5 Мера множеств

Пусть X — множество. Тогда 2^X — совокупность всех его подмножеств, а $S \subset 2^X$ называется системой множеств.

Положим по определению $E = \bigcup A \in SA$. Это называется единицей системы S.

Определение 5.1. *Система S называется кольцом, если $\forall\ A, B \in S \quad A \cup B, A \setminus B \in S$, то есть кольцо замкнуто относительно конечного числа объединений и разностей. Если кольцо $S \supset E$, оно называется алгеброй.*

Пусть $S \subset 2^X$. Тогда $\mathcal{R}(S)$ — наименьшее кольцо, содержащее систему S, а $\mathcal{A}(S)$ — наименьшая алгебра, содержащая S, то есть $\mathcal{R}(S)$ пересечение всех колец, содержащих S, $\mathcal{A}(S)$ — пересечение всех алгебр, содержащих S.

Утверждение 5.1. *S — кольцо, если и только если $\forall\ A, B \in S \quad A \cap B \in S$ и $A \triangle B \in S$.*

Доказательство. Это доказывается с помощью таких равенств

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B); \quad A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A); \quad A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B); \quad A \setminus B = A \triangle (A \cap B).$$

■

Определение 5.2. *Кольцо (алгебра) S называется σ-кольцом (-алгеброй), если*

$$\forall\ A_n \in S \quad \bigcup_{1=n}^{\infty} A_n \in S.$$

Определение 5.3. *Кольцао (алгебра) S называется δ-кольцом (-алгеброй), если*

$$\forall\ A_n \in S \quad \bigcap_{1=n}^{\infty} A_n \in S.$$

Утверждение 5.2. *Условия для σ и δ алгебры совпадают.*

Доказательство. Запишем формулы двойственности.

$$E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E \setminus A_n), \quad E \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus A_n).$$

Утверждение, очевидно, доказано. ■

$\mathcal{R}_\sigma(S)$ — это наименьшее σ-кольцо, содержащее S, $\mathcal{A}_\sigma(S)$ — это наименьшая σ-алгебра, содержащая S.

Определение 5.4. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, τ — топология. Тогда $\mathcal{A}_\sigma(\tau) =: \mathcal{B}(X)$ называется борелевской σ-алгеброй метрического пространства X.*

Определение 5.5. *S называется полукольцом, если $\forall\ A, B \in S \quad A \cap B \in S$ и $A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i$, где $C_i \in S$.*

Утверждение 5.3. *Если S — полукольцо, то $\forall A, B_i \in S \quad A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigsqcup_{j=1}^{n} C_j$, где $C_j \in S$.*

Доказательство. По индукции. Для $n = 1$ верно. Пусть верно для n, докажем для $n + 1$.

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i = A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i \setminus B_{n+1},$$

что есть $\bigsqcup_{j=1}^{m} (C_j \setminus B_{n+1}) = \bigsqcup_{j=1}^{m} \bigsqcup_{i=1}^{n} C_{ij}$, где $C_{ij} \in S$, что и требовалось доказать. ■

Лемма 5.1. *Пусть S — полукольцо. Тогда $A \in \mathcal{R}(S)$ если и только если $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \in S$.*

Доказательство. Положим $R = \{A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \mid n \in \mathbb{N},\ A_i \in S\}$. Отметим, что $R \subset \mathcal{R}(S)$. Покажем, что R — кольцо.

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j, \quad A_i, B_j \in S.$$

$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} (A_i \setminus B)$. В силу доказанного выше утверждения это является $\bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m} C_{ij} C_{ij}$, где $C_{ij} \in S$. Следовательно, $A \setminus B \in R$.

$A \cup B = A \setminus B \sqcup B \in R$. Следовательно R — кольцо. И, следовательно, $R = \mathcal{R}(S)$. ■

Пусть X — множество. Опять же $S \subset 2^X$. И функция $\varphi\colon S \to \mathbb{F}$, где $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Определение 5.6. *Функция φ называется аддитивной, если $\varphi(A \sqcup B) = \varphi(A) + \varphi(B) \quad \forall\ A, B, A \sqcup B \in S$. φ называется конечно аддитивной, если $\varphi\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(A_i) \quad A_i, \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in S \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.*

Определение 5.7. *φ называется σ-аддитивной, если $\varphi\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i) \quad A_i, \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.*

Так как $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty}$ не зависит от порядка множеств, то ряд сходится абсолютно.

Определение 5.8. *Функция $m\colon S \to \mathbb{R}_+$ называется конечно-аддитивной мерой (σ-аддитивной мерой), если*

1. *S — это полукольцо;*

2. *m конечно (или σ-) аддитивна.*

Определение 5.9. *Мера $m_1\colon S_1\colon R_+$ называется называется продолжением меры $m\colon S \to \mathbb{R}_+$, если $S \subset S_1$ и ограничение $m_1\big|_{S_1} = m$.*

Теорема 5.1. *Для любой меры $m\colon S \to \mathbb{R}_+ \quad \exists!\ m_1\colon S_1 \to \mathbb{R}_+$ продолжение, где $S_1 \in \mathcal{R}(S)$.*

Доказательство. Определим $m_1(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$, где $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in S$. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j$. Тогда одновременно выполнится $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)$ и $m_1(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} m(A_i \cap B_j)$ не зависит от разложения A.

Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in \mathcal{R}(S)$. В свою очередь $A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_i} A_{ij}$, где $A_{ij} \in S$. Соответственно,

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m_i} A_{ij}, \quad m_1(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} m(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} m_1(A_i).$$

Таким образом доказана конечная аддитивность. Устремив $n \to \infty$ в предыдущих рассуждениях, докажем σ-аддитивность. ∎

5.1 Свойства σ-аддитивной меры

Пусть $m\colon S \to \mathbb{R}_+$ — σ-аддитивная мера. Тогда

Утверждение 5.4. $m(\varnothing) = m(\varnothing \sqcup \varnothing) = 2m(\varnothing) \Rightarrow m(\varnothing) = 0$.

Утверждение 5.5 (монотонность)**.** *Если $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$, причём $A_i, A \in S$, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leqslant m(A)$.*

Доказательство. Возьмём фиксированное $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A$ и $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \sqcup \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j$, $A_i, B_j \in S$. Тогда

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \sum_{j=1}^{n} m(B_j) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i).$$

Устремим $n \to \infty$ и получим требуемое. ∎

Утверждение 5.6 (полуаддитивность)**.** *Пусть $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A, A_i, \bigcup\limits_{1=i}^{\infty} A_i =: B \in S$. Тогда $m(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.*

Доказательство. Берём $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i\right)$, где $k = 2, 3, \ldots$ $B_k \in \mathcal{R}(S)$. Считаем, что m определена для B_k, как продолжение меры. $B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ и $m(B) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Так как $A \subset B$, $m(A) \leqslant m(B) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.
∎

Утверждение 5.7 (непрерывность снизу)**.** *Если $A_i \uparrow A$, $A, A_i \in S$, то $\lim\limits_{i \to \to} \infty m(A_i) = m(A)$.*

Доказательство. Что значит стрелочка вверх: $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A$. Пусть $A_0 = \varnothing$, $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$. Тогда

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i, \quad B_i \in \mathcal{R}(S).$$

Считаем меру m продолженной на $\mathcal{R}(S)$. Тогда $m(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(B_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i-1}) = \lim\limits_{i \to \infty} m(A_i)$. ∎

Сформулируем обратное утверждение.

Утверждение 5.8. *Если конечно аддитивная мера непрерывна снизу, то она σ-аддитивна.*

Доказательство. Путьс $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i, A \in S$. Положим, $B_n = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Тогда $B_n \uparrow A$ и $m(A) = \lim\limits_{n\to\infty} m(B_n) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$. ■

Утверждение 5.9 (непрерывность сверху). *Если $A_i \downarrow A$, $A_i, A \in S$, то $\lim\limits_{i\to\to} \infty m(A_i) = m(A)$.*

Доказательство. $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A$. Обозначим $B = A_1 \setminus A$, $B_i := A_1 \setminus A_i$, $i = 1, 2, \dots$ Тогда $B_i \uparrow B$ и $m(B) = \lim\limits_{i\to\infty} m(B_i)$. $m(A_i) - m(A) = m(A_i) - \lim\limits_{i\to\infty} m(A_i)$, следовательно, $m(A) = \lim\limits_{i\to\infty} m(A_i)$. ■

Утверждение 5.10. *Если конечно аддитивная мера непрерывна сверху, то она σ-аддитивна.*

Доказательство. $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A, A_i \in S$, $B_n = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $B_n \downarrow \varnothing$. $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = 0$. Тогда

$$m(A) - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(A_i) = 0.$$

Что и требовалось доказать. ■

Определение 5.10. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, S — полукольцо в X. Мера $m\colon S \to \mathbb{R}_+$ называется регулярной, если*

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \forall\ A \in S\ \ \exists\ B, C \in S\colon \overline{B} \textit{ компактно, } \overline{B} \subset A \subset C^0, m(C \setminus B) < \varepsilon.$$

Теорема 5.2. *Каждая регулярная мера $m\colon S \to \mathbb{R}_+$ является σ-аддитивной.*

Доказательство. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i, A \in S$. $m(A) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$. Существуют $B, C, B_i, C_i \in S\colon \overline{B}, \overline{B}_i$ — компакты, $\overline{B} \subset A \subset C^0, \overline{B}_i \subset A_i \subset C_i^0$ и $m(C \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2}$, $m(C_i \setminus B_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$.

$\overline{B} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i^0$. Из компактности следует, что $\overline{B} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i^0$. Следовательно, $m(B) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m(C_i)$.

$$m(A) \leqslant m(C) \leqslant m(B) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(C_i) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(B_i) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) + \varepsilon.$$

Так как ε — произвольная постоянная, получаем требуемое. ■

5.2 Мера Стилтьеса в $\mathbb{R}$

Пусть $S = \big\{[a, b) \big| a, b \in \mathbb{R},\ a \leqslant b\big\}$. Это полукольцо. Пусть $\alpha(x)$ — неубывающая функция на $\mathbb{R}$.

Определение 5.11. $m_\alpha\big([a, b)\big) = \alpha(b) - \alpha(a)$. *$\alpha$ называется функцией распределения, а m_α — конечно-аддитивная мера.*

Теорема 5.3. *Мера m_α является σ-аддитивной, если и только если $\alpha(x)$ непрерывна слева.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_n \uparrow x$. Тогда полуинтервал $[x_n, x) \downarrow \varnothing$. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} m_\alpha\big([x_n, x)\big) = 0$. Следовательно, $\alpha(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha(x_n)$, то есть α непрерывна слева.

Достаточноть. Пусть $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \ \alpha(x - 0) = \alpha(x)$. Полуинтервал $[a, b - \delta) \subset [a, b) \subset (a - \delta, b)\ \ \forall\ \delta > 0$.

$$m_\alpha\big([a - \delta, b) \setminus [a, b - \delta)\big) = m_\alpha\big([a - \delta, a)\big) + m_\alpha\big([b - \delta, b)\big) = \alpha(a) - \alpha(a - \delta) + \alpha(b) - \alpha(b - \delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Мера Стилтьеса регулярна, следовательно, σ-аддитивна. ■

6 Измеримые множества

Далее мы через $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \sqcup \{\infty\}$ будем обозначать множество неотрицательных чисел и добавленный символ бесконечности, при этом будут выполнены следующие аксиомы: $\forall\ a \in \mathbb{R}_+\ \ a + \infty = \infty$, $a \cdot \infty = \infty$ $(a \neq 0)$, $0 \cdot \infty = 0$ и $a < \infty$, $\infty \leqslant \infty$.

Какая-то из этих аксиом понадобится, только когда будем рассматривать интеграл Лебега.

Определение 6.1. $\mu\colon 2^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *называется внешней мерой, если*

(1) Мера пустого множества равна нулю $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) $\mu A \leqslant \mu B$, если $A \subset B$,

(3) $\mu A \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, если $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$.

Определение 6.2. *Множество $E \subset X$ называется измеримым (относительно внешней меры μ), если*

$$\mu A = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall\ A \subset X.$$

В силу свойства 3 полуаддитивности внешней меры, достаточно доказывать только неравенство

$$\mu A \geqslant \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall\ A \subset X,$$

чтобы показать измеримость множества.

Давайте введём ещё одно обозначение $AB := A \cap B$, $A' := X \setminus A$, $\mu_A(B) := \mu(AB)$.

Тогда легко понять, что E измеримо, если и только если $\forall\ A \subset X \quad \mu_A(X) = \mu_A(E) + \mu_A(E')$.

Давайте ещё через Σ будем обозначать совокупность всех измеримых множеств относительно внешней меры μ.

6.1 Некоторые свойства измеримых множеств

Утверждение 6.1. *Если $\mu E = 0$, то $E \in \Sigma$.*
Доказательство. Это вытекает из того, что $\mu_A(E) = 0$ из монотонности меры $\forall\ A$, и тоже в силу монотонности $\mu_A(X) \geqslant \mu_A(E) + \mu_A(E')$. А мы уже знаем, что этого неравенства достаточно. ■
Утверждение 6.2. *Если $E_1, E_2 \in \Sigma$, то $E = E_1E_2 \in \Sigma$.*
Доказательство. Для доказательства запишем следующие равенства:

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1')$$

в силу измеримости E_1. А в силу измеримости E_2 можем записать такое неравенство

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1') = \mu_{AE_1}(E_2) + \mu_{AE_2}(E_2') + \mu_A(E_1') = \mu_A(E) + \underbrace{\mu_A(E_1E')}_{E_2' \subset E'} + \underbrace{\mu_A(E_1'E')}_{E_1' \subset E'} = \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

■
Утверждение 6.3. *Если $E \in \Sigma$, то $E' \in \Sigma$.*
Доказательство. Это вытекает из того, что второе дополнение $E'' = E$ есть само множество. И отсюда $\mu_A(X) = \mu_A(E') + \mu_A(E'')$. ■
Утверждение 6.4. *Если $E_1, E_2 \in \Sigma$, то и разность $E_1 \setminus E_2$, $E_1 \cup E_2 \in \Sigma$.*
Доказательство. Это вытекает из таких простых равенств: $E_1 \setminus E_2 = E_1E_2'$, $E_1 \cup E_2 = (E_1'E_2')'$. ■

Таким образом система измеримых множест является алгеброй. Очевидно же из определения вытекает, что $\varnothing, X \in \Sigma$.
Утверждение 6.5. *Функция $\mu_A \colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ является конечно аддитивной мерой на алгебре*[1]
Доказательство. Пусть $E = E_1 \sqcup E_2, E_1, E_2 \in \Sigma$. Тогда в силу измеримости

$$\mu_A(E) = \mu_{AE}(E_1) + \mu_{AE}(E_1') = \mu_A(\underbrace{EE_1}_{E_1}) + \mu_A(\underbrace{EE_1'}_{E_2}) = \mu_A(E) + \mu_A(E_2)$$

■

Ну и основная теорема.
Теорема 6.1 (Каратеодори)**.** *Пусть $\mu \colon 2^X \to \overline{R}_+$ внешняя мера. Тогда*

(1) Σ — σ-алгебра;

(2) $\mu \colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — σ-аддитивная мера.

Доказательство. Пусть $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \in \Sigma$. Обозначим $F_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, $F_n \in \Sigma$.

Для любого $A \subset X$

$$\mu_A(X) = \mu_A(F_n) + \mu_A(F_n') \geqslant \sum_{k=1}^{N} \mu_A(E_k) + \mu_A(E').$$

Устремляем $n \to \infty$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E') \geqslant \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

Получаем $\mu(E) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$, $E \in \Sigma$, $\mu_A(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E')$. ■

[1] Потом мы докажем и σ-аддитивность.

Пусть $m\colon S \to \mathbb{R}_+$, $S \subset 2^X$ — полукольцо, и мера m σ-аддитивна. Будем также полагать, что она σ-конечна, то есть X представимо в виде

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in S.$$

У нас мера конечно, поэтому этого будет достаточно.
Определение 6.3. *Мера заданная на совокупности всех подмножеств $m^*\colon 2^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется внешней мерой Лебега, если*

$$m^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Инфинум по всем счётным покрытиям.

Сейчас мы докажем, что внешняя мера Лебега является внешней мерой.
Доказательство. Обозначение (X, Σ, ν) — измеримое пространство где Σ — σ-алгебра измеримых множеств $\mu = m^*$, $\nu := \mu\big|_{\Sigma}$.

(1) $m^*(\varnothing) = 0$ очевидно;

(2) $m^*(A) \leqslant m^*(B)$, если $A \subset B$ тоже;

(3) $M^*(A) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$, если $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_n$.

Докажем третье: если $\exists\, n\colon m^*(A_n) = \infty$, то утверждение верно.
Пусть $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad m^*(A_n) < \infty$.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, B_{nk} \in S\colon A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} (B_{nk}) < m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Отсюда вытекает, что A содержится в двойном объединении

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \quad m^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m(B_{nk}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon.$$

■

Ещё одно свойство запишем и сделаем перерыв.
Утверждение 6.6. *Если $A \in S$, то $m^*(A) = m(A)$*
Доказательство. Это вытекает из такого неравенства:

$$m^*(A) \leqslant m(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),$$

если $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in S$. ■

Теорема 6.2 (о продолжении меры). *Пусть $m\colon S \to \mathbb{R}_+$ — σ-аддитивная мера. Тогда*

(1) Внешняя мера $\mu := m^*\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ σ-аддитивная;

(2) Σ является σ-алгеброй;

(3) $S \subset \Sigma$;

(4) $\mu\big|_S = m$.

Доказательство. Всё, кроме свойства три, доказано в теореме Коритоадори. Докажем 3. Пусть у нас $E \in S$, $A \subset X$ — произвольно множество, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, B_n \in S\colon A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Ну теперь применим свойство полуаддитивности и запишем следующее равенство (воспользуемся полуаддитивностью внешней меры)

$$m^*(A) \leqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \big(\underbrace{m(B_n \cap E) + m(B_n \setminus E)}_{m(B_n)} \big) = \sum_{n=1}^{\infty} \leqslant m^*(A) + \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, тут везде знаки равенства и $E \in \Sigma$. ■

Следствие 6.1. *Полукольцо содержится в наименьшем кольце, которое содержится в наименьшем σ-кольце, которое содержится в наименьшей σ-алгебре, содержащейся в Σ, то есть*

$$S \subset \mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}_\sigma(S) \subset \mathcal{A}_\sigma(S) \subset \Sigma.$$

Теорема 6.3 (о единственности продолжения меры)**.** *Пусть $m\colon S \to \mathbb{R}_+$ σ-аддитивная и σ-конечная мера. Тогда $\exists!$ σ-аддитивная мера, которая продолжает меру m на σ-алгебру.*

Доказательство. Докажем для случая $\mu(X) < \infty$ (иначе разобьём множество на измеримые). Пусть имеются два продолжения $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\mu\colon \Sigma\overline{\mathbb{R}}_+$, где $\mu = m^*$. Тогда $\forall\ E \in \Sigma\ \ \nu E \leqslant \mu(E)$, ведь на S $\mu\big|_S = \nu\big|_S = m$. Осталось заметить, что в силу аддитивности этмх мер

$$\nu(E) + \nu(E') = m(X) = \mu(E) + \mu(E').$$

Отсюда видим, что $\nu(E) = \mu(E)$. ■

Лемма 6.1 (об измеримой оболочке)**.** *Пусть $\mu = m^*$ — внешняя мера Лебега. Тогда $\forall\ A \subset X\ \ \exists\ B \in \Sigma\colon A \subset B$ и $\mu(A) = \mu(B)$.*

Доказательство. $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ \exists\ B_{nk} \in S\colon A \subset B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ и $\mu(B_n) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_{nk}) < \mu(A) + \frac{1}{n}$ по определению нижней грани, которая присутствует в определении внешней меры Лебега.

Обозначим $B := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \Sigma$, $A \subset B$. Имеем

$$\mu(B) \leqslant \mu(B_n) \leqslant \mu(A) + \frac{1}{n}.$$

Ну и поскольку n произвольно, то получается равенство. ■

Определение 6.4. *Пусть $\mu = m^*$ и $\mu(X) < \infty$. Множество $E \subset X$ называется измеримым по Лебегу, если $\mu(X) = \mu(E) + \mu(E')$.*

Ясно, что если множество измеримо, то оно измеримо по Лебегу. Докажем обратное.

Доказательство. Пусть E измеримо по Лебегу. Тогда существует по лемме об измеримой оболочке

$$\exists\ A, B \in \Sigma\colon E \subset A,\ E' \subset B,\ \mu(E) = \mu(A),\ \mu(A') = \mu(B).$$

Отсюда вытекает, что $A \cup B = X$ и $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cup B)$ в силу аддитивности (ну надо на картинку посмотреть, ведь множества A и B измеримы). Это всё равно

$$\mu(A \cap B) = \mu(E) + \mu(E') - \mu(X) = 0.$$

Ну а множество меры нуль измеримо, то есть $A \cap B \in \Sigma$. Так как $A \setminus E \subset A \cap B$, $\mu(A \setminus E) = 0$ и разность тоже измерима. Пожтому множество E можно записать как

$$E = A \setminus (A \setminus E) \in \Sigma.$$

■

Значит эти определения конечной меры эквивалентны.

Теорема 6.4 (критерий измеримости Ваме—Гуссейна)**.** *Пусть $\mu = m^*$ и $\mu(X) < \infty$. Тогда*

$$E \in \Sigma \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ B \in \mathcal{R}(S)\colon \mu(E \vartriangle B) < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $E \in \Sigma$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\ A_k \in S\colon E \subset A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и по определению нижней грани

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leqslant \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Существует n, для которого $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} m(A_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $B_n := \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Тогда

$$\mu(E \vartriangle B_n) \leqslant \mu(E \setminus B_n) + \mu(B_n \setminus E) \leqslant \mu(A \setminus B_n) + \underbrace{\mu(A \setminus E)}_{B_n \subset A} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} m(A_k) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть $E \subset B \cup (E \triangle B)$. Из этого вытекает

$$\left|\mu(E) - \mu(B)\right| \leqslant \mu(E \triangle B) < \varepsilon, \qquad \left|\mu(E') - \mu(B')\right| \leqslant \mu(E' \triangle B') = \mu(E \triangle B) < \varepsilon.$$

Если это сложить, получится неравенство

$$\mu(X) = \mu(B) + \mu(B'), \qquad \left|\mu(E) + \mu(E') - \mu(X)\right| < 2\varepsilon.$$

Значит, $E \in \Sigma$. ■

Помните меру Стилтьеса? Сейчас определим меру Лебега—Стилтьеса

Определение 6.5. *Пусть есть полукольцо интервалов $S = \big\{[a,b)\big|a, b \in \Sigma, a \leqslant b\big\}$, есть $\alpha(x) \uparrow$ (неубывает) и $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \ \alpha(x-0) = \alpha(x)$. Положим $m_\alpha\big([a,b)\big) := \alpha(b) - \alpha(a)$. Это σ-аддитивная мера. Пусть $m = \mu_a^*$ и Σ_α — σ-алгебра измеримых множеств. Тогда $\mu\colon \Sigma_\alpha \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется мерой Лебега—Стилтьеса.*

Если $\alpha(x) = x$, мера называется мерой Лебега.

Приведём пример неизмеримого по Лебегу множества $E \subset [0,1]$. Введём отношение эквивалентности: $\forall\ x, y \in [0,1]\ \ x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Множество $[0,1]$ разбивается на несчётное число классов эквивалентности $[0,1] = \bigsqcup\limits_{i \in I} C_i$, где при $i \neq j\ \ C_i \cap C_j = \varnothing$. Пусть $E = \big\{x_i\big\}_{i \in I}$, где $x_i \in C_i$. Пусть $\big\{e_n\big\}_{n=1}^{\infty} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Тогда определим сдвиг на рациональное число $E_n = E + r_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Если $E \in \Sigma$, то $E_n \in \Sigma$ (это уже не обязательно подмножество $[0,1]$) и $\mu(E) = \mu(E_n)$. Для $n \neq m\ \ E_n \cap E_m = \varnothing$. Видим, что $[0,1] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, а с другой стороны $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subset [-1,2]$. Можем применить неравенсто для измеримых множеств

$$1 = \mu\big([0,1]\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leqslant \mu\big([-1,2]\big) = 3.$$

Если $\mu(E) \neq 0$, получаем бесконечную расходящуюся сумму, а если $\mu(E) = 0$, то противоречие с первым неравенством.

7 Измеримые функции

Всюду на этой лекции тройка (X, Σ, μ) будет обозначать измеримое пространство. Мы сейчас будем использовать только следующие свойства измеримого пространства.

(1) Σ — $sigma$-алгебра с единицей X;

(2) $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — σ-аддитивная мера;

(3) $\forall\ A \subset B\colon \mu(B) = 0\ \ A \in \Sigma$.

Пусть $E \subset X$.

Определение 7.1. *Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется измеримой, если*

$$\forall\ c \in \mathbb{R}\ \ E(f < c) := \big\{x \in E\big|f(x) < c\big\} \in \Sigma.$$

Понятно, что из определения вытекает, что E будет измеримо, как счётное объединение этих множеств. Кроме того

$$\begin{aligned} E(f \leqslant c) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f < c + \frac{1}{n}\right) \in \Sigma; && (1)\\ E(f \geqslant c) &= E \setminus E(f < c) \in \Sigma; && (2)\\ E(f > c) &= E \setminus E(f \leqslant c) \in \Sigma; && (3)\\ E(a \leqslant f < b) &= E(f < b) \setminus E(f < a) \in \Sigma; && (4)\\ E(a < f < b) &= E(f < b) \setminus E(f \leqslant a) \in \Sigma. && (5) \end{aligned}$$

Таким образом, все промежутки измеримы.

Лемма 7.1. $f\colon E \to \mathbb{R}$ *измерима, если и только если*

$$\forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ \ f^{-1}(B) \in \Sigma.$$

Доказательство. Необходимость. Положим $S := \left\{A \subset \mathbb{R}\mathcal{B} \middle| f^{-1}(A) \in \Sigma\right\}$. Все интервалы измеримы и лежат в S. S — σ-алгебра, $\mathbb{R} \in S$.

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B), \quad f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) =$$

Таким образом S — σ-алгебра,

Достаточность $E(f < c) = f^{-1}(-\infty, c)$ очевидна. ■

Покажем связь топологии и измеримости. Введём такое определение.

Определение 7.2. *Пусть μ — регулярна. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, где $E \in \Sigma$, обладает C-свойством, если*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ компакт } K, \text{ такой, что } \mu(E \setminus K) < \varepsilon, \quad g = f\big|_K \text{ — непрерывная функция.}$$

Теорема 7.1 (Лузина)**.** *Пусть μ — регулярная мера (в прошлый раз давали: для которой X является метрическим пространством и ещё другие свойства есть) и все открытые множества измеримы. Тогда функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ измерима $\Leftrightarrow$ она обладает C-свойством*

Доказательство. Необходимость. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Функция у нас f измерима. Отсюда вытекает, что $E \in \Sigma$. Так как мера регулярна, то $\exists$ такие измеримые $A_0, B_0 \in \Sigma$, такие что A_0 компактно, B_0 открыто, $A_0 \subset E \subset B_0$ и $\mu(B_0 \setminus A_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. (Это всё из регулярности меры.)

Пусть задана система всех интервалов $\{I_n\}$ с рациональными концами на прямой $\mathbb{R}$. Их не более чем счётно, поэтому я их занумеровал натуральными числами. Поэтому также в силу регулярности $\exists\ A_n, B_n \in \Sigma$, такие что A_n компактно, B_n открыто, $A_n \subset f^{-1}(I_n) \subset B_n$, $\mu(B_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Определим $G := \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (B_n \setminus A_n) \in$ — открыто, значит, измеримо, то есть $G \in \Sigma$. И его мера (по σ-аддитивности) $\mu G < \varepsilon$.

Обозначим $K = E \setminus G = A_0 \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n$. Оно является компактным как разность компактного A_0 и открытого.

Осталось доказать, что органичение на компакт является непрерывной функцией. Пусть $g = f\big|_K$. Тогда прообраз интервала $f^{-1}(I_n) = f^{-1}(I_n) \cap K$. Ну и кроме того легко понять, что пересечение с этим компактом, это всё равно что $g^{-1}(I_n) = B_n \cap K$. При этом B_n открыто, значит, $g^{-1}(I_n)$ открыто в K. Значит, g непрерывна на компакте K.

Вот мы доказали необходимость.

Достаточность. Пусть f обладает C-свойством. Тогда для каждого n существует измеримый компакт $K_n \in \Sigma$, для которого $K_n \subset E$, $\mu(E \setminus K_n) < \frac{1}{n}$, ну и ограничение $g_n\big|_{K_n}$ непрерывно.

Обозначим $F := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E \setminus K_n)$. Значит, функция g_n непрерывна на компакте K_n, поэтому $\forall$ интервала $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ прообраз $g_n^{-1}(I) = f^{-1}(I) \cap K_n$. Существуеют такие открытые множества B_n, дающие в перечении $B_n \cap K_n = g^{-1}(I)$.

$$f^{-1}(I) \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I) \cap K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap K_n$$

Так как B_n и K_n из σ-алгебры, то это всё измеримо. И $\mu(F) = 0$, $\mu \in \Sigma$, значит, и прообраз интегралов будет измеримым $f^{-1}(I) \in \Sigma$. ■

Следующая лемма нам поможет выяснить алгебраические свойства измеримых функций.

Лемма 7.2. *Пусть у нас функции $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы, а функция h, заданная на открытом множестве $h\colon D \to \mathbb{R}$ непрерывна, причём $D \subset \mathbb{R}^2$ является открытым множеством. Предположим также, что $\forall\ x \in E\ \ \big(f(x), g(x)\big) \in D$. Тогда можно рассмотреть сложную функцию $F(x) = h\big(f(x), g(x)\big)$, и она окажется измеримой.*

Доказательство. Пусть $c \in \mathbb{R}$ рассмотрим $D(h < c)$ — это множество открыто в R^2 в силу непрерывности h. Поэтому всякое открытое множество можно представить в виде объединения открытых прямоугольников не более чем счётного числа

$$D(h < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n, \quad \Pi_n = (a_n, b_n) \times (c_n, d_n).$$

Например, прямоугольники с рациональными вершинами.

Теперь запишем такое множество

$$E\big((f, g) \in \Pi_n\big) = E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n).$$

Поэтому множество $E(F < c) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\big((f, g) \in \Pi_n\big) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n)$. Каждое из этих множеств измеримо, значит, и объединение будет тоже измеримым. Тем самым утверждение леммы доказано. ■

Следствие 7.1. *Если $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы, то $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$, f^p $(p > 0, g \leqslant 0)$ измеримы.*

Следствие 7.2. *Пусть теперь у нас задана последовательность измеримых функций* $f_n\colon E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Предположим, что в каждой точке* $\inf\limits_n f_n$, $\sup f_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$ *измеримы, если принимают конечные значения.*

Доказательство. Легко проверяются такие формулы

$$E\left(\inf_n f_n < c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n < c); \qquad E\left(\sup_n f_n > c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > c).$$

А для пределов вот такие.

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{k\geqslant 1}\left(\sup_{n\geqslant k} f_n\right); \qquad \varliminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{k\geqslant 1}\left(\inf_{n\geqslant k} f_n\right).$$

Таким образом все эти множества измеримы. ∎

Следствие 7.3. *Пусть* $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ *измеримы и* $\forall\ x \in E\ \ \exists\ f(x) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. *Тогда предел* f *измерим.*

$$f := \varlimsup f_n = \varliminf f_n.$$

Введём такие обозначения. $f_n, f, g\colon E \to \mathbb{R}$

(1) $f_n \to f$, если $\forall\ x \in E\ \ \exists\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(2) $f_n \nearrow f$, если $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ и $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$

(3) $f_n \searrow f$, если $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ и $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots$

Определение 7.3. *Фнкция* $h\colon E \to \mathbb{R}$ *называется простой, если* $h(E) = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\} \subset \mathbb{R}$.

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} h_k \chi_{H_k}(x),$$

где $H_k := \{x \in E \big| h(x) = h_k\}$, $\chi_H(x) = \begin{cases} 1, & x \in H; \\ 0, & x \notin H. \end{cases}$

Теорема 7.2. $\forall\ f\colon E \to \mathbb{R}_+$ *измеримой существует неубывающая последовательность* $h_n \nearrow f$ $(n \to \infty)$, h_n — *измеримые и простые.*

Теорема 7.3. *Построим по следующей формуле*

$$h_n(x) := \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k-1}{2^n} \chi_{H_k^n}(x) + 2^n \chi_{H^n}(x),$$

где $H_k^n := E\left(\frac{k-1}{2^n} \leqslant f < \frac{k}{2^n}\right)$, $H^n := E(f \geqslant w^n)$, $k = 1, 2, \ldots, k^{2n}$

Покажем, что эта последовательность функций неубывающая. Ясно, что функции простые, что измеримые. Так как у нас $H_K^n = H_{2k-1}^{n+1} \sqcup H_{2k}^{n+1}$, $h_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant h_{n-1}(x)$

Кроме того $\left|f(x) - h_n(x)\right| < \frac{1}{2^n}$, *если* $x \in E(f < 2^n)$.

Поскольку n *убегает в бесконечность.* $h_n \nearrow f$. *Если* f *ещё и ограничена, то сходимость будет ещё и равномерной.*

Определение 7.4. $f_n \to f$ *почти всюду (п. в.), если* $\exists\ A \in \Sigma\colon \mu(A) = 0,\ f_n \to f$ *на* $E \setminus A$.

Определение 7.5. $f_n \to f$ *почти равномерно (п. р.), если* $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ A \in \Sigma\colon \mu(A) < \varepsilon$ *и* $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ *на* $E \setminus A$.

Определение 7.6. $f \sim g$ *эквивалентны, если* $\exists\ A \in \Sigma\colon \mu(A) = 0$ *и* $f(x) \equiv g(x)\ \ \forall\ x \in E \setminus A$.

Пределы почти всюду и почти равномерно определяются с точностью до эквивалентности. Если функция измерима, то и эквивалентная ей измерима.

Теорема 7.4 (Егорова). *Пусть у нас* $\mu(E) < \infty$, *функции* $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ *измеримы. Тогда* $f_n \to f$ *почти всюду на* $E \Leftrightarrow f_n \to f$ *почти равномерно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть у нас последовательность функций сходится почти всюду $f_n \to f$ (п. в.) на E. Легко видеть, что доказательство из определения почти равномерной сходимости сводится к случаю $f_n \to f$ всюду.

Обозначим $B_n = \bigcap\limits_{j=n}^{\infty} E\left(|f_j - f| < \frac{1}{k}\right)$ для $k \geqslant 1$. Объединение таких множеств даст всё E. Таким образом, последовательность $B_n \nearrow E$. Мы доказывали свойство непрерывности меры снизу, поэтому $\lim \mu(B_n) = \mu(E)$.

Обозначим дополнение $A_n := E \setminus B_n$. Тогда в силу равенства $\lim \mu(B_n) = \mu(E)$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Поэтому существует n_k, такой что $\mu(A_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Обозначим $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$. Тогда $\mu(A) < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Дополнение $E \setminus A$ есть пересечение $E \setminus A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}$. Поэтому $\forall\ j \geqslant n_k,\ \forall\ x \in E \setminus A\ \ \big|f_j(x) - f(x)\big| < \frac{1}{k}$. Следовательно, последовательность сходится равномерно на множестве $E \setminus A$.

Достаточность. Пусть у нас последовательность функций $f_n \to f$ (п. р.) на E. Ну по определение $\forall\ n\ \ \exists\ A_n \in \Sigma\colon \mu(A_n) < \frac{1}{n},\ f_m \underset{m\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $E \setminus A_n$.

Обозначим $A := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu A = 0$. И $\forall\ x \in E \setminus A \Rightarrow f_m(x) \to f(x)$. ∎

Определение 7.7. *Пусть $f, f_n\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы. $f_n \to f$ по мере μ на E (здесь мы должны предположить, что функция измерима… сначала), если $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\Big(E\big(|f_n - f| \geqslant \varepsilon\big)\Big) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Теорема 7.5. *Тут два утверждения.*

(1) Пусть $f, f_n\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы, и $\mu(E) < \infty$, то из $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ (п. в.) на E следует, что $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ по мере E.

(2) Если $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ по мере на E, то $\exists$ подпоследовательность $f_{n_k} \to f$ (п. в.) на E.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения применим теорему Егорова.

$$\varepsilon > 0\ \ \exists\ A \in \Sigma\colon \mu(A) < \varepsilon,\ f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows},$$

то есть $\exists\ n\colon \forall\ k \geqslant n\ \ \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\mu\Big(E\big(|f_k - f| \geqslant \varepsilon\big)\Big) \leqslant \mu(A) < \varepsilon$. Значит, предел $f_k \to f$ по мере на E.

Доказательство второго утверждения. Пусть $f_n \to f$ по мере. Существует $m_k\colon \mu\Big(E\big(|f - f_{m_k}| \geqslant \frac{1}{2^k}\big)\Big) < \frac{1}{2^k}$ (из сходимости по мере следует, что предел этой конструкции равен нулю). Обозначим $A_n := \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E\big(|f - f_{m_k}| \geqslant \frac{1}{2^k}\Big)$ и рассмотрим $A := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Имеем $\mu(A_n) < \frac{1}{2^{n-1}}$, получаем $\mu(A) = 0$.

Если $x \in E \setminus A$, то $x \in E \setminus A_n$ и $\big|f(x) - f_{m_k}(x)\big| < \frac{1}{2^k}$. Следовательно, $f_{m_k} \to f$ на $E \setminus A$. ∎

Ну и в заключение давайте примерчик один приведём. Пример Риссо. Покажем, что их сходимости по мере не следует сходимость почти всюду. Берём отрезок $E = [0, 1]$, разбиваем его на отрезки $A_n = \big[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^n}\big]$. Каждый отрезок имеет меру $\mu(A_n) = \frac{1}{2^m}$. Нумерация такая: $n = 2^m + k$, $k = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$, для того, чтобы нумерация была по одному индексу. $f_n(x) = \chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_n; \\ 0, & x \notin A_n. \end{cases}$ Тогда мера Лебега

$$\mu\left(f_n \geqslant \varepsilon\right) = \frac{1}{2^m} \to 0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Наша последовательность $f_n \to 0$ по мере на отрезке $[0, 1]$.

Но эта последовательность не сходится никуда. Легко видеть

$$\varlimsup f_n(x) = 1, \quad x \in [0, 1]; \qquad \varliminf f_n(x) = 0, \quad \forall\ x \in [0, 1].$$

К нулю в том числе не сходится.

8 Интеграл Лебега

Значит, у нас в дальнейшем (X, Σ, μ) — измеримое пространство (на прошлой лекции я говорил, что это такое), $E \in \Sigma$, через α будем обозначать $\alpha = \big\{A_k\big\}_{k=1}^{n}$ — измеримое разбиение E, то есть $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in \Sigma$.

Пусть также есть $f\colon E \to \mathbb{R}_+$. Введём обозначения $S_\alpha(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$ — сумма Дарбу[1], $a_k = \inf\limits_{x \in A_k} f(x)$, $a_k = a_k(f)$.

Определение 8.1. *Интегралом Лебега измеримой функции $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ называется верхняя грань сумм Дарбу*

$$\int\limits_E f\, d\mu = \sup_\alpha = S_\alpha(f).$$

[1] Так как $0 \cdot \infty = 0$ по определению, все суммы Дарбу конечные.

Если значения функции имеют произвольный знак, то есть $f\colon E \to \mathbb{R}$. *То* $f = f_+ - f_-$, *где* $f_\pm(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$, *то интеграл Лебега определяется, как*

$$\int\limits_E f\,d\mu := \int\limits_E f_+\,d\mu - \int\limits_E f_-\,d\mu.$$

Функция называется интегрируемой по Лебегу (или суммируемой) $f \in L(E,\mu)$, *если* f *измерима и* $\int\limits_E f_\pm\,d\mu < \infty$.

Верхняя грань сумм Дарбу может быть и бесконечной. Это допустимо для неотрицательной функции. А в случае знакопеременной функции может возникнуть неопределённость $\infty - \infty$.

Теперь перейдём у свойствам.

Утверждение 8.1. *Пусть* $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ *измерима. Тогда* $\int\limits_E f\,\mu = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$, *то есть* $f = 0$ *почти всюду.*

Доказательство. Необходимость. Если $\int\limits_E f\,d\mu = 0$, то все суммы Дарбу $S_\alpha(f) = 0$. Рассмотрим $E_n = E(g \geqslant \frac{1}{n})$. Ясно, что $E_n \nearrow E(f > 0)$ и $\mu\big(E(f>0)\big) = \lim \mu(E) = 0$. Ведь мы можем строить разбиение так, чтобы одно из множеств было E_n.

Достаточность. $\mu\big(E(f>0)\big) = 0$, значит, $S_\alpha(f) = 0$. Это из определения вытекает. ∎

Утверждение 8.2. *Пусть* $f, g\colon E \to \mathbb{R}_+$ *измеримы и* $f \leqslant g$ *на* E. *Тогда* $\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_g d\mu$.

Доказательство. Так как сумма Дарбу для любого разбиения удовлетворяет соответствующему неравенству $S_\alpha(f) \leqslant S_\alpha(g)$. ∎

Утверждение 8.3. *Если* $f, g \in L(E,\mu)$ *и* $f \leqslant g$ *на* E, *то* $\int\limits_E f_+\,d\mu \leqslant \int\limits_E g_+\,d\mu$ *и* $\int\limits_E f_-\,d\mu \geqslant \int\limits_E g_-\,d\mu$. *А если вычтем, то*

$$\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_E g\,d\mu.$$

Лемма 8.1. *Пусть* $h \in L(E,\mu)$ *простая, то есть принимает конечное количество значений. Тогда, как мы знаем, она записывается в виде*

$$h(x) = \sum_{k=1}^{m} = h_k \chi_{H_l}(x), \qquad H_l = \big\{x \in X \big| h(x) = h_l\big\}.$$

Тогда $\int\limits_E h\,d\mu = \sum\limits_{l=1}^{m} h_l \mu(E \cap H_l)$.

Доказательство. Достаточно доказать для случая неотрицательной функции $h \geqslant 0$. $a_k(h) \leqslant h_l$, если $B_{kl} = A_k \cap H_l \neq 0$,

$$S_\alpha(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_k \mu(B_{kl}) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} h_l \mu(B_{kl}) = \sum_{l=1}^{m} h_l \mu(E \cap H_l).$$

Но если мы возьмём разбиение $\alpha = \big\{E \cap H_l\big\}_{l=1}^{m}$, будет знак равенства. ∎

Из этой леммы вытекают следующие два следствия.

Следствие 8.1. *Если* $h \in L(E,\mu)$ *простая, то её интеграл обладает свойством аддитивности, то есть*

$$\int\limits_E h\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} h\,d\mu, \qquad E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \in \Sigma.$$

Следствие 8.2. *Если* $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ *измерима, то* $\int\limits_E f\,d\mu = \sup\limits_{0 \leqslant h \leqslant f} \int\limits_E h\,\mu$, *где* h — *простая измеримая функция.*

Доказательство. Доказательство последнего следстви. Имеем из свойства 2 $\int\limits_E h\,d\mu \leqslant \int\limits_E g\,d\mu$. ∎

Следующая теорема одна из основных теорем.

Теорема 8.1 (о монотонной сходимости)**.** *Пусть* $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ *неотрицательны и измеримы, и* $f_n \nearrow f$ *на* E. *(Интеграл от* f *при этом может быть бесконечным, ничего страшного.) Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu.$$

Доказательство. Давайте обозначим этот предел через $I = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu$. Так как $f_n \leqslant f$ в каждой точке, то этот предел будет оцениваться $I \leqslant \int\limits_E f\,d\mu$. Для доказательства нам нужно доказать обратное неравенство.

Возьмём произвольную простую функцию $h\colon 0 \leqslant h \leqslant f$, $\varepsilon \in (0,1)$ и определим следующие множества $E_n = E(\varepsilon h \leqslant f_n) \nearrow E$. Запишем следующим очевидные равенства

$$\varepsilon \int\limits_{E_n} h\,d\mu = \int\limits_{E_n} \varepsilon h\,d\mu \overset{2}{\leqslant} \int\limits_{E_n} f_n\,d\mu \overset{2}{\leqslant} \int\limits_{E} f_n\,d\mu \leqslant I.$$

Ну а теперь заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} h\,d\mu = \int\limits_E h\,d\mu$ в силу следствия 1. Переходя к пределу получаем $\varepsilon \int\limits_E h\,d\mu \leqslant I$. В силу произвольности ε

$$\int\limits_E h\,d\mu \leqslant I \quad \forall\, 0 \leqslant h \leqslant f.$$

По свойству 3 имеем $G \int Ef\,d\mu \leqslant I$. ■

Следующее важное свойство четвёртое. Свойство линейности интеграла.

Утверждение 8.4. *Пусть $f, g \in L(E,\mu)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\int\limits_E \lambda f\,d\mu = \lambda \int\limits_E f\,d\mu$ и $\int\limits_E (f+g)\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu$.*

Доказательство. Первое свойство настолько очевидно, что я и доказывать не хочу. Докажем второе. Пусть пока что $f, g \leqslant 0$ и простые. Нужно вспомнить доказанную лемму и взять пересечение разбиений.

Второй случай. Пусть у нас теперь f и g неотрицательны и измеримы. В этом случае мы с вами доказывали теорему о том, что всякая неотрицательная функция является монотонным пределом неотрицательных простых функций, то есть $\exists\, f_n \nearrow f$ и $g_n \nearrow g$, где f_n, g_n — простые. Тогда и $f_n + g_n \nearrow f + g$. Ну а теперь применяем теорему о монотонной сходимости.

$$\int\limits_E (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E (f_n + g_n)\,d\mu \overset{1}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu + \lim_{n\to\infty} \int\limits_E fg_n\,d\mu$$

ну и по теореме о монотонной сходимости получаем $= \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu$.

Ну и третий случай, когда $f, g \in L(E,\mu)$, $f = f_+ - f_-$, $g = g_+ - g_-$. Тогда $(f+g) = (f+g)_+ - (f+g)_-$, и мы получим такое равенство

$$(f+g)_+ f_- + g_+ = (f+g)_- + f_+ + g_-.$$

Это равенство можно проинтегрировать по свойству 2, собрать слагаемые обратно и получить результат. ■

Утверждение 8.5. *Пусть $f \in L(E,\mu)$, то $|f| \in L(E,\mu)$ и выполнены соответствующие неравенства*

$$\left|\int\limits_E f\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_E |f|\,d\mu.$$

Доказательство. $|f| = f_+ + f_- \in L(E,\mu)$ по доказанным свойствам. Кроме того $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, применяем свойство 2, получаем $-\int\limits_E |f| \leqslant \int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_E |f|\,d\mu$. ■

Лемма 8.2 (Фату). *Пусть $f_n\colon E \to \mathbb{R}_+$ измеримы и $f = \underline{\lim}\, f_n$ почти всюду на E. Тогда $\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \underline{\lim} \int\limits_E f_n\,d\mu$.*

Доказательство. По свойству 4 можно избавиться от требования условия почти всюду. Будем считать, что $f = \underline{\lim}\, f_n$ всюду на E. Ну и введём такие функции $g_n = \inf\limits_{n\geqslant m} f_n$ — это измеримые неотрицательные функции (мы доказывали), ну и кроме того $g_m \nearrow f$ по определению предела.

Так как $\forall\, n \geqslant n \;\; g_m \leqslant f_n$, то у нас $\int\limits_E g_m\,d\mu \leqslant \inf\limits_{n\geqslant m} \int\limits_E f_n\,e\mu$. Ну и теперь применяем теорему о монотонной сходимости.

$$\int\limits_f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n\,d\mu \leqslant \lim_{m\to\infty} \inf_{n\geqslant m} \int\limits_E f_n\,d\mu = \underline{\lim} \int\limits_E f_n\,d\mu.$$

И лемма доказана. ■

Теорема 8.2 (Лебега о предельном переходе). *Пусть $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы, $f = \lim f_n$ почти всюду на множестве E, и существует функция $g \in L(E,\mu)$, $g \geqslant 0$ и $|f_n| \leqslant g$[1] на множестве E (можно и оставить здесь почти всюду). Тогда $f, f_n \in L(E,\mu)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu$.*

Доказательство. Не поскольку f измерима, то f_n тоже будет измерима. Будут выполнены такие неравенства почти всюду: $f_{n\pm}, f_\pm \leqslant g$ почти всюду на E. По свойству 2 интегралы будут конечны, то есть $f, f_n \in L(E,\mu)$. Кроме того $g \pm f_n \geqslant 0$ в силу того, что $|f_n| \leqslant g$ на E; $g \pm f_n \to g \pm f$, ну и нижний предел тоже сходится. Можно

[1] Эта функция g называется интегрируемой мажорантой.

применить лемму Фату

$$\int\limits_E (f+g)\,d\mu \leqslant \varliminf \int\limits_E (g+f_n)\,d\mu, \qquad \int\limits_E (g-f)\,d\mu \leqslant \varliminf \int\limits_E (g-f_n)\,d\mu$$

В силу аддитивности интеграла, на g погу сократить в каждом неравенстве. Останется два неравенства. Из-за минуса нижний предел сменится на верхний.

$$\varlimsup \int\limits_E f_n\,d\mu \leqslant \int\limits_E f\,d\mu \leqslant \varliminf \int\limits_E f_n\,d\mu.$$

И теорема доказана. ■

Теорема 8.3 (о σ-аддитивности интеграла Лебега)**.** *Пусть* $f \in L(E,\mu)$, $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \in \Sigma$. *Тогда* $\int\limits_E f\,d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f\,d\mu$.

Доказательство. Понятно, что $f = f_+ - f_-$, и доказательство сводится к случаю $f \geqslant 0$. Пусть сначала $E = E_1 \sqcup E_2$, $E_1, E_2 \in \Sigma$. Функция неотрицательна, значит можно рассуждать суммами Дарбу. Пусть α — разбиение множества E. Тогда у нас индуцируются разбиения $\alpha_1 = \alpha \cap E_1$, $\alpha_2 = \alpha \cap E_2$. Легко понять, что тогда $S_\alpha(f) \leqslant S_{\alpha_1}(f) + S_{\alpha_2}(f)$.

С другой стороны. Если α_1 — разбиение E_1, α_2 — разбиение E_2, можно построить $\alpha = \alpha_1 \sqcup \alpha_2$. В этом случае у нас будет равенство $S_\alpha(f) = S_{\alpha_1}(f) + S_{\alpha_2}(f)$. Значит, и верхняя грань будет удовлетворять этому равенству:

$$\int\limits_f d\mu = \int\limits_{E_1} f\,d\mu + \int\limits_{E_2} f\,d\mu.$$

Ну и теперь общий случай. Пусть $f \geqslant 0$, положим $F_n := \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, $f_n := \chi_{F_n} \cdot f$. Тогда $f_n \nearrow f$ и можно применить теорему о монотонной сходимости

$$\int\limits_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{F_n} f\,d\mu.$$

Раз для двух множеств верно, то и для любого конечно числа множеств будет верно и $\int\limits_E f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{E_n} f\,d\mu$.
■

Теорема 8.4 (Неравенство Чебышёва)**.** *Пусть* $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ *измерима. Тогда* $\forall\ t > 0\ \ \mu(E_t) \leqslant \frac{1}{t}\int\limits_E f\,d\mu$, $E_+ := E(f \geqslant t)$.

С этой теоремы началась теория вероятности. До Чебышёва теория вероятность было только интуитивной.

Доказательство. Имеем по свойству 2: $\int\limits_E f\,d\mu \geqslant \int\limits_{E_t} f\,d\mu \geqslant t\mu(E_t)$. ■

Введём такое определение.

Определение 8.2. *Пусть* $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ *измерима. Обозначим через* $\lambda_f(t) = \mu(E_t)$, $t > 0$, $E_t := E(f \geqslant t)$. $\lambda_f(t)$ *называется функцией распределения (значений* f*).*

Утверждение 8.6. *Свойства. Докажем только последнее.*

(1) $\lambda_f(t)\downarrow$;

(2) $\lambda_f(t-0) = \lambda_f(t)$;

(3) $\exists\ a\colon 0 < a \leqslant \infty,\ \lambda_f(t) = \infty$ *при* $t \in (0,a)$;

(4) Если $f \in L(E,\mu)$, *то* $\lambda_f(t) < \infty$ *при* $t > 0$;

(5) Если $\mu\big(E(f=t)\big) > 0$, *то* t *— точка разрыва* λ_f;

(6) $\lambda_f(t) = \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{t}\right)$, *если* $f \in L(E,\mu)$.

Доказательство. $E_t \searrow \varnothing$, $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{E_+} f\,d\mu$. Ну а следовательно $t\mu(E_t) \leqslant \int\limits_{E_+} f\,d\mu$. ■

Определение 8.3. *Если* $f\,g \in E\colon \mathbb{R}_+$ *измеримы и* $\lambda_f(t) = \lambda_g(t)\ \ \forall\ t > 0$, *то* f *и* g *называются равноизмеримыми.*

Пусть $f, g \in L(E,\mu)$. Тогда применяя теорему Фубини (которая у нас ещё будет) можно написать такие равенства
$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_0^\infty \lambda_f(t)\,dt; \qquad \int\limits_E g\,d\mu = \int\limits_0^\infty \lambda_g(t)\,dt.$$

9 Абсолютно непрерывные функции

Начнём с определения абсолютной функций множества. У нас будет дальше (X,Σ,μ) — измеримое пространство. Обозначим через $\Sigma_E = \{A \subset E | A \in \Sigma\}$, $E \in \Sigma$.

Определение 9.1. *Функция $\varphi\colon \Sigma_E \to \mathbb{R}$ называется зарядом, если φ σ-аддитивна. Заряд называется абсолютно непрерывным $\varphi \ll \mu$ относительно меры μ, если*
$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ \delta > 0\colon \forall\ A \in \Sigma_E,\ \ \mu(A) < \delta \Rightarrow \big|\varphi(A)\big| < \varepsilon.$$

Теорема 9.1 (об абсолютной непрерывности интеграла Лебега)**.** *Если $f \in L(E,\mu)$, то $\varphi(A) = \int_A f\,d\mu$, $A \in \Sigma_E$, является абсолютно непрерывным зарядом.*

Доказательство. Что интеграл зяряд, мы доказывали в прошлой лекции. Надо доказать только абсолютную непрерывность. Представим $f = f_+ - f_-$. Тогда можно считать, что $f \geqslant 0$. Рассмотрим $E_n = E(f \leqslant n)$, $E_n \nearrow E$. Можно воспользоваться свойством непрерывности снизу для меры.
$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ n \in \mathbb{N}\colon \varphi(E \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
А ещё $\forall\ A \in \Sigma_E$ $\mu(A) < \delta = \frac{\varepsilon}{2n}$, $\varphi(A \cap E_n) = \int\limits_{A\cap E_n} f\,d\mu \leqslant n\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Ну и осталось написать, что $\varphi(A) = \varphi(A\cap E_n) + \underbrace{\varphi(A\setminus E_n)}_{\leqslant \mu(E\setminus E_n)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, поскольку у нас φ монотонна (так как f неотрицательна). ∎

Следующая теорема в нашем курсе если и будет доказана, то на последней лекции, если время останется. Кто интересуется, может прочесть в книге Колмогоров—Фомин.

Теорема 9.2 (Радона—Никодима)**.** *Если заряд $\varphi\colon \Sigma_E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию*
$$\forall\ A \in \Sigma_E\colon \mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \varphi(A) = 0.$$
E имеет σ-конечную меру.

Тогда $\exists!$ (с точностью до эквивалентности) $f \in L(E,\mu)$ такая, что $\varphi(A) = \int\limits_A f\,d\mu \ \ \forall\ A \in \Sigma_E$.

Помните, что мы называли функции эквивалентными, если они совпадают почти всюду.

Доказательство. Единственность легко доказать. Если интегралы совпадают для всех $A \in \Sigma_E$ $\int\limits_A f\,d\mu = \int\limits_A g\,d\mu$, то пусть $\exists\ B \in \Sigma_E\colon \mu(B) > 0$, такой, что $f(x) > g(x) \ \ \forall\ x \in B$. Следовательно, $\int\limits_B (f-g)\,d\mu > 0$. ∎

Следствие обычно называется свойством абсолютной непрерывности. Его можно было бы и независимо доказать, но это заняло бы определённое время. Так что просто выведем из теоремы Радона—Никодима.

Следствие 9.1 (критерий абсолютной непрерывности)**.** $\varphi \ll \mu \Leftrightarrow \forall\ A \in \Sigma_E\colon \mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Потому что если множесво меры нуль $\forall\ \varepsilon > 0 \big|\varphi(A)\big| < \varepsilon$, то $\varphi(A) = 0$. А обратное вытекает из теоремы Радона—Никодима. ∎

9.1 Функции точки

Сначала я вам напомню определение функции ограниченной в вариациях.

Определение 9.2. $F \in B\vee[a,b]$, *если*
$$\bigvee_a^b ar(F) := \sup_\tau \sum_{k=1}^n \big|F(x_k) - F(x_{k-1})\big| < \infty, \quad \tau := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}.$$

Пространство будет линейным, и в нём можно ввести норму $\|F\| = \big|F(a)\big| + \bigvee\limits_a^b(F)$.

Напомню свойства без доказательства. Это должно быть в курсе математического анализа.

Утверждение 9.1. *Если $F \in B\vee[a,b]$ и $a < c < b$, то $\bigvee\limits_a^b ar(F) = \bigvee\limits_a^c ar(F) + \bigvee\limits_c^b ar(F)$.*

Утверждение 9.2. *Если $F(c-0) = F(c)$. то $V(x) = \bigvee\limits_a^x ar(F)$, $V(c-0) = V(c)$.*

Утверждение 9.3. *Разложение Жордана. Если $F \in B\vee[a,b]$, то $\exists\ \alpha(x)\uparrow$ и $\beta(x)\uparrow$, такая, что*

$$\alpha(a)=\beta(a)=0,\quad F(x)=F(a)+\alpha(x)-\beta(x),\quad V(x)=\alpha(x)+\beta(x).$$

Доказательство. $\alpha(x) := \frac{1}{2}\big\{\bigvee_a^x ar(F)+F(x)-F(a)\big\}$, $\beta(x) := \frac{1}{2}\big\{\bigvee_a^x ar(F)-F(x)+F(a)\big\}$. ■

Ещё одну теорему приведу без доказательства.

Теорема 9.3 (Лебега о производной монотонной функции)**.** *Если функция $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ монотонна, $f(x)\leqslant f(y)$, если $x\leqslant y$ (или наоборот), то существует производная $f'(x)$ почти всюду на $[a,b]$.*

9.2 Интеграл Лебега—Стилтьеса

Пусть $F\in B\vee[a,b]$ непрерывна слева. Тогда по разложению Жордана можем написать $F(x)=F(a)+\alpha(x)-\beta(x)$, где $\alpha,\beta\uparrow$. Можно построить меры Лебега—Стилтьеса μ_α,μ_β. И мы можем тогда построить заряд Лебега—Стилтьеса

$$\varphi_F=\mu_\alpha-\mu_\beta.$$

Заряд определён на $\Sigma_F := \Sigma_\alpha\cap\Sigma_\beta$, пересечение σ-алгебр мер μ_α и μ_β. Определение теперь.

Определение 9.3. *Интеграл Лебега—Стилтьеса $\int\limits_a^b f\,d\varphi_F := \int\limits_a^b f\,d\mu_\alpha - \int\limits_a^b f\,d\mu_\beta$. Определён на полуинтервале $[a,b)$.*

И напомню определение.

Определение 9.4. *Интеграл Римана—Стилтьеса $\int\limits_a^b f\,dF := \lim\limits_{d(\tau)\to 0} R_\tau(f,\xi,F)$, где*

$$R_\tau(f,\xi,F) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\big(F(x_k)-F(x_{k-1})\big),$$

τ — разбиение отрезка, то есть $\tau=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$, $d(\tau)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k-x_{k-1})$, $\xi=\{\xi_k\}$ и $\xi_k\in[x_{k-1}k,x_k]$.

Лемма 9.1. *Если функция $F\in C[a,b]$, то сущетсвует интеграл Римана—Стилтьеса.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть, когда F неубываюшая. Тогда интегральная сумма будет является интегралом Лебега от некоторой простой функции. $f\tau(x)=f(\xi_k)$ на $[x_{k-1},x_k)$. Так как функция непрерывно, я могу вместо отрезка брать полуинтервал. Ещё на отрезке $f_\tau\rightrightarrows f$. По теореме Лебега интеграл существует. ■

Кстати функцию F можно переопределить в счётном числе точек. От этого интеграл не изменится.

Нам эта лемма в общем-то и не понадобится.

Теорема 9.4 (о сравнении интегралов)**.** *Если функция $f\colon[a,b]$ ограничена и $\exists\ \int\limits_a^b d\,dF$, то $\exists\ \int\limits_a^b f\,d\varphi_F$ и они равны.*

Доказательство. Применяем разложение Жордана. Без ограничения общности считаем $F(x)=\alpha(x)\uparrow$ и $f\geqslant 0$. Рассмотрим в этом случае интегральные суммы Дарбу—Стилтьеса для заданного разбиения

$$\underline{D}_\tau(f,\alpha) := \sum_{k=1}^n \underline{a}_k m_\alpha\big([x_{k-1},x_l]\big),\quad \overline{D}_\tau(f,\alpha) := \sum_{k=1}^n \overline{a}_k m_\alpha\big([x_{k-1},x_l]\big),$$

где $\underline{a}_k=\inf\limits_{[x_k,x_{k-1})]} f(x)$, $\overline{a}_k=\sup\limits_{[x_k,x_{k-1})]} f(x)$, $\tau=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$. Тогда

$$\underline{D}_\tau(f,\alpha)\leqslant\overline{D}_\tau(f,\alpha).$$

Осталось доказать равенство.

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ \delta>0\colon\forall\ \tau\colon d(\tau)<\delta\ \ I-\varepsilon\leqslant R_\tau(f,\xi,\alpha)\leqslant I+\varepsilon,\quad I=\int\limits_a^b f\,d\alpha.$$

Тогда суммы Римана будут находиться между суммами Дарбу

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ I-\varepsilon\leqslant\underline{D}_\tau(f,\alpha)\leqslant R_\tau(f,\xi,\alpha)\leqslant\overline{D}_\tau(f,\alpha)\leqslant I+\varepsilon$$

■

Определение 9.5. *$f \in AC[a,b]$, где $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна, если*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\colon \forall\ \bigsqcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k) \subset [a,b]\colon\ \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \bigl|f(b_k) - f(a_k)\bigr| < \varepsilon.$$

Такие функции образуют линейную пространство, где можно ввести норму $\|f\| := \bigl|f(a)\bigr| + \int\limits_a^b \bigl|f'(t)\bigr|\,dt$, корректность котороой мы проверим чуть позже.

Утверждение 9.4. *Есди $f \in \mathrm{Lip}[a,b]$, то есть $\exists\ C\ 0\colon \bigl|f(x) - f(y)\bigr| \leqslant C|x-y|\ \forall\ x, y \in [a,b]$, то $f \in AC[a,b]$.*

Утверждение 9.5. *Если $f \in AC[a,b]$, то $f \in C \vee [a,b]$.*

Доказательство. Берётся разбиение $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, такое что $(x_k - x_{k-1}) = \frac{\delta}{2} = \frac{(b-a)}{n}$. Тогдп вариация

$$\bigvee_a^b ar(f) = RY1n \bigvee_{x_k-1}^{x_k} ar(f) \leqslant n\varepsilon = \frac{2(b-a)}{\delta}\varepsilon.$$

■

Утверждение 9.6. *Если $f \in AC[a,b]$, то в разложении Жордана $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ $\alpha, \beta \in AC[a,b]$.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что $V(x) = \bigvee\limits_a^x ar(f)$ абсолютно непрерывна. Нужно воспользоваться свойством вариации и записать, что

$$\sum_{k=1}^{n} \bigl|V(b_k) - V(a_k)\bigr| = \sum_{k=1}^{n} \bigvee_{a_k}^{b_k} ar(f) \leqslant \varepsilon.$$

Достаточно заметить, что вариация на отрезке $[a_k, b_k]$ это точная верхняя грать сумм Дарбу. Нужно вспомнить определение абсолютно непрерывных функций и всё сразу понятно станет. ■

Ну и последнее свойство.

Утверждение 9.7. *Если $f \in AC[a,b]$, то $\exists!\ g \in L[a,b]$ (единственность с точностью до эквивалентности), такая что $f(x) = f(a) + \int\limits_a^x g(t)\,dt$.*

Доказательство. Разложим f по формуле Жордана $f(x) = f(a) = \alpha(x) - \beta(x)$, $\alpha, \beta \uparrow$. Затем построим меры Лебега—Стилтьеса μ_α, μ_β по функциям α, β. Эти меры будут абсолютно непрерывны $\mu_\alpha, \mu_\varepsilon \ll \lambda$ (λ — мера Лебега), так как α, β абсолютно непрерывны (у нас было два определения абсолютной непрерывности для разных объектов, тут используются оба).

Отсюда вытекает, что заряд $\varphi_F \ll \lambda$. Ну и по теоереме Радона—Никодима

$$f(x) - f(a) = \varphi_f\bigl([a,x)\bigr) = \int_a^x g(t)\,dt$$

для некоторой функции $g \in L[a,b]$. Эта функция будет единственной с точностью до эквивалентности, как и в теореме Радона—Никодима. ■

Лемма 9.2. *Пусть $F \uparrow$ на $[a,b]$. Тогда $\int\limits_a^b F'(t)\,dt \leqslant F(b) - F(a)$. Но если $F \in \mathrm{Lip}[a,b]$, то выполняется равенство.*

По теореме Лебега производная монотонной функции интегрируема почти всюду. Равенство же может быть и не выполнено, например, если взять функцию Кантора (лесницу Кантора).

Доказательство. Давайте мы продолжим нашу функцию за отрезок $F(x) = F(b)$, $x \in [b, b+1]$. Функция останется неубывающе. Ну и возьмём такие функции и применим теорему Лебега

$$F_n(t) = \frac{F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} F'(t).$$

Предел есть по теореме Лебега почти всюду на $[a,b]$. Теперь применим теорему Фату

$$\int_a^b F'(t)\,dt \leqslant \underline{\lim} \int_a^b F_n(t)\,dt = \underline{\lim} \left(b \int_b^{b+\frac{1}{n}} F(t)\,dt - n \int_a^{a+\frac{1}{b}} F(t)\,dt \right) \leqslant F(b) - F(a).$$

Это в силу того, что функция неубывающая.

Осталось вторую часть доказать. Чтобы её доказать, нужно вспомнить определение условия Липшица. Из этого определения вытекает, что производная ограничена почти всюду $\bigl|F'(t)\bigr| \leqslant C$ почти всюду. Ну и тогда вместо леммы Фату можно применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. ■

Теорема 9.5 (характеристические свойсва абсолютно непрерывных функций)**.** *$F \in AC[a,b]$, если и только если*

$$\exists\ F'(t)\,(\text{п. в.})\ \text{на}\ [a,b],\ \ F' \in L[a,b], F(x) = F(a) + \int\limits_a^x F'(t)\,dt \forall\ x \in [a,b].$$

Доказательство. Достаточность вытекает из абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Применяя свойство разложение Жордана, можно считать, что $F\uparrow$ на $[a,b]$. Давайте ещё считать, что $F(a) = 0$. Тогда по свойству 4 имеем

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt,\ \ f \in L[a,b].$$

Поэтому для доказательства необходимости нужно доказать, что $F'(t) = f(t)$ почти всюду на $[a,b]$.

Введём такие функции $f_n(x) = \min\bigl\{f(t), n\bigr\}$ — срез функции на уровне n. f определена почти всюду, её можно считать неотрицательной. Обозначим $F_n(x) = \int\limits_a^x f_n(t)\,dt$. Запишем разность

$$F(x) - F_n(x) = \int\limits_a^x \bigl(\underbrace{f(t) - f_n(t)}_{\geqslant 0}\bigr)\,dt \uparrow.$$

Следовательно $F'(x) \geqslant F_n'(x)$ почти всюду на $[a,b]$. Производная существует почти всюду по теореме Лебега. Давайте запишем ещё следующее равенство по лемме, используя, что $F_n(x) \in \mathrm{Lip}[a,b]$.

$$F_n(x) = \int\limits_a^x F_n'(t)\,dt = \int\limits_a^x f_n(t)\,dt,$$

$F_n'(t) = f_n(t)$ почти всюду на $[a,b]$.

$$F'(x) \geqslant F_n'(x) = f_n(x) \quad \text{п. в.}$$

переходя к пределу, получаем $F'(x) \geqslant f(x)$ почти всюду на $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b \bigl(F'(t) - f(t)\bigr)\,dt \geqslant 0.$$

А по лемме этот же интеграл будет оцениваться нулём и в другую сторону

$$\int\limits_a^b F'(t)\,dt \leqslant F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(t)\,dt \leqslant 0.$$

Значит, интеграл равен нулю. А поскольку функция неотрицательна, то она равна нулю почти всюду и $F'(t) = f(t)$ почти всюду. ■

10 Теорема Фубини

Сначала мы докажем предварительную теорему, а потом уже теорему Фубини. Рассмотрим S_k — полукольцо в X_k, где $k = 1,\dots,n$. И рассмотрим прямое произведение этих полуколец $S := S_1 \times \cdots \times S_n = \{A = A_1 \times \cdots \times A_n \mid A_k \in S_k, k = 1,\dots,n\}$. Мы сейчас докажем, что это тоже полукольцо. Пусть у нас ещё заданы меры на каждом полукольце $m_k\colon S_k \to \mathbb{R}_+$. Тогда можно ввести понятие прямого[1] произведения мер $m = m_1 \times \cdots \times m_n$, где $m(A) := m_1(A_1)\dots m_n(A_n)$, если $A = A_1 \times \cdots \times A_n$.

Теорема 10.1. *Если $m_k\colon S_k \to \mathbb{R}_+$ есть σ-аддитивные меры на полукольцах S_k при $k = 1,\dots,n$, то $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ является полукольцом и $m = m_1 \times \cdots \times m_n$ является σ-аддитивной мерой.*

Доказательство. Приведём доказательство для $n = 2$, далее по индукции. Пусть $S = S_1 \times S_2$ — полукольцо. Берём два множества

$$A = A_1 \times A_2,\ \ B = B_1 \times B_2 \in S, \quad A_1, B_1 \in S_1,\ \ A_2, B_2 \in S_2.$$

Легко проверяется, что

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2).$$

[1] Будет ещё другое произведение мер, поэтому слово прямое не будем опускать.

Можно нарисовать картинку в виде двух прямоугольников.

Теперь разность представляется в виде трёх слагаемых

$$A \setminus B = \big((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2)\big) \sqcup \big((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \cap B_2)\big) \sqcup \big((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)\big).$$

Это тоже можно показать, нарисовав картинку из двух прямоугольников. Таким образом, S — полукольцо.

Осталось показать, что произведение мер является σ-аддитивной мерой. Пусть множество A представляется в виде

$$A = \bigsqcup_{l=1}^{m} B^{(l)}, \quad A = A_1 \times A_2,\ B^{(l)} = B_1^{(l)} \times B_2^{(l)}.$$

Давайте запишем такую функцию

$$f_l(x_1) := m_2(B_2^{(l)}) \cdot \chi_{B_1^{(l)}}(x_1), \quad x_1 \in A_1.$$

Из этого определения вытекает, что $A_2 = \bigcup\limits_{l=1}^{m} B_2^{(l)}$, но не обязательно дизьюнктное. Отсюда вытекает такое равенство

$$m_2(A_2) = \sum_{l=1}^{m} f_l(x_1), \quad x_1 \in A_1.$$

Пусть μ_1 — продолжение меры m_1. Мы сейчас будем писать интеграл и подставлять определение нашей функции.

$$m(A) := m_1(A_1) \cdot m_2(A_2) = \int\limits_{A_1} m_2(A_2)\, d\mu_1 = \sum_{l=1}^{m} \int\limits_{A_1} f_l(x_1)\, d\mu_1 = \sum_{l=1}^{m} m_1(B_1^{(l)}) \cdot m_2(B_2^{(l)}).$$

Для $m = \infty$ нужно лишь применить теорему о монотонной сходимости. Выкладка та же самая. ∎

Определение 10.1. *Пусть у нас заданы измеримые пространства (X_k, Σ_k, μ_k), $k = 1, \ldots, n$. Тогда мы можем построить*

$$X = X_1 \times \cdots \times X_n,\ S = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n,\ m = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n.$$

Если построить внешнюю меру и ограничить на Σ, то $m^*\big|_\Sigma = \mu$ и тройка (X, Σ, μ) называется произведением измеримых пространств.

Это произведение обладает свойством ассоциативности. Будем обозначать это произведение не как прямое, а как тензорное

$$\mu := \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n.$$

Свойство ассоцативности тогда записывается так

$$(\mu \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3).$$

Свойство ассоциативности вытекает из ассоциативности прямого произведения. Мы для простоты изложения далее будем рассматривать случай $n = 2$.

Пусть (X, Σ_X, μ_X) и (Y, Σ_Y, μ_Y) — измеримые пространства. Тогда для $Z = X \times Y$, $\mu = \mu_X \otimes mu_Y$, $E \in \Sigma$ обозначим сечения

$$E_X = \big\{y \in Y \big| (x, y) \in E\big\}, \quad E_Y = \big\{x \in X \big| (x, y) \in E\big\}.$$

Сечение объединений будет объединением сечений, относительно пересечения и разности так же. То же самое можем сделать для функций

$$f\colon E \to \mathbb{R}, \quad f_x(y) = f(x, y), \quad f_y(x) = f(x, y).$$

Теорема 10.2. *Если $E \in \Sigma$ σ-конечной меры, то*

$$\mu(E) = \int\limits_X \mu_y(E_x)\, d\mu_x = \int\limits_Y \mu_x(E_y)\, d\mu_y.$$

Вообще говоря, не все сечения будут измеримы, функция будет определена почти всюду. Где функция неопределена, положим её равной нулю, это не повлияет на значение интеграла.

Доказательство. Доказательство будет проходить в несколько шагов.

1. $E = A \times B$, $A \in \Sigma_x$, $B \in \Sigma_y$. Тогда

$$\mu(E) = \mu_x(A) \cdot \mu_y(B) = \int\limits_A \mu_y(B)\, d\mu_x = \int\limits_A \mu_x(A)\, d\mu_x.$$

Это равенства симметричны, мы будем доказывать только одно из них.

$$\forall\ E \in \mathcal{R}(S), \quad S = \Sigma_x \times \Sigma_y.$$

2. $\mu(E) < \infty$. Построим измеримую оболочку A множества E (была лемма об измеримой оболочке).

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad E \subset A_k, \quad A_k = \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{kl}, \quad A_{kl} \in S, \mu(A_k \setminus E) < \frac{1}{k}.$$

Из этого вытекает, что $\mu(A \setminus E) = 0$. Введём теперь следующие множества

$$B_n := \bigcap_{k=1}^{n} A_k, \quad D_{nm} := \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{m} A_{kl} \in S.$$

Так как оба $\in S$, для них уже теорема доказана. Кроме того, $B_n \searrow A$ при $n \to \infty$, а $D_{mn} \nearrow B_n$ при $m \to \infty$. Теперь осталось применить свойства непрерывности меры снизу и сверху. А так как для множеств из полукольца теорема доказана, то и для наших множеств будет доказана. Ну и $\mu(A \setminus E) = 0$. Значит, надо доказать ещё для множеств меры нуль.

Пусть $B = E \setminus A$, $\mu(B) = 0$. Берём точно так же измеримую оболочку C этого множества $C \supset B$. Для этой измеримой оболочки мы уже доказали теорему. Имеем интеграл

$$\int\limits_X \mu_y(C_x)\, d\mu_X = \mu(C) = \mu(B) = 0.$$

Так как $C \supset B$, то и $C_x \supset B_x$. И таким образом, мы доказали теорему полность для множества конечной меры.

Если множества σ-конечной меры, мы представляем их в виде счётного объединения конечной меры.

■

Теперь то, что оставалось без доказательства: про функцию распределения. Это как пример применения этой теоремы. Пусть (X, Σ, μ) — измеримое пространство. На множестве $E \in \Sigma$ задана неотрицательная измеримая функция $f\colon E \to \mathbb{R}_+$. Рассмотрим множество-подграфик

$$G = \big\{(x,t) \big| 0 \leqslant t \leqslant f(x)\big\} \subset X \times \mathbb{R}_+.$$

Позже мы докажем, что подграфик измеримой функции есть измеримое множество. А сейчас запишем его меру, как интегралы по сечениям

$$\mu(G) = \int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_0^{\infty} \mu(G_t)\, dt = \int\limits_0^{\infty} \lambda_f(t)\, dt,$$

где G_t — функция распределения, а $\lambda_f(t) = \mu(G_t)$.

Лемма 10.1. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ измерима. Тогда её подграфик $G = \big\{(t,x) \big| 0 \leqslant t \leqslant f(x)\big\} \subset X \times \mathbb{R}_+$ является измеримым относительно произведения мер $\mu \times dt$.*

Доказательство. Давайте введём множества $H_k^n = E\left(\frac{k-1}{2^n}, f, \frac{k}{2^n}\right)$ (множество точек x, для которых выполняется неравенство) и функции $h_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \chi_{H_k^n}(x) > f(x)$. Была у нас лемма о том, что $h_n \searrow f$.

У функции h_n подграфик измерим, а подграфик функции f будет пересечением этих подграфиков. А пересечения измеримых измеримы. ■

Работаем в тех же обозначениях для произведения измеримых пространств.

Теорема 10.3 (Фубини)**.** *Если $E \in \Sigma$ σ-конечной меры и $f \in L(E, \mu)$, то*

$$\int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_X \int\limits_{E_x} f_x\, d\mu_y\, d\mu_x = \int\limits_Y \int\limits_{E_y} f_y\, d\mu_x\, d\mu_y.$$

То есть интеграл по произведению мер равен повторному интегралу.

Доказательство. Представим f в виде разности неотрицательных функций $f = f_+ - f_-$, где $f_\pm \geqslant 0$. Это даёт нам право без ограничения общности считать, что $f \geqslant 0$. Обозначим $\lambda = \mu \otimes dt = \mu_x \otimes \mu_y \otimes dt$ в силу ассоциативности. Ещё обозначим $\nu = \mu_y \otimes dt$. Тогда $\lambda = \mu_x \otimes \nu$. Мера задана на множестве $X \times Y \times \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим подграфик $G = \big\{(x,y,t) \big| 0 \leqslant t \leqslant f(x,y)\big\} \subset X \times Y \times \mathbb{R}_+$. Мы доказали, что G измеримо относительно меры λ.

Теперь давайте вычислять меру этого множества разными способами. Первый спобос: фиксируем (x, y)

$$\lambda(G) = \int\limits_E f\, d\mu.$$

С другой стороны можем фиксировать переменную x. Тогда будет подграфик сечения функции

$$\lambda(G) = \int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_X \nu(G_x)\, d\mu_X.$$

Но сам этот подграфик мы тоже можем вычислить с помощью сечений.

$$\lambda(G) = \int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_X \nu(G_x)\, d\mu_X = \int\limits_X \left(\int\limits_{E_x} f_x\, d\mu_y \right) d\mu_x.$$

А второе равенство доказывается симметрично. ■

А теперь рассмотрим меру Лебега на $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим n экземпляров измеримых пространств $(\mathbb{R}, \Sigma_k, \mu_k)$ Лебега в $\mathbb{R}$, $k = 1 \ldots, n$. Тогда можем рассмотреть измеримое пространство в $\mathbb{R}^n$

$$(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu), \quad \mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n.$$

Можно было по-другому определять, а именно сразу рассмотреть полукольцо. Но у нас была теорема единственности меры, значит, мы бы получили то же самое.

Пусть $\Delta = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ — n-мерный отрезок. Будем обозначать $R(\Delta)$ — множество функций, измеримых по Риману, а $L(\Delta)$ — множество функций, интегрируемых по Лебегу на этом отрезке. Будем рассматривать только ограниченные функции $f\colon \Delta\mathbb{R}$. Для заданной функции определим функции Бэра

$$\underline{f}(x) := \lim_{r\to 0} \inf_{x\in\Delta\cap S_r(x)} f(x), \quad \overline{f}(x) = \lim_{r\to 0} \sup_{x\in\Delta\cap S_r(x)} f(x).$$

Эти функции измеримы, поскольку множества $\Delta(\underline{f} > c)$ и $\Delta(\overline{f} < c)$ тех точек отрезка, для которых $\underline{f} > c$ и множество, где $\overline{f} < c$ открыты для любого $c \in \mathbb{R}$.

Нижняя функция будет совпадать с верхней в точке x, если и только если функция непрерывна в x.

Теорема 10.4 (Лебега о сравнении интегралов Римана и Лебега для n-мерного отрезка)**.** *Пусть функция $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ ограничена. Тогда $f \in \mathbb{R}(\Delta) \Leftrightarrow \mu(E_1) = 0$, где*

$$E_f = \left\{x \in \Delta \middle| \underline{f}(x) \neq \overline{}(x)\right\}.$$

Если $f \in R(\Delta$, то $f \in L(\Delta)$ и $\int\limits_\Delta f(x)\, dx = \int\limits_\Delta f\, d\mu$.

Доказательство. Сначала напишем одно из необходимых и достаточных условий интегрируемости. Когда нижний интеграл Дарбу совпадает с верхним. Мы устраиваем разбиение $\tau = \left\{\Delta_l\right\}_{l=1}^n$ отрезка Δ, внутренности элементов которого не пересекаются, то есть $\mathring{\Delta}_l \cap \mathring{\Delta}_{l'} = \varnothing$ при $l \neq l'$, а $\Delta = \bigcup\limits_{l=1}^m \Delta_l$.

$$\underline{D}_\tau(f) = \sum_{l=1}^m \underline{a}_l \mu(\Delta_l),\ \underline{a}_l = \inf_{\Delta_l} f(x), \quad \overline{D}_\tau(f) = \sum_{l=1}^m \overline{a}_l \mu(\Delta_l),\ \overline{a}_l = \sup_{\Delta_l} f(x).$$

Условие выглядит так

$$\underline{\int} f(x)\, dx = \sup_\tau \underline{D}(f) = \inf_\tau \overline{D}_\tau(f) = \overline{\int} f(x)\, dx.$$

Пусть $\tau_k = \left\{\Delta^{(k)}{}_l\right\}_{l=1}^{m_k}$ — последовательность разбиений, удовлетворяющая условиям

1. Диаметр $f(\tau_k) \to 0$;

2. $\tau_k \supset \tau_{k+1}$;

3. $\underline{\int} f(x)\, dx = \lim\limits_{k\to\infty} \underline{D}_{\tau_k}(f) = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m_k} \underline{a}_l^{(k)} \mu(\Delta_l^{(k)})$.

Функции $h_k(x) = \sum\limits_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^{(k)} \chi_{\Delta_l^{(l)}}(x) \nearrow \underline{f}(x),\ \forall\, x \in \mathring{\Delta}_l^{(k)},\ \forall\, k,l$. Значит, сходится почти всюду и по одной из теорем имеем

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^{(k)} \mu(\Delta_l^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Delta} h_k\,d\mu = \int\limits_{\Delta} \underline{f}\,d\mu\,d\mu.$$

Отсюда мы получаем равенства

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \int\limits_{\Delta} \underline{f}\,d\mu, \quad \overline{\int} f(x)\,dx = \int\limits_{\Delta} \overline{f}\,d\mu.$$

Мы можем их объединить

$$\int\limits_{\Delta} \underbrace{(\overline{f} - \underline{f})}_{\geqslant 0}\,d\mu, \quad \underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x).$$

Откуда мы получаем, что $\underline{f}(x) - \overline{f}(x) = 0$ почти всюду на Δ, $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$ почти всюду на Δ. И

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx = \int\limits_{\Delta} f\,d\mu.$$

∎

Сейчас мы построим функцию, которая не интегрируема по Лебегу. То есть никакая ей эквивалентная не интегрируема по Риману. Берём отрезок $[0,1]$, набор $\{r_n\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ и число $0 < \varepsilon < 1$. Положим

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \varepsilon_n, r_n + \varepsilon_n), \quad \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Легко сверху оценить меру $\mu(A_\varepsilon) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2\varepsilon_n = \varepsilon$. Мера будет маленькой, но положительной. Положим

$$B_\varepsilon = [0,1] \setminus A_\varepsilon.$$

Это замкнутое множество, которое состоит только из иррациональных чисел. Оно нигде не плотно. Ну и мера этого множества $\mu(B_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$. Теперь достаточно взять функцию

$$f(x) = \chi_{B_\varepsilon}(x).$$

И сама функция не интегрируема по Риману, и её нельзя изменить на множестве меры нуль так, чтобы она стала интегрируемой по Риману.

11 Пространство L_p

Сегодня рассмотрим пространство $L_p(E,\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Распространим понятия, которые были для действительной функции.

Пусть (X, Σ, mu) — измеримое пространство, а $\mathbb{F} = \begin{cases} \mathbb{R}, \\ \mathbb{C}. \end{cases}$ $E \in \Sigma$. Функция $f \colon E \colon \mathbb{F}$, $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$, то есть $f(x) = u(x) + iv(x)$.

Определение 11.1. *f — измеримая, если u, v измеримы. $f \in L(E,\mu)$, если $u, v \in L(E,\mu)$ и* $\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E u\,d\mu + i\int\limits_E v\,d\mu$.

Все теоремы, где нет неравенств, верные для действительно значных функций, верны и для комплекснозначных. Некоторые свойства мы с вами докажем.

Утверждение 11.1. *Если $f, g \in L(E,\mu)$ и $\lambda \in \mathbb{F}$, то $f+g$, $\lambda f \in L(E,\mu)$ и*

$$\int\limits_E (f+g)\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu, \quad \int\limits_E \lambda f\,d\mu = \lambda \int\limits_E f\,d\mu.$$

Доказательство. Например, докажем последнее свойство. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, а $f = u + iv$, тогда $\lambda f = (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u)$. По определению интеграла комплекснозначной функции и по свойству линейности интеграла действительнозначной функции имеем

$$\int\limits_E \lambda f\,d\mu = \int\limits_E (\alpha u - \beta v)\,d\mu + i\int\limits_E (\alpha v + \beta u)\,d\mu = \Bigl(\alpha Eu - \beta \int\limits_E v\,d\mu\Bigr) + i\Bigl(\alpha \int\limits_E v\,d\mu + \beta \int\limits_E u\,d\mu\Bigr) = \lambda \int\limits_E f\,d\mu.$$

■

Утверждение 11.2. *Пусть $f \in L(E,\mu)$. Тогда $|f| \in L(E,\mu)$ и*

$$\Bigl|\int\limits_E f\,d\mu\Bigr| \leqslant \int\limits_E |f|\,d\mu.$$

Доказательство. $|f| = \sqrt{u^2+v^2}$, как обычно. Это не превосходит $|f| \leqslant |u| + |v| \in L(E,\mu)$. Осталось доказать равенство. Представим результат интегрирования в тригонометрической форме $\int\limits_E f\,d\mu = \Bigl|\int\limits_E f\,d\mu\Bigr| \cdot e^{i\theta}$. Тогда

$$\Bigl|\int\limits_E f\,d\mu\Bigr| = e^{-i\theta}\int\limits_E f\,d\mu = \operatorname{Re} e^{-i\theta}\int\limits_E f\,d\mu = \operatorname{Re}\int\limits_E e^{-i\theta} f\,d\mu = \int\limits_E \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f)\,d\mu \leqslant \int\limits_E |f|\,d\mu.$$

■

Утверждение 11.3. *Пусть $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$. Тогда $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ и $\lambda f_1 \sim \lambda g_1$.*

Это свойство очевидно. А если $f \sim g$ и $f \in L(E,\mu)$, то $g \in L(E,\mu)$. Значит, $L(E,\mu)$ есть линейное пространство и множество классов эквивалентных функций есть линейное пространство.

Мы вводили обозначение $B(E) = \bigl\{f\colon E \to \mathbb{F} \bigm| f — \text{ограничены на } E\bigr\}$.

Определение 11.2. $L_\infty(E,\mu)$ — *множество классов эквивалентности ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \inf\limits_{\mu(A)=0}\sup\limits_{x\in E\setminus A}\bigl|f(x)\bigr|$. Оно называется множеством существенно ограниченных функций. А норма называется существенной верхней гранью.*

Имеем $L \supset B(E)$ — подпространство, $f \sim 0$. Тогда $L_\infty(E,\mu) = B(E) \setminus L$. Мы будем обращаться с этими классами, как обыкновенными функциями.

Для каждого $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \exists\, A_n \in \Sigma\colon \mu(A_n) = 0,\ \forall\, x \in E \setminus A_n\ \ \bigl|f(x)\bigr| < \|f\|_{L_\infty} + \frac{1}{n}$. Обозначим через $A_f = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu A_f = 0$ и $\|f\|_{L_\infty} = \sup\limits_{x\in E\setminus A_f}\bigl|f(x)\bigr|$. То есть нижняя грань достигается на некотором множестве меры нуль. Такое множество может быть и не одно. Оно существует, нам этого достаточно, чтобы доказать

Утверждение 11.4 (Свойства нормы)**.** *Пусть $\|f\|_{L_\infty} = 0$. Тогда $f \sim 0$. Кроме того, $\|\lambda f\|_{L_\infty} = |\lambda|\cdot\|f\|_{L_\infty}$. И неравенство треугольника.*

Доказательство. Как доказать неравенство треугольника. Запишем равенства

$$\|f\|_{L_\infty} = \sup_{x\in E\setminus A_f}\bigl|f(x)\bigr|, \quad \|g\|_{L_\infty} = \sup_{x\in E\setminus A_g}\bigl|g(x)\bigr|.$$

Положим $A = A_f \cup A_g$. Тогда

$$\|f+g\|_{L_\infty} \leqslant \sup_{x\in E\setminus A}\bigl|f(x)+g(x)\bigr| \leqslant \sup_{x\in E\setminus A_f}\bigl|f(x)\bigr| + \sup_{x\in E\setminus A_g} = \|f\|_{L_\infty} + \|g\|_{L_\infty}.$$

Вот мы и доказали все свойства нормированного пространства. ■

Теорема 11.1. $L_\infty(E,\mu)$ — *банахово пространство, то есть полное линейное нормированное пространство.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность Коши $\bigl\{f_n\bigr\} \subset L_\infty(E,\mu)$. Положим $A = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} A_{f_n - f_m}$. При этом $\mu(A) = 0$ и $\|f_n - f_m\| = \sup\limits_{x\in E\setminus A}\bigl|f_n(x) - f_m(x)\bigr|$. Так как $f_n \in B(E\setminus A)$ — последовательность Коши, то по доказанному на первой же лекции $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{E\setminus A}{\rightrightarrows}} f \in B(E\setminus A)$. Положим $f(x) = 0$ на A. Тогда $f \in L_\infty(E,\mu)$ и $\|f - f_n\|_{L_\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ■

Определение 11.3. $L_p(E,\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$ — *пространство классов эквивалентности измеримых функций $f\colon E \to \mathbb{F}\colon |f|^p \in L(E,\mu)$ с нормой*

$$\|f\|_{L_p} = \Bigl(\int\limits_E |f|^p\,d\mu\Bigr)^{\frac{1}{p}}.$$

Это линейное пространство функций, суммируемых в степени p.

Заметим, что если $f, g \in L_p(E,\mu)$, то $|f+g|^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$ ну и ясно, что $\lambda f \in L_p(E,\mu)$. А чтобы доказать, что это нормированное пространство, надо доказать несколько неравенств.

Утверждение 11.5 (неравенство Гёльдера)**.** *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *и* $f, g\colon E \to \mathbb{R}_+$ *и измеримы. Тогда*

$$\int\limits_E fg\, d\mu \leqslant \Bigl(\int\limits_E f^p\, d\mu\Bigr)^{\frac{1}{p}} \Bigl(\int\limits_E g^q\, d\mu\Bigr)^{\frac{1}{q}}.$$

Причём эти интегралы могут принимать и бесконечные значения. Суммируемость не требуется.

Доказательство. Сначала докажем неравенство Юнга для чисел $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, где $a, b \geqslant 0$. Рассматриваем функции $y = x^{p-1}$ и $x = y^{q-1}$. Легко видеть, что эти функции взаимно обратные. Значит, можно посчитать интеграл слева от кривой и снизу от кривой. А площадь прямоугольника будет меньше

$$ab \leqslant \int\limits_0^a x^{p-1}\, dx + \int\limits_0^b y^{q-1}\, dy = \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}.$$

Равенство будет только в том случае, когда $a^{p-1} = b$ или, эквивалентно $a^p = b^q$.

Чтобы доказать теперь неравенство Гёльдера, введём обозначения $A = \int\limits_E f^p\, d\mu$ и $B = \int\limits_E g^q\, d\mu$. Если одно из этих чисел равно нулю или бесконечности, то неравенство очевидно. Берём $a = \frac{f}{A^{\frac{1}{p}}}$ и $b = \frac{q}{B^{\frac{1}{q}}}$. Применяем неравенство Гёльдера и интегрируем его

$$\int\limits_E ab\, d\mu \leqslant \frac{1}{p}\int\limits_E a^p\, d\mu + \frac{1}{q}\int\limits_E b^q\, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Отсюда вытекает уже неравенство Гёльдера. Легко видеть, что равенство будет тогда и только тогда, когда $f^p = \lambda g^q$, где $\lambda = A/B$ почти всюду на множестве E. ■

Следующее неравенство

Утверждение 11.6 (неравенство Минковского)**.** *Пусть* $f, g \in L_p(E, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда* $\|f + g\|_{L_p} \leqslant \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$.

Доказательство. В случае $p = 1$, это неравенство вытекает из элеметнарного неравенства для чисел $|f + g| \leqslant |f| + |g|$. Нужно проинтегрировать это неравенство, получим неравенство треугольника для L_1.

Пусть $p > 1$. Положим $A = \int\limits_E |f|^p\, d\mu$, $B = \int\limits_E |g|^p\, d\mu$, $C = \int\limits_E |f + g|^p\, d\mu$. Тогда

$$C = \int\limits_E |f + g| \cdot |f + g|^{p-1}\, d\mu \leqslant \int\limits_E |f| \cdot |f + g|^{p-1}\, d\mu + \int\limits_E |g| \cdot |f + g|^{p-1}\, d\mu.$$

Найдём q: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(p-1)q = p$. Тогда по неравенству Гёльдера

$$C \leqslant A^{\frac{1}{p}} \cdot C^{\frac{1}{q}} + B^{\frac{1}{p}} \cdot C^{\frac{1}{q}}, \quad C^{\frac{1}{p}} \leqslant A^{\frac{1}{p}} + B^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь когда достигается равенство. $|f + g| = |f| + |g|$ почти всюду на E и

$$\frac{|f|^p}{A} = \frac{|g|^p}{B} = \frac{|f + g|^p}{C}$$

почти всюду на E. Из этого вытекает, что $f = h \cdot g$, для $h \geqslant 0$ почти всюду на E. Подставляя, получаем $h = \bigl(\frac{A}{B}\bigr)^p$ почти всюду на E (если $g \neq 0$). Так что у нас получается, что $f = \lambda g$ и $\lambda = \bigl(\frac{A}{B}\bigr)^{\frac{1}{p}}$. То есть равенство достигается только тогда, когда функции линейно зависимы, причём с положительным коэффициентом. Значит, L_p является строго нормированным. Элемент приближения является единственным. ■

А вот это уже полезное неравенство.

Утверждение 11.7 (обобщённое неравенство Минковского)**.** *Пусть задано два измеримых пространства* (X, Σ_x, μ_x) *и* (Y, Σ_y, μ_y), $E \in \Sigma_x$, $F \in \Sigma_y$ *и задана измеримая функция* $f\colon E \times F \to \mathbb{R}_+$, *а* $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда*

$$\Biggl(\int\limits_E \Bigl(\int\limits_F f_x\, d\mu_y\Bigr)^p d\mu_x\Biggr)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int\limits_F \Bigl(\int\limits_E f_y^p\, d\mu_x\Bigr)^{\frac{1}{p}} d\mu_y.$$

Доказательство. Нам понадобится теорема Фубини. Но это неравенство не зря называется обобщённым неравенством Минковского, так как доказывается точно так же. $g(x) = \int\limits_F f_x\, d\mu_y$ существует для почти всех

$x \in E$.

$$\int\limits_E g^p\,d\mu_x = \int\limits_E g \cdot g^{p-1}\,d\mu_x = \int\limits_F g^{p-1}\Bigg(\int\limits_F f_y\,d\mu_x\Bigg)\,d\mu_y.$$

Теперь применяем неравенство Гёльдера к произведению двух функций.

$$\leqslant \int\limits_F \Bigg(\int\limits_E f_y^p\,d\mu_x\Bigg)^{\frac{1}{p}} d\mu_y \cdot \underbrace{\Bigg(\int\limits_E g^p\,d\mu_x\Bigg)^{\frac{1}{q}}}.$$

Если поделить на скобку, получится как раз обобщённое неравенство Минковского. ∎

Теорема 11.2. *$L_p(E,\mu)$ — банахово пространство при $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство. Возьмём последовательность Коши $\{f_n\} \subset L_p(E,\mu)$. Тогда существует $\{m_k\}\colon m_1 < m_2 < \ldots$ и $\|f_k - f_l\|_{L_p} < \frac{1}{2^n}\quad \forall\, k, \geqslant m_n$. Такую подпоследовательность можно выбрать. И рассмотрим функцию (равенство имеет смысл в почти всех точках)

$$g(x) = \big|f_{m-1}(x)\big| + \sum_{n=1}^{\infty} \big|f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_n}(x)\big|.$$

Если организовать частичные суммы g_n, то $g_n \nearrow g$ (значит, и в степени p тоже монотонно возрастают), так как все члены ряда неотрицательны. Кроме того $\|g_n\|_{L_p} \leqslant \|f_{m_1}\| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \|f_{m_1}\|_{L_p} + 1$, то есть норма конечная. По теореме о монотонной сходимости $g \in L_p(E,\mu)$. И отсюда g конечна почти всду на E. Значит, ряд в определении $g(x)$ сходится почти всюду. Если снять модули, ряд будет сходиться абсолютно почти всюду

$$f(x) = f_{m_1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_n}(x)\big)$$

сходится абсолютно почи всюду. Тогда

$$f_{m_n}(x) = f_{m_1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \big(f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)\big).$$

Из того, что $|f|^p \leqslant |g|^p \in L(E,\mu)$ следует, что $f \in L_p(E,\mu)$. Если теперь вычесть частичную сумму, получим

$$f(x) - f_{m_n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \big(f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)\big).$$

Чтобы для бесконечной суммы неравенство можно было использовать, применяем теорему Фату

$$\|f - f_{m_n}\|_{L_p} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \big\|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\big\|_{L_p} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Если имеется в метрическом пространстве последовательность Коши такую, что имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сама сходится, что можно легко показать по неравенству треугольника. Значит, мы показали, что $f_n \to f \in L_p(E,\mu)$. Значит, мы доказали полноту. ∎

Лемма 11.1. *Обозначим через $H(E,\mu)$ множество простых измеримых функций из $L_p(E,\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Утверждается, что $H(E,\mu)$ всюду плотно в $L_p(E,\mu)$.*

Доказательство. Раскладываем в разность неотрицательнх $f = f_+ - f_-$ и $f_\pm = \max\{\pm f, 0\}$. Мы доказывали, что $\exists\ h_n^\pm \nearrow f_\pm$, где $h_n^\pm \in H(E,\mu)$. Так как $h_n^\pm$ интегрируемы, то и $f_\pm$ будут интегрируемы. Обозначим

$$h = h_n^+ - h_n^-,\quad \|f - h\|_{L_p} \leqslant \|f_+ - h_n^+\|_{L_p} + \|f_- - h_n^-\|_{L_p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

по тереме о монотонной сходимости. ∎

Теперь наша задача показать, что непрерывные функции всюду плотны в L_p. А для этого нужно вообще какую-то топологию ввести.

Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, (X,Σ,μ) — измеримое пространство с регулярной мерой и все открытые множества измеримы (а значит и замкнутые и компактные).

Теорема 11.3. *Множество $C(X)$ непрерывных ограниченных функций (тех из них, что лежат в L_p) всюду плотно в $L_p(E,\mu)$ для $1 \leqslant p < \infty$ (в отличие от леммы здесь $p < \infty$).*

Доказательство. Возьмём $f \in L_p$ и $\varepsilon > 0$. По лемме $\exists\ h \in H(E,\mu)$, такая, что $\|f - h\|_{L_p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Всякая простая функция является линейной комбинацией характеристических функций

$$h(x) = \sum_{l=1}^{m} h_l \chi_{H_l}(x), \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Существует $\exists\ A$ — компактное и $\exists$ открытое B_l, для которых $A_l \subset H_l \subset B_l$ и $\mu(B_l \setminus A_l) < \left(\frac{\varepsilon}{2c}\right)^p$, где $c = \sum\limits_{l=1}^{m} |h_k|$. У нас же функция уже фиксирована.

Напомню $\rho(x, A) = \int\limits_{y \in A} \rho(x, y)$ есть непрерывная функция, поскольку выполняется неравенство

$$\rho(x, A) \leqslant \rho(y, A) + \rho(x, y) \Rightarrow \big|\rho(x, A) - \rho(y, A)\big| \leqslant \rho(x, y).$$

Доказательство. Доказательство этого неравенства простое $\rho(x, A) \leqslant \big|\rho(x, z) - \rho(z, y)\big| + \rho(z, y) \leqslant \rho(x, y) \quad \forall\ z \in A$. □

Ну теперь давайте построим функцию $g(x) \sum\limits_{l=1}^{m} h_l g_l(x)$, $g_l(x) = \frac{\rho(x, X \setminus B_l)}{\rho(x, A_l) + \rho(x, X \setminus B_l)}$. При этом $0 \leqslant g_l(x) \leqslant 1$, $g_l(x) = 1$, есил $x \in A_l$, $g_c(x) = 0$, если $x \in X \setminus B_l$, то есть $x \notin B_l$. Все эти функции непрерывны:

$$\|\chi_{H_l} - g_l\|_{L_p} \leqslant \mu^{\frac{1}{p}}(B_l \setminus A_l) < \frac{\varepsilon}{2c}.$$

И по неравенству Минковского получаем

$$\|h - g\|_{L_p} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|f - g\|_{L_p} \leqslant \|f - h\|_{L_p} + \|g - h\|_{L_p} < \varepsilon.$$

■

Закончим таким следствием

Следствие 11.1. *В $L_p[0, 1]$, где $1 \leqslant p < \infty$ всюду плотно множество*

1. *$H([0, 1])$ простых функций;*
2. *$C[0, 1]$;*
3. *$\widetilde{C}[0, 1]$, $f(0) = f(1)$;*
4. *S — ступенчатые функции; для некоторого разбиения $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < 1 \quad f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{[x_{k-1}, x_k]}(x)$;*
5. *P — множество алгебраических многочленов, то есть $P(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x^k$;*
6. *T — тригонометрических многочленов $T(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi i k x}$;*
7. *$C^{\infty}[0, 1]$.*

12 Линейные операторы

Пусть E, F обозначают нормированные пространства над полем $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Норму будем в этих пространствах обозначать одинаково $\|x\|$.

Определение 12.1. *Отображение $A \colon E \to F$ называется линейным оператором, если выполнено два условия*

$$A(x + y) = A(x) + A(y); \quad A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad \forall\ x, y, \in E\ \forall\ \lambda \in \mathbb{F}.$$

Норма линейного оператора определяется как

$$\|A\| = \sup_{x \in S} \big\|A(x)\big\|, \quad S := \big\{x \in E \big| \|x\| \leqslant 1\big\}.$$

Можно ввести эквивалентное определение для нормы

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\big\|A(x)\big\|}{\|x\|}.$$

Определение 12.2. *Оператор A называется ограниченным, если $\forall\ M \subset F$ ограниченного множества образ $A(M) = \{y = A(x) \big| x \in M\}$ является ограниченным в F.*
Определение 12.3. *Если M находится в некотором шаре, то есть $M \subset S_r(x)$, то M называется ограниченным.*

Мы вводили сложное определение ограниченных множеств, оно здесь годится. А наше новое более простое определение не годится для произвольного метрического, только для нормированных.

Если норма оператора конечна, если и только если оператор ограничен. Мы с вами доказывали, что оператор ограничен, значит, непрерывен во всех своих точках.

Приведём пример $A\colon L_p(E,\mu) \to L_p(E,\mu)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и определяеся по формуле $A(f) := \varphi f$, где φ — ограниченная измеримая функция. Этот оператор называется оператором умножения на функцию. Докажем, что

$$\|A\| = \|\varphi\|_{L_\infty}.$$

Доказательство. Давайте вычислять норму.

$$\big\|A(f)\big\|^p = \int\limits_E |\varphi \cdot f|^p \, d\mu.$$

Поскольку интеграл не зависит от изменения функции на множестве меры нуль, здесь будет такое неравенство

$$\big\|A(f)\big\|^p = \int\limits_E |\varphi \cdot f|^p \, d\mu \leqslant \|\varphi\|_{L_\infty}^p \int\limits_E |f|^p \, d\mu.$$

Извлекая корень, получаем такое неравенство

$$\|A\| \leqslant \|\varphi\|_{L_\infty}.$$

Осталось доказать обратное неравенство. Пусть $f = \chi_A$. Тогда (по определению существенной верхней грани) $\exists\ A \subset E\colon \mu(A) > 0$, такое, что

$$\forall\ x \in A \quad \big|\varphi(x)\big| > \|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon.$$

Подставим эту функцию в оператор

$$\big\|A(f)\big\|^p = \int\limits_E A \, d\mu |\varphi|^p > \left(\|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon\right)^p \mu(A) = \left(\|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon\right)^p \int\limits_A |f|^p \, d\mu.$$

Поскольку $\big|A(f)\big| \geqslant \left(\|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon\right) \|f\|$, мы и доказали, что $\|A\| \geqslant \|\varphi\|_{L_\infty}$. ■

Пусть $\mathcal{L}(E,F) = \{A\colon E \to F | A$ — линейный и ограниченный$\}$. Норма в этом пространстве есть $\|A\| = \sup\limits_{x \in S} \big\|A(x)\big\|$. Проверим свойства нормы

Доказательство. Сложение и умножение определяются естественно: $(A+B)(x) = A(x) + B(x)$, $(\lambda A)(x) = \lambda \cdot A(x)$.

1. Если $\|A\| = 0$, то $A(x) = 0$ для всех $x \in E$. Значит, $A = \mathcal{O}$.

2. $\|A+B\| = \sup\limits_{x \in S} [\big\|A(x) + B(x)\big\| \leqslant \sup\limits_{x \in S} \big\|A(x)\big\| + \sup\limits_{x \in S} \big\|B(x)\big\|$. Значит, $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$, а $\|\lambda A\| = |\lambda| A$.

■

Теорема 12.1. *Если F — банахово пространство, то $\mathcal{L}(E,F)$ — банахово пространство.*
Доказательство. Пусть $\{A_n\} \in \mathcal{L}(E,F)$ последовательность Коши, то есть

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N \in \mathbb{N}\colon \forall\ n,m \geqslant< \quad \|A_n - A_m\| < \varepsilon.$$

Тогда $\big\|A_n(x) - A_m(x)\big\| < \varepsilon \|x\| \quad \forall\ x \in E,\ \forall\ n,m \geqslant N$.Значит, последовательность $\big\{A_n(x)\big\} \subset F$ является последовательностью Коши в F. Значит,

$$\exists A(x) = \lim_{n \to \infty} A_n(x)$$

и это линейный оператор $A\colon E \to F$. У нас есть его сходимость в каждой точке. Покажем сходимость по норме. Устремим $m \to \infty$ в неравенстве

$$\big\|A_n(x) - A(x)\big\| \leqslant \varepsilon \|x\| \quad \forall\ x \in E,\ \forall\ n \in N.$$

■

Теорема 12.2 (Банаха—Штейнгауза)**.** *Пусть E — банахово пространство, и задано множество линейных операторов $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{L}(E, F)$, и выполнено условие*

$$\forall\, x \in E \quad \sup_{i\in I} \big\|A_i(x)\big\|.$$

Тогда отсюда вытекает, что $\sup\limits_{i\in I} \|A_i\| < \infty$.

То есть из поточечной сходимости следует сходимость по норме.

Доказательство. Все принципы равностепенной непрерывности здесь выполнены. Мы запишем условия равностепенной непрерывности в точке ноль.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0\colon \;\forall\, \|x\| < \delta, \forall\, i \in I \quad \big\|A_i(x)\big\| < \varepsilon$$

в силу линейности оператора. Поделим неравенство на δ.

$$\forall\, \left\|\frac{x}{\delta}\right\| < 1, \;\forall\, i \in I \quad \left\|A_i\left(\frac{x}{\delta}\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

Отсюда вытекает, что $\|A_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}$. ■

Следствие 12.1. *Пусть E — банахово пространство. И задана последовательно линейных операторов $\{A_n\} \in \mathcal{L}(E, F)$, сходящаяся в каждой точке, то есть $\forall\, x \in E \quad A_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} A(x)$[1]. Тогда $\sup n\|A_n\| < \infty$.*

Это теорему очень интенсивно будем применять в следующий раз. А сейчас мы докажем очень знаменитую теорему. Для начала введём некоторые понятия.

Определение 12.4. *Пусть X — множество. Оно называется упорядоченным, если в нём задано отношение порядка $\leqslant$, то есть*

1. *$x \leqslant x$;*
2. *$x \leqslant y$ и $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$;*
3. *$x \leqslant y$ и $y \leqslant x \Rightarrow x = y$.*

Определение 12.5. *Множество $A \subset X$, где X упорядочено, называется цепью, если $\forall\, x, y \in A$ $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$. Цепь A называется ограниченной, если $\exists\, y \in X\colon \forall\, x \in A \quad x \leqslant y$.*

Определение 12.6. *Элемент $x \in X$, где X упорядоченно, называется максимальным, если из того, что $x \leqslant y$, следует, что $x = y$.*

Следующая лемма является аксиомой, хотя все её называют леммой. Для нас она будет аксиомой, но вообще она эквивалентна одной из аксиом теории множеств.

Лемма 12.1. *Если всякая цепь A ограничена, то в X существует максимальный элемент.*

Эту аксиому мы и будем применять для доказательства теоремы.

Пусть E — линейное пространство, $f\colon E \to \mathbb{F}$ — линейный функционал (он является линейным оператором, только действует в поле).

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$\forall\, x, y \in E, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{F}$.

Если E — нормированное пространство, то $\|f\| = \sup\limits_{x\in S} \big|f(x)\big|$.

Определение 12.7. *Пространство $E^* = \{f\colon E \to \mathbb{F} \mid f$ — линейный и ограниченный$\}$ называется сопряжённым. Ограниченность f значит, что $\|f\| < \infty$.*

Это банахово пространство.

Будем рассматривать подпространства $L \subset E$ и линейный функционал $f\colon L \to \mathbb{F}$. Введём отношение порядка $f \leqslant g$, где $f\colon L \to \mathbb{F}$, $g\colon M \to \mathbb{F}$, если

1. $L \subset M$;
2. $\forall\, x \in L \quad g(x) = f(x)$.

Говорят, что g является расширением f на M.

Напомню определение полунорм.

Определение 12.8. *$p\colon E \to \mathbb{R}_+$ называется полунормой, если*

1. *$\forall\, x \in E \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;*
2. *$\forall\, x, y \in E \quad p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.*

[1] А всякая сходящаяся последовательность ограничена по норме, и можно применить терему.

Пара (E, p) называется полунормированным пространством.

Теорема 12.3 (Хана—Банаха). *Пусть (E, p) — полунормированное пространство и $f\colon L \to \mathbb{F}$ — линейный функционал, $L \subset E$ (линейное подпространство) и выполнено условие*

$$\forall\ x \in L \quad \big|f(x)\big| \leqslant p(x).$$

Тогда $\exists\ g\colon E \to \mathbb{F}$ линейный функционал на всём E, такой, что

$$g\big|_L = f \ \text{и}\ \forall\ x \in E \quad \big|g(x)\big| \leqslant p(x).$$

То есть g является продолжением f с сохранением неравенства.

Доказательство. Нам для заданного функционала f нужно построить продолжение на всё пространство, причём такое, чтобы выполнялось условие ограниченности. Сначала построим продолжение для линейной оболочки. Пусть $e_1 \notin L$ и $L_1 := sp\{e_1, L\}$. Давайте попытаемся применить лемму Цорна или аксиому Цорна.

Вначале рассмотрим действительный случай, то есть $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

$$\forall\ x, y \in L \quad f(x+y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x-e_1) + p(y+e_1).$$

Для всех x и y получаем неравенство

$$f(x) - p(x-e_1) \leqslant p(y+e_1) - f(y).$$

Слева функция от x, справа — функция y. Значит,

$$\exists\ c_1 \in \mathbb{R}\colon f(x) - p(x-e_1) \leqslant c_1 \leqslant p(y+e_1) - f(y)$$

Если для некоторого $\lambda > 0$ заменить x, y на $\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}$, получаем

$$\forall\ x \in L, \forall\ \lambda > 0 \quad f(x) \pm \lambda c_1 \leqslant p(x \pm \lambda e_2).$$

Тогда мы можем определить линейный функционал на оболочке по формуле

$$\forall\ x \in L, \forall\ \lambda \in \mathbb{R} \quad f_1(x + \lambda e_1) := f(x) + \lambda e_1.$$

Аргумент, обозначим $z = x + \lambda e_1$, принадлежит именно линейной оболочке. Выполнено два условия.

(1) $\forall\ x \in L \quad f_1(x) = f(x)$.

(2) $\forall\ z \in L_1 \quad f_1(x) \leqslant p(z)$, при этом $p(-z) = p(z)$, значит, $\big|f_1(x)\big| \leqslant p(z)$.

Далее можем определить $L_2 = sp\{e_2, L_1\}$, где $e_2 \notin L_1$.

Если бы пространство имело счётную размерность, мы бы всё уже доказали.

Надо рассмотреть множество всех продолжений. Это множество упорядоченно и каждая цепь ограниченна функционалом на объединении всех областей определения функционалов цепи. По лемме Цорна существует максимальное продолжение на всё пространство.

Теперь перейдём от случая действительных чисел к комплексным числам. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $f = u + iv$, причём u, v — линейные функционалы над полем действительных чисел. Посчитаем

$$u(ix) + iv(ix) = f(ix) = if(x) = iu(x) - v(x).$$

Следовательно, $v(x) = -u(ix)$, и функционал записывается в виде

$$f(x) = u(x) - iu(ix).$$

Таким образом, функционал зависит только от своей действительной части. Построим функционал. $\exists\ h\colon E \to \mathbb{R}$ линейный функционал, такой, что $h\big|_L = u$ и $\forall\ x \in E \quad \big|h(x)\big| \leqslant p(x)$. Определяем

$$\forall\ x \in E \quad g(x) := h(x) - i\,h(ix).$$

Условие $g\big|_L = f$ очевидно. Докажем, что функционал линейный над полем комплексных чисел. Достаточно доказать для ix

$$g(ix) = h(ix) - ih(x) = i\big(h(x) - ih(x)\big) = ig(x).$$

То, что он аддитивный, тоже очевидно. Ведь h аддитивный. Покажем ограниченность. Расмотрим тригонометрическое представление $g(x) = e^{i\theta}\big|g(x)\big|$. В силу линейности действительное число

$$\big|g(x)\big| = e^{-i\theta}g(x) = g(e^{-i\theta}x) = h(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = p(x).$$

$\blacksquare$

Саму теорему применяют редко. Важно следствие.

Следствие 12.2. *Пусть E — нормированное пространство, а $L \subset E$ — линейное подпространство. И пусть задан линейный ограниченный функционал $f\colon L \to \mathbb{F}$. Тогда $\exists\, g\colon E \to \mathbb{F}$ линейный ограниченный функционал, удовлетворяющий условиям: $f\big|_L = f$ и $\|g\| = \|f\|$, то есть существует продолжение функционала на всё пространство с сохранением его нормы.*

Доказательство. Берём $p(x) = \|f\|_L \cdot \|x\|$. Это норма, но она будет и полунормой. Тогда

$$\exists\, g\colon E \to \mathbb{F}\colon g\big|_L = f,\ \big|g(x)\big| \leqslant \|f\|_L \cdot \|x\| \big|g(x)\big| \Rightarrow \|g\| \leqslant \|f\|.$$

Тогда, поскольку $\|f\|_L = \sup\limits_{x \in S \cap L} \big|f(x)\big|$, а норма g считается, как sup по большему множеству, $\|g\| = \|f\|$. $\blacksquare$

Теорема 12.4 (Рисса). *Если функционал $\alpha \in C^*[a,b]$, то есть функционал является линейным и ограниченным, определённым на пространстве $C[a,b]$*[1]*, то $\exists\, F \in BV[a,b]$, такая, что*

1. *$\forall\, f \in C[a,b]\quad \alpha(f) = \int\limits_a^b f\,dF$;*
2. *$\|\alpha\| = \operatorname{Var}(F)$.*

Доказательство. Так как $C[a,b] \subset B[a,b]$, существует продолжение $\alpha \in B^*[a,b]$ по следствию из теоремы Хана—Банаха. (Не будем вводить новую букву, пусть тоже α.) Рассмотрим $F(t) = \alpha\Bigg(\underbrace{\chi_{[a,t)}}_{u_t}\Bigg)$[2], $t \in [a,b]$, $F(a) = 0$.

Рассмотрим разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \big|F(x_k - F(x_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}\big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) =$$

Подставим определение функции F

$$= \sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}\big(\alpha(u_{x_k}) - \alpha(u_{x_{k-1}})\big) = \alpha\Bigg(\sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}\big(u_{x_k} - u_{x_{k-1}}\big)\Bigg).$$

Заметим, что

$$\Bigg|\sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}\big(u_{x_k} - u_{x_{k-1}}\big)\Bigg| \leqslant 1.$$

Значит,

$$\alpha\Bigg(\sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}\big(u_{x_k} - u_{x_{k-1}}\big)\Bigg) \leqslant \|\alpha\|.$$

Таким образом, доказано $\operatorname{Var}_a^b(F) \leqslant \|\alpha\|$.

Возьмём $f \in C[a,b]$, для разбиения τ возьмём также $f_\tau(x) = \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\big(u_{x_k} - u_{x_{k-1}}\big)$, где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Так как функция непрерывна, $f_\tau \underset{d(\tau)\to 0}{\rightrightarrows} f$.

$$\alpha(f) = \lim_{d(\tau)\to 0} \alpha(f_\tau) = \lim_{d(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) = \int\limits_a^b f\,dF.$$

Это и есть интеграл Римана—Стилтьеса. Ну а модуль оценивается

$$\Bigg|\int\limits_a^b f\,dF\Bigg| \leqslant \lim_{d(\tau)\to 0} \sum_{j=1}^n \big|f(\xi_k)\big|\big|F(x_k) - F(x_{k-1})\big|.$$

Значит, $\|\alpha\| \leqslant \operatorname{Var}_a^b(F) \leqslant \|f\|_C \operatorname{Var}_a^b(F)$. $\blacksquare$

Теперь сформулирую ещё одну теорему без доказательства.

Теорема 12.5 (Рисса). *Если $\alpha \in L_p^*(E,\mu)$, где $1 \leqslant p < \infty$, то $\exists\, g \in L_q(E,\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, такая, что*

[1] Для тех, кто не знает, что такое $C[a,b]$ — это пространство непрерывных функций $f\colon [a,b] \to \mathbb{F}$ и $\|f\| = \sup\limits_{x \in [a,b]} \big|f(x)\big|$.

[2] Полуинтервал для непрерывности слева. Доказывать не буду, доказательство очень кропотливое.

1. $\forall\ f \in L_p(E,\mu)\quad \alpha(f) = \int\limits_E fg\,d\mu$*;*

2. $\|\alpha\| = \|g\|_{L_q}$*.*

Следствие 12.3. $L_p^*(E,\mu) = L_1(E,\mu)$ *для* $1 \leqslant p < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

А для непрерывных имеем $C^*[a,b] = V_0[a,b]$, причём

1. $F \in BV[a,b]$;

2. $\forall\ t \in (a,b)\quad F(t-0) = F(t)$;

3. $F(a) = 0$.

13 Сильная и слабая сходимости линейных операторов и линейных функционалов

Пусть E, F — нормированные пространства, $\mathcal{L}(E,F)$ — пространство ограниченных операторов.

Определение 13.1. *Последовательность операторов* $\{A_n\} \in \mathcal{L}(E,F)$ *сходится сильно* $A_n \to A$ *к оператору* A*, если*

$$\forall\ x \in E\quad \lim_{n\to\infty} A_n(x) = A(x).$$

Сходится равномерно, если $\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$*, то есть сходится по норме.*

Сильная сходимость — это поточечная сходимость, а равномерная значит по норме.

Соответственно вводится понятия сильной и равномерной ограниченности.

Определение 13.2. *Подмножество* $M \subset \mathcal{L}(E,F)$ *равномерно ограничено, если*

$$\exists C > 0\colon \forall\ A \in M\quad \|A\| \leqslant C.$$

Определение 13.3. $M \subset \mathcal{L}(E,F)$ *сильно ограничено, если*

$$\forall\ x \in E \exists\ C_x > 0\colon \forall\ A \in M\quad \big\|A(x)\big\| \leqslant C_x.$$

Давайте свойства обсудим.

Утверждение 13.1. *Если* $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ *равномерно, то схоится сильно.*

Доказательство. Доказательство почти очевидно.

$$\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\quad \big\|A_n(x) - A(x)\big\| \leqslant \|A_n - A\|\cdot\|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\quad \forall\ x \in E.$$

■ Надо понимать, что сходимость здесь везде по норме. Просто в сильной сходимости сходимость по норме F.

Нужно сделать следующее замечание. Если $\dim E < \infty$, то верно и обратное утверждение. Я его доказывать не буду, это можно сделать, пользуясь теоремой об эквивалентности норм в конечномерном пространстве.

Утверждение 13.2. *Если* $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ *сильно, то* $\{A_n\}$ *сильно ограничена, и выполнено вот такое неравенство*

$$\|A\| \leqslant \varliminf \|A_n\|.$$

Неравенство очень похоже на лемму Фату.

Доказательство. Первое свойство почти очевидно. Если сходится для каждого x, то ограничена по норме F. Отсюда и следует сильная ограниченность.

Докажем неравенство.

$$\exists\ \{n_k\}\colon \lim_{k\to\infty} \|A_{n_k}\| = \varliminf \|A_n\|$$

по определению нижнего предела. Так как норма является непрерывной функцией, а последовательность сходится в каждой точке, имеем

$$\big\|A(x)\big\| = \lim_{k\to\infty} \big\|A_{n_k}(x)\big\| \leqslant \lim_{k\to\infty} \|A_{n_k}\|\cdot\|x\| =$$

последнее по определению нормы оператора. Отсюда получаем

$$= \varliminf \|A_n\|\cdot\|x\| \Rightarrow \|A\| \leqslant \varliminf \|A_n\|.$$

■

Давайте приведём один пример, когда последовательность сходится сильно, но не сходится равномерно. В конечномерном пространстве вы такой пример не приведёте. Примеров всё же много. Мы рассмотрим пространство $L_p(E,\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$ и рассмотрим последовательность

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n E, \quad 0 < \mu(E \setminus E_n) \to 0.$$

Например, можно взять $E = [0,1]$ и $E_n = [1/n, 1]$. Рассмотрим оператор

$$A_n f = \varphi \cdot f, \quad \varphi_n = \chi_{E_n} = \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Мы даже считали норму такого оператора уже.

$$\|A_n f - f\|^p = \int\limits_{E \setminus E_n} |f|^p \, d\mu.$$

Но так как $E \setminus E_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то по абсолютной непрерывности интеграла Лебега, сам интеграл стремится к нулю. Таким образом, $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} I$ ссходится сильно к тождественному оператору. Но

$$\|A_n - I\| = \|\chi_{(E \setminus E_n)}\|_{L_\infty} = 1.$$

Просто потому, что она будет равняться верхней грани функции на множестве. Значит, не сходится равномерно, причём вообще ни к какому оператору.

Утверждение 13.3. *Пусть E — банахово пространство. Тогда $M \subset \mathcal{L}(E,F)$ сильно ограничено, если и только если M равномерно ограничено.*

Доказательство. Необходимость по теореме Банаха—Штенгауза, а достаточность из неравенства

$$\big\|A(x)\| \leqslant \underbrace{\|A\|}_{\leqslant C} \cdot \|x\|.$$

Справа же стоят нормы, равномерно ограниченные. ∎

Лемма 13.1. *Пусть E — банахово пространство, $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(E,F)$ и $A_n \to A$ сильно. Тогда оператор A тоже является ограниченным, то есть $A \in \mathcal{L}(E,F)$.*

Доказательство. По теореме Банаха—Штенгауза верхняя грань $\sup\limits_n \|A_n\| \leqslant C$, то есть конечна. А значит оператор будет ограничен, поскольку $A(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)$, $\forall\, x \in E$ и $\|A\| = \underline{\lim}\, \|A_n\|$. ∎

Определение 13.4. *Пусть $K \subset E$ — система элементов. Через M обозначаем $M = \overline{\mathrm{sp}}(K)$ — замкнутую линейную оболочку.*

$$\mathrm{sp}(K = \left\{ y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{F},\ x_i \in K \right\},$$

$K \subset E$ называется полной, если $\overline{\mathrm{sp}}(K) = E$.

Теорема 13.1 (критерий сильной сходимости)**.** *Пусть E, F — банаховы пространства, $\{A_n\} \in \mathcal{L}(E,F)$. Тогда $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ сильно, если и только если*

(1) $\sup\limits_n \|A_n\| < \infty$;

(2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) = A(x)$, $\forall\, x \in K$, где $K \subset E$ — некоторая полная система.

Доказательство. Необходимость очевидна. Первое условие вытекает из следствия теоремы Банаха—Штенгауза. А второе условие прямо из определения вытекает. Так что нужно доказать достаточность.

Обозначим $L = \mathrm{sp}(K)$. Тогда из условия два вытекает $\forall\, x \in K \ \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) = A(x)$. Значит, L всюду плотно в E. Значит, $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\forall\, x \in E \quad \exists\, y \in L\colon \|x - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4C},$$

где $C > \sup\limits_n \|A_n\|$ (можно было равно написать, но с делением на ноль надо было бы быть аккуратнее). Далее

$$\exists N \in \mathbb{N}\colon \forall\, n, m \geqslant N \quad \big\|A_n(y) - A_m(y)\big\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

И запишем неравенство треугольника

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leqslant \|A_n(x) - A_n(y)\| + \|A_n(y) - A_m(y)\| + \|A_m(y) - A_m(x)\|.$$

Второе слагаемое $< \frac{\varepsilon}{2}$, а для первого и третьего слагаемых нужно ещё написать такое неравенство

$$\forall\ n, m \geqslant N \quad \|A_n(x) - A_n(y)\| \leqslant \|A_n\| \cdot \|x - y\|.$$

И всё будет меньше ε. В силу полноты F A_n будет сходиться и по лемме оператор будет ограничен. ■

13.1 Функционалы

С операторами мы закончили. Переходим к функционалам.

Определение 13.5. *$\{f_n\} \subset E^*$ слабо* сходится, если*

$$\forall\ x \in E \quad \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

. Сходится слабо, если сходится в каждой точке.

Множество функционалов $M \subset E^*$ называется слабо* ограниченным, если

$$\forall\ x \in E \exists\ C_X > 0\colon \quad \forall\ f \in M \quad |f(x)| \leqslant C_X.$$

Далее свойства легко переносятся из того, что мы только делали для операторов. И я передоказывать не буду.

Утверждение 13.4. *Если $f_n \to f$ по норме, то $f_n \to f$ сходится* слабо.*

Утверждение 13.5. *Если $f_n \to f$ сходится слабо*, то $\{f_n\}$ слабо* ограничено.*

Утверждение 13.6. *Пусть E — банахово пространство. Тогда $M \subset E^*$ слабо* ограничено, если и только если M ограничено по норме.*

Ну и давайте запишем критерий.

Теорема 13.2 (критерий слабой* сходимости)**.** *Пусть E — банахово пространство. Тогда $\{f_n\} \subset E^*$ сходится слабо к f, если и только если*

(1) $\sup\limits_n \|f_n\| < \infty$;

(2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall\ x \in K$, где K — некоторая полная система элементов.

Пример. Пусть $(X, \rho$ — метрическое пространство. $C(X)$ — пространство ограниченных непрерывных функций и sup-нормой. Возьмём последовательность $x_n \in X$, $x \in X\colon x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Для каждой точки рассмотрим функционал Дирака

$$\delta_{x_n}(f) := f(x_n).$$

Имеем $\forall\ f \in C(X) \quad \delta_{x_n}(f) = f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) - \delta_x(f)$, то есть $\delta_{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta_x$ сходится слабо*. При этом $\|\delta_n - \delta\| = 2$ для отрезка и не стремится к нулю. Значит, последовательность не сходится по норме.

Теорема 13.3. *Отображение $J\colon E \to E^{**}$, определённое по формуле $J(x) = \delta_x$, где $\delta_x(f) := f(x) \quad \forall\ f \in E^*$ — функционал Дирака из второго сопряжённого пространства (если докажем, что он ограничен). Тогда J является изометричным отображением, то есть*

$$\forall\ x \in E \quad \|J(x)\| = \|x\|.$$

Считается, что пространство является подпространством своего второго сопряжённого. Введём перед доказательством определение.

Определение 13.6. *Если $J(E) = E^{**}$, E называется рефлексивным.*

Простанство $L_p(E, \mu)$ рефлексивно, если $1 < p < \infty$. Это вытекает из теоремы, которую мы не доказывали, об общем виде функционалов в L_p^*.

Доказательство. Пусть $S^* \subset E^*$ — единичный шар, то есть

$$S^* = \{f \in E^* \big| \|f\| \leqslant 1\}.$$

Тогда $\forall\ x \in E, \forall\ f \in S^* \quad |f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| \leqslant \|x\|$. Отсюда вытекает, что норма функционала Дирака оценивается $\|\delta_x\| \leqslant 1$. Таким образом, так как $J(x) = \delta_x$, $\|J(x)\| \leqslant \|x\|$.

Осталось доказать обратное неравенство. Для этого применим теорему Хана—Банаха. Берём линейную оболочку фиксированного элемента x и определим функционал

$$L = \mathrm{sp}\{x\}, \quad f(\lambda x) := \lambda\|x\|, \quad \|f\|_L = 1.$$

По теореме Хана—Банаха существует функционал $g \in E^*$, у которого норма $\|g\| = 1$ и $g(y) = f(y) \quad \forall\, y \in L$. Тогда $\delta_x(g) = g(x) = \|x\|$. Значит, $\|\delta_x\| = \|x\|$. Значит, имеет место нужное равенство. ■

Определение 13.7. *Последовательность элементов $\{x_n\} \subset E$ нормированного пространства сходится слабо (уже без звёздочки, так как это для элементов, а не для функционалов), если*

$$\forall\, f \in E^* \quad \exists\, \lim f(x_n) = f(x).$$

Множество $M \subset E$ слабо ограничено, если

$$\forall\, f \in E^* \quad \exists\, C_f > 0 \colon \forall\, x \in E \quad \big|f(x)\big| \leqslant C_f.$$

Одни и те же объекты можно интерпретировать как элементы и как функционалы на пространствах.

Утверждение 13.7. *Если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ по норме, то $x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ слабо.*

Утверждение 13.8. *Если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ слабо, то $\{x_n\}$ слабо ограничена и $\|x\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.*

Утверждение 13.9. *Множество $M \subset E$ слабо ограничено, если и только если ограничено по норме*[1]*.*

Теорема 13.4 (критерий слабой сходимости)**.** *$\{x_n\} \subset E$ слабо сходится $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in E$, если и только если выполнено два условия*

(1) Нормы равномерно ограничены, то есть $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$;

(2) $\forall\, f \in K \subset E^* \quad \exists\, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, где K — некоторая полная система элементов.

Давайте ещё один примерчик. Слабая сходимость в $C[a,b]$. Утверждается, что последовательность функций $\{f_n\} \subset C[a,b]$ $f_n \to f \in C[a,b]$ слабо, если и только если

(1) $\sup\limits_n \|f_n\| < \infty$;

(2) $\forall\, x \in [a,b] \quad \exists\, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Доказательство. Необходимость вытекает из критерия. Для второго условия нужно в качестве x_n взять функционалы Дирака.

А достаточность вот как. Мы знаем, что всякий $\alpha \in C^*[a,b]$ является интегралом Римана—Стилтьеса $\alpha(f) = \int\limits_a^b f\,dF$. Интеграл Римана—Стилтьеса совпадает с интегралом Лебега—Стилтьеса, для которого есть теорема о предельном переходе. ■

Определение 13.8. *Нормированное пространство E называется сепарабельным, если в E существует счётная полная система элементов $K = \{x_n\}$.*

Построим метрику в сопряжённом пространстве.

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\big|f(x_n) - g(x_n)\big|}{1 + \big|f(x_n) - g(x_n)\big|}, \quad f, g \in E^*. \tag{6}$$

Вот такую обычно пишут в учебниках. Можно и по-другому. А какие свойства выполнены?

(1) $\rho(f,g) = \rho(g,f)$;

(2) $\rho(f,g) \leqslant \rho(f,h) + \rho(h,g)$;

(3) $\rho(f,g) = 0 \Rightarrow f(x_n) = g(x_n) \quad \forall\, n$. Значит, $\forall\, y \in L \quad f(y) = h(y)$, то есть $f = g$.

Доказательство. Неравенство треугольника. Берём функцию $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ для $t \geqslant 0$. Очевидно

$$\varphi(a+b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b).$$

В определение (6) в модуле прибавляем и вычетаем $\pm h$ и раскрываем по неравенству треульника для чисел. ■
То есть мы получаем метрическое пространство. Мы будем эту метрику рассматривать лишь на единичном шаре.

Лемма 13.2. *Последовательность $\{f_n\} \subset S^*$ сходится слабо* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$, если и только если $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ в (S^*, ρ). Иными словами, слабая сходимость равносильна сходимости по метрике.*

[1] Условие банаховости не нужно, так как функционал Дирака рассматривается на сопряжённом пространстве, а оно всегда банахово.

Доказательство. Необходимость. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. $\exists\ m \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\exists\ N \in \mathbb{N}\colon \forall\ n \geqslant N, \forall\ k \in \{1, \ldots, m\} \quad \left|f_n(x_k) - f(x_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Следовательно, в метрике знаменаль отбрасываю и 2^m тоже отбрасываю и будет неравенство.

$$\rho(f_n, f) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left|f_n(x_k) - f(x_k)\right| + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Значит, доказали необходимость.

Достаточность. Пусть $\forall\ n \geqslant N \quad \rho(f_n, f) < \varepsilon$. Тогда каждое слагаемое в сумме $< \varepsilon$, то есть

$$\frac{\left|f_n(x_k) - f(x_k)\right|}{1 + \left|f_n(x_k) - f(x_k)\right|} < 2^k \varepsilon.$$

Значит, $\left|f_n(x_k) - f(x_k)\right| < \frac{2^k \varepsilon}{1 - 2^k \varepsilon}$. И $0 < \varepsilon < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. ■

Ну и осталось только теорему доказать.

Теорема 13.5. *Пусть E — сепарабельное пространство. Тогда шар (S^*, ρ) является слабо* компактным метрическим пространством (всякая последовательность имеет слабо сходящуюся подпоследовательность).*

Доказательство. Рассмотрим $\{f_n\} \subset S^*$. Докажем, что эта последовательность сходится на множестве $k = \{x_n\}$ — счётной и полной системе в E. Берём последовательность $\left\{f_n(x_1)\right\}_{n=1}^{\infty}$. Это ограниченная последовательность чисел. Она имеет сходящуюся подпоследовательность $\left\{f_n^{(1)}(x_1)\right\}$.

Далее берём $\left\{f_n^{(1)}(x_2)\right\}_{n=1}^{\infty}$. Это ограниченная последовательность чисел. Она имеет сходящуюся подпоследовательность $\left\{f_n^{(2)}(x_2)\right\}$.

И так далее.

Берём диагональную последовательность $f_{m_n} = f_n^{(n)} \subset \{f_n\}$. Поскольку последовательность диагональная, она будет сходиться в каждой точке $x_n \in K$. Ну всё, значит мы имеем ограниченную подпоследовательность, сходяющуся в каждой точке полной системы элементов. Очевидно, она сходится слабо $f_{m_n} \to f \in S^*$. И теорема доказана. ■

14 Гильбертовы пространства

Начнём с определений. Сначала определим евклидово бесконечномерное пространство. Обычно математики считают, что евклидово пространство обязательно конечномерное, но нам будет удобно определить иначе.

Определение 14.1. *Пусть E — линейное пространство на полем $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Для каждой пары элементов $\forall\ x, y \in\ E$ определено скалярное произведение $\langle x, y\rangle$, если выполнены следующие свойства.*

1. *$\forall\ x, y \in E \quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.*

2. *Этот функционал является линейным по первому аргументу*

$$\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F},\ x, y \in E \quad \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1 \langle x_1, y\rangle + \lambda_2 \langle x_2, y\rangle.$$

3. *Скалярный квадрат положительно определён как квадратичная форма, то есть $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*

Пространство вместе со скалярным произведением называется евклидовым пространством. На нём вводится евклидова норма $\|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}$ и евклидова метрика $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Давайте проверим, что нами действительно введена норма.

Следущее неравенство Коши доказал для последовательностей, а Буняковский доказал для интегралов. Иногда ещё называют неравенством Шварца.

Утверждение 14.1 (Неравенство Коши—Буняковского)**.** $\forall\ x, y \in E \quad \left|\langle x, y\rangle\right| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Доказательство. Берём $z = tx + \lambda y$, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda = \frac{\langle x, y\rangle}{\left|\langle x, y\rangle\right|}$, $|\lambda| = 1$ и раскрываем скалярный квадрат

$$\langle z, z\rangle = t^2 \langle x, x\rangle + 2t \operatorname{Re}\left(\overline{\lambda} \langle x, y\rangle\right) + |\lambda|^2 \langle y, y\rangle = t^2 \|x\|^2 + 2t \left|\langle x, y\rangle\right| + \|y\|^2 \geqslant 0.$$

Это выполнено для любого t, значит, есть условие на неотрицательность дискриминанта:

$$\left|\langle x, y\rangle\right|^2 \leqslant \|x\|^2 \cdot \|y\|^2.$$

причём отсюда же вытекает, что в случае равенства $z = tx + \lambda y = 0$, то есть x и y линейно зависимы. ■

Утверждение 14.2. $\forall\ x, y \in E \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Доказательство. Берём скалярный квадрат и раскрываем по свойствам скалярного произведения.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.$$

Это неравенство верно тогда, когда верно неравенство Коши—Буняковского. Если же $\operatorname{Re}\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\|$, то $x = \lambda y$, где $\lambda \in \mathbb{F}$ и $\operatorname{Re}\lambda = |\lambda| \geqslant 0$. ∎

Таким образом евклидово пространство является строго нормированным. Это нам пригодиться, когда будем говорить об элементе наилучшего приближения.

Утверждение 14.3 (Равенство параллелограмма)**.** $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$.

Доказательство. Доказательство очень простое

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm \operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

∎

Оказывается, это равенство является характеристическим свойством евклидова пространства.

Утверждение 14.4. *Если нормированное пространство таково, что выполняется равенство параллелограмма, то пространство евклидово, то есть существует скалярное произведение, порождающее заданную норму.*

Доказательство этого утверждения можно прочитать в учебнике «Колмогоров—Фомин».

$B(X)$ не является евклидовым пространством. Пусть $X = A \sqcup B$, $f(x) = \chi_A(x)$, $g(x) = \chi_B(x)$, Нормы $\|f\|_B := \sup\limits_{x \in X} \big|f(x)\big|$. Значит

$$\|f\| = \|g\| = \|f + g\| = \|f - g\| = 1.$$

И неравенство параллелограмма не выполняется.

Утверждение 14.5. *Непрерывность скалярного произведения $\langle x, y\rangle$ для $x, y \in E$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что оно пепрерывно в точке x_0, y_0. Применяем неравенство треугольника для модуля.

$$\big|\langle x, y\rangle - \langle x_0, y_0\rangle\big| \leqslant \big|\langle x - x_0, y_0\rangle\big| + \big|\langle x_0, y - y_0\rangle\big| + \big|\langle x - x_0, y - y_0\rangle\big| \leqslant$$

Если снять модули, неравенство превращается в равенство. Это так, отступление.

Теперь применяем неравенство Коши—Буняковского

$$\leqslant \|x - x_0\| \cdot \|y_0\| + \|x_0\| \cdot \|y - y_0\| + \|x - x_0\| \cdot \|y - y_0\|$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмём $C > \max\big\{\|x_0\|, \|y_0\|\big\}$ Берём $0 < \delta < \max\big\{\frac{\varepsilon}{3C}, C\big\}$. Тогда для $\|x - x_0\| < \delta$ и $\|y - y_0\| < \delta$ имеем

$$\leqslant \|x - x_0\| \cdot \|y_0\| + \|x_0\| \cdot \|y - y_0\| + \|x - x_0\| \cdot \|y - y_0\| < \varepsilon.$$

∎

Утверждение 14.6 (Неравенство Беппо—Леви)**.** *Пусть $L \subset E$ линейное подпространство, $x \in E \setminus L$, $d = \rho(x, L) = \inf\limits_{y \in L} \|x - y\|$. Утверждается, что*

$$\forall\ y, z \in E \quad \|y - z\| \leqslant \sqrt{\|x - y\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x - z\|^2 - d^2}.$$

Мы это неравенство докажем, используя только свойства скалярного произведения, то есть без геометрических соображений.

Доказательство. Пусть $u = \frac{ty+z}{t+1} \in L$, $\|x - u\| \geqslant d$. Рассмотрим скалярный квадрат следующего вида

$$\big\|t(x - y) + x - z)\big\|^2 = \big\|(t+1)(x - u)\big\|^2 = (t+1)^2\|x - u\|^2 \geqslant (t+1)^2 d^2.$$

Теперь сам скалярный квадрат раскроем. Я ещё кое-что сразу перенесу из правой части неравенство в левую.

$$t^2\big(\|x - y\|^2 - d^2\big) + 2t\big(\operatorname{Re}\langle x - y, x - z\rangle - d^2\big) + \big(\|x - z\|^2 - d^2\big) \geqslant 0.$$

Опять получили, как в доказательстве неравенства Коши—Буняковского, квадратный трёхчлен. Условие на дискриминант принимает вид

$$\big(\operatorname{Re}\langle x - y, x - z\rangle - d^2\big)^2 \leqslant \big(\|x - y\|^2 - d^2\big)\big(\|x - z\|^2 - d^2\big).$$

Мы теперь будем использовать это неравенство.

$$\|y-z\| = \big\|(x-z)-(x-y)\big\|^2 = \|x-z\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x-z, x-y\rangle + \|x-y\|^2 =$$
$$= \left(\|x-z\|^2 - d^2\right) - 2\big(\operatorname{Re}\langle x-z, x-y\rangle - d^2\big) + \left(\|x-y\|^2 - d^2\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\|x-z\|^2 - d^2 + 2\sqrt{\left(\|x-z\|^2-d^2\right)\left(\|x-y\|^2-d^2\right)} + \left(\|x-y\|^2 - d^2\right)\right.$$

А это равносильно доказываемому неравенству. ■

Определение 14.2. *Элементы $x, y \in E$ называются ортогональными $x \perp y$, если $\langle x, y\rangle = 0$.*

$x \perp L$, если $\forall\ y \in L\quad \langle x, y\rangle = 0$.

$M \perp L$, если $\forall\ x \in M,\ \forall\ y \in L\quad \langle x, y\rangle = 0$.

Лемма 14.1. *Пусть $L \subset E$ линейное подпространство, $x \in E$. Тогда*

$$\rho(x, L) = \|x-y\|,\ y \in L \Leftrightarrow x - y \perp L.$$

Доказательство. Необходимость от противного. Пусть $\exists\ z \in L\colon \langle x-y, z\rangle \neq 0$. Рассмотрим такой элемент $u = y + \lambda z$, где $\lambda = \frac{\langle x-y,z\rangle}{\langle z,z\rangle}$. Тогда по свойствам скалярного произведения.

$$\|x-u\|^2 = \big\|(x-y)-\lambda z\big\|^2 = \|x-y\|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\overline{\lambda}\langle x-y, z\rangle\right) + |\lambda|^2\langle z, z\rangle = \|x-y\|^2 - \underbrace{|\lambda|^2\langle z, z\rangle}_{\neq 0}.$$

Отсюда видно, что необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\forall\ z \in L\quad \langle x-y, z\rangle = 0$. Так как z ортогонален, могу заменить $\langle x-y, x-y\rangle = \langle x-y, x-z\rangle$. Тогда

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x-y, x-z\rangle \leqslant \|x-y\| \cdot \|x-z\|.$$

Можно сократить, получим $\forall\ z \in L\quad \|x-y\| \leqslant \|x-z\|$. ■

Теорема 14.1. *Пусть $L = \operatorname{sp}\{x_1, \ldots, x_n\}$, где $x_1, \ldots, x_n \in E$ линейно независимы. Пусть также $x \in E \setminus L$. Утверждается, что расстояние выражается через определители*

$$\rho(x, L) = \sqrt{\frac{D(x_1, \ldots, x_n, x)}{D(x_1, \ldots, x_n)}}, \quad D(x_1, \ldots, x_n) = \det\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \ldots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_1, x_n\rangle & \ldots & \langle x_n, x_n\rangle \end{pmatrix}$$

Этот определитель, составленный из скалярных произведений, называется определителем Грама.

Доказательство. В строго нормированном пространстве элемент наилучшего приближения единственный, то есть $\exists!\ y \in L\colon \rho(x, L) = \|x-y\| = d$. Запишем такой скалярный квадрат.

$$\langle x-y, x-y\rangle = \langle x-y, x\rangle = d^2; \quad \langle y, x\rangle = \langle x, x\rangle - d^2.$$

Отсюда если мы запишем y в виде линейной комбинации $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in L$, $\lambda_k \in \mathbb{F}$, $k = 1, \ldots, n$, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1\langle x_1, x_1\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n, x_1\rangle = \langle x, x_1\rangle; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1\langle x_1, x_n\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n, x_n\rangle = \langle x, x_n\rangle; \\ \lambda_1\langle x_1, x\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n, x\rangle = \langle x, x\rangle - d^2; \end{cases}$$

Так как элемент единственный, система имеет единственное решение, значит, ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы. Определитель расширенной матрицы будет равен нулю. Последний столбец можно представить в виде суммы двух столбцов. Таким образом,

$$D(x_1, \ldots, x_n, x) - d^2 D(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Чтобы доказать, что второе слагаемое не равно нулю, нужно применить метод индукции. При $n = 1$ верно. Дальше по индуции доказывам, что определитель Грама не равен нулю, когда элементы линейно независимы. Хотя вы можете это помнить из линейной алгебры. ■

14.1 Гильбертовы пространства

Определение 14.3. *Полное евклидово пространство H называется гильбертовым пространством.*

Пример: $\mathcal{L}_2(E,\mu)$ является гильбертовым пространством. Можем ввести скалярное произведение по формуле

$$\forall\ f,g \in \mathcal{L}_2(E,\mu)\ \ \langle f,g\rangle := \int\limits_E f\overline{g}\,d\mu, \quad \|f\|_{\mathcal{L}_2} = \Big(\int\limits_E |f|^2\,d\mu\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle f,f\rangle}.$$

Другой пример. Частный случай $\mathcal{L}_2$, а именно l_2. Оно тоже является гильбертовым и часто его используют для примеров. Напомню, что это последовательности $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов поля $x_n \in \mathbb{F}$, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Скалярное произведение определяется как

$$\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y}_n, \quad \|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Это частный случай $\mathcal{L}_2$, а именно когда $E = \mathbb{N}$, а мера $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ \mu\big(\{n\}\big) = 1$, которую можно продолжить.
Теорема 14.2 (о наилучшем приближении). *Пусть H — гильбертово пространство, $L \subset H$ — замкнутое подпространство. Тогда*

$$\forall\ x \in H \quad \exists!\ y \in L\colon \rho(x,L) = \|x-y\|.$$

Доказательство. Главное доказать существование, единственность очевидна. Пусть $d = \rho(x,L)$. Тогда

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \ \ \exists\ y_n \in L\colon \|x-y_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2}.$$

Теперь применяем неравенство Беппо—Леви.

$$\forall\ n,m \in \mathbb{N} \ \ \|y_n - y_m\| \leqslant \sqrt{\|x-y_n\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x-y_m\|^2 - d^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

То есть $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Коши в H. Тогда $\exists\ y = \lim\limits_{n\to\infty} \in L$ в силу замкнутости L. А так как скалярное произведение непрерывно по 14.5, а переход к пределу сохраняет нестрогие неравенства (курс мат. анализа), имеем

$$\|x-y\| = \lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| \leqslant d.$$

Ну а меньше быть не может, значит, равевняется. ■
Теорема 14.3 (об ортогональном разложении). *Пусть H — гильбертово пространство, $L \subset H$ — замкнутое подпространство. Определим*

$$L^{\perp} := \big\{x \in H \big| \forall\ y \in L \ \ \langle x,y\rangle = 0\big\}.$$

Тогда $H = L \oplus L^{\perp}$.

Мы здесь ещё утверждаем, что прямое произведение топологий совпадает с топологией на H, это мы доказывать не будем, хотя это совсем просто.
Доказательство. По теореме о наилучшем приближении

$$\forall\ x \in H \quad \exists!\ y \in L\colon \rho(x,L) = \|x-y\|.$$

Определим ортогональную проекцию $P(x) = y \in L$, $P\colon H \to L$. Мы можем ещё рассмотреть элемент $z = x-y \perp L$ по доказанной лемме 14.1. Поэтому $x = y + z$, где $y \in L$, а $z \in L^{\perp}$.

Осталось доказать, что подпространства не пересекаются. Для этого нужно доказать единственность разложения. Пусть у нас есть два разложения $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, Тогда $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in L \cap L^{\perp}$. Значит, эти элементы-разности ортогональны самим себе, то есть равны нулю. Таким образом, $L \cap L^{\perp} = \{0\}$. ■
Следствие 14.1. *Пусть H — гильбертово пространство, $L \subset H$ — линейное подпространство. Тогда L всюду плотно в H, если и только если $L^{\perp} = 0$.*
Доказательство. Докажем необходимость. Если L всюду плотно в H, то по определению $\overline{L} = H$. Значит, всякий элемент из H является пределом последовательности элементов из L, то есть

$$\forall\ x \in H \ \ \exists\ x_n \in L\colon x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x.$$

Тогда в силу непрерывности скалярного произведения 14.5

$$\forall\ x \in H,\ \forall\ y \in L^{\perp}\colon y \neq 0 \ \ \langle x,y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, \underbrace{y}_{\neq 0}\rangle = 0.$$

Поэтому отсюда вытекает, что $L^{\perp} \subset H^{\perp}$, ну а $H^{\perp} = \{0\}$. И необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $L^\perp = \{0\}$. Ну а $(\overline{L})^\perp \subset L^\perp = \{0\} \Rightarrow (\overline{L})^\perp = \{0\}$. Значит, $H = \overline{L} \oplus (\overline{L})^\perp = \overline{L}$. ■

В необходимости достаточно евклидовости пространства, а в достаточности существенна полнота гильбертова пространства. Пример на случай, когда для евклидова пространства эта достаточность не верна. Рассмотрим $C[0,1] \subset \mathcal{L}_2[0,1]$ (здесь, конечно, берётся мера Лебега на отрезке $[0,1]$). $E = C[0,1]$ евклидово, если рассматривать скалярное произведение и норму из $\mathcal{L}_2$. Теперь рассмотрим множество многочленов

$$M = \Big\{ P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \Big| P \perp \chi_{[0,1/2]} \Big\}.$$

Ясно, что $M \subset C[0,1]$. И его ортогональное дополнение $M^\perp = 0$ в $C[0,1]$, так как в $\mathcal{L}_2$ ортогональным дополнением будет прямая, натянутая на $\chi_{[0,1/2]}$. M не является всюду плотным в $C[0,1]$, если бы являлось, то и в $\mathcal{L}_2$ тоже, а это не верно.

15 Ортонормированные системы

Сначала мы докажем одно следствие теоремы об ортогональном разложении. Оно опирается на ещё несколько теорем.

Теорема 15.1 (Рисса)**.** *Пусть H — гильбертово пространство, $\alpha \in H^*$. Тогда $\exists!\ y \in H$:*

1. *$\forall\ x \in H \quad \alpha(x) = \langle x, y \rangle$;*
2. *$\|\alpha\| = \|y\|$.*

Доказательство. Обозначим через L ядро этого функционала $L = \ker(\alpha) = \big\{x \in H \big| \alpha(x) = 0\big\}$. Так как функционал ограниченный, он непрерывный, $L \subset H$ замкнутое подпространство. Если $L^\perp = 0$, то по теореме об ортогональном разложении $L = H \Rightarrow \alpha = 0$. Тогда можно взять $y = 0$.

Теперь предположим, что $L^\perp \neq 0$. Тогда $\exists\ z \in L^\perp \colon \|z\| = 1$ (потому что ортогональное дополнение имеет элемент неравный нулю, возьмём его и нормируем). Положим $u = \alpha(x)z - \alpha(z)x$. Очевидно, $\alpha(u) = 0$. Значит, $u \in L$. Поэтому

$$0 = \langle u, z \rangle = \alpha(x)\langle z, z, \rangle - \alpha(z)\langle x, z \rangle = \alpha(x) - \langle x, y \rangle,$$

где элемент $y = \overline{\alpha(z)}z$. Значит, мы нашли элемент y, для которого $\forall\ x \in H \quad \alpha(x) = \langle x, y \rangle$.

Докажем его единственность. Пусть $\forall\ x \in H \quad \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$. Тогда $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$ и, значит, $y_1 - y_2 = 0$.

Ну и теперь осталось доказать последнее условие теоремы. В силу неравенства Коши—Буняковского, имеем

$$\big|\alpha(x)\big| = \big|\langle x, y \langle\big| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|\alpha\| \leqslant \|y\|, \quad x = \frac{y}{\|y\|} \Rightarrow \|\alpha\| = \|y\|.$$

■

Отсюда вытекает

Следствие 15.1. *H^* изоморфно H.*

Пример 1. $H = l_2$, $x = \big\{x_n\big\}_{n=1}^\infty, y = \big\{y_n\big\}_{n=1}^\infty \in l_2$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x}$, $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{n=1}^\infty x_n \overline{y}_n$. Тогда

$$\forall\ \alpha \in l_2^* \quad \exists\ y \in l_2 \colon \forall\ x \in l_2 \quad \alpha(x) = \langle x, y \rangle, \|\alpha\| = \|y\|_{l_2}.$$

Такой же пример можно привести и для $L_2(E,\mu)$, $\|f\| = \left(\int\limits_E |f|^2\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$, $\langle f, g \rangle = \int\limits_E f\overline{g}\,d\mu$ для $f, g \in L_2(E,\mu)$. Тогда

$$\forall\ \alpha \in L_2^*(E,\mu) \quad \exists!\ g \in L_2(E,\mu) \colon \alpha(f) = \int\limits_E fg\,d\mu.$$

Единственность понимается специальным образом. С точностью до эквивалентности. Сопряжение от g можно было бы поставить, но ведь $\overline{g}$ тоже лежит в $L_2(E,\mu)$.

Мы даже не будем требовать гильбертовость сейчас.

Определение 15.1. *Система элементов $\big\{e_n\big\}_{n=1}^\infty \subset E$ евклидова пространства называется ортонормированной, если*

$$\langle e_n, e_m \rangle = 0 \quad (n \neq m), \quad \langle e_n, e_n \rangle = 1.$$

Просто ортогональной, если только первое условие.

*Система $\big\{e_n\big\}_{n=1}^\infty$ называется **тотальной**, если*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \langle x, e_n \rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Иногда это называют полнотой системы $\big\{e_n\big\}_{n=1}^\infty$.

Определение 15.2. *Пусть $x \in E$. Обозначим $_n = \langle x, e_n\rangle$. Эти числа c_n называются коэффициентами Фурье. Тогда каждому элементу x соответствует ряд Фурье*

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n.$$

Обозначим также $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_n e_n$ — частичные суммы ряда Фурье.

Вообще говоря, этот ряд не сходится к элементу x. Для того, чтобы элемент сходился, нужно, чтобы система была полной.

Давайте несколько свойств перечислим.

Утверждение 15.1 (Неравенство Бесселя)**.** $\|x\|^2 \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.

Доказательство. Доказывается очень просто. Вычисляя скалярный квадрат по свойствам скалярного произведения, мы получим

$$\|x - S_n\|^2 = \langle x - S_n, x - S_n\rangle = \langle x, x\rangle - 2\operatorname{Re}\langle x, S_n\rangle + \langle S_n, S_n\rangle = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_n|^{\geqslant} 0.$$

Отсюда вытекает неравенство Бесселя, если перейти к пределу по $n \to \infty$ в неравенстве. ■

Утверждение 15.2 (Равенство Парсеваля)**.** *Равенство в неравенстве Бесселя выполняется тогда и только тогда, когда ряд Фурье сходится к элементу x, то есть*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \Leftrightarrow \|x - S_n\| \searrow 0$$

в силу доказанного равенства.

Утверждение 15.3 (Обобщённое равенство Парсеваля)**.** *Равенство Парсеваля выполняется, если и только если выполняется обобщённое равенство*

$$\forall\ x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \Leftrightarrow \forall\ x, y \in E \quad \langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{d}_n,$$

где $c_n = \langle x, y\rangle$, $d_n = \langle y, e_n\rangle$.

Доказательство. Берём $\lambda \in \mathbb{F}$, элемент $x + \lambda y \in E$. Раскоем равенство Парсеваля для этого элемента

$$\|x + \lambda y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle x + \lambda y, e_n\rangle\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n + \lambda d_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(\overline{\lambda} c_n \overline{d}_n) + |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2.$$

В лекциях у нас на кафедре двоечка пропущена.

С другой стороны можно раскрыть скалярный квадрат по свойствам скалярного произведения

$$\|x + \lambda y\| = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle\right) + |\lambda|^2 \|y\|^2.$$

Опять используя равенство Парсеваля, видим, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2$, а $\|\lambda\|^2\|y\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |d_n|^2$. Откуда

$$\operatorname{Re}\left(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(\overline{\lambda} c_n \overline{d}_n).$$

■

Теорема 15.2 (Стеклова)**.** *Ортонормированная система $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ является полной, если и только если выполняется равенство Парсеваля, то есть*

$$\forall\ x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ полная система. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, $x \in E$. Тогда найдётся $y = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k e_k \in \operatorname{sp}\left\{e_k\right\}_{k=1}^{m} =: L_= m$, для которого $\|x - y\| < \varepsilon$. Так как $x - s_m \perp L_m$, для $n \geqslant m$ имеем

$$\|x - S_n\| \leqslant \|x - S_m\| \leqslant \|x - y\| < \varepsilon.$$

Ну а это и означает, что ряд Фурье сходится к элементу x. А по свойству 2 равенства Парсеваля, если ряд Фурье сходится, то и равенство Парсеваля верно.

Докажем достаточность. Пусть выполнено равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$. Тогда

$$\|x - S_n\| = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ну это и означает, что всякий x отклоняется от частичный суммы меньше чем на ε. То есть линейная оболочка всюду плотна и, следовательно, система полна. ∎

Следствие 15.2. *Ортонормированная система $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ гильбертова пространства полна, если и только если $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ тотальна. Иными словами, в гильбертовом пространстве полнота равносильна тотальности.*

Доказательство. Необходимость. Если система полна и $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad c_n = 0$, то из равенства Парсеваля, следует, что норма $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 0$. Значит, $x = 0$. Это мы доказали тотальность.

Достаточность. Пусть $L = \operatorname{sp}\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $L^{\perp} = 0$. А по следствие из теоремы об ортогональном дополнении, $\overline{L} = H$. Следовательно, система полна. ∎

В евклидовом пространстве это неверно. Мы в конце прошлой лекции построили пример. $M \subset C[0,1] \subset L_2[0,1]$, состоящее из алгебраических многочленом. Его ортогональное дополнение в C в евклидовой норме из L_2 всюду плотно, но его ортогональное дополнение не равно нулю.

Следующая теорема у вас была уже в курсе линейной алгебры, но мы её подкорректируем.

Теорема 15.3 (Метод ортогонализации Грамма—Шмидта)**.** *Для всякой счётной системы линейно независимых элементов евклидова пространства существует линейная ортонормированная система , то есть*

$$\forall\ \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset E\ \ \exists\ \left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset E,$$

где $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована, причём элементы x_n выражаются через e_n. $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ полна $\Leftrightarrow$ $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ полна.

Доказательство. Положим $y_1 = x_1$, нормируем $e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$. Берём $y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1 \perp e_1$ и нормируем $e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$. И так далее

$$y_n := x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k\rangle e_k \perp e_1, \ldots, e_{n-1}, \quad e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}.$$

Получаем систему уравенений

$$\begin{cases} e_1 = a_{11}x_1; \\ e_2 = a_{21}x_1 + a22x_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n = e_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Матрица этой системы треугольная. Причём a_{nn}, значит, система определена. ∎

Теорема 15.4 (Рисса—Фишера)**.** *Каждое сепарабельное гильбертово пространство H изометрически изоморфно либо пространству $\mathbb{F}^n$, либо пространству l_2. Соответственно, если H над $\mathbb{R}$, то $\mathbb{F}^n = \mathbb{R}^n$, а l_2 над $\mathbb{R}$, над $\mathbb{C}$ аналогично.*

Доказательство. Так как пространство сепарабельно, по определению в нём существует счётная полная система элементов. Давайте её обозначим $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset H$. Вообще говоря, эти элементы могут быть линейно зависимы. По индукции выбрасываем те элементы, которые зависят от предыдущих. Полнота останется у системы, так как линейная оболочка не изменится. Если останется конечное число элементов, то всё ещё было доказано в курсе линейной алгебры. Пусть система бесконечна, $\dim H = \infty$.

Построим по полученной полной счётной линейно незивисимой системе счётную полную ортонормированную $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset H$. Таким образом, может для любого элемента $x \in H$ рассматривать ряд Фурье $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, где $c_n = \langle x, e_n\rangle$ — коэффициенты Фурье. Определим отображение

$$F\colon H \to l_2, \quad F(x) = c = \left\{c_n\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Почему $c \in l_2$? В силу равенства Парсеваля $\|F\|^2 = \|c\|^2_{l_2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2$. Получается изометричное отображение. Осталось доказать, изоморфность, то есть, что F — это «отображение на», то есть $\operatorname{Im}(F) = l_2$.

Возьмём $c = \left\{c_n\right\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$. Найдём элемент $x \in H$, у которого c_n будут является коэффициентами Фурье. Для этого рассмаотрим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k \in H$. Раскроем скалярный квадрат по свойствам скалярного произведения и используем ортонормированность системы.

$$\|S_n - S_m\|^2 = \langle S_n - S_m, S_n - S_m\rangle = \left\langle \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k, \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k \right\rangle = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \to 0 \quad (m \to \infty)$$

Таким образом, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Коши в H. Значит, существует предел $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = x \in H$. Осталось доказать, что c_n есть его коэффициенты Фурье.

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \langle x, e_m\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle S_n, e_m\rangle = c_m.$$

Таким образом, c_n — последовательность коэффициентов Фурье. И, следовательно, теорема доказана полностью. Мы даже получили изометрический изоморфизм. ■

Осталось мне привести примеры. Рассмотрим $L_2[0,1]$, мера Лебега обычна. И рассмотрим $e_n = e^{2\pi i n x} = \cos(2\pi n x) + i\sin(2\pi n x)$, $n \in Z$. Покажем, что эта система является полной. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда по теореме о всюду плотности $C[0,1]$ в $L_p[0,1]$

$$\forall\ f \in L_2[0,1] \quad \exists\ g \in C[0,1] \colon \|f - g\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Чтобы применить теорему Вейерштрасса, нам нужна не просто непрерывная функция, но ещё и периодическая. Это довольно легко сделать.

$$\exists\ \varphi C[0,1] \colon \varphi(0) = \varphi(1),\ \|g - \varphi\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Можно на отрезке $[0,\delta]$ заменить функцию на линейную $g(1) + (g(\delta) - g(1))t$. Если δ маленькая, получаемая площадь разностей $g - \varphi$ будет маленькая.

Далее по теореме Веерштрасса

$$\exists\ T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \colon \|\varphi - T\|_{L_2} \leqslant \|\varphi - T\|_C < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Построили такие функции, теперь применяем неравенство треугольника.

$$\|f - T\|_{L_2} \leqslant \|f - g\|_{L_2} + \|g - \varphi\|_{L_2} + \|\varphi - T\|_{L_2} < e.$$

Вот мы и доказали, что линейная оболочка системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ всюду плотна в $L_2[0,1]$. Также $L_2[0,1]$ изометрически изоморфна l_2. Точно так же изоморфизм строиться. Для каждой функции берём последовательность коэффициентов Фурье.

16 Пространства сходимости

Для того, чтобы нам теорию обобщённых функций рассмотреть, сегодняшняя лекция будет о некоторых специальных спространствах.

Пространства будут определяться с помощью определения того, что значит последовательность сходится. Введём понятие абстрактной сходимости.

Пусть E — линейное пространство над $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. ζ — множество всех сходящихся последовательностей. Предполагается, что задано какое-то множество последовательностей, которые мы называем сходящимися.

Определение 16.1. *Пара (E,ζ) называется пространством сходимости, если выполнены следующие аксиомы:*

1. $\forall\ \{x_n\} \in \zeta \quad \exists!\ x = \lim x_n$;
2. *если* $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall\ n \geqslant n_0 \quad x_n = x$, *то* $\{x_n\} \in \zeta$ *и* $\lim x_n = x$;
3. *если* $\{x_n\} \in \zeta$, *то* $\forall\ \{x_{n_k}\} \in \zeta$ *и* $\lim x_{n_k} = \lim x_n$;
4. *если* $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in \zeta$, *то* $\{x_n + y_n\} \in \zeta$ *и* $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$;
5. *если* $\{x_n\} \in \zeta$ *и* $\{\lambda_n\} \in \zeta_{\mathbb{F}}$, *то* $\{\lambda_n x_n\} \in \zeta$ *и* $\lim \lambda_n x_n = \lim \lambda_n \cdot \lim x_n$.

Эти аксиомы естественные. Они выполняются в нормированных и метрических линейных пространствах.

Определение 16.2. *Отображение $f \colon E \to F$ одного пространства сходимости в другое называется непрерывным (секвенциально), если*

$$\forall\ \{x_n\} \in \zeta_E \quad \{f(x_n)\} \in \zeta_F \ \text{ и } \lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

Естественное определение непрерывности по последовательностям.

Ну давайте ещё одно определение дам.

Определение 16.3. *Пространство сходимости (E, ζ) называется регулярным, если для всякой двойной последовательности $\{x_{nk}\}$, для которой существует предел $\exists \lim\limits_k x_{nk} = x_n$ и $\exists \lim\limits_n x_n = x$, существует $\exists\ k_n \to \infty$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n\,k_n} = x$.*

Лемма 16.1. *Метрическое линейное пространство (E, ρ) является регулярным пространством сходимости.*

В частности, это верно и для нормированных.

Доказательство. Сходимость там уже задана. Нужно доказать регулярность. По условию задана двойная последовательность, у которой есть пределы по строкам и существует предел этих пределов.

Обозначим квазинорму $\|x\| = \rho(x, 0)$ — расстояние от x до нуля. Хотя мне квазинорма не нужна.

Запишем наше условие:

$$\lim_k \rho(x_{nk}, x_n) = 0; \qquad \lim_n \rho(x_n, x) = 0.$$

Для фиксированного n имеем $\exists\ k_n \to \infty\colon \rho(x_{nk_n}, x_n) < \frac{1}{n}$. Следовательно, расстояние

$$\rho(x_{nk_n}, x) \leqslant \rho(x_{nk_n}, x_n) + \rho(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

■

То есть некоторая диагональная последовательность стремится к x.

Определение 16.4. *Последовательность $\{x_n\}$ называется безусловно суммируемой, если для каждой подпоследовательности сходится ряд, то есть $\forall\ \{x_{n_k}\}$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$, то есть последовательность частичных сумм лежит в ζ.*

Для последовательности действительных чисел — это абсолютная сходимость ряда из этих чисел. Для комплексных чисел чуть по-другому.

Определение 16.5. *В пространстве сходимости (E, ζ) выполняется аксиома полноты, если*

$$\forall\ \{x_n\} \in \zeta\colon\ \lim x_n = 0 \ \ \exists\ \{x_{n_k}\} \text{ безусловно суммируемая.}$$

Это определение вводится для того, чтобы в последствии доказать полноту сопряжённого пространства.

Лемма 16.2. *Если метрическое линейное пространство (E, ρ) полно, то в нём выполняется аксиома полноты.*

Доказательство. Нам задана последовательность, которая стремится к нулю. Здесь нам понадобися квазинорма $\|x\| = \rho(x, 0)$. Раз последовательность стремится к нулю, выполняется следующее свойство

$$\lim \|x_n\| = 0.$$

Отсюда следует, что существует такая подпоследовательность $\{n_k\}$, для которой $\|x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$.

Давайте докажем теперь, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ сходится. В самом деле, берём частичные суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{n_k}$ этого ряда и рассматриваем

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_{n_k} \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|x_{n_k}\| < \frac{1}{2^n}.$$

Значит, последовательность частичных сумм является последовательностью Коши. А так как пространство полное, то значит, существует предел $\exists\ S_n$. Но нам нужно доказать больше, что всякий подряд тоже сходится. Это доказывается аналогично с помощью того же самого неравенства. ■

Давайте теперь приведём плохой пример. $\mathcal{K}(\mathbb{R}) = C_0(\mathbb{R})$ — по-разному обозначают множество непрерывных функций $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определённых на всей прямой, у которых компактный носитель, то есть $\operatorname{supp}(\varphi) \Subset \mathbb{R}$.

$$\operatorname{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Определение 16.6. $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$, *если*

(1) $\varphi_n \overset{R}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} \varphi$;

(2) $\exists\ K \Subset \mathbb{R}\colon \operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$.

Мы знаем, что всякая равномерная последовательность Коши является равномерно сходящейся. Значит, в этом пространстве $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ выполняется аксиома полноты. Но однако, это пространство не является метрическим просранством, поскольку сходимость не является регулярным. То есть не существует метрики, чтобы сходимость по метрике совпадала с данной.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\eta(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leqslant 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

И построим последовательность $\varphi_{nk}(x) = \frac{1}{k}\eta\left(\frac{x}{n}\right)$. Выполнены условия из определения сходимости, то есть $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{nk}(x) = 0$ в $\mathcal{K}(\mathbb{R})$. Но если у нас есть последовательность $\{k_n\}$, то $\varphi_{n\,k_n} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ в $\mathcal{K}(\mathbb{R})$, потому что $\operatorname{supp}\varphi_{nk} = [-n, n]$ и когда n растёт, носители расширяются и не находятся на одном компакте.

Такиим образом, $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ не является метрическим по лемме (16.1). ■

Этот пример характерный. Мы увидим, что пространство основных функций также не является метрическим.

Определение 16.7. *Пусть (E,ζ) — пространство сходимости. Через (E',ζ') будем называть сопряжённое пространство сходимости. Здесь E' — множество всех линейных непрерывных функционалов $f\colon E\to\mathbb{F}$, а сходимость определяется так: $f_n \to f$, если $\forall\ x\in E\quad \lim f_n(x) = f(x)$.*

Лемма 16.3. *Пусть задана двойная последовательность комплексных чисел $\{a_{mn}\}\subset\mathbb{F}$, такая, что*

(1) $\forall\ m\in\mathbb{N}\quad \exists\ \lim\limits_{n} a_{mn} = b_m$,

(2) $\exists\ \varepsilon>0,\ \exists\ m\in\mathbb{N}\colon |b_m|>\varepsilon$,

(3) $\forall\ n$ ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ абсолютно сходится.

Тогда $\exists\ m_l\to\infty$ и $\exists\ n_k\to\infty$, для которых

$$\left|\sum_{l=1}^{\infty} a_{m_l n_k}\right| = \infty.$$

Доказательство. Мы не будем доказывать для комплексных. Это доказательство сводится к случаю действительных чисел. Пусть $a_{mn}\in\mathbb{R}$. Существует $n_1<n_2<\ldots$, для которой $\forall\ n\geqslant n_k\quad |a_{kn}|>\varepsilon$ по первым двум свойствам. Отсюда

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn_k}| \geqslant \sum_{m=1}^{k} |a_{mn_k}| > k\,\varepsilon.$$

Действительно, поскольку n_k возрастают, вместо n_k могу брать n_m, для которого есть уже эта оценка.

$$\lim_{k}\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn_k}| = \infty \Rightarrow \lim_{k}\sum_{m=1}^{\infty} a^{+}_{mn_k} = \infty \text{ или } \lim_{k}\sum_{m=1}^{\infty} a^{-}_{mn_k} = \infty.$$

где $a^{\pm} = \max\{\pm a, 0\}$. ■

Теорема 16.1. *Если в (E,ζ) выполнена аксиома полноты, то (E',ζ') является полным.*

Доказательство. От противного, пусть $f_n\to f$ и $f_n\in E'$, однако $f\notin E'$. Придём к противоречию при помощи леммы. Функционал линейный, а то, что он не из E', значит, он не является непрерывным, причём во всех точках (в силу линейности), например не является непрерывным в нуле. Это значит, что

$$\exists\ \varepsilon>0,\ \exists\ x_m\to 0\colon \big|f(x_m)\big|>\varepsilon.$$

Значит, $\{x_m\}$ — безусловно суммируемая последовательность. Теперь используем лемму. Пусть $a_{mn} := f_n(x_m)$. Легко проверить, что ряды по n безусловно сходится, ну и все остальные условия леммы будут выполнены. Поэтому существуют такие подпоследовательности $m_l\to\infty$ и $n_k\to\infty$, такие, что

$$\lim_{k\to\infty}\left|\sum_{l=1}^{\infty} a_{m_l n_k}\right| = \infty.$$

Пусть $x = \sum\limits_{l=1}^{\infty} x_{m_l}$. Так как последовательность x_n безусловно суммируемая, то ряд сходится к элементу x. Тогда в силу того, что f_n сходится в каждой точке

$$\big|f(x)\big| = \lim_{k\to\infty}\big|f_{n_k}(x)\big| = \lim_{k\to\infty}\left|\sum_{l=1}^{\infty} f_{n_k}(x_{m_k})\right| = \infty.$$

Вынести сумму смогли, так как $f_{n_k}\in E'$ и в частности непрерывны. Значит, у нас функционал оказался равен бесконечности. ■

Напомню определение полунормы.

Определение 16.8. $p\colon E \to \mathbb{R}_+$ *полунорма, если*

(1) $\forall\ \lambda \in \mathbb{F},\ \forall\ x \in E\ \ p(\lambda\, x) = |\lambda| p(x)$.

(2) $\forall\ x, y \in E\ \ p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Определение 16.9. *Пусть* $(E, \mathcal{P})$, *где* E — *линейное пространство, где* $\mathcal{P}$ — *система полунорм. Пара называется полинормированным пространством, если из того, что* $\forall\ p \in \mathcal{P}\ \ p(x) = 0$ *следует, что* $x = 0$.
Определение 16.10. $x_n \to x$ *в* $(E, \mathcal{P})$, *если* $\forall\ p \in \mathcal{P}\ \ \lim\limits_n p(x_n - x) = 0$, *то есть*

$$\forall\ p \in \mathcal{P},\ \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geqslant N\ \ p(x_n - x) < \varepsilon.$$

Определение 16.11. $\{x_n\}$ — *последовательность Коши в* $(E, \mathcal{P})$, *если* $\forall\ p \in \mathcal{P}\ \ \lim\limits_{m,n} p(x_n - x_m) = 0$, *то есть*

$$\forall\ p \in \mathcal{P}\ \ \exists\ N \in \mathbb{N}\colon \forall\ n, m \geqslant N\ \ p(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Например, сопряжённое пространство (E', ζ') является полинормированным пространством относительно системы полунорм $p_x(f) := \big|f(x)\big|$. Очевидно, что так как модуль обладает определёнными свойствами, то это будут полунормы. А если все модули равны нулю, то и $f \equiv 0$.
Определение 16.12. *Полинормированное пространство* $(E, \mathcal{P})$ *называется счётно нормированным, если система полунорм счётная, задаётся последовательность полунорм* $\mathcal{P} = \{p_n\}$.
Лемма 16.4. *Пусть* $(E, \mathcal{P})$, $\mathcal{P} = \{p_n\}$ — *счётно нормированное пространство. Тогда сходимость в этом пространстве* $(E, \mathcal{P})$ *равносильна сходимости относительно метрики*

$$\rho(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}.$$

Можно, конечно, и другую формулу придумать. Но нам достаточно её, чтобы доказать, что каждое счётно нормированное пространство является метрическим.
Доказательство. Надо доказать сначала, что это метрика. Мы с вами уже сталкивались с ней, я просто повторю.

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ очевидно;

2. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, а это уже нужно доказывать.

   Имеем $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ возрастает, $\varphi(t+s) \leqslant \varphi(t) + \varphi(s)$. Отсюда и вытекало у нас неравенство треугольника.

3. $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow \forall n\ \ p_n(x - y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Таким образом, эта формула определяет некоторую метрику. Нужно ещё проверить, что относительно этой метрики операции сложения и умножения на число непрерывны. Я не буду это проверять, это достаточно просто делается.

Значит, (E, ρ) — метрическое линейное пространство. Покажем, что сходимости равносильны.

Пусть $x_n \to x$ в $(E, \mathcal{P})$. Берём $\varepsilon > 0$, тогда $\exists\ m\colon \frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{2^m}$. Так как $p_k(x_n - x) \to 0$, то

$$\exists\ n_k\colon \forall n \geqslant n_k\ \ p_k(x_n - x) < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Возьмём $N := \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} \{n_k\}$. Тогда

$$\rho(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x_n - x)}{1 + p_k(x_n - x)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m p_k(x_n - x) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Разбили сумму на две. В одной дробь больше единицы, в другой — меньше.

Теперь обратно нужно доказать. Пусть $\rho(x_n, x) \to 0$. Тогда $\frac{1}{2^k} \frac{p_k(x_n - x)}{1 + p_k(x_n - x)} \to 0$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\colon \forall\ n \geqslant N\ \ \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x_n - x)}{1 + p_k(x_n - x)} < \varepsilon.$$

Фиксируем число k Тогда $\forall n \geqslant N\ \ p_k(x_n) < \frac{\varepsilon\, 2^k}{1 - \varepsilon\, 2^k}$. Поэтому последовательность у нас сходится в счётно нормированном пространстве.

$\blacksquare$ Можно доказатель, что последовательности Коши относительно счётной системы полунорм и последовательности Коши относительно метрики.

Определение 16.13. *Пусть $(E, \mathcal{P}_E)$ и $(F, \mathcal{P}_F)$ — полунормированные пространства. Линейное отображение $f\colon E \to F$ называется ограниченным, если*

$$\forall\ p \in \mathcal{P}_F \quad \exists\ p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}_E,\ \exists\ c > 0\colon p\big(f(x)\big) \leqslant c\big(p_1(x) + \cdots + p_n(x)\big).$$

Это определение согласуется с определением ограниченных операторах в нормированных пространствах.

Теорема 16.2. *Пусть $(E, \mathcal{P})$ — счётно нормированное пространство. Тогда линейное отображение $f\colon E \to F$ ограничено, если и только если f непрерывно.*

Доказательство. Необходимость очевидная. Если ограничены, то есть выполнено неравенство; в нём если правая часть стремится к нулю, то и левая тоже.

Нужно доказать достаточность. Пусть отображение непрерывно. Пусть $q_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k(x)$, где $\mathcal{P}_E = \{p_n\}$ — заданная счётная система полунорм. Если f не являетя ограниченным, то существует $p \in \mathcal{P}_F$ и последовательность $\{x_n\}$, такие, что

$$p\big(f(x_n)\big) \geqslant n\, q_n(x_n). \tag{7}$$

Пусть у нас $y_n = \frac{1}{\sqrt{n} q_n(x_n)} \cdot x_n$. Рассмотрим такие элементы. В силу неравенства (7) получаем $p\big(y_n)\big) > \sqrt{n}$. То есть $p_k(y_n) \to 0$, но $f(y_n) \not\to 0$, поскольку

$$p_k(y_n) = \frac{p_k(x_n)}{\sqrt{n} q_n(x_n)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

■

Нужно ещё привести примеры. Функция $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ называется бесконечно дифференцируемой, если существуют все частные производные

$$\partial^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_m} x_m}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m),\ |\alpha| = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k.$$

Через $C_0^\infty(X)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, у которых $\operatorname{supp}(\varphi) \Subset X$. На этом пространстве вводится счётная система полунорм

$$p_k(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in X} \big|\partial^\alpha \varphi(x)\big|.$$

Это будет счётно нормированное пространство. Сходимость в этом пространстве будет определяться также метрикой

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(\varphi - \psi)}{1 + p_k(\varphi - \psi)}.$$

Полное счётно нормированное пространство называется пространством Фреше. Пример — пространство Фреше.

17 Обобщённые функции

Введём некоторые обозначения. $\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \ldots, x_m),\ x \in \mathbb{R}$. Здесь есть норма $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\, y_k$. $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

$$C_0\infty(X) = \big\{\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{F} \big| \exists\ \partial^\alpha \varphi(x),\ \operatorname{supp}(\varphi) \Subset X\big\}.$$

Бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем. В неём водится сходимости по системе норм $p_k(\varphi) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} \sup\limits_{x \in X} \big|\partial^\alpha \varphi(x)\big|$ для $k = 0, 1, \ldots$ Если X является компактным, то C_0^∞ будет полным, то есть пространством Фреше.

17.1 Примеры бесконечно дифференцируемых функций

Приведём несколько примеров бесконечно дифференцируемых функций, которые нам понадобятся в дальнейшем.

1. Рассмотрим функцию

$$e(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0; \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

Это бесконечно дифференцируемая функция, $e(t) \geqslant 0$, $\operatorname{supp}(e) = \mathbb{R}_+$. Дифференцируемость в нуле проверяется по правилу Лопиталя.

2. $\xi(x) = e\big(1 - \|x\|^2\big)$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2$, $\operatorname{supp}(\xi) = S$, где
$$S = \big\{x \in \mathbb{R}^m \big| \|x\| \leqslant \big\}$$
единичный шар.

3. Система функций $\theta_r(x) = c_r\, \xi\left(\frac{x}{r}\right)$ для $r > 0$. Константу c_r выбираем так, чтобы $\int\limits_{\mathbb{R}^m} \theta_r(x)\, dx = 1$. Называется аппроксимативной единицей. Все бесконечно дифференцируемы и $\operatorname{supp}(\theta_r) = S_r = \big\{x \in \mathbb{R}^m \big| \|x\| \leqslant r\big\}$.

4. $\eta(x) = \int\limits_{S_2} \theta_1(x - y)\, dy$. Легко проверить, что эта функция

   - $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$;
   - $\operatorname{supp}(\eta) = S_3$;
   - $\eta(x) = 1$ на $x \in S_1$, $\eta(x) = 0$ вне S_3. И принимает значения между нулём и единицей на разности $S_3 \setminus S_1$.

17.2 Пространство основных функций

Перейдём к определению обобщённых функций.

Определение 17.1. *$\mathcal{D}(X)$ — пространство основных функций. В $\mathcal{D}(X) \subset C_0^\infty(X)$ определена сходимость $\varphi_n \to \varphi$, если*

(1) $\forall\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^m \quad \partial^\alpha \varphi_n \underset{\to\infty}{\rightrightarrows} \partial^\alpha \varphi$ на X.

(2) $\exists\ K \Subset X : \forall\ n \in \mathbb{N} \quad \operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$.

Определение 17.2. *Сопряжённое пространство $\mathcal{D}'(X)$ к пространству сходимости $\mathcal{D}(X)$ называется пространством обобщённой функции.*

Как мы и определяли сопряжённое пространство — это множество всех линейных непрерывных функционалов. Непрерывность понимается относительно сходимости в $\mathcal{D}(X)$. Обобзначение $\langle f, \varphi\rangle$ для $f \in \mathcal{D}'(X)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(X)$.

Свойства.

(1) $f \in \mathcal{D}'(X)$ обязательно линейная функция, то есть
$$\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F},\ \forall\ \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(X) \quad \langle f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\rangle = \lambda_1\langle f, \varphi_1\rangle + \lambda_2\langle f, \varphi_2\rangle.$$

(2) f — непрерывный функционал в $\mathcal{D}(X)$, то есть если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}(X)$, то и $\langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$.

(3) Если $f_n \to f,\ f_n \in \mathcal{D}'(X)$, то $f \in \mathcal{D}'(X)$. То есть сходимость в $D'(X)$ это просто поточечная сходимость: $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$.

из теоремы о полноте сопряжённого пространства к пространству сходимости, которое мы доказали на прошлой лекции.

Пример 17.1. $\delta(x - a)$ — *δ-функция. Определяется по формуле*
$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \quad \langle \delta(x - a), \varphi\rangle := \varphi(a).$$
Очевидно, что $\delta(x - a) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Пример 17.2. $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ — *главное значение $\frac{1}{x}$, то есть*
$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{\|x\|\geqslant\varepsilon} frac\varphi(x)x\, dx = \int\limits_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx.$$

17.3 Действия с обобщёнными функциями

1. Функция называется локально интегрируемой, если интегрируема по Лебегу на каждом компакте. Обощначают $\mathcal{L}_{\text{loc}}(X)$. Такие $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ и $\forall\ K \Subset X \quad \varphi \in \mathcal{L}_1(K)$. Тогда для $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ можно определить обобщённую функцию
$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle f, \varphi\rangle := \int\limits_X f(x)\varphi(x)\,dx.$$
Непрерывность вытекает из теоремы Лебега о предельном переходе.

2. Если $\psi \in C^\infty(X)$ и $f \in \mathcal{D}'(X)$, то
$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle \psi \cdot f, \varphi\rangle := \langle f, \psi\,\varphi\rangle.$$
Оператор $M_\psi := \psi \cdot \varphi$ непрерывен в $\mathcal{D}(X)$. Значит, $\psi\, f \in \mathcal{D}'(X)$.

3. Пусть $\tau_a\,\varphi(x) := \varphi(x-a)$ и оператор растяжения $\rho_\lambda\,\varphi(x) := \varphi(\lambda\, x)$. Если $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m$, то определяются следующие обобщённые функции
$$\langle \tau_a f, \varphi\rangle := \langle f, \tau_a\varphi\rangle; \quad \langle \rho_\lambda f, \varphi\rangle := |\lambda|^{-m}\langle f, \rho_{\lambda^{-1}}\varphi\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$
Линейность очевидна, а непрерывность обобщённых функций следует из непрерывности операторов.

4. Пусть у нас есть линейное преобразование $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (или линейный оператор на пространстве $\mathbb{R}^m$), у которого определитель $\det A \neq 0$. Определим оператор замены переменных $T_A\varphi(x) = \varphi(A\,x)$. Тогда определяется оператор замены переменных для обобщённых функций.
$$\langle T_A f, \varphi\rangle = |\det A|^{-1}\langle f, T_{A^{-1}}\varphi\rangle.$$
Непрерывность этого функционала вытекает из непрерывность этого оператора в пространстве $\mathcal{D}(X)$. Если частные производные сходятся равномерно, то и частные производные функции-образа будут сходиться равномерно.

5. Пусть $f \in \mathcal{D}'(X)$. Частная производная порядка $\alpha \in \mathbb{Z}^m_+$ определяется по формуле
$$\langle \partial^\alpha f, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha\varphi\rangle.$$
Если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}(X)$, то и $\partial^\alpha\varphi_n \underset{\to\infty}{\rightrightarrows} \partial^\alpha\varphi$ в $\mathcal{D}(X)$. Значит, $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}'(X)$.

Утверждение 17.1 (Формула Лейбница)**.** *Пусть $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ для $k = 1, \ldots, m$. Тогда*
$$\partial_k(\psi \cdot f) = (\partial_k\psi)f + \psi(\partial_k\, f), \quad f \in \mathcal{D}'(X),\ \psi \in C_0^\infty(X).$$

Имеем по формуле Лейбница для обычных функций и определению производной для обобщённой функции.
$$\big\langle \partial_k(\psi f), \varphi\big\rangle = -\big\langle f, \psi(\partial_k\varphi)\big\rangle = \big\langle f, (\partial_k\psi)\varphi\big\rangle - \big\langle f, \partial_k(\psi\varphi)\big\rangle = \big\langle(\partial_k\psi)f, \varphi\big\rangle + \big\langle \psi(\partial_k f), \varphi\big\rangle.$$

Теорема 17.1 (о локальной структуре)**.** *Пусть у нас $X \subset \mathbb{R}^m$ ограниченное замкнутое множество*[1]*. Тогда (здесь $C(X)$ пространство непрерывных ограниченных)*
$$\forall\ f \in \mathcal{D}'(X) \quad \exists\ \alpha \in \mathbb{Z}^m_+,\ \exists\ g \in C(X)\colon f = \partial^\alpha g,$$
то есть
$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_X g(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx.$$

Доказательство. Для простоты мы будем считать, что $X \subset [0,1]^m$. Кстати, это легко получить в результате применения операции замены переменных. Тогда существует
$$\exists\ c > 0,\ \exists\ k \in \mathbb{N}\colon \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \big|\langle f, \varphi\rangle\big| \leqslant c\, p_k(\varphi).$$

[1] В определении обобщённых функций, которое мы с вами дали X всегда открытое множество. В данном случае оно будет ещё и ограничено. Тогда можно представить формулой людую обобщённую функцию.

Это вытекает из того, что f непрерывен на $D(X)$, а значит, он непрерывен и в C_0^∞. А раз сходимость задаётся такими полунормами
$$p_k(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in X} \left|\partial^\alpha \varphi(x)\right|.$$
Мы с вами доказали на прошлой лекции эквивалентность непрерывности и ограниченности. От туда и вытекает неравенство.

При этом $p_0(\varphi) = \sup\limits_{x\in X} \left|\varphi(x)\right|$. По формуле Лагранжа (о среднем значении, то есть теорема Лагранжа) для $k = 1, 2, \ldots, m$
$$p_0(\varphi) \leqslant p_0(\partial_k \varphi)$$
Обозначим $D = \partial_1 \ldots \partial_m$. Тогда можем записать такое неравенство
$$\exists\ c_k > 0\colon p_k(\varphi) \leqslant c_k p_0(D^k\varphi) \leqslant c_k \int\limits_{[0,1]^m} \left|D^{k+1}\varphi(x)\right| dx \leqslant$$
применяем неравенство Коши—Буняковского
$$\leqslant C_k \left\|D^{k+1}\varphi\right\|_{\mathcal{L}_2}.$$
За конечной суммой будет некоторая константа. Ещё мы обозначили здесь
$$D^k\varphi(x) := \int\limits_{\Delta_x} D^{k+1}\varphi(y)\, dy; \qquad \Delta_x = [0, x_1] \times \cdots \times [0, x_m].$$

Из последнего неравенства вытекает, что
$$\forall\ \varphi \in D(x) \quad \left|\langle f, \varphi\rangle\right| \leqslant c_k \left\|D^{k+1}\varphi\right\|_{\mathcal{L}_2}.$$

Рассмотрим оператор $A\colon D^{k+1}\colon D(X) \to D(X)$. Он является взаимнооднозначным, то есть биективным, так как пространства функций с компактным носителем и там нет констант (у оператора ядро равно нулю, если и только если он биективен). И определим функционал $F(\psi) := \langle f, A^{-1}\psi\rangle$, где $\psi = A\varphi$, а $\varphi \in \mathcal{D}(X)$. Из нашего неравенства вытекает, ограниченность в $\mathcal{L}_2$, то есть
$$\left|F(\psi)\right| \leqslant c_k \|\psi\|_{\mathcal{L}_2}$$
Можем продолжить этот функционал по тереме Хана—Банаха.

Так как $\mathcal{L}_2$ — гильбертово пространство, можно применить теорему Рисса для гильбертова пространства. Значит, этот функционал представляется в виде скалярного произведения. А в $\mathcal{L}_2$ — это интеграл
$$\exists\ h \in \mathcal{L}_2\colon F(\psi) = \int\limits_X h(x)\psi(x)\, dx.$$

Доопределим $h(x) = 0$ для $x \notin X$. Тогда при интегрировании по частям неинтегральных членов не будет.
$$\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_X h(x) D^{k+1}\varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_X g(x)\partial^\alpha\varphi(x)\, dx$$
где $g(x) = (-1)^{|\alpha|+m} \int\limits_{\Delta_x} h(y)\, dy$, $\alpha = (k+2, \ldots, k+2)$.

Ну и теорема доказана. ∎

Что мы понимаем под равенством двух обобщённых функций?

Определение 17.3. *Заданы две обобщённые функции $f, g \in \mathcal{D}'(X)$. Они равны $f = g$, если*
$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle,$$
то есть если равны соответствующие линейные функционалы на определённом множестве.

Можно определеить равенство функционалов $f(x) = g(x)$ в точке $x \in X$, если $\exists$ окрестность $O_x \subset X$ точки x, для которой
$$\forall\ \langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle.$$
Если перебрать все обобщённые функции совпадают в точке, нужно брать объёдинение всех окрестностей — это открытое множество. Значит, обобщённые функции совпадают на открытом множестве.

Определение 17.4. *Пусть $f \in \mathcal{D}'(X)$. Тогда* $\operatorname{supp}(f) = \left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \neq 0\right\}$.

Это множество замкнуто в X (существует замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, которое при пересечение с X даёт наше).

Приведём теорему без доказательства.

Теорема 17.2 (о структуре обобщённой функции с носителем в одной точке)**.** *Если $f \in \mathcal{D}'(X)$ и* $\operatorname{supp}(x) = \{a\} \subset X$, *то $\exists\ k \in \mathbb{Z}_+$, существуют такие константы $c_\alpha \in \mathbb{F}$, для которых $|\alpha| \leqslant k$ и*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} c_\alpha \partial^\alpha \delta(x - a).$$

Любая такая функция есть линейная комбинация дельта-функции и её производных. До некоторого конечного порядка.

17.4 Задача существования первообразной обобщённой функции

Рассмотрим случай $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}$. Первообразная определяется как обычно: такая функция, что обобщённая производная равна заданной.

Вначале докажем лемму.

Лемма 17.1. *Если $f \in \mathcal{D}'(a, b)$ и её обобщённая производная $\partial f = 0$, то $f = c \in \mathbb{F}$ на интервале (a, b).*

Доказательство. Запишем условие того, что обобщённая производная равна нулю. Это означает, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ имеет место $\langle f, \varphi' \rangle = 0$. Рассмотрим два подпространства в $\mathcal{D}(a, b)$.

- $L := \big\{\varphi \in \mathcal{D}(a, b) \big| \int\limits_a^b \varphi\, dx = 0\big\}$;
- $M := \big\{\varphi \in \mathcal{D}(a, b) \big| \exists\ \psi \in \mathcal{D}(a, b) \colon \psi'\varphi\big\}$.

Оказывается, что эти подпространства равны. Если $\varphi \in M$, то $\int\limits_a^b \varphi\, dx = \psi(b) - \psi(a) = 0$ и $\varphi \in L$.

Обратно. Пусть $\varphi \in L$. Тогда $\psi(x) := \int\limits_a^x \varphi(t)\, dt$, $\psi' = \varphi$, $\psi \in \mathcal{D}(a, b)$.

Таким образом, $L = M$.

Рассмотрим теперь произвольную функцию $\eta \in \mathcal{D}(a, b)$, у которой интеграл $\int\limits_a^b \eta(t)\, dt = 1$. Тогда

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(a, b) \quad \varphi = \psi + \eta \int\limits_a^b \varphi(t)\, dt.$$

Значит, φ произвольная, а вот $\psi \in L$. Применяем этот функционал к нашем равенству $\langle f, \varphi' \rangle = 0$.

$$\langle f, \varphi \rangle = \underbrace{\langle f, \eta \rangle}_{c} \int\limits_a^b \varphi(t)\, dt.$$

Тогда $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(a, b) \quad \langle f, \varphi \rangle = \langle c, \varphi \rangle$. ∎

Теорема 17.3 (о существовании первообразной)**.** $\forall\ f \in \mathcal{D}'(a, b) \quad \exists\ g \in \mathcal{D}'(a, b) \colon \partial g = f$.

Доказательство. Определим функционал на подпространстве M по формуле

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(a, b) \quad \langle g, \varphi' \rangle = -\langle f, \varphi \rangle.$$

g определён только на производных, поэтому он определён только на подпространстве. Тогда

$$\varphi = \psi + \eta \int\limits_a^b \varphi(t)\, dt, \quad \psi \in M = L.$$

Можем продолжить функционал с M на всё пространство $\mathcal{D}(a, b)$ вот по такой формуле

$$\langle g, \varphi \rangle := \langle g, \psi \rangle + \underbrace{\langle g, \eta \rangle}_{c} \int\limits_a^b \varphi(t)\, dt = -\langle f, A\varphi \rangle + \langle c, \varphi \rangle.$$

При этом A задан формулой

$$A\varphi(x) = \int\limits_a^x \left(\varphi - \eta \int\limits_a^b \varphi(t)\,dt\right) dy.$$

Легко проверить, что раз оператор A непрерывен на $\mathcal{D}(a,b)$, то и оператор g будет непрерывен. И также видно, что $\partial g = f$. ■

18 Пространства Соболева

Вначале докажем несколько утверждений вспомогательных. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество, поле $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Положим

$$\mathcal{E}(x) = \left\{\varphi\colon X \to \mathbb{F} \;\middle|\; \forall\, x \in X\ \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^m\ \ \exists\, \partial^\alpha\varphi(x)\right\} = C^\infty(X).$$

Определим сходимость на этом множестве

$$\varphi_n \to \varphi \text{ в } \mathcal{E}(x), \text{ если } \forall\, K \Subset X\ \ \partial^\alpha\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{K} \partial^\alpha\varphi.$$

Определение 18.1. $\mathcal{E}'(X)$ *называется пространством обобщённых функций с компактным носителем.*

Логичность такого определения сразу не видна. На самом деле $\mathcal{E}'(X) \subset D'(X)$.

Значение функционала на функции φ будем обозначать через $\langle f, \varphi\rangle$, где $f \in \mathcal{E}'(X)$, $\varphi \in \mathcal{E}(X)$. Свойства

(1) $\forall\, f \in \mathcal{E}'(X)$ является линейным функционалом, то есть

$$\forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}(X),\ \forall\, l_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}\ \ \langle f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\rangle = \lambda_1\langle f, \varphi_1\rangle + \lambda_2\langle f, \varphi_2\rangle.$$

(2) $\forall\, f \in \mathcal{E}'(X)$ является непрерывным, то есть если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{E}(X)$, то $\langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$.

(3) Если все $f_n \in \mathcal{E}'(X)$ и $\forall\, \varphi \in \mathcal{E}(X)$ $\ \langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$, то $f \in \mathcal{E}'(X)$.

Доказательство. Докажем третье. Если выполнена аксиома полноты, то сопряжённое пространство полное. Это доказывали в прошлом семестре. Кроме того была доказана теорема, что во всяком полном метрическом пространстве аксиома полноты выполняется.

Покажем, что $E(X)$ полное линейное метрическое пространство. Рассмотрим

$$K_l := \left\{x \in X \;\middle|\; \|x\| \leqslant l,\ \rho(x, \partial X) > 1/l\right\}.$$

Расстояние до границы больше $1/l$. Имеем $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} K_l = X$. Положим системой полунорм

$$q_l(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \sup_{x \in K_l} \left|\partial^\alpha\varphi(x)\right|, \quad l = 1, 2, \ldots$$

Здесь $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots$ Тогда $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ в $\mathcal{E}(X)$, если и только если $\forall\, l \in \mathbb{N}$ $\ q_l(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Осталось заметить, что в качестве метрики нужно взять

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \frac{q_l(\varphi - \psi)}{1 + q_l(\varphi - \psi)}.$$

Доказательство полноты сводится к известным теоремам курса математического анализа (критерий Коши). ■

Теорема 18.1. $f \in \mathcal{D}'(X)$ *имеет* $\operatorname{supp}(f) \Subset X$, *если и только если* $\exists\, g \in \mathcal{E}'(X)$, *для которого* $g|_{\mathcal{D}(X)} = f$.

На самом деле такая функция будет даже единственной.

Доказательство. Необходимость. Будем использовать ту же последовательность компактов, что сегодня строили. $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ $\ \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} K_l = X$ (но теперь $l > 0$ любое действительное число). Рассмотрим

$$\eta_l(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \theta_{\frac{1}{4l}}(x - y)\chi_{K_{\frac{4l}{3}}}(x)\,dx.$$

$\theta(x)$ мы строили на прошлой лекции. Это аппроксимативная единица. В наших обозначениях выполняется

$$\eta_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_l; \\ 0, & x \notin K_{2l}. \end{cases}$$

Теперь давайте доказывать. Пусть $g \in \mathcal{E}'(X)$, определённый по формуле

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{E}(X) \quad \langle f, \eta_l \varphi \rangle,$$

где $l\colon\ \mathrm{supp}(f) \subset K_l$.

Определим оператор $A\colon \mathcal{E}(X) \to \mathcal{E}(X)$ по формуле $A\varphi = \eta_l \varphi$. Если докажем, что A непрерывен, то $g \in' E(X)$.

Имеем $\mathrm{supp}(\varphi - \eta_l \varphi) \subset X \setminus K_l$.

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle - \underbrace{\langle f, \varphi - \eta_l \varphi \rangle}_{=0} = \langle f, \varphi \rangle.$$

Таким образом, необходимость мы доказали.

Докажем достаточность. $g \in \mathcal{E}'(X)$, $f = g|_{\mathcal{D}(X)}$. Если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}(X)$, то $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{E}(X)$. Значит, $f \in \mathcal{D}'(X)$. Осталось вспомнить теорему, что если функционал непрерывен на счётно нормированном пространстве, то он ограничен. То есть из того, что $g \in \mathcal{E}'(X)$ следует, что

$$\exists\ c > 0\colon \forall\ \varphi \in \mathcal{E}(X) \quad \bigl|\langle g, \varphi \rangle\bigr| \leqslant c \cdot q_l(\varphi).$$

Отсюда следует, что $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(X)\colon\ \mathrm{supp}(\varphi) \subset X \setminus K_l$ выполнено $\langle g, \varphi \rangle = 0$. А это и означает, что $\mathrm{supp}(f) \subset K_l$, ну то есть является компактным. И теорема доказана. ■

Определение 18.2. *Пусть $\{\theta_r\}$ — аппроксимативная единица и $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(X)$. Обозначим через $f_r(X)$ вот такой интеграл (этот интеграл обычно называют свёрткой двух сдвигов; можем сделать сдвиг, ведь мера Лебега инвариантна относительно сдвигов)*

$$f_r(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^m} \theta_r(x-y)\, f(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y)\, f(x-y)\, dy,$$

где $\forall\ x \notin X \quad f(x) = 0$.

В этих обозначениях система $\{f_r\}_{r>0}$ называется усреднением f в смысле Соболева.

f_r обладает следующими свойствами

(1) $f_r \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, можем дифференцировать под знаком интеграла.

(2) $\mathrm{supp}(f_r) \subset B_r(X)$, где $B_r(X) := \bigl\{x \in \mathbb{R}^m \bigm| \rho(x, X) \leqslant r\bigr\}$.

(3) Если $f \in \mathcal{L}_p(X)$, то $\|f_r - f\|_{\mathcal{L}_p} \to 0$ при $r \to 0$ для $1 \leqslant p < \infty$.

Доказательство. Первые два свойства очевидны, а для третьего приведём доказательство. Мы знаем, что $\forall\ \varepsilon > 0 \quad C_0(X) \subset \mathcal{L}_p(X)$ всюду плотно (нолик означает, что множество непрерывных функций с компактным носителем). Поэтому существует такая $f \in C_0(X)$, что $\|f - g\|_{\mathcal{L}_p} < \frac{\varepsilon}{3}$. Обозначим оператор сдвига $\tau_y f(x) := f(x-y)$.

Так как g непрерывна, а носитель на компакте, то она равномерно непрерывна и

$$\exists\ \delta > 0\colon \forall\ y\colon \|y\| < \delta \quad \|\tau_y g - g\|_{\mathcal{L}_p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Просто можно максимум вынести из-под знака нормы. Тогда

$$\|\tau_y f - f\| \leqslant \tau_y f - \tau_y g\|_{\mathcal{L}_p} + \|\tau_y g - g\|_{\mathcal{L}_p} + \|g - f\| < \varepsilon.$$

Легко проверить равенство (у $\theta_r(y)$ интеграл равен единицы)

$$f_r(x) - f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) \bigl(\tau_y f(x) - f(x)\bigr)\, dy.$$

И применяем обобщённое неравенство Миньковского (норму можно занести под знак интеграла)

$$\|f_r - f\|_{\mathcal{L}_p} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) \|\tau_y f - f\|_{\mathcal{L}_p}\, dy \leqslant \sup_{\|y\| \leqslant r} \|\tau_y f - f\|_{\mathcal{L}_p}.$$

Правая часть неравенства стремится к нулю, значит, и левая стремится к нулю. ■

Лемма 18.1 (о плотности). *Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ открытое множество и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда*

$$\forall\ f \in \mathcal{L}_p(X) \ \ \exists\ \{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(X)\colon$$

(а) $\forall\ x \in X \quad \bigl|\varphi_n(x)\bigr| \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}_\infty}$;

(б) $\|f - \varphi_n\|_{\mathcal{L}_p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Первое свойство нам понадобится только один раз, оно несущественно. А второе свойство говорит о том, что основные функции всюду плотны в $\mathcal{L}_p$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\ K \Subset X\colon \int\limits_{X\setminus K} \bigl|f(x)\bigr|^p\,dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$. Это вытекает из того, что функция интегрируема. Можно представить $X \setminus K$ в виде объединения компактов, можно интеграл считать мерой.

Давайте обозначим через $g(x)$ функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K \\ 0, & x \notin K. \end{cases}$$

Положим $d = \rho(K, \partial X)$. Тогда носитель усреднения функции g по Соболеву $\operatorname{supp}(g_r) \Subset X,\ \forall\ 0 < r < d$. Отсюда вытекает неравенство

$$\|f - g_r\|_{\mathcal{L}_p} \leqslant \|f - g\|_{\mathcal{L}_p} + \|g - g_r\|_{\mathcal{L}_p} < \varepsilon$$

для достаточно малых $r \in (0, \delta)$. Поэтому если теперь взять функцию $\varphi_n(x) := g_{\frac{d}{2n}}$, то мы получим, что эта последовательность из $\mathcal{D}(X)$ и удовлетворяет требуемому. ∎

Следствие 18.1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ открытое ограниченное. Тогда*

$$\forall\ f \in \mathcal{L}_\infty(X) \ \ \exists\ \{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(X)\colon$$

(а) $\bigl|\varphi_n(x)\bigr| \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}_\infty}$;

(б) $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ *почти всюду на X.*

Доказательство. Из леммы для $p = 1$ получаем последовательность, сходящуюся в $\mathcal{L}_p$, выбираем из неё подпослежовательность, сходящуюся почти всюду. ∎

Определение 18.3. *Пусть $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(X)$, где X — открытое множество. Каждой такой функции определим функционал $f \in \mathcal{D}'(X)$, такой, что*

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Такой функционал f называется регулярной обобщённой функцией.

Пространство локально интегрируемых функций можно считать счётно нормированным, если ввести такие полунормы

$$r_l(f) = \int\limits_{K_l} \bigl|f(x)\bigr|\,dx, \quad l = 1, 2, \ldots,\ K_1 \subset K_2 \subset \ldots \ \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l = X.$$

Эти компакты мы берём так же, как уже сегодня строили. Для соответствующей метрики пространство будет полным и выполняется аксиома полноты.

Теорема 18.2 (о вложении). $\mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(X) \subset \mathcal{D}'(X)$, *вложение непрерывно и взаимнооднозначно с образом (ядро является нулём).*

Доказательство. Запишем следующее неравенство. Так как φ имеет компакнтый носитель, интегрирование всегда ведётся по компакту.

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \bigl|\langle f_n - f, \varphi\rangle\bigr| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^m} |f_n - f| \cdot |\varphi|\,dx \leqslant \max_{x\in K} \bigl|\varphi(x)\bigr| \int\limits_K |f_n - f|\,dx$$

Из этого неравенства вытекает, то из сходимости $f_n \to f$ в $\mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(X)$ следует $f_n \to f$ в $\mathcal{D}'(X)$, то есть отображение непрерывно.

Нам осталось доказать, что это действительно вложание. Пусть

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \int\limits_X f(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

Тогда $f(x)=0$ почти всюду? Возьмём

$$e(x)=\begin{cases}\frac{\left|f(x)\right|}{f(x)}, & \text{если } f(x)\neq 0;\\ 0, & \text{если } f(x)=0.\end{cases}\qquad X_l=\left\{x\in X\;\middle|\;\|x\|<l\right\}\subset X.$$

Тогда $\exists\ \{\varphi_n\}\subset\mathcal{D}(X)$, то есть

(а) $\left|\varphi_n(x)\right|\leqslant 1$,

(б) $\varphi_n(x)\to e(x)$ почти всюду на X_l.

Тогда мы можем записать равенство

$$\int\limits_{X_l}\left|f(x)\right|dx=\int\limits_{X_l}f(x)e(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{X_l}f(x)\big(e(x)-\varphi_n(x)\big)\,dx=0.$$

Последнее равенство нулю по теореме Лебега. Значит, действительно, для всех l выполнено $f(x)=0$ на X_l почти всюду. Значит и $f(x)=0$ почти всюду на X. ■

Определение 18.4. *Пусть $f\in\mathcal{L}_{\text{loc}}(X)$. Говорят, что эта функция имеет производную $\partial^\alpha f$ в смысле Соболева, если*

$$\exists\ g\in\mathcal{L}_{\text{loc}}(X)\colon\forall\ \varphi\in\mathcal{D}(X)\quad\int\limits_X g(x)\varphi(x)\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int\limits_X f(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx.$$

Функция $\partial^\alpha f:=g$ называется производной в смысле Соболева. Определяется с точностью до эквивалентности.

Обозначим $W_p^k(X)=\left\{f\in\mathcal{L}_p(X)\;\middle|\;\forall\ |\alpha|\leqslant k\ \ \exists\ \partial^\alpha f\in\mathcal{L}_p(X)\right\}$ (если писать $f\in\mathcal{L}_{\text{loc}}$, то потом всё равно нулевая производная требуется из $\mathcal{L}_p$, так что лучше сразу напишем). В этом множестве определим норму

$$\|f\|_{W_p^k}:=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha f\|_{\mathcal{L}_p},\quad k\in\mathbb{Z}_+,\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^m,\ 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

Теорема 18.3. *$W_p^k(X)$ — банахово пространство для $k\in\mathbb{Z}_+,\ 1\leqslant p\leqslant\infty$.*

Пространство Соболева — это не одно пространство. Это целый спектр пространств.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}\subset W_p^k(X)$ является последовательностью Коши. Тогда для каждого $\alpha\colon|\alpha|\leqslant k$ у нас последовательность частных производных $\{\partial^\alpha f_n\}$ будет последовательностью Коши в $\mathcal{L}_p(X)$ (это легко видеть из определения нормы в $W_p^k(X)$, а $\mathcal{L}_p(X)$ полно, то есть $\partial^\alpha f_n\to g_\alpha\in\mathcal{L}_p(X)$ и $f_n\to g_0=f$. Осталось показать, что у функции f существуют частные производные в смысле Соболева и равны именно g_α.

Для этого запишем одно неравенство и применим к нему неравенство Гёльдера.

$$\left|\langle f_n-f,\varphi\rangle\right|\leqslant\int\limits_X|f_n-f|\cdot|\varphi|\,dx\leqslant\|f_n-f\|_{\mathcal{L}_p}\cdot\|\varphi\|_{\mathcal{L}_q}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Отсюда следует, что $\forall\ \varphi\in\mathcal{D}(X)\quad\langle f_n,\varphi\rangle\xrightarrow[n\to\infty]{}\langle f,\varphi\rangle$. Точно так же из этого же неравенства вытекает, что $\langle\partial^\alpha f_n,\varphi\rangle\xrightarrow[n\to\infty]{}\langle g_\alpha,\varphi\rangle$.

Значит,

$$\forall\ \varphi\in\mathcal{D}(X)\quad\langle g_\alpha,\varphi\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle\partial^\alpha f_n,\varphi\rangle=\lim_{n\to\infty}(-1)^{|\alpha|}\langle f_n,\partial^\alpha\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\partial^\alpha\varphi\rangle$$

Значит, $\partial^\alpha f=g_\alpha$. Таким образом $f_n\to f$ в $W_p^k(X)$. ■ Ну ещё давайте примерчик приведём и на этом закончим.

Докажем, что δ-функция не является регулярной. $\big\langle\delta(x-a),\varphi\big\rangle=\varphi(a)$. Пусть

$$\eta(x)=\begin{cases}1, & |x|<1;\\ 0, & |x|>3.\end{cases},\ \eta\in\mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Рассмотрим $\varphi_n(x):=\eta\big(n(x-a)\big)$. Носитель находится в $|x-a|\leqslant\frac{1}{n}$. φ_n ограничена и стремится к нулю для всех $x\neq a$. Отсюда вытекает, что

$$1=\varphi_n(a)=\big\langle\delta(x-a),\varphi_n\big\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}}f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Получили противоречие. Кроме того, рассмотрим

$$\theta(x-a)=\begin{cases}1, & x>a;\\ 0, & x\leqslant a.\end{cases}$$

Тогда $\partial\theta(x-a) = \delta(x-a)$. Причём $\theta \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Её производная нерегулярна, значит $\theta(x-a)$ не имеет производной в смысле Соболева.

19 Обобщённые функции. Преобразование Фурье обобщённых функций

19.1 Пространство Шварца

Будем обозначать $x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_m^{\beta_m}$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Также обозначим

$$S(\mathbb{R}^m) = \Big\{\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{F} \;\Big|\; \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ и } \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m \ \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \big|x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)\big| < \infty\Big\}.$$

Такие функции называются быстро убывающими. Они убывают быстрее любой степени. Определим на этом пространстве сходимость

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi \text{ в } S(\mathbb{R}^m) \Leftrightarrow \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m \quad x^\beta \partial^\alpha \varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} x^\beta \partial^\alpha \varphi(x) \text{ на } \mathbb{R}^m.$$

Данное пространство сходимости называется пространством Шварца.
Определение 19.1. $S'(\mathbb{R}^m)$ *называется пространством обобщённых функций медленного роста.*

Например, берём $f(x) = e^{x^2}$, она растёт быстрее многочлена. И она определяет обобщённую функцию, так как локально интегрируема

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Однако эта обобщённая функция $f \notin S'(\mathbb{R})$, поскольку для $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \in S(\mathbb{R})$, но её подставить нельзя под интеграл, определяющий f. Обобщённая функция f непродолжаема на $S(\mathbb{R})$. Таким образом это доказывается. Но $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Из определения вытекают свойства.
Утверждение 19.1. *Если $f \in S'(\mathbb{R}^m)$, то f линейный функционал, то есть*

$$\forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathbb{R}^m),\ \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F} \quad \langle f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\rangle = \lambda_1\langle f, \varphi_1\rangle + \lambda_2\langle f, \varphi_2\rangle.$$

Утверждение 19.2. *Если $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, то f непрерывный функционал, то есть если $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ в $S(\mathbb{R}^m)$, то $\langle f, \varphi_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle f, \varphi\rangle$.*
Утверждение 19.3. *$S'(\mathbb{R}^m)$ полно, то есть если $f_n \in S'(\mathbb{R}^m)$ и $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ в $S'(\mathbb{R}^m)$, то $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ (сходимость здесь имеется в виду поточечная).*

Это надо обосновать. Используем теорему о полноте сопряжённого пространства.
Доказательство. Докажем, что $S(\mathbb{R}^m)$ полное линейное метрическое пространство. Для этого найдём счётную систему полунорм, которой задаётся сходимость.

$$s_l(\varphi) := \sum_{|\alpha| \leqslant l} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \big(1 + \|x\|^2\big)^l \big|\partial^\alpha \varphi(x)\big|.$$

Здесь $l = 0, 1, \dots$, а $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^m x_k^2$.

Раз пространство счётно нормированное, то можно ввести метрику, которая задаёт ту же сходимость.

Если все производные сходятся равномерно, то у функции-предела будут все производные. ■ Сейчас мы докажем, что каждый функционал из $S'(\mathbb{R}^m)$ является обобщённой функцией. Мы пока только назвали.
Лемма 19.1. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset S(\mathbb{R}^m)$ всюду плотно (раз на бесконечности ноль, то, конечно, убудет быстрее любой степени).*
Доказательство. Рассмотрим такую функцию $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, которая

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \|x\| \leqslant 1; \\ 0, & \|x\| \geqslant 3 \end{cases}.$$

Мы такую функцию строили. И рассмотрим такие функции

$$\forall\, \varphi \in S(\mathbb{R}^m) \quad \varphi_n(x) := \eta\left(\frac{x}{n}\right)\varphi(x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Такие $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Надо показать, что $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ в $S(\mathbb{R}^m)$. Имеем по формуле Ньютона—Лейбница

$$\partial^\alpha\big(\varphi_n(x)-\varphi(x)\big) = \partial^\alpha\left(\left(\eta\left(\frac{n}{x}\right)-1\right)\varphi(x)\right) = \sum_{\gamma\leqslant\alpha} c_{\alpha\gamma}\partial^\gamma\left(\eta(\left(\frac{x}{n}\right)-1\right)\partial^{\alpha-\gamma}\varphi(x),\ c_{\alpha\gamma}\in\mathbb{N}.$$

Замеим, что

$$\forall\ \|x\|\leqslant n\ \ \partial^\gamma\left(\eta\left(\frac{x}{n}\right)-1\right)=0.$$

Поскольку функция является быстро убывающей, имеем

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ N\in\mathbb{N}\colon \forall\ \|x\|\geqslant N,\ \forall\ \gamma<\alpha\ \ \left|x^\beta\partial^{\alpha-\gamma}\varphi(x)\right|<\varepsilon.$$

Отсюда $\left|x^\beta\partial^\alpha\big(\varphi_n(x)-\varphi(x)\big)\right|<c\,\varepsilon$. В качестве константы надо взять

$$c:=\sum_{\gamma\leqslant\alpha} c_{\alpha\,\gamma}\max\left|\partial^\gamma\eta(x)\right|.$$

Таким образом теорема доказана. ■

Теорема 19.1. *Отображение $S'(\mathbb{R}^m)\to\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ является непрерывным вложением, то есть*

$$\forall\ f\in S'(\mathbb{R}^m)\ \ \exists!\ g=f|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m).$$

Доказательство. Это очень просто. Если $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, то есть $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ в $S(\mathbb{R}^m)$. Поскольку все φ_n имеют компактный носитель, то конечно все выражения типа

$$\left|x^\beta\partial^\alpha\big(\varphi_n(x)-\varphi(x)\big)\right|$$

равномерно стремятся к нулю. Значит, $g\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Пусть $f\in S'(\mathbb{R}^m)$ и $\forall\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)\ \ \langle f,\varphi\rangle=0$. Нам нужно доказать, что тогда он нулевой и на $S(\mathbb{R}^m)$. Тогда мы докажем, что ядро этого отображение является нулевым.

Для этого мы берём последовательность функций по лемме

$$\forall\ \varphi\in S(\mathbb{R}^m)\ \ \exists\ \varphi_n\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)\colon \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi \text{ в } S(\mathbb{R}^m).$$

Следовательно, $\forall\ \varphi\in S(\mathbb{R}^m)\ \ \langle f,\varphi\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}\langle f,\varphi_n\rangle=0.$ ■

Перечислим те же действия, что определяли для обобщённых функций.

1. Пусть $f\in S'(\mathbb{R}^m)$, обозначим оператор сдвига $\tau_a\varphi(x):=\varphi(x-a)$, и определим двиг для обобщённой функции f:

   $$\forall\ \varphi\in S(\mathbb{R}^m)\ \ \langle\tau_a f,\varphi\rangle:=\langle f,\tau_{-a}\varphi\rangle.$$

   Так как оператор τ_a непрерывный в $S(\mathbb{R}^m)$, то $\tau_a f\in S'(\mathbb{R}^m)$.

   Пусть $\lambda\neq0$, $\rho_\lambda\varphi(x):=\varphi(\lambda x)$. Тогда

   $$\forall\ \varphi\in S(\mathbb{R}^m)\ \ \langle\rho_\lambda f,\varphi\rangle:=|\lambda|^{-m}\langle f,\rho_{\lambda^{-1}}\varphi\rangle.$$

2. Пусть $f\in S'(\mathbb{R}^m)$, $A\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, такой оператор, что $\det A\neq0$. Обозначим $T_A\varphi(x):=\varphi(A\,x)$. Тогда

   $$\forall\ \varphi\in S(\mathbb{R}^m)\ \ \langle T_A f,\varphi\rangle=|\det A|^{-1}\langle f,T_{A^{-1}}\varphi\rangle.$$

3. И дифференцирование. Пусть $f\in S'(\mathbb{R}^m)$. Тогда

   $$\forall\ \varphi\in S(\mathbb{R}^m)\ \ \langle\partial^\alpha f,\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\partial^\alpha\varphi\rangle.$$

19.2 Преобразование Фурье

Определение 19.2. *Пусть $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$. Обозначим $\varkappa=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $y=(y_1,\ldots,y_m)$, $\langle x,y\rangle= =\sum\limits_{k=1}^m x_k y_k$.*

Тогда прямое преобразование Фурье определяется по формуле

$$\hat{f}(x) := \varkappa^m \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{-i\langle x,y\rangle}\, dy.$$

Обратное преобразование Фурье (это не обратный оператор в $\mathcal{L}_1$)

$$\widetilde{f}(x) = \varkappa^m \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{i\langle x,y\rangle}\, dy.$$

$$\mathcal{F}(f) := \hat{f}; \quad \mathcal{F}^{-1}(f) = \widetilde{f}.$$

Пример. $e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} = \prod\limits_{k=1}^{m} e^{-\frac{x_k^2}{2}}$. Давайте найдём преобразование Фурье. Достаточно найти для одномерной функции. Дальше перемножим.

$$\hat{\varepsilon}^{-\frac{x^2}{2}} = \varkappa \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2} - ixy}\, dy = e^{-\frac{x^2}{2}} \varkappa \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y+i\,x)^2}{2}}\, dy.$$

По теореме Коши из комплексного анализа.

$$\hat{\varepsilon}^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} \varkappa \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

И для произведения это тоже будет верно, то есть $e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} = e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$.

Лемма 19.2. *Оператор $\mathcal{F}\colon S(\mathbb{R}^m) \to S(\mathbb{R}^m)$ непрерывный и биективный.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$. Тогда

$$\partial^\alpha \hat{\varphi}(x) = \varkappa^m \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)(-i\,y)^\alpha e^{-i\langle x,y\rangle}\, dy.$$

А теперь наоборот. В данном случае нужно интегрировать по частям. (поправить знак крышки)

$$\partial^{\hat{\alpha}} \varphi(x) = \varkappa^m (i\,x) \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)\, e^{-i\,\langle x,y\rangle}\, dy.$$

Совместим эти формулы, получим

$$x^\beta \partial^\alpha \hat{\varphi}(x) = (-i)^{|\alpha+\beta|} \mathcal{F}\Big(\partial^\beta\big(y^\alpha \varphi(y)\big)\Big).$$

Из этой формулы мы сделаем оценочку.

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \left|x^\beta \partial^\alpha \hat{\varphi}(x)\right| \leqslant \varkappa^m \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left|\partial^\beta\big(y^\alpha \varphi(y)\big)\right| dy \leqslant (\varkappa\,\pi)^m \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left|\big(1 + \|y\|^2\big)^m\right| \left|\partial^\beta\big(y^\alpha \varphi(y)\big)\right|.$$

Для оценки я использую такой инеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dx_k}{1+x_k^2} = \pi$ для $k = 1, 2\ldots$, а $|x_k|^2 \leqslant \|x\|^2$.

Отсюда получаем, что $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^m)$ и если $\varphi \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ в $S(\mathbb{R}^m$, то $\hat{\varphi}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{\varphi}$ в $S(\mathbb{R}^m)$. А это означает, что оператор преобразования Фурье действует из $S(\mathbb{R}^m)$ в $S(\mathbb{R}^m)$ и то, что он непрерывный.

Осталось доказать биекцию. Это — самая трудная часть доказательства. Докажем, что $\widetilde{\hat{\varphi}} = \varphi(x)$ и $\hat{\widetilde{\varphi}} = \varphi(x)$, то есть $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = I$. Докажем первую, вторая доказывается аналогично. Это такое не очень приятное занятие.

$$\widetilde{\hat{\varphi}} = \varkappa^m \int\limits_{\mathbb{R}^m} \hat{\varphi}(y)\, e^{i\langle x,y\rangle}\, dy = \varkappa^m \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \hat{\varphi}(y) e^{i\langle x,y\rangle - \varepsilon^2 \frac{\|y\|^2}{2}}\, dy.$$

Поскольку $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^m)$, то $\hat{\varphi}$ убывает быстро и интеграл существует, можно оценить подынтегральное выражение, значит, можно перейти к пределу под знаком интеграла. Далее

$$\widetilde{\widehat{\varphi}} = \varkappa^{2m} \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle z-x,y\rangle - \varepsilon^2 \frac{\|y\|^2}{2}}\, dy\, dz =$$

делаем замену переменных

$$= \varkappa^{2\,m} \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-i\left\langle \frac{z-x}{\varepsilon}, y\right\rangle - \frac{\|y\|^2}{2}}\, dy\, dz =$$

Делаем преобразование Фурье, одна $\varkappa$ пропадёт

$$= \varkappa^m \lim_{e\to+0} \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(z) e^{-\frac{\left\|\frac{z-x}{\varepsilon}\right\|^2}{2}}\, dz = \varkappa^m \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x+\varepsilon\, z) e^{-\frac{\|z\|^2}{2}}\, dz = \varphi(x).$$

■ Теперь можем определить преобразование Фурье для обобщённых функций медленного роста.

Определение 19.3. *Пусть $f \in S'(\mathbb{R}^m)$. Мы определяем функционал*

$$\forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}^m) \quad \langle \hat{f}, \varphi\rangle := \langle f, \widetilde{\varphi}\rangle; \quad \langle \widetilde{f}, \varphi\rangle := \langle f, \hat{\varphi}\rangle.$$

То есть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}\colon S(\mathbb{R}^m) \to S(\mathbb{R}^m)$ непрерывные и $\hat{f}, \widetilde{f} \in S'(\mathbb{R}^m)$.

Будем обозначать $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) = \widetilde{f}$ прямое и обратное преобразования Фурье в $S'(\mathbb{R}^m)$.

Теорема 19.2. *$\mathcal{F}\colon S'(\mathbb{R}^m) \to S'(\mathbb{R}^m)$ является линейным непрерывным и биективным оператором.*

Ну и соответственно $\mathcal{F}^{-1}$ будет тоже линейным непрерывным и биективным.

Доказательство. Линейность очевидная по определени. Нужно проверить его непрерывность. Если $f_n \in S'(\mathbb{R}^m)$ и $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ в $S'(\mathbb{R}^m)$, то $\langle f_n, \hat{\varphi}\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle f, \hat{\varphi}\rangle$. Следовательно, $\mathcal{F}$ непрерывный.

Теперь проверим биектривность. Она вытекает из таких формул

$$\langle \widetilde{\hat{f}}, \varphi\rangle = \langle f, \hat{\widetilde{\varphi}}\rangle = \langle f, \varphi\rangle; \quad \langle \hat{\widetilde{f}}, \varphi\rangle = \langle f, \widetilde{\hat{\varphi}}\rangle = \langle f, \varphi\rangle.$$

Значит, это биективный оператор и теорема доказана. ■

Приведём некоторые формулы для преобразования Фурье и примерчик рассмотрим.

Утверждение 19.4. *Формула сдвига (на самом деле будут две формулы). Если $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ и $\tau_a\varphi(x) = \varphi(x-a)$, то*

$$\mathcal{F}(\tau_a f) = e^{-i\langle a,x\rangle}\mathcal{F}f; \quad \tau_a(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}\left(e^{i\langle a,y\rangle} f(y)\right).$$

Доказательство. Если $f = \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, эти формулы легко проверяются по определению преобразования Фурье.

Зная, что эти формулы справедливы для функций из $S(\mathbb{R}^n)$, докажем для обобщённых.

$$\big\langle \mathcal{F}(\tau_a f), \varphi\big\rangle = \big\langle f, \tau_{-a}\mathcal{F}(\varphi)\big\rangle = \Big\langle f, \mathcal{F}\big(e^{-i\,\langle a,y\rangle}\varphi(y)\big)\Big\rangle = \big\langle e^{-i\,\langle a,y\rangle}\mathcal{F}(f), \varphi\big\rangle.$$

■

Утверждение 19.5. *Формула замены переменных. Пусть $f \in S'(\mathbb{R}^m)$, $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m\colon \det A \neq 0$, $\tau_A\varphi(x) = \varphi(A\,x)$. Будем обозначать через A' сопряжённый оператор (с транспонированной матрицей). Тогда*

$$\mathcal{F}(T_A f) = |\det A'|^{-1} T_{A^{-1}} f, \quad T_A(f) = |\det A'|^{-1}\mathcal{F}(T_{A^{-1}} f).$$

Доказывается так же. Сначала проверяется для $f = \varphi \in S(\mathbb{R}^m)$, потом из этого для обобщённых.

Утверждение 19.6. *Формула дифференцирования. Пусть $f \in S'(\mathbb{R}^m)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$. Тогда*

$$\partial^a(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}\big((-i\,y)^\alpha f(y)\big), \quad \mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (i\,x)^\alpha \mathcal{F}f.$$

Опять же техника уже разроботана. Используем только определение, доказываем для $f = \varphi \in S(\mathbb{R}^m)$. Потом перетаскиваем на обобщённые.

Рассмотрим пример. Посчитаем преобразование Фурье для производной от δ-функции. Пусть $f(x) = \partial^\alpha\delta(x-a)$.

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\big\langle \delta(x-a), \partial^\alpha\mathcal{F}(\varphi)\big\rangle = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\mathcal{F}\varphi(a) =$$

запишем формулу для преобразования Фурье и производные сразу напишем

$$= (-1)^{|\alpha|}\varkappa^m \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)(-i\,y)^\alpha\, e^{-i\langle a,y\rangle}\, dy.$$

Значит,
$$\mathcal{F}\big(\partial^\alpha\delta(x-a)\big) = \varkappa^m (i\,y)^\alpha e^{-i\langle a,y\rangle}; \quad \mathcal{F}^{-1}\left(y^\alpha e^{-i\langle a,y\rangle}\right) = \varkappa^{-m}(-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta(x-a).$$

20 Преобразование Фурье в пространствах Лебега первого и второго порядков

Я напомню, что $x = (x_1,\ldots,x_m)$, $y = (y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m$, $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{k=1}^m x_k\,y_k$. Для $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$ преобразование Фурье
$$\hat{f}(x) := \varkappa^m \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y)\,e^{-\langle x,y\rangle}\,dy = \mathcal{F}(f); \qquad \widetilde{f}(x) := \varkappa^m \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y)\,e^{\langle x,y\rangle}\,dy = \mathcal{F}^{-1}(f).$$
Обычно $\varkappa = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Тогда $\widetilde{f}(x) = \hat{f}(-x)$.

Лемма 20.1 (Римана—Лебега)**.** *Если $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$, то*

(1) $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^m)$*;*

(2) $\|\hat{f}\|_C := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^m} \big|\hat{f}(x)\big| \leqslant \varkappa^m \|f\|_{\mathcal{L}_1}$*;*

(3) $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \hat{f}(x) = 0$.

Здесь норма обычная $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^m x_k^2}$.

Доказательство. Первое свойство
$$\big|\hat{f}(x-a) - \hat{f}(x)\big| = \big|\tau_a\hat{f}(x) - \hat{f}(x)\big| = \varkappa^m \left|\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y)\big(e^{-\langle x-a,y\rangle} - e^{-i\langle x,y\rangle}\,dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa^m \int\limits_{\mathbb{R}^m} \big|f(y)\big|\big|e^{-i\langle x,y\rangle} - 1\big|\,dy = \varkappa^m \int\limits_{\mathbb{R}^m} \big|f(y)\big| 2 \left|\sin\frac{\langle a,y\rangle}{2}\right|\,dy \xrightarrow{a\to 0} 0.$$
Значит, f равномерно непрерывна.

Второе
$$\|\hat{f}\|_C \leqslant \varkappa^m \int\limits_{\mathbb{R}^m} \big|f(y)\big| dy = \varkappa^m \|f\|_{\mathcal{L}_1}.$$

Третье посложнее. Положим $a := \frac{\pi\,x}{\langle x,x\rangle}$ для $x \neq 0$. Тогда $\tau_a\hat{f} = -\hat{f}$. Следовательно
$$\big|\hat{f}(x)\big| = \frac{1}{2}\big|\hat{f}(x) - \tau_a\hat{f}(x)\big| = \frac{\varkappa^m}{2}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^m} \big(f(y) - \tau_a(t)\big)e^{-i\langle x,y\rangle}\,dy\right| \leqslant \frac{\varkappa^m}{2}\|f - \tau_a f\|_{\mathcal{L}_1} \leqslant$$
Теперь применяем применяем неравенство треугольника для нормы
$$\leqslant \frac{\varkappa^m}{2}\big(\|f-g\|_{\mathcal{L}_1} + \|g - \tau_a g\|_{\mathcal{L}_1} + \|\tau_a g - \tau_a f\|_{\mathcal{L}_1}.$$
Функцию g выбираем так, чтобы $\|f-g\|_{\mathcal{L}_1} < \frac{2\,\varepsilon}{2\varkappa m}$, где $\varepsilon > 0$ и $g \in C_0(\mathbb{R}^m)$ (непрерывная функция с компактным носителем). Если сдвинем, получим то же неравенство
$$\|\tau_a f - \tau_a g\|_{\mathcal{L}_1} < \frac{2\,\varepsilon}{3\varkappa m}.$$
В силу непрерывности на компактном носителе, g равномерно непрерывна. Существует $\delta > 0$: $\|a\| < \delta \Rightarrow \|g - \tau_a g\|_{\mathcal{L}_1} < \frac{2\,\varepsilon}{3\varkappa m}$ (по норме в C это верно, по норме в $\mathcal{L}_1$ тем более).

Тогда для $\|a\| < \varepsilon$ имеем $\big|\hat{f}(x)\big| < \varepsilon$. А $\|a\| = \frac{\pi}{\|x\|} < \delta$. Значит, $\|x\| > \frac{\pi}{\delta}$. То есть предел в есконечности равен нулю. ■

Докажем теперь условие Дини, но в одномерном случае. В отличие от преобразования Фурье обобщённой функции, функция может получиться не из $\mathcal{L}_1$. Но можно на исходную функцию наложить ограничение.

Теорема 20.1 (условие обращения Дини)**.** *Пусть $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ и при некотором $\delta > 0$ и некотором x имеем $\int\limits_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t)-f(x)}{t} < \right| \infty$. Тогда утверждается, что*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \hat{f}(y) e^{-i\,x\,y}\, dy = f(x).$$

Доказательство. Запишем интеграл и применим теорему Фубини

$$\varkappa \int\limits_{-n}^{n} \hat{f}(y)\, e^{-i\,x\,y}\, dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(z) \left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-i\,(x-z)\,y}\, dy \right) dz = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(z) \frac{\sin n(x-z)}{(x-z)}\, dz.$$

Представим подынтегральную функцию через экспоненту по формуле Эйлера и используем, что $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin nt}{t}\, dt = \pi$.

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(z) \frac{\sin n(x-z)}{(x-z)}\, dz - f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t)-f(x)}{t} \sin nt\, dt =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\leqslant\delta} \frac{f(x-t)-f(x)}{t} \sin nt\, dt}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \text{ (интегрируема)}} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|>\delta} \frac{f(x-t)}{t} \sin nt\, dt}_{\to 0 \ (20.1)} + \underbrace{\int\limits_{|t|>\delta n} f(x) \frac{\sin nt}{t}\, dt}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}.$$

■

Утверждение 20.1 (Формула умножения)**.** *Пусть $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$. Тогда $\int\limits_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(x) g(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x)\, dx$.*

Доказательство. $\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{-i\langle x,y\rangle}\, dy \right) g(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} g(x) e^{-i\langle x,y\rangle}\, dx \right) dy.$ ■

Утверждение 20.2 (Формула обращения)**.** *Пусть $f, \hat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$. Тогда*

$$\widetilde{\hat{f}}(x) = \hat{\tilde{f}}(x) = f(x) \ \text{п. в.} x \in \mathbb{R}^m$$

Доказательство. Имеем

$$\forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}^m) \quad \int\limits_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\hat{f}}(x) \varphi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) \widetilde{\hat{\varphi}}(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Значит, $\widetilde{\hat{f}}(x) - f(x) = 0$ почти всюду. ■

Утверждение 20.3 (Формулы дифференцирования)**.** *Пусть $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$, $x^\alpha f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$. Тогда $\partial^\alpha \hat{f}(x) = (-i\,\hat{y})^\alpha f(y)$.*

Если $f \in W_1^k(\mathbb{R}^m)$, то $\forall\ |\alpha| \leqslant k,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^m \quad \hat{\partial^\alpha} f(x) = (ix)^\alpha \hat{f}(x)$.

Раз мы уже показали, что данное преобразование совпадает с обобщённым, то всё уже доказано. Просто равенства выполнены почти всюду, но для элементов из $\mathcal{L}_1$ это неважно.

Утверждение 20.4. *Формула свёртки. Пусть $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$. Тогда*

$$f \star g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y) g(x-y)\, dy \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m); \quad f \hat{\star} g(x) = \varkappa^{-m} \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x).$$

Доказательство. Рассмотрим невырожденное линейное преобразование (ведь существует обратное) $(x, y) \to (y, x-y) \colon \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$. Так как преобразование линейно, оно переводит измеримые в измеримые. Так как $f(x) \cdot g(y)$ измерима, то $f(y)g(x-y)$ тоже измерима в $\mathbb{R}^{2m}$. Более того, $f(y)g(x-y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{2m})$. И выполняются неравенства

$$\|f \star g\|_{\mathcal{L}_1} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} \big| f(y) g(x-y) \big|\, dy \right) = \|f\|_{\mathcal{L}_1} \|g\|_{\mathcal{L}_1}.$$

Кроме того

$$\varkappa^m \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(z)g(y-z)\,dz \right) e^{-i\langle x,y\rangle}\,dy =$$

$$= \varkappa^m \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(z) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} g(y-z)\,e^{-i\langle x,y-z\rangle}\,dy \right) e^{-i\langle x,y\rangle}\,dz = \{y \to y-z\} = \varkappa^{-m}\hat{f}(x)\hat{g}(x).$$

■

20.1 Преобразование Фурье в $\mathcal{L}_2$

Определение 20.1. *Обозначим* $\Delta_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} |x_k| < n \right\}$. *Пусть* $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$. *Тогда определим преобразование Фурье*

$$\hat{f}(x) := \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Delta_n} f(y) e^{-i\langle x,y\rangle}\,dy.$$

Здесь предел берётся в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$.

Как и в признаке Дини приходится брать предел. Обозначим $f_n(x) = f(x)\chi_{\Delta_n}(x)$. Тогда $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда считаем по определению $\widetilde{f}(x) := \hat{f}(-x)$.

Докажем, что предел существует и оператор сохраняет норму.

Теорема 20.2 (Планшереля)**.** *Если* $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$, *то* $\exists\ \hat{f} = \lim n \to \infty f_n$ *в* $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$ *и* $\|\hat{f}\|_{\mathcal{L}_2} = \|f\|_{\mathcal{L}_2}$.

Доказательство. Легко проверить, что если возьмём функцию $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$, то

$$\|\varphi\|^2_{\mathcal{L}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\overline{\varphi(x)}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\hat{\varphi}}(x)\overline{\varphi(x)}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \hat{\varphi}(x)\overline{\hat{\varphi}(x)}\,dx = \|\hat{\varphi}\|^2_{\mathcal{L}_2}.$$

Таким образом для функций из S мы доказали.

Пусть $f(x) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и $f(x) = 0$ для всех $x \in \Delta_r$. Тогда $\exists\, \varphi_n \in \mathcal{D}(\Delta_r)\colon \|f - \varphi_n\|_{\mathcal{L}_2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Мы это доказывали для $\mathcal{L}_p$. Значит, $\{\varphi_n\}$ — последовательность Коши в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Следовательно и $\{\hat{\varphi}_n\}$ — последовательность Коши в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Сходятся в $\mathcal{L}_2$, значит, сходятся в $\mathcal{L}_1$, а $\varphi_n, f \in \mathcal{L}_1(\Delta_r)$ и $\hat{\varphi}_n \overset{P}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} \hat{f}$. Значит, $\hat{\varphi}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{f}$ в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Значит,

$$\|f\|_{\mathcal{L}_2} = \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{\mathcal{L}_2} = \lim_{n\to\infty} \|\hat{\varphi}_n\| = \|\hat{f}\|_{\mathcal{L}_2}.$$

Докажем теперь в общем случае. Пусть $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Тогда $f_n = f \cdot \chi_{\Delta_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Значит, $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $\mathcal{L}_2$. Отсюда и преобразование Фурье тоже является последовательностью Коши в силу последнего выключного равенства. Отсюда существует предел в $\mathcal{L}_2$, то есть$\exists\ \hat{f} = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}_n$ в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$. И осталось написать равенство норм. ■

Давайте сформулируем теперь свойства преобразования Фурье для функций из $\mathcal{L}_2$.

Утверждение 20.5. *Формула умножения.* $f, g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(x)g(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\hat{g}(x)\,dx.$$

Эта формула получается из теоремы Планшереля и непрерывности скалярного произведения.

Утверждение 20.6. *Формула обращения. Если* $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$, *то* $\widetilde{\hat{f}}(x) = \hat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ *почти всюду на* $\mathbb{R}^m$.

Доказывается так же, как и в $\mathcal{L}_1$.

Утверждение 20.7. *Формула свёртки. Пусть* $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$, $g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$. *Тогда*

$$f \star g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m), \quad f \mathbin{\hat{\star}} g(x) = \varkappa^{-m}\hat{f}(x)\hat{g}(x) \text{ почти всюду на } \mathbb{R}^m.$$

Доказательство. Интегрируемость в квадрате вытекает и обобщённого неравенства Миньковского

$$\|f \star g\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant \|f\|\mathcal{L}_1 \cdot \|g\|_{\mathcal{L}_2}.$$

Применя теорему Плашереля, переходя к пределу, получаем формулу. ■

20.2 Функции Эрмита

Это вот такие функции $h_n(x) := c_n e^{\frac{x^2}{2}} \left((\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}$. Здесь c_n константа. Если произвести дифференцирование

$$h_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad H_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$H_n(x)$ называются многочленами Эрмита.

Утверждение 20.8. $\{h_n(x)\}$ *ортогональны.*

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} h_n(x) h_m(x)\, dx = c_n \int\limits_{\mathbb{R}} H_n(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^m e^{-x^2}\, dx = c_n(-1)^m \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^m H_n(x)\, dx = 0,\ m > n.$$

Для $n = m$ это равно $c_n^2 2^n n! \sqrt{\pi}$, так как $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. ■ Значит, для ортонормированной системы берём $c_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$.

Лемма 20.2. *Пусть $a, b > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, функция φ измерима и удовлетворяет неравенству $0 < \left|\varphi(x)\right| \leqslant b e^{-a|x|}$. Тогда система функций $\varphi_n(x) = x^n \varphi(x)$ при $n \in \mathbb{Z}_+$ полна в $\mathcal{L}_2$.*

Доказательство. Мы из прошлого семестра знаем критерий полноты. Мы им и воспользуемся. Пусть $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ и $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ \quad f \perp \varphi_n$, то есть

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ \quad \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x)\, dx = 0.$$

Рассмотрим функцию комплексного переменного $F(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) e^{-i\,t\,z}\, dt$, где $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$: $|y| < a$. Можно дифференцировать под знаком интеграла, значит, функция получится голоморфной в $|\operatorname{Im} z| < a$. Заметим, что производные в нуле равны нулю, то есть

$$F^{(n)}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)(-i\,t)^n \varphi(t)\, dt = 0$$

в силу условия ортогональности. Значит, по теореме об аналитическом продолжении функция будет тождественным нулём в полосе $|\operatorname{Im} z| < a$. В частности, она будет равна нулю для всех $x \in \mathbb{R}$. А тогда это с точностью до константы преобразование Фурье ноль, но сущесвует обратное. И обратное обязано быть нулём почти всюду. Значит, $f(t)\varphi(t) = 0$ почти всюду. Отсюда $f(t) = 0$ почти всюду. ■

Теорема 20.3. *Функции Эрмита $\{h_n\}$ образуют полную ортонормированную систему, такую, что $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ \quad \hat{h}_n(x) = (-i)^n h_n(x)$. То есть они являются собственными функциями функциями преобразования Фурье и образуют полную ортонормированную систему.*

Доказательство. $\{h_n\}$ является ортогонализацией Грама—Шмидта системы $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$. Осталось доказать, что функции Эрмита являются собственными.

$$\hat{h}_n(x) = \varkappa \int\limits_{\mathbb{R}} h_n(y) e^{-i\,x\,y}\, dy = \varkappa c_n \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\frac{y^2}{2} - i\,x\,y} \left(\frac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2}\, dy =$$

$$= \varkappa c_n e^{\frac{x^2}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\frac{(y-i\,x)^2}{2}} \left(\frac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2}\, dy = \varkappa c_n (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \left(\frac{d}{dy}\right)^n e^{\frac{(y-i\,x)^2}{2}}\, dy =$$

$$= \varkappa c_n (-i)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2} - i\,x\,y - \frac{x^2}{2}}\, dy = \text{Мы доказывали, что } \widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= c_n (-i)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x} = (-i)^n h_n(x).$$

■