1 Измеримые множества

Далее мы через $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \sqcup \{\infty\}$ будем обозначать множество неотрицательных чисел и добавленный символ бесконечности, при этом будут выполнены следующие аксиомы: $\forall\ a \in \mathbb{R}_+ \quad a + \infty = \infty$, $a \cdot \infty = \infty$ $(a \neq 0)$, $0 \cdot \infty = 0$ и $a < \infty$, $\infty \leqslant \infty$.

Какая-то из этих аксиом понадобится, только когда будем рассматривать интеграл Лебега.

Определение 1.1. *$\mu\colon 2^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется внешней мерой, если*

(1) Мера пустого множества равна нулю $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) $\mu A \leqslant \mu B$, если $A \subset B$,

(3) $\mu A \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, если $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$.

Определение 1.2. *Множество $E \subset X$ называется измеримым (относительно внешней меры μ), если*

$$\mu A = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall\ A \subset X.$$

В силу свойства 3 полуаддитивности внешней меры, достаточно доказывать только неравенство

$$\mu A \geqslant \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall\ A \subset X,$$

чтобы показать измеримость множества.

Давайте введём ещё одно обозначение $AB := A \cap B$, $A' := X \setminus A$, $\mu_A(B) := \mu(AB)$.

Тогда легко понять, что E измеримо, если и только если $\forall\ A \subset X \quad \mu_A(X) = \mu_A(E) + \mu_A(E')$.

Давайте ещё через Σ будем обозначать совокупность всех измеримых множеств относительно внешней меры μ.

1.1 Некоторые свойства измеримых множеств

Утверждение 1.1. *Если $\mu E = 0$, то $E \in \Sigma$.*

Доказательство. Это вытекает из того, что $\mu_A(E) = 0$ из монотонности меры $\forall\ A$, и тоже в силу монотонности $\mu_A(X) \geqslant \mu_A(E) + \mu_A(E')$. А мы уже знаем, что этого неравенства достаточно. ∎

Утверждение 1.2. *Если $E_1, E_2 \in \Sigma$, то $E = E_1E_2 \in \Sigma$.*

Доказательство. Для доказательства запишем следующие равенства:

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1')$$

в силу измеримости E_1. А в силу измеримости E_2 можем записать такое неравенство

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1') = \mu_{AE_1}(E_2) + \mu_{AE_2}(E_2') + \mu_A(E_1') = \mu_A(E) + \underbrace{\mu_A(E_1E')}_{E_2' \subset E'} + \underbrace{\mu_A(E_1'E')}_{E_1' \subset E'} = \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

∎

Утверждение 1.3. *Если $E \in \Sigma$, то $E' \in \Sigma$.*

Доказательство. Это вытекает из того, что второе дополнение $E'' = E$ есть само множество. И отсюда $\mu_A(X) = \mu_A(E') + \mu_A(E'')$. ∎

Утверждение 1.4. *Если $E_1, E_2 \in \Sigma$, то и разность $E_1 \setminus E_2$, $E_1 \cup E_2 \in \Sigma$.*

Доказательство. Это вытекает из таких простых равенств: $E_1 \setminus E_2 = E_1E_2'$, $E_1 \cup E_2 = (E_1'E_2')'$. ∎

Таким образом система измеримых множест является алгеброй. Очевидно же из определения вытекает, что $\varnothing, X \in \Sigma$.

Утверждение 1.5. *Функция $\mu_A\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ является конечно аддитивной мерой на алгебре*[1]

Доказательство. Пусть $E = E_1 \sqcup E_2, E_1, E_2 \in \Sigma$. Тогда в силу измеримости

$$\mu_A(E) = \mu_{AE}(E_1) + \mu_{AE}(E_1') = \mu_A(\underbrace{EE_1}_{E_1}) + \mu_A(\underbrace{EE_1'}_{E_2}) = \mu_A(E) + \mu_A(E_2)$$

∎

Ну и основная теорема.

Теорема 1.1 (Каратеодори)**.** *Пусть $\mu\colon 2^X \to \overline{R}_+$ внешняя мера. Тогда*

(1) Σ — σ-алгебра;

(2) $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — σ-аддитивная мера.

[1] Потом мы докажем и σ-аддитивность.

Доказательство. Пусть $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \in \Sigma$. Обозначим $F_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, $F_n \in \Sigma$.

Для любого $A \subset X$

$$\mu_A(X) = \mu_A(F_n) + \mu_A(F_n') \geqslant \sum_{k=1}^{N} \mu_A(E_k) + \mu_A(E').$$

Устремляем $n \to \infty$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E') \geqslant \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

Получаем $\mu(E) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$, $E \in \Sigma$, $\mu_A(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E')$. ■

Пусть $m\colon S \to \mathbb{R}_+$, $S \subset 2^X$ — полукольцо, и мера m σ-аддитивна. Будем также полагать, что она σ-конечна, то есть X представимо в виде

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in S.$$

У нас мера конечно, поэтому этого будет достаточно.

Определение 1.3. *Мера заданная на совокупности всех подмножеств $m^*\colon 2^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется внешней мерой Лебега, если*

$$m^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Инфинум по всем счётным покрытиям.

Сейчас мы докажем, что внешняя мера Лебега является внешней мерой.

Доказательство. Обозначение (X, Σ, ν) — измеримое пространство где Σ — σ-алгебра измеримых множеств $\mu = m^*$, $\nu := \mu\big|_{\Sigma}$.

(1) $m^*(\varnothing) = 0$ очевидно;

(2) $m^*(A) \leqslant m^*(B)$, если $A \subset B$ тоже;

(3) $M^*(A) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$, если $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_n$.

Докажем третье: если $\exists\, n\colon m^*(A_n) = \infty$, то утверждение верно.

Пусть $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad m^*(A_n) < \infty$.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, B_{nk} \in S\colon A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} (B_{nk}) < m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Отсюда вытекает, что A содержится в двойном объединении

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \quad m^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m(B_{nk}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon.$$

■

Ещё одно свойство запишем и сделаем перерыв.

Утверждение 1.6. *Если $A \in S$, то $m^*(A) = m(A)$*

Доказательство. Это вытекает из такого неравенства:

$$m^*(A) \leqslant m(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),$$

если $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in S$. ■

Теорема 1.2 (о продолжении меры)**.** *Пусть $m\colon S \to \mathbb{R}_+$ — σ-аддитивная мера. Тогда*

(1) Внешняя мера $\mu := m^*\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ σ-аддитивная;

(2) Σ является σ-алгеброй;

(3) $S \subset \Sigma$;

(4) $\mu\big|_S = m$.

Доказательство. Всё, кроме свойства три, доказано в теореме Коритоадори. Докажем 3. Пусть у нас $E \in S$, $A \subset X$ — произвольно множество, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\ B_n \in S \colon A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Ну теперь применим свойство полуаддитивности и запишем следующее равенство (воспользуемся полуаддитивностью внешней меры)

$$m^*(A) \leqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \big(\underbrace{m(B_n \cap E) + m(B_n \setminus E)}_{m(B_n)} \big) = \sum_{n=1}^{\infty} \leqslant m^*(A) + \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, тут везде знаки равенства и $E \in \Sigma$. ■

Следствие 1.1. *Полукольцо содержится в наименьшем кольце, которое содержится в наименьшем σ-кольце, которое содержится в наименьшей σ-алгебре, содержащейся в Σ, то есть*

$$S \subset \mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}_\sigma(S) \subset \mathcal{A}_\sigma(S) \subset \Sigma.$$

Теорема 1.3 (о единственности продолжения меры)**.** *Пусть $m \colon S \to \mathbb{R}_+$ σ-аддитивная и σ-конечная мера. Тогда $\exists!$ σ-аддитивная мера, которая продолжает меру m на σ-алгебру.*

Доказательство. Докажем для случая $\mu(X) < \infty$ (иначе разобьём множество на измеримые). Пусть имеются два продолжения $\mu \colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\mu \colon \Sigma\overline{\mathbb{R}}_+$, где $\mu = m^*$. Тогда $\forall\ E \in \Sigma\ \ \nu E \leqslant \mu(E)$, ведь на S $\mu\big|_S = \nu\big|_S = m$. Осталось заметить, что в силу аддитивности этмх мер

$$\nu(E) + \nu(E') = m(X) = \mu(E) + \mu(E').$$

Отсюда видим, что $\nu(E) = \mu(E)$. ■

Лемма 1.1 (об измеримой оболочке)**.** *Пусть $\mu = m^*$ — внешняя мера Лебега. Тогда $\forall\ A \subset X\ \ \exists\ B \in \Sigma \colon A \subset B$ и $\mu(A) = \mu(B)$.*

Доказательство. $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ \exists\ B_{nk} \in S \colon A \subset B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ и $\mu(B_n) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_{nk}) < \mu(A) + \frac{1}{n}$ по определению нижней грани, которая присутствует в определении внешней меры Лебега.

Обозначим $B := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \Sigma$, $A \subset B$. Имеем

$$\mu(B) \leqslant \mu(B_n) \leqslant \mu(A) + \frac{1}{n}.$$

Ну и поскольку n произвольно, то получается равенство. ■

Определение 1.4. *Пусть $\mu = m^*$ и $\mu(X) < \infty$. Множество $E \subset X$ называется измеримым по Лебегу, если $\mu(X) = \mu(E) + \mu(E')$.*

Ясно, что если множество измеримо, то оно измеримо по Лебегу. Докажем обратное.

Доказательство. Пусть E измеримо по Лебегу. Тогда существует по лемме об измеримой оболочке

$$\exists\ A, B \in \Sigma \colon E \subset A,\ E' \subset B,\ \mu(E) = \mu(A),\ \mu(A') = \mu(B).$$

Отсюда вытекает, что $A \cup B = X$ и $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cup B)$ в силу аддитивности (ну надо на картинку посмотреть, ведь множества A и B измеримы). Это всё равно

$$\mu(A \cap B) = \mu(E) + \mu(E') - \mu(X) = 0.$$

Ну а множество меры нуль измеримо, то есть $A \cap B \in \Sigma$. Так как $A \setminus E \subset A \cap B$, $\mu(A \setminus E) = 0$ и разность тоже измерима. Пожтому множество E можно записать как

$$E = A \setminus (A \setminus E) \in \Sigma.$$

■

Значит эти определения конечной меры эквивалентны.

Теорема 1.4 (критерий измеримости Ваме—Гуссейна)**.** *Пусть $\mu = m^*$ и $\mu(X) < \infty$. Тогда*

$$E \in \Sigma \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ B \in \mathcal{R}(S) \colon \mu(E \vartriangle B) < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $E \in \Sigma$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\ A_k \in S \colon E \subset A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и по определению нижней грани

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leqslant \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Существует n, для которого $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} m(A_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $B_n := \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Тогда

$$\mu(E \vartriangle B_n) \leqslant \mu(E \setminus B_n) + \mu(B_n \setminus E) \leqslant \mu(A \setminus B_n) + \underbrace{\mu(A \setminus E)}_{B_n \subset A} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} m(A_k) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть $E \subset B \cup (E \vartriangle B)$. Из этого вытекает

$$\bigl|\mu(E) - \mu(B)\bigr| \leqslant \mu(E \vartriangle B) < \varepsilon, \qquad \bigl|\mu(E') - \mu(B')\bigr| \leqslant \mu(E' \vartriangle B') = \mu(E \vartriangle B) < \varepsilon.$$

Если это сложить, получится неравенство

$$\mu(X) = \mu(B) + \mu(B'), \qquad \bigl|\mu(E) + \mu(E') - \mu(X)\bigr| < 2\varepsilon.$$

Значит, $E \in \Sigma$. ∎

Помните меру Стилтьеса? Сейчас определим меру Лебега—Стилтьеса

Определение 1.5. *Пусть есть полукольцо интервалов $S = \bigl\{[a, b)\bigm| a, b \in \Sigma, a \leqslant b\bigr\}$, есть $\alpha(x) \uparrow$ (неубывает) и $\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \alpha(x-0) = \alpha(x)$. Положим $m_\alpha\bigl([a,b)\bigr) := \alpha(b) - \alpha(a)$. Это σ-аддитивная мера. Пусть $m = \mu_a^*$ и Σ_α — σ-алгебра измеримых множеств. Тогда $\mu\colon \Sigma_\alpha \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется мерой Лебега—Стилтьеса.*

Если $\alpha(x) = x$, мера называется мерой Лебега.

Приведём пример неизмеримого по Лебегу множества $E \subset [0,1]$. Введём отношение эквивалентности: $\forall\ x, y \in [0,1] \quad x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Множество $[0,1]$ разбивается на несчётное число классов эквивалентности $[0,1] = \bigsqcup\limits_{i \in I} C_i$, где при $i \neq j \quad C_i \cap C_j = \varnothing$. Пусть $E = \bigl\{x_i\bigr\}_{i \in I}$, где $x_i \in C_i$. Пусть $\bigl\{e_n\bigr\}_{n=1}^{\infty} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Тогда определим сдвиг на рациональное число $E_n = E + r_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Если $E \in \Sigma$, то $E_n \in \Sigma$ (это уже не обязательно подмножество $[0,1]$) и $\mu(E) = \mu(E_n)$. Для $n \neq m \quad E_n \cap E_m = \varnothing$. Видим, что $[0,1] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, а с другой стороны $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subset [-1, 2]$. Можем применить неравенсто для измеримых множеств

$$1 = \mu\bigl([0,1]\bigr) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leqslant \mu\bigl([-1,2]\bigr) = 3.$$

Если $\mu(E) \neq 0$, получаем бесконечную расходящуюся сумму, а если $\mu(E) = 0$, то противоречие с первым неравенством.

2 Измеримые функции

Всюду на этой лекции тройка (X, Σ, μ) будет обозначать измеримое пространство. Мы сейчас будем использовать только следующие свойства измеримого пространства.

(1) Σ — $sigma$-алгебра с единицей X;

(2) $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — σ-аддитивная мера;

(3) $\forall\ A \subset B\colon \mu(B) = 0 \quad A \in \Sigma$.

Пусть $E \subset X$.

Определение 2.1. *Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется измеримой, если*

$$\forall\ c \in \mathbb{R} \quad E(f < c) := \bigl\{x \in E \bigm| f(x) < c\bigr\} \in \Sigma.$$

Понятно, что из определения вытекает, что E будет измеримо, как счётное объединение этих множеств. Кроме того

$$E(f \leqslant c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f < c + \frac{1}{n}\right) \in \Sigma; \tag{1}$$

$$E(f \geqslant c) = E \setminus E(f < c) \in \Sigma; \tag{2}$$

$$E(f > c) = E \setminus E(f \leqslant c) \in \Sigma; \tag{3}$$

$$E(a \leqslant f < b) = E(f < b) \setminus E(f < a) \in \Sigma; \tag{4}$$

$$E(a < f < b) = E(f < b) \setminus E(f \leqslant a) \in \Sigma. \tag{5}$$

Таким образом, все промежутки измеримы.

Лемма 2.1. $f\colon E \to \mathbb{R}$ *измерима, если и только если*

$$\forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad f^{-1}(B) \in \Sigma.$$

Доказательство. Необходимость. Положим $S := \left\{A \subset \mathbb{R}\mathcal{B} \middle| f^{-1}(A) \in \Sigma\right\}$. Все интервалы измеримы и лежат в S. S — σ-алгебра, $\mathbb{R} \in S$.

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B), \quad f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) =$$

Таким образом S — σ-алгебра,

Достаточность $E(f < c) = f^{-1}(-\infty, c)$ очевидна. ∎

Покажем связь топологии и измеримости. Введём такое определение.

Определение 2.2. *Пусть μ — регулярна. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, где $E \in \Sigma$, обладает C-свойством, если*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists \text{ компакт } K, \text{ такой, что } \mu(E \setminus K) < \varepsilon, \quad g = f\big|_K \text{ — непрерывная функция.}$$

Теорема 2.1 (Лузина)**.** *Пусть μ — регулярная мера (в прошлый раз давали: для которой X является метрическим пространством и ещё другие свойства есть) и все открытые множества измеримы. Тогда функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ измерима $\Leftrightarrow$ она обладает C-свойством*

Доказательство. Необходимость. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Функция у нас f измерима. Отсюда вытекает, что $E \in \Sigma$. Так как мера регулярна, то $\exists$ такие измеримые $A_0, B_0 \in \Sigma$, такие что A_0 компактно, B_0 открыто, $A_0 \subset E \subset B_0$ и $\mu(B_0 \setminus A_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. (Это всё из регулярности меры.)

Пусть задана система всех интервалов $\{I_n\}$ с рациональными концами на прямой $\mathbb{R}$. Их не более чем счётно, поэтому я их занумеровал натуральными числами. Поэтому также в силу регулярности $\exists\ A_n, B_n \in \Sigma$, такие что A_n компактно, B_n открыто, $A_n \subset f^{-1}(I_n) \subset B_n$, $\mu(B_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Определим $G := \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(B_n \setminus A_n) \in$ — открыто, значит, измеримо, то есть $G \in \Sigma$. И его мера (по σ-аддитивности) $\mu G < \varepsilon$.

Обозначим $K = E \setminus G = A_0 \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(B_n \setminus A_n$. Оно является компактным как разность компактного A_0 и открытого.

Осталось доказать, что органичение на компакт является непрерывной функцией. Пусть $g = f\big|_K$. Тогда прообраз интервала $f^{-1}(I_n) = f^{-1}(I_n) \cap K$. Ну и кроме того легко понять, что пересечение с этим компактом, это всё равно что $g^{-1}(I_n) = B_n \cap K$. При этом B_n открыто, значит, $g^{-1}(I_n)$ открыто в K. Значит, g непрерывна на компакте K.

Вот мы доказали необходимость.

Достаточность. Пусть f обладает C-свойством. Тогда для каждого n существует измеримый компакт $K_n \in \Sigma$, для которого $K_n \subset E$, $\mu(E \setminus K_n) < \frac{1}{n}$, ну и ограничение $g_n\big|_{K_n}$ непрерывно.

Обозначим $F := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E \setminus K_n)$. Значит, функция g_n непрерывна на компакте K_n, поэтому $\forall$ интервала $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ прообраз $g_n^{-1}(I) = f^{-1}(I) \cap K_n$. Существуеют такие открытые множества B_n, дающие в перечении $B_n \cap K_n = g^{-1}(I)$.

$$f^{-1}(I) \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I) \cap K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap K_n$$

Так как B_n и K_n из σ-алгебры, то это всё измеримо. И $\mu(F) = 0$, $\mu \in \Sigma$, значит, и прообраз интегралов будет измеримым $f^{-1}(I) \in \Sigma$. ∎

Следующая лемма нам поможет выяснить алгебраические свойства измеримых функций.

Лемма 2.2. *Пусть у нас функции $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы, а функция h, заданная на открытом множестве $h\colon D \to \mathbb{R}$ непрерывна, причём $D \subset \mathbb{R}^2$ является открытым множеством. Предположим также, что*

$\forall\, x \in E \quad \big(f(x), g(x)\big) \in D$. Тогда можно рассмотреть сложную функцию $F(x) = h\big(f(x), g(x)\big)$, и она окажется измеримой.

Доказательство. Пусть $c \in \mathbb{R}$ рассмотрим $D(h < c)$ — это множество открыто в R^2 в силу непрерывности h. Поэтому всякое открытое множество можно представить в виде объединения открытых прямоугольников не более чем счётного числа

$$D(h < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n, \quad \Pi_n = (a_n, b_n) \times (c_n, d_n).$$

Например, прямоугольники с рациональными вершинами.

Теперь запишем такое множество

$$E\big((f, g) \in \Pi_n\big) = E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n).$$

Поэтому множество $E(F < c) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\big((f, g) \in \Pi_n\big) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n)$. Каждое из этих множеств измеримо, значит, и объединение будет тоже измеримым. Тем самым утверждение леммы доказано. ■

Следствие 2.1. *Если $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы, то $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$, f^p $(p > 0, g \leqslant 0)$ измеримы.*

Следствие 2.2. *Пусть теперь у нас задана последовательность измеримых функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что в каждой точке $\inf\limits_n f_n$, $\sup f_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$ измеримы, если принимают конечные значения.*

Доказательство. Легко проверяются такие формулы

$$E\left(\inf_n f_n < c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n < c); \qquad E\left(\sup_n f_n > c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > c).$$

А для пределов вот такие.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n = \inf_{k\geqslant 1}\left(\sup_{n\geqslant k} f_n\right); \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n = \sup_{k\geqslant 1}\left(\inf_{n\geqslant k} f_n\right).$$

Таким образом все эти множества измеримы. ■

Следствие 2.3. *Пусть $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы и $\forall\, x \in E \quad \exists\, f(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(x)$. Тогда предел f измерим.*

$$f := \overline{\lim}\, f_n = \underline{\lim}\, f_n.$$

Введём такие обозначения. $f_n, f, g\colon E \to \mathbb{R}$

(1) $f_n \to f$, если $\forall\, x \in E \quad \exists\, f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(2) $f_n \nearrow f$, если $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ и $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$

(3) $f_n \searrow f$, если $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ и $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots$

Определение 2.3. *Фнкция $h\colon E \to \mathbb{R}$ называется простой, если $h(E) = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\} \subset \mathbb{R}$.*

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} h_k \chi_{H_k}(x),$$

где $H_k := \big\{x \in E \big| h(x) = h_k\big\}$, $\chi_H(x) = \begin{cases} 1, & x \in H; \\ 0, & x \notin H. \end{cases}$

Теорема 2.2. *$\forall\, f\colon E \to \mathbb{R}_+$ измеримой существует неубывающая последовательность $h_n \nearrow f$ $(n \to \infty)$, h_n — измеримые и простые.*

Теорема 2.3. *Построим по следующей формуле*

$$h_n(x) := \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k-1}{2^n} \chi_{H_k^n}(x) + 2^n \chi_{H^n}(x),$$

где $H_k^n := E\left(\frac{k-1}{2^n} \leqslant f < \frac{k}{2^n}\right)$, $H^n := E(f \geqslant w^n)$, $k = 1, 2, \ldots, k^{2n}$

Покажем, что эта последовательность функций неубывающая. Ясно, что функции простые, что измеримые. Так как у нас $H_K^n = H_{2k-1}^{n+1} \sqcup H_{2k}^{n+1}$, $h_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant h_{n-1}(x)$

Кроме того $\big|f(x) - h_n(x)\big| < \frac{1}{2^n}$, если $x \in E(f < 2^n)$.

Поскольку n убегает в бесконечность. $h_n \nearrow f$. Если f ещё и ограничена, то сходимость будет ещё и равномерной.

Определение 2.4. *$f_n \to f$ почти всюду (п. в.), если $\exists\ A \in \Sigma\colon \mu(A) = 0,\ f_n \to f$ на $E \setminus A$.*
Определение 2.5. *$f_n \to f$ почти равномерно (п. р.), если $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ A \in \Sigma\colon \mu(A) < \varepsilon$ и $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $E \setminus A$.*
Определение 2.6. *$f \sim g$ эквивалентны, если $\exists\ A \in \Sigma\colon \mu(A) = 0$ и $f(x) \equiv g(x)\ \ \forall\ x \in E \setminus A$.*

Пределы почти всюду и почти равномерно определяются с точностью до эквивалентности. Если функция измерима, то и эквивалентная ей измерима.

Теорема 2.4 (Егорова)**.** *Пусть у нас $\mu(E) < \infty$, функции $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы. Тогда $f_n \to f$ почти всюду на $E \Leftrightarrow f_n \to f$ почти равномерно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть у нас последовательность функций сходится почти всюду $f_n \to f$ (п. в.) на E. Легко видеть, что доказательство из определения почти равномерной сходимости сводится к случаю $f_n \to f$ всюду.

Обозначим $B_n = \bigcap\limits_{j=n}^{\infty} E\left(|f_j - f| < \frac{1}{k}\right)$ для $k \geqslant 1$. Объединение таких множеств даст всё E. Таким образом, последовательность $B_n \nearrow E$. Мы доказывали свойство непрерывности меры снизу, поэтому $\lim \mu(B_n) = \mu(E)$.

Обозначим дополнение $A_n := E \setminus B_n$. Тогда в силу равенства $\lim \mu(B_n) = \mu(E)$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Поэтому существует n_k, такой что $\mu(A_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Обозначим $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$. Тогда $\mu(A) < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Дополнение $E \setminus A$ есть пересечение $E \setminus A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}$. Поэтому $\forall\ j \geqslant n_k,\ \forall\ x \in E \setminus A\ \ \big|f_j(x) - f(x)\big| < \frac{1}{k}$. Следовательно, последовательность сходится равномерно на множестве $E \setminus A$.

Достаточность. Пусть у нас последовательность функций $f_n \to f$ (п. р.) на E. Ну по определение $\forall\ n\ \ \exists\ A_n \in \Sigma\colon \mu(A_n) < \frac{1}{n},\ f_m \underset{m\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $E \setminus A_n$.

Обозначим $A := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu A = 0$. И $\forall\ x \in E \setminus A \Rightarrow f_m(x) \to f(x)$. ■

Определение 2.7. *Пусть $f, f_n\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы. $f_n \to f$ по мере μ на E (здесь мы должны предположить, что функция измерима… сначала), если $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\Big(E\big(|f_n - f| \geqslant \varepsilon\big)\Big) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Теорема 2.5. *Тут два утверждения.*

(1) Пусть $f, f_n\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы, и $\mu(E) < \infty$, то из $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ (п. в.) на E следует, что $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ по мере E.

(2) Если $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ по мере на E, то $\exists$ подпоследовательность $f_{n_k} \to f$ (п. в.) на E.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения применим теорему Егорова.

$$\varepsilon > 0\ \ \exists\ A \in \Sigma\colon \mu(A) < \varepsilon,\ f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows},$$

то есть $\exists\ n\colon \forall\ k \geqslant n\ \ \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\mu\Big(E\big(|f_k - f| \geqslant \varepsilon\big)\Big) \leqslant \mu(A) < \varepsilon$. Значит, предел $f_k \to f$ по мере на E.

Доказательство второго утверждения. Пусть $f_n \to f$ по мере. Существует $m_k\colon \mu\Big(E\big(|f - f_{m_k}| \geqslant \frac{1}{2^k}\big)\Big) < \frac{1}{2^k}$ (из сходимости по мере следует, что предел этой конструкции равен нулю). Обозначим $A_n := \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E\big(|f - f_{m_k}| \geqslant \frac{1}{2^k}\Big)$ и рассмотрим $A := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Имеем $\mu(A_n) < \frac{1}{2^{n-1}}$, получаем $\mu(A) = 0$.

Если $x \in E \setminus A$, то $x \in E \setminus A_n$ и $\big|f(x) - f_{m_k}(x)\big| < \frac{1}{2^k}$. Следовательно, $f_{m_k} \to f$ на $E \setminus A$. ■

Ну и в заключение давайте примерчик один приведём. Пример Риссо. Покажем, что их сходимости по мере не следует сходимость почти всюду. Берём отрезок $E = [0, 1]$, разбиваем его на отрезки $A_n = \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^n}\right]$. Каждый отрезок имеет меру $\mu(A_n) = \frac{1}{2^m}$. Нумерация такая: $n = 2^m + k$, $k = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$, для того, чтобы нумерация была по одному индексу. $f_n(x) = \chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_n; \\ 0, & x \notin A_n. \end{cases}$ Тогда мера Лебега

$$\mu\left(f_n \geqslant \varepsilon\right) = \frac{1}{2^m} \to 0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Наша последовательность $f_n \to 0$ по мере на отрезке $[0, 1]$.

Но эта последовательность не сходится никуда. Легко видеть

$$\overline{\lim} f_n(x) = 1, \quad x \in [0, 1]; \qquad \underline{\lim} f_n(x) = 0, \quad \forall\ x \in [0, 1].$$

К нулю в том числе не сходится.

3 Интеграл Лебега

Значит, у нас в дальшейшем (X, Σ, μ) — измеримое пространство (на прошлой лекции я говорил, что это такое), $E \in \Sigma$, через α будем обозначать $\alpha = \{A_k\}_{k=1}^n$ — измеримое разбиение E, то есть $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^n A_k$, $A_k \in \Sigma$.

Пусть также есть $f\colon E \to \mathbb{R}_+$. Введём обозначения $S_\alpha(f) = \sum\limits_{k=1}^n a_k \mu(A_k)$ — сумма Дарбу[1], $a_k = \inf\limits_{x \in A_k} f(x)$, $a_k = a_k(f)$.

Определение 3.1. *Интегралом Лебега измеримой функции $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ называется верхняя грань сумм Дарбу*

$$\int\limits_E f\,d\mu = \sup_\alpha = S_\alpha(f).$$

Если значения функции имеют произвольный знак, то есть $f\colon E \to \mathbb{R}$. То $f = f_+ - f_-$, где $f_\pm(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$, то интеграл Лебега определяется, как

$$\int\limits_E f\,d\mu := \int\limits_E f_+\,d\mu - \int\limits_E f_-\,d\mu.$$

Функция называется интегрируемой по Лебегу (или суммируемой) $f \in L(E, \mu)$, если f измерима и $\int\limits_E f_\pm\,d\mu < \infty$.

Верхняя грань сумм Дарбу может быть и бесконечной. Это допустимо для неотрицательной функции. А в случае знакопеременной функции может возникнуть неопределённость $\infty - \infty$.

Теперь перейдём у свойствам.

Утверждение 3.1. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ измерима. Тогда $\int\limits_E f\,\mu = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$, то есть $f = 0$ почти всюду.*

Доказательство. Необходимость. Если $\int\limits_E f\,d\mu = 0$, то все суммы Дарбу $S_\alpha(f) = 0$. Рассмотрим $E_n = E(g \geqslant \frac{1}{n})$. Ясно, что $E_n \nearrow E(f > 0)$ и $\mu\big(E(f > 0)\big) = \lim \mu(E) = 0$. Ведь мы можем строить разбиение так, чтобы одно из множеств было E_n.

Достаточность. $\mu\big(E(f > 0)\big) = 0$, значит, $S_\alpha(f) = 0$. Это из определения вытекает. ∎

Утверждение 3.2. *Пусть $f, g\colon E \to \mathbb{R}_+$ измеримы и $f \leqslant g$ на E. Тогда $\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_g d\mu$.*

Доказательство. Так как сумма Дарбу для любого разбиения удовлетворяет соответствующему неравенству $S_\alpha(f) \leqslant S_\alpha(g)$. ∎

Утверждение 3.3. *Если $f, g \in L(E, \mu)$ и $f \leqslant g$ на E, то $\int\limits_E f_+\,d\mu \leqslant \int\limits_E g_+\,d\mu$ и $\int\limits_E f_-\,d\mu \geqslant \int\limits_E g_-\,d\mu$. А если вычтем, то*

$$\int\limits_E f\,d\mu \leqslant \int\limits_E g\,d\mu.$$

Лемма 3.1. *Пусть $h \in L(E, \mu)$ простая, то есть принимает конечное количество значений. Тогда, как мы знаем, она записывается в виде*

$$h(x) = \sum_{k=1}^m = h_k \chi_{H_l}(x), \qquad H_l = \{x \in X \big| h(x) = h_l\}.$$

Тогда $\int\limits_E h\,d\mu = \sum\limits_{l=1}^m h_l \mu(E \cap H_l)$.

Доказательство. Достаточно доказать для случая неотрицательной функции $h \geqslant 0$. $a_k(h) \leqslant h_l$, если $B_{kl} = A_k \cap H_l \neq 0$,

$$S_\alpha(f) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_k \mu(B_{kl}) \leqslant \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m h_l \mu(B_{kl}) = \sum_{l=1}^m h_l \mu(E \cap H_l).$$

Но если мы возьмём разбиение $\alpha = \{E \cap H_l\}_{l=1}^m$, будет знак равенства. ∎

Из этой леммы вытекают следующие два следствия.

Следствие 3.1. *Если $h \in L(E, \mu)$ простая, то её интеграл обладает свойством аддитивности, то есть*

$$\int\limits_E h\,d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int\limits_{E_n} h\,d\mu, \qquad E = \bigsqcup_{n=1}^\infty E_n, \quad E_n \in \Sigma.$$

[1] Так как $0 \cdot \infty = 0$ по определению, все суммы Дарбу конечные.

Следствие 3.2. *Если $f\colon E\to\mathbb{R}_+$ измерима, то* $\int\limits_E f\,d\mu = \sup\limits_{0\leqslant h\leqslant f}\int\limits_E h\,\mu$, *где h — простая измеримая функция.*

Доказательство. Доказательство последнего следстви. Имеем из свойства 2 $\int\limits_E h\,d\mu \leqslant \int\limits_E g\,d\mu$. ■

Следующая теорема одна из основных теорем.

Теорема 3.1 (о монотонной сходимости)**.** *Пусть $f_n\colon E\to\mathbb{R}$ неотрицательны и измеримы, и $f_n\nearrow f$ на E. (Интеграл от f при этом может быть бесконечным, ничего страшного.) Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu.$$

Доказательство. Давайте обозначим этот предел через $I=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n\,d\mu$. Так как $f_n\leqslant f$ в каждой точке, то этот предел будет оцениваться $I\leqslant\int\limits_E f\,d\mu$. Для доказательства нам нужно доказать обратное неравенство.

Возьмём произвольную простую функцию $h\colon 0\leqslant h\leqslant f$, $\varepsilon\in(0,1)$ и определим следующие множества $E_n=E(\varepsilon h\leqslant f_n)\nearrow E$. Запишем следующим очевидные равенства

$$\varepsilon\int\limits_{E_n} h\,d\mu = \int\limits_{E_n}\varepsilon h\,d\mu \overset{2}{\leqslant} \int\limits_{E_n} f_n\,d\mu \overset{2}{\leqslant} \int\limits_E f_n\,d\mu \leqslant I.$$

Ну а теперь заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} h\,d\mu = \int\limits_E h\,d\mu$ в силу следствия 1. Переходя к пределу получаем $\varepsilon\int\limits_E h\,d\mu\leqslant I$. В силу произвольности ε

$$\int\limits_E h\,d\mu\leqslant I \quad \forall\, 0\leqslant h\leqslant f.$$

По свойству 3 имеем $G\int Ef\,d\mu\leqslant I$. ■

Следующее важное свойство четвёртое. Свойство линейности интеграла.

Утверждение 3.4. *Пусть $f,g\in L(E,\mu)$ и $\lambda\in\mathbb{R}$. Тогда* $\int\limits_E \lambda f\,d\mu = \lambda\int\limits_E f\,d\mu$ *и* $\int\limits_E (f+g)\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu$.

Доказательство. Первое свойство настолько очевидно, что я и доказывать не хочу. Докажем второе. Пусть пока что $f,g\leqslant 0$ и простые. Нужно вспомнить доказанную лемму и взять пересечение разбиений.

Второй случай. Пусть у нас теперь f и g неотрицательны и измеримы. В этом случае мы с вами доказывали теорему о том, что всякая неотрицательная функция является монотонным пределом неотрицательных простых функций, то есть $\exists\ f_n\nearrow f$ и $g_n\nearrow g$, где f_n,g_n — простые. Тогда и $f_n+g_n\nearrow f+g$. Ну а теперь применяем теорему о монотонной сходимости.

$$\int\limits_E (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_E (f_n+g_n)\,d\mu \overset{1}{=} \lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n\,d\mu + \lim_{n\to\infty}\int\limits_E fg_n\,d\mu$$

ну и по теореме о монотонной сходимости получаем $=\int\limits_E f\,d\mu+\int\limits_E g\,d\mu$.

Ну и третий случай, когда $f,g\in L(E,\mu)$, $f=f_+-f_-$, $g=g_+-g_-$. Тогда $(f+g)=(f+g)_+-(f+g)_-$, и мы получим такое равенство

$$(f+g)_+f_-+g_+=(f+g)_-+f_++g_-.$$

Это равенство можно проинтегрировать по свойству 2, собрать слагаемые обратно и получить результат. ■

Утверждение 3.5. *Пусть $f\in L(E,\mu)$, то $|f|\in L(E,\mu)$ и выполнены соответствующие неравенства*

$$\left|\int\limits_E f\,d\mu\right|\leqslant\int\limits_E |f|\,d\mu.$$

Доказательство. $|f|=f_++f_-\in L(E,\mu)$ по доказанным свойствам. Кроме того $-|f|\leqslant f\leqslant|f|$, применяем свойство 2, получаем $-\int\limits_E|f|\leqslant\int\limits_E f\,d\mu\leqslant\int\limits_E|f|\,d\mu$. ■

Лемма 3.2 (Фату)**.** *Пусть $f_n\colon E\to\mathbb{R}_+$ измеримы и $f=\varliminf f_n$ почти всюду на E. Тогда* $\int\limits_E f\,d\mu\leqslant\varliminf\int\limits_E f_n\,d\mu$.

Доказательство. По свойству 4 можно избавиться от требования условия почти всюду. Будем считать, что $f=\varliminf f_n$ всюду на E. Ну и введём такие функции $g_n=\inf\limits_{n\geqslant m} f_n$ — это измеримые неотрицательные функции (мы доказывали), ну и кроме того $g_m\nearrow f$ по определению предела.

Так как $\forall\ n\geqslant n\ \ g_m\leqslant f_n$, то у нас $\int\limits_E g_m\,d\mu\leqslant\inf\limits_{n\geqslant m}\int\limits_E f_n\,e\mu$. Ну и теперь применяем теорему о монотонной сходимости.

$$\int\limits_{f} d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{E} g_n\, d\mu \leqslant \lim_{m\to\infty}\inf_{n\geqslant m}\int\limits_{E} f_n\, d\mu = \varliminf\int\limits_{E} f_n\, d\mu.$$

И лемма доказана. ■

Теорема 3.2 (Лебега о предельном переходе)**.** *Пусть $f_n\colon E\to\mathbb{R}$ измеримы, $f=\lim f_n$ почти всюду на множестве E, и существует функция $g\in L(E,\mu)$, $g\geqslant 0$ и $|f_n|\leqslant g$*[1] *на множестве E (можно и оставить здесь почти всюду). Тогда $f, f_n\in L(E,\mu)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n\, d\mu = \int\limits_E f\, d\mu$.*

Доказательство. Не поскольку f измерима, то f_n тоже будет измерима. Будут выполнены такие неравенства почти всюду: $f_{n\pm}, f_{\pm}\leqslant g$ почти всюду на E. По свойству 2 интегралы будут конечны, то есть $f, f_n\in L(E,\mu)$. Кроме того $g\pm f_n\geqslant 0$ в силу того, что $|f_n|\leqslant g$ на E; $g\pm f_n\to g\pm f$, ну и нижний предел тоже сходится. Можно применить лемму Фату

$$\int\limits_E (f+g)\, d\mu \leqslant \varliminf\int\limits_E (g+f_n)\, d\mu, \qquad \int\limits_E (g-f)\, d\mu \leqslant \varliminf\int\limits_E (g-f_n)\, d\mu$$

В силу аддитивности интеграла, на g погу сократить в каждом неравенстве. Останется два неравенства. Из-за минуса нижний предел сменится на верхний.

$$\varlimsup\int\limits_E f_n\, d\mu \leqslant \int\limits_E f\, d\mu \leqslant \varliminf\int\limits_E f_n\, d\mu.$$

И теорема доказана. ■

Теорема 3.3 (о σ-аддитивности интеграла Лебега)**.** *Пусть $f\in L(E,\mu)$, $E=\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n\in\Sigma$. Тогда $\int\limits_E f\, d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{E_n} f\, d\mu$.*

Доказательство. Понятно, что $f=f_+-f_-$, и доказательство сводится к случаю $f\geqslant 0$. Пусть сначала $E=E_1\sqcup E_2$, $E_1,E_2\in\Sigma$. Функция неотрицательна, значит можно рассуждать суммами Дарбу. Пусть α — разбиение множества E. Тогда у нас индуцируются разбиения $\alpha_1=\alpha\cap E_1$, $\alpha_2=\alpha\cap E_2$. Легко понять, что тогда $S_\alpha(f)\leqslant S_{\alpha_1}(f)+S_{\alpha_2}(f)$.

С другой стороны. Если α_1 — разбиение E_1, α_2 — разбиение E_2, можно построить $\alpha=\alpha_1\sqcup\alpha_2$. В этом случае у нас будет равенство $S_\alpha(f)=S_{\alpha_1}(f)+S_{\alpha_2}(f)$. Значит, и верхняя грань будет удовлетворять этому равенству:

$$\int\limits_{f} d\mu = \int\limits_{E_1} f\, d\mu + \int\limits_{E_2} f\, d\mu.$$

Ну и теперь общий случай. Пусть $f\geqslant 0$, положим $F_n := \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, $f_n := \chi_{F_n}\cdot f$. Тогда $f_n\nearrow f$ и можно применить теорему о монотонной сходимости

$$\int\limits_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{F_n} f\, d\mu.$$

Раз для двух множеств верно, то и для любого конечно числа множеств будет верно и $\int\limits_E f\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{E_n} f\, d\mu$.

■

Теорема 3.4 (Неравенство Чебышёва)**.** *Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}_+$ измерима. Тогда $\forall\ t>0\quad \mu(E_t)\leqslant\frac{1}{t}\int\limits_E f\, d\mu$, $E_+ := E(f\geqslant t)$.*

С этой теоремы началась теория вероятности. До Чебышёва теория вероятность было только интуитивной.

Доказательство. Имеем по свойству 2: $\int\limits_E f\, d\mu\geqslant\int\limits_{E_t} f\, d\mu\geqslant t\mu(E_t)$. ■

Введём такое определение.

Определение 3.2. *Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}_+$ измерима. Обозначим через $\lambda_f(t)=\mu(E_t)$, $t>0$, $E_t := E(f\geqslant t)$. $\lambda_f(t)$ называется функцией распределения (значений f).*

Утверждение 3.6. *Свойства. Докажем только последнее.*

(1) $\lambda_f(t)\downarrow$;

(2) $\lambda_f(t-0)=\lambda_f(t)$;

[1] Эта функция g называется интегрируемой мажорантой.

(3) $\exists\ a\colon 0 < a \leqslant \infty,\ \lambda_f(t) = \infty$ при $t \in (0, a)$;

(4) Если $f \in L(E, \mu)$, то $\lambda_f(t) < \infty$ при $t > 0$;

(5) Если $\mu\big(E(f = t)\big) > 0$, то t — точка разрыва λ_f;

(6) $\lambda_f(t) = \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{t}\right)$, если $f \in L(E, \mu)$.

Доказательство. $E_t \searrow \varnothing$, $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{E_+} f\, d\mu$. Ну а следовательно $t\mu(E_t) \leqslant \int\limits_{E_+} f\, d\mu$. ■

Определение 3.3. *Если $f\, g \in E\colon \mathbb{R}_+$ измеримы и $\lambda_f(t) = \lambda_g(t)\ \ \forall\ t > 0$, то f и g называются равноизмеримыми.*

Пусть $f, g \in L(E, \mu)$. Тогда применяя теорему Фубини (которая у нас ещё будет) можно написать такие равенства

$$\int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_0^\infty \lambda_f(t)\, dt; \qquad \int\limits_E g\, d\mu = \int\limits_0^\infty \lambda_g(t)\, dt.$$

4 Абсолютно непрерывные функции

Начнём с определения абсолютной функций множества. У нас будет дальше (X, Σ, μ) — измеримое пространство. Обозначим через $\Sigma_E = \{A \subset E | A \in \Sigma\}$, $E \in \Sigma$.

Определение 4.1. *Функция $\varphi\colon \Sigma_E \to \mathbb{R}$ называется зарядом, если φ σ-аддитивна. Заряд называется абсолютно непрерывным $\varphi \ll \mu$ относительно меры μ, если*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\colon \forall\ A \in \Sigma_E,\ \mu(A) < \delta \Rightarrow \big|\varphi(A)\big| < \varepsilon.$$

Теорема 4.1 (об абсолютной непрерывности интеграла Лебега)**.** *Если $f \in L(E, \mu)$, то $\varphi(A) = \int_A f\, d\mu$, $A \in \Sigma_E$, является абсолютно непрерывным зарядом.*

Доказательство. Что интеграл зяряд, мы доказывали в прошлой лекции. Надо доказать только абсолютную непрерывность. Представим $f = f_+ - f_-$. Тогда можно считать, что $f \geqslant 0$. Рассмотрим $E_n = E(f \leqslant n)$, $E_n \nearrow E$. Можно воспользоваться свойством непрерывности снизу для меры.

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n \in \mathbb{N}\colon \varphi(E \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А ещё $\forall\ A \in \Sigma_E\ \ \mu(A) < \delta = \frac{\varepsilon}{2n}$, $\varphi(A \cap E_n) = \int\limits_{A \cap E_n} f\, d\mu \leqslant n\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Ну и осталось написать, что $\varphi(A) = \varphi(A \cap E_n) + \underbrace{\varphi(A \setminus E_n)}_{\leqslant \mu(E \setminus E_n)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, поскольку у нас φ монотонна (так как f неотрицательна). ■

Следующая теорема в нашем курсе если и будет доказана, то на последней лекции, если время останется. Кто интересуется, может прочесть в книге Колмогоров—Фомин.

Теорема 4.2 (Радона—Никодима)**.** *Если заряд $\varphi\colon \Sigma_E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию*

$$\forall\ A \in \Sigma_E\colon \mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \varphi(A) = 0.$$

E имеет σ-конечную меру.

Тогда $\exists!$ (с точностью до эквивалентности) $f \in L(E, \mu)$ такая, что $\varphi(A) = \int\limits_A f\, d\mu\ \ \forall\ A \in \Sigma_E$.

Помните, что мы называли функции эквивалентными, если они совпадают почти всюду.

Доказательство. Единственность легко доказать. Если интегралы совпадают для всех $A \in \Sigma_E$ $\int\limits_A f\, d\mu = \int\limits_A g\, d\mu$, то пусть $\exists\ B \in \Sigma_E\colon \mu(B) > 0$, такой, что $f(x) > g(x)\ \ \forall\ x \in B$. Следовательно, $\int\limits_B (f - g)\, d\mu > 0$. ■

Следствие обычно называется свойством абсолютной непрерывности. Его можно было бы и независимо доказать, но это заняло бы определённое время. Так что просто выведем из теоремы Радона—Никодима.

Следствие 4.1 (критерий абсолютной непрерывности)**.** $\varphi \ll \mu \Leftrightarrow \forall\ A \in \Sigma_E\colon \mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Потому что если множесво меры нуль $\forall\ \varepsilon > 0 \big|\varphi(A)\big| < \varepsilon$, то $\varphi(A) = 0$. А обратное вытекает из теоремы Радона—Никодима. ■

4.1 Функции точки

Сначала я вам напомню определение функции ограниченной в вариациях.

Определение 4.2. *$F \in B\vee[a,b]$, если*

$$\bigvee_a^b ar(F) := \sup_\tau \sum_{k=1}^n \bigl|F(x_k) - F(x_{k-1})\bigr| < \infty, \quad \tau := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}.$$

Пространство будет линейным, и в нём можно ввести норму $\|F\| = \bigl|F(a)\bigr| + \bigvee\limits_a^b(F)$.

Напомню свойства без доказательства. Это должно быть в курсе математического анализа.

Утверждение 4.1. *Если $F \in B\vee[a,b]$ и $a < c < b$, то $\bigvee\limits_a^b ar(F) = \bigvee\limits_a^c ar(F) + \bigvee\limits_c^b ar(F)$.*

Утверждение 4.2. *Если $F(c-0) = F(c)$. то $V(x) = \bigvee\limits_a^x ar(F)$, $V(c-0) = V(c)$.*

Утверждение 4.3. *Разложение Жордана. Если $F \in B\vee[a,b]$, то $\exists\ \alpha(x)\uparrow$ и $\beta(x)\uparrow$, такая, что*

$$\alpha(a) = \beta(a) = 0, \quad F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x), \quad V(x) = \alpha(x) + \beta(x).$$

Доказательство. $\alpha(x) := \frac{1}{2}\bigl\{\bigvee_a^x ar(F) + F(x) - F(a)\bigr\}$, $\beta(x) := \frac{1}{2}\bigl\{\bigvee_a^x ar(F) - F(x) + F(a)\bigr\}$. ■

Ещё одну теорему приведу без доказательства.

Теорема 4.3 (Лебега о производной монотонной функции)**.** *Если функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ монотонна, $f(x) \leqslant f(y)$, если $x \leqslant y$ (или наоборот), то существует производная $f'(x)$ почти всюду на $[a,b]$.*

4.2 Интеграл Лебега—Стилтьеса

Пусть $F \in B\vee[a,b]$ непрерывна слева. Тогда по разложению Жордана можем написать $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$, где $\alpha, \beta\uparrow$. Можно построить меры Лебега—Стилтьеса μ_α, μ_β. И мы можем тогда построить заряд Лебега—Стилтьеса

$$\varphi_F = \mu_\alpha - \mu_\beta.$$

Заряд определён на $\Sigma_F := \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$, пересечение σ-алгебр мер μ_α и μ_β. Определение теперь.

Определение 4.3. *Интеграл Лебега—Стилтьеса $\int\limits_a^b f\,d\varphi_F := \int\limits_a^b f\,d\mu_\alpha - \int\limits_a^b f\,d\mu_\beta$. Определён на полуинтервале $[a,b)$.*

И напомню определение.

Определение 4.4. *Интеграл Римана—Стилтьеса $\int\limits_a^b f\,dF := \lim\limits_{d(\tau)\to 0} R_\tau(f,\xi,F)$, где*

$$R_\tau(f,\xi,F) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\bigl(F(x_k) - F(x_{k-1})\bigr),$$

τ — разбиение отрезка, то есть $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, $d(\tau) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k - x_{k-1})$, $\xi = \{\xi_k\}$ и $\xi_k \in [x_{k-1}k, x_k]$.

Лемма 4.1. *Если функция $F \in C[a,b]$, то сущетсвует интеграл Римана—Стилтьеса.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть, когда F неубываюшая. Тогда интегральная сумма будет является интегралом Лебега от некоторой простой функции. $f\tau(x) = f(\xi_k)$ на $[x_{k-1}, x_k)$. Так как функция непрерывно, я могу вместо отрезка брать полуинтервал. Ещё на отрезке $f_\tau \rightrightarrows f$. По теореме Лебега интеграл существует. ■

Кстати функцию F можно переопределить в счётном числе точек. От этого интеграл не изменится.

Нам эта лемма в общем-то и не понадобится.

Теорема 4.4 (о сравнении интегралов)**.** *Если функция $f\colon [a,b]$ ограничена и $\exists\ \int\limits_a^b d\,dF$, то $\exists\ \int\limits_a^b f\,d\varphi_F$ и они равны.*

Доказательство. Применяем разложение Жордана. Без ограничения общности считаем $F(x) = \alpha(x)\uparrow$ и $f \geqslant 0$. Рассмотрим в этом случае интегральные суммы Дарбу—Стилтьеса для заданного разбиения

$$\underline{D}_\tau(f,\alpha) := \sum_{k=1}^n \underline{a}_k m_\alpha\bigl([x_{k-1}, x_l]\bigr), \quad \overline{D}_\tau(f,\alpha) := \sum_{k=1}^n \overline{a}_k m_\alpha\bigl([x_{k-1}, x_l]\bigr),$$

где $\underline{a}_k = \inf\limits_{[x_k, x_{k-1})]} f(x)$, $\overline{a}_k = \sup\limits_{[x_k, x_{k-1})]} f(x)$, $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. Тогда

$$\underline{D}_\tau(f,\alpha) \leqslant \overline{D}_\tau(f,\alpha).$$

Осталось доказать равенство.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \colon \forall\, \tau \colon d(\tau) < \delta \ \ I - \varepsilon \leqslant R_\tau(f, \xi, \alpha) \leqslant I + \varepsilon, \quad I = \int\limits_a^b f\, d\alpha.$$

Тогда суммы Римана будут находиться между суммами Дарбу

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ I - \varepsilon \leqslant \underline{D}_\tau(f, \alpha) \leqslant R_\tau(f, \xi, \alpha) \leqslant \overline{D}_\tau(f, \alpha) \leqslant I + \varepsilon$$

■

Определение 4.5. *$f \in AC[a,b]$, где $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \colon \forall \bigsqcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k) \subset [a,b] \colon \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \big|f(b_k) - f(a_k)\big| < \varepsilon.$$

Такие функции образуют линейную пространство, где можно ввести норму $\|f\| := \big|f(a)\big| + \int\limits_a^b \big|f'(t)\big|\, dt$, корректность котороой мы проверим чуть позже.
Утверждение 4.4. *Есди $f \in \mathrm{Lip}[a,b]$, то есть $\exists\, C\ 0 \colon \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant C|x - y| \ \forall\, x, y \in [a,b]$, то $f \in AC[a,b]$.*
Утверждение 4.5. *Если $f \in AC[a,b]$, то $f \in C \vee [a,b]$.*

Доказательство. Берётся разбиение $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, такое что $(x_k - x_{k-1}) = \frac{\delta}{2} = \frac{(b-a)}{n}$. Тогдп вариация

$$\bigvee_a^b ar(f) = RY1n \bigvee_{x_k - 1}^{x_k} ar(f) \leqslant n\varepsilon = \frac{2(b-a)}{\delta} \varepsilon.$$

■

Утверждение 4.6. *Если $f \in AC[a,b]$, то в разложении Жордана $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ $\alpha, \beta \in AC[a,b]$.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что $V(x) = \bigvee\limits_a^x ar(f)$ абсолютно непрерывна. Нужно воспользоваться свойством вариации и записать, что

$$\sum_{k=1}^{n} \big|V(b_k) - V(a_k)\big| = \sum_{k=1}^{n} \bigvee_{a_k}^{b_k} ar(f) \leqslant \varepsilon.$$

Достаточно заметить, что вариация на отрезке $[a_k, b_k]$ это точная верхняя грать сумм Дарбу. Нужно вспомнить определение абсолютно непрерывных функций и всё сразу понятно станет. ■

Ну и последнее свойство.
Утверждение 4.7. *Если $f \in AC[a,b]$, то $\exists!\ g \in L[a,b]$ (единственность с точностью до эквивалентности), такая что $f(x) = f(a) + \int\limits_a^x g(t)\, dt$.*

Доказательство. Разложим f по формуле Жордана $f(x) = f(a) = \alpha(x) - \beta(x)$, $\alpha, \beta \uparrow$. Затем построим меры Лебега—Стилтьеса μ_α, μ_β по функциям α, β. Эти меры будут абсолютно непрерывны $\mu_\alpha, \mu_\varepsilon \ll \lambda$ (λ — мера Лебега), так как α, β абсолютно непрерывны (у нас было два определения абсолютной непрерывности для разных объектов, тут используются оба).

Отсюда вытекает, что заряд $\varphi_F \ll \lambda$. Ну и по теоереме Радона—Никодима

$$f(x) - f(a) = \varphi_f\big([a, x)\big) = \int\limits_a^x g(t)\, dt$$

для некоторой функции $g \in L[a,b]$. Эта функция будет единственной с точностью до эквивалентности, как и в теореме Радона—Никодима. ■

Лемма 4.2. *Пусть $F \uparrow$ на $[a,b]$. Тогда $\int\limits_a^b F'(t)\, dt \leqslant F(b) - F(a)$. Но если $F \in \mathrm{Lip}[a,b]$, то выполняется равенство.*

По теореме Лебега производная монотонной функции интегрируема почти всюду. Равенство же может быть и не выполнено, например, если взять функцию Кантора (лесницу Кантора).

Доказательство. Давайте мы продолжим нашу функцию за отрезок $F(x) = F(b)$, $x \in [b, b+1]$. Функция останется неубывающе. Ну и возьмём такие функции и применим теорему Лебега

$$F_n(t) = \frac{F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} F'(t).$$

Предел есть по теореме Лебега почти всюду на $[a,b]$. Теперь применим теорему Фату

$$\int\limits_a^b F'(t)\,dt \leqslant \underline{\lim} \int\limits_a^b F_n(t)\,dt = \underline{\lim} \left(b \int\limits_b^{b+\frac{1}{n}} F(t)\,dt - n \int\limits_a^{a+\frac{1}{b}} F(t)\,dt \right) \leqslant F(b) - F(a).$$

Это в силу того, что функция неубывающая.

Осталось вторую часть доказать. Чтобы её доказать, нужно вспомнить определение условия Липшица. Из этого определения вытекает, что производная ограничена почти всюду $\left|F'(t)\right| \leqslant C$ почти всюду. Ну и тогда вместо леммы Фату можно применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. ■

Теорема 4.5 (характеристические свойсва абсолютно непрерывных функций)**.** $F \in AC[a,b]$*, если и только если*

$$\exists\ F'(t)\text{(п. в.) на } [a,b],\ \ F' \in L[a,b], F(x) = F(a) + \int\limits_a^x F'(t)\,dt \forall\ x \in [a,b].$$

Доказательство. Достаточность вытекает из абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Применяя свойство разложение Жордана, можно считать, что $F \uparrow$ на $[a,b]$. Давайте ещё считать, что $F(a) = 0$. Тогда по свойству 4 имеем

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt,\ \ f \in L[a,b].$$

Поэтому для доказательства необходимости нужно доказать, что $F'(t) = f(t)$ почти всюду на $[a,b]$.

Введём такие функции $f_n(x) = \min\left\{f(t), n\right\}$ — срез функции на уровне n. f определена почти всюду, её можно считать неотрицательной. Обозначим $F_n(x) = \int\limits_a^x f_n(t)\,dt$. Запишем разность

$$F(x) - F_n(x) = \int\limits_a^x \big(\underbrace{f(t) - f_n(t)}_{\geqslant 0}\big)\,dt \uparrow .$$

Следовательно $F'(x) \geqslant F_n'(x)$ почти всюду на $[a,b]$. Производная существует почти всюду по теореме Лебега. Давайте запишем ещё следующее равенство по лемме, используя, что $F_n(x) \in \mathrm{Lip}[a,b]$.

$$F_n(x) = \int\limits_a^x F_n'(t)\,dt = \int\limits_a^x f_n(t)\,dt,$$

$F_n'(t) = f_n(t)$ почти всюду на $[a,b]$.

$$F'(x) \geqslant F_n'(x) = f_n(x) \quad \text{п. в.}$$

переходя к пределу, получаем $F'(x) \geqslant f(x)$ почти всюду на $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b \big(F'(t) - f(t)\big)\,dt \geqslant 0.$$

А по лемме этот же интеграл будет оцениваться нулём и в другую сторону

$$\int\limits_a^b F'(t)\,dt \leqslant F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(t)\,dt \leqslant 0.$$

Значит, интеграл равен нулю. А поскольку функция неотрицательна, то она равна нулю почти всюду и $F'(t) = f(t)$ почти всюду. ■