\,d\mu.$$

Функция называется интегрируемой по Лебегу (или суммируемой) $f \in L(E,\mu)$, если f измерима и $\int\limits_E f_\pm\,d\mu < \infty$.

Верхняя грань сумм Дарбу может быть и бесконечной. Это допустимо для неотрицательной функции. А в случае знакопеременной функции может возникнуть неопределённость $\infty - \infty$.

Теперь перейдём у свойствам.

Утверждение 4.1. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ измерима. Тогда $\int\limits_E f\,\mu = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$, то есть $f = 0$ почти всюду.*

Доказательство. Необходимость. Если $\int\limits_E f\,d\mu = 0$, то все суммы Дарбу $S_\alpha(f) = 0$. Рассмотрим $E_n = E(g \geqslant \frac{1}{n})$. Ясно, что $E_n \nearrow E(f > 0)$ и $\mu\bigl(E(f > 0)\bigr) = \lim \mu(E) = 0$. Ведь мы можем строить разбиение так, чтобы одно из множеств было E_n.

Достаточность. $\mu\bigl(E(f > 0)\bigr) = 0$, значит, $S_\alpha(f) = 0$. Это из определения вытекает. ∎

Утверждение 4.2. *Пусть $f, g\colon E \to \mathbb{R}_+$ измеримы и $f \leqslant g$ на E. Тогда $\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_g d\mu$.*

Доказательство. Так как сумма Дарбу для любого разбиения удовлетворяет соответствующему неравенству $S_\alpha(f) \leqslant S_\alpha(g)$. ∎

Утверждение 4.3. *Если $f, g \in L(E,\mu)$ и $f \leqslant g$ на E, то $\int\limits_E f_+\,d\mu \leqslant \int\limits_E g_+\,d\mu$ и $\int\limits_E f_-\,d\mu \geqslant \int\limits_E g_-\,d\mu$. А если вычтем, то*

$$\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_E g\,d\mu.$$

Лемма 4.1. *Пусть $h \in L(E,\mu)$ простая, то есть принимает конечное количество значений. Тогда, как мы знаем, она записывается в виде*

$$h(x) = \sum_{k=1}^{m} = h_k \chi_{H_l}(x), \qquad H_l = \bigl\{x \in X \bigm| h(x) = h_l\bigr\}.$$

Тогда $\int\limits_E h\,d\mu = \sum\limits_{l=1}^{m} h_l \mu(E \cap H_l)$.

Доказательство. Достаточно доказать для случая неотрицательной функции $h \geqslant 0$. $a_k(h) \leqslant h_l$, если $B_{kl} = A_k \cap H_l \neq 0$,

$$S_\alpha(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_k \mu(B_{kl}) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} h_l \mu(B_{kl}) = \sum_{l=1}^{m} h_l \mu(E \cap H_l).$$

Но если мы возьмём разбиение $\alpha = \bigl\{E \cap H_l\bigr\}_{l=1}^{m}$, будет знак равенства. ∎

Из этой леммы вытекают следующие два следствия.

Следствие 4.1. *Если $h \in L(E,\mu)$ простая, то её интеграл обладает свойством аддитивности, то есть*

$$\int\limits_E h\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} h\,d\mu, \qquad E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \in \Sigma.$$

Следствие 4.2. *Если $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ измерима, то $\int\limits_E f\,d\mu = \sup\limits_{0 \leqslant h \leqslant f} \int\limits_E h\,\mu$, где h — простая измеримая функция.*

Доказательство. Доказательство последнего следстви. Имеем из свойства 2 $\int\limits_E h\,d\mu \leqslant \int\limits_E g\,d\mu$. ∎

Следующая теорема одна из основных теорем.

Теорема 4.1 (о монотонной сходимости). *Пусть $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ неотрицательны и измеримы, и $f_n \nearrow f$ на E. (Интеграл от f при этом может быть бесконечным, ничего страшного.) Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu.$$

Доказательство. Давайте обозначим этот предел через $I = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu$. Так как $f_n \leqslant f$ в каждой точке, то этот предел будет оцениваться $I \leqslant \int\limits_E f\,d\mu$. Для доказательства нам нужно доказать обратное неравенство.

Возьмём произвольную простую функцию $h\colon 0 \leqslant h \leqslant f$, $\varepsilon \in (0,1)$ и определим следующие множества $E_n = E(\varepsilon h \leqslant f_n) \nearrow E$. Запишем следующим очевидные равенства

$$\varepsilon \int\limits_{E_n} h\,d\mu = \int\limits_{E_n} \varepsilon h\,d\mu \overset{2}{\leqslant} \int\limits_{E_n} f_n\,d\mu \overset{2}{\leqslant} \int\limits_{E} f_n\,d\mu \leqslant I.$$

Ну а теперь заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} h\,d\mu = \int\limits_E h\,d\mu$ в силу следствия 1. Переходя к пределу получаем $\varepsilon \int\limits_E h\,d\mu \leqslant I$. В силу произвольности ε

$$\int\limits_E h\,d\mu \leqslant I \quad \forall\ 0 \leqslant h \leqslant f.$$

По свойству 3 имеем $G \int Ef\,d\mu \leqslant I$. ∎

Следующее важное свойство четвёртое. Свойство линейности интеграла.

Утверждение 4.4. *Пусть $f, g \in L(E,\mu)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\int\limits_E \lambda f\,d\mu = \lambda \int\limits_E f\,d\mu$ и $\int\limits_E (f+g)\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu$.*

Доказательство. Первое свойство настолько очевидно, что я и доказывать не хочу. Докажем второе. Пусть пока что $f, g \leqslant 0$ и простые. Нужно вспомнить доказанную лемму и взять пересечение разбиений.

Второй случай. Пусть у нас теперь f и g неотрицательны и измеримы. В этом случае мы с вами доказывали теорему о том, что всякая неотрицательная функция является монотонным пределом неотрицательных простых функций, то есть $\exists\ f_n \nearrow f$ и $g_n \nearrow g$, где f_n, g_n — простые. Тогда и $f_n + g_n \nearrow f + g$. Ну а теперь применяем теорему о монотонной сходимости.

$$\int\limits_E (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E (f_n + g_n)\,d\mu \overset{1}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu + \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f g_n\,d\mu$$

ну и по теореме о монотонной сходимости получаем $= \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu$.

Ну и третий случай, когда $f, g \in L(E,\mu)$, $f = f_+ - f_-$, $g = g_+ - g_-$. Тогда $(f+g) = (f+g)_+ - (f+g)_-$, и мы получим такое равенство

$$(f+g)_+ f_- + g_+ = (f+g)_- + f_+ + g_-.$$

Это равенство можно проинтегрировать по свойству 2, собрать слагаемые обратно и получить результат. ∎

Утверждение 4.5. *Пусть $f \in L(E,\mu)$, то $|f| \in L(E,\mu)$ и выполнены соответствующие неравенства*

$$\left|\int\limits_E f\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_E |f|\,d\mu.$$

Доказательство. $|f| = f_+ + f_- \in L(E,\mu)$ по доказанным свойствам. Кроме того $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, применяем свойство 2, получаем $-\int\limits_E |f| \leqslant \int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_E |f|\,d\mu$. ∎

Лемма 4.2 (Фату). *Пусть $f_n\colon E \to \mathbb{R}_+$ измеримы и $f = \underline{\lim} f_n$ почти всюду на E. Тогда $\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \underline{\lim} \int\limits_E f_n\,d\mu$.*

Доказательство. По свойству 4 можно избавиться от требования условия почти всюду. Будем считать, что $f = \underline{\lim} f_n$ всюду на E. Ну и введём такие функции $g_n = \inf\limits_{n\geqslant m} f_n$ — это измеримые неотрицательные функции (мы доказывали), ну и кроме того $g_m \nearrow f$ по определению предела.

Так как $\forall\ n \geqslant n \ \ g_m \leqslant f_n$, то у нас $\int\limits_E g_m\,d\mu \leqslant \inf\limits_{n\geqslant m} \int\limits_E f_n\,e\mu$. Ну и теперь применяем теорему о монотонной сходимости.

$$\int\limits_f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n\,d\mu \leqslant \lim_{m\to\infty} \inf_{n\geqslant m} \int\limits_E f_n\,d\mu = \underline{\lim} \int\limits_E f_n\,d\mu.$$

И лемма доказана. ∎

Теорема 4.2 (Лебега о предельном переходе). *Пусть $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы, $f = \lim f_n$ почти всюду на множестве E, и существует функция $g \in L(E,\mu)$, $g \geqslant 0$ и $|f_n| \leqslant g$[1] на множестве E (можно и оставить здесь почти всюду). Тогда $f, f_n \in L(E,\mu)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu$.*

Доказательство. Не поскольку f измерима, то f_n тоже будет измерима. Будут выполнены такие неравенства почти всюду: $f_{n\pm}, f_\pm \leqslant g$ почти всюду на E. По свойству 2 интегралы будут конечны, то есть $f, f_n \in L(E,\mu)$. Кроме того $g \pm f_n \geqslant 0$ в силу того, что $|f_n| \leqslant g$ на E; $g \pm f_n \to g \pm f$, ну и нижний предел тоже сходится. Можно

[1] Эта функция g называется интегрируемой мажорантой.

применить лемму Фату

$$\int\limits_E (f+g)\,d\mu \leqslant \varliminf \int\limits_E (g+f_n)\,d\mu, \qquad \int\limits_E (g-f)\,d\mu \leqslant \varliminf \int\limits_E (g-f_n)\,d\mu$$

В силу аддитивности интеграла, на g погу сократить в каждом неравенстве. Останется два неравенства. Из-за минуса нижний предел сменится на верхний.

$$\varlimsup \int\limits_E f_n\,d\mu \leqslant \int\limits_E f\,d\mu \leqslant \varliminf \int\limits_E f_n\,d\mu.$$

И теорема доказана. ■

Теорема 4.3 (о σ-аддитивности интеграла Лебега)**.** *Пусть* $f \in L(E,\mu)$, $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \in \Sigma$. *Тогда* $\int\limits_E f\,d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f\,d\mu$.

Доказательство. Понятно, что $f = f_+ - f_-$, и доказательство сводится к случаю $f \geqslant 0$. Пусть сначала $E = E_1 \sqcup E_2$, $E_1, E_2 \in \Sigma$. Функция неотрицательна, значит можно рассуждать суммами Дарбу. Пусть α — разбиение множества E. Тогда у нас индуцируются разбиения $\alpha_1 = \alpha \cap E_1$, $\alpha_2 = \alpha \cap E_2$. Легко понять, что тогда $S_\alpha(f) \leqslant S_{\alpha_1}(f) + S_{\alpha_2}(f)$.

С другой стороны. Если α_1 — разбиение E_1, α_2 — разбиение E_2, можно построить $\alpha = \alpha_1 \sqcup \alpha_2$. В этом случае у нас будет равенство $S_\alpha(f) = S_{\alpha_1}(f) + S_{\alpha_2}(f)$. Значит, и верхняя грань будет удовлетворять этому равенству:

$$\int\limits_f d\mu = \int\limits_{E_1} f\,d\mu + \int\limits_{E_2} f\,d\mu.$$

Ну и теперь общий случай. Пусть $f \geqslant 0$, положим $F_n := \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, $f_n := \chi_{F_n} \cdot f$. Тогда $f_n \nearrow f$ и можно применить теорему о монотонной сходимости

$$\int\limits_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{F_n} f\,d\mu.$$

Раз для двух множеств верно, то и для любого конечно числа множеств будет верно и $\int\limits_E f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{E_n} f\,d\mu$.
■

Теорема 4.4 (Неравенство Чебышёва)**.** *Пусть* $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ *измерима. Тогда* $\forall\ t > 0\quad \mu(E_t) \leqslant \frac{1}{t}\int\limits_E f\,d\mu$, $E_+ := E(f \geqslant t)$.

С этой теоремы началась теория вероятности. До Чебышёва теория вероятность было только интуитивной.

Доказательство. Имеем по свойству 2: $\int\limits_E f\,d\mu \geqslant \int\limits_{E_t} f\,d\mu \geqslant t\mu(E_t)$. ■

Введём такое определение.

Определение 4.2. *Пусть* $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ *измерима. Обозначим через* $\lambda_f(t) = \mu(E_t)$, $t > 0$, $E_t := E(f \geqslant t)$. $\lambda_f(t)$ *называется функцией распределения (значений* f*).*

Утверждение 4.6. *Свойства. Докажем только последнее.*

(1) $\lambda_f(t)\downarrow$;

(2) $\lambda_f(t-0) = \lambda_f(t)$;

(3) $\exists\ a\colon 0 < a \leqslant \infty,\ \lambda_f(t) = \infty$ *при* $t \in (0,a)$;

(4) Если $f \in L(E,\mu)$, *то* $\lambda_f(t) < \infty$ *при* $t > 0$;

(5) Если $\mu\big(E(f=t)\big) > 0$, *то* t *— точка разрыва* λ_f;

(6) $\lambda_f(t) = \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{t}\right)$, *если* $f \in L(E,\mu)$.

Доказательство. $E_t \searrow \varnothing$, $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{E_+} f\,d\mu$. Ну а следовательно $t\mu(E_t) \leqslant \int\limits_{E_+} f\,d\mu$. ■

Определение 4.3. *Если* $f\,g \in E\colon \mathbb{R}_+$ *измеримы и* $\lambda_f(t) = \lambda_g(t)\quad \forall\ t > 0$, *то* f *и* g *называются равноизмеримыми.*

Пусть $f, g \in L(E,\mu)$. Тогда применяя теорему Фубини (которая у нас ещё будет) можно написать такие равенства

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_0^\infty \lambda_f(t)\,dt; \qquad \int\limits_E g\,d\mu = \int\limits_0^\infty \lambda_g(t)\,dt.$$

5 Абсолютно непрерывные функции

Начнём с определения абсолютной функций множества. У нас будет дальше (X,Σ,μ) — измеримое пространство. Обозначим через $\Sigma_E = \{A \subset E | A \in \Sigma\}$, $E \in \Sigma$.

Определение 5.1. *Функция $\varphi\colon \Sigma_E \to \mathbb{R}$ называется зарядом, если φ σ-аддитивна. Заряд называется абсолютно непрерывным $\varphi \ll \mu$ относительно меры μ, если*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0\colon \forall\ A \in \Sigma_E,\ \mu(A) < \delta \Rightarrow \bigl|\varphi(A)\bigr| < \varepsilon.$$

Теорема 5.1 (об абсолютной непрерывности интеграла Лебега)**.** *Если $f \in L(E,\mu)$, то $\varphi(A) = \int_A f\,d\mu$, $A \in \Sigma_E$, является абсолютно непрерывным зарядом.*

Доказательство. Что интеграл зяряд, мы доказывали в прошлой лекции. Надо доказать только абсолютную непрерывность. Представим $f = f_+ - f_-$. Тогда можно считать, что $f \geqslant 0$. Рассмотрим $E_n = E(f \leqslant n)$, $E_n \nearrow E$. Можно воспользоваться свойством непрерывности снизу для меры.

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ n \in \mathbb{N}\colon \varphi(E \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А ещё $\forall\ A \in \Sigma_E$ $\mu(A) < \delta = \frac{\varepsilon}{2n}$, $\varphi(A \cap E_n) = \int\limits_{A\cap E_n} f\,d\mu \leqslant n\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Ну и осталось написать, что $\varphi(A) = \varphi(A\cap E_n) + \underbrace{\varphi(A \setminus E_n)}_{\leqslant \mu(E\setminus E_n)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, поскольку у нас φ монотонна (так как f неотрицательна). ■

Следующая теорема в нашем курсе если и будет доказана, то на последней лекции, если время останется. Кто интересуется, может прочесть в книге Колмогоров—Фомин.

Теорема 5.2 (Радона—Никодима)**.** *Если заряд $\varphi\colon \Sigma_E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию*

$$\forall\ A \in \Sigma_E\colon \mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \varphi(A) = 0.$$

E имеет σ-конечную меру.

Тогда $\exists!$ (с точностью до эквивалентности) $f \in L(E,\mu)$ такая, что $\varphi(A) = \int\limits_A f\,d\mu \quad \forall\ A \in \Sigma_E$.

Помните, что мы называли функции эквивалентными, если они совпадают почти всюду.

Доказательство. Единственность легко доказать. Если интегралы совпадают для всех $A \in \Sigma_E$ $\int\limits_A f\,d\mu = \int\limits_A g\,d\mu$, то пусть $\exists\ B \in \Sigma_E\colon \mu(B) > 0$, такой, что $f(x) > g(x) \quad \forall\ x \in B$. Следовательно, $\int\limits_B (f-g)\,d\mu > 0$. ■

Следствие обычно называется свойством абсолютной непрерывности. Его можно было бы и независимо доказать, но это заняло бы определённое время. Так что просто выведем из теоремы Радона—Никодима.

Следствие 5.1 (критерий абсолютной непрерывности)**.** $\varphi \ll \mu \Leftrightarrow \forall\ A \in \Sigma_E\colon \mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Потому что если множесво меры нуль $\forall\ \varepsilon > 0 \bigl|\varphi(A)\bigr| < \varepsilon$, то $\varphi(A) = 0$. А обратное вытекает из теоремы Радона—Никодима. ■

5.1 Функции точки

Сначала я вам напомню определение функции ограниченной в вариациях.

Определение 5.2. $F \in B\vee[a,b]$, *если*

$$\bigvee_a^b ar(F) := \sup_\tau \sum_{k=1}^n \bigl|F(x_k) - F(x_{k-1})\bigr| < \infty, \quad \tau := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}.$$

Пространство будет линейным, и в нём можно ввести норму $\|F\| = \bigl|F(a)\bigr| + \bigvee\limits_a^b(F)$.

Напомню свойства без доказательства. Это должно быть в курсе математического анализа.

Утверждение 5.1. *Если $F \in B\vee[a,b]$ и $a < c < b$, то $\bigvee\limits_a^b ar(F) = \bigvee\limits_a^c ar(F) + \bigvee\limits_c^b ar(F)$.*

Утверждение 5.2. *Если $F(c-0) = F(c)$. то $V(x) = \bigvee\limits_a^x ar(F)$, $V(c-0) = V(c)$.*

Утверждение 5.3. *Разложение Жордана. Если $F \in B\vee[a,b]$, то $\exists\ \alpha(x)\uparrow$ и $\beta(x)\uparrow$, такая, что*

$$\alpha(a)=\beta(a)=0,\quad F(x)=F(a)+\alpha(x)-\beta(x),\quad V(x)=\alpha(x)+\beta(x).$$

Доказательство. $\alpha(x):=\frac{1}{2}\big\{\bigvee_a^x ar(F)+F(x)-F(a)\big\}$, $\beta(x):=\frac{1}{2}\big\{\bigvee_a^x ar(F)-F(x)+F(a)\big\}$. ■

Ещё одну теорему приведу без доказательства.

Теорема 5.3 (Лебега о производной монотонной функции)**.** *Если функция $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ монотонна, $f(x)\leqslant f(y)$, если $x\leqslant y$ (или наоборот), то существует производная $f'(x)$ почти всюду на $[a,b]$.*

5.2 Интеграл Лебега—Стилтьеса

Пусть $F\in B\vee[a,b]$ непрерывна слева. Тогда по разложению Жордана можем написать $F(x)=F(a)+\alpha(x)-\beta(x)$, где $\alpha,\beta\uparrow$. Можно построить меры Лебега—Стилтьеса μ_α,μ_β. И мы можем тогда построить заряд Лебега—Стилтьеса

$$\varphi_F=\mu_\alpha-\mu_\beta.$$

Заряд определён на $\Sigma_F:=\Sigma_\alpha\cap\Sigma_\beta$, пересечение σ-алгебр мер μ_α и μ_β. Определение теперь.

Определение 5.3. *Интеграл Лебега—Стилтьеса $\int\limits_a^b f\,d\varphi_F:=\int\limits_a^b f\,d\mu_\alpha-\int\limits_a^b f\,d\mu_\beta$. Определён на полуинтервале $[a,b)$.*

И напомню определение.

Определение 5.4. *Интеграл Римана—Стилтьеса $\int\limits_a^b f\,dF:=\lim\limits_{d(\tau)\to0}R_\tau(f,\xi,F)$, где*

$$R_\tau(f,\xi,F):=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\big(F(x_k)-F(x_{k-1})\big),$$

τ — разбиение отрезка, то есть $\tau=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$, $d(\tau)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k-x_{k-1})$, $\xi=\{\xi_k\}$ и $\xi_k\in[x_{k-1}k,x_k]$.

Лемма 5.1. *Если функция $F\in C[a,b]$, то сущетсвует интеграл Римана—Стилтьеса.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть, когда F неубываюшая. Тогда интегральная сумма будет является интегралом Лебега от некоторой простой функции. $f\tau(x)=f(\xi_k)$ на $[x_{k-1},x_k)$. Так как функция непрерывно, я могу вместо отрезка брать полуинтервал. Ещё на отрезке $f_\tau\rightrightarrows f$. По теореме Лебега интеграл существует. ■

Кстати функцию F можно переопределить в счётном числе точек. От этого интеграл не изменится.

Нам эта лемма в общем-то и не понадобится.

Теорема 5.4 (о сравнении интегралов)**.** *Если функция $f\colon[a,b]$ ограничена и $\exists\ \int\limits_a^b d\,dF$, то $\exists\ \int\limits_a^b f\,d\varphi_F$ и они равны.*

Доказательство. Применяем разложение Жордана. Без ограничения общности считаем $F(x)=\alpha(x)\uparrow$ и $f\geqslant0$. Рассмотрим в этом случае интегральные суммы Дарбу—Стилтьеса для заданного разбиения

$$\underline{D}_\tau(f,\alpha):=\sum_{k=1}^n\underline{a}_k m_\alpha\big([x_{k-1},x_l]\big),\quad \overline{D}_\tau(f,\alpha):=\sum_{k=1}^n\overline{a}_k m_\alpha\big([x_{k-1},x_l]\big),$$

где $\underline{a}_k=\inf\limits_{[x_k,x_{k-1})]}f(x)$, $\overline{a}_k=\sup\limits_{[x_k,x_{k-1})]}f(x)$, $\tau=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$. Тогда

$$\underline{D}_\tau(f,\alpha)\leqslant\overline{D}_\tau(f,\alpha).$$

Осталось доказать равенство.

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ \delta>0\colon\forall\ \tau\colon d(\tau)<\delta\ \ I-\varepsilon\leqslant R_\tau(f,\xi,\alpha)\leqslant I+\varepsilon,\quad I=\int\limits_a^b f\,d\alpha.$$

Тогда суммы Римана будут находиться между суммами Дарбу

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ I-\varepsilon\leqslant\underline{D}_\tau(f,\alpha)\leqslant R_\tau(f,\xi,\alpha)\leqslant\overline{D}_\tau(f,\alpha)\leqslant I+\varepsilon$$

■

Определение 5.5. *$f \in AC[a,b]$, где $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна, если*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \colon \forall\ \bigsqcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k) \subset [a,b] \colon \ \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \bigl|f(b_k) - f(a_k)\bigr| < \varepsilon.$$

Такие функции образуют линейную пространство, где можно ввести норму $\|f\| := \bigl|f(a)\bigr| + \int\limits_a^b \bigl|f'(t)\bigr|\,dt$, корректность котороой мы проверим чуть позже.

Утверждение 5.4. *Есди $f \in \mathrm{Lip}[a,b]$, то есть $\exists\ C\ 0 \colon \bigl|f(x) - f(y)\bigr| \leqslant C|x-y|\ \forall\ x,y \in [a,b]$, то $f \in AC[a,b]$.*

Утверждение 5.5. *Если $f \in AC[a,b]$, то $f \in C \vee [a,b]$.*

Доказательство. Берётся разбиение $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, такое что $(x_k - x_{k-1}) = \frac{\delta}{2} = \frac{(b-a)}{n}$. Тогдп вариация

$$\bigvee_a^b ar(f) = RY1n \bigvee_{x_k-1}^{x_k} ar(f) \leqslant n\varepsilon = \frac{2(b-a)}{\delta}\varepsilon.$$

■

Утверждение 5.6. *Если $f \in AC[a,b]$, то в разложении Жордана $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ $\alpha, \beta \in AC[a,b]$.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что $V(x) = \bigvee\limits_a^x ar(f)$ абсолютно непрерывна. Нужно воспользоваться свойством вариации и записать, что

$$\sum_{k=1}^{n} \bigl|V(b_k) - V(a_k)\bigr| = \sum_{k=1}^{n} \bigvee_{a_k}^{b_k} ar(f) \leqslant \varepsilon.$$

Достаточно заметить, что вариация на отрезке $[a_k, b_k]$ это точная верхняя грать сумм Дарбу. Нужно вспомнить определение абсолютно непрерывных функций и всё сразу понятно станет. ■

Ну и последнее свойство.

Утверждение 5.7. *Если $f \in AC[a,b]$, то $\exists!\ g \in L[a,b]$ (единственность с точностью до эквивалентности), такая что $f(x) = f(a) + \int\limits_a^x g(t)\,dt$.*

Доказательство. Разложим f по формуле Жордана $f(x) = f(a) = \alpha(x) - \beta(x)$, $\alpha, \beta \uparrow$. Затем построим меры Лебега—Стилтьеса μ_α, μ_β по функциям α, β. Эти меры будут абсолютно непрерывны $\mu_\alpha, \mu_\varepsilon \ll \lambda$ (λ — мера Лебега), так как α, β абсолютно непрерывны (у нас было два определения абсолютной непрерывности для разных объектов, тут используются оба).

Отсюда вытекает, что заряд $\varphi_F \ll \lambda$. Ну и по теоереме Радона—Никодима

$$f(x) - f(a) = \varphi_f\bigl([a,x)\bigr) = \int_a^x g(t)\,dt$$

для некоторой функции $g \in L[a,b]$. Эта функция будет единственной с точностью до эквивалентности, как и в теореме Радона—Никодима. ■

Лемма 5.2. *Пусть $F \uparrow$ на $[a,b]$. Тогда $\int\limits_a^b F'(t)\,dt \leqslant F(b) - F(a)$. Но если $F \in \mathrm{Lip}[a,b]$, то выполняется равенство.*

По теореме Лебега производная монотонной функции интегрируема почти всюду. Равенство же может быть и не выполнено, например, если взять функцию Кантора (лесницу Кантора).

Доказательство. Давайте мы продолжим нашу функцию за отрезок $F(x) = F(b)$, $x \in [b, b+1]$. Функция останется неубывающе. Ну и возьмём такие функции и применим теорему Лебега

$$F_n(t) = \frac{F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} F'(t).$$

Предел есть по теореме Лебега почти всюду на $[a,b]$. Теперь применим теорему Фату

$$\int_a^b F'(t)\,dt \leqslant \underline{\lim} \int_a^b F_n(t)\,dt = \underline{\lim} \left(b \int_b^{b+\frac{1}{n}} F(t)\,dt - n \int_a^{a+\frac{1}{b}} F(t)\,dt \right) \leqslant F(b) - F(a).$$

Это в силу того, что функция неубывающая.

Осталось вторую часть доказать. Чтобы её доказать, нужно вспомнить определение условия Липшица. Из этого определения вытекает, что производная ограничена почти всюду $\bigl|F'(t)\bigr| \leqslant C$ почти всюду. Ну и тогда вместо леммы Фату можно применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. ■

Теорема 5.5 (характеристические свойсва абсолютно непрерывных функций)**.** $F \in AC[a,b]$, *если и только если*

$$\exists\ F'(t)\,(\text{п. в.})\text{ на } [a,b],\ \ F' \in L[a,b], F(x) = F(a) + \int\limits_a^x F'(t)\,dt \forall\ x \in [a,b].$$

Доказательство. Достаточность вытекает из абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Применяя свойство разложение Жордана, можно считать, что $F\uparrow$ на $[a,b]$. Давайте ещё считать, что $F(a)=0$. Тогда по свойству 4 имеем

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt,\ \ f \in L[a,b].$$

Поэтому для доказательства необходимости нужно доказать, что $F'(t) = f(t)$ почти всюду на $[a,b]$.

Введём такие функции $f_n(x) = \min\{f(t), n\}$ — срез функции на уровне n. f определена почти всюду, её можно считать неотрицательной. Обозначим $F_n(x) = \int\limits_a^x f_n(t)\,dt$. Запишем разность

$$F(x) - F_n(x) = \int\limits_a^x \big(\underbrace{f(t) - f_n(t)}_{\geqslant 0}\big)\,dt \uparrow.$$

Следовательно $F'(x) \geqslant F_n'(x)$ почти всюду на $[a,b]$. Производная существует почти всюду по теореме Лебега. Давайте запишем ещё следующее равенство по лемме, используя, что $F_n(x) \in \mathrm{Lip}[a,b]$.

$$F_n(x) = \int\limits_a^x F_n'(t)\,dt = \int\limits_a^x f_n(t)\,dt,$$

$F_n'(t) = f_n(t)$ почти всюду на $[a,b]$.

$$F'(x) \geqslant F_n'(x) = f_n(x) \quad \text{п. в.}$$

переходя к пределу, получаем $F'(x) \geqslant f(x)$ почти всюду на $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b \big(F'(t) - f(t)\big)\,dt \geqslant 0.$$

А по лемме этот же интеграл будет оцениваться нулём и в другую сторону

$$\int\limits_a^b F'(t)\,dt \leqslant F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(t)\,dt \leqslant 0.$$

Значит, интеграл равен нулю. А поскольку функция неотрицательна, то она равна нулю почти всюду и $F'(t) = f(t)$ почти всюду. ■

6 Теорема Фубини

Сначала мы докажем предварительную теорему, а потом уже теорему Фубини. Рассмотрим S_k — полукольцо в X_k, где $k = 1,\dots,n$. И рассмотрим прямое произведение этих полуколец $S := S_1\times\cdots\times S_n = \{A = A_1\times\cdots\times A_n \mid A_k \in S_k, k = 1,\dots,n\}$. Мы сейчас докажем, что это тоже полукольцо. Пусть у нас ещё заданы меры на каждом полукольце $m_k\colon S_k \to \mathbb{R}_+$. Тогда можно ввести понятие прямого[1] произведения мер $m = m_1\times\cdots\times m_n$, где $m(A) := m_1(A_1)\dots m_n(A_n)$, если $A = A_1\times\cdots\times A_n$.

Теорема 6.1. *Если $m_k\colon S_k \to \mathbb{R}_+$ есть σ-аддитивные меры на полукольцах S_k при $k = 1,\dots,n$, то $S = S_1\times\cdots\times S_n$ является полукольцом и $m = m_1\times\cdots\times m_n$ является σ-аддитивной мерой.*

Доказательство. Приведём доказательство для $n=2$, далее по индукции. Пусть $S = S_1\times S_2$ — полукольцо. Берём два множества

$$A = A_1\times A_2,\ \ B = B_1\times B_2 \in S,\quad A_1, B_1 \in S_1,\ \ A_2, B_2 \in S_2.$$

Легко проверяется, что

$$A\cap B = (A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2).$$

[1] Будет ещё другое произведение мер, поэтому слово прямое не будем опускать.

Можно нарисовать картинку в виде двух прямоугольников.

Теперь разность представляется в виде трёх слагаемых

$$A \setminus B = \big((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2)\big) \sqcup \big((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \cap B_2)\big) \sqcup \big((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)\big).$$

Это тоже можно показать, нарисовав картинку из двух прямоугольников. Таким образом, S — полукольцо.

Осталось показать, что произведение мер является σ-аддитивной мерой. Пусть множество A представляется в виде

$$A = \bigsqcup_{l=1}^{m} B^{(l)}, \quad A = A_1 \times A_2,\ B^{(l)} = B_1^{(l)} \times B_2^{(l)}.$$

Давайте запишем такую функцию

$$f_l(x_1) := m_2(B_2^{(l)}) \cdot \chi_{B_1^{(l)}}(x_1), \quad x_1 \in A_1.$$

Из этого определения вытекает, что $A_2 = \bigcup\limits_{l=1}^{m} B_2^{(l)}$, но не обязательно дизъюнктное. Отсюда вытекает такое равенство

$$m_2(A_2) = \sum_{l=1}^{m} f_l(x_1), \quad x_1 \in A_1.$$

Пусть μ_1 — продолжение меры m_1. Мы сейчас будем писать интеграл и подставлять определение нашей функции.

$$m(A) := m_1(A_1) \cdot m_2(A_2) = \int\limits_{A_1} m_2(A_2)\, d\mu_1 = \sum_{l=1}^{m} \int\limits_{A_1} f_l(x_1)\, d\mu_1 = \sum_{l=1}^{m} m_1(B_1^{(l)}) \cdot m_2(B_2^{(l)}).$$

Для $m = \infty$ нужно лишь применить теорему о монотонной сходимости. Выкладка та же самая. ∎

Определение 6.1. *Пусть у нас заданы измеримые пространства (X_k, Σ_k, μ_k), $k = 1, \ldots, n$. Тогда мы можем построить*

$$X = X_1 \times \cdots \times X_n,\ S = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n,\ m = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n.$$

Если построить внешнюю меру и ограничить на Σ, то $m^*\big|_\Sigma = \mu$ и тройка (X, Σ, μ) называется произведением измеримых пространств.

Это произведение обладает свойством ассоциативности. Будем обозначать это произведение не как прямое, а как тензорное

$$\mu := \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n.$$

Свойство ассоцативности тогда записывается так

$$(\mu \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3).$$

Свойство ассоциативности вытекает из ассоциативности прямого произведения. Мы для простоты изложения далее будем рассматривать случай $n = 2$.

Пусть (X, Σ_X, μ_X) и (Y, Σ_Y, μ_Y) — измеримые пространства. Тогда для $Z = X \times Y$, $\mu = \mu_X \otimes mu_Y$, $E \in \Sigma$ обозначим сечения

$$E_X = \big\{y \in Y \big| (x, y) \in E\big\}, \quad E_Y = \big\{x \in X \big| (x, y) \in E\big\}.$$

Сечение объединений будет объединением сечений, относительно пересечения и разности так же. То же самое можем сделать для функций

$$f\colon E \to \mathbb{R}, \quad f_x(y) = f(x, y), \quad f_y(x) = f(x, y).$$

Теорема 6.2. *Если $E \in \Sigma$ σ-конечной меры, то*

$$\mu(E) = \int\limits_X \mu_y(E_x)\, d\mu_x = \int\limits_Y \mu_x(E_y)\, d\mu_y.$$

Вообще говоря, не все сечения будут измеримы, функция будет определена почти всюду. Где функция неопределена, положим её равной нулю, это не повлияет на значение интеграла.

Доказательство. Доказательство будет проходить в несколько шагов.

1. $E = A \times B$, $A \in \Sigma_x$, $B \in \Sigma_y$. Тогда

$$\mu(E) = \mu_x(A) \cdot \mu_y(B) = \int\limits_A \mu_y(B)\, d\mu_x = \int\limits_A \mu_x(A)\, d\mu_x.$$

Это равенства симметричны, мы будем доказывать только одно из них.

$$\forall\ E \in \mathcal{R}(S), \quad S = \Sigma_x \times \Sigma_y.$$

2. $\mu(E) < \infty$. Построим измеримую оболочку A множества E (была лемма об измеримой оболочке).

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad E \subset A_k, \quad A_k = \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{kl}, \quad A_{kl} \in S, \mu(A_k \setminus E) < \frac{1}{k}.$$

Из этого вытекает, что $\mu(A \setminus E) = 0$. Введём теперь следующие множества

$$B_n := \bigcap_{k=1}^{n} A_k, \quad D_{nm} := \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{m} A_{kl} \in S.$$

Так как оба $\in S$, для них уже теорема доказана. Кроме того, $B_n \searrow A$ при $n \to \infty$, а $D_{mn} \nearrow B_n$ при $m \to \infty$. Теперь осталось применить свойства непрерывности меры снизу и сверху. А так как для множеств из полукольца теорема доказана, то и для наших множеств будет доказана. Ну и $\mu(A \setminus E) = 0$. Значит, надо доказать ещё для множеств меры нуль.

Пусть $B = E \setminus A$, $\mu(B) = 0$. Берём точно так же измеримую оболочку C этого множества $C \supset B$. Для этой измеримой оболочки мы уже доказали теорему. Имеем интеграл

$$\int\limits_X \mu_y(C_x)\, d\mu_X = \mu(C) = \mu(B) = 0.$$

Так как $C \supset B$, то и $C_x \supset B_x$. И таким образом, мы доказали теорему полность для множества конечной меры.

Если множества σ-конечной меры, мы представляем их в виде счётного объединения конечной меры.

■

Теперь то, что оставалось без доказательства: про функцию распределения. Это как пример применения этой теоремы. Пусть (X, Σ, μ) — измеримое пространство. На множестве $E \in \Sigma$ задана неотрицательная измеримая функция $f\colon E \to \mathbb{R}_+$. Рассмотрим множество-подграфик

$$G = \big\{(x,t)\big|0 \leqslant t \leqslant f(x)\big\} \subset X \times \mathbb{R}_+.$$

Позже мы докажем, что подграфик измеримой функции есть измеримое множество. А сейчас запишем его меру, как интегралы по сечениям

$$\mu(G) = \int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_0^{\infty} \mu(G_t)\, dt = \int\limits_0^{\infty} \lambda_f(t)\, dt,$$

где G_t — функция распределения, а $\lambda_f(t) = \mu(G_t)$.

Лемма 6.1. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ измерима. Тогда её подграфик $G = \big\{(t,x)\big|0 \leqslant t \leqslant f(x)\big\} \subset X \times \mathbb{R}_+$ является измеримым относительно произведения мер $\mu \times dt$.*

Доказательство. Давайте введём множества $H_k^n = E\left(\frac{k-1}{2^n}, f, \frac{k}{2^n}\right)$ (множество точек x, для которых выполняется неравенство) и функции $h_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n}\chi_{H_k^n}(x) > f(x)$. Была у нас лемма о том, что $h_n \searrow f$.

У функции h_n подграфик измерим, а подграфик функции f будет пересечением этих подграфиков. А пересечения измеримых измеримы. ■

Работаем в тех же обозначениях для произведения измеримых пространств.

Теорема 6.3 (Фубини)**.** *Если $E \in \Sigma$ σ-конечной меры и $f \in L(E, \mu)$, то*

$$\int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_X \int\limits_{E_x} f_x\, d\mu_y\, d\mu_x = \int\limits_Y \int\limits_{E_y} f_y\, d\mu_x\, d\mu_y.$$

То есть интеграл по произведению мер равен повторному интегралу.

Доказательство. Представим f в виде разности неотрицательных функций $f = f_+ - f_-$, где $f_\pm \geqslant 0$. Это даёт нам право без ограничения общности считать, что $f \geqslant 0$. Обозначим $\lambda = \mu \otimes dt = \mu_x \otimes \mu_y \otimes dt$ в силу ассоциативности. Ещё обозначим $\nu = \mu_y \otimes dt$. Тогда $\lambda = \mu_x \otimes \nu$. Мера задана на множестве $X \times Y \times \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим подграфик $G = \big\{(x,y,t)\big|0 \leqslant t \leqslant f(x,y)\big\} \subset X \times Y \times \mathbb{R}_+$. Мы доказали, что G измеримо относительно меры λ.

Теперь давайте вычислять меру этого множества разными способами. Первый спобос: фиксируем (x, y)

$$\lambda(G) = \int\limits_E f\, d\mu.$$

С другой стороны можем фиксировать переменную x. Тогда будет подграфик сечения функции

$$\lambda(G) = \int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_X \nu(G_x)\, d\mu_X.$$

Но сам этот подграфик мы тоже можем вычислить с помощью сечений.

$$\lambda(G) = \int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_X \nu(G_x)\, d\mu_X = \int\limits_X \left(\int\limits_{E_x} f_x\, d\mu_y \right) d\mu_x.$$

А второе равенство доказывается симметрично. ∎

А теперь рассмотрим меру Лебега на $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим n экземпляров измеримых пространств $(\mathbb{R}, \Sigma_k, \mu_k)$ Лебега в $\mathbb{R}$, $k = 1\ldots, n$. Тогда можем рассмотреть измеримое пространство в $\mathbb{R}^n$

$$(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu), \quad \mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n.$$

Можно было по-другому определять, а именно сразу рассмотреть полукольцо. Но у нас была теорема единственности меры, значит, мы бы получили то же самое.

Пусть $\Delta = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ — n-мерный отрезок. Будем обозначать $R(\Delta)$ — множество функций, измеримых по Риману, а $L(\Delta)$ — множество функций, интегрируемых по Лебегу на этом отрезке. Будем рассматривать только ограниченные функции $f\colon \Delta\mathbb{R}$. Для заданной функции определим функции Бэра

$$\underline{f}(x) := \lim_{r\to 0} \inf_{x\in\Delta\cap S_r(x)} f(x), \quad \overline{f}(x) = \lim_{r\to 0} \sup_{x\in\Delta\cap S_r(x)} f(x).$$

Эти функции измеримы, поскольку множества $\Delta(\underline{f} > c)$ и $\Delta(\overline{f} < c)$ тех точек отрезка, для которых $\underline{f} > c$ и множество, где $\overline{f} < c$ открыты для любого $c \in \mathbb{R}$.

Нижняя функция будет совпадать с верхней в точке x, если и только если функция непрерывна в x.

Теорема 6.4 (Лебега о сравнении интегралов Римана и Лебега для n-мерного отрезка)**.** *Пусть функция $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ ограничена. Тогда $f \in \mathbb{R}(\Delta) \Leftrightarrow \mu(E_1) = 0$, где*

$$E_f = \left\{x \in \Delta \middle| \underline{f}(x) \neq \overline{}(x)\right\}.$$

Если $f \in R(\Delta$, то $f \in L(\Delta)$ и $\int\limits_\Delta f(x)\, dx = \int\limits_\Delta f\, d\mu$.

Доказательство. Сначала напишем одно из необходимых и достаточных условий интегрируемости. Когда нижний интеграл Дарбу совпадает с верхним. Мы устраиваем разбиение $\tau = \left\{\Delta_l\right\}_{l=1}^n$ отрезка Δ, внутренности элементов которого не пересекаются, то есть $\mathring{\Delta}_l \cap \mathring{\Delta}_{l'} = \varnothing$ при $l \neq l'$, а $\Delta = \bigcup\limits_{l=1}^m \Delta_l$.

$$\underline{D}_\tau(f) = \sum_{l=1}^m \underline{a}_l \mu(\Delta_l),\ \underline{a}_l = \inf_{\Delta_l} f(x), \quad \overline{D}_\tau(f) = \sum_{l=1}^m \overline{a}_l \mu(\Delta_l),\ \overline{a}_l = \sup_{\Delta_l} f(x).$$

Условие выглядит так

$$\underline{\int} f(x)\, dx = \sup_\tau \underline{D}(f) = \inf_\tau \overline{D}_\tau(f) = \overline{\int} f(x)\, dx.$$

Пусть $\tau_k = \left\{\Delta^{(k)}{}_l\right\}_{l=1}^{m_k}$ — последовательность разбиений, удовлетворяющая условиям

1. Диаметр $f(\tau_k) \to 0$;

2. $\tau_k \supset \tau_{k+1}$;

3. $\underline{\int} f(x)\, dx = \lim\limits_{k\to\infty} \underline{D}_{\tau_k}(f) = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m_k} \underline{a}_l^{(k)} \mu(\Delta_l^{(k)})$.

Функции $h_k(x) = \sum\limits_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^{(k)} \chi_{\Delta_l^{(l)}}(x) \nearrow \underline{f}(x),\ \forall\ x \in \mathring{\Delta}_l^{(k)},\ \forall\ k, l$. Значит, сходится почти всюду и по одной из теорем имеем

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^{(k)} \mu(\Delta_l^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Delta} h_k\,d\mu = \int\limits_{\Delta} \underline{f}\,d\mu\,d\mu.$$

Отсюда мы получаем равенства

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \int\limits_{\Delta} \underline{f}\,d\mu, \quad \overline{\int} f(x)\,dx = \int\limits_{\Delta} \overline{f}\,d\mu.$$

Мы можем их объединить

$$\int\limits_{\Delta} \underbrace{(\overline{f} - \underline{f})}_{\geqslant 0}\,d\mu, \quad \underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x).$$

Откуда мы получаем, что $\underline{f}(x) - \overline{f}(x) = 0$ почти всюду на Δ, $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$ почти всюду на Δ. И

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx = \int\limits_{\Delta} f\,d\mu.$$

■

Сейчас мы построим функцию, которая не интегрируема по Лебегу. То есть никакая ей эквивалентная не интегрируема по Риману. Берём отрезок $[0,1]$, набор $\{r_n\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ и число $0 < \varepsilon < 1$. Положим

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \varepsilon_n, r_n + \varepsilon_n), \quad \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Легко сверху оценить меру $\mu(A_\varepsilon) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2\varepsilon_n = \varepsilon$. Мера будет маленькой, но положительной. Положим

$$B_\varepsilon = [0,1] \setminus A_\varepsilon.$$

Это замкнутое множество, которое состоит только из иррациональных чисел. Оно нигде не плотно. Ну и мера этого множества $\mu(B_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$. Теперь достаточно взять функцию

$$f(x) = \chi_{B_\varepsilon}(x).$$

И сама функция не интегрируема по Риману, и её нельзя изменить на множестве меры нуль так, чтобы она стала интегрируемой по Риману.

7 Пространство L_p

Сегодня рассмотрим пространство $L_p(E,\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Распространим понятия, которые были для действительной функции.

Пусть (X, Σ, mu) — измеримое пространство, а $\mathbb{F} = \begin{cases} \mathbb{R}, \\ \mathbb{C}. \end{cases}$ $E \in \Sigma$. Функция $f\colon E\colon \mathbb{F}$, $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$, то есть $f(x) = u(x) + iv(x)$.

Определение 7.1. *f — измеримая, если u, v измеримы. $f \in L(E,\mu)$, если $u, v \in L(E,\mu)$ и $\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E u\,d\mu + i\int\limits_E v\,d\mu$.*

Все теоремы, где нет неравенств, верные для действительно значных функций, верны и для комплекснозначных. Некоторые свойства мы с вами докажем.

Утверждение 7.1. *Если $f, g \in L(E,\mu)$ и $\lambda \in \mathbb{F}$, то $f+g$, $\lambda f \in L(E,\mu)$ и*

$$\int\limits_E (f+g)\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu, \quad \int\limits_E \lambda f\,d\mu = \lambda \int\limits_E f\,d\mu.$$

Доказательство. Например, докажем последнее свойство. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, а $f = u + iv$, тогда $\lambda f = (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u)$. По определению интеграла комплекснозначной функции и по свойству линейности интеграла действительнозначной функции имеем

$$\int\limits_E \lambda f\,d\mu = \int\limits_E (\alpha u-\beta v)\,d\mu + i\int\limits_E (\alpha v+\beta u)\,d\mu = \Big(\alpha E u - \beta\int\limits_E v\,d\mu\Big) + i\Big(\alpha\int\limits_E v\,d\mu + \beta\int\limits_E u\,d\mu\Big) = \lambda\int\limits_E f\,d\mu.$$

■

Утверждение 7.2. *Пусть $f \in L(E,\mu)$. Тогда $|f| \in L(E,\mu)$ и*

$$\Big|\int\limits_E f\,d\mu\Big| \leqslant \int\limits_E |f|\,d\mu.$$

Доказательство. $|f| = \sqrt{u^2+v^2}$, как обычно. Это не превосходит $|f| \leqslant |u|+|v| \in L(E,\mu)$. Осталось доказать равенство. Представим результат интегрирования в тригонометрической форме $\int\limits_E f\,d\mu = \Big|\int\limits_E f\,d\mu\Big| \cdot e^{i\theta}$. Тогда

$$\Big|\int\limits_E f\,d\mu\Big| = e^{-i\theta}\int\limits_E f\,d\mu = \operatorname{Re} e^{-i\theta}\int\limits_E f\,d\mu = \operatorname{Re}\int\limits_E e^{-i\theta} f\,d\mu = \int\limits_E \operatorname{Re}(e^{-i\theta}f)\,d\mu \leqslant \int\limits_E |f|\,d\mu.$$

■

Утверждение 7.3. *Пусть $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$. Тогда $f_1+f_2 \sim g_1+g_2$ и $\lambda f_1 \sim \lambda g_1$.*

Это свойство очевидно. А если $f \sim g$ и $f \in L(E,\mu)$, то $g \in L(E,\mu)$. Значит, $L(E,\mu)$ есть линейное пространство и множество классов эквивалентных функций есть линейное пространство.

Мы вводили обозначение $B(E) = \big\{f\colon E \to \mathbb{F} \big| f — \text{ограничены на } E\big\}$.

Определение 7.2. *$L_\infty(E,\mu)$ — множество классов эквивалентности ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \inf\limits_{\mu(A)=0}\sup\limits_{x\in E\setminus A}\big|f(x)\big|$. Оно называется множеством существенно ограниченных функций. А норма называется существенной верхней гранью.*

Имеем $L \supset B(E)$ — подпространство, $f \sim 0$. Тогда $L_\infty(E,\mu) = B(E)\setminus L$. Мы будем обращаться с этими классами, как обыкновенными функциями.

Для каждого $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \exists\, A_n \in \Sigma\colon \mu(A_n)=0,\ \forall\, x \in E\setminus A_n\ \ \big|f(x)\big| < \|f\|_{L_\infty} + \frac{1}{n}$. Обозначим через $A_f = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu A_f = 0$ и $\|f\|_{L_\infty} = \sup\limits_{x\in E\setminus A_f}\big|f(x)\big|$. То есть нижняя грань достигается на некотором множестве меры нуль. Такое множество может быть и не одно. Оно существует, нам этого достаточно, чтобы доказать

Утверждение 7.4 (Свойства нормы)**.** *Пусть $\|f\|_{L_\infty} = 0$. Тогда $f \sim 0$. Кроме того, $\|\lambda f\|_{L_\infty} = |\lambda|\cdot\|f\|_{L_\infty}$. И неравенство треугольника.*

Доказательство. Как доказать неравенство треугольника. Запишем равенства

$$\|f\|_{L_\infty} = \sup_{x\in E\setminus A_f}\big|f(x)\big|, \quad \|g\|_{L_\infty} = \sup_{x\in E\setminus A_g}\big|g(x)\big|.$$

Положим $A = A_f \cup A_g$. Тогда

$$\|f+g\|_{L_\infty} \leqslant \sup_{x\in E\setminus A}\big|f(x)+g(x)\big| \leqslant \sup_{x\in E\setminus A_f}\big|f(x)\big| + \sup_{x\in E\setminus A_g} = \|f\|_{L_\infty} + \|g\|_{L_\infty}.$$

Вот мы и доказали все свойства нормированного пространства. ■

Теорема 7.1. *$L_\infty(E,\mu)$ — банахово пространство, то есть полное линейное нормированное пространство.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность Коши $\big\{f_n\big\} \subset L_\infty(E,\mu)$. Положим $A = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} A_{f_n-f_m}$. При этом $\mu(A)=0$ и $\|f_n-f_m\| = \sup\limits_{x\in E\setminus A}\big|f_n(x)-f_m(x)\big|$. Так как $f_n \in B(E\setminus A)$ — последовательность Коши, то по доказанному на первой же лекции $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{E\setminus A} f \in B(E\setminus A)$. Положим $f(x)=0$ на A. Тогда $f \in L_\infty(E,\mu)$ и $\|f-f_n\|_{L_\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ■

Определение 7.3. *$L_p(E,\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$ — пространство классов эквивалентности измеримых функций $f\colon E \to \mathbb{F}\colon |f|^p \in L(E,\mu)$ с нормой*

$$\|f\|_{L_p} = \Big(\int\limits_E |f|^p\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Это линейное пространство функций, суммируемых в степени p.

Заметим, что если $f,g \in L_p(E,\mu)$, то $|f+g|^p \leqslant 2^p(|f|^p+|g|^p)$ ну и ясно, что $\lambda f \in L_p(E,\mu)$. А чтобы доказать, что это нормированное пространство, надо доказать несколько неравенств.

Утверждение 7.5 (неравенство Гёльдера). *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *и* $f, g\colon E \to \mathbb{R}_+$ *и измеримы. Тогда*

$$\int\limits_E fg\,d\mu \leqslant \Big(\int\limits_E f^p\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int\limits_E g^q\,d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Причём эти интегралы могут принимать и бесконечные значения. Суммируемость не требуется.

Доказательство. Сначала докажем неравенство Юнга для чисел $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, где $a, b \geqslant 0$. Рассматриваем функции $y = x^{p-1}$ и $x = y^{q-1}$. Легко видеть, что эти функции взаимно обратные. Значит, можно посчитать интеграл слева от кривой и снизу от кривой. А площадь прямоугольника будет меньше

$$ab \leqslant \int\limits_0^a x^{p-1}\,dx + \int\limits_0^b y^{q-1}\,dy = \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}.$$

Равенство будет только в том случае, когда $a^{p-1} = b$ или, эквивалентно $a^p = b^q$.

Чтобы доказать теперь неравенство Гёльдера, введём обозначения $A = \int\limits_E f^p\,d\mu$ и $B = \int\limits_E g^q\,d\mu$. Если одно из этих чисел равно нулю или бесконечности, то неравенство очевидно. Берём $a = \frac{f}{A^{\frac{1}{p}}}$ и $b = \frac{q}{B^{\frac{1}{q}}}$. Применяем неравенство Гёльдера и интегрируем его

$$\int\limits_E ab\,d\mu \leqslant \frac{1}{p}\int\limits_E a^p\,d\mu + \frac{1}{q}\int\limits_E b^q\,d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Отсюда вытекает уже неравенство Гёльдера. Легко видеть, что равенство будет тогда и только тогда, когда $f^p = \lambda g^q$, где $\lambda = A/B$ почти всюду на множестве E. ■

Следующее неравенство

Утверждение 7.6 (неравенство Минковского). *Пусть* $f, g \in L_p(E, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда* $\|f + g\|_{L_p} \leqslant \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$.

Доказательство. В случае $p = 1$, это неравенство вытекает из элеметнарного неравенства для чисел $|f + g| \leqslant |f| + |g|$. Нужно проинтегрировать это неравенство, получим неравенство треугольника для L_1.

Пусть $p > 1$. Положим $A = \int\limits_E |f|^p\,d\mu$, $B = \int\limits_E |g|^p\,d\mu$, $C = \int\limits_E |f + g|^p\,d\mu$. Тогда

$$C = \int\limits_E |f + g| \cdot |f + g|^{p-1}\,d\mu \leqslant \int\limits_E |f| \cdot |f + g|^{p-1}\,d\mu + \int\limits_E |g| \cdot |f + g|^{p-1}\,d\mu.$$

Найдём q: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(p-1)q = p$. Тогда по неравенству Гёльдера

$$C \leqslant A^{\frac{1}{p}} \cdot C^{\frac{1}{q}} + B^{\frac{1}{p}} \cdot C^{\frac{1}{q}}, \quad C^{\frac{1}{p}} \leqslant A^{\frac{1}{p}} + B^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь когда достигается равенство. $|f + g| = |f| + |g|$ почти всюду на E и

$$\frac{|f|^p}{A} = \frac{|g|^p}{B} = \frac{|f + g|^p}{C}$$

почти всюду на E. Из этого вытекает, что $f = h \cdot g$, для $h \geqslant 0$ почти всюду на E. Подставляя, получаем $h = \big(\frac{A}{B}\big)^p$ почти всюду на E (если $g \neq 0$). Так что у нас получается, что $f = \lambda g$ и $\lambda = \big(\frac{A}{B}\big)^{\frac{1}{p}}$. То есть равенство достигается только тогда, когда функции линейно зависимы, причём с положительным коэффициентом. Значит, L_p является строго нормированным. Элемент приближения является единственным. ■

А вот это уже полезное неравенство.

Утверждение 7.7 (обобщённое неравенство Минковского). *Пусть задано два измеримых пространства* (X, Σ_x, μ_x) *и* (Y, Σ_y, μ_y), $E \in \Sigma_x$, $F \in \Sigma_y$ *и задана измеримая функция* $f\colon E \times F \to \mathbb{R}_+$, *а* $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда*

$$\Bigg(\int\limits_E \Big(\int\limits_F f_x\,d\mu_y\Big)^p d\mu_x\Bigg)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int\limits_F \Big(\int\limits_E f_y^p\,d\mu_x\Big)^{\frac{1}{p}} d\mu_y.$$

Доказательство. Нам понадобится теорема Фубини. Но это неравенство не зря называется обобщённым неравенством Минковского, так как доказывается точно так же. $g(x) = \int\limits_F f_x\,d\mu_y$ существует для почти всех

$x \in E$.

$$\int\limits_E g^p\, d\mu_x = \int\limits_E g \cdot g^{p-1}\, d\mu_x = \int\limits_F g^{p-1}\Big(\int\limits_F f_y\, d\mu_x\Big)\, d\mu_y.$$

Теперь применяем неравенство Гёльдера к произведению двух функций.

$$\leqslant \int\limits_F \Big(\int\limits_E f_y^p\, d\mu_x\Big)^{\frac{1}{p}} d\mu_y \cdot \underbrace{\Big(\int\limits_E g^p\, d\mu_x\Big)^{\frac{1}{q}}}.$$

Если поделить на скобку, получится как раз обобщённое неравенство Минковского. ■

Теорема 7.2. *$L_p(E,\mu)$ — банахово пространство при $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство. Возьмём последовательность Коши $\{f_n\} \subset L_p(E,\mu)$. Тогда существует $\{m_k\}\colon m_1 < m_2 < \ldots$ и $\|f_k - f_l\|_{L_p} < \frac{1}{2^n}\ \ \forall\, k, \geqslant m_n$. Такую подпоследовательность можно выбрать. И рассмотрим функцию (равенство имеет смысл в почти всех точках)

$$g(x) = \big|f_{m-1}(x)\big| + \sum_{n=1}^{\infty} \big|f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_n}(x)\big|.$$

Если организовать частичные суммы g_n, то $g_n \nearrow g$ (значит, и в степени p тоже монотонно возрастают), так как все члены ряда неотрицательны. Кроме того $\|g_n\|_{L_p} \leqslant \|f_{m_1}\| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \|f_{m_1}\|_{L_p} + 1$, то есть норма конечная. По теореме о монотонной сходимости $g \in L_p(E,\mu)$. И отсюда g конечна почти всду на E. Значит, ряд в определении $g(x)$ сходится почти всюду. Если снять модули, ряд будет сходиться абсолютно почти всюду

$$f(x) = f_{m_1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_n}(x)\big)$$

сходится абсолютно почи всюду. Тогда

$$f_{m_n}(x) = f_{m_1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \big(f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)\big).$$

Из того, что $|f|^p \leqslant |g|^p \in L(E,\mu)$ следует, что $f \in L_p(E,\mu)$. Если теперь вычесть частичную сумму, получим

$$f(x) - f_{m_n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \big(f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)\big).$$

Чтобы для бесконечной суммы неравенство можно было использовать, применяем теорему Фату

$$\|f - f_{m_n}\|_{L_p} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \big\|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\big\|_{L_p} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Если имеется в метрическом пространстве последовательность Коши такую, что имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сама сходится, что можно легко показать по неравенству треугольника. Значит, мы показали, что $f_n \to f \in L_p(E,\mu)$. Значит, мы доказали полноту. ■

Лемма 7.1. *Обозначим через $H(E,\mu)$ множество простых измеримых функций из $L_p(E,\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Утверждается, что $H(E,\mu)$ всюду плотно в $L_p(E,\mu)$.*

Доказательство. Раскладываем в разность неотрицательнх $f = f_+ - f_-$ и $f_\pm = \max\{\pm f, 0\}$. Мы доказывали, что $\exists\ h_n^\pm \nearrow f_\pm$, где $h_n^\pm \in H(E,\mu)$. Так как $h_n^\pm$ интегрируемы, то и $f_\pm$ будут интегрируемы. Обозначим

$$h = h_n^+ - h_n^-, \quad \|f - h\|_{L_p} \leqslant \|f_+ - h_n^+\|_{L_p} + \|f_- - h_n^-\|_{L_p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

по тереме о монотонной сходимости. ■

Теперь наша задача показать, что непрерывные функции всюду плотны в L_p. А для этого нужно вообще какую-то топологию ввести.

Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, (X,Σ,μ) — измеримое пространство с регулярной мерой и все открытые множества измеримы (а значит и замкнутые и компактные).

Теорема 7.3. *Множество $C(X)$ непрерывных ограниченных функций (тех из них, что лежат в L_p) всюду плотно в $L_p(E,\mu)$ для $1 \leqslant p < \infty$ (в отличие от леммы здесь $p < \infty$).*

Доказательство. Возьмём $f \in L_p$ и $\varepsilon > 0$. По лемме $\exists\ h \in H(E,\mu)$, такая, что $\|f - h\|_{L_p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Всякая простая функция является линейной комбинацией характеристических функций

$$h(x) = \sum_{l=1}^{m} h_l \chi_{H_l}(x), \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Существует $\exists\ A$ — компактное и $\exists$ открытое B_l, для которых $A_l \subset H_l \subset B_l$ и $\mu(B_l \setminus A_l) < \left(\frac{\varepsilon}{2c}\right)^p$, где $c = \sum\limits_{l=1}^{m} |h_k|$. У нас же функция уже фиксирована.

Напомню $\rho(x, A) = \int\limits_{y \in A} \rho(x, y)$ есть непрерывная функция, поскольку выполняется неравенство

$$\rho(x, A) \leqslant \rho(y, A) + \rho(x, y) \Rightarrow \big|\rho(x, A) - \rho(y, A)\big| \leqslant \rho(x, y).$$

Доказательство. Доказательство этого неравенства простое $\rho(x, A) \leqslant \big|\rho(x, z) - \rho(z, y)\big| + \rho(z, y) \leqslant \rho(x, y) \quad \forall\ z \in A$. □

Ну теперь давайте построим функцию $g(x) \sum\limits_{l=1}^{m} h_l g_l(x)$, $g_l(x) = \frac{\rho(x, X \setminus B_l)}{\rho(x, A_l) + \rho(x, X \setminus B_l)}$. При этом $0 \leqslant g_l(x) \leqslant 1$, $g_l(x) = 1$, есил $x \in A_l$, $g_c(x) = 0$, если $x \in X \setminus B_l$, то есть $x \notin B_l$. Все эти функции непрерывны:

$$\|\chi_{H_l} - g_l\|_{L_p} \leqslant \mu^{\frac{1}{p}}(B_l \setminus A_l) < \frac{\varepsilon}{2c}.$$

И по неравенству Минковского получаем

$$\|h - g\|_{L_p} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|f - g\|_{L_p} \leqslant \|f - h\|_{L_p} + \|g - h\|_{L_p} < \varepsilon.$$

■

Закончим таким следствием

Следствие 7.1. *В $L_p[0, 1]$, где $1 \leqslant p < \infty$ всюду плотно множество*

1. *$H([0, 1])$ простых функций;*
2. *$C[0, 1]$;*
3. *$\widetilde{C}[0, 1]$, $f(0) = f(1)$;*
4. *S — ступенчатые функции; для некоторого разбиения $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < 1 \quad f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{[x_{k-1}, x_k]}(x)$;*
5. *P — множество алгебраических многочленов, то есть $P(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x^k$;*
6. *T — тригонометрических многочленов $T(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi i k x}$;*
7. *$C^\infty[0, 1]$.*

8 Линейные операторы

Пусть E, F обозначают нормированные пространства над полем $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Норму будем в этих пространствах обозначать одинаково $\|x\|$.

Определение 8.1. *Отображение $A \colon E \to F$ называется линейным оператором, если выполнено два условия*

$$A(x + y) = A(x) + A(y); \quad A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad \forall\ x, y, \in E\ \forall\ \lambda \in \mathbb{F}.$$

Норма линейного оператора определяется как

$$\|A\| = \sup_{x \in S} \big\|A(x)\big\|, \quad S := \big\{x \in E \big| \|x\| \leqslant 1\big\}.$$

Можно ввести эквивалентное определение для нормы

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\big\|A(x)\big\|}{\|x\|}.$$

Определение 8.2. *Оператор A называется ограниченным, если $\forall\ M \subset F$ ограниченного множества образ $A(M) = \{y = A(x) \big| x \in M\}$ является ограниченным в F.*
Определение 8.3. *Если M находится в некотором шаре, то есть $M \subset S_r(x)$, то M называется ограниченным.*

Мы вводили сложное определение ограниченных множеств, оно здесь годится. А наше новое более простое определение не годится для произвольного метрического, только для нормированных.

Если норма оператора конечна, если и только если оператор ограничен. Мы с вами доказывали, что оператор ограничен, значит, непрерывен во всех своих точках.

Приведём пример $A\colon L_p(E,\mu) \to L_p(E,\mu)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и определяеся по формуле $A(f) := \varphi f$, где φ — ограниченная измеримая функция. Этот оператор называется оператором умножения на функцию. Докажем, что

$$\|A\| = \|\varphi\|_{L_\infty}.$$

Доказательство. Давайте вычислять норму.

$$\big\|A(f)\big\|^p = \int\limits_E |\varphi \cdot f|^p \, d\mu.$$

Поскольку интеграл не зависит от изменения функции на множестве меры нуль, здесь будет такое неравенство

$$\big\|A(f)\big\|^p = \int\limits_E |\varphi \cdot f|^p \, d\mu \leqslant \|\varphi\|^p_{L_\infty} \int\limits_E |f|^p \, d\mu.$$

Извлекая корень, получаем такое неравенство

$$\|A\| \leqslant \|\varphi\|_{L_\infty}.$$

Осталось доказать обратное неравенство. Пусть $f = \chi_A$. Тогда (по определению существенной верхней грани) $\exists\ A \subset E\colon \mu(A) > 0$, такое, что

$$\forall\ x \in A \quad \big|\varphi(x)\big| > \|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon.$$

Подставим эту функцию в оператор

$$\big\|A(f)\big\|^p = \int\limits_E A\, d\mu |\varphi|^p > (\|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon)^p\, \mu(A) = (\|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon)^p \int\limits_A |f|^p \, d\mu.$$

Поскольку $\big|A(f)\big| \geqslant (\|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon)\, \|f\|$, мы и доказали, что $\|A\| \geqslant \|\varphi\|_{L_\infty}$. ■

Пусть $\mathcal{L}(E,F) = \{A\colon E \to F | A\text{ — линейный и ограниченный}\}$. Норма в этом пространстве есть $\|A\| = \sup\limits_{x\in S} \big\|A(x)\big\|$. Проверим свойства нормы

Доказательство. Сложение и умножение определяются естественно: $(A+B)(x) = A(x) + B(x)$, $(\lambda A)(x) = \lambda \cdot A(x)$.

1. Если $\|A\| = 0$, то $A(x) = 0$ для всех $x \in E$. Значит, $A = \mathcal{O}$.

2. $\|A+B\| = \sup\limits_{x\in S}[\big\|A(x) + B(x)\big\| \leqslant \sup\limits_{x\in S} \big\|A(x)\big\| + \sup\limits_{x\in S} \big\|B(x)\big\|$. Значит, $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$, а $\|\lambda A\| = |\lambda| A$.

■

Теорема 8.1. *Если F — банахово пространство, то $\mathcal{L}(E,F)$ — банахово пространство.*
Доказательство. Пусть $\{A_n\} \in \mathcal{L}(E,F)$ последовательность Коши, то есть

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N \in \mathbb{N}\colon \forall\ n,m \geqslant< \quad \|A_n - A_m\| < \varepsilon.$$

Тогда $\big\|A_n(x) - A_m(x)\big\| < \varepsilon\|x\| \quad \forall\ x \in E,\ \forall\ n,m \geqslant N$.Значит, последовательность $\big\{A_n(x)\big\} \subset F$ является последовательностью Коши в F. Значит,

$$\exists A(x) = \lim_{n\to\infty} A_n(x)$$

и это линейный оператор $A\colon E \to F$. У нас есть его сходимость в каждой точке. Покажем сходимость по норме. Устремим $m \to \infty$ в неравенстве

$$\big\|A_n(x) - A(x)\big\| \leqslant \varepsilon\|x\| \quad \forall\ x \in E,\ \forall\ n \in N.$$

■

Теорема 8.2 (Банаха—Штейнгауза)**.** *Пусть E — банахово пространство, и задано множество линейных операторов $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{L}(E,F)$, и выполнено условие*

$$\forall\ x \in E \quad \sup_{i\in I} \big\|A_i(x)\big\|.$$

Тогда отсюда вытекает, что $\sup\limits_{i\in I} \|A_i\| < \infty$.

То есть из поточечной сходимости следует сходимость по норме.

Доказательство. Все принципы равностепенной непрерывности здесь выполнены. Мы запишем условия равностепенной непрерывности в точке ноль.

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ \delta > 0\colon\ \forall\ \|x\| < \delta, \forall\ i \in I \quad \big\|A_i(x)\big\| < \varepsilon$$

в силу линейности оператора. Поделим неравенство на δ.

$$\forall\ \left\|\frac{x}{\delta}\right\| < 1,\ \forall\ i \in I \quad \left\|A_i\left(\frac{x}{\delta}\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

Отсюда вытекает, что $\|A_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}$. ■

Следствие 8.1. *Пусть E — банахово пространство. И задана последовательно линейных операторов $\{A_n\} \in \mathcal{L}(E,F)$, сходящаяся в каждой точке, то есть $\forall\ x \in E \quad A_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} A(x)$*[1]*. Тогда $\sup n\|A_n\| < \infty$.*

Это теорему очень интенсивно будем применять в следующий раз. А сейчас мы докажем очень знаменитую теорему. Для начала введём некоторые понятия.

Определение 8.4. *Пусть X — множество. Оно называется упорядоченным, если в нём задано отношение порядка $\leqslant$, то есть*

1. *$x \leqslant x$;*
2. *$x \leqslant y$ и $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$;*
3. *$x \leqslant y$ и $y \leqslant x \Rightarrow x = y$.*

Определение 8.5. *Множество $A \subset X$, где X упорядочено, называется цепью, если $\forall\ x, y \in A$ $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$. Цепь A называется ограниченной, если $\exists\ y \in X : \forall\ x \in A \quad x \leqslant y$.*

Определение 8.6. *Элемент $x \in X$, где X упорядоченно, называется максимальным, если из того, что $x \leqslant y$, следует, что $x = y$.*

Следующая лемма является аксиомой, хотя все её называют леммой. Для нас она будет аксиомой, но вообще она эквивалентна одной из аксиом теории множеств.

Лемма 8.1. *Если всякая цепь A ограничена, то в X существует максимальный элемент.*

Эту аксиому мы и будем применять для доказательства теоремы.

Пусть E — линейное пространство, $f\colon E \to \mathbb{F}$ — линейный функционал (он является линейным оператором, только действует в поле).

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$\forall\ x, y \in E, \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{F}$.

Если E — нормированное пространство, то $\|f\| = \sup\limits_{x\in S} \big|f(x)\big|$.

Определение 8.7. *Пространство $E^* = \{f\colon E \to \mathbb{F} \mid f$ — линейный и ограниченный$\}$ называется сопряжённым. Ограниченность f значит, что $\|f\| < \infty$.*

Это банахово пространство.

Будем рассматривать подпространства $L \subset E$ и линейный функционал $f\colon L \to \mathbb{F}$. Введём отношение порядка $f \leqslant g$, где $f\colon L \to \mathbb{F}$, $g\colon M \to \mathbb{F}$, если

1. $L \subset M$;
2. $\forall\ x \in L \quad g(x) = f(x)$.

Говорят, что g является расширением f на M.

Напомню определение полунорм.

Определение 8.8. $p\colon E \to \mathbb{R}_+$ *называется полунормой, если*

1. *$\forall x \in E \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;*
2. *$\forall\ x, y \in E \quad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.*

[1] А всякая сходящаяся последовательность ограничена по норме, и можно применить терему.

Пара (E, p) называется полунормированным пространством.
Теорема 8.3 (Хана—Банаха). *Пусть (E, p) — полунормированное пространство и $f\colon L \to \mathbb{F}$ — линейный функционал, $L \subset E$ (линейное подпространство) и выполнено условие*

$$\forall\ x \in L \quad \big|f(x)\big| \leqslant p(x).$$

Тогда $\exists\ g\colon E \to \mathbb{F}$ линейный функционал на всём E, такой, что

$$g\big|_L = f \ \text{и}\ \forall\ x \in E \quad \big|g(x)\big| \leqslant p(x).$$

То есть g является продолжением f с сохранением неравенства.
Доказательство. Нам для заданного функционала f нужно построить продолжение на всё пространство, причём такое, чтобы выполнялось условие ограниченности. Сначала построим продолжение для линейной оболочки. Пусть $e_1 \notin L$ и $L_1 := sp\{e_1, L\}$. Давайте попытаемся применить лемму Цорна или аксиому Цорна.

Вначале рассмотрим действительный случай, то есть $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

$$\forall\ x, y \in L \quad f(x+y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x - e_1) + p(y + e_1).$$

Для всех x и y получаем неравенство

$$f(x) - p(x - e_1) \leqslant p(y + e_1) - f(y).$$

Слева функция от x, справа — функция y. Значит,

$$\exists\ c_1 \in \mathbb{R}\colon f(x) - p(x - e_1) \leqslant c_1 \leqslant p(y + e_1) - f(y)$$

Если для некоторого $\lambda > 0$ заменить x, y на $\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}$, получаем

$$\forall\ x \in L, \forall\ \lambda > 0 \quad f(x) \pm \lambda c_1 \leqslant p(x \pm \lambda e_2).$$

Тогда мы можем определить линейный функционал на оболочке по формуле

$$\forall\ x \in L, \forall\ \lambda \in \mathbb{R} \quad f_1(x + \lambda e_1) := f(x) + \lambda e_1.$$

Аргумент, обозначим $z = x + \lambda e_1$ принадлежит именно линейной оболочке. Выполнено два условия.

(1) $\forall\ x \in L \quad f_1(x) = f(x)$.

(2) $\forall\ z \in L_1 \quad f_1(x) \leqslant p(z)$, при этом $p(-z) = p(z)$, значит, $\big|f_1(x)\big| \leqslant p(z)$.

Далее можем определить $L_2\, sp\{e_2, L_1\}$, где $e_2 \notin L_1$.

Если бы пространство имело счётную размерность, мы бы всё уже доказали.

Надо рассмотреть множество всех продолжений. Применим лемму Цорна. Существует максимальное продолжение на всё пространство.

Теперь перейдём от случая действительных чисел к комплексным числам. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $f = u + iv$, причё u, v — линейные функционалы над полем действительных чисел. Посчитаем

$$u(ix) + iv(ix) = f(ix) = if(x) = iu(x) - v(x).$$

Следовательно, $v(x) = -u(ix)$, и функционал записывается в виде

$$f(x) = u(x) - iu(ix).$$

Таким образом, функционал зависит только от своей действительной части. Построим функционал. $\exists\ h\colon E \to \mathbb{R}$ линейный функционал, такой, что $h\big|_L = u$ и $\forall\ x \in E \quad \big|h(x)\big| \leqslant p(x)$. Определяем

$$\forall\ x \in E \quad g(x) := h(x) - i(h(ix).$$

Условие $g\big|_L = f$ очевидно. Докажем, что функционал линейный над полем комплексных чисел. Достаточно доказать для ix

$$g(ix) = h(ix) - ih(x) = i\big(h(x) - ih(x)\big) = ig(x).$$

То, что он аддитивный, тоже очевидно. Ведь h аддитивный. Покажем ограниченность. Расмотрим тригонометрическое представление $g(x) = e^{i\theta}\big|g(x)\big|$. В силу линейности действительное число

$$\big|g(x)\big| = e^{-i\theta}g(x) = g(e^{-i\theta}x) = h(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = p(x).$$

■

Саму теорему применяют редко. Важно следствие.

Следствие 8.2. *Пусть E — нормированное пространство, а $L \subset E$ — линейное подпространство. И пусть задан линейный ограниченный функционал $f\colon L \to \mathbb{F}$. Тогда $\exists\ g\colon E \to \mathbb{F}$ линейный ограниченный функционал, удовлетворяющий условиям: $f\big|_L = f$ и $\|g\| = \|f\|$, то есть существует продолжение функционала на всё пространство с сохранением его нормы.*

Доказательство. Берём $p(x) = \|f\|_L \cdot \|x\|$. Это норма, но она будет и полунормой. Тогда

$$\exists\ g\colon E \to \mathbb{F}\colon g\big|_L = f,\ \big|g(x)\big| \leqslant \|f\|_L \cdot \|x\| \big|g(x)\big| \Rightarrow \|g\| \leqslant \|f\|.$$

Тогда, поскольку $\|f\|_L = \sup\limits_{x \in S \cap L} \big|f(x)\big|$, а норма g считается, как sup по большему множеству, $\|g\| = \|f\|$. ■

Теорема 8.4 (Рисса)**.** *Если функционал $\alpha \in C^*[a,b]$, то есть функционал является линейным и ограниченным, определённым на пространстве $C[a,b]$*[1]*, то $\exists\ F \in BV[a,b]$, такая, что*

1. $\forall\ f \in C[a,b] \quad \alpha(f) = \int\limits_a^b f\,dF$;
2. $\|\alpha\| = \mathrm{Var}(F)$.

Доказательство. Так как $C[a,b] \subset B[a,b]$, существует продолжение $\alpha \in B^*[a,b]$ по следствию из теоремы Хана—Банаха. (Не будем вводить новую букву, пусть тоже α.) Рассмотрим $F(t) = \alpha\left(\underbrace{\chi_{[a,t)}}_{u_t}\right)$[2], $t \in [a,b]$, $F(a) = 0$.

Рассмотрим разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \big|F(x_k - F(x_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k}\big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) =$$

Подставим определение функции F

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k}\big(\alpha(u_{x_k}) - \alpha(u_{x_{k-1}})\big) = \alpha\Bigg(\sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k}\big(u_{x_k} - u_{x_{k-1}}\big)\Bigg).$$

Заметим, что

$$\Bigg|\sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k}\big(u_{x_k} - u_{x_{k-1}}\big)\Bigg| \leqslant 1.$$

Значит,

$$\alpha\Bigg(\sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k}\big(u_{x_k} - u_{x_{k-1}}\big)\Bigg) \leqslant \|\alpha\|.$$

Таким образом, доказано $\mathrm{Var}_a^b(F) \leqslant \|\alpha\|$.

Возьмём $f \in C[a,b]$, для разбиения τ возьмём также $f_\tau(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big(u_{x_k} - u_{x_{k-1}}\big)$, где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Так как функция непрерывна, $f_\tau \xrightarrow[d(\tau)\to 0]{} f$.

$$\alpha(f) = \lim_{d(\tau)\to 0} \alpha(f_\tau) = \lim_{d(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) = \int\limits_a^b f\,dF.$$

Это и есть интеграл Римана—Стилтьеса. Ну а модуль оценивается

$$\Bigg|\int\limits_a^b f\,dF\Bigg| \leqslant \lim_{d(\tau)\to 0} \sum_{j=1}^{n} \big|f(\xi_k)\big|\big|F(x_k) - F(x_{k-1})\big|.$$

Значит, $\|\alpha\| \leqslant \mathrm{Var}_a^b(F) \leqslant \|f\|_C \mathrm{Var}_a^b(F)$. ■

Теперь сформулируют ещё одну теорему без доказательства.

Теорема 8.5 (Рисса)**.** *Если $\alpha \in L_p^*(E,\mu)$, где $1 \leqslant p < \infty$, то $\exists\ g \in L_q(E,\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, такая, что*

---

[1] Для тех, кто не знает, что такое $C[a,b]$ — это пространство непрерывных функций $f\colon [a,b] \to \mathbb{F}$ и $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big|$.

[2] Полуинтервал для непрерывности слева. Доказывать не буду, доказательство очень кропотливое.

1. $\forall\, f \in L_p(E,\mu) \quad \alpha(f) = \int\limits_E fg\,d\mu$;

2. $\|\alpha\| = \|g\|_{L_q}$.

Следствие 8.3. *$L_p^*(E,\mu) = L_1(E,\mu)$ для $1 \leqslant p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

А для непрерывных имеем $C^*[a,b] = V_0[a,b]$, причём

1. $F \in BV[a,b]$;

2. $\forall\, t \in (a,b) \quad F(t-0) = F(t)$;

3. $F(a) = 0$.

9 Сильная и слабая сходимости линейных операторов и линейных функционалов

Пусть E, F — нормированные пространства, $\mathcal{L}(E,F)$ — пространство ограниченных операторов.

Определение 9.1. *Последовательность операторов $\{A_n\} \in \mathcal{L}(E,F)$ сходится сильно $A_n \to A$ к оператору A, если*

$$\forall\, x \in E \quad \lim_{n\to\infty} A_n(x) = A(x).$$

Сходится равномерно, если $\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то есть сходится по норме.

Сильная сходимость — это поточечная сходимость, а равномерная значит по норме.

Соответственно вводится понятия сильной и равномерной ограниченности.

Определение 9.2. *Подмножество $M \subset \mathcal{L}(E,F)$ равномерно ограничено, если*

$$\exists C > 0 \colon \forall\, A \in M \quad \|A\| \leqslant C.$$

Определение 9.3. *$M \subset \mathcal{L}(E,F)$ сильно ограничено, если*

$$\forall\, x \in E \exists\, C_x > 0 \colon \forall\, A \in M \quad \big\|A(x)\big\| \leqslant C_x.$$

Давайте свойства обсудим.

Утверждение 9.1. *Если $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ равномерно, то схоится сильно.*

Доказательство. Доказательство почти очевидно.

$$\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \big\|A_n(x) - A(x)\big\| \leqslant \|A_n - A\| \cdot \|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \forall\, x \in E.$$

■ Надо понимать, что сходимость здесь везде по норме. Просто в сильной сходимости сходимость по норме F.

Нужно сделать следующее замечание. Если $\dim E < \infty$, то верно и обратное утверждение. Я его доказывать не буду, это можно сделать, пользуясь теоремой об эквивалентности норм в конечномерном пространстве.

Утверждение 9.2. *Если $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ сильно, то $\{A_n\}$ сильно ограничена, и выполнено вот такое неравенство*

$$\|A\| \leqslant \underline{\lim}\, \|A_n\|.$$

Неравенство очень похоже на лемму Фату.

Доказательство. Первое свойство почти очевидно. Если сходится для каждого x, то ограничена по норме F. Отсюда и следует сильная ограниченность.

Докажем неравенство.

$$\exists\, \{n_k\} \colon \lim_{k\to\infty} \|A_{n_k}\| = \underline{\lim}\, \|A_n\|$$

по определению нижнего предела. Так как норма является непрерывной функцией, а последовательность сходится в каждой точке, имеем

$$\big\|A(x)\big\| = \lim_{k\to\infty} \big\|A_{n_k}(x)\big\| \leqslant \lim_{k\to\infty} \|A_{n_k}\| \cdot \|x\| =$$

последнее по определению нормы оператора. Отсюда получаем

$$= \underline{\lim}\, \|A_n\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|A\| \leqslant \underline{\lim}\, \|A_n\|.$$

■

Давайте приведём один пример, когда последовательность сходится сильно, но не сходится равномерно. В конечномерном пространстве вы такой пример не приведёте. Примеров всё же много. Мы рассмотрим пространство $L_p(E,\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$ и рассмотрим последовательность

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n E, \quad 0 < \mu(E \setminus E_n) \to 0.$$

Например, можно взять $E = [0,1]$ и $E_n = [1/n, 1]$. Рассмотрим оператор

$$A_n f = \varphi \cdot f, \quad \varphi_n = \chi_{E_n} = \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Мы даже считали норму такого оператора уже.

$$\|A_n f - f\|^p = \int\limits_{E \setminus E_n} |f|^p \, d\mu.$$

Но так как $E \setminus E_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то по абсолютной непрерывности интеграла Лебега, сам интеграл стремится к нулю. Таким образом, $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} I$ ссходится сильно к тождественному оператору. Но

$$\|A_n - I\| = \|\chi_{(E \setminus E_n)}\|_{L_\infty} = 1.$$

Просто потому, что она будет равняться верхней грани функции на множестве. Значит, не сходится равномерно, причём вообще ни к какому оператору.

Утверждение 9.3. *Пусть E — банахово пространство. Тогда $M \subset \mathcal{L}(E,F)$ сильно ограничено, если и только если M равномерно ограничено.*

Доказательство. Необходимость по теореме Банаха—Штенгауза, а достаточность из неравенства

$$\big\|A(x)\| \leqslant \underbrace{\|A\|}_{\leqslant C} \cdot \|x\|.$$

Справа же стоят нормы, равномерно ограниченные. ■

Лемма 9.1. *Пусть E — банахово пространство, $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(E,F)$ и $A_n \to A$ сильно. Тогда оператор A тоже является ограниченным, то есть $A \in \mathcal{L}(E,F)$.*

Доказательство. По теореме Банаха—Штенгауза верхняя грань $\sup\limits_n \|A_n\| \leqslant C$, то есть конечна. А значит оператор будет ограничен, поскольку $A(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)$, $\forall\, x \in E$ и $\|A\| = \underline{\lim} \, \|A_n\|$. ■

Определение 9.4. *Пусть $K \subset E$ — система элементов. Через M обозначаем $M = \overline{\mathrm{sp}}(K)$ — замкнутую линейную оболочку.*

$$\mathrm{sp}(K = \left\{ y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{F},\ x_i \in K \right\},$$

$K \subset E$ называется полной, если $\overline{\mathrm{sp}}(K) = E$.

Теорема 9.1 (критерий сильной сходимости)**.** *Пусть E, F — банаховы пространства, $\{A_n\} \in \mathcal{L}(E,F)$. Тогда $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ сильно, если и только если*

(1) $\sup\limits_n \|A_n\| < \infty$;

(2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) = A(x)$, $\forall\, x \in K$, где $K \subset E$ — некоторая полная система.

Доказательство. Необходимость очевидна. Первое условие вытекает из следствия теоремы Банаха—Штенгауза. А второе условие прямо из определения вытекает. Так что нужно доказать достаточность.

Обозначим $L = \mathrm{sp}(K)$. Тогда из условия два вытекает $\forall\, x \in K \;\; \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) = A(x)$. Значит, L всюду плотно в E. Значит, $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\forall\, x \in E \quad \exists\, y \in L\colon \|x - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4C},$$

где $C > \sup\limits_n \|A_n\|$ (можно было равно написать, но с делением на ноль надо было бы быть аккуратнее). Далее

$$\exists N \in \mathbb{N}\colon \forall\, n, m \geqslant N \quad \big\|A_n(y) - A_m(y)\big\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

И запишем неравенство треугольника

$$\big\|A_n(x) - A_m(x)\big\| \leqslant \big\|A_n(x) - A_n(y)\big\| + \big\|A_n(y) - A_m(y)\big\| + \big\|A_m(y) - A_m(x)\big\|.$$

Второе слагаемое $< \frac{\varepsilon}{2}$, а для первого и третьего слагаемых нужно ещё написать такое неравенство

$$\forall\ n, m \geqslant N \quad \big\|A_n(x) - A_n(y)\big\| \leqslant \|A_n\| \cdot \|x - y\|.$$

И всё будет меньше ε. В силу полноты F A_n будет сходиться и по лемме оператор будет ограничен. ∎

9.1 Функционалы

С операторами мы закончили. Переходим к функционалам.

Определение 9.5. *$\{f_n\} \subset E^*$ слабо* сходится, если*

$$\forall\ x \in E \ \ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

. Сходится слабо, если сходится в каждой точке.

Множество функционалов $M \subset E^*$ называется слабо* органиченным, если

$$\forall\ x \in E \exists\ C_X > 0\colon \quad \forall\ f \in M \quad \big|f(x)\big| \leqslant C_X.$$

Далее свойства легко переносятся из того, что мы только делали для операторов. И я передоказывать не буду.

Утверждение 9.4. *Если $f_n \to f$ по норме, то $f_n \to f$ сходится* слабо.*

Утверждение 9.5. *Если $f_n \to f$ сходится слабо*, то $\{f_n\}$ слабо* ограничено.*

Утверждение 9.6. *Пусть E — банахово пространство. Тогда $M \subset E^*$ слабо* ограничено, если и только если M ограничено по норме.*

Ну и давайте запишем критерий.

Теорема 9.2 (критерий слабой* сходимости)**.** *Пусть E — банахово пространство. Тогда $\{f_n\} \subset E^*$ сходится слабо к f, если и только если*

(1) $\sup\limits_n \|f_n\| < \infty$;

(2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall\ x \in K$, где K — некоторая полная система элементов.

Пример. Пусть $(X, \rho$ — метрическое пространство. $C(X)$ — пространство ограниченных непрерывных функций и sup-нормой. Возьмём последовательность $x_n \in X$, $x \in X\colon x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Для каждой точки рассмотрим функционал Дирака

$$\delta_{x_n}(f) := f(x_n).$$

Имеем $\forall\ f \in C(X) \quad \delta_{x_n}(f) = f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) - \delta_x(f)$, то есть $\delta_{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta_x$ сходится слабо*. При этом $\|\delta_n - \delta\| = 2$ для отрезка и не стремится к нулю. Значит, последовательность не сходится по норме.

Теорема 9.3. *Отображение $J\colon E \to E^{**}$, определённое по формуле $J(x) = \delta_x$, где $\delta_x(f) := f(x) \quad \forall\ f \in E^*$ — функционал Дирака из второго сопряжённого пространства (если докажем, что он ограничен). Тогда J является изометричным отображением, то есть*

$$\forall\ x \in E \quad \big\|J(x)\big\| = \|x\|.$$

Считается, что пространство является подпространством своего второго сопряжённого. Введём перед доказательством определение.

Определение 9.6. *Если $J(E) = E^{**}$, E называется рефлексивным.*

Простанство $L_p(E, \mu)$ рефлексивно, если $1 < p < \infty$. Это вытекает из теоремы, которую мы не доказывали, об общем виде функционалов в L_p^*.

Доказательство. Пусть $S^* \subset E^*$ — единичный шар, то есть

$$S^* = \big\{f \in E^* \big| \|f\| \leqslant 1\big\}.$$

Тогда $\forall\ x \in E, \forall\ f \in S^* \quad \big|f(x)\big| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| \leqslant \|x\|$. Отсюда вытекает, что норма функционала Дирака оценивается $\|\delta_x\| \leqslant 1$. Таким образом, так как $J(x) = \delta_x$, $\big\|J(x)\big\| \leqslant \|x\|$.

Осталось доказать обратное неравенство. Для этого применим теорему Хана—Банаха. Берём линейную оболочку фиксированного элемента x и определим функционал

$$L = \mathrm{sp}\{x\}, \quad f(\lambda x) := \lambda\|x\|, \quad \|f\|_L = 1.$$

По теореме Хана—Банаха существует функционал $g \in E^*$, у которого норма $\|g\| = 1$ и $g(y) = f(y) \quad \forall\, y \in L$. Тогда $\delta_x(g) = g(x) = \|x\|$. Значит, $\|\delta_x\| = \|x\|$. Значит, имеет место нужное равенство. ∎

Определение 9.7. *Последовательность элементов $\{x_n\} \subset E$ нормированного пространства сходится слабо (уже без звёздочки, так как это для элементов, а не для функционалов), если*

$$\forall\, f \in E^* \quad \exists\, \lim f(x_n) = f(x).$$

Множество $M \subset E$ слабо ограничено, если

$$\forall\, f \in E^* \quad \exists\, C_f > 0\colon \forall\, x \in E \quad \bigl|f(x)\bigr| \leqslant C_f.$$

Одни и те же объекты можно интерпретировать как элементы и как функционалы на пространствах.

Утверждение 9.7. *Если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ по норме, то $x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ слабо.*

Утверждение 9.8. *Если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ слабо, то $\{x_n\}$ слабо ограничена и $\|x\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.*

Утверждение 9.9. *Множество $M \subset E$ слабо ограничено, если и только если ограничено по норме*[1].

Теорема 9.4 (критерий слабой сходимости)**.** *$\{x_n\} \subset E$ слабо сходится $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in E$, если и только если выполнено два условия*

(1) Нормы равномерно ограничены, то есть $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$;

(2) $\forall\, f \in K \subset E^* \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, где K — некоторая полная система элементов.

Давайте ещё один примерчик. Слабая сходимость в $C[a,b]$. Утверждается, что последовательность функций $\{f_n\} \subset C[a,b]$ $f_n \to f \in C[a,b]$ слабо, если и только если

(1) $\sup\limits_n \|f_n\| < \infty$;

(2) $\forall\, x \in [a,b] \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Доказательство. Необходимость вытекает из критерия. Для второго условия нужно в качестве x_n взять функционалы Дирака.

А достаточность вот как. Мы знаем, что всякий $\alpha \in C^*[a,b]$ является интегралом Римана—Стилтьеса $\alpha(f) = \int\limits_a^b f\,dF$. Интеграл Римана—Стилтьеса совпадает с интегралом Лебега—Стилтьеса, для которого есть теорема о предельном переходе. ∎

Определение 9.8. *Нормированное пространство E называется сепарабельным, если в E существует счётная полная система элементов $K = \{x_n\}$.*

Построим метрику в сопряжённом пространстве.

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\bigl|f(x_n) - g(x_n)\bigr|}{1 + \bigl|f(x_n) - g(x_n)\bigr|}, \quad f, g \in E^*. \tag{6}$$

Вот такую обычно пишут в учебниках. Можно и по-другому. А какие свойства выполнены?

(1) $\rho(f,g) = \rho(g,f)$;

(2) $\rho(f,g) \leqslant \rho(f,h) + \rho(h,g)$;

(3) $\rho(f,g) = 0 \Rightarrow f(x_n) = g(x_n) \quad \forall\, n$. Значит, $\forall\, y \in L \quad f(y) = h(y)$, то есть $f = g$.

Доказательство. Неравенство треугольника. Берём функцию $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ для $t \geqslant 0$. Очевидно

$$\varphi(a+b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b).$$

В определение (6) в модуле прибавляем и вычетаем $\pm h$ и раскрываем по неравенству треульника для чисел. ∎

То есть мы получаем метрическое пространство. Мы будем эту метрику рассматривать лишь на единичном шаре.

Лемма 9.2. *Последовательность $\{f_n\} \subset S^*$ сходится слабо* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$, *если и только если $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ в (S^*, ρ). Иными словами, слабая сходимость равносильна сходимости по метрике.*

[1] Условие банаховости не нужно, так как функционал Дирака рассматривается на сопряжённом пространстве, а оно всегда банахово.

Доказательство. Необходимость. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. $\exists\ m \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\exists\ N \in \mathbb{N}\colon \forall\ n \geqslant N, \forall\ k \in \{1, \ldots, m\} \quad \bigl|f_n(x_k) - f(x_k)\bigr| < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Следовательно, в метрике знаменаль отбрасываю и 2^m тоже отбрасываю и будет неравенство.

$$\rho(f_n, f) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \bigl|f_n(x_k) - f(x_k)\bigr| + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Значит, доказали необходимость.

Достаточность. Пусть $\forall\ n \geqslant N \quad \rho(f_n, f) < \varepsilon$. Тогда каждое слагаемое в сумме $< \varepsilon$, то есть

$$\frac{\bigl|f_n(x_k) - f(x_k)\bigr|}{1 + \bigl|f_n(x_k) - f(x_k)\bigr|} < 2^k\varepsilon.$$

Значит, $\bigl|f_n(x_k) - f(x_k)\bigr| < \frac{2^k\varepsilon}{1-2^k\varepsilon}$. И $0 < \varepsilon < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. ∎

Ну и осталось только теорему доказать.

Теорема 9.5. *Пусть E — сепарабельное пространство. Тогда шар (S^*, ρ) является слабо* компактным метрическим пространством (всякая последовательность имеет слабо сходящуюся подпоследовательность).*

Доказательство. Рассмотрим $\{f_n\} \subset S^*$. Докажем, что эта последовательность сходится на множестве $k = \{x_n\}$ — счётной и полной системе в E. Берём последовательность $\bigl\{f_n(x_1)\bigr\}_{n=1}^{\infty}$. Это ограниченная последовательность чисел. Она имеет сходящуюся подпоследовательность $\bigl\{f_n^{(1)}(x_1)\bigr\}$.

Далее берём $\bigl\{f_n^{(1)}(x_2)\bigr\}_{n=1}^{\infty}$. Это ограниченная последовательность чисел. Она имеет сходящуюся подпоследовательность $\bigl\{f_n^{(2)}(x_2)\bigr\}$.

И так далее.

Берём диагональную последовательность $f_{m_n} = f_n^{(n)} \subset \{f_n\}$. Поскольку последовательность диагональная, она будет сходиться в каждой точке $x_n \in K$. Ну всё, значит мы имеем ограниченную подпоследовательность, сходяющуся в каждой точке полной системы элементов. Очевидно, она сходится слабо $f_{m_n} \to f \in S^*$. И теорема доказана. ∎