

1 Измеримые множества

Далее мы через $\bar{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \sqcup \{\infty\}$ будем обозначать множество неотрицательных чисел и добавленный символ бесконечности, при этом будут выполнены следующие аксиомы: $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad a + \infty = \infty, a \cdot \infty = \infty (a \neq 0), 0 \cdot \infty = 0$ и $a < \infty, \infty \leq \infty$.

Какая-то из этих аксиом понадобится, только когда будем рассматривать интеграл Лебега.

Определение 1.1. $\mu: 2^X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ называется внешней мерой, если

(1) Мера пустого множества равна нулю $\mu(\emptyset) = 0$,

(2) $\mu A \leq \mu B$, если $A \subset B$,

(3) $\mu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Определение 1.2. Множество $E \subset X$ называется измеримым (относительно внешней меры μ), если

$$\mu A = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall A \subset X.$$

В силу свойства 3 полуаддитивности внешней меры, достаточно доказывать только неравенство

$$\mu A \geq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall A \subset X,$$

чтобы показать измеримость множества.

Давайте введём ещё одно обозначение $AB := A \cap B$, $A' := X \setminus A$, $\mu_A(B) := \mu(AB)$.

Тогда легко понять, что E измеримо, если и только если $\forall A \subset X \quad \mu_A(X) = \mu_A(E) + \mu_A(E')$.

Давайте ещё через Σ будем обозначать совокупность всех измеримых множеств относительно внешней меры μ .

1.1 Некоторые свойства измеримых множеств

Утверждение 1.1. Если $\mu E = 0$, то $E \in \Sigma$.

Доказательство. Это вытекает из того, что $\mu_A(E) = 0$ из монотонности меры $\forall A$, и тоже в силу монотонности $\mu_A(X) \geq \mu_A(E) + \mu_A(E')$. А мы уже знаем, что этого неравенства достаточно. ■

Утверждение 1.2. Если $E_1, E_2 \in \Sigma$, то $E = E_1 E_2 \in \Sigma$.

Доказательство. Для доказательства запишем следующие равенства:

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1')$$

в силу измеримости E_1 . А в силу измеримости E_2 можем записать такое неравенство

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1') = \mu_{AE_1}(E_2) + \mu_{AE_1}(E_2') + \mu_A(E_1') = \mu_A(E) + \underbrace{\mu_A(E_1 E_2')}_{E_2' \subset E'} + \underbrace{\mu_A(E_1' E_2')}_{E_1' \subset E'} = \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

Утверждение 1.3. Если $E \in \Sigma$, то $E' \in \Sigma$.

Доказательство. Это вытекает из того, что второе дополнение $E'' = E$ есть само множество. И отсюда $\mu_A(X) = \mu_A(E') + \mu_A(E'')$. ■

Утверждение 1.4. Если $E_1, E_2 \in \Sigma$, то и разность $E_1 \setminus E_2$, $E_1 \cup E_2 \in \Sigma$.

Доказательство. Это вытекает из таких простых равенств: $E_1 \setminus E_2 = E_1 E_2'$, $E_1 \cup E_2 = (E_1' E_2')'$. ■

Таким образом система измеримых множеств является алгеброй. Очевидно же из определения вытекает, что $\emptyset, X \in \Sigma$.

Утверждение 1.5. Функция $\mu_A: \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ является конечно аддитивной мерой на алгебре¹

Доказательство. Пусть $E = E_1 \sqcup E_2$, $E_1, E_2 \in \Sigma$. Тогда в силу измеримости

$$\mu_A(E) = \mu_{AE}(E_1) + \mu_{AE}(E_2) = \mu_A(\underbrace{EE_1}_{E_1}) + \mu_A(\underbrace{EE_2}_{E_2}) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_2)$$

Ну и основная теорема.

Теорема 1.1 (Каратеодори). Пусть $\mu: 2^X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ внешняя мера. Тогда

(1) Σ — σ -алгебра;

(2) $\mu: \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ — σ -аддитивная мера.

¹ Потом мы докажем и σ -аддитивность.

Доказательство. Пусть $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \in \Sigma$. Обозначим $F_n = \bigcup_{k=1}^n E_k$, $F_n \in \Sigma$.

Для любого $A \subset X$

$$\mu_A(X) = \mu_A(F_n) + \mu_A(F'_n) \geq \sum_{k=1}^n \mu_A(E_k) + \mu_A(E').$$

Устремляем $n \rightarrow \infty$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E') \geq \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

Получаем $\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$, $E \in \Sigma$, $\mu_A(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E')$. ■

Пусть $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$, $S \subset 2^X$ — полукольцо, и мера m σ -аддитивна. Будем также полагать, что она σ -конечна, то есть X представимо в виде

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in S.$$

У нас мера конечно, поэтому этого будет достаточно.

Определение 1.3. Мера заданная на совокупности всех подмножеств $m^*: 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ называется внешней мерой Лебега, если

$$m^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Инфинум по всем счётным покрытиям.

Сейчас мы докажем, что внешняя мера Лебега является внешней мерой.

Доказательство. Обозначение (X, Σ, ν) — измеримое пространство где Σ — σ -алгебра измеримых множеств $\mu = m^*$, $\nu := \mu|_{\Sigma}$.

- (1) $m^*(\emptyset) = 0$ очевидно;
- (2) $m^*(A) \leq m^*(B)$, если $A \subset B$ тоже;
- (3) $M^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$, если $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n$.

Докажем третье: если $\exists n: m^*(A_n) = \infty$, то утверждение верно.

Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \quad m^*(A_n) < \infty$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B_{nk} \in S: A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} m(B_{nk}) < m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Отсюда вытекает, что A содержится в двойном объединении

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \quad m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m(B_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon.$$

Ещё одно свойство запишем и сделаем перерыв. ■

Утверждение 1.6. Если $A \in S$, то $m^*(A) = m(A)$

Доказательство. Это вытекает из такого неравенства:

$$m^*(A) \leq m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),$$

если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in S$. ■

Теорема 1.2 (о продолжении меры). Пусть $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ — σ -аддитивная мера. Тогда

- (1) Внешняя мера $\mu := m^*: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ σ -аддитивная;
- (2) Σ является σ -алгеброй;
- (3) $S \subset \Sigma$;
- (4) $\mu|_S = m$.

Доказательство. Всё, кроме свойства три, доказано в теореме Коритоадори. Докажем 3. Пусть у нас $E \in S$, $A \subset X$ — произвольно множество, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists B_n \in S: A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Ну теперь применим свойство полуаддитивности и запишем следующее равенство (воспользуемся полуаддитивностью внешней меры)

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(m(B_n \cap E) + m(B_n \setminus E))}_{m(B_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, тут везде знаки равенства и $E \in \Sigma$. ■

Следствие 1.1. *Полукольцо содержится в наименьшем кольце, которое содержится в наименьшем σ -кольце, которое содержится в наименьшей σ -алгебре, содержащейся в Σ , то есть*

$$S \subset \mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}_\sigma(S) \subset \mathcal{A}_\sigma(S) \subset \Sigma.$$

Теорема 1.3 (о единственности продолжения меры). *Пусть $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ σ -аддитивная и σ -конечная мера. Тогда $\exists!$ σ -аддитивная мера, которая продолжает меру m на σ -алгебру.*

Доказательство. Докажем для случая $\mu(X) < \infty$ (иначе разобьём множество на измеримые). Пусть имеются два продолжения $\mu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\nu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, где $\mu = m^*$. Тогда $\forall E \in \Sigma \quad \nu E \leq \mu(E)$, ведь на $S \quad \mu|_S = \nu|_S = m$. Осталось заметить, что в силу аддитивности этих мер

$$\nu(E) + \nu(E') = m(X) = \mu(E) + \mu(E').$$

Отсюда видим, что $\nu(E) = \mu(E)$. ■

Лемма 1.1 (об измеримой оболочке). *Пусть $\mu = m^*$ — внешняя мера Лебега. Тогда $\forall A \subset X \quad \exists B \in \Sigma: A \subset B$ и $\mu(A) = \mu(B)$.*

Доказательство. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists B_{nk} \in S: A \subset B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ и $\mu(B_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{nk}) < \mu(A) + \frac{1}{n}$ по определению нижней грани, которая присутствует в определении внешней меры Лебега.

Обозначим $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \Sigma$, $A \subset B$. Имеем

$$\mu(B) \leq \mu(B_n) \leq \mu(A) + \frac{1}{n}.$$

Ну и поскольку n произвольно, то получается равенство. ■

Определение 1.4. *Пусть $\mu = m^*$ и $\mu(X) < \infty$. Множество $E \subset X$ называется измеримым по Лебегу, если $\mu(X) = \mu(E) + \mu(E')$.*

Ясно, что если множество измеримо, то оно измеримо по Лебегу. Докажем обратное.

Доказательство. Пусть E измеримо по Лебегу. Тогда существует по лемме об измеримой оболочке

$$\exists A, B \in \Sigma: E \subset A, E' \subset B, \mu(E) = \mu(A), \mu(A') = \mu(B).$$

Отсюда вытекает, что $A \cup B = X$ и $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ в силу аддитивности (ну надо на картинку посмотреть, ведь множества A и B измеримы). Это всё равно

$$\mu(A \cap B) = \mu(E) + \mu(E') - \mu(X) = 0.$$

Ну а множество меры нуль измеримо, то есть $A \cap B \in \Sigma$. Так как $A \setminus E \subset A \cap B$, $\mu(A \setminus E) = 0$ и разность тоже измерима. Поэтому множество E можно записать как

$$E = A \setminus (A \setminus E) \in \Sigma.$$

Значит эти определения конечной меры эквивалентны. ■

Теорема 1.4 (критерий измеримости Ваме—Гуссейна). *Пусть $\mu = m^*$ и $\mu(X) < \infty$. Тогда*

$$E \in \Sigma \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathcal{R}(S): \mu(E \Delta B) < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $E \in \Sigma$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists A_k \in S: E \subset A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и по определению

нижней грани

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leq \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Существует n , для которого $\sum_{k=n+1}^{\infty} m(A_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$. Тогда

$$\mu(E \Delta B_n) \leq \mu(E \setminus B_n) + \mu(B_n \setminus E) \leq \mu(A \setminus B_n) + \underbrace{\mu(A \setminus E)}_{B_n \subset A} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} m(A_k) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть $E \subset B \cup (E \Delta B)$. Из этого вытекает

$$|\mu(E) - \mu(B)| \leq \mu(E \Delta B) < \varepsilon, \quad |\mu(E') - \mu(B')| \leq \mu(E' \Delta B') = \mu(E \Delta B) < \varepsilon.$$

Если это сложить, получится неравенство

$$\mu(X) = \mu(B) + \mu(B'), \quad |\mu(E) + \mu(E') - \mu(X)| < 2\varepsilon.$$

Значит, $E \in \Sigma$. ■

Помните меру Стильтьеса? Сейчас определим меру Лебега—Стильтьеса

Определение 1.5. Пусть есть полукольцо интервалов $S = \{[a, b] | a, b \in \Sigma, a \leq b\}$, есть $\alpha(x) \uparrow$ (неубывает) и $\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha(x-0) = \alpha(x)$. Положим $m_\alpha([a, b]) := \alpha(b) - \alpha(a)$. Это σ -аддитивная мера. Пусть $m = \mu_a^*$ и Σ_α — σ -алгебра измеримых множеств. Тогда $\mu: \Sigma_\alpha \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ называется мерой Лебега—Стильтьеса.

Если $\alpha(x) = x$, мера называется мерой Лебега.

Приведём пример неизмеримого по Лебегу множества $E \subset [0, 1]$. Введём отношение эквивалентности: $\forall x, y \in [0, 1] \quad x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Множество $[0, 1]$ разбивается на несчётное число классов эквивалентности $[0, 1] = \bigsqcup_{i \in I} C_i$, где при $i \neq j \quad C_i \cap C_j = \emptyset$. Пусть $E = \{x_i\}_{i \in I}$, где $x_i \in C_i$. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^\infty = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Тогда определим сдвиг на рациональное число $E_n = E + r_n$, $n = 1, 2, \dots$. Если $E \in \Sigma$, то $E_n \in \Sigma$ (это уже не обязательно подмножество $[0, 1]$) и $\mu(E) = \mu(E_n)$. Для $n \neq m \quad E_n \cap E_m = \emptyset$. Видим, что $[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^\infty E_n$, а с другой стороны $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \subset [-1, 2]$. Можем применить неравенство для измеримых множеств

$$1 = \mu([0, 1]) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) \leq \mu([-1, 2]) = 3.$$

Если $\mu(E) \neq 0$, получаем бесконечную расходящуюся сумму, а если $\mu(E) = 0$, то противоречие с первым неравенством.

2 Измеримые функции

Всюду на этой лекции тройка (X, Σ, μ) будет обозначать измеримое пространство. Мы сейчас будем использовать только следующие свойства измеримого пространства.

(1) Σ — σ -алгебра с единицей X ;

(2) $\mu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ — σ -аддитивная мера;

(3) $\forall A \subset B: \mu(B) = 0 \Rightarrow A \in \Sigma$.

Пусть $E \subset X$.

Определение 2.1. Функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ называется измеримой, если

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad E(f < c) := \{x \in E | f(x) < c\} \in \Sigma.$$

Понятно, что из определения вытекает, что E будет измеримо, как счётное объединение этих множеств. Кроме того

$$E(f \leq c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f < c + \frac{1}{n}\right) \in \Sigma; \quad (1)$$

$$E(f \geq c) = E \setminus E(f < c) \in \Sigma; \quad (2)$$

$$E(f > c) = E \setminus E(f \leq c) \in \Sigma; \quad (3)$$

$$E(a \leq f < b) = E(f < b) \setminus E(f < a) \in \Sigma; \quad (4)$$

$$E(a < f < b) = E(f < b) \setminus E(f \leq a) \in \Sigma. \quad (5)$$

Таким образом, все промежутки измеримы.

Лемма 2.1. $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ измерима, если и только если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad f^{-1}(B) \in \Sigma.$$

Доказательство. Необходимость. Положим $S := \{A \subset \mathbb{R}B \mid f^{-1}(A) \in \Sigma\}$. Все интервалы измеримы и лежат в S . S — σ -алгебра, $\mathbb{R} \in S$.

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B), \quad f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) =$$

Таким образом S — σ -алгебра,

Достаточность $E(f < c) = f^{-1}(-\infty, c)$ очевидна. ■

Покажем связь топологии и измеримости. Введём такое определение.

Определение 2.2. Пусть μ — регулярна. Функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, где $E \in \Sigma$, обладает C -свойством, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ компакт } K, \text{ такой, что } \mu(E \setminus K) < \varepsilon, \quad g = f|_K \text{ — непрерывная функция.}$$

Теорема 2.1 (Лузина). Пусть μ — регулярная мера (в прошлый раз давали: для которой X является метрическим пространством и ещё другие свойства есть) и все открытые множества измеримы. Тогда функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ измерима \Leftrightarrow она обладает C -свойством

Доказательство. Необходимость. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Функция у нас f измерима. Отсюда вытекает, что $E \in \Sigma$. Так как мера регулярна, то \exists такие измеримые $A_0, B_0 \in \Sigma$, такие что A_0 компактно, B_0 открыто, $A_0 \subset E \subset B_0$ и $\mu(B_0 \setminus A_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. (Это всё из регулярности меры.)

Пусть задана система всех интервалов $\{I_n\}$ с рациональными концами на прямой \mathbb{R} . Их не более чем счётно, поэтому я их занумеровал натуральными числами. Поэтому также в силу регулярности $\exists A_n, B_n \in \Sigma$, такие что A_n компактно, B_n открыто, $A_n \subset f^{-1}(I_n) \subset B_n$, $\mu(B_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Определим $G := \bigcup_{n=0}^{\infty} (B_n \setminus A_n) \in \Sigma$ — открыто, значит, измеримо, то есть $G \in \Sigma$. И его мера (по σ -аддитивности) $\mu G < \varepsilon$.

Обозначим $K = E \setminus G = A_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n)$. Оно является компактным как разность компактного A_0 и открытого.

Осталось доказать, что ограничение на компакт является непрерывной функцией. Пусть $g = f|_K$. Тогда прообраз интервала $f^{-1}(I_n) = f^{-1}(I_n) \cap K$. Ну и кроме того легко понять, что пересечение с этим компактом, это всё равно что $g^{-1}(I_n) = B_n \cap K$. При этом B_n открыто, значит, $g^{-1}(I_n)$ открыто в K . Значит, g непрерывна на компакте K .

Вот мы доказали необходимость.

Достаточность. Пусть f обладает C -свойством. Тогда для каждого n существует измеримый компакт $K_n \in \Sigma$, для которого $K_n \subset E$, $\mu(E \setminus K_n) < \frac{1}{n}$, ну и ограничение $g_n|_{K_n}$ непрерывно.

Обозначим $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus K_n)$. Значит, функция g_n непрерывна на компакте K_n , поэтому \forall интервала $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ прообраз $g_n^{-1}(I) = f^{-1}(I) \cap K_n$. Существуют такие открытые множества B_n , дающие в перечении $B_n \cap K_n = g^{-1}(I)$.

$$f^{-1}(I) \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I) \cap K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap K_n$$

Так как B_n и K_n из σ -алгебры, то это всё измеримо. И $\mu(F) = 0$, $\mu \in \Sigma$, значит, и прообраз интегралов будет измеримым $f^{-1}(I) \in \Sigma$. ■

Следующая лемма нам поможет выяснить алгебраические свойства измеримых функций.

Лемма 2.2. Пусть у нас функции $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы, а функция h , заданная на открытом множестве $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, причём $D \subset \mathbb{R}^2$ является открытым множеством. Предположим также, что

$\forall x \in E \quad (f(x), g(x)) \in D$. Тогда можно рассмотреть сложную функцию $F(x) = h(f(x), g(x))$, и она окажется измеримой.

Доказательство. Пусть $c \in \mathbb{R}$ рассмотрим $D(h < c)$ — это множество открыто в \mathbb{R}^2 в силу непрерывности h . Поэтому всякое открытое множество можно представить в виде объединения открытых прямоугольников не более чем счётного числа

$$D(h < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n, \quad \Pi_n = (a_n, b_n) \times (c_n, d_n).$$

Например, прямоугольники с рациональными вершинами.

Теперь запишем такое множество

$$E((f, g) \in \Pi_n) = E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n).$$

Поэтому множество $E(F < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E((f, g) \in \Pi_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n)$. Каждое из этих множеств измеримо, значит, и объединение будет тоже измеримым. Тем самым утверждение леммы доказано. ■

Следствие 2.1. Если $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы, то $f + g$, fg , $\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$), f^p ($p > 0, g \leq 0$) измеримы.

Следствие 2.2. Пусть теперь у нас задана последовательность измеримых функций $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что в каждой точке $\inf_n f_n$, $\sup f_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ измеримы, если принимают конечные значения.

Доказательство. Легко проверяются такие формулы

$$E\left(\inf_n f_n < c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n < c); \quad E\left(\sup_n f_n > c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > c).$$

А для пределов вот такие.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{k \geq 1} \left(\sup_{n \geq k} f_n \right); \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{k \geq 1} \left(\inf_{n \geq k} f_n \right).$$

Таким образом все эти множества измеримы. ■

Следствие 2.3. Пусть $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы и $\forall x \in E \quad \exists f(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Тогда предел f измерим.

$$f := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Введём такие обозначения. $f_n, f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$

(1) $f_n \rightarrow f$, если $\forall x \in E \quad \exists f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

(2) $f_n \nearrow f$, если $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ и $f_1 \leq f_2 \leq \dots$

(3) $f_n \searrow f$, если $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ и $f_1 \geq f_2 \geq \dots$

Определение 2.3. Функция $h: E \rightarrow \mathbb{R}$ называется простой, если $h(E) = \{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subset \mathbb{R}$.

$$h(x) = \sum_{k=1}^n h_k \chi_{H_k}(x),$$

где $H_k := \{x \in E \mid h(x) = h_k\}$, $\chi_H(x) = \begin{cases} 1, & x \in H; \\ 0, & x \notin H. \end{cases}$

Теорема 2.2. $\forall f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ измеримой существует неубывающая последовательность $h_n \nearrow f$ ($n \rightarrow \infty$), h_n — измеримые и простые.

Теорема 2.3. Построим по следующей формуле

$$h_n(x) := \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k-1}{2^n} \chi_{H_k^n}(x) + 2^n \chi_{H^n}(x),$$

где $H_k^n := E\left(\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\right)$, $H^n := E(f \geq 2^n)$, $k = 1, 2, \dots, 2^{2n}$

Покажем, что эта последовательность функций неубывающая. Ясно, что функции простые, что измеримые. Так как у нас $H_K^n = H_{2k-1}^{n+1} \sqcup H_{2k}^{n+1}$, $h_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq h_{n+1}(x)$

Кроме того $|f(x) - h_n(x)| < \frac{1}{2^n}$, если $x \in E(f < 2^n)$.

Поскольку n убегает в бесконечность. $h_n \nearrow f$. Если f ещё и ограничена, то сходимость будет ещё и равномерной.

Определение 2.4. $f_n \rightarrow f$ почти всюду (п. в.), если $\exists A \in \Sigma: \mu(A) = 0, f_n \rightarrow f$ на $E \setminus A$.

Определение 2.5. $f_n \rightarrow f$ почти равномерно (п. р.), если $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \Sigma: \mu(A) < \varepsilon$ и $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ на $E \setminus A$.

Определение 2.6. $f \sim g$ эквивалентны, если $\exists A \in \Sigma: \mu(A) = 0$ и $f(x) \equiv g(x) \quad \forall x \in E \setminus A$.

Пределы почти всюду и почти равномерно определяются с точностью до эквивалентности. Если функция измерима, то и эквивалентная ей измерима.

Теорема 2.4 (Егорова). Пусть у нас $\mu(E) < \infty$, функции $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы. Тогда $f_n \rightarrow f$ почти всюду на $E \Leftrightarrow f_n \rightarrow f$ почти равномерно.

Доказательство. Необходимость. Пусть у нас последовательность функций сходится почти всюду $f_n \rightarrow f$ (п. в.) на E . Легко видеть, что доказательство из определения почти равномерной сходимости сводится к случаю $f_n \rightarrow f$ всюду.

Обозначим $B_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} E(|f_j - f| < \frac{1}{k})$ для $k \geq 1$. Объединение таких множеств даст всё E . Таким образом, последовательность $B_n \nearrow E$. Мы доказывали свойство непрерывности меры снизу, поэтому $\lim \mu(B_n) = \mu(E)$.

Обозначим дополнение $A_n := E \setminus B_n$. Тогда в силу равенства $\lim \mu(B_n) = \mu(E)$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$. Поэтому существует n_k , такой что $\mu(A_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Обозначим $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$. Тогда $\mu(A) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Дополнение $E \setminus A$ есть пересечение $E \setminus A = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{n_k}$. Поэтому $\forall j \geq n_k, \forall x \in E \setminus A \quad |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$. Следовательно, последовательность сходится равномерно на множестве $E \setminus A$.

Достаточность. Пусть у нас последовательность функций $f_n \rightarrow f$ (п. р.) на E . Ну по определению $\forall n \exists A_n \in \Sigma: \mu(A_n) < \frac{1}{n}, f_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} f$ на $E \setminus A_n$.

Обозначим $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \mu A = 0$. И $\forall x \in E \setminus A \Rightarrow f_m(x) \rightarrow f(x)$. ■

Определение 2.7. Пусть $f, f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы. $f_n \rightarrow f$ по мере μ на E (здесь мы должны предположить, что функция измерима... сначала), если $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E(|f_n - f| \geq \varepsilon)) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Теорема 2.5. Тут два утверждения.

(1) Пусть $f, f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы, и $\mu(E) < \infty$, то из $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ (п. в.) на E следует, что $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ по мере E .

(2) Если $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ по мере на E , то \exists подпоследовательность $f_{n_k} \rightarrow f$ (п. в.) на E .

Доказательство. Для доказательства первого утверждения применим теорему Егорова.

$$\varepsilon > 0 \exists A \in \Sigma: \mu(A) < \varepsilon, f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \text{ на } E \setminus A,$$

то есть $\exists n: \forall k \geq n \quad \mu(E(|f_k - f| \geq \varepsilon)) < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\mu(E(|f_k - f| \geq \varepsilon)) \leq \mu(A) < \varepsilon$. Значит, предел $f_k \rightarrow f$ по мере на E .

Доказательство второго утверждения. Пусть $f_n \rightarrow f$ по мере. Существует $m_k: \mu(E(|f - f_{m_k}| \geq \frac{1}{2^k})) < \frac{1}{2^k}$ (из сходимости по мере следует, что предел этой конструкции равен нулю). Обозначим $A_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f - f_{m_k}| \geq \frac{1}{2^k})$

и рассмотрим $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Имеем $\mu(A_n) < \frac{1}{2^{n-1}}$, получаем $\mu(A) = 0$.

Если $x \in E \setminus A$, то $x \in E \setminus A_n$ и $|f(x) - f_{m_k}(x)| < \frac{1}{2^k}$. Следовательно, $f_{m_k} \rightarrow f$ на $E \setminus A$. ■

Ну и в заключение давайте примерчик один приведём. Пример Риссо. Покажем, что их сходимости по мере не следует сходимость почти всюду. Берём отрезок $E = [0, 1]$, разбиваем его на отрезки $A_n = [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]$. Каждый отрезок имеет меру $\mu(A_n) = \frac{1}{2^m}$. Нумерация такая: $n = 2^m + k, k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$, для того, чтобы

нумерация была по одному индексу. $f_n(x) = \chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_n; \\ 0, & x \notin A_n. \end{cases}$ Тогда мера Лебега

$$\mu(f_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{2^m} \rightarrow 0, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Наша последовательность $f_n \rightarrow 0$ по мере на отрезке $[0, 1]$.

Но эта последовательность не сходится никуда. Легко видеть

$$\overline{\lim} f_n(x) = 1, \quad x \in [0, 1]; \quad \underline{\lim} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

К нулю в том числе не сходится.

3 Интеграл Лебега

Значит, у нас в дальнейшем (X, Σ, μ) — измеримое пространство (на прошлой лекции я говорил, что это такое), $E \in \Sigma$, через α будем обозначать $\alpha = \{A_k\}_{k=1}^n$ — измеримое разбиение E , то есть $E = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$, $A_k \in \Sigma$.

Пусть также есть $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$. Введём обозначения $S_\alpha(f) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k)$ — сумма Дарбу¹, $a_k = \inf_{x \in A_k} f(x)$, $a_k = a_k(f)$.

Определение 3.1. Интегралом Лебега измеримой функции $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется верхняя грань сумм Дарбу

$$\int_E f d\mu = \sup_\alpha S_\alpha(f).$$

Если значения функции имеют произвольный знак, то есть $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. То $f = f_+ - f_-$, где $f_\pm(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$, то интеграл Лебега определяется, как

$$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu.$$

Функция называется интегрируемой по Лебегу (или суммируемой) $f \in L(E, \mu)$, если f измерима и $\int_E f_\pm d\mu < \infty$.

Верхняя грань сумм Дарбу может быть и бесконечной. Это допустимо для неотрицательной функции. А в случае знакопеременной функции может возникнуть неопределённость $\infty - \infty$.

Теперь перейдём к свойствам.

Утверждение 3.1. Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ измерима. Тогда $\int_E f d\mu = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$, то есть $f = 0$ почти всюду.

Доказательство. Необходимость. Если $\int_E f d\mu = 0$, то все суммы Дарбу $S_\alpha(f) = 0$. Рассмотрим $E_n = E(g \geq \frac{1}{n})$.

Ясно, что $E_n \nearrow E(f > 0)$ и $\mu(E(f > 0)) = \lim \mu(E_n) = 0$. Ведь мы можем строить разбиение так, чтобы одно из множеств было E_n .

Достаточность. $\mu(E(f > 0)) = 0$, значит, $S_\alpha(f) = 0$. Это из определения вытекает. ■

Утверждение 3.2. Пусть $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ измеримы и $f \leq g$ на E . Тогда $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

Доказательство. Так как сумма Дарбу для любого разбиения удовлетворяет соответствующему неравенству $S_\alpha(f) \leq S_\alpha(g)$. ■

Утверждение 3.3. Если $f, g \in L(E, \mu)$ и $f \leq g$ на E , то $\int_E f_+ d\mu \leq \int_E g_+ d\mu$ и $\int_E f_- d\mu \geq \int_E g_- d\mu$. А если вычтем, то

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

Лемма 3.1. Пусть $h \in L(E, \mu)$ простая, то есть принимает конечное количество значений. Тогда, как мы знаем, она записывается в виде

$$h(x) = \sum_{k=1}^m h_k \chi_{H_k}(x), \quad H_k = \{x \in X \mid h(x) = h_k\}.$$

Тогда $\int_E h d\mu = \sum_{l=1}^m h_l \mu(E \cap H_l)$.

Доказательство. Достаточно доказать для случая неотрицательной функции $h \geq 0$. $a_k(h) \leq h_l$, если $B_{kl} = A_k \cap H_l \neq \emptyset$,

$$S_\alpha(f) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_k \mu(B_{kl}) \leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m h_l \mu(B_{kl}) = \sum_{l=1}^m h_l \mu(E \cap H_l).$$

Но если мы возьмём разбиение $\alpha = \{E \cap H_l\}_{l=1}^m$, будет знак равенства. ■

Из этой леммы вытекают следующие два следствия.

Следствие 3.1. Если $h \in L(E, \mu)$ простая, то её интеграл обладает свойством аддитивности, то есть

$$\int_E h d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} h d\mu, \quad E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \in \Sigma.$$

¹ Так как $0 \cdot \infty = 0$ по определению, все суммы Дарбу конечные.

Следствие 3.2. Если $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ измерима, то $\int_E f d\mu = \sup_{0 \leq h \leq f} \int_E h d\mu$, где h — простая измеримая функция.

Доказательство. Доказательство последнего следствия. Имеем из свойства 2 $\int_E h d\mu \leq \int_E g d\mu$. ■

Следующая теорема одна из основных теорем.

Теорема 3.1 (о монотонной сходимости). Пусть $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ неотрицательны и измеримы, и $f_n \nearrow f$ на E . (Интеграл от f при этом может быть бесконечным, ничего страшного.) Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Доказательство. Давайте обозначим этот предел через $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$. Так как $f_n \leq f$ в каждой точке, то этот предел будет оцениваться $I \leq \int_E f d\mu$. Для доказательства нам нужно доказать обратное неравенство.

Возьмём произвольную простую функцию $h: 0 \leq h \leq f$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и определим следующие множества $E_n = E(\varepsilon h \leq f_n) \nearrow E$. Запишем следующим очевидные равенства

$$\varepsilon \int_{E_n} h d\mu = \int_{E_n} \varepsilon h d\mu \leq \int_{E_n} f_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu \leq I.$$

Ну а теперь заметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} h d\mu = \int_E h d\mu$ в силу следствия 1. Переходя к пределу получаем $\varepsilon \int_E h d\mu \leq I$. В силу произвольности ε

$$\int_E h d\mu \leq I \quad \forall 0 \leq h \leq f.$$

По свойству 3 имеем $\int_E f d\mu \leq I$. ■

Следующее важное свойство четвёртое. Свойство линейности интеграла.

Утверждение 3.4. Пусть $f, g \in L(E, \mu)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\int_E \lambda f d\mu = \lambda \int_E f d\mu$ и $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$.

Доказательство. Первое свойство настолько очевидно, что я и доказывать не хочу. Докажем второе. Пусть пока что $f, g \geq 0$ и простые. Нужно вспомнить доказанную лемму и взять пересечение разбиений.

Второй случай. Пусть у нас теперь f и g неотрицательны и измеримы. В этом случае мы с вами доказывали теорему о том, что всякая неотрицательная функция является монотонным пределом неотрицательных простых функций, то есть $\exists f_n \nearrow f$ и $g_n \nearrow g$, где f_n, g_n — простые. Тогда и $f_n + g_n \nearrow f + g$. Ну а теперь применяем теорему о монотонной сходимости.

$$\int_E (f + g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f_n + g_n) d\mu \stackrel{1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu$$

ну и по теореме о монотонной сходимости получаем $\int_E f d\mu + \int_E g d\mu$.

Ну и третий случай, когда $f, g \in L(E, \mu)$, $f = f_+ - f_-$, $g = g_+ - g_-$. Тогда $(f + g) = (f + g)_+ - (f + g)_-$, и мы получим такое равенство

$$(f + g)_+ f_- + g_+ = (f + g)_- + f_+ + g_-.$$

Это равенство можно проинтегрировать по свойству 2, собрать слагаемые обратно и получить результат. ■

Утверждение 3.5. Пусть $f \in L(E, \mu)$, то $|f| \in L(E, \mu)$ и выполнены соответствующие неравенства

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

Доказательство. $|f| = f_+ + f_- \in L(E, \mu)$ по доказанным свойствам. Кроме того $-|f| \leq f \leq |f|$, применяем свойство 2, получаем $-\int_E |f| \leq \int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu$. ■

Лемма 3.2 (Фату). Пусть $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ измеримы и $f = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ почти всюду на E . Тогда $\int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$.

Доказательство. По свойству 4 можно избавиться от требования условия почти всюду. Будем считать, что $f = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ всюду на E . Ну и введём такие функции $g_n = \inf_{m \geq n} f_m$ — это измеримые неотрицательные функции (мы доказывали), ну и кроме того $g_m \nearrow f$ по определению предела.

Так как $\forall n \geq m \quad g_m \leq f_n$, то у нас $\int_E g_m d\mu \leq \inf_{n \geq m} \int_E f_n d\mu$. Ну и теперь применяем теорему о монотонной

СХОДИМОСТИ.

$$\int_f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{n \geq m} \int_E f_n d\mu = \underline{\lim} \int_E f_n d\mu.$$

И лемма доказана. ■

Теорема 3.2 (Лебега о предельном переходе). Пусть $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы, $f = \lim f_n$ почти всюду на множестве E , и существует функция $g \in L(E, \mu)$, $g \geq 0$ и $|f_n| \leq g^1$ на множестве E (можно и оставить здесь почти всюду). Тогда $f, f_n \in L(E, \mu)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$.

Доказательство. Не поскольку f измерима, то f_n тоже будет измерима. Будут выполнены такие неравенства почти всюду: $f_{n\pm}, f_{\pm} \leq g$ почти всюду на E . По свойству 2 интегралы будут конечны, то есть $f, f_n \in L(E, \mu)$. Кроме того $g \pm f_n \geq 0$ в силу того, что $|f_n| \leq g$ на E ; $g \pm f_n \rightarrow g \pm f$, ну и нижний предел тоже сходится. Можно применить лемму Фату

$$\int_E (f + g) d\mu \leq \underline{\lim} \int_E (g + f_n) d\mu, \quad \int_E (g - f) d\mu \leq \underline{\lim} \int_E (g - f_n) d\mu$$

В силу аддитивности интеграла, на g погу сократить в каждом неравенстве. Останется два неравенства. Из-за минуса нижний предел сменится на верхний.

$$\overline{\lim} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu.$$

И теорема доказана. ■

Теорема 3.3 (о σ -аддитивности интеграла Лебега). Пусть $f \in L(E, \mu)$, $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \in \Sigma$. Тогда $\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$.

Доказательство. Понятно, что $f = f_+ - f_-$, и доказательство сводится к случаю $f \geq 0$. Пусть сначала $E = E_1 \sqcup E_2$, $E_1, E_2 \in \Sigma$. Функция неотрицательна, значит можно рассуждать суммами Дарбу. Пусть α — разбиение множества E . Тогда у нас индуцируются разбиения $\alpha_1 = \alpha \cap E_1$, $\alpha_2 = \alpha \cap E_2$. Легко понять, что тогда $S_{\alpha}(f) \leq S_{\alpha_1}(f) + S_{\alpha_2}(f)$.

С другой стороны. Если α_1 — разбиение E_1 , α_2 — разбиение E_2 , можно построить $\alpha = \alpha_1 \sqcup \alpha_2$. В этом случае у нас будет равенство $S_{\alpha}(f) = S_{\alpha_1}(f) + S_{\alpha_2}(f)$. Значит, и верхняя грань будет удовлетворять этому равенству:

$$\int_f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu.$$

Ну и теперь общий случай. Пусть $f \geq 0$, положим $F_n := \bigsqcup_{k=1}^n E_k$, $f_n := \chi_{F_n} \cdot f$. Тогда $f_n \nearrow f$ и можно применить теорему о монотонной сходимости

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{F_n} f d\mu.$$

Раз для двух множеств верно, то и для любого конечно числа множеств будет верно и $\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu$. ■

Теорема 3.4 (Неравенство Чебышёва). Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ измерима. Тогда $\forall t > 0 \quad \mu(E_t) \leq \frac{1}{t} \int_E f d\mu$, $E_+ := E(f \geq t)$.

С этой теоремы началась теория вероятности. До Чебышёва теория вероятностей было только интуитивной.

Доказательство. Имеем по свойству 2: $\int_E f d\mu \geq \int_{E_t} f d\mu \geq t\mu(E_t)$. ■

Введём такое определение.

Определение 3.2. Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ измерима. Обозначим через $\lambda_f(t) = \mu(E_t)$, $t > 0$, $E_t := E(f \geq t)$. $\lambda_f(t)$ называется функцией распределения (значений f).

Утверждение 3.6. Свойства. Докажем только последнее.

$$(1) \lambda_f(t) \downarrow;$$

$$(2) \lambda_f(t - 0) = \lambda_f(t);$$

¹ Эта функция g называется интегрируемой мажорантой.

- (3) $\exists a: 0 < a \leq \infty, \lambda_f(t) = \infty$ при $t \in (0, a)$;
- (4) Если $f \in L(E, \mu)$, то $\lambda_f(t) < \infty$ при $t > 0$;
- (5) Если $\mu(E(f=t)) > 0$, то t — точка разрыва λ_f ;
- (6) $\lambda_f(t) = \bar{o}\left(\frac{1}{t}\right)$, если $f \in L(E, \mu)$.

Доказательство. $E_t \searrow \emptyset$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{E_t} f d\mu = 0$. Ну а следовательно $t\mu(E_t) \leq \int_{E_t} f d\mu$. ■

Определение 3.3. Если $f, g \in L(E, \mu)$ измеримы и $\lambda_f(t) = \lambda_g(t) \quad \forall t > 0$, то f и g называются равноизмеримыми.

Пусть $f, g \in L(E, \mu)$. Тогда применяя теорему Фубини (которая у нас ещё будет) можно написать такие равенства

$$\int_E f d\mu = \int_0^\infty \lambda_f(t) dt; \quad \int_E g d\mu = \int_0^\infty \lambda_g(t) dt.$$

4 Абсолютно непрерывные функции

Начнём с определения абсолютной функции множества. У нас будет дальше (X, Σ, μ) — измеримое пространство. Обозначим через $\Sigma_E = \{A \subset E | A \in \Sigma\}$, $E \in \Sigma$.

Определение 4.1. Функция $\varphi: \Sigma_E \rightarrow \mathbb{R}$ называется зарядом, если φ σ -аддитивна. Заряд называется абсолютно непрерывным $\varphi \ll \mu$ относительно меры μ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall A \in \Sigma_E, \mu(A) < \delta \Rightarrow |\varphi(A)| < \varepsilon.$$

Теорема 4.1 (об абсолютной непрерывности интеграла Лебега). Если $f \in L(E, \mu)$, то $\varphi(A) = \int_A f d\mu$, $A \in \Sigma_E$, является абсолютно непрерывным зарядом.

Доказательство. Что интеграл заряд, мы доказывали в прошлой лекции. Надо доказать только абсолютную непрерывность. Представим $f = f_+ - f_-$. Тогда можно считать, что $f \geq 0$. Рассмотрим $E_n = E(f \leq n)$, $E_n \nearrow E$. Можно воспользоваться свойством непрерывности снизу для меры.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \varphi(E \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А ещё $\forall A \in \Sigma_E \quad \mu(A) < \delta = \frac{\varepsilon}{2n}$, $\varphi(A \cap E_n) = \int_{A \cap E_n} f d\mu \leq n\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Ну и осталось написать, что $\varphi(A) = \varphi(A \cap E_n) + \underbrace{\varphi(A \setminus E_n)}_{\leq \mu(E \setminus E_n)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, поскольку у нас φ монотонна (так как f неотрицательна). ■

Следующая теорема в нашем курсе если и будет доказана, то на последней лекции, если время останется. Кто интересуется, может прочесть в книге Колмогоров—Фомин.

Теорема 4.2 (Радона—Никодима). Если заряд $\varphi: \Sigma_E \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$\forall A \in \Sigma_E: \mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0.$$

E имеет σ -конечную меру.

Тогда $\exists!$ (с точностью до эквивалентности) $f \in L(E, \mu)$ такая, что $\varphi(A) = \int_A f d\mu \quad \forall A \in \Sigma_E$.

Помните, что мы называли функции эквивалентными, если они совпадают почти всюду.

Доказательство. Единственность легко доказать. Если интегралы совпадают для всех $A \in \Sigma_E$ $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$, то пусть $\exists B \in \Sigma_E: \mu(B) > 0$, такой, что $f(x) > g(x) \quad \forall x \in B$. Следовательно, $\int_B (f - g) d\mu > 0$. ■

Следствие обычно называется свойством абсолютной непрерывности. Его можно было бы и независимо доказать, но это заняло бы определённое время. Так что просто выведем из теоремы Радона—Никодима.

Следствие 4.1 (критерий абсолютной непрерывности). $\varphi \ll \mu \Leftrightarrow \forall A \in \Sigma_E: \mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Потому что если множество меры нуль $\forall \varepsilon > 0 |\varphi(A)| < \varepsilon$, то $\varphi(A) = 0$. А обратное вытекает из теоремы Радона—Никодима. ■

4.1 Функции точки

Сначала я вам напомним определение функции ограниченной в вариациях.

Определение 4.2. $F \in B \vee [a, b]$, если

$$\bigvee_a^b ar(F) := \sup_{\tau} \sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| < \infty, \quad \tau := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}.$$

Пространство будет линейным, и в нём можно ввести норму $\|F\| = |F(a)| + \bigvee_a^b(F)$.

Напомним свойства без доказательства. Это должно быть в курсе математического анализа.

Утверждение 4.1. Если $F \in B \vee [a, b]$ и $a < c < b$, то $\bigvee_a^b ar(F) = \bigvee_a^c ar(F) + \bigvee_c^b ar(F)$.

Утверждение 4.2. Если $F(c-0) = F(c)$. то $V(x) = \bigvee_a^x ar(F)$, $V(c-0) = V(c)$.

Утверждение 4.3. Разложение Жордана. Если $F \in B \vee [a, b]$, то $\exists \alpha(x) \uparrow$ и $\beta(x) \uparrow$, такая, что

$$\alpha(a) = \beta(a) = 0, \quad F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x), \quad V(x) = \alpha(x) + \beta(x).$$

Доказательство. $\alpha(x) := \frac{1}{2} \{ \bigvee_a^x ar(F) + F(x) - F(a) \}$, $\beta(x) := \frac{1}{2} \{ \bigvee_a^x ar(F) - F(x) + F(a) \}$. ■

Ещё одну теорему приведу без доказательства.

Теорема 4.3 (Лебега о производной монотонной функции). Если функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна, $f(x) \leq f(y)$, если $x \leq y$ (или наоборот), то существует производная $f'(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

4.2 Интеграл Лебега—Стилтьеса

Пусть $F \in B \vee [a, b]$ непрерывна слева. Тогда по разложению Жордана можем написать $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$, где $\alpha, \beta \uparrow$. Можно построить меры Лебега—Стилтьеса μ_α, μ_β . И мы можем тогда построить заряд Лебега—Стилтьеса

$$\varphi_F = \mu_\alpha - \mu_\beta.$$

Заряд определён на $\Sigma_F := \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$, пересечение σ -алгебр мер μ_α и μ_β . Определение теперь.

Определение 4.3. Интеграл Лебега—Стилтьеса $\int_a^b f d\varphi_F := \int_a^b f d\mu_\alpha - \int_a^b f d\mu_\beta$. Определён на полуинтервале $[a, b)$.

И напомним определение.

Определение 4.4. Интеграл Римана—Стилтьеса $\int_a^b f dF := \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} R_\tau(f, \xi, F)$, где

$$R_\tau(f, \xi, F) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(F(x_k) - F(x_{k-1})),$$

τ — разбиение отрезка, то есть $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, $d(\tau) = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$, $\xi = \{\xi_k\}$ и $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Лемма 4.1. Если функция $F \in C[a, b]$, то существует интеграл Римана—Стилтьеса.

Доказательство. Достаточно рассмотреть, когда F неубывающая. Тогда интегральная сумма будет являться интегралом Лебега от некоторой простой функции. $f_\tau(x) = f(\xi_k)$ на $[x_{k-1}, x_k]$. Так как функция непрерывна, я могу вместо отрезка брать полуинтервал. Ещё на отрезке $f_\tau \rightrightarrows f$. По теореме Лебега интеграл существует. ■

Кстати функцию F можно переопределить в счётном числе точек. От этого интеграл не изменится.

Нам эта лемма в общем-то и не понадобится.

Теорема 4.4 (о сравнении интегралов). Если функция $f: [a, b]$ ограничена и $\exists \int_a^b dF$, то $\exists \int_a^b f d\varphi_F$ и они равны.

Доказательство. Применяем разложение Жордана. Без ограничения общности считаем $F(x) = \alpha(x) \uparrow$ и $f \geq 0$. Рассмотрим в этом случае интегральные суммы Дарбу—Стилтьеса для заданного разбиения

$$\underline{D}_\tau(f, \alpha) := \sum_{k=1}^n \underline{a}_k m_\alpha([x_{k-1}, x_k]), \quad \overline{D}_\tau(f, \alpha) := \sum_{k=1}^n \overline{a}_k m_\alpha([x_{k-1}, x_k]),$$

где $\underline{a}_k = \inf_{[x_k, x_{k-1}]} f(x)$, $\overline{a}_k = \sup_{[x_k, x_{k-1}]} f(x)$, $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. Тогда

$$\underline{D}_\tau(f, \alpha) \leq \overline{D}_\tau(f, \alpha).$$

Осталось доказать равенство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall \tau: d(\tau) < \delta \quad I - \varepsilon \leq R_\tau(f, \xi, \alpha) \leq I + \varepsilon, \quad I = \int_a^b f d\alpha.$$

Тогда суммы Римана будут находиться между суммами Дарбу

$$\forall \varepsilon > 0 \quad I - \varepsilon \leq \underline{D}_\tau(f, \alpha) \leq R_\tau(f, \xi, \alpha) \leq \overline{D}_\tau(f, \alpha) \leq I + \varepsilon$$

Определение 4.5. $f \in AC[a, b]$, где $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall \bigsqcup_{k=1}^n (a_k, b_k) \subset [a, b]: \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Такие функции образуют линейное пространство, где можно ввести норму $\|f\| := |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt$, корректность которой мы проверим чуть позже.

Утверждение 4.4. Если $f \in \text{Lip}[a, b]$, то есть $\exists C 0: |f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$, то $f \in AC[a, b]$.

Утверждение 4.5. Если $f \in AC[a, b]$, то $f \in C \vee [a, b]$.

Доказательство. Берётся разбиение $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, такое что $(x_k - x_{k-1}) = \frac{\delta}{2} = \frac{(b-a)}{n}$. Тогда вариация

$$\bigvee_a^b ar(f) = RY1n \bigvee_{x_k-1}^{x_k} ar(f) \leq n\varepsilon = \frac{2(b-a)}{\delta} \varepsilon.$$

Утверждение 4.6. Если $f \in AC[a, b]$, то в разложении Жордана $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ $\alpha, \beta \in AC[a, b]$.

Доказательство. Нам нужно доказать, что $V(x) = \bigvee_a^x ar(f)$ абсолютно непрерывна. Нужно воспользоваться свойством вариации и записать, что

$$\sum_{k=1}^n |V(b_k) - V(a_k)| = \sum_{k=1}^n \bigvee_{a_k}^{b_k} ar(f) \leq \varepsilon.$$

Достаточно заметить, что вариация на отрезке $[a_k, b_k]$ это точная верхняя грань сумм Дарбу. Нужно вспомнить определение абсолютно непрерывных функций и всё сразу понятно станет.

Ну и последнее свойство.

Утверждение 4.7. Если $f \in AC[a, b]$, то $\exists! g \in L[a, b]$ (единственность с точностью до эквивалентности), такая что $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$.

Доказательство. Разложим f по формуле Жордана $f(x) = f(a) + \alpha(x) - \beta(x)$, $\alpha, \beta \uparrow$. Затем построим меры Лебега—Стилтьеса μ_α, μ_β по функциям α, β . Эти меры будут абсолютно непрерывны $\mu_\alpha, \mu_\beta \ll \lambda$ (λ — мера Лебега), так как α, β абсолютно непрерывны (у нас было два определения абсолютной непрерывности для разных объектов, тут используются оба).

Отсюда вытекает, что заряд $\varphi_F \ll \lambda$. Ну и по теореме Радона—Никодима

$$f(x) - f(a) = \varphi_f([a, x]) = \int_a^x g(t) dt$$

для некоторой функции $g \in L[a, b]$. Эта функция будет единственной с точностью до эквивалентности, как и в теореме Радона—Никодима.

Лемма 4.2. Пусть $F \uparrow$ на $[a, b]$. Тогда $\int_a^b F'(t) dt \leq F(b) - F(a)$. Но если $F \in \text{Lip}[a, b]$, то выполняется равенство.

По теореме Лебега производная монотонной функции интегрируема почти всюду. Равенство же может быть и не выполнено, например, если взять функцию Кантора (лесницу Кантора).

Доказательство. Давайте мы продолжим нашу функцию за отрезок $F(x) = F(b)$, $x \in [b, b+1]$. Функция

останется неубывающе. Ну и возьмём такие функции и применим теорему Лебега

$$F_n(t) = \frac{F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F'(t).$$

Предел есть по теореме Лебега почти всюду на $[a, b]$. Теперь применим теорему Фату

$$\int_a^b F'(t) dt \leq \liminf \int_a^b F_n(t) dt = \liminf \left(b \int_b^{b+\frac{1}{n}} F(t) dt - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t) dt \right) \leq F(b) - F(a).$$

Это в силу того, что функция неубывающая.

Осталось вторую часть доказать. Чтобы её доказать, нужно вспомнить определение условия Липшица. Из этого определения вытекает, что производная ограничена почти всюду $|F'(t)| \leq C$ почти всюду. Ну и тогда вместо леммы Фату можно применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. ■

Теорема 4.5 (характеристические свойства абсолютно непрерывных функций). $F \in AC[a, b]$, если и только если

$$\exists F'(t) \text{ (н. в.) на } [a, b], F' \in L[a, b], F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt \forall x \in [a, b].$$

Доказательство. Достаточность вытекает из абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Применяя свойство разложения Жордана, можно считать, что $F \uparrow$ на $[a, b]$. Давайте ещё считать, что $F(a) = 0$. Тогда по свойству 4 имеем

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, f \in L[a, b].$$

Поэтому для доказательства необходимости нужно доказать, что $F'(t) = f(t)$ почти всюду на $[a, b]$.

Введём такие функции $f_n(x) = \min\{f(t), n\}$ — срез функции на уровне n . f определена почти всюду, её можно считать неотрицательной. Обозначим $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$. Запишем разность

$$F(x) - F_n(x) = \int_a^x \underbrace{(f(t) - f_n(t))}_{\geq 0} dt \uparrow.$$

Следовательно $F'(x) \geq F'_n(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Производная существует почти всюду по теореме Лебега. Давайте запишем ещё следующее равенство по лемме, используя, что $F_n(x) \in \text{Lip}[a, b]$.

$$F_n(x) = \int_a^x F'_n(t) dt = \int_a^x f_n(t) dt,$$

$F'_n(t) = f_n(t)$ почти всюду на $[a, b]$.

$$F'(x) \geq F'_n(x) = f_n(x) \text{ п. в.}$$

переходя к пределу, получаем $F'(x) \geq f(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b (F'(t) - f(t)) dt \geq 0.$$

А по лемме этот же интеграл будет оцениваться нулём и в другую сторону

$$\int_a^b F'(t) dt \leq F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt \leq 0.$$

Значит, интеграл равен нулю. А поскольку функция неотрицательна, то она равна нулю почти всюду и $F'(t) = f(t)$ почти всюду. ■

5 Теорема Фубини

Сначала мы докажем предварительную теорему, а потом уже теорему Фубини. Рассмотрим S_k — полукольцо в X_k , где $k = 1, \dots, n$. И рассмотрим прямое произведение этих полуколец $S := S_1 \times \dots \times S_n = \{A = A_1 \times \dots \times A_n \mid A_k \in S_k, k = 1, \dots, n\}$. Мы сейчас докажем, что это тоже полукольцо. Пусть у нас ещё заданы меры на каждом полукольце $m_k: S_k \rightarrow \mathbb{R}_+$. Тогда можно ввести понятие прямого¹ произведения мер $m = m_1 \times \dots \times m_n$, где $m(A) := m_1(A_1) \dots m_n(A_n)$, если $A = A_1 \times \dots \times A_n$.

Теорема 5.1. Если $m_k: S_k \rightarrow \mathbb{R}_+$ есть σ -аддитивные меры на полукольцах S_k при $k = 1, \dots, n$, то $S = S_1 \times \dots \times S_n$ является полукольцом и $m = m_1 \times \dots \times m_n$ является σ -аддитивной мерой.

Доказательство. Приведём доказательство для $n = 2$, далее по индукции. Пусть $S = S_1 \times S_2$ — полукольцо. Берём два множества

$$A = A_1 \times A_2, \quad B = B_1 \times B_2 \in S, \quad A_1, B_1 \in S_1, \quad A_2, B_2 \in S_2.$$

Легко проверяется, что

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2).$$

Можно нарисовать картинку в виде двух прямоугольников.

Теперь разность представляется в виде трёх слагаемых

$$A \setminus B = ((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2)) \sqcup ((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \cap B_2)) \sqcup ((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)).$$

Это тоже можно показать, нарисовав картинку из двух прямоугольников. Таким образом, S — полукольцо.

Осталось показать, что произведение мер является σ -аддитивной мерой. Пусть множество A представляется в виде

$$A = \bigsqcup_{l=1}^m B^{(l)}, \quad A = A_1 \times A_2, \quad B^{(l)} = B_1^{(l)} \times B_2^{(l)}.$$

Давайте запишем такую функцию

$$f_l(x_1) := m_2(B_2^{(l)}) \cdot \chi_{B_1^{(l)}}(x_1), \quad x_1 \in A_1.$$

Из этого определения вытекает, что $A_2 = \bigcup_{l=1}^m B_2^{(l)}$, но не обязательно дизъюнктное. Отсюда вытекает такое равенство

$$m_2(A_2) = \sum_{l=1}^m f_l(x_1), \quad x_1 \in A_1.$$

Пусть μ_1 — продолжение меры m_1 . Мы сейчас будем писать интеграл и подставлять определение нашей функции.

$$m(A) := m_1(A_1) \cdot m_2(A_2) = \int_{A_1} m_2(A_2) d\mu_1 = \sum_{l=1}^m \int_{A_1} f_l(x_1) d\mu_1 = \sum_{l=1}^m m_1(B_1^{(l)}) \cdot m_2(B_2^{(l)}).$$

Для $m = \infty$ нужно лишь применить теорему о монотонной сходимости. Выкладка та же самая. ■

Определение 5.1. Пусть у нас заданы измеримые пространства (X_k, Σ_k, μ_k) , $k = 1, \dots, n$. Тогда мы можем построить

$$X = X_1 \times \dots \times X_n, \quad S = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n, \quad m = \mu_1 \times \dots \times \mu_n.$$

Если построить внешнюю меру и ограничить на Σ , то $m^*|_{\Sigma} = \mu$ и тройка (X, Σ, μ) называется произведением измеримых пространств.

Это произведение обладает свойством ассоциативности. Будем обозначать это произведение не как прямое, а как тензорное

$$\mu := \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n.$$

Свойство ассоциативности тогда записывается так

$$(\mu \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3).$$

Свойство ассоциативности вытекает из ассоциативности прямого произведения. Мы для простоты изложения далее будем рассматривать случай $n = 2$.

Пусть (X, Σ_X, μ_X) и (Y, Σ_Y, μ_Y) — измеримые пространства. Тогда для $Z = X \times Y$, $\mu = \mu_X \otimes \mu_Y$, $E \in \Sigma$ обозначим сечения

$$E_X = \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}, \quad E_Y = \{x \in X \mid (x, y) \in E\}.$$

¹ Будет ещё другое произведение мер, поэтому слово прямое не будем опускать.

Сечение объединений будет объединением сечений, относительно пересечения и разности так же. То же самое можем сделать для функций

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_x(y) = f(x, y), \quad f_y(x) = f(x, y).$$

Теорема 5.2. Если $E \in \Sigma$ σ -конечной меры, то

$$\mu(E) = \int_X \mu_y(E_x) d\mu_x = \int_Y \mu_x(E_y) d\mu_y.$$

Вообще говоря, не все сечения будут измеримы, функция будет определена почти всюду. Где функция неопределена, положим её равной нулю, это не повлияет на значение интеграла.

Доказательство. Доказательство будет проходить в несколько шагов.

1. $E = A \times B$, $A \in \Sigma_x$, $B \in \Sigma_y$. Тогда

$$\mu(E) = \mu_x(A) \cdot \mu_y(B) = \int_A \mu_y(B) d\mu_x = \int_A \mu_x(A) d\mu_x.$$

Это равенства симметричны, мы будем доказывать только одно из них.

$$\forall E \in \mathcal{R}(S), \quad S = \Sigma_x \times \Sigma_y.$$

2. $\mu(E) < \infty$. Построим измеримую оболочку A множества E (была лемма об измеримой оболочке).

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad E \subset A_k, \quad A_k = \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{kl}, \quad A_{kl} \in S, \mu(A_k \setminus E) < \frac{1}{k}.$$

Из этого вытекает, что $\mu(A \setminus E) = 0$. Введём теперь следующие множества

$$B_n := \bigcap_{k=1}^n A_k, \quad D_{nm} := \bigcap_{k=1}^n \bigcup_{l=1}^m A_{kl} \in S.$$

Так как оба $\in S$, для них уже теорема доказана. Кроме того, $B_n \searrow A$ при $n \rightarrow \infty$, а $D_{mn} \nearrow B_n$ при $m \rightarrow \infty$. Теперь осталось применить свойства непрерывности меры снизу и сверху. А так как для множеств из полукольца теорема доказана, то и для наших множеств будет доказана. Ну и $\mu(A \setminus E) = 0$. Значит, надо доказать ещё для множеств меры нуль.

Пусть $B = E \setminus A$, $\mu(B) = 0$. Берём точно так же измеримую оболочку C этого множества $C \supset B$. Для этой измеримой оболочки мы уже доказали теорему. Имеем интеграл

$$\int_X \mu_y(C_x) d\mu_x = \mu(C) = \mu(B) = 0.$$

Так как $C \supset B$, то и $C_x \supset B_x$. И таким образом, мы доказали теорему полностью для множества конечной меры.

Если множества σ -конечной меры, мы представляем их в виде счётного объединения конечной меры. ■

Теперь то, что оставалось без доказательства: про функцию распределения. Это как пример применения этой теоремы. Пусть (X, Σ, μ) — измеримое пространство. На множестве $E \in \Sigma$ задана неотрицательная измеримая функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$. Рассмотрим множество-подграфик

$$G = \{(x, t) | 0 \leq t \leq f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}_+.$$

Позже мы докажем, что подграфик измеримой функции есть измеримое множество. А сейчас запишем его меру, как интегралы по сечениям

$$\mu(G) = \int_E f d\mu = \int_0^{\infty} \mu(G_t) dt = \int_0^{\infty} \lambda_f(t) dt,$$

где G_t — функция распределения, а $\lambda_f(t) = \mu(G_t)$.

Лемма 5.1. Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ измерима. Тогда её подграфик $G = \{(t, x) | 0 \leq t \leq f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}_+$ является измеримым относительно произведения мер $\mu \times dt$.

Доказательство. Давайте введём множества $H_k^n = E \left(\frac{k-1}{2^n}, f, \frac{k}{2^n} \right)$ (множество точек x , для которых выполняется неравенство) и функции $h_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \chi_{H_k^n}(x) > f(x)$. Была у нас лемма о том, что $h_n \searrow f$.

У функции h_n подграфик измерим, а подграфик функции f будет пересечением этих подграфиков. А пересечения измеримых измеримы. ■

Работаем в тех же обозначениях для произведения измеримых пространств.

Теорема 5.3 (Фубини). Если $E \in \Sigma$ σ -конечной меры и $f \in L(E, \mu)$, то

$$\int_E f d\mu = \int_X \int_{E_x} f_x d\mu_y d\mu_x = \int_Y \int_{E_y} f_y d\mu_x d\mu_y.$$

То есть интеграл по произведению мер равен повторному интегралу.

Доказательство. Представим f в виде разности неотрицательных функций $f = f_+ - f_-$, где $f_{\pm} \geq 0$. Это даёт нам право без ограничения общности считать, что $f \geq 0$. Обозначим $\lambda = \mu \otimes dt = \mu_x \otimes \mu_y \otimes dt$ в силу ассоциативности. Ещё обозначим $\nu = \mu_y \otimes dt$. Тогда $\lambda = \mu_x \otimes \nu$. Мера задана на множестве $X \times Y \times \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим подграфик $G = \{(x, y, t) | 0 \leq t \leq f(x, y)\} \subset X \times Y \times \mathbb{R}_+$. Мы доказали, что G измеримо относительно меры λ .

Теперь давайте вычислять меру этого множества разными способами. Первый способ: фиксируем (x, y)

$$\lambda(G) = \int_E f d\mu.$$

С другой стороны можем фиксировать переменную x . Тогда будет подграфик сечения функции

$$\lambda(G) = \int_E f d\mu = \int_X \nu(G_x) d\mu_X.$$

Но сам этот подграфик мы тоже можем вычислить с помощью сечений.

$$\lambda(G) = \int_E f d\mu = \int_X \nu(G_x) d\mu_X = \int_X \left(\int_{E_x} f_x d\mu_y \right) d\mu_x.$$

А второе равенство доказывается симметрично. ■

А теперь рассмотрим меру Лебега на \mathbb{R}^n . Рассмотрим n экземпляров измеримых пространств $(\mathbb{R}, \Sigma_k, \mu_k)$ Лебега в \mathbb{R} , $k = 1 \dots, n$. Тогда можем рассмотреть измеримое пространство в \mathbb{R}^n

$$(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu), \quad \mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n.$$

Можно было по-другому определять, а именно сразу рассмотреть полукольцо. Но у нас была теорема единственности меры, значит, мы бы получили то же самое.

Пусть $\Delta = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ — n -мерный отрезок. Будем обозначать $R(\Delta)$ — множество функций, измеримых по Риману, а $L(\Delta)$ — множество функций, интегрируемых по Лебегу на этом отрезке. Будем рассматривать только ограниченные функции $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Для заданной функции определим функции Бэра

$$\underline{f}(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \inf_{x \in \Delta \cap S_r(x)} f(x), \quad \bar{f}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \Delta \cap S_r(x)} f(x).$$

Эти функции измеримы, поскольку множества $\Delta(\underline{f} > c)$ и $\Delta(\bar{f} < c)$ тех точек отрезка, для которых $\underline{f} > c$ и множество, где $\bar{f} < c$ открыты для любого $c \in \mathbb{R}$.

Нижняя функция будет совпадать с верхней в точке x , если и только если функция непрерывна в x .

Теорема 5.4 (Лебега о сравнении интегралов Римана и Лебега для n -мерного отрезка). Пусть функция $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена. Тогда $f \in R(\Delta) \Leftrightarrow \mu(E_1) = 0$, где

$$E_f = \{x \in \Delta | \underline{f}(x) \neq \bar{f}(x)\}.$$

$$\text{Если } f \in R(\Delta), \text{ то } f \in L(\Delta) \text{ и } \int_{\Delta} f(x) dx = \int_{\Delta} f d\mu.$$

Доказательство. Сначала напомним одно из необходимых и достаточных условий интегрируемости. Когда нижний интеграл Дарбу совпадает с верхним. Мы устраиваем разбиение $\tau = \{\Delta_l\}_{l=1}^n$ отрезка Δ , внутренности

элементов которого не пересекаются, то есть $\mathring{\Delta}_l \cap \mathring{\Delta}_{l'} = \emptyset$ при $l \neq l'$, а $\Delta = \bigcup_{l=1}^m \Delta_l$.

$$\underline{D}_\tau(f) = \sum_{l=1}^m \underline{a}_l \mu(\Delta_l), \quad \underline{a}_l = \inf_{\Delta_l} f(x), \quad \overline{D}_\tau(f) = \sum_{l=1}^m \overline{a}_l \mu(\Delta_l), \quad \overline{a}_l = \sup_{\Delta_l} f(x).$$

Условие выглядит так

$$\int_{\underline{-}} f(x) dx = \sup_{\tau} \underline{D}_\tau(f) = \inf_{\tau} \overline{D}_\tau(f) = \int_{\overline{-}} f(x) dx.$$

Пусть $\tau_k = \{\Delta^{(k)}_l\}_{l=1}^{m_k}$ — последовательность разбиений, удовлетворяющая условиям

1. Диаметр $f(\tau_k) \rightarrow 0$;
2. $\tau_k \supset \tau_{k+1}$;
3. $\int_{\underline{-}} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{D}_{\tau_k}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^{(k)} \mu(\Delta_l^{(k)})$.

Функции $h_k(x) = \sum_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^{(k)} \chi_{\Delta_l^{(k)}}(x) \nearrow \underline{f}(x)$, $\forall x \in \mathring{\Delta}_l^{(k)}$, $\forall k, l$. Значит, сходится почти всюду и по одной из теорем имеем

$$\int_{\underline{-}} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^{(k)} \mu(\Delta_l^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta} h_k d\mu = \int_{\Delta} \underline{f} d\mu.$$

Отсюда мы получаем равенства

$$\int_{\underline{-}} f(x) dx = \int_{\Delta} \underline{f} d\mu, \quad \int_{\overline{-}} f(x) dx = \int_{\Delta} \overline{f} d\mu.$$

Мы можем их объединить

$$\int_{\Delta} \underbrace{(\overline{f} - \underline{f})}_{\geq 0} d\mu, \quad \underline{f}(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x).$$

Откуда мы получаем, что $\underline{f}(x) - \overline{f}(x) = 0$ почти всюду на Δ , $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$ почти всюду на Δ . И

$$\int_{\Delta} f(x) dx = \int_{\Delta} f d\mu.$$

■

Сейчас мы построим функцию, которая не интегрируема по Лебегу. То есть никакая ей эквивалентная не интегрируема по Риману. Берём отрезок $[0, 1]$, набор $\{r_n\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ и число $0 < \varepsilon < 1$. Положим

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \varepsilon_n, r_n + \varepsilon_n), \quad \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Легко сверху оценить меру $\mu(A_\varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\varepsilon_n = \varepsilon$. Мера будет маленькой, но положительной. Положим

$$B_\varepsilon = [0, 1] \setminus A_\varepsilon.$$

Это замкнутое множество, которое состоит только из иррациональных чисел. Оно нигде не плотно. Ну и мера этого множества $\mu(B_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$. Теперь достаточно взять функцию

$$f(x) = \chi_{B_\varepsilon}(x).$$

И сама функция не интегрируема по Риману, и её нельзя изменить на множестве меры нуль так, чтобы она стала интегрируемой по Риману.

6 Пространство L_p

Сегодня рассмотрим пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Распространим понятия, которые были для действительной функции.

Пусть (X, Σ, μ) — измеримое пространство, а $\mathbb{F} = \begin{cases} \mathbb{R}, \\ \mathbb{C}. \end{cases}$ $E \in \Sigma$. Функция $f: E \rightarrow \mathbb{F}$, $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$, то есть $f(x) = u(x) + iv(x)$.

Определение 6.1. f — измеримая, если u, v измеримы. $f \in L(E, \mu)$, если $u, v \in L(E, \mu)$ и $\int_E f d\mu = \int_E u d\mu + i \int_E v d\mu$.

Все теоремы, где нет неравенств, верные для действительно значных функций, верны и для комплекснозначных. Некоторые свойства мы с вами докажем.

Утверждение 6.1. Если $f, g \in L(E, \mu)$ и $\lambda \in \mathbb{F}$, то $f + g, \lambda f \in L(E, \mu)$ и

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu, \quad \int_E \lambda f d\mu = \lambda \int_E f d\mu.$$

Доказательство. Например, докажем последнее свойство. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, а $f = u + iv$, тогда $\lambda f = (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u)$. По определению интеграла комплекснозначной функции и по свойству линейности интеграла действительногозначной функции имеем

$$\int_E \lambda f d\mu = \int_E (\alpha u - \beta v) d\mu + i \int_E (\alpha v + \beta u) d\mu = \left(\alpha \int_E u d\mu - \beta \int_E v d\mu \right) + i \left(\alpha \int_E v d\mu + \beta \int_E u d\mu \right) = \lambda \int_E f d\mu.$$

Утверждение 6.2. Пусть $f \in L(E, \mu)$. Тогда $|f| \in L(E, \mu)$ и

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

Доказательство. $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$, как обычно. Это не превосходит $|f| \leq |u| + |v| \in L(E, \mu)$. Осталось доказать равенство. Представим результат интегрирования в тригонометрической форме $\int_E f d\mu = \left| \int_E f d\mu \right| \cdot e^{i\theta}$. Тогда

$$\left| \int_E f d\mu \right| = e^{-i\theta} \int_E f d\mu = \operatorname{Re} e^{-i\theta} \int_E f d\mu = \operatorname{Re} \int_E e^{-i\theta} f d\mu = \int_E \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) d\mu \leq \int_E |f| d\mu.$$

Утверждение 6.3. Пусть $f_1 \sim g_1, f_2 \sim g_2$. Тогда $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ и $\lambda f_1 \sim \lambda g_1$.

Это свойство очевидно. А если $f \sim g$ и $f \in L(E, \mu)$, то $g \in L(E, \mu)$. Значит, $L(E, \mu)$ есть линейное пространство и множество классов эквивалентных функций есть линейное пространство.

Мы вводили обозначение $B(E) = \{f: E \rightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ — ограничена на } E\}$.

Определение 6.2. $L_\infty(E, \mu)$ — множество классов эквивалентности ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \inf_{\mu(A)=0} \sup_{x \in E \setminus A} |f(x)|$. Оно называется множеством существенно ограниченных функций. А норма называется существенной верхней гранью.

Имеем $L \supset B(E)$ — подпространство, $f \sim 0$. Тогда $L_\infty(E, \mu) = B(E) \setminus L$. Мы будем обращаться с этими классами, как обыкновенными функциями.

Для каждого $\forall n \in \mathbb{N} \exists A_n \in \Sigma: \mu(A_n) = 0, \forall x \in E \setminus A_n \quad |f(x)| < \|f\|_\infty + \frac{1}{n}$. Обозначим через $A_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu A_f = 0$ и $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E \setminus A_f} |f(x)|$. То есть нижняя грань достигается на некотором множестве меры нуль. Такое множество может быть и не одно. Оно существует, нам этого достаточно, чтобы доказать

Утверждение 6.4 (Свойства нормы). Пусть $\|f\|_\infty = 0$. Тогда $f \sim 0$. Кроме того, $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$. И неравенство треугольника.

Доказательство. Как доказать неравенство треугольника. Запишем равенства

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E \setminus A_f} |f(x)|, \quad \|g\|_\infty = \sup_{x \in E \setminus A_g} |g(x)|.$$

Положим $A = A_f \cup A_g$. Тогда

$$\|f + g\|_{L_\infty} \leq \sup_{x \in E \setminus A} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in E \setminus A_f} |f(x)| + \sup_{x \in E \setminus A_g} |g(x)| = \|f\|_{L_\infty} + \|g\|_{L_\infty}.$$

Вот мы и доказали все свойства нормированного пространства. ■

Теорема 6.1. $L_\infty(E, \mu)$ — банахово пространство, то есть полное линейное нормированное пространство.

Доказательство. Рассмотрим последовательность Коши $\{f_n\} \subset L_\infty(E, \mu)$. Положим $A = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{f_n - f_m}$. При этом $\mu(A) = 0$ и $\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in E \setminus A} |f_n(x) - f_m(x)|$. Так как $f_n \in B(E \setminus A)$ — последовательность Коши, то

по доказанному на первой же лекции $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E \setminus A} f \in B(E \setminus A)$. Положим $f(x) = 0$ на A . Тогда $f \in L_\infty(E, \mu)$ и $\|f - f_n\|_{L_\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. ■

Определение 6.3. $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p < \infty$ — пространство классов эквивалентности измеримых функций $f: E \rightarrow \mathbb{F}$: $|f|^p \in L(E, \mu)$ с нормой

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Это линейное пространство функций, суммируемых в степени p .

Заметим, что если $f, g \in L_p(E, \mu)$, то $|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$ ну и ясно, что $\lambda f \in L_p(E, \mu)$. А чтобы доказать, что это нормированное пространство, надо доказать несколько неравенств.

Утверждение 6.5 (неравенство Гёльдера). Пусть $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ и измеримы. Тогда

$$\int_E fg d\mu \leq \left(\int_E f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Причём эти интегралы могут принимать и бесконечные значения. Суммируемость не требуется.

Доказательство. Сначала докажем неравенство Юнга для чисел $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, где $a, b \geq 0$. Рассматриваем функции $y = x^{p-1}$ и $x = y^{q-1}$. Легко видеть, что эти функции взаимно обратные. Значит, можно посчитать интеграл слева от кривой и снизу от кривой. А площадь прямоугольника будет меньше

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}.$$

Равенство будет только в том случае, когда $a^{p-1} = b$ или, эквивалентно $a^p = b^q$.

Чтобы доказать теперь неравенство Гёльдера, введём обозначения $A = \int_E f^p d\mu$ и $B = \int_E g^q d\mu$. Если одно из этих чисел равно нулю или бесконечности, то неравенство очевидно. Берём $a = \frac{f}{A^{\frac{1}{p}}}$ и $b = \frac{g}{B^{\frac{1}{q}}}$. Применяем неравенство Гёльдера и интегрируем его

$$\int_E ab d\mu \leq \frac{1}{p} \int_E a^p d\mu + \frac{1}{q} \int_E b^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Отсюда вытекает уже неравенство Гёльдера. Легко видеть, что равенство будет тогда и только тогда, когда $f^p = \lambda g^q$, где $\lambda = A/B$ почти всюду на множестве E . ■

Следующее неравенство

Утверждение 6.6 (неравенство Минковского). Пусть $f, g \in L_p(E, \mu)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда $\|f + g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$.

Доказательство. В случае $p = 1$, это неравенство вытекает из элементарного неравенства для чисел $|f + g| \leq |f| + |g|$. Нужно проинтегрировать это неравенство, получим неравенство треугольника для L_1 .

Пусть $p > 1$. Положим $A = \int_E |f|^p d\mu$, $B = \int_E |g|^p d\mu$, $C = \int_E |f + g|^p d\mu$. Тогда

$$C = \int_E |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \leq \int_E |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu + \int_E |g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu.$$

Найдём $q: \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(p-1)q = p$. Тогда по неравенству Гёльдера

$$C \leq A^{\frac{1}{p}} \cdot C^{\frac{1}{q}} + B^{\frac{1}{p}} \cdot C^{\frac{1}{q}}, \quad C^{\frac{1}{p}} \leq A^{\frac{1}{p}} + B^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь когда достигается равенство. $|f + g| = |f| + |g|$ почти всюду на E и

$$\frac{|f|^p}{A} = \frac{|g|^p}{B} = \frac{|f + g|^p}{C}$$

почти всюду на E . Из этого вытекает, что $f = h \cdot g$, для $h \geq 0$ почти всюду на E . Подставляя, получаем $h = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{p}}$ почти всюду на E (если $g \neq 0$). Так что у нас получается, что $f = \lambda g$ и $\lambda = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{p}}$. То есть равенство достигается только тогда, когда функции линейно зависимы, причём с положительным коэффициентом. Значит, L_p является строго нормированным. Элемент приближения является единственным. ■

А вот это уже полезное неравенство.

Утверждение 6.7 (обобщённое неравенство Минковского). Пусть задано два измеримых пространства (X, Σ_x, μ_x) и (Y, Σ_y, μ_y) , $E \in \Sigma_x$, $F \in \Sigma_y$ и задана измеримая функция $f: E \times F \rightarrow \mathbb{R}_+$, а $1 \leq o < \infty$. Тогда

$$\left(\int_E \left(\int_F f_x d\mu_y \right)^p d\mu_x \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_F \left(\int_E f_y^p d\mu_x \right)^{\frac{1}{p}} d\mu_y.$$

Доказательство. Нам понадобится теорема Фубини. Но это неравенство не зря называется обобщённым неравенством Минковского, так как доказывается точно так же. $g(x) = \int_F f_x d\mu_y$ существует для почти всех $x \in E$.

$$\int_E g^p d\mu_x = \int_E g \cdot g^{p-1} d\mu_x = \int_F g^{p-1} \left(\int_E f_y d\mu_x \right) d\mu_y.$$

Теперь применяем неравенство Гёльдера к произведению двух функций.

$$\leq \int_F \left(\int_E f_y^p d\mu_x \right)^{\frac{1}{p}} d\mu_y \cdot \underbrace{\left(\int_E g^p d\mu_x \right)^{\frac{1}{q}}}_{=1}.$$

Если поделить на скобку, получится как раз обобщённое неравенство Минковского. ■

Теорема 6.2. $L_p(E, \mu)$ — банахово пространство при $1 \leq p < \infty$.

Доказательство. Возьмём последовательность Коши $\{f_n\} \subset L_p(E, \mu)$. Тогда существует $\{m_k\}: m_1 < m_2 < \dots$ и $\|f_k - f_l\|_{L_p} < \frac{1}{2^n} \quad \forall k, \geq m_n$. Такую подпоследовательность можно выбрать. И рассмотрим функцию (равенство имеет смысл в почти всех точках)

$$g(x) = |f_{m_1}(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_n}(x)|.$$

Если организовать частичные суммы g_n , то $g_n \nearrow g$ (значит, и в степени p тоже монотонно возрастают), так как все члены ряда неотрицательны. Кроме того $\|g_n\|_{L_p} \leq \|f_{m_1}\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \|f_{m_1}\|_{L_p} + 1$, то есть норма конечная. По теореме о монотонной сходимости $g \in L_p(E, \mu)$. И отсюда g конечна почти всюду на E . Значит, ряд в определении $g(x)$ сходится почти всюду. Если снять модули, ряд будет сходиться абсолютно почти всюду

$$f(x) = f_{m_1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_n}(x))$$

сходится абсолютно почти всюду. Тогда

$$f_{m_n}(x) = f_{m_1}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)).$$

Из того, что $|f|^p \leq |g|^p \in L(E, \mu)$ следует, что $f \in L_p(E, \mu)$. Если теперь вычесть частичную сумму, получим

$$f(x) - f_{m_n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} (f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)).$$

Чтобы для бесконечной суммы неравенство можно было использовать, применяем теорему Фату

$$\|f - f_{m_n}\|_{L_p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\|_{L_p} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Если имеется в метрическом пространстве последовательность Коши такую, что имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сама сходится, что можно легко показать по неравенству треугольника. Значит, мы показали, что $f_n \rightarrow f \in L_p(E, \mu)$. Значит, мы доказали полноту. ■

Лемма 6.1. Обозначим через $H(E, \mu)$ множество простых измеримых функций из $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Утверждается, что $H(E, \mu)$ всюду плотно в $L_p(E, \mu)$.

Доказательство. Раскладываем в разность неотрицательных $f = f_+ - f_-$ и $f_{\pm} = \max\{\pm f, 0\}$. Мы доказывали, что $\exists h_n^{\pm} \nearrow f_{\pm}$, где $h_n^{\pm} \in H(E, \mu)$. Так как h_n^{\pm} интегрируемы, то и f_{\pm} будут интегрируемы. Обозначим

$$h = h_n^+ - h_n^-, \quad \|f - h\|_{L_p} \leq \|f_+ - h_n^+\|_{L_p} + \|f_- - h_n^-\|_{L_p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

по теореме о монотонной сходимости. ■

Теперь наша задача показать, что непрерывные функции всюду плотны в L_p . А для этого нужно вообще какую-то топологию ввести.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, (X, Σ, μ) — измеримое пространство с регулярной мерой и все открытые множества измеримы (а значит и замкнутые и компактные).

Теорема 6.3. Множество $C(X)$ непрерывных ограниченных функций (тех из них, что лежат в L_p) всюду плотно в $L_p(E, \mu)$ для $1 \leq p < \infty$ (в отличие от леммы здесь $p < \infty$).

Доказательство. Возьмём $f \in L_p$ и $\varepsilon > 0$. По лемме $\exists h \in H(E, \mu)$, такая, что $\|f - h\|_{L_p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Всякая простая функция является линейной комбинацией характеристических функций

$$h(x) = \sum_{l=1}^m h_l \chi_{H_l}(x), \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Существует $\exists A$ — компактное и \exists открытое B_l , для которых $A_l \subset H_l \subset B_l$ и $\mu(B_l \setminus A_l) < (\frac{\varepsilon}{2c})^p$, где $c = \sum_{l=1}^m |h_l|$.

У нас же функция уже фиксирована.

Напомним $\rho(x, A) = \int_{y \in A} \rho(x, y)$ есть непрерывная функция, поскольку выполняется неравенство

$$\rho(x, A) \leq \rho(y, A) + \rho(x, y) \Rightarrow |\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y).$$

Доказательство. Доказательство этого неравенства простое $\rho(x, A) \leq |\rho(x, z) - \rho(z, y)| + \rho(z, y) \leq \rho(x, y) \quad \forall z \in A$. □

Ну теперь давайте построим функцию $g(x) = \sum_{l=1}^m h_l g_l(x)$, $g_l(x) = \frac{\rho(x, X \setminus B_l)}{\rho(x, A_l) + \rho(x, X \setminus B_l)}$. При этом $0 \leq g_l(x) \leq 1$, $g_l(x) = 1$, если $x \in A_l$, $g_l(x) = 0$, если $x \in X \setminus B_l$, то есть $x \notin A_l$. Все эти функции непрерывны:

$$\|\chi_{H_l} - g_l\|_{L_p} \leq \mu^{\frac{1}{p}}(B_l \setminus A_l) < \frac{\varepsilon}{2c}.$$

И по неравенству Минковского получаем

$$\|h - g\|_{L_p} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|f - g\|_{L_p} \leq \|f - h\|_{L_p} + \|g - h\|_{L_p} < \varepsilon.$$

■

Закончим таким следствием

Следствие 6.1. В $L_p[0, 1]$, где $1 \leq p < \infty$ всюду плотно множество

1. $H([0, 1])$ простых функций;
2. $C[0, 1]$;
3. $\tilde{C}[0, 1]$, $f(0) = f(1)$;
4. S — ступенчатые функции; для некоторого разбиения $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < 1$ $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[x_{k-1}, x_k]}(x)$;
5. P — множество алгебраических многочленов, то есть $P(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^k$;
6. T — тригонометрических многочленов $T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k x}$;
7. $C^\infty[0, 1]$.