

## 5 Мера множеств

Пусть  $X$  — множество. Тогда  $2^X$  — совокупность всех его подмножеств, а  $S \subset 2^X$  называется системой множеств.

Положим по определению  $E = \bigcup A \in S$ . Это называется единицей системы  $S$ .

**Определение 5.1.** Система  $S$  называется кольцом, если  $\forall A, B \in S \quad A \cup B, A \setminus B \in S$ , то есть кольцо замкнуто относительно конечного числа объединений и разностей. Если кольцо  $S \supset E$ , оно называется алгеброй.

Пусть  $S \subset 2^X$ . Тогда  $\mathcal{R}(S)$  — наименьшее кольцо, содержащее систему  $S$ , а  $\mathcal{A}(S)$  — наименьшая алгебра, содержащая  $S$ , то есть  $\mathcal{R}(S)$  пересечение всех колец, содержащих  $S$ ,  $\mathcal{A}(S)$  — пересечение всех алгебр, содержащих  $S$ .

**Утверждение 5.1.**  $S$  — кольцо, если и только если  $\forall A, B \in S \quad A \cap B \in S$  и  $A \Delta B \in S$ .

**Доказательство.** Это доказывается с помощью таких равенств

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B); \quad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A); \quad A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B); \quad A \setminus B = A \Delta (A \cap B).$$

**Определение 5.2.** Кольцо (алгебра)  $S$  называется  $\sigma$ -кольцом ( $\sigma$ -алгеброй), если

$$\forall A_n \in S \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S.$$

**Определение 5.3.** Кольцо (алгебра)  $S$  называется  $\delta$ -кольцом ( $\delta$ -алгеброй), если

$$\forall A_n \in S \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in S.$$

**Утверждение 5.2.** Условия для  $\sigma$  и  $\delta$  алгебры совпадают.

**Доказательство.** Запишем формулы двойственности.

$$E \setminus \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E \setminus A_n), \quad E \setminus \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus A_n).$$

Утверждение, очевидно, доказано. ■

$\mathcal{R}_{\sigma}(S)$  — это наименьшее  $\sigma$ -кольцо, содержащее  $S$ ,  $\mathcal{A}_{\sigma}(S)$  — это наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $S$ .

**Определение 5.4.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $\tau$  — топология. Тогда  $\mathcal{A}_{\sigma}(\tau) =: \mathcal{B}(X)$  называется борелевской  $\sigma$ -алгеброй метрического пространства  $X$ .

**Определение 5.5.**  $S$  называется полукольцом, если  $\forall A, B \in S \quad A \cap B \in S$  и  $A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^n C_i$ , где  $C_i \in S$ .

**Утверждение 5.3.** Если  $S$  — полукольцо, то  $\forall A, B_i \in S \quad A \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigsqcup_{j=1}^n C_j$ , где  $C_j \in S$ .

**Доказательство.** По индукции. Для  $n = 1$  верно. Пусть верно для  $n$ , докажем для  $n + 1$ .

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i = A \setminus \left( \bigcup_{i=1}^n B_i \cup B_{n+1} \right) = A \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i \setminus B_{n+1},$$

что есть  $\bigsqcup_{j=1}^m (C_j \setminus B_{n+1}) = \bigsqcup_{j=1}^m \bigsqcup_{i=1}^n C_{ij}$ , где  $C_{ij} \in S$ , что и требовалось доказать. ■

**Лемма 5.1.** Пусть  $S$  — полукольцо. Тогда  $A \in \mathcal{R}(S)$  если и только если  $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ , где  $A_i \in S$ .

**Доказательство.** Положим  $R = \{A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \mid n \in \mathbb{N}, A_i \in S\}$ . Отметим, что  $R \subset \mathcal{R}(S)$ . Покажем, что  $R$  — кольцо.

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i, \quad B = \bigsqcup_{j=1}^m B_j, \quad A_i, B_j \in S.$$

$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^n (A_i \setminus B)$ . В силу доказанного выше утверждения это является  $\bigsqcup_{i=1}^n \bigsqcup_{j=1}^m C_{ij} C_{ij}$ , где  $C_{ij} \in S$ . Следовательно,  $A \setminus B \in R$ .

$A \cup B = A \setminus B \sqcup B \in R$ . Следовательно  $R$  — кольцо. И, следовательно,  $R = \mathcal{R}(S)$ . ■

Пусть  $X$  — множество. Опять же  $S \subset 2^X$ . И функция  $\varphi: S \rightarrow \mathbb{F}$ , где  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

**Определение 5.6.** Функция  $\varphi$  называется аддитивной, если  $\varphi(A \sqcup B) = \varphi(A) + \varphi(B) \quad \forall A, B, A \sqcup B \in S$ .  $\varphi$  называется конечно аддитивной, если  $\varphi\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \varphi(A_i) \quad A_i, \bigsqcup_{i=1}^n A_i \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Определение 5.7.**  $\varphi$  называется  $\sigma$ -аддитивной, если  $\varphi\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i) \quad A_i, \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Так как  $\bigsqcup_{i=1}^{\infty}$  не зависит от порядка множеств, то ряд сходится абсолютно.

**Определение 5.8.** Функция  $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется конечно-аддитивной мерой ( $\sigma$ -аддитивной мерой), если

1.  $S$  — это полукольцо;
2.  $m$  конечно (или  $\sigma$ -) аддитивна.

**Определение 5.9.** Мера  $m_1: S_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется продолжением меры  $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ , если  $S \subset S_1$  и ограничение  $m_1|_{S_1} = m$ .

**Теорема 5.1.** Для любой меры  $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$   $\exists!$   $m_1: S_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$  продолжение, где  $S_1 \in \mathcal{R}(S)$ .

**Доказательство.** Определим  $m_1(A) = \sum_{i=1}^n m(A_i)$ , где  $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ ,  $A_i \in S$ . Пусть  $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$ . Тогда одновременно выполняются  $A = \bigsqcup_{i=1}^n \bigsqcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$  и  $m_1(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m(A_i \cap B_j)$  не зависит от разложения  $A$ .

Пусть  $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ ,  $A_i \in \mathcal{R}(S)$ . В свою очередь  $A_i = \bigsqcup_{j=1}^{m_i} A_{ij}$ , где  $A_{ij} \in S$ . Соответственно,

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_i} A_{ij}, \quad m_1(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} m(A_{ij}) = \sum_{i=1}^n m_1(A_i).$$

Таким образом доказана конечная аддитивность. Устремив  $n \rightarrow \infty$  в предыдущих рассуждениях, докажем  $\sigma$ -аддитивность. ■

## 5.1 Свойства $\sigma$ -аддитивной меры

Пусть  $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$  —  $\sigma$ -аддитивная мера. Тогда

**Утверждение 5.4.**  $m(\emptyset) = m(\emptyset \sqcup \emptyset) = 2m(\emptyset) \Rightarrow m(\emptyset) = 0$ .

**Утверждение 5.5** (монотонность). Если  $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$ , причём  $A_i, A \in S$ , то  $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leq m(A)$ .

**Доказательство.** Возьмём фиксированное  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\bigsqcup_{i=1}^n A_i \subset A$  и  $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m B_j$ ,  $A_i, B_j \in S$ . Тогда

$$m(A) = \sum_{i=1}^n m(A_i) + \sum_{j=1}^m m(B_j) \geq \sum_{i=1}^n m(A_i).$$

Устремим  $n \rightarrow \infty$  и получим требуемое. ■

**Утверждение 5.6** (полуаддитивность). Пусть  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , где  $A, A_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i =: B \in S$ . Тогда  $m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ .

**Доказательство.** Берём  $B_1 = A_1$ ,  $B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)$ , где  $k = 2, 3, \dots$ .  $B_k \in \mathcal{R}(S)$ . Считаем, что  $m$  определена для  $B_k$ , как продолжение меры.  $B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$  и  $m(B) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$ . Так как  $A \subset B$ ,  $m(A) \leq m(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$ . ■

**Утверждение 5.7** (непрерывность снизу). Если  $A_i \uparrow A$ ,  $A, A_i \in S$ , то  $\lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i) = m(A)$ .

**Доказательство.** Что значит стрелочка вверх:  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  и  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$ . Пусть  $A_0 = \emptyset$ ,  $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ . Тогда

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i, \quad B_i \in \mathcal{R}(S).$$

Считаем меру  $m$  продолженной на  $\mathcal{R}(S)$ . Тогда  $m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i \setminus A_{i-1}) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i)$ . ■

Сформулируем обратное утверждение.

**Утверждение 5.8.** Если конечно аддитивная мера непрерывна снизу, то она  $\sigma$ -аддитивна.

**Доказательство.** Пусть  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ,  $A_i, A \in S$ . Положим,  $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ . Тогда  $B_n \uparrow A$  и  $m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(B_n) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ . ■

**Утверждение 5.9** (непрерывность сверху). Если  $A_i \downarrow A$ ,  $A_i, A \in S$ , то  $\lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i) = m(A)$ .

**Доказательство.**  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  и  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A$ . Обозначим  $B = A_1 \setminus A$ ,  $B_i := A_1 \setminus A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Тогда  $B_i \uparrow B$  и  $m(B) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(B_i)$ .  $m(A_i) - m(A) = m(B_i) - \lim_{i \rightarrow \infty} m(B_i)$ , следовательно,  $m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i)$ . ■

**Утверждение 5.10.** Если конечно аддитивная мера непрерывна сверху, то она  $\sigma$ -аддитивна.

**Доказательство.**  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ,  $A, A_i \in S$ ,  $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ,  $B_n \downarrow \emptyset$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(B_n) = 0$ . Тогда

$$m(A) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m(A_i) = 0.$$

Что и требовалось доказать. ■

**Определение 5.10.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $S$  — полукольцо в  $X$ . Мера  $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется регулярной, если

$$\forall \varepsilon > 0, \forall A \in S \exists B, C \in S: \overline{B} \text{ компактно, } \overline{B} \subset A \subset C^0, m(C \setminus B) < \varepsilon.$$

**Теорема 5.2.** Каждая регулярная мера  $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$  является  $\sigma$ -аддитивной.

**Доказательство.** Пусть  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ,  $A_i, A \in S$ .  $m(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ . Существуют  $B, C, B_i, C_i \in S: \overline{B}, \overline{B}_i$  — компакты,  $\overline{B} \subset A \subset C^0$ ,  $\overline{B}_i \subset A_i \subset C_i^0$  и  $m(C \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $m(C_i \setminus B_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ .

$\overline{B} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i^0$ . Из компактности следует, что  $\overline{B} \subset \bigcup_{i=1}^n C_i^0$ . Следовательно,  $m(B) \leq \sum_{i=1}^n m(C_i)$ .

$$m(A) \leq m(C) \leq m(B) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^n m(C_i) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^n m(B_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) + \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon$  — произвольная постоянная, получаем требуемое. ■

## 5.2 Мера Стильеса в $\mathbb{R}$

Пусть  $S = \{[a, b] | a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ . Это полукольцо. Пусть  $\alpha(x)$  — неубывающая функция на  $\mathbb{R}$ .

**Определение 5.11.**  $m_{\alpha}([a, b]) = \alpha(b) - \alpha(a)$ .  $\alpha$  называется функцией распределения, а  $m_{\alpha}$  — конечно-аддитивная мера.

**Теорема 5.3.** Мера  $m_{\alpha}$  является  $\sigma$ -аддитивной, если и только если  $\alpha(x)$  непрерывна слева.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $x_n \uparrow x$ . Тогда полуинтервал  $[x_n, x) \downarrow \emptyset$ . Следовательно, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_{\alpha}([x_n, x)) = 0$ . Следовательно,  $\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n)$ , то есть  $\alpha$  непрерывна слева.

Достаточность. Пусть  $\forall x \in \mathbb{R} \alpha(x-0) = \alpha(x)$ . Полуинтервал  $[a, b-\delta) \subset [a, b) \subset (a-\delta, b) \quad \forall \delta > 0$ .

$$m_{\alpha}([a-\delta, b) \setminus [a, b-\delta)) = m_{\alpha}([a-\delta, a)) + m_{\alpha}([b-\delta, b)) = \alpha(a) - \alpha(a-\delta) + \alpha(b) - \alpha(b-\delta) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Мера Стильеса регулярна, следовательно,  $\sigma$ -аддитивна. ■

## 6 Измеримые множества

Далее мы через  $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \sqcup \{\infty\}$  будем обозначать множество неотрицательных чисел и добавленный символ бесконечности, при этом будут выполнены следующие аксиомы:  $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad a + \infty = \infty, a \cdot \infty = \infty (a \neq 0), 0 \cdot \infty = 0$  и  $a < \infty, \infty \leq \infty$ .

Какая-то из этих аксиом понадобится, только когда будем рассматривать интеграл Лебега.

**Определение 6.1.**  $\mu: 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  называется внешней мерой, если

(1) Мера пустого множества равна нулю  $\mu(\emptyset) = 0$ ,

(2)  $\mu A \leq \mu B$ , если  $A \subset B$ ,

(3)  $\mu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ , если  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

**Определение 6.2.** Множество  $E \subset X$  называется измеримым (относительно внешней меры  $\mu$ ), если

$$\mu A = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall A \subset X.$$

В силу свойства 3 полуаддитивности внешней меры, достаточно доказывать только неравенство

$$\mu A \geq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \quad \forall A \subset X,$$

чтобы показать измеримость множества.

Давайте введём ещё одно обозначение  $AB := A \cap B$ ,  $A' := X \setminus A$ ,  $\mu_A(B) := \mu(AB)$ .

Тогда легко понять, что  $E$  измеримо, если и только если  $\forall A \subset X \quad \mu_A(X) = \mu_A(E) + \mu_A(E')$ .

Давайте ещё через  $\Sigma$  будем обозначать совокупность всех измеримых множеств относительно внешней меры  $\mu$ .

## 6.1 Некоторые свойства измеримых множеств

**Утверждение 6.1.** Если  $\mu E = 0$ , то  $E \in \Sigma$ .

**Доказательство.** Это вытекает из того, что  $\mu_A(E) = 0$  из монотонности меры  $\forall A$ , и тоже в силу монотонности  $\mu_A(X) \geq \mu_A(E) + \mu_A(E')$ . А мы уже знаем, что этого неравенства достаточно. ■

**Утверждение 6.2.** Если  $E_1, E_2 \in \Sigma$ , то  $E = E_1 E_2 \in \Sigma$ .

**Доказательство.** Для доказательства запишем следующие равенства:

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1')$$

в силу измеримости  $E_1$ . А в силу измеримости  $E_2$  можем записать такое неравенство

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1') = \mu_{AE_1}(E_2) + \mu_{AE_1}(E_2') + \mu_A(E_1') = \mu_A(E) + \underbrace{\mu_A(E_1 E_2')}_{E_2' \subset E'} + \underbrace{\mu_A(E_1' E_2')}_{E_1' \subset E'} = \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

**Утверждение 6.3.** Если  $E \in \Sigma$ , то  $E' \in \Sigma$ .

**Доказательство.** Это вытекает из того, что второе дополнение  $E'' = E$  есть само множество. И отсюда  $\mu_A(X) = \mu_A(E') + \mu_A(E'')$ . ■

**Утверждение 6.4.** Если  $E_1, E_2 \in \Sigma$ , то и разность  $E_1 \setminus E_2$ ,  $E_1 \cup E_2 \in \Sigma$ .

**Доказательство.** Это вытекает из таких простых равенств:  $E_1 \setminus E_2 = E_1 E_2'$ ,  $E_1 \cup E_2 = (E_1' E_2')'$ . ■

Таким образом система измеримых множеств является алгеброй. Очевидно же из определения вытекает, что  $\emptyset, X \in \Sigma$ .

**Утверждение 6.5.** Функция  $\mu_A: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  является конечно аддитивной мерой на алгебре<sup>1</sup>

**Доказательство.** Пусть  $E = E_1 \sqcup E_2$ ,  $E_1, E_2 \in \Sigma$ . Тогда в силу измеримости

$$\mu_A(E) = \mu_{AE}(E_1) + \mu_{AE}(E_2) = \mu_A(E E_1) + \mu_A(E E_2) = \mu_A(E) + \mu_A(E_2)$$

Ну и основная теорема.

**Теорема 6.1** (Каратеодори). Пусть  $\mu: 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  внешняя мера. Тогда

(1)  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра;

(2)  $\mu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  —  $\sigma$ -аддитивная мера.

**Доказательство.** Пусть  $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ,  $E_n \in \Sigma$ . Обозначим  $F_n = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$ ,  $F_n \in \Sigma$ .

Для любого  $A \subset X$

$$\mu_A(X) = \mu_A(F_n) + \mu_A(F_n') \geq \sum_{k=1}^n \mu_A(E_k) + \mu_A(E').$$

Устремляем  $n \rightarrow \infty$ .

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E') \geq \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

Получаем  $\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ ,  $E \in \Sigma$ ,  $\mu_A(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E')$ . ■

<sup>1</sup> Потом мы докажем и  $\sigma$ -аддитивность.

Пусть  $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $S \subset 2^X$  — полукольцо, и мера  $m$   $\sigma$ -аддитивна. Будем также полагать, что она  $\sigma$ -конечна, то есть  $X$  представимо в виде

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in S.$$

У нас мера конечно, поэтому этого будет достаточно.

**Определение 6.3.** Мера заданная на совокупности всех подмножеств  $m^*: 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  называется внешней мерой Лебега, если

$$m^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Инфинум по всем счётным покрытиям.

Сейчас мы докажем, что внешняя мера Лебега является внешней мерой.

**Доказательство.** Обозначение  $(X, \Sigma, \nu)$  — измеримое пространство где  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых множеств  $\mu = m^*$ ,  $\nu := \mu|_{\Sigma}$ .

- (1)  $m^*(\emptyset) = 0$  очевидно;
- (2)  $m^*(A) \leq m^*(B)$ , если  $A \subset B$  тоже;
- (3)  $m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$ , если  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n$ .

Докажем третье: если  $\exists n: m^*(A_n) = \infty$ , то утверждение верно.

Пусть  $\forall n \in \mathbb{N} \quad m^*(A_n) < \infty$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B_{nk} \in S: A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} m(B_{nk}) < m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Отсюда вытекает, что  $A$  содержится в двойном объединении

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \quad m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m(B_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon.$$

■

Ещё одно свойство запишем и сделаем перерыв.

**Утверждение 6.6.** Если  $A \in S$ , то  $m^*(A) = m(A)$

**Доказательство.** Это вытекает из такого неравенства:

$$m^*(A) \leq m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),$$

если  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $A_n \in S$ .

■

**Теорема 6.2** (о продолжении меры). Пусть  $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$  —  $\sigma$ -аддитивная мера. Тогда

- (1) Внешняя мера  $\mu := m^*: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$   $\sigma$ -аддитивная;
- (2)  $\Sigma$  является  $\sigma$ -алгеброй;
- (3)  $S \subset \Sigma$ ;
- (4)  $\mu|_S = m$ .

**Доказательство.** Всё, кроме свойства три, доказано в теореме Коритоадори. Докажем 3. Пусть у нас  $E \in S$ ,  $A \subset X$  — произвольно множество,  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$\exists B_n \in S: A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Ну теперь применим свойство полуаддитивности и запишем следующее равенство (воспользуемся полуаддитивностью внешней меры)

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(m(B_n \cap E) + m(B_n \setminus E))}_{m(B_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon$  произвольно, тут везде знаки равенства и  $E \in \Sigma$ . ■

**Следствие 6.1.** *Полукольцо содержится в наименьшем кольце, которое содержится в наименьшем  $\sigma$ -кольце, которое содержится в наименьшей  $\sigma$ -алгебре, содержащейся в  $\Sigma$ , то есть*

$$S \subset \mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}_\sigma(S) \subset \mathcal{A}_\sigma(S) \subset \Sigma.$$

**Теорема 6.3** (о единственности продолжения меры). *Пусть  $m: S \rightarrow \mathbb{R}_+$   $\sigma$ -аддитивная и  $\sigma$ -конечная мера. Тогда  $\exists!$   $\sigma$ -аддитивная мера, которая продолжает меру  $m$  на  $\sigma$ -алгебру.*

**Доказательство.** Докажем для случая  $\mu(X) < \infty$  (иначе разобьём множество на измеримые). Пусть имеются два продолжения  $\mu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  и  $\nu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ , где  $\mu = m^*$ . Тогда  $\forall E \in \Sigma \quad \nu E \leq \mu(E)$ , ведь на  $S$   $\mu|_S = \nu|_S = m$ . Осталось заметить, что в силу аддитивности этих мер

$$\nu(E) + \nu(E') = m(X) = \mu(E) + \mu(E').$$

Отсюда видим, что  $\nu(E) = \mu(E)$ . ■

**Лемма 6.1** (об измеримой оболочке). *Пусть  $\mu = m^*$  — внешняя мера Лебега. Тогда  $\forall A \subset X \quad \exists B \in \Sigma: A \subset B$  и  $\mu(A) = \mu(B)$ .*

**Доказательство.**  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists B_{nk} \in S: A \subset B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$  и  $\mu(B_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{nk}) < \mu(A) + \frac{1}{n}$  по определению нижней грани, которая присутствует в определении внешней меры Лебега.

Обозначим  $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \Sigma, A \subset B$ . Имеем

$$\mu(B) \leq \mu(B_n) \leq \mu(A) + \frac{1}{n}.$$

Ну и поскольку  $n$  произвольно, то получается равенство. ■

**Определение 6.4.** *Пусть  $\mu = m^*$  и  $\mu(X) < \infty$ . Множество  $E \subset X$  называется измеримым по Лебегу, если  $\mu(X) = \mu(E) + \mu(E')$ .*

Ясно, что если множество измеримо, то оно измеримо по Лебегу. Докажем обратное.

**Доказательство.** Пусть  $E$  измеримо по Лебегу. Тогда существует по лемме об измеримой оболочке

$$\exists A, B \in \Sigma: E \subset A, E' \subset B, \mu(E) = \mu(A), \mu(A') = \mu(B).$$

Отсюда вытекает, что  $A \cup B = X$  и  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$  в силу аддитивности (ну надо на картинку посмотреть, ведь множества  $A$  и  $B$  измеримы). Это всё равно

$$\mu(A \cap B) = \mu(E) + \mu(E') - \mu(X) = 0.$$

Ну а множество меры нуль измеримо, то есть  $A \cap B \in \Sigma$ . Так как  $A \setminus E \subset A \cap B, \mu(A \setminus E) = 0$  и разность тоже измерима. Поэтому множество  $E$  можно записать как

$$E = A \setminus (A \setminus E) \in \Sigma.$$

Значит эти определения конечной меры эквивалентны. ■

**Теорема 6.4** (критерий измеримости Ваме—Гуссейна). *Пусть  $\mu = m^*$  и  $\mu(X) < \infty$ . Тогда*

$$E \in \Sigma \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathcal{R}(S): \mu(E \triangle B) < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $E \in \Sigma$  и  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\exists A_k \in S: E \subset A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  и по определению нижней грани

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leq \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Существует  $n$ , для которого  $\sum_{k=n+1}^{\infty} m(A_k) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Положим  $B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$ . Тогда

$$\mu(E \triangle B_n) \leq \mu(E \setminus B_n) + \mu(B_n \setminus E) \leq \mu(A \setminus B_n) + \underbrace{\mu(A \setminus E)}_{B_n \subset A} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} m(A_k) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть  $E \subset B \cup (E \triangle B)$ . Из этого вытекает

$$|\mu(E) - \mu(B)| \leq \mu(E \triangle B) < \varepsilon, \quad |\mu(E') - \mu(B')| \leq \mu(E' \triangle B') = \mu(E \triangle B) < \varepsilon.$$

Если это сложить, получится неравенство

$$\mu(X) = \mu(B) + \mu(B'), \quad |\mu(E) + \mu(E') - \mu(X)| < 2\varepsilon.$$

Значит,  $E \in \Sigma$ . ■

Помните меру Стильтьеса? Сейчас определим меру Лебега—Стилтьеса

**Определение 6.5.** Пусть есть полукольцо интервалов  $S = \{[a, b] | a, b \in \Sigma, a \leq b\}$ , есть  $\alpha(x) \uparrow$  (неубывает) и  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha(x-0) = \alpha(x)$ . Положим  $m_\alpha([a, b]) := \alpha(b) - \alpha(a)$ . Это  $\sigma$ -аддитивная мера. Пусть  $m = m_\alpha^*$  и  $\Sigma_\alpha$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых множеств. Тогда  $\mu: \Sigma_\alpha \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  называется мерой Лебега—Стилтьеса.

Если  $\alpha(x) = x$ , мера называется мерой Лебега.

Приведём пример неизмеримого по Лебегу множества  $E \subset [0, 1]$ . Введём отношение эквивалентности:  $\forall x, y \in [0, 1] \quad x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ . Множество  $[0, 1]$  разбивается на несчётное число классов эквивалентности  $[0, 1] = \bigsqcup_{i \in I} C_i$ , где при  $i \neq j \quad C_i \cap C_j = \emptyset$ . Пусть  $E = \{x_i\}_{i \in I}$ , где  $x_i \in C_i$ . Пусть  $\{e_n\}_{n=1}^\infty = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Тогда определим сдвиг на рациональное число  $E_n = E + r_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Если  $E \in \Sigma$ , то  $E_n \in \Sigma$  (это уже не обязательно подмножество  $[0, 1]$ ) и  $\mu(E) = \mu(E_n)$ . Для  $n \neq m \quad E_n \cap E_m = \emptyset$ . Видим, что  $[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ , а с другой стороны  $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \subset [-1, 2]$ . Можем применить неравенство для измеримых множеств

$$1 = \mu([0, 1]) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) \leq \mu([-1, 2]) = 3.$$

Если  $\mu(E) \neq 0$ , получаем бесконечную расходящуюся сумму, а если  $\mu(E) = 0$ , то противоречие с первым неравенством.

## 7 Измеримые функции

Всюду на этой лекции тройка  $(X, \Sigma, \mu)$  будет обозначать измеримое пространство. Мы сейчас будем использовать только следующие свойства измеримого пространства.

- (1)  $\Sigma$  — *sigma*-алгебра с единицей  $X$ ;
- (2)  $\mu: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  —  $\sigma$ -аддитивная мера;
- (3)  $\forall A \subset B: \mu(B) = 0 \quad A \in \Sigma$ .

Пусть  $E \subset X$ .

**Определение 7.1.** Функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  называется измеримой, если

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad E(f < c) := \{x \in E | f(x) < c\} \in \Sigma.$$

Понятно, что из определения вытекает, что  $E$  будет измеримо, как счётное объединение этих множеств. Кроме того

$$E(f \leq c) = \bigcap_{n=1}^\infty E\left(f < c + \frac{1}{n}\right) \in \Sigma; \tag{1}$$

$$E(f \geq c) = E \setminus E(f < c) \in \Sigma; \tag{2}$$

$$E(f > c) = E \setminus E(f \leq c) \in \Sigma; \tag{3}$$

$$E(a \leq f < b) = E(f < b) \setminus E(f < a) \in \Sigma; \tag{4}$$

$$E(a < f < b) = E(f < b) \setminus E(f \leq a) \in \Sigma. \tag{5}$$

Таким образом, все промежутки измеримы.

**Лемма 7.1.**  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  измерима, если и только если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad f^{-1}(B) \in \Sigma.$$

**Доказательство.** Необходимость. Положим  $S := \{A \subset \mathbb{R}^1 \mid f^{-1}(A) \in \Sigma\}$ . Все интервалы измеримы и лежат в  $S$ .  $S$  —  $\sigma$ -алгебра,  $\mathbb{R} \in S$ .

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B), \quad f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) =$$

Таким образом  $S$  —  $\sigma$ -алгебра,

Достаточность  $E(f < c) = f^{-1}(-\infty, c)$  очевидна. ■

Покажем связь топологии и измеримости. Введём такое определение.

**Определение 7.2.** Пусть  $\mu$  — регулярна. Функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $E \in \Sigma$ , обладает  $C$ -свойством, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ компакт } K, \text{ такой, что } \mu(E \setminus K) < \varepsilon, \quad g = f|_K \text{ — непрерывная функция.}$$

**Теорема 7.1** (Лузина). Пусть  $\mu$  — регулярная мера (в прошлый раз давали: для которой  $X$  является метрическим пространством и ещё другие свойства есть) и все открытые множества измеримы. Тогда функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  измерима  $\Leftrightarrow$  она обладает  $C$ -свойством

**Доказательство.** Необходимость. Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Функция у нас  $f$  измерима. Отсюда вытекает, что  $E \in \Sigma$ . Так как мера регулярна, то  $\exists$  такие измеримые  $A_0, B_0 \in \Sigma$ , такие что  $A_0$  компактно,  $B_0$  открыто,  $A_0 \subset E \subset B_0$  и  $\mu(B_0 \setminus A_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ . (Это всё из регулярности меры.)

Пусть задана система всех интервалов  $\{I_n\}$  с рациональными концами на прямой  $\mathbb{R}$ . Их не более чем счётно, поэтому я их занумеровал натуральными числами. Поэтому также в силу регулярности  $\exists A_n, B_n \in \Sigma$ , такие что  $A_n$  компактно,  $B_n$  открыто,  $A_n \subset f^{-1}(I_n) \subset B_n$ ,  $\mu(B_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ .

Определим  $G := \bigcup_{n=0}^{\infty} (B_n \setminus A_n) \in \Sigma$  — открыто, значит, измеримо, то есть  $G \in \Sigma$ . И его мера (по  $\sigma$ -аддитивности)  $\mu G < \varepsilon$ .

Обозначим  $K = E \setminus G = A_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n)$ . Оно является компактным как разность компактного  $A_0$  и открытого.

Осталось доказать, что ограничение на компакт является непрерывной функцией. Пусть  $g = f|_K$ . Тогда прообраз интервала  $f^{-1}(I_n) = f^{-1}(I_n) \cap K$ . Ну и кроме того легко понять, что пересечение с этим компактом, это всё равно что  $g^{-1}(I_n) = B_n \cap K$ . При этом  $B_n$  открыто, значит,  $g^{-1}(I_n)$  открыто в  $K$ . Значит,  $g$  непрерывна на компакте  $K$ .

Вот мы доказали необходимость.

Достаточность. Пусть  $f$  обладает  $C$ -свойством. Тогда для каждого  $n$  существует измеримый компакт  $K_n \in \Sigma$ , для которого  $K_n \subset E$ ,  $\mu(E \setminus K_n) < \frac{1}{n}$ , ну и ограничение  $g_n|_{K_n}$  непрерывно.

Обозначим  $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus K_n)$ . Значит, функция  $g_n$  непрерывна на компакте  $K_n$ , поэтому  $\forall$  интервала  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  прообраз  $g_n^{-1}(I) = f^{-1}(I) \cap K_n$ . Существуют такие открытые множества  $B_n$ , дающие в перечении  $B_n \cap K_n = g^{-1}(I)$ .

$$f^{-1}(I) \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I) \cap K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap K_n$$

Так как  $B_n$  и  $K_n$  из  $\sigma$ -алгебры, то это всё измеримо. И  $\mu(F) = 0$ ,  $\mu \in \Sigma$ , значит, и прообраз интегралов будет измеримым  $f^{-1}(I) \in \Sigma$ . ■

Следующая лемма нам поможет выяснить алгебраические свойства измеримых функций.

**Лемма 7.2.** Пусть у нас функции  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы, а функция  $h$ , заданная на открытом множестве  $h: D \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна, причём  $D \subset \mathbb{R}^2$  является открытым множеством. Предположим также, что  $\forall x \in E \quad (f(x), g(x)) \in D$ . Тогда можно рассмотреть сложную функцию  $F(x) = h(f(x), g(x))$ , и она окажется измеримой.

**Доказательство.** Пусть  $c \in \mathbb{R}$  рассмотрим  $D(h < c)$  — это множество открыто в  $\mathbb{R}^2$  в силу непрерывности  $h$ . Поэтому всякое открытое множество можно представить в виде объединения открытых прямоугольников не более чем счётного числа

$$D(h < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n, \quad \Pi_n = (a_n, b_n) \times (c_n, d_n).$$

Например, прямоугольники с рациональными вершинами.

Теперь запишем такое множество

$$E((f, g) \in \Pi_n) = E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n).$$

Поэтому множество  $E(F < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E((f, g) \in \Pi_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n)$ . Каждое из этих множеств измеримо, значит, и объединение будет тоже измеримым. Тем самым утверждение леммы доказано. ■

**Следствие 7.1.** Если  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы, то  $f + g$ ,  $fg$ ,  $\frac{f}{g}$  ( $g \neq 0$ ),  $f^p$  ( $p > 0, g \leq 0$ ) измеримы.



**Следствие 7.2.** Пусть теперь у нас задана последовательность измеримых функций  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Предположим, что в каждой точке  $\inf_n f_n$ ,  $\sup_n f_n$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$  измеримы, если принимают конечные значения.

**Доказательство.** Легко проверяются такие формулы

$$E\left(\inf_n f_n < c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n < c); \quad E\left(\sup_n f_n > c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > c).$$

А для пределов вот такие.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{k \geq 1} \left( \sup_{n \geq k} f_n \right); \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{k \geq 1} \left( \inf_{n \geq k} f_n \right).$$

Таким образом все эти множества измеримы. ■

**Следствие 7.3.** Пусть  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы и  $\forall x \in E \exists f(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Тогда предел  $f$  измерим.

$$f := \overline{\lim} f_n = \underline{\lim} f_n.$$

Введём такие обозначения.  $f_n, f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$(1) f_n \rightarrow f, \text{ если } \forall x \in E \exists f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

$$(2) f_n \nearrow f, \text{ если } f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ и } f_1 \leq f_2 \leq \dots$$

$$(3) f_n \searrow f, \text{ если } f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ и } f_1 \geq f_2 \geq \dots$$

**Определение 7.3.** Функция  $h: E \rightarrow \mathbb{R}$  называется простой, если  $h(E) = \{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subset \mathbb{R}$ .

$$h(x) = \sum_{k=1}^n h_k \chi_{H_k}(x),$$

$$\text{где } H_k := \{x \in E | h(x) = h_k\}, \chi_H(x) = \begin{cases} 1, & x \in H; \\ 0, & x \notin H. \end{cases}$$

**Теорема 7.2.**  $\forall f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измеримой существует неубывающая последовательность  $h_n \nearrow f$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  $h_n$  — измеримые и простые.

**Теорема 7.3.** Построим по следующей формуле

$$h_n(x) := \sum_{k=1}^{2^{2^n}} \frac{k-1}{2^n} \chi_{H_k^n}(x) + 2^n \chi_{H^n}(x),$$

где  $H_k^n := E\left(\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\right)$ ,  $H^n := E(f \geq w^n)$ ,  $k = 1, 2, \dots, k^{2^n}$

Покажем, что эта последовательность функций неубывающая. Ясно, что функции простые, что измеримые. Так как у нас  $H_K^n = H_{2k-1}^{n+1} \sqcup H_{2k}^{n+1}$ ,  $h_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq h_{n+1}(x)$

Кроме того  $|f(x) - h_n(x)| < \frac{1}{2^n}$ , если  $x \in E(f < 2^n)$ .

Поскольку  $n$  убегает в бесконечность.  $h_n \nearrow f$ . Если  $f$  ещё и ограничена, то сходимость будет ещё и равномерной.

**Определение 7.4.**  $f_n \rightarrow f$  почти всюду (п. в.), если  $\exists A \in \Sigma: \mu(A) = 0$ ,  $f_n \rightarrow f$  на  $E \setminus A$ .

**Определение 7.5.**  $f_n \rightarrow f$  почти равномерно (п. р.), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \Sigma: \mu(A) < \varepsilon$  и  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  на  $E \setminus A$ .

**Определение 7.6.**  $f \sim g$  эквивалентны, если  $\exists A \in \Sigma: \mu(A) = 0$  и  $f(x) \equiv g(x) \forall x \in E \setminus A$ .

Пределы почти всюду и почти равномерно определяются с точностью до эквивалентности. Если функция измерима, то и эквивалентная ей измерима.

**Теорема 7.4** (Егорова). Пусть у нас  $\mu(E) < \infty$ , функции  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы. Тогда  $f_n \rightarrow f$  почти всюду на  $E \Leftrightarrow f_n \rightarrow f$  почти равномерно.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть у нас последовательность функций сходится почти всюду  $f_n \rightarrow f$  (п. в.) на  $E$ . Легко видеть, что доказательство из определения почти равномерной сходимости сводится к случаю  $f_n \rightarrow f$  всюду.

Обозначим  $B_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} E(|f_j - f| < \frac{1}{k})$  для  $k \geq 1$ . Объединение таких множеств даст всё  $E$ . Таким образом, последовательность  $B_n \nearrow E$ . Мы доказывали свойство непрерывности меры снизу, поэтому  $\lim \mu(B_n) = \mu(E)$ .

Обозначим дополнение  $A_n := E \setminus B_n$ . Тогда в силу равенства  $\lim \mu(B_n) = \mu(E)$  предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ . Поэтому существует  $n_k$ , такой что  $\mu(A_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$  для любого  $\varepsilon > 0$ .

Обозначим  $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$ . Тогда  $\mu(A) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$ . Дополнение  $E \setminus A$  есть пересечение  $E \setminus A = \bigcap_{k=1}^{\infty} E \setminus A_k$ . Поэтому  $\forall j \geq n_k, \forall x \in E \setminus A \quad |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ . Следовательно, последовательность сходится равномерно на множестве  $E \setminus A$ .

Достаточность. Пусть у нас последовательность функций  $f_n \rightarrow f$  (п. р.) на  $E$ . Ну по определению  $\forall n \exists A_n \in \Sigma: \mu(A_n) < \frac{1}{n}, f_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$  на  $E \setminus A_n$ .

Обозначим  $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \mu A = 0$ . И  $\forall x \in E \setminus A \Rightarrow f_m(x) \rightarrow f(x)$ . ■

**Определение 7.7.** Пусть  $f, f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы.  $f_n \rightarrow f$  по мере  $\mu$  на  $E$  (здесь мы должны предположить, что функция измерима... сначала), если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E(|f_n - f| \geq \varepsilon)) = 0$  для любого  $\varepsilon > 0$ .

**Теорема 7.5.** Тут два утверждения.

(1) Пусть  $f, f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы, и  $\mu(E) < \infty$ , то из  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  (н. в.) на  $E$  следует, что  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  по мере  $E$ .

(2) Если  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  по мере на  $E$ , то  $\exists$  подпоследовательность  $f_{n_k} \rightarrow f$  (н. в.) на  $E$ .

**Доказательство.** Для доказательства первого утверждения применим теорему Егорова.

$$\varepsilon > 0 \quad \exists A \in \Sigma: \mu(A) < \varepsilon, f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty},$$

то есть  $\exists n: \forall k \geq n \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Отсюда следует, что  $\mu(E(|f_k - f| \geq \varepsilon)) \leq \mu(A) < \varepsilon$ . Значит, предел  $f_k \rightarrow f$  по мере на  $E$ .

Доказательство второго утверждения. Пусть  $f_n \rightarrow f$  по мере. Существует  $m_k: \mu(E(|f - f_{m_k}| \geq \frac{1}{2^k})) < \frac{1}{2^k}$  (из сходимости по мере следует, что предел этой конструкции равен нулю). Обозначим  $A_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f - f_{m_k}| \geq \frac{1}{2^k})$

и рассмотрим  $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . Имеем  $\mu(A_n) < \frac{1}{2^{n-1}}$ , получаем  $\mu(A) = 0$ .

Если  $x \in E \setminus A$ , то  $x \in E \setminus A_n$  и  $|f(x) - f_{m_k}(x)| < \frac{1}{2^k}$ . Следовательно,  $f_{m_k} \rightarrow f$  на  $E \setminus A$ . ■

Ну и в заключение давайте примерчик один приведём. Пример Риссо. Покажем, что их сходимости по мере не следует сходимость почти всюду. Берём отрезок  $E = [0, 1]$ , разбиваем его на отрезки  $A_n = [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]$ . Каждый отрезок имеет меру  $\mu(A_n) = \frac{1}{2^m}$ . Нумерация такая:  $n = 2^m + k, k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$ , для того, чтобы

нумерация была по одному индексу.  $f_n(x) = \chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_n; \\ 0, & x \notin A_n. \end{cases}$  Тогда мера Лебега

$$\mu(f_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{2^m} \rightarrow 0, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Наша последовательность  $f_n \rightarrow 0$  по мере на отрезке  $[0, 1]$ .

Но эта последовательность не сходится никуда. Легко видеть

$$\overline{\lim} f_n(x) = 1, \quad x \in [0, 1]; \quad \underline{\lim} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

К нулю в том числе не сходится.

## 8 Интеграл Лебега

Значит, у нас в дальнейшем  $(X, \Sigma, \mu)$  — измеримое пространство (на прошлой лекции я говорил, что это такое),  $E \in \Sigma$ , через  $\alpha$  будем обозначать  $\alpha = \{A_k\}_{k=1}^n$  — измеримое разбиение  $E$ , то есть  $E = \bigcup_{k=1}^n A_k, A_k \in \Sigma$ .

Пусть также есть  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Введём обозначения  $S_\alpha(f) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k)$  — сумма Дарбу<sup>1</sup>,  $a_k = \inf_{x \in A_k} f(x)$ ,  $a_k = a_k(f)$ .

**Определение 8.1.** Интегралом Лебега измеримой функции  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется верхняя грань сумм Дарбу

$$\int_E f d\mu = \sup_{\alpha} S_\alpha(f).$$

<sup>1</sup> Так как  $0 \cdot \infty = 0$  по определению, все суммы Дарбу конечные.

Если значения функции имеют произвольный знак, то есть  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ . То  $f = f_+ - f_-$ , где  $f_{\pm}(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$ , то интеграл Лебега определяется, как

$$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu.$$

Функция называется интегрируемой по Лебегу (или суммируемой)  $f \in L(E, \mu)$ , если  $f$  измерима и  $\int_E f_{\pm} d\mu < \infty$ .

Верхняя грань сумм Дарбу может быть и бесконечной. Это допустимо для неотрицательной функции. А в случае знакопеременной функции может возникнуть неопределённость  $\infty - \infty$ .

Теперь перейдём к свойствам.

**Утверждение 8.1.** Пусть  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измерима. Тогда  $\int_E f d\mu = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$ , то есть  $f = 0$  почти всюду.

**Доказательство.** Необходимость. Если  $\int_E f d\mu = 0$ , то все суммы Дарбу  $S_{\alpha}(f) = 0$ . Рассмотрим  $E_n = E(g \geq \frac{1}{n})$ .

Ясно, что  $E_n \nearrow E(f > 0)$  и  $\mu(E(f > 0)) = \lim \mu(E_n) = 0$ . Ведь мы можем строить разбиение так, чтобы одно из множеств было  $E_n$ .

Достаточность.  $\mu(E(f > 0)) = 0$ , значит,  $S_{\alpha}(f) = 0$ . Это из определения вытекает. ■

**Утверждение 8.2.** Пусть  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измеримы и  $f \leq g$  на  $E$ . Тогда  $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$ .

**Доказательство.** Так как сумма Дарбу для любого разбиения удовлетворяет соответствующему неравенству  $S_{\alpha}(f) \leq S_{\alpha}(g)$ . ■

**Утверждение 8.3.** Если  $f, g \in L(E, \mu)$  и  $f \leq g$  на  $E$ , то  $\int_E f_+ d\mu \leq \int_E g_+ d\mu$  и  $\int_E f_- d\mu \geq \int_E g_- d\mu$ . А если вычтем, то

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

**Лемма 8.1.** Пусть  $h \in L(E, \mu)$  простая, то есть принимает конечное количество значений. Тогда, как мы знаем, она записывается в виде

$$h(x) = \sum_{k=1}^m h_k \chi_{H_k}(x), \quad H_k = \{x \in X | h(x) = h_k\}.$$

Тогда  $\int_E h d\mu = \sum_{l=1}^m h_l \mu(E \cap H_l)$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать для случая неотрицательной функции  $h \geq 0$ .  $a_k(h) \leq h_l$ , если  $B_{kl} = A_k \cap H_l \neq \emptyset$ ,

$$S_{\alpha}(f) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_k \mu(B_{kl}) \leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m h_l \mu(B_{kl}) = \sum_{l=1}^m h_l \mu(E \cap H_l).$$

Но если мы возьмём разбиение  $\alpha = \{E \cap H_l\}_{l=1}^m$ , будет знак равенства. ■

Из этой леммы вытекают следующие два следствия.

**Следствие 8.1.** Если  $h \in L(E, \mu)$  простая, то её интеграл обладает свойством аддитивности, то есть

$$\int_E h d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} h d\mu, \quad E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \in \Sigma.$$

**Следствие 8.2.** Если  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измерима, то  $\int_E f d\mu = \sup_{0 \leq h \leq f} \int_E h d\mu$ , где  $h$  — простая измеримая функция.

**Доказательство.** Доказательство последнего следствия. Имеем из свойства  $2 \int_E h d\mu \leq \int_E g d\mu$ . ■

Следующая теорема одна из основных теорем.

**Теорема 8.1** (о монотонной сходимости). Пусть  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  неотрицательны и измеримы, и  $f_n \nearrow f$  на  $E$ . (Интеграл от  $f$  при этом может быть бесконечным, ничего страшного.) Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

**Доказательство.** Давайте обозначим этот предел через  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$ . Так как  $f_n \leq f$  в каждой точке, то этот предел будет оцениваться  $I \leq \int_E f d\mu$ . Для доказательства нам нужно доказать обратное неравенство.

Возьмём произвольную простую функцию  $h: 0 \leq h \leq f$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$  и определим следующие множества  $E_n = E(\varepsilon h \leq f_n) \nearrow E$ . Запишем следующим очевидные равенства

$$\varepsilon \int_{E_n} h d\mu = \int_{E_n} \varepsilon h d\mu \leq \int_{E_n} f_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu \leq I.$$

Ну а теперь заметим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} h d\mu = \int_E h d\mu$  в силу следствия 1. Переходя к пределу получаем  $\varepsilon \int_E h d\mu \leq I$ .

В силу произвольности  $\varepsilon$

$$\int_E h d\mu \leq I \quad \forall 0 \leq h \leq f.$$

По свойству 3 имеем  $\int_E f d\mu \leq I$ . ■

Следующее важное свойство четвёртое. Свойство линейности интеграла.

**Утверждение 8.4.** Пусть  $f, g \in L(E, \mu)$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\int_E \lambda f d\mu = \lambda \int_E f d\mu$  и  $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$ .

**Доказательство.** Первое свойство настолько очевидно, что я и доказывать не хочу. Докажем второе. Пусть пока что  $f, g \leq 0$  и простые. Нужно вспомнить доказанную лемму и взять пересечение разбиений.

Второй случай. Пусть у нас теперь  $f$  и  $g$  неотрицательны и измеримы. В этом случае мы с вами доказывали теорему о том, что всякая неотрицательная функция является монотонным пределом неотрицательных простых функций, то есть  $\exists f_n \nearrow f$  и  $g_n \nearrow g$ , где  $f_n, g_n$  — простые. Тогда и  $f_n + g_n \nearrow f + g$ . Ну а теперь применяем теорему о монотонной сходимости.

$$\int_E (f + g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f_n + g_n) d\mu \stackrel{1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu$$

ну и по теореме о монотонной сходимости получаем  $= \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$ .

Ну и третий случай, когда  $f, g \in L(E, \mu)$ ,  $f = f_+ - f_-$ ,  $g = g_+ - g_-$ . Тогда  $(f + g) = (f + g)_+ - (f + g)_-$ , и мы получим такое равенство

$$(f + g)_+ f_- + g_+ = (f + g)_- + f_+ + g_-.$$

Это равенство можно проинтегрировать по свойству 2, собрать слагаемые обратно и получить результат. ■

**Утверждение 8.5.** Пусть  $f \in L(E, \mu)$ , то  $|f| \in L(E, \mu)$  и выполнены соответствующие неравенства

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

**Доказательство.**  $|f| = f_+ + f_- \in L(E, \mu)$  по доказанным свойствам. Кроме того  $-|f| \leq f \leq |f|$ , применяем свойство 2, получаем  $-\int_E |f| d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu$ . ■

**Лемма 8.2 (Фату).** Пусть  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измеримы и  $f = \liminf f_n$  почти всюду на  $E$ . Тогда  $\int_E f d\mu \leq \liminf \int_E f_n d\mu$ .

**Доказательство.** По свойству 4 можно избавиться от требования условия почти всюду. Будем считать, что  $f = \liminf f_n$  всюду на  $E$ . Ну и введём такие функции  $g_n = \inf_{n \geq m} f_n$  — это измеримые неотрицательные функции (мы доказывали), ну и кроме того  $g_m \nearrow f$  по определению предела.

Так как  $\forall n \geq m \quad g_m \leq f_n$ , то у нас  $\int_E g_m d\mu \leq \inf_{n \geq m} \int_E f_n d\mu$ . Ну и теперь применяем теорему о монотонной сходимости.

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{n \geq m} \int_E f_n d\mu = \liminf \int_E f_n d\mu.$$

И лемма доказана. ■

**Теорема 8.2 (Лебега о предельном переходе).** Пусть  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы,  $f = \lim f_n$  почти всюду на множестве  $E$ , и существует функция  $g \in L(E, \mu)$ ,  $g \geq 0$  и  $|f_n| \leq g^1$  на множестве  $E$  (можно и оставить здесь почти всюду). Тогда  $f, f_n \in L(E, \mu)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ .

**Доказательство.** Не поскольку  $f$  измерима, то  $f_n$  тоже будет измерима. Будут выполнены такие неравенства почти всюду:  $f_{n\pm}, f_{\pm} \leq g$  почти всюду на  $E$ . По свойству 2 интегралы будут конечны, то есть  $f, f_n \in L(E, \mu)$ . Кроме того  $g \pm f_n \geq 0$  в силу того, что  $|f_n| \leq g$  на  $E$ ;  $g \pm f_n \rightarrow g \pm f$ , ну и нижний предел тоже сходится. Можно

<sup>1</sup> Эта функция  $g$  называется интегрируемой мажорантой.

применить лемму Фату

$$\int_E (f + g) d\mu \leq \varliminf_E \int_E (g + f_n) d\mu, \quad \int_E (g - f) d\mu \leq \varliminf_E \int_E (g - f_n) d\mu$$

В силу аддитивности интеграла, на  $g$  погу сократить в каждом неравенстве. Останется два неравенства. Из-за минуса нижний предел сменится на верхний.

$$\varlimsup_E \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \varliminf_E \int_E f_n d\mu.$$

И теорема доказана. ■

**Теорема 8.3** (о  $\sigma$ -аддитивности интеграла Лебега). Пусть  $f \in L(E, \mu)$ ,  $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ,  $E_n \in \Sigma$ . Тогда  $\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$ .

**Доказательство.** Понятно, что  $f = f_+ - f_-$ , и доказательство сводится к случаю  $f \geq 0$ . Пусть сначала  $E = E_1 \sqcup E_2$ ,  $E_1, E_2 \in \Sigma$ . Функция неотрицательна, значит можно рассуждать суммами Дарбу. Пусть  $\alpha$  — разбиение множества  $E$ . Тогда у нас индуцируются разбиения  $\alpha_1 = \alpha \cap E_1$ ,  $\alpha_2 = \alpha \cap E_2$ . Легко понять, что тогда  $S_\alpha(f) \leq S_{\alpha_1}(f) + S_{\alpha_2}(f)$ .

С другой стороны. Если  $\alpha_1$  — разбиение  $E_1$ ,  $\alpha_2$  — разбиение  $E_2$ , можно построить  $\alpha = \alpha_1 \sqcup \alpha_2$ . В этом случае у нас будет равенство  $S_\alpha(f) = S_{\alpha_1}(f) + S_{\alpha_2}(f)$ . Значит, и верхняя грань будет удовлетворять этому равенству:

$$\int_E f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu.$$

Ну и теперь общий случай. Пусть  $f \geq 0$ , положим  $F_n := \bigsqcup_{k=1}^n E_k$ ,  $f_n := \chi_{F_n} \cdot f$ . Тогда  $f_n \nearrow f$  и можно применить теорему о монотонной сходимости

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{F_n} f d\mu.$$

Раз для двух множеств верно, то и для любого конечно числа множеств будет верно и  $\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu$ . ■

**Теорема 8.4** (Неравенство Чебышёва). Пусть  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измерима. Тогда  $\forall t > 0 \quad \mu(E_t) \leq \frac{1}{t} \int_E f d\mu$ ,  $E_+ := E(f \geq t)$ .

С этой теоремы началась теория вероятности. До Чебышёва теория вероятностей было только интуитивной.

**Доказательство.** Имеем по свойству 2:  $\int_E f d\mu \geq \int_{E_t} f d\mu \geq t\mu(E_t)$ . ■

Введём такое определение.

**Определение 8.2.** Пусть  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измерима. Обозначим через  $\lambda_f(t) = \mu(E_t)$ ,  $t > 0$ ,  $E_t := E(f \geq t)$ .  $\lambda_f(t)$  называется функцией распределения (значений  $f$ ).

**Утверждение 8.6.** Свойства. Докажем только последнее.

- (1)  $\lambda_f(t) \downarrow$ ;
- (2)  $\lambda_f(t - 0) = \lambda_f(t)$ ;
- (3)  $\exists a: 0 < a \leq \infty$ ,  $\lambda_f(t) = \infty$  при  $t \in (0, a)$ ;
- (4) Если  $f \in L(E, \mu)$ , то  $\lambda_f(t) < \infty$  при  $t > 0$ ;
- (5) Если  $\mu(E(f = t)) > 0$ , то  $t$  — точка разрыва  $\lambda_f$ ;
- (6)  $\lambda_f(t) = \bar{o}\left(\frac{1}{t}\right)$ , если  $f \in L(E, \mu)$ .

**Доказательство.**  $E_t \searrow \emptyset$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{E_+} f d\mu$ . Ну а следовательно  $t\mu(E_t) \leq \int_{E_+} f d\mu$ . ■

**Определение 8.3.** Если  $f, g \in L: \mathbb{R}_+$  измеримы и  $\lambda_f(t) = \lambda_g(t) \quad \forall t > 0$ , то  $f$  и  $g$  называются равноизмеримыми.

Пусть  $f, g \in L(E, \mu)$ . Тогда применяя теорему Фубини (которая у нас ещё будет) можно написать такие равенства

$$\int_E f d\mu = \int_0^\infty \lambda_f(t) dt; \quad \int_E g d\mu = \int_0^\infty \lambda_g(t) dt.$$

## 9 Абсолютно непрерывные функции

Начнём с определения абсолютной непрерывности функций множества. У нас будет дальше  $(X, \Sigma, \mu)$  — измеримое пространство. Обозначим через  $\Sigma_E = \{A \subset E | A \in \Sigma\}$ ,  $E \in \Sigma$ .

**Определение 9.1.** Функция  $\varphi: \Sigma_E \rightarrow \mathbb{R}$  называется зарядом, если  $\varphi$   $\sigma$ -аддитивна. Заряд называется абсолютно непрерывным  $\varphi \ll \mu$  относительно меры  $\mu$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall A \in \Sigma_E, \mu(A) < \delta \Rightarrow |\varphi(A)| < \varepsilon.$$

**Теорема 9.1** (об абсолютной непрерывности интеграла Лебега). Если  $f \in L(E, \mu)$ , то  $\varphi(A) = \int_A f d\mu$ ,  $A \in \Sigma_E$ , является абсолютно непрерывным зарядом.

**Доказательство.** Что интеграл заряд, мы доказывали в прошлой лекции. Надо доказать только абсолютную непрерывность. Представим  $f = f_+ - f_-$ . Тогда можно считать, что  $f \geq 0$ . Рассмотрим  $E_n = E(f \leq n)$ ,  $E_n \nearrow E$ . Можно воспользоваться свойством непрерывности снизу для меры.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \varphi(E \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А ещё  $\forall A \in \Sigma_E \quad \mu(A) < \delta = \frac{\varepsilon}{2n}$ ,  $\varphi(A \cap E_n) = \int_{A \cap E_n} f d\mu \leq n\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ . Ну и осталось написать, что  $\varphi(A) = \varphi(A \cap E_n) + \underbrace{\varphi(A \setminus E_n)}_{\leq \mu(E \setminus E_n)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , поскольку у нас  $\varphi$  монотонна (так как  $f$  неотрицательна). ■

Следующая теорема в нашем курсе если и будет доказана, то на последней лекции, если время останется. Кто интересуется, может прочесть в книге Колмогоров—Фомин.

**Теорема 9.2** (Радона—Никодима). Если заряд  $\varphi: \Sigma_E \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет условию

$$\forall A \in \Sigma_E: \mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0.$$

$E$  имеет  $\sigma$ -конечную меру.

Тогда  $\exists!$  (с точностью до эквивалентности)  $f \in L(E, \mu)$  такая, что  $\varphi(A) = \int_A f d\mu \quad \forall A \in \Sigma_E$ .

Помните, что мы называли функции эквивалентными, если они совпадают почти всюду.

**Доказательство.** Единственность легко доказать. Если интегралы совпадают для всех  $A \in \Sigma_E$   $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ , то пусть  $\exists B \in \Sigma_E: \mu(B) > 0$ , такой, что  $f(x) > g(x) \quad \forall x \in B$ . Следовательно,  $\int_B (f - g) d\mu > 0$ . ■

Следствие обычно называется свойством абсолютной непрерывности. Его можно было бы и независимо доказать, но это заняло бы определённое время. Так что просто выведем из теоремы Радона—Никодима.

**Следствие 9.1** (критерий абсолютной непрерывности).  $\varphi \ll \mu \Leftrightarrow \forall A \in \Sigma_E: \mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0$ .

**Доказательство.** Необходимость очевидна. Потому что если множеству меры нуль  $\forall \varepsilon > 0 |\varphi(A)| < \varepsilon$ , то  $\varphi(A) = 0$ . А обратное вытекает из теоремы Радона—Никодима. ■

### 9.1 Функции точки

Сначала я вам напомним определение функции ограниченной в вариациях.

**Определение 9.2.**  $F \in B \vee [a, b]$ , если

$$\bigvee_a^b ar(F) := \sup_\tau \sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| < \infty, \quad \tau := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}.$$

Пространство будет линейным, и в нём можно ввести норму  $\|F\| = |F(a)| + \bigvee_a^b(F)$ .

Напомним свойства без доказательства. Это должно быть в курсе математического анализа.

**Утверждение 9.1.** Если  $F \in B \vee [a, b]$  и  $a < c < b$ , то  $\bigvee_a^b ar(F) = \bigvee_a^c ar(F) + \bigvee_c^b ar(F)$ .

**Утверждение 9.2.** Если  $F(c-0) = F(c)$ . то  $V(x) = \bigvee_a^x ar(F)$ ,  $V(c-0) = V(c)$ .

**Утверждение 9.3.** *Разложение Жордана. Если  $F \in B \vee [a, b]$ , то  $\exists \alpha(x) \uparrow$  и  $\beta(x) \uparrow$ , такая, что*

$$\alpha(a) = \beta(a) = 0, \quad F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x), \quad V(x) = \alpha(x) + \beta(x).$$

**Доказательство.**  $\alpha(x) := \frac{1}{2} \{ \bigvee_a^x ar(F) + F(x) - F(a) \}$ ,  $\beta(x) := \frac{1}{2} \{ \bigvee_a^x ar(F) - F(x) + F(a) \}$ . ■

Ещё одну теорему приведу без доказательства.

**Теорема 9.3** (Лебега о производной монотонной функции). *Если функция  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  монотонна,  $f(x) \leq f(y)$ , если  $x \leq y$  (или наоборот), то существует производная  $f'(x)$  почти всюду на  $[a, b]$ .*

## 9.2 Интеграл Лебега—Стилтьеса

Пусть  $F \in B \vee [a, b]$  непрерывна слева. Тогда по разложению Жордана можем написать  $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ , где  $\alpha, \beta \uparrow$ . Можно построить меры Лебега—Стилтьеса  $\mu_\alpha, \mu_\beta$ . И мы можем тогда построить заряд Лебега—Стилтьеса

$$\varphi_F = \mu_\alpha - \mu_\beta.$$

Заряд определён на  $\Sigma_F := \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ , пересечение  $\sigma$ -алгебр мер  $\mu_\alpha$  и  $\mu_\beta$ . Определение теперь.

**Определение 9.3.** *Интеграл Лебега—Стилтьеса  $\int_a^b f d\varphi_F := \int_a^b f d\mu_\alpha - \int_a^b f d\mu_\beta$ . Определён на полуинтервале  $[a, b)$ .*

И напомним определение.

**Определение 9.4.** *Интеграл Римана—Стилтьеса  $\int_a^b f dF := \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} R_\tau(f, \xi, F)$ , где*

$$R_\tau(f, \xi, F) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(F(x_k) - F(x_{k-1})),$$

$\tau$  — разбиение отрезка, то есть  $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ ,  $d(\tau) = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$ ,  $\xi = \{\xi_k\}$  и  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ .

**Лемма 9.1.** *Если функция  $F \in C[a, b]$ , то существует интеграл Римана—Стилтьеса.*

**Доказательство.** Достаточно рассмотреть, когда  $F$  неубывающая. Тогда интегральная сумма будет являться интегралом Лебега от некоторой простой функции.  $f_\tau(x) = f(\xi_k)$  на  $[x_{k-1}, x_k]$ . Так как функция непрерывна, я могу вместо отрезка брать полуинтервал. Ещё на отрезке  $f_\tau \rightrightarrows f$ . По теореме Лебега интеграл существует. ■

Кстати функцию  $F$  можно переопределить в счётном числе точек. От этого интеграл не изменится.

Нам эта лемма в общем-то и не понадобится.

**Теорема 9.4** (о сравнении интегралов). *Если функция  $f: [a, b]$  ограничена и  $\exists \int_a^b d dF$ , то  $\exists \int_a^b f d\varphi_F$  и они равны.*

**Доказательство.** Применяем разложение Жордана. Без ограничения общности считаем  $F(x) = \alpha(x) \uparrow$  и  $f \geq 0$ . Рассмотрим в этом случае интегральные суммы Дарбу—Стилтьеса для заданного разбиения

$$\underline{D}_\tau(f, \alpha) := \sum_{k=1}^n \underline{a}_k m_\alpha([x_{k-1}, x_k]), \quad \overline{D}_\tau(f, \alpha) := \sum_{k=1}^n \overline{a}_k m_\alpha([x_{k-1}, x_k]),$$

где  $\underline{a}_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$ ,  $\overline{a}_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$ ,  $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ . Тогда

$$\underline{D}_\tau(f, \alpha) \leq \overline{D}_\tau(f, \alpha).$$

Осталось доказать равенство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall \tau: d(\tau) < \delta \quad I - \varepsilon \leq R_\tau(f, \xi, \alpha) \leq I + \varepsilon, \quad I = \int_a^b f d\alpha.$$

Тогда суммы Римана будут находиться между суммами Дарбу

$$\forall \varepsilon > 0 \quad I - \varepsilon \leq \underline{D}_\tau(f, \alpha) \leq R_\tau(f, \xi, \alpha) \leq \overline{D}_\tau(f, \alpha) \leq I + \varepsilon$$

■

**Определение 9.5.**  $f \in AC[a, b]$ , где  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  абсолютно непрерывна, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall \bigsqcup_{k=1}^n (a_k, b_k) \subset [a, b]: \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Такие функции образуют линейное пространство, где можно ввести норму  $\|f\| := |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt$ , корректность которой мы проверим чуть позже.

**Утверждение 9.4.** Если  $f \in \text{Lip}[a, b]$ , то есть  $\exists C > 0: |f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$ , то  $f \in AC[a, b]$ .

**Утверждение 9.5.** Если  $f \in AC[a, b]$ , то  $f \in C^1[a, b]$ .

**Доказательство.** Берётся разбиение  $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ , такое что  $(x_k - x_{k-1}) = \frac{\delta}{n} = \frac{(b-a)}{n}$ . Тогда вариация

$$\bigvee_a^b ar(f) = RY1n \bigvee_{x_{k-1}}^{x_k} ar(f) \leq n\varepsilon = \frac{2(b-a)}{\delta} \varepsilon.$$

**Утверждение 9.6.** Если  $f \in AC[a, b]$ , то в разложении Жордана  $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$   $\alpha, \beta \in AC[a, b]$ . ■

**Доказательство.** Нам нужно доказать, что  $V(x) = \bigvee_a^x ar(f)$  абсолютно непрерывна. Нужно воспользоваться свойством вариации и записать, что

$$\sum_{k=1}^n |V(b_k) - V(a_k)| = \sum_{k=1}^n \bigvee_{a_k}^{b_k} ar(f) \leq \varepsilon.$$

Достаточно заметить, что вариация на отрезке  $[a_k, b_k]$  это точная верхняя грань сумм Дарбу. Нужно вспомнить определение абсолютно непрерывных функций и всё сразу понятно станет. ■

Ну и последнее свойство.

**Утверждение 9.7.** Если  $f \in AC[a, b]$ , то  $\exists! g \in L[a, b]$  (единственность с точностью до эквивалентности), такая что  $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$ .

**Доказательство.** Разложим  $f$  по формуле Жордана  $f(x) = f(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ ,  $\alpha, \beta \uparrow$ . Затем построим меры Лебега—Стилтьеса  $\mu_\alpha, \mu_\beta$  по функциям  $\alpha, \beta$ . Эти меры будут абсолютно непрерывны  $\mu_\alpha, \mu_\beta \ll \lambda$  ( $\lambda$  — мера Лебега), так как  $\alpha, \beta$  абсолютно непрерывны (у нас было два определения абсолютной непрерывности для разных объектов, тут используются оба).

Отсюда вытекает, что заряд  $\varphi_F \ll \lambda$ . Ну и по теореме Радона—Никодима

$$f(x) - f(a) = \varphi_f([a, x)) = \int_a^x g(t) dt$$

для некоторой функции  $g \in L[a, b]$ . Эта функция будет единственной с точностью до эквивалентности, как и в теореме Радона—Никодима. ■

**Лемма 9.2.** Пусть  $F \uparrow$  на  $[a, b]$ . Тогда  $\int_a^b F'(t) dt \leq F(b) - F(a)$ . Но если  $F \in \text{Lip}[a, b]$ , то выполняется равенство.

По теореме Лебега производная монотонной функции интегрируема почти всюду. Равенство же может быть и не выполнено, например, если взять функцию Кантора (лесницу Кантора).

**Доказательство.** Давайте мы продолжим нашу функцию за отрезок  $F(x) = F(b)$ ,  $x \in [b, b+1]$ . Функция останется неубывающей. Ну и возьмём такие функции и применим теорему Лебега

$$F_n(t) = \frac{F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F'(t).$$

Предел есть по теореме Лебега почти всюду на  $[a, b]$ . Теперь применим теорему Фату

$$\int_a^b F'(t) dt \leq \liminf \int_a^b F_n(t) dt = \liminf \left( b \int_b^{b+\frac{1}{n}} F(t) dt - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t) dt \right) \leq F(b) - F(a).$$

Это в силу того, что функция неубывающая.

Осталось вторую часть доказать. Чтобы её доказать, нужно вспомнить определение условия Липшица. Из этого определения вытекает, что производная ограничена почти всюду  $|F'(t)| \leq C$  почти всюду. Ну и тогда



вместо леммы Фату можно применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. ■

**Теорема 9.5** (характеристические свойства абсолютно непрерывных функций).  $F \in AC[a, b]$ , если и только если

$$\exists F'(t) (n. в.) \text{ на } [a, b], F' \in L[a, b], F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt \forall x \in [a, b].$$

**Доказательство.** Достаточность вытекает из абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Применяя свойство разложения Жордана, можно считать, что  $F \uparrow$  на  $[a, b]$ . Давайте ещё считать, что  $F(a) = 0$ . Тогда по свойству 4 имеем

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, f \in L[a, b].$$

Поэтому для доказательства необходимости нужно доказать, что  $F'(t) = f(t)$  почти всюду на  $[a, b]$ .

Введём такие функции  $f_n(x) = \min \{f(t), n\}$  — срез функции на уровне  $n$ .  $f$  определена почти всюду, её можно считать неотрицательной. Обозначим  $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ . Запишем разность

$$F(x) - F_n(x) = \int_a^x \underbrace{(f(t) - f_n(t))}_{\geq 0} dt \uparrow.$$

Следовательно  $F'(x) \geq F'_n(x)$  почти всюду на  $[a, b]$ . Производная существует почти всюду по теореме Лебега. Давайте запишем ещё следующее равенство по лемме, используя, что  $F_n(x) \in \text{Lip}[a, b]$ .

$$F_n(x) = \int_a^x F'_n(t) dt = \int_a^x f_n(t) dt,$$

$F'_n(t) = f_n(t)$  почти всюду на  $[a, b]$ .

$$F'(x) \geq F'_n(x) = f_n(x) \text{ п. в.}$$

переходя к пределу, получаем  $F'(x) \geq f(x)$  почти всюду на  $[a, b]$ . Тогда

$$\int_a^b (F'(t) - f(t)) dt \geq 0.$$

А по лемме этот же интеграл будет оцениваться нулём и в другую сторону

$$\int_a^b F'(t) dt \leq F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt \leq 0.$$

Значит, интеграл равен нулю. А поскольку функция неотрицательна, то она равна нулю почти всюду и  $F'(t) = f(t)$  почти всюду. ■

## 10 Теорема Фубини

Сначала мы докажем предварительную теорему, а потом уже теорему Фубини. Рассмотрим  $S_k$  — полукольцо в  $X_k$ , где  $k = 1, \dots, n$ . И рассмотрим прямое произведение этих полуколец  $S := S_1 \times \dots \times S_n = \{A = A_1 \times \dots \times A_n \mid A_k \in S_k, k = 1, \dots, n\}$ . Мы сейчас докажем, что это тоже полукольцо. Пусть у нас ещё заданы меры на каждом полукольце  $m_k: S_k \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Тогда можно ввести понятие прямого<sup>1</sup> произведения мер  $m = m_1 \times \dots \times m_n$ , где  $m(A) := m_1(A_1) \dots m_n(A_n)$ , если  $A = A_1 \times \dots \times A_n$ .

**Теорема 10.1.** Если  $m_k: S_k \rightarrow \mathbb{R}_+$  есть  $\sigma$ -аддитивные меры на полукольцах  $S_k$  при  $k = 1, \dots, n$ , то  $S = S_1 \times \dots \times S_n$  является полукольцом и  $m = m_1 \times \dots \times m_n$  является  $\sigma$ -аддитивной мерой.

**Доказательство.** Приведём доказательство для  $n = 2$ , далее по индукции. Пусть  $S = S_1 \times S_2$  — полукольцо. Берём два множества

$$A = A_1 \times A_2, B = B_1 \times B_2 \in S, A_1, B_1 \in S_1, A_2, B_2 \in S_2.$$

Легко проверяется, что

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2).$$

<sup>1</sup> Будет ещё другое произведение мер, поэтому слово прямое не будем опускать.

Можно нарисовать картинку в виде двух прямоугольников.

Теперь разность представляется в виде трёх слагаемых

$$A \setminus B = ((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2)) \sqcup ((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \cap B_2)) \sqcup ((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)).$$

Это тоже можно показать, нарисовав картинку из двух прямоугольников. Таким образом,  $S$  — полукольцо.

Осталось показать, что произведение мер является  $\sigma$ -аддитивной мерой. Пусть множество  $A$  представляется в виде

$$A = \bigsqcup_{l=1}^m B^{(l)}, \quad A = A_1 \times A_2, \quad B^{(l)} = B_1^{(l)} \times B_2^{(l)}.$$

Давайте запишем такую функцию

$$f_l(x_1) := m_2(B_2^{(l)}) \cdot \chi_{B_1^{(l)}}(x_1), \quad x_1 \in A_1.$$

Из этого определения вытекает, что  $A_2 = \bigcup_{l=1}^m B_2^{(l)}$ , но не обязательно дизъюнктное. Отсюда вытекает такое равенство

$$m_2(A_2) = \sum_{l=1}^m f_l(x_1), \quad x_1 \in A_1.$$

Пусть  $\mu_1$  — продолжение меры  $m_1$ . Мы сейчас будем писать интеграл и подставлять определение нашей функции.

$$m(A) := m_1(A_1) \cdot m_2(A_2) = \int_{A_1} m_2(A_2) d\mu_1 = \sum_{l=1}^m \int_{A_1} f_l(x_1) d\mu_1 = \sum_{l=1}^m m_1(B_1^{(l)}) \cdot m_2(B_2^{(l)}).$$

Для  $m = \infty$  нужно лишь применить теорему о монотонной сходимости. Выкладка та же самая. ■

**Определение 10.1.** Пусть у нас заданы измеримые пространства  $(X_k, \Sigma_k, \mu_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Тогда мы можем построить

$$X = X_1 \times \dots \times X_n, \quad S = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n, \quad m = \mu_1 \times \dots \times \mu_n.$$

Если построить внешнюю меру и ограничить на  $\Sigma$ , то  $m^*|_{\Sigma} = \mu$  и тройка  $(X, \Sigma, \mu)$  называется произведением измеримых пространств.

Это произведение обладает свойством ассоциативности. Будем обозначать это произведение не как прямое, а как тензорное

$$\mu := \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n.$$

Свойство ассоциативности тогда записывается так

$$(\mu \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3).$$

Свойство ассоциативности вытекает из ассоциативности прямого произведения. Мы для простоты изложения далее будем рассматривать случай  $n = 2$ .

Пусть  $(X, \Sigma_X, \mu_X)$  и  $(Y, \Sigma_Y, \mu_Y)$  — измеримые пространства. Тогда для  $Z = X \times Y$ ,  $\mu = \mu_X \otimes \mu_Y$ ,  $E \in \Sigma$  обозначим сечения

$$E_X = \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}, \quad E_Y = \{x \in X \mid (x, y) \in E\}.$$

Сечение объединений будет объединением сечений, относительно пересечения и разности так же. То же самое можем сделать для функций

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_x(y) = f(x, y), \quad f_y(x) = f(x, y).$$

**Теорема 10.2.** Если  $E \in \Sigma$   $\sigma$ -конечной меры, то

$$\mu(E) = \int_X \mu_y(E_x) d\mu_x = \int_Y \mu_x(E_y) d\mu_y.$$

Вообще говоря, не все сечения будут измеримы, функция будет определена почти всюду. Где функция неопределена, положим её равной нулю, это не повлияет на значение интеграла.

**Доказательство.** Доказательство будет проходить в несколько шагов.

1.  $E = A \times B$ ,  $A \in \Sigma_x$ ,  $B \in \Sigma_y$ . Тогда

$$\mu(E) = \mu_x(A) \cdot \mu_y(B) = \int_A \mu_y(B) d\mu_x = \int_A \mu_x(A) d\mu_x.$$

Эти равенства симметричны, мы будем доказывать только одно из них.

$$\forall E \in \mathcal{R}(S), \quad S = \Sigma_x \times \Sigma_y.$$

2.  $\mu(E) < \infty$ . Построим измеримую оболочку  $A$  множества  $E$  (была лемма об измеримой оболочке).

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad E \subset A_k, \quad A_k = \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{kl}, \quad A_{kl} \in S, \quad \mu(A_k \setminus E) < \frac{1}{k}.$$

Из этого вытекает, что  $\mu(A \setminus E) = 0$ . Введём теперь следующие множества

$$B_n := \bigcap_{k=1}^n A_k, \quad D_{nm} := \bigcap_{k=1}^n \bigcup_{l=1}^m A_{kl} \in S.$$

Так как оба  $\in S$ , для них уже теорема доказана. Кроме того,  $B_n \searrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ , а  $D_{mn} \nearrow B_n$  при  $m \rightarrow \infty$ . Теперь осталось применить свойства непрерывности меры снизу и сверху. А так как для множеств из полукольца теорема доказана, то и для наших множеств будет доказана. Ну и  $\mu(A \setminus E) = 0$ . Значит, надо доказать ещё для множеств меры нуль.

Пусть  $B = E \setminus A$ ,  $\mu(B) = 0$ . Берём точно так же измеримую оболочку  $C$  этого множества  $C \supset B$ . Для этой измеримой оболочки мы уже доказали теорему. Имеем интеграл

$$\int_X \mu_y(C_x) d\mu_X = \mu(C) = \mu(B) = 0.$$

Так как  $C \supset B$ , то и  $C_x \supset B_x$ . И таким образом, мы доказали теорему полностью для множества конечной меры.

Если множества  $\sigma$ -конечной меры, мы представляем их в виде счётного объединения конечной меры. ■

Теперь то, что оставалось без доказательства: про функцию распределения. Это как пример применения этой теоремы. Пусть  $(X, \Sigma, \mu)$  — измеримое пространство. На множестве  $E \in \Sigma$  задана неотрицательная измеримая функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Рассмотрим множество-подграфик

$$G = \{(x, t) | 0 \leq t \leq f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}_+.$$

Позже мы докажем, что подграфик измеримой функции есть измеримое множество. А сейчас запишем его меру, как интегралы по сечениям

$$\mu(G) = \int_E f d\mu = \int_0^\infty \mu(G_t) dt = \int_0^\infty \lambda_f(t) dt,$$

где  $G_t$  — функция распределения, а  $\lambda_f(t) = \mu(G_t)$ .

**Лемма 10.1.** Пусть  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  измерима. Тогда её подграфик  $G = \{(t, x) | 0 \leq t \leq f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}_+$  является измеримым относительно произведения мер  $\mu \times dt$ .

**Доказательство.** Давайте введём множества  $H_k^n = E \left( \frac{k-1}{2^n}, f, \frac{k}{2^n} \right)$  (множество точек  $x$ , для которых выполняется неравенство) и функции  $h_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \chi_{H_k^n}(x) > f(x)$ . Была у нас лемма о том, что  $h_n \searrow f$ .

У функции  $h_n$  подграфик измерим, а подграфик функции  $f$  будет пересечением этих подграфиков. А пересечения измеримых измеримы. ■

Работаем в тех же обозначениях для произведения измеримых пространств.

**Теорема 10.3 (Фубини).** Если  $E \in \Sigma$   $\sigma$ -конечной меры и  $f \in L(E, \mu)$ , то

$$\int_E f d\mu = \int_X \int_{E_x} f_x d\mu_y d\mu_x = \int_Y \int_{E_y} f_y d\mu_x d\mu_y.$$

То есть интеграл по произведению мер равен повторному интегралу.

**Доказательство.** Представим  $f$  в виде разности неотрицательных функций  $f = f_+ - f_-$ , где  $f_{\pm} \geq 0$ . Это даёт нам право без ограничения общности считать, что  $f \geq 0$ . Обозначим  $\lambda = \mu \otimes dt = \mu_x \otimes \mu_y \otimes dt$  в силу ассоциативности. Ещё обозначим  $\nu = \mu_y \otimes dt$ . Тогда  $\lambda = \mu_x \otimes \nu$ . Мера задана на множестве  $X \times Y \times \mathbb{R}_+$ .

Рассмотрим подграфик  $G = \{(x, y, t) | 0 \leq t \leq f(x, y)\} \subset X \times Y \times \mathbb{R}_+$ . Мы доказали, что  $G$  измеримо относительно меры  $\lambda$ .

Теперь давайте вычислять меру этого множества разными способами. Первый способ: фиксируем  $(x, y)$

$$\lambda(G) = \int_E f d\mu.$$

С другой стороны можем фиксировать переменную  $x$ . Тогда будет подграфик сечения функции

$$\lambda(G) = \int_E f d\mu = \int_X \nu(G_x) d\mu_X.$$

Но сам этот подграфик мы тоже можем вычислить с помощью сечений.

$$\lambda(G) = \int_E f d\mu = \int_X \nu(G_x) d\mu_X = \int_X \left( \int_{E_x} f_x d\mu_y \right) d\mu_x.$$

А второе равенство доказывается симметрично. ■

А теперь рассмотрим меру Лебега на  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим  $n$  экземпляров измеримых пространств  $(\mathbb{R}, \Sigma_k, \mu_k)$  Лебега в  $\mathbb{R}$ ,  $k = 1 \dots, n$ . Тогда можем рассмотреть измеримое пространство в  $\mathbb{R}^n$

$$(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu), \quad \mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n.$$

Можно было по-другому определять, а именно сразу рассмотреть полукольцо. Но у нас была теорема единственности меры, значит, мы бы получили то же самое.

Пусть  $\Delta = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  —  $n$ -мерный отрезок. Будем обозначать  $R(\Delta)$  — множество функций, измеримых по Риману, а  $L(\Delta)$  — множество функций, интегрируемых по Лебегу на этом отрезке. Будем рассматривать только ограниченные функции  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ . Для заданной функции определим функции Бэра

$$\underline{f}(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \inf_{x \in \Delta \cap S_r(x)} f(x), \quad \bar{f}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \Delta \cap S_r(x)} f(x).$$

Эти функции измеримы, поскольку множества  $\Delta(\underline{f} > c)$  и  $\Delta(\bar{f} < c)$  тех точек отрезка, для которых  $\underline{f} > c$  и множество, где  $\bar{f} < c$  открыты для любого  $c \in \mathbb{R}$ .

Нижняя функция будет совпадать с верхней в точке  $x$ , если и только если функция непрерывна в  $x$ .

**Теорема 10.4** (Лебега о сравнении интегралов Римана и Лебега для  $n$ -мерного отрезка). Пусть функция  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена. Тогда  $f \in R(\Delta) \Leftrightarrow \mu(E_1) = 0$ , где

$$E_f = \{x \in \Delta \mid \underline{f}(x) \neq \bar{f}(x)\}.$$

$$\text{Если } f \in R(\Delta), \text{ то } f \in L(\Delta) \text{ и } \int_{\Delta} f(x) dx = \int_{\Delta} f d\mu.$$

**Доказательство.** Сначала напомним одно из необходимых и достаточных условий интегрируемости. Когда нижний интеграл Дарбу совпадает с верхним. Мы устраиваем разбиение  $\tau = \{\Delta_l\}_{l=1}^n$  отрезка  $\Delta$ , внутренности элементов которого не пересекаются, то есть  $\Delta_l \cap \Delta_{l'} = \emptyset$  при  $l \neq l'$ , а  $\Delta = \bigcup_{l=1}^m \Delta_l$ .

$$\underline{D}_{\tau}(f) = \sum_{l=1}^m a_l \mu(\Delta_l), \quad a_l = \inf_{\Delta_l} f(x), \quad \overline{D}_{\tau}(f) = \sum_{l=1}^m \bar{a}_l \mu(\Delta_l), \quad \bar{a}_l = \sup_{\Delta_l} f(x).$$

Условие выглядит так

$$\int_{\Delta} f(x) dx = \sup_{\tau} \underline{D}_{\tau}(f) = \inf_{\tau} \overline{D}_{\tau}(f) = \int_{\Delta} f(x) dx.$$

Пусть  $\tau_k = \{\Delta^{(k)}_l\}_{l=1}^{m_k}$  — последовательность разбиений, удовлетворяющая условиям

1. Диаметр  $f(\tau_k) \rightarrow 0$ ;
2.  $\tau_k \supset \tau_{k+1}$ ;
3.  $\int_{\Delta} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{D}_{\tau_k}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{m_k} a_l^{(k)} \mu(\Delta_l^{(k)})$ .

Функции  $h_k(x) = \sum_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^{(k)} \chi_{\Delta_l^{(k)}}(x) \nearrow \underline{f}(x)$ ,  $\forall x \in \overset{\circ}{\Delta}_l^{(k)}$ ,  $\forall k, l$ . Значит, сходится почти всюду и по одной из теорем имеем

$$\int_{\bar{\Delta}} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^{(k)} \mu(\Delta_l^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta} h_k d\mu = \int_{\Delta} \underline{f} d\mu.$$

Отсюда мы получаем равенства

$$\int_{\bar{\Delta}} f(x) dx = \int_{\Delta} \underline{f} d\mu, \quad \int_{\bar{\Delta}} f(x) dx = \int_{\Delta} \bar{f} d\mu.$$

Мы можем их объединить

$$\int_{\Delta} \underbrace{(\bar{f} - \underline{f})}_{\geq 0} d\mu, \quad \underline{f}(x) \leq f(x) \leq \bar{f}(x).$$

Откуда мы получаем, что  $\underline{f}(x) - \bar{f}(x) = 0$  почти всюду на  $\Delta$ ,  $\underline{f}(x) = f(x) = \bar{f}(x)$  почти всюду на  $\Delta$ . И

$$\int_{\Delta} f(x) dx = \int_{\Delta} f d\mu.$$

■

Сейчас мы построим функцию, которая не интегрируема по Лебегу. То есть никакая ей эквивалентная не интегрируема по Риману. Берём отрезок  $[0, 1]$ , набор  $\{r_n\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  и число  $0 < \varepsilon < 1$ . Положим

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \varepsilon_n, r_n + \varepsilon_n), \quad \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Легко сверху оценить меру  $\mu(A_\varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\varepsilon_n = \varepsilon$ . Мера будет маленькой, но положительной. Положим

$$B_\varepsilon = [0, 1] \setminus A_\varepsilon.$$

Это замкнутое множество, которое состоит только из иррациональных чисел. Оно нигде не плотно. Ну и мера этого множества  $\mu(B_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ . Теперь достаточно взять функцию

$$f(x) = \chi_{B_\varepsilon}(x).$$

И сама функция не интегрируема по Риману, и её нельзя изменить на множестве меры нуль так, чтобы она стала интегрируемой по Риману.

## 11 Пространство $L_p$

Сегодня рассмотрим пространство  $L_p(E, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Распространим понятия, которые были для действительной функции.

Пусть  $(X, \Sigma, \mu)$  — измеримое пространство, а  $\mathbb{F} = \begin{cases} \mathbb{R}, \\ \mathbb{C}. \end{cases}$   $E \in \Sigma$ . Функция  $f: E \rightarrow \mathbb{F}$ ,  $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$ ,  $v(x) =$

$\operatorname{Im} f(x)$ , то есть  $f(x) = u(x) + iv(x)$ .

**Определение 11.1.**  $f$  — измеримая, если  $u, v$  измеримы.  $f \in L(E, \mu)$ , если  $u, v \in L(E, \mu)$  и  $\int_E f d\mu = \int_E u d\mu + i \int_E v d\mu$ .

Все теоремы, где нет неравенств, верные для действительно значных функций, верны и для комплексно-значных. Некоторые свойства мы с вами докажем.

**Утверждение 11.1.** Если  $f, g \in L(E, \mu)$  и  $\lambda \in \mathbb{F}$ , то  $f + g, \lambda f \in L(E, \mu)$  и

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu, \quad \int_E \lambda f d\mu = \lambda \int_E f d\mu.$$

**Доказательство.** Например, докажем последнее свойство. Пусть  $\lambda = \alpha + i\beta$ , а  $f = u + iv$ , тогда  $\lambda f = (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u)$ . По определению интеграла комплекснозначной функции и по свойству линейности

интеграла действительнзначной функции имеем

$$\int_E \lambda f d\mu = \int_E (\alpha u - \beta v) d\mu + i \int_E (\alpha v + \beta u) d\mu = \left( \alpha E u - \beta \int_E v d\mu \right) + i \left( \alpha \int_E v d\mu + \beta \int_E u d\mu \right) = \lambda \int_E f d\mu.$$

**Утверждение 11.2.** Пусть  $f \in L(E, \mu)$ . Тогда  $|f| \in L(E, \mu)$  и

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

**Доказательство.**  $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$ , как обычно. Это не превосходит  $|f| \leq |u| + |v| \in L(E, \mu)$ . Осталось доказать равенство. Представим результат интегрирования в тригонометрической форме  $\int_E f d\mu = \left| \int_E f d\mu \right| \cdot e^{i\theta}$ . Тогда

$$\left| \int_E f d\mu \right| = e^{-i\theta} \int_E f d\mu = \operatorname{Re} e^{-i\theta} \int_E f d\mu = \operatorname{Re} \int_E e^{-i\theta} f d\mu = \int_E \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) d\mu \leq \int_E |f| d\mu.$$

**Утверждение 11.3.** Пусть  $f_1 \sim g_1$ ,  $f_2 \sim g_2$ . Тогда  $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$  и  $\lambda f_1 \sim \lambda g_1$ .

Это свойство очевидно. А если  $f \sim g$  и  $f \in L(E, \mu)$ , то  $g \in L(E, \mu)$ . Значит,  $L(E, \mu)$  есть линейное пространство и множество классов эквивалентных функций есть линейное пространство.

Мы вводили обозначение  $B(E) = \{f: E \rightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ — ограничены на } E\}$ .

**Определение 11.2.**  $L_\infty(E, \mu)$  — множество классов эквивалентности ограниченных функций с нормой  $\|f\|_\infty = \inf_{\mu(A)=0} \sup_{x \in E \setminus A} |f(x)|$ . Оно называется множеством существенно ограниченных функций. А норма называется существенной верхней гранью.

Имеем  $L \supset B(E)$  — подпространство,  $f \sim 0$ . Тогда  $L_\infty(E, \mu) = B(E) \setminus L$ . Мы будем обращаться с этими классами, как обыкновенными функциями.

Для каждого  $\forall n \in \mathbb{N} \exists A_n \in \Sigma: \mu(A_n) = 0, \forall x \in E \setminus A_n \quad |f(x)| < \|f\|_{L_\infty} + \frac{1}{n}$ . Обозначим через  $A_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $\mu A_f = 0$  и  $\|f\|_{L_\infty} = \sup_{x \in E \setminus A_f} |f(x)|$ . То есть нижняя грань достигается на некотором множестве меры нуль. Такое

множество может быть и не одно. Оно существует, нам этого достаточно, чтобы доказать

**Утверждение 11.4** (Свойства нормы). Пусть  $\|f\|_{L_\infty} = 0$ . Тогда  $f \sim 0$ . Кроме того,  $\|\lambda f\|_{L_\infty} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L_\infty}$ . И неравенство треугольника.

**Доказательство.** Как доказать неравенство треугольника. Запишем равенства

$$\|f\|_{L_\infty} = \sup_{x \in E \setminus A_f} |f(x)|, \quad \|g\|_{L_\infty} = \sup_{x \in E \setminus A_g} |g(x)|.$$

Положим  $A = A_f \cup A_g$ . Тогда

$$\|f + g\|_{L_\infty} \leq \sup_{x \in E \setminus A} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in E \setminus A_f} |f(x)| + \sup_{x \in E \setminus A_g} |g(x)| = \|f\|_{L_\infty} + \|g\|_{L_\infty}.$$

Вот мы и доказали все свойства нормированного пространства.

**Теорема 11.1.**  $L_\infty(E, \mu)$  — банахово пространство, то есть полное линейное нормированное пространство.

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность Коши  $\{f_n\} \subset L_\infty(E, \mu)$ . Положим  $A = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{f_n - f_m}$ . При этом  $\mu(A) = 0$  и  $\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in E \setminus A} |f_n(x) - f_m(x)|$ . Так как  $f_n \in B(E \setminus A)$  — последовательность Коши, то

по доказанному на первой же лекции  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E \setminus A} f \in B(E \setminus A)$ . Положим  $f(x) = 0$  на  $A$ . Тогда  $f \in L_\infty(E, \mu)$  и  $\|f - f_n\|_{L_\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

**Определение 11.3.**  $L_p(E, \mu)$ ,  $1 \leq p < \infty$  — пространство классов эквивалентности измеримых функций  $f: E \rightarrow \mathbb{F}: |f|^p \in L(E, \mu)$  с нормой

$$\|f\|_{L_p} = \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Это линейное пространство функций, суммируемых в степени  $p$ .

Заметим, что если  $f, g \in L_p(E, \mu)$ , то  $|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$  ну и ясно, что  $\lambda f \in L_p(E, \mu)$ . А чтобы доказать, что это нормированное пространство, надо доказать несколько неравенств.

**Утверждение 11.5** (неравенство Гёльдера). Пусть  $1 < p, q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  и  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  и измеримы. Тогда

$$\int_E fg \, d\mu \leq \left( \int_E f^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E g^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Причём эти интегралы могут принимать и бесконечные значения. Суммируемость не требуется.

**Доказательство.** Сначала докажем неравенство Юнга для чисел  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ , где  $a, b \geq 0$ . Рассматриваем функции  $y = x^{p-1}$  и  $x = y^{q-1}$ . Легко видеть, что эти функции взаимно обратные. Значит, можно посчитать интеграл слева от кривой и снизу от кривой. А площадь прямоугольника будет меньше

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}.$$

Равенство будет только в том случае, когда  $a^{p-1} = b$  или, эквивалентно  $a^p = b^q$ .

Чтобы доказать теперь неравенство Гёльдера, введём обозначения  $A = \int_E f^p \, d\mu$  и  $B = \int_E g^q \, d\mu$ . Если одно из этих чисел равно нулю или бесконечности, то неравенство очевидно. Берём  $a = \frac{f}{A^{\frac{1}{p}}}$  и  $b = \frac{g}{B^{\frac{1}{q}}}$ . Применяем неравенство Гёльдера и интегрируем его

$$\int_E ab \, d\mu \leq \frac{1}{p} \int_E a^p \, d\mu + \frac{1}{q} \int_E b^q \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Отсюда вытекает уже неравенство Гёльдера. Легко видеть, что равенство будет тогда и только тогда, когда  $f^p = \lambda g^q$ , где  $\lambda = A/B$  почти всюду на множестве  $E$ . ■

Следующее неравенство

**Утверждение 11.6** (неравенство Минковского). Пусть  $f, g \in L_p(E, \mu)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Тогда  $\|f + g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$ .

**Доказательство.** В случае  $p = 1$ , это неравенство вытекает из элементарного неравенства для чисел  $|f + g| \leq |f| + |g|$ . Нужно проинтегрировать это неравенство, получим неравенство треугольника для  $L_1$ .

Пусть  $p > 1$ . Положим  $A = \int_E |f|^p \, d\mu$ ,  $B = \int_E |g|^p \, d\mu$ ,  $C = \int_E |f + g|^p \, d\mu$ . Тогда

$$C = \int_E |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \, d\mu \leq \int_E |f| \cdot |f + g|^{p-1} \, d\mu + \int_E |g| \cdot |f + g|^{p-1} \, d\mu.$$

Найдём  $q$ :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $(p-1)q = p$ . Тогда по неравенству Гёльдера

$$C \leq A^{\frac{1}{p}} \cdot C^{\frac{1}{q}} + B^{\frac{1}{p}} \cdot C^{\frac{1}{q}}, \quad C^{\frac{1}{p}} \leq A^{\frac{1}{p}} + B^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь когда достигается равенство.  $|f + g| = |f| + |g|$  почти всюду на  $E$  и

$$\frac{|f|^p}{A} = \frac{|g|^p}{B} = \frac{|f + g|^p}{C}$$

почти всюду на  $E$ . Из этого вытекает, что  $f = h \cdot g$ , для  $h \geq 0$  почти всюду на  $E$ . Подставляя, получаем  $h = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{p}}$  почти всюду на  $E$  (если  $g \neq 0$ ). Так что у нас получается, что  $f = \lambda g$  и  $\lambda = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{p}}$ . То есть равенство достигается только тогда, когда функции линейно зависимы, причём с положительным коэффициентом. Значит,  $L_p$  является строго нормированным. Элемент приближения является единственным. ■

А вот это уже полезное неравенство.

**Утверждение 11.7** (обобщённое неравенство Минковского). Пусть задано два измеримых пространства  $(X, \Sigma_x, \mu_x)$  и  $(Y, \Sigma_y, \mu_y)$ ,  $E \in \Sigma_x$ ,  $F \in \Sigma_y$  и задана измеримая функция  $f: E \times F \rightarrow \mathbb{R}_+$ , а  $1 \leq p < \infty$ . Тогда

$$\left( \int_E \left( \int_F f_x \, d\mu_y \right)^p \, d\mu_x \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_F \left( \int_E f_y^p \, d\mu_x \right)^{\frac{1}{p}} \, d\mu_y.$$

**Доказательство.** Нам понадобится теорема Фубини. Но это неравенство не зря называется обобщённым неравенством Минковского, так как доказывается точно так же.  $g(x) = \int_F f_x \, d\mu_y$  существует для почти всех

$x \in E$ .

$$\int_E g^p d\mu_x = \int_E g \cdot g^{p-1} d\mu_x = \int_F g^{p-1} \left( \int_F f_y d\mu_x \right) d\mu_y.$$

Теперь применяем неравенство Гёльдера к произведению двух функций.

$$\leq \int_F \left( \int_E f_y^p d\mu_x \right)^{\frac{1}{p}} d\mu_y \cdot \underbrace{\left( \int_E g^p d\mu_x \right)^{\frac{1}{q}}}_{=1}.$$

Если поделить на скобку, получится как раз обобщённое неравенство Минковского. ■

**Теорема 11.2.**  $L_p(E, \mu)$  — банахово пространство при  $1 \leq p < \infty$ .

**Доказательство.** Возьмём последовательность Коши  $\{f_n\} \subset L_p(E, \mu)$ . Тогда существует  $\{m_k\}$ :  $m_1 < m_2 < \dots$  и  $\|f_k - f_l\|_{L_p} < \frac{1}{2^n} \quad \forall k, \geq m_n$ . Такую подпоследовательность можно выбрать. И рассмотрим функцию (равенство имеет смысл в почти всех точках)

$$g(x) = |f_{m_1}(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_n}(x)|.$$

Если организовать частичные суммы  $g_n$ , то  $g_n \nearrow g$  (значит, и в степени  $p$  тоже монотонно возрастают), так как все члены ряда неотрицательны. Кроме того  $\|g_n\|_{L_p} \leq \|f_{m_1}\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \|f_{m_1}\|_{L_p} + 1$ , то есть норма конечная. По теореме о монотонной сходимости  $g \in L_p(E, \mu)$ . И отсюда  $g$  конечна почти всюду на  $E$ . Значит, ряд в определении  $g(x)$  сходится почти всюду. Если снять модули, ряд будет сходиться абсолютно почти всюду

$$f(x) = f_{m_1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_n}(x))$$

сходится абсолютно почти всюду. Тогда

$$f_{m_n}(x) = f_{m_1}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)).$$

Из того, что  $|f|^p \leq |g|^p \in L(E, \mu)$  следует, что  $f \in L_p(E, \mu)$ . Если теперь вычесть частичную сумму, получим

$$f(x) - f_{m_n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} (f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)).$$

Чтобы для бесконечной суммы неравенство можно было использовать, применяем теорему Фату

$$\|f - f_{m_n}\|_{L_p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\|_{L_p} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Если имеется в метрическом пространстве последовательность Коши такую, что имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сама сходится, что можно легко показать по неравенству треугольника. Значит, мы показали, что  $f_n \rightarrow f \in L_p(E, \mu)$ . Значит, мы доказали полноту. ■

**Лемма 11.1.** Обозначим через  $H(E, \mu)$  множество простых измеримых функций из  $L_p(E, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Утверждается, что  $H(E, \mu)$  всюду плотно в  $L_p(E, \mu)$ .

**Доказательство.** Раскладываем в разность неотрицательных  $f = f_+ - f_-$  и  $f_{\pm} = \max\{\pm f, 0\}$ . Мы доказывали, что  $\exists h_n^{\pm} \nearrow f_{\pm}$ , где  $h_n^{\pm} \in H(E, \mu)$ . Так как  $h_n^{\pm}$  интегрируемы, то и  $f_{\pm}$  будут интегрируемы. Обозначим

$$h = h_n^+ - h_n^-, \quad \|f - h\|_{L_p} \leq \|f_+ - h_n^+\|_{L_p} + \|f_- - h_n^-\|_{L_p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

по теореме о монотонной сходимости. ■

Теперь наша задача показать, что непрерывные функции всюду плотны в  $L_p$ . А для этого нужно вообще какую-то топологию ввести.

Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $(X, \Sigma, \mu)$  — измеримое пространство с регулярной мерой и все открытые множества измеримы (а значит и замкнутые и компактные).

**Теорема 11.3.** Множество  $C(X)$  непрерывных ограниченных функций (тех из них, что лежат в  $L_p$ ) всюду плотно в  $L_p(E, \mu)$  для  $1 \leq p < \infty$  (в отличие от леммы здесь  $p < \infty$ ).

**Доказательство.** Возьмём  $f \in L_p$  и  $\varepsilon > 0$ . По лемме  $\exists h \in H(E, \mu)$ , такая, что  $\|f - h\|_{L_p} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Всякая простая



функция является линейной комбинацией характеристических функций

$$h(x) = \sum_{l=1}^m h_l \chi_{H_l}(x), \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Существует  $\exists A$  — компактное и  $\exists$  открытое  $B_l$ , для которых  $A_l \subset H_l \subset B_l$  и  $\mu(B_l \setminus A_l) < (\frac{\varepsilon}{2c})^p$ , где  $c = \sum_{l=1}^m |h_k|$ .

У нас же функция уже фиксирована.

Напомним  $\rho(x, A) = \int_{y \in A} \rho(x, y)$  есть непрерывная функция, поскольку выполняется неравенство

$$\rho(x, A) \leq \rho(y, A) + \rho(x, y) \Rightarrow |\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y).$$

*Доказательство.* Доказательство этого неравенства простое  $\rho(x, A) \leq |\rho(x, z) - \rho(z, y)| + \rho(z, y) \leq \rho(x, y) \quad \forall z \in A$ .  $\square$

Ну теперь давайте построим функцию  $g(x) = \sum_{l=1}^m h_l g_l(x)$ ,  $g_l(x) = \frac{\rho(x, X \setminus B_l)}{\rho(x, A_l) + \rho(x, X \setminus B_l)}$ . При этом  $0 \leq g_l(x) \leq 1$ ,  $g_l(x) = 1$ , если  $x \in A_l$ ,  $g_l(x) = 0$ , если  $x \in X \setminus B_l$ , то есть  $x \notin B_l$ . Все эти функции непрерывны:

$$\|\chi_{H_l} - g_l\|_{L_p} \leq \mu^{\frac{1}{p}}(B_l \setminus A_l) < \frac{\varepsilon}{2c}.$$

И по неравенству Минковского получаем

$$\|h - g\|_{L_p} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|f - g\|_{L_p} \leq \|f - h\|_{L_p} + \|g - h\|_{L_p} < \varepsilon.$$

■

Закончим таким следствием

**Следствие 11.1.** В  $L_p[0, 1]$ , где  $1 \leq p < \infty$  всюду плотно множество

1.  $H([0, 1])$  простых функций;
2.  $C[0, 1]$ ;
3.  $\tilde{C}[0, 1]$ ,  $f(0) = f(1)$ ;
4.  $S$  — ступенчатые функции; для некоторого разбиения  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < 1$   $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[x_{k-1}, x_k]}(x)$ ;
5.  $P$  — множество алгебраических многочленов, то есть  $P(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^k$ ;
6.  $T$  — тригонометрических многочленов  $T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k x}$ ;
7.  $C^\infty[0, 1]$ .

## 12 Линейные операторы

Пусть  $E, F$  обозначают нормированные пространства над полем  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Норму будем в этих пространствах обозначать одинаково  $\|x\|$ .

**Определение 12.1.** *Отображение  $A: E \rightarrow F$  называется линейным оператором, если выполнено два условия*

$$A(x + y) = A(x) + A(y); \quad A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad \forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}.$$

*Норма линейного оператора определяется как*

$$\|A\| = \sup_{x \in S} \|A(x)\|, \quad S := \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Можно ввести эквивалентное определение для нормы

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}.$$

**Определение 12.2.** Оператор  $A$  называется ограниченным, если  $\forall M \subset F$  ограниченного множества образ  $A(M) = \{y = A(x) | x \in M\}$  является ограниченным в  $F$ .

**Определение 12.3.** Если  $M$  находится в некотором шаре, то есть  $M \subset S_r(x)$ , то  $M$  называется ограниченным.

Мы вводили сложное определение ограниченных множеств, оно здесь годится. А наше новое более простое определение не годится для произвольного метрического, только для нормированных.

Если норма оператора конечна, если и только если оператор ограничен. Мы с вами доказывали, что оператор ограничен, значит, непрерывен во всех своих точках.

Приведём пример  $A: L_p(E, \mu) \rightarrow L_p(E, \mu)$ , где  $1 \leq p \leq \infty$  и определяясь по формуле  $A(f) := \varphi f$ , где  $\varphi$  — ограниченная измеримая функция. Этот оператор называется оператором умножения на функцию. Докажем, что

$$\|A\| = \|\varphi\|_{L_\infty}.$$

**Доказательство.** Давайте вычислять норму.

$$\|A(f)\|^p = \int_E |\varphi \cdot f|^p d\mu.$$

Поскольку интеграл не зависит от изменения функции на множестве меры нуль, здесь будет такое неравенство

$$\|A(f)\|^p = \int_E |\varphi \cdot f|^p d\mu \leq \|\varphi\|_{L_\infty}^p \int_E |f|^p d\mu.$$

Извлекая корень, получаем такое неравенство

$$\|A\| \leq \|\varphi\|_{L_\infty}.$$

Осталось доказать обратное неравенство. Пусть  $f = \chi_A$ . Тогда (по определению существенной верхней грани)  $\exists A \subset E: \mu(A) > 0$ , такое, что

$$\forall x \in A \quad |\varphi(x)| > \|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon.$$

Подставим эту функцию в оператор

$$\|A(f)\|^p = \int_E A d\mu |\varphi|^p > (\|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon)^p \mu(A) = (\|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon)^p \int_A |f|^p d\mu.$$

Поскольку  $|A(f)| \geq (\|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon) \|f\|$ , мы и доказали, что  $\|A\| \geq \|\varphi\|_{L_\infty}$ . ■

Пусть  $\mathcal{L}(E, F) = \{A: E \rightarrow F | A \text{ — линейный и ограниченный}\}$ . Норма в этом пространстве есть  $\|A\| = \sup_{x \in S} \|A(x)\|$ . Проверим свойства нормы

**Доказательство.** Сложение и умножение определяются естественно:  $(A + B)(x) = A(x) + B(x)$ ,  $(\lambda A)(x) = \lambda \cdot A(x)$ .

1. Если  $\|A\| = 0$ , то  $A(x) = 0$  для всех  $x \in E$ . Значит,  $A = \mathcal{O}$ .

2.  $\|A + B\| = \sup_{x \in S} \|A(x) + B(x)\| \leq \sup_{x \in S} \|A(x)\| + \sup_{x \in S} \|B(x)\|$ . Значит,  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ , а  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ . ■

**Теорема 12.1.** Если  $F$  — банахово пространство, то  $\mathcal{L}(E, F)$  — банахово пространство.

**Доказательство.** Пусть  $\{A_n\} \in \mathcal{L}(E, F)$  последовательность Коши, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N \quad \|A_n - A_m\| < \varepsilon.$$

Тогда  $\|A_n(x) - A_m(x)\| < \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in E, \quad \forall n, m \geq N$ . Значит, последовательность  $\{A_n(x)\} \subset F$  является последовательностью Коши в  $F$ . Значит,

$$\exists A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$$

и это линейный оператор  $A: E \rightarrow F$ . У нас есть его сходимости в каждой точке. Покажем сходимости по норме. Устремим  $m \rightarrow \infty$  в неравенстве

$$\|A_n(x) - A(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in E, \quad \forall n \geq N.$$

■

**Теорема 12.2** (Банаха—Штейнгауза). Пусть  $E$  — банахово пространство, и задано множество линейных операторов  $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{L}(E, F)$ , и выполнено условие

$$\forall x \in E \quad \sup_{i \in I} \|A_i(x)\| < \infty.$$

Тогда отсюда вытекает, что  $\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$ .

То есть из поточечной сходимости следует сходимость по норме.

**Доказательство.** Все принципы равностепенной непрерывности здесь выполнены. Мы запишем условия равностепенной непрерывности в точке ноль.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall \|x\| < \delta, \forall i \in I \quad \|A_i(x)\| < \varepsilon$$

в силу линейности оператора. Поделим неравенство на  $\delta$ .

$$\forall \left\| \frac{x}{\delta} \right\| < 1, \forall i \in I \quad \left\| A_i \left( \frac{x}{\delta} \right) \right\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

Отсюда вытекает, что  $\|A_i\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$ . ■

**Следствие 12.1.** Пусть  $E$  — банахово пространство. И задана последовательность линейных операторов  $\{A_n\} \in \mathcal{L}(E, F)$ , сходящаяся в каждой точке, то есть  $\forall x \in E \quad A_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A(x)$ <sup>1</sup>. Тогда  $\sup_n \|A_n\| < \infty$ .

Эту теорему очень интенсивно будем применять в следующий раз. А сейчас мы докажем очень знаменитую теорему. Для начала введём некоторые понятия.

**Определение 12.4.** Пусть  $X$  — множество. Оно называется упорядоченным, если в нём задано отношение порядка  $\leq$ , то есть

1.  $x \leq x$ ;
2.  $x \leq y$  и  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ;
3.  $x \leq y$  и  $y \leq x \Rightarrow x = y$ .

**Определение 12.5.** Множество  $A \subset X$ , где  $X$  упорядочено, называется цепью, если  $\forall x, y \in A \quad x \leq y$  или  $y \leq x$ . Цепь  $A$  называется ограниченной, если  $\exists y \in X: \forall x \in A \quad x \leq y$ .

**Определение 12.6.** Элемент  $x \in X$ , где  $X$  упорядочено, называется максимальным, если из того, что  $x \leq y$ , следует, что  $x = y$ .

Следующая лемма является аксиомой, хотя все её называют леммой. Для нас она будет аксиомой, но вообще она эквивалентна одной из аксиом теории множеств.

**Лемма 12.1.** Если всякая цепь  $A$  ограничена, то в  $X$  существует максимальный элемент.

Эту аксиому мы и будем применять для доказательства теоремы.

Пусть  $E$  — линейное пространство,  $f: E \rightarrow \mathbb{F}$  — линейный функционал (он является линейным оператором, только действует в поле).

1.  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ;
2.  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$ .

Если  $E$  — нормированное пространство, то  $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$ .

**Определение 12.7.** Пространство  $E^* = \{f: E \rightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ — линейный и ограниченный}\}$  называется сопряжённым. Ограниченность  $f$  значит, что  $\|f\| < \infty$ .

Это банахово пространство.

Будем рассматривать подпространства  $L \subset E$  и линейный функционал  $f: L \rightarrow \mathbb{F}$ . Введём отношение порядка  $f \leq g$ , где  $f: L \rightarrow \mathbb{F}, g: M \rightarrow \mathbb{F}$ , если

1.  $L \subset M$ ;
2.  $\forall x \in L \quad g(x) = f(x)$ .

Говорят, что  $g$  является расширением  $f$  на  $M$ .

Напомним определение полунорм.

**Определение 12.8.**  $p: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется полунормой, если

1.  $\forall x \in E \quad p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ ;
2.  $\forall x, y \in E \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ .

<sup>1</sup> А всякая сходящаяся последовательность ограничена по норме, и можно применить теорему.

Пара  $(E, p)$  называется полунормированным пространством.

**Теорема 12.3** (Хана—Банаха). Пусть  $(E, p)$  — полунормированное пространство и  $f: L \rightarrow \mathbb{F}$  — линейный функционал,  $L \subset E$  (линейное подпространство) и выполнено условие

$$\forall x \in L \quad |f(x)| \leq p(x).$$

Тогда  $\exists g: E \rightarrow \mathbb{F}$  линейный функционал на всём  $E$ , такой, что

$$g|_L = f \text{ и } \forall x \in E \quad |g(x)| \leq p(x).$$

То есть  $g$  является продолжением  $f$  с сохранением неравенства.

**Доказательство.** Нам для заданного функционала  $f$  нужно построить продолжение на всё пространство, причём такое, чтобы выполнялось условие ограниченности. Сначала построим продолжение для линейной оболочки. Пусть  $e_1 \notin L$  и  $L_1 := \text{sp}\{e_1, L\}$ . Давайте попытаемся применить лемму Цорна или аксиому Цорна.

Вначале рассмотрим действительный случай, то есть  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ .

$$\forall x, y \in L \quad f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x - e_1) + p(y + e_1).$$

Для всех  $x$  и  $y$  получаем неравенство

$$f(x) - p(x - e_1) \leq p(y + e_1) - f(y).$$

Слева функция от  $x$ , справа — функция  $y$ . Значит,

$$\exists c_1 \in \mathbb{R}: f(x) - p(x - e_1) \leq c_1 \leq p(y + e_1) - f(y)$$

Если для некоторого  $\lambda > 0$  заменить  $x, y$  на  $\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}$ , получаем

$$\forall x \in L, \forall \lambda > 0 \quad f(x) \pm \lambda c_1 \leq p(x \pm \lambda e_1).$$

Тогда мы можем определить линейный функционал на оболочке по формуле

$$\forall x \in L, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f_1(x + \lambda e_1) := f(x) + \lambda c_1.$$

Аргумент, обозначим  $z = x + \lambda e_1$ , принадлежит именно линейной оболочке. Выполнено два условия.

$$(1) \quad \forall x \in L \quad f_1(x) = f(x).$$

$$(2) \quad \forall z \in L_1 \quad f_1(z) \leq p(z), \text{ при этом } p(-z) = p(z), \text{ значит, } |f_1(z)| \leq p(z).$$

Далее можем определить  $L_2 = \text{sp}\{e_2, L_1\}$ , где  $e_2 \notin L_1$ .

Если бы пространство имело счётную размерность, мы бы всё уже доказали.

Надо рассмотреть множество всех продолжений. Это множество упорядоченно и каждая цепь ограничена функционалом на объединении всех областей определения функционалов цепи. По лемме Цорна существует максимальное продолжение на всё пространство.

Теперь перейдём от случая действительных чисел к комплексным числам. Пусть  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ,  $f = u + iv$ , причём  $u, v$  — линейные функционалы над полем действительных чисел. Посчитаем

$$u(ix) + iv(ix) = f(ix) = if(x) = iu(x) - v(x).$$

Следовательно,  $v(x) = -u(ix)$ , и функционал записывается в виде

$$f(x) = u(x) - iu(ix).$$

Таким образом, функционал зависит только от своей действительной части. Построим функционал.  $\exists h: E \rightarrow \mathbb{R}$  линейный функционал, такой, что  $h|_L = u$  и  $\forall x \in E \quad |h(x)| \leq p(x)$ . Определяем

$$\forall x \in E \quad g(x) := h(x) - ih(ix).$$

Условие  $g|_L = f$  очевидно. Докажем, что функционал линейный над полем комплексных чисел. Достаточно доказать для  $ix$

$$g(ix) = h(ix) - ih(x) = i(h(x) - ih(ix)) = ig(x).$$

То, что он аддитивный, тоже очевидно. Ведь  $h$  аддитивный. Покажем ограниченность. Рассмотрим тригонометрическое представление  $g(x) = e^{i\theta} |g(x)|$ . В силу линейности действительное число

$$|g(x)| = e^{-i\theta} g(x) = g(e^{-i\theta} x) = h(e^{-i\theta} x) \leq p(e^{-i\theta} x) = p(x).$$

■

Саму теорему применяют редко. Важно следствие.

**Следствие 12.2.** Пусть  $E$  — нормированное пространство, а  $L \subset E$  — линейное подпространство. И пусть задан линейный ограниченный функционал  $f: L \rightarrow \mathbb{F}$ . Тогда  $\exists g: E \rightarrow \mathbb{F}$  линейный ограниченный функционал, удовлетворяющий условиям:  $f|_L = f$  и  $\|g\| = \|f\|$ , то есть существует продолжение функционала на всё пространство с сохранением его нормы.

**Доказательство.** Берём  $p(x) = \|f\|_L \cdot \|x\|$ . Это норма, но она будет и полунормой. Тогда

$$\exists g: E \rightarrow \mathbb{F}: g|_L = f, \quad |g(x)| \leq \|f\|_L \cdot \|x\| |g(x)| \Rightarrow \|g\| \leq \|f\|.$$

Тогда, поскольку  $\|f\|_L = \sup_{x \in S \cap L} |f(x)|$ , а норма  $g$  считается, как  $\sup$  по большему множеству,  $\|g\| = \|f\|$ . ■

**Теорема 12.4** (Рисса). Если функционал  $\alpha \in C^*[a, b]$ , то есть функционал является линейным и ограниченным, определённым на пространстве  $C[a, b]$ <sup>1</sup>, то  $\exists F \in BV[a, b]$ , такая, что

$$1. \quad \forall f \in C[a, b] \quad \alpha(f) = \int_a^b f dF;$$

$$2. \quad \|\alpha\| = \text{Var}(F).$$

**Доказательство.** Так как  $C[a, b] \subset B[a, b]$ , существует продолжение  $\alpha \in B^*[a, b]$  по следствию из теоремы Хана—Банаха. (Не будем вводить новую букву, пусть тоже  $\alpha$ .) Рассмотрим  $F(t) = \alpha \left( \underbrace{\chi_{[a, t)}}_{u_t} \right)$ <sup>2</sup>,  $t \in [a, b]$ ,  $F(a) = 0$ .

Рассмотрим разбиение  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k} (F(x_k) - F(x_{k-1})) =$$

Подставим определение функции  $F$

$$= \sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k} (\alpha(u_{x_k}) - \alpha(u_{x_{k-1}})) = \alpha \left( \sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k} (u_{x_k} - u_{x_{k-1}}) \right).$$

Заметим, что

$$\left| \sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k} (u_{x_k} - u_{x_{k-1}}) \right| \leq 1.$$

Значит,

$$\alpha \left( \sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k} (u_{x_k} - u_{x_{k-1}}) \right) \leq \|\alpha\|.$$

Таким образом, доказано  $\text{Var}_a^b(F) \leq \|\alpha\|$ .

Возьмём  $f \in C[a, b]$ , для разбиения  $\tau$  возьмём также  $f_\tau(x) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(u_{x_k} - u_{x_{k-1}})$ , где  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ . Так как функция непрерывна,  $f_\tau \xrightarrow{d(\tau) \rightarrow 0} f$ .

$$\alpha(f) = \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} \alpha(f_\tau) = \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \int_a^b f dF.$$

Это и есть интеграл Римана—Стилтьеса. Ну а модуль оценивается

$$\left| \int_a^b f dF \right| \leq \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n |f(\xi_k)| |F(x_k) - F(x_{k-1})|.$$

Значит,  $\|\alpha\| \leq \text{Var}_a^b(F) \leq \|f\|_C \text{Var}_a^b(F)$ . ■

Теперь сформулируют ещё одну теорему без доказательства.

**Теорема 12.5** (Рисса). Если  $\alpha \in L_p^*(E, \mu)$ , где  $1 \leq p < \infty$ , то  $\exists g \in L_q(E, \mu)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , такая, что

<sup>1</sup> Для тех, кто не знает, что такое  $C[a, b]$  — это пространство непрерывных функций  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{F}$  и  $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .

<sup>2</sup> Полуинтервал для непрерывности слева. Доказывать не буду, доказательство очень кропотливое.

$$1. \forall f \in L_p(E, \mu) \quad \alpha(f) = \int_E f g d\mu;$$

$$2. \|\alpha\| = \|g\|_{L_q}.$$

**Следствие 12.3.**  $L_p^*(E, \mu) = L_1(E, \mu)$  для  $1 \leq p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

А для непрерывных имеем  $C^*[a, b] = V_0[a, b]$ , причём

$$1. F \in BV[a, b];$$

$$2. \forall t \in (a, b) \quad F(t-0) = F(t);$$

$$3. F(a) = 0.$$

## 13 Сильная и слабая сходимости линейных операторов и линейных функционалов

Пусть  $E, F$  — нормированные пространства,  $\mathcal{L}(E, F)$  — пространство ограниченных операторов.

**Определение 13.1.** Последовательность операторов  $\{A_n\} \in \mathcal{L}(E, F)$  сходится сильно  $A_n \rightarrow A$  к оператору  $A$ , если

$$\forall x \in E \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = A(x).$$

Сходится равномерно, если  $\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , то есть сходится по норме.

Сильная сходимость — это поточечная сходимость, а равномерная значит по норме.

Соответственно вводятся понятия сильной и равномерной ограниченности.

**Определение 13.2.** Подмножество  $M \subset \mathcal{L}(E, F)$  равномерно ограничено, если

$$\exists C > 0: \forall A \in M \quad \|A\| \leq C.$$

**Определение 13.3.**  $M \subset \mathcal{L}(E, F)$  сильно ограничено, если

$$\forall x \in E \exists C_x > 0: \forall A \in M \quad \|A(x)\| \leq C_x.$$

Давайте свойства обсудим.

**Утверждение 13.1.** Если  $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$  равномерно, то сходится сильно.

**Доказательство.** Доказательство почти очевидно.

$$\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \|A_n(x) - A(x)\| \leq \|A_n - A\| \cdot \|x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall x \in E.$$

■ Надо понимать, что сходимость здесь везде по норме. Просто в сильной сходимости сходимость по норме  $F$ .

Нужно сделать следующее замечание. Если  $\dim E < \infty$ , то верно и обратное утверждение. Я его доказывать не буду, это можно сделать, пользуясь теоремой об эквивалентности норм в конечномерном пространстве.

**Утверждение 13.2.** Если  $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$  сильно, то  $\{A_n\}$  сильно ограничена, и выполнено вот такое неравенство

$$\|A\| \leq \liminf \|A_n\|.$$

Неравенство очень похоже на лемму Фату.

**Доказательство.** Первое свойство почти очевидно. Если сходится для каждого  $x$ , то ограничена по норме  $F$ . Отсюда и следует сильная ограниченность.

Докажем неравенство.

$$\exists \{n_k\}: \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_{n_k}\| = \liminf \|A_n\|$$

по определению нижнего предела. Так как норма является непрерывной функцией, а последовательность сходится в каждой точке, имеем

$$\|A(x)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_{n_k}(x)\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_{n_k}\| \cdot \|x\| =$$

последнее по определению нормы оператора. Отсюда получаем

$$= \liminf \|A_n\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|A\| \leq \liminf \|A_n\|.$$

■

Давайте приведём один пример, когда последовательность сходится сильно, но не сходится равномерно. В конечномерном пространстве вы такой пример не приведёте. Примеров всё же много. Мы рассмотрим пространство  $L_p(E, \mu)$ ,  $1 \leq p < \infty$  и рассмотрим последовательность

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E, \quad 0 < \mu(E \setminus E_n) \rightarrow 0.$$

Например, можно взять  $E = [0, 1]$  и  $E_n = [1/n, 1]$ . Рассмотрим оператор

$$A_n f = \varphi \cdot f, \quad \varphi_n = \chi_{E_n} = \begin{cases} 1, & x \in E_n; \\ 0, & x \notin E_n. \end{cases}$$

Мы даже считали норму такого оператора уже.

$$\|A_n f - f\|^p = \int_{E \setminus E_n} |f|^p d\mu.$$

Но так как  $\mu(E \setminus E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , то по абсолютной непрерывности интеграла Лебега, сам интеграл стремится к нулю. Таким образом,  $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$  сходится сильно к тождественному оператору. Но

$$\|A_n - I\| = \|\chi_{(E \setminus E_n)}\|_{L_\infty} = 1.$$

Просто потому, что она будет равняться верхней грани функции на множестве. Значит, не сходится равномерно, причём вообще ни к какому оператору.

**Утверждение 13.3.** Пусть  $E$  — банахово пространство. Тогда  $M \subset \mathcal{L}(E, F)$  сильно ограничено, если и только если  $M$  равномерно ограничено.

**Доказательство.** Необходимость по теореме Банаха—Штенгауза, а достаточность из неравенства

$$\|A(x)\| \leq \underbrace{\|A\|}_{\leq C} \cdot \|x\|.$$

Справа же стоят нормы, равномерно ограниченные. ■

**Лемма 13.1.** Пусть  $E$  — банахово пространство,  $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(E, F)$  и  $A_n \rightarrow A$  сильно. Тогда оператор  $A$  тоже является ограниченным, то есть  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ .

**Доказательство.** По теореме Банаха—Штенгауза верхняя грань  $\sup_n \|A_n\| \leq C$ , то есть конечна. А значит оператор будет ограничен, поскольку  $A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$ ,  $\forall x \in E$  и  $\|A\| = \liminf_n \|A_n\|$ . ■

**Определение 13.4.** Пусть  $K \subset E$  — система элементов. Через  $M$  обозначаем  $M = \overline{\text{sp}}(K)$  — замкнутую линейную оболочку.

$$\text{sp}(K) = \left\{ y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{F}, x_i \in K \right\},$$

$K \subset E$  называется полной, если  $\overline{\text{sp}}(K) = E$ .

**Теорема 13.1** (критерий сильной сходимости). Пусть  $E, F$  — банаховы пространства,  $\{A_n\} \in \mathcal{L}(E, F)$ . Тогда  $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$  сильно, если и только если

$$(1) \sup_n \|A_n\| < \infty;$$

$$(2) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = A(x), \forall x \in K, \text{ где } K \subset E \text{ — некоторая полная система.}$$

**Доказательство.** Необходимость очевидна. Первое условие вытекает из следствия теоремы Банаха—Штенгауза. А второе условие прямо из определения вытекает. Так что нужно доказать достаточность.

Обозначим  $L = \text{sp}(K)$ . Тогда из условия два вытекает  $\forall x \in K \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = A(x)$ . Значит,  $L$  всюду плотно в  $E$ . Значит,  $\forall \varepsilon > 0$

$$\forall x \in E \exists y \in L: \|x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{4C},$$

где  $C > \sup_n \|A_n\|$  (можно было равно написать, но с делением на ноль надо было бы быть аккуратнее). Далее

$$\exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N \quad \|A_n(y) - A_m(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

И запишем неравенство треугольника

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leq \|A_n(x) - A_n(y)\| + \|A_n(y) - A_m(y)\| + \|A_m(y) - A_m(x)\|.$$

Второе слагаемое  $< \frac{\varepsilon}{2}$ , а для первого и третьего слагаемых нужно ещё написать такое неравенство

$$\forall n, m \geq N \quad \|A_n(x) - A_n(y)\| \leq \|A_n\| \cdot \|x - y\|.$$

И всё будет меньше  $\varepsilon$ . В силу полноты  $F$   $A_n$  будет сходиться и по лемме оператор будет ограничен. ■

### 13.1 Функционалы

С операторами мы закончили. Переходим к функционалам.

**Определение 13.5.**  $\{f_n\} \subset E^*$  слабо\* сходится, если

$$\forall x \in E \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

. Сходится слабо, если сходится в каждой точке.

Множество функционалов  $M \subset E^*$  называется слабо\* ограниченным, если

$$\forall x \in E \exists C_X > 0: \quad \forall f \in M \quad |f(x)| \leq C_X.$$

Далее свойства легко переносятся из того, что мы только делали для операторов. И я передоказывать не буду.

**Утверждение 13.4.** Если  $f_n \rightarrow f$  по норме, то  $f_n \rightarrow f$  сходится\* слабо.

**Утверждение 13.5.** Если  $f_n \rightarrow f$  сходится слабо\*, то  $\{f_n\}$  слабо\* ограничено.

**Утверждение 13.6.** Пусть  $E$  — банахово пространство. Тогда  $M \subset E^*$  слабо\* ограничено, если и только если  $M$  ограничено по норме.

Ну и давайте запишем критерий.

**Теорема 13.2** (критерий слабой\* сходимости). Пусть  $E$  — банахово пространство. Тогда  $\{f_n\} \subset E^*$  сходится слабо к  $f$ , если и только если

$$(1) \sup_n \|f_n\| < \infty;$$

$$(2) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in K, \text{ где } K — \text{некоторая полная система элементов.}$$

Пример. Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $C(X)$  — пространство ограниченных непрерывных функций и  $\sup$ -нормой. Возьмём последовательность  $x_n \in X$ ,  $x \in X: x \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ . Для каждой точки рассмотрим функционал Дирака

$$\delta_{x_n}(f) := f(x_n).$$

Имеем  $\forall f \in C(X) \quad \delta_{x_n}(f) = f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x) = \delta_x(f)$ , то есть  $\delta_{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \delta_x$  сходится слабо\*. При этом  $\|\delta_n - \delta\| = 2$  для отрезка и не стремится к нулю. Значит, последовательность не сходится по норме.

**Теорема 13.3.** Отображение  $J: E \rightarrow E^{**}$ , определённое по формуле  $J(x) = \delta_x$ , где  $\delta_x(f) := f(x) \quad \forall f \in E^*$  — функционал Дирака из второго сопряжённого пространства (если докажем, что он ограничен). Тогда  $J$  является изометричным отображением, то есть

$$\forall x \in E \quad \|J(x)\| = \|x\|.$$

Считается, что пространство является подпространством своего второго сопряжённого. Введём перед доказательством определение.

**Определение 13.6.** Если  $J(E) = E^{**}$ ,  $E$  называется рефлексивным.

Пространство  $L_p(E, \mu)$  рефлексивно, если  $1 < p < \infty$ . Это вытекает из теоремы, которую мы не доказывали, об общем виде функционалов в  $L_p^*$ .

**Доказательство.** Пусть  $S^* \subset E^*$  — единичный шар, то есть

$$S^* = \{f \in E^* \mid \|f\| \leq 1\}.$$

Тогда  $\forall x \in E, \forall f \in S^* \quad |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$ . Отсюда вытекает, что норма функционала Дирака оценивается  $\|\delta_x\| \leq 1$ . Таким образом, так как  $J(x) = \delta_x$ ,  $\|J(x)\| \leq \|x\|$ .

Осталось доказать обратное неравенство. Для этого применим теорему Хана—Банаха. Берём линейную оболочку фиксированного элемента  $x$  и определим функционал

$$L = \text{sp}\{x\}, \quad f(\lambda x) := \lambda \|x\|, \quad \|f\|_L = 1.$$



По теореме Хана—Банаха существует функционал  $g \in E^*$ , у которого норма  $\|g\| = 1$  и  $g(y) = f(y) \quad \forall y \in L$ . Тогда  $\delta_x(g) = g(x) = \|x\|$ . Значит,  $\|\delta_x\| = \|x\|$ . Значит, имеет место нужное равенство. ■

**Определение 13.7.** Последовательность элементов  $\{x_n\} \subset E$  нормированного пространства сходится слабо (уже без звёздочки, так как это для элементов, а не для функционалов), если

$$\forall f \in E^* \quad \exists \lim f(x_n) = f(x).$$

Множество  $M \subset E$  слабо ограничено, если

$$\forall f \in E^* \quad \exists C_f > 0: \forall x \in E \quad |f(x)| \leq C_f.$$

Одни и те же объекты можно интерпретировать как элементы и как функционалы на пространствах.

**Утверждение 13.7.** Если  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$  по норме, то  $x \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$  слабо.

**Утверждение 13.8.** Если  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$  слабо, то  $\{x_n\}$  слабо ограничена и  $\|x\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ .

**Утверждение 13.9.** Множество  $M \subset E$  слабо ограничено, если и только если ограничено по норме<sup>1</sup>.

**Теорема 13.4** (критерий слабой сходимости).  $\{x_n\} \subset E$  слабо сходится  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \in E$ , если и только если выполнено два условия

$$(1) \text{ Нормы равномерно ограничены, то есть } \sup_n \|x_n\| < \infty;$$

$$(2) \forall f \in K \subset E^* \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x), \text{ где } K \text{ — некоторая полная система элементов.}$$

Давайте ещё один примерчик. Слабая сходимость в  $C[a, b]$ . Утверждается, что последовательность функций  $\{f_n\} \subset C[a, b]$   $f_n \rightarrow f \in C[a, b]$  слабо, если и только если

$$(1) \sup_n \|f_n\| < \infty;$$

$$(2) \forall x \in [a, b] \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

**Доказательство.** Необходимость вытекает из критерия. Для второго условия нужно в качестве  $x_n$  взять функционалы Дирака.

А достаточность вот как. Мы знаем, что всякий  $\alpha \in C^*[a, b]$  является интегралом Римана—Стилтьеса  $\alpha(f) = \int_a^b f dF$ . Интеграл Римана—Стилтьеса совпадает с интегралом Лебега—Стилтьеса, для которого есть теорема о предельном переходе. ■

**Определение 13.8.** Нормированное пространство  $E$  называется сепарабельным, если в  $E$  существует счётная полная система элементов  $K = \{x_n\}$ .

Построим метрику в сопряжённом пространстве.

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{1 + |f(x_n) - g(x_n)|}, \quad f, g \in E^*. \quad (6)$$

Вот такую обычно пишут в учебниках. Можно и по-другому. А какие свойства выполнены?

$$(1) \rho(f, g) = \rho(g, f);$$

$$(2) \rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g);$$

$$(3) \rho(f, g) = 0 \Rightarrow f(x_n) = g(x_n) \quad \forall n. \text{ Значит, } \forall y \in L \quad f(y) = h(y), \text{ то есть } f = g.$$

**Доказательство.** Неравенство треугольника. Берём функцию  $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$  для  $t \geq 0$ . Очевидно

$$\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b).$$

В определение (6) в модуле прибавляем и вычитаем  $\pm h$  и раскрываем по неравенству треугольника для чисел. ■ То есть мы получаем метрическое пространство. Мы будем эту метрику рассматривать лишь на единичном шаре.

**Лемма 13.2.** Последовательность  $\{f_n\} \subset S^*$  сходится слабо\*  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ , если и только если  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  в  $(S^*, \rho)$ . Иными словами, слабая сходимость равносильна сходимости по метрике.

<sup>1</sup> Условие банаховости не нужно, так как функционал Дирака рассматривается на сопряжённом пространстве, а оно всегда банахово.

**Доказательство. Необходимость.** Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ .  $\exists m \in \mathbb{N}$ :  $\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$ .

$$\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad |f_n(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Следовательно, в метрике знаменатель отбрасываю и  $2^m$  тоже отбрасываю и будет неравенство.

$$\rho(f_n, f) \leq \sum_{k=1}^m |f_n(x_k) - f(x_k)| + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Значит, доказали необходимость.

**Достаточность.** Пусть  $\forall n \geq N \quad \rho(f_n, f) < \varepsilon$ . Тогда каждое слагаемое в сумме  $< \varepsilon$ , то есть

$$\frac{|f_n(x_k) - f(x_k)|}{1 + |f_n(x_k) - f(x_k)|} < 2^k \varepsilon.$$

Значит,  $|f_n(x_k) - f(x_k)| < \frac{2^k \varepsilon}{1 - 2^k \varepsilon}$ . И  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$ . ■

Ну и осталось только теорему доказать.

**Теорема 13.5.** Пусть  $E$  — сепарабельное пространство. Тогда шар  $(S^*, \rho)$  является слабо\* компактным метрическим пространством (всякая последовательность имеет слабо сходящуюся подпоследовательность).

**Доказательство.** Рассмотрим  $\{f_n\} \subset S^*$ . Докажем, что эта последовательность сходится на множестве  $K = \{x_n\}$  — счётной и полной системе в  $E$ . Берём последовательность  $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ . Это ограниченная последовательность чисел. Она имеет сходящуюся подпоследовательность  $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$ .

Далее берём  $\{f_n^{(1)}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ . Это ограниченная последовательность чисел. Она имеет сходящуюся подпоследовательность  $\{f_n^{(2)}(x_2)\}$ .

И так далее.

Берём диагональную последовательность  $f_{m_n} = f_n^{(n)} \in \{f_n\}$ . Поскольку последовательность диагональная, она будет сходиться в каждой точке  $x_n \in K$ . Ну всё, значит мы имеем ограниченную подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке полной системы элементов. Очевидно, она сходится слабо  $f_{m_n} \rightarrow f \in S^*$ . И теорема доказана. ■

## 14 Гильбертовы пространства

Начнём с определений. Сначала определим евклидово бесконечномерное пространство. Обычно математики считают, что евклидово пространство обязательно конечномерное, но нам будет удобно определить иначе.

**Определение 14.1.** Пусть  $E$  — линейное пространство на поле  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Для каждой пары элементов  $\forall x, y \in E$  определено скалярное произведение  $\langle x, y \rangle$ , если выполнены следующие свойства.

$$1. \forall x, y \in E \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

2. Этот функционал является линейным по первому аргументу

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}, x, y \in E \quad \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle.$$

3. Скалярный квадрат положительно определён как квадратичная форма, то есть  $\langle x, x \rangle \geq 0$  и  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Пространство вместе со скалярным произведением называется евклидовым пространством. На нём вводится евклидова норма  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  и евклидова метрика  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ .

Давайте проверим, что нами действительно введена норма.

Следующее неравенство Коши доказал для последовательностей, а Буняковский доказал для интегралов. Иногда ещё называют неравенством Шварца.

**Утверждение 14.1** (Неравенство Коши—Буняковского).  $\forall x, y \in E \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ .

**Доказательство.** Берём  $z = tx + \lambda y$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{|\langle x, y \rangle|}$ ,  $|\lambda| = 1$  и раскрываем скалярный квадрат

$$\langle z, z \rangle = t^2 \langle x, x \rangle + 2t \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \langle x, y \rangle) + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle = t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \geq 0.$$

Это выполнено для любого  $t$ , значит, есть условие на неотрицательность дискриминанта:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2.$$

причём отсюда же вытекает, что в случае равенства  $z = tx + \lambda y = 0$ , то есть  $x$  и  $y$  линейно зависимы. ■

**Утверждение 14.2.**  $\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Доказательство.** Берём скалярный квадрат и раскрываем по свойствам скалярного произведения.

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Это неравенство верно тогда, когда верно неравенство Коши—Буняковского. Если же  $\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|$ , то  $x = \lambda y$ , где  $\lambda \in \mathbb{F}$  и  $\operatorname{Re}\lambda = |\lambda| \geq 0$ . ■

Таким образом евклидово пространство является строго нормированным. Это нам пригодится, когда будем говорить об элементе наилучшего приближения.

**Утверждение 14.3** (Равенство параллелограмма).  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ .

**Доказательство.** Доказательство очень простое

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

■

Оказывается, это равенство является характеристическим свойством евклидова пространства.

**Утверждение 14.4.** Если нормированное пространство таково, что выполняется равенство параллелограмма, то пространство евклидово, то есть существует скалярное произведение, порождающее заданную норму.

Доказательство этого утверждения можно прочесть в учебнике «Колмогоров—Фомин».

$B(X)$  не является евклидовым пространством. Пусть  $X = A \sqcup B$ ,  $f(x) = \chi_A(x)$ ,  $g(x) = \chi_B(x)$ , Нормы  $\|f\|_B := \sup_{x \in X} |f(x)|$ . Значит

$$\|f\| = \|g\| = \|f + g\| = \|f - g\| = 1.$$

И неравенство параллелограмма не выполняется.

**Утверждение 14.5.** Непрерывность скалярного произведения  $\langle x, y \rangle$  для  $x, y \in E$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать, что оно непрерывно в точке  $x_0, y_0$ . Применяем неравенство треугольника для модуля.

$$|\langle x, y \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| \leq |\langle x - x_0, y_0 \rangle| + |\langle x_0, y - y_0 \rangle| + |\langle x - x_0, y - y_0 \rangle| \leq$$

Если снять модули, неравенство превращается в равенство. Это так, отступление.

Теперь применяем неравенство Коши—Буняковского

$$\leq \|x - x_0\| \cdot \|y_0\| + \|x_0\| \cdot \|y - y_0\| + \|x - x_0\| \cdot \|y - y_0\|$$

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Возьмём  $C > \max\{\|x_0\|, \|y_0\|\}$  Берём  $0 < \delta < \min\{\frac{\varepsilon}{3C}, C\}$ . Тогда для  $\|x - x_0\| < \delta$  и  $\|y - y_0\| < \delta$  имеем

$$\leq \|x - x_0\| \cdot \|y_0\| + \|x_0\| \cdot \|y - y_0\| + \|x - x_0\| \cdot \|y - y_0\| < \varepsilon.$$

■

**Утверждение 14.6** (Неравенство Бешпо—Леви). Пусть  $L \subset E$  линейное подпространство,  $x \in E \setminus L$ ,  $d = \rho(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\|$ . Утверждается, что

$$\forall y, z \in E \quad \|y - z\| \leq \sqrt{\|x - y\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x - z\|^2 - d^2}.$$

Мы это неравенство докажем, используя только свойства скалярного произведения, то есть без геометрических соображений.

**Доказательство.** Пусть  $u = \frac{ty+z}{t+1} \in L$ ,  $\|x - u\| \geq d$ . Рассмотрим скалярный квадрат следующего вида

$$\|t(x - y) + x - z\|^2 = \|(t+1)(x - u)\|^2 = (t+1)^2 \|x - u\|^2 \geq (t+1)^2 d^2.$$

Теперь сам скалярный квадрат раскроем. Я ещё кое-что сразу перенесу из правой части неравенство в левую.

$$t^2(\|x - y\|^2 - d^2) + 2t(\operatorname{Re}\langle x - y, x - z \rangle - d^2) + (\|x - z\|^2 - d^2) \geq 0.$$

Опять получили, как в доказательстве неравенства Коши—Буняковского, квадратный трёхчлен. Условие на дискриминант принимает вид

$$(\operatorname{Re}\langle x - y, x - z \rangle - d^2)^2 \leq (\|x - y\|^2 - d^2)(\|x - z\|^2 - d^2).$$

Мы теперь будем использовать это неравенство.

$$\begin{aligned} \|y - z\| &= \|(x - z) - (x - y)\|^2 = \|x - z\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x - z, x - y \rangle + \|x - y\|^2 = \\ &= (\|x - z\|^2 - d^2) - 2(\operatorname{Re}\langle x - z, x - y \rangle - d^2) + (\|x - y\|^2 - d^2) \leq \\ &\leq (\|x - z\|^2 - d^2 + 2\sqrt{(\|x - z\|^2 - d^2)(\|x - y\|^2 - d^2)} + (\|x - y\|^2 - d^2)). \end{aligned}$$

А это равносильно доказываемому неравенству.

**Определение 14.2.** Элементы  $x, y \in E$  называются ортогональными  $x \perp y$ , если  $\langle x, y \rangle = 0$ .

$$x \perp L, \text{ если } \forall y \in L \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

$$M \perp L, \text{ если } \forall x \in M, \forall y \in L \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

**Лемма 14.1.** Пусть  $L \subset E$  линейное подпространство,  $x \in E$ . Тогда

$$\rho(x, L) = \|x - y\|, \quad y \in L \Leftrightarrow x - y \perp L.$$

**Доказательство.** Необходимость от противного. Пусть  $\exists z \in L: \langle x - y, z \rangle \neq 0$ . Рассмотрим такой элемент  $u = y + \lambda z$ , где  $\lambda = \frac{\langle x - y, z \rangle}{\langle z, z \rangle}$ . Тогда по свойствам скалярного произведения.

$$\|x - u\|^2 = \|(x - y) - \lambda z\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}\langle x - y, z \rangle) + |\lambda|^2 \underbrace{\langle z, z \rangle}_{\neq 0} = \|x - y\|^2 - \underbrace{|\lambda|^2 \langle z, z \rangle}_{\neq 0}.$$

Отсюда видно, что необходимость доказана.

Достаточность. Пусть  $\forall z \in L \quad \langle x-y, z \rangle = 0$ . Так как  $z$  ортогонален, могу заменить  $\langle x-y, x-y \rangle = \langle x-y, x-z \rangle$ . Тогда

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x - y, x - z \rangle \leq \|x - y\| \cdot \|x - z\|.$$

Можно сократить, получим  $\forall z \in L \quad \|x - y\| \leq \|x - z\|$ .

**Теорема 14.1.** Пусть  $L = \text{sp}\{x_1, \dots, x_n\}$ , где  $x_1, \dots, x_n \in E$  линейно независимы. Пусть также  $x \in E \setminus L$ . Утверждается, что расстояние выражается через определители

$$\rho(x, L) = \sqrt{\frac{D(x_1, \dots, x_n, x)}{D(x_1, \dots, x_n)}}, \quad D(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_n, x_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_1, x_n \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}$$

Этот определитель, составленный из скалярных произведений, называется определителем Грама.

**Доказательство.** В строго нормированном пространстве элемент наилучшего приближения единственный, то есть  $\exists! y \in L: \rho(x, L) = \|x - y\| = d$ . Запишем такой скалярный квадрат.

$$\langle x - y, x - y \rangle = \langle x - y, x \rangle = d^2; \quad \langle y, x \rangle = \langle x, x \rangle - d^2.$$

Отсюда если мы запишем  $y$  в виде линейной комбинации  $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in L$ ,  $\lambda_k \in \mathbb{F}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , то получим систему уравнений

[illegible]

Так как элемент единственный, система имеет единственное решение, значит, ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы. Определитель расширенной матрицы будет равен нулю. Последний столбец можно представить в виде суммы двух столбцов. Таким образом,

$$D(x_1, \dots, x_n, x) - d^2 D(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Чтобы доказать, что второе слагаемое не равно нулю, нужно применить метод индукции. При  $n = 1$  верно. Далее по индукции доказываем, что определитель Грама не равен нулю, когда элементы линейно независимы. Хотя вы можете это помнить из линейной алгебры. ■

## 14.1 Гильбертовы пространства

**Определение 14.3.** Полное евклидово пространство  $H$  называется гильбертовым пространством.

Пример:  $\mathcal{L}_2(E, \mu)$  является гильбертовым пространством. Можем ввести скалярное произведение по формуле

$$\forall f, g \in \mathcal{L}_2(E, \mu) \quad \langle f, g \rangle := \int_E f \bar{g} d\mu, \quad \|f\|_{\mathcal{L}_2} = \left( \int_E |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Другой пример. Частный случай  $\mathcal{L}_2$ , а именно  $l_2$ . Оно тоже является гильбертовым и часто его используют для примеров. Напомню, что это последовательности  $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  элементов поля  $x_n \in \mathbb{F}$ , для которых  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ . Скалярное произведение определяется как

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n, \quad \|x\| = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Это частный случай  $\mathcal{L}_2$ , а именно когда  $E = \mathbb{N}$ , а мера  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu(\{n\}) = 1$ , которую можно продолжить.

**Теорема 14.2** (о наилучшем приближении). Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $L \subset H$  — замкнутое подпространство. Тогда

$$\forall x \in H \quad \exists! y \in L: \rho(x, L) = \|x - y\|.$$

**Доказательство.** Главное доказать существование, единственность очевидна. Пусть  $d = \rho(x, L)$ . Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists y_n \in L: \|x - y_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2}.$$

Теперь применяем неравенство Бешпо—Леви.

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \|y_n - y_m\| \leq \sqrt{\|x - y_n\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x - y_m\|^2 - d^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

То есть  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность Коши в  $H$ . Тогда  $\exists y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in L$  в силу замкнутости  $L$ . А так как скалярное произведение непрерывно по 14.5, а переход к пределу сохраняет нестрогие неравенства (курс мат. анализа), имеем

$$\|x - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| \leq d.$$

Ну а меньше быть не может, значит, равняется. ■

**Теорема 14.3** (об ортогональном разложении). Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $L \subset H$  — замкнутое подпространство. Определим

$$L^{\perp} := \{x \in H \mid \forall y \in L \quad \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Тогда  $H = L \oplus L^{\perp}$ .

Мы здесь ещё утверждаем, что прямое произведение топологий совпадает с топологией на  $H$ , это мы доказывать не будем, хотя это совсем просто.

**Доказательство.** По теореме о наилучшем приближении

$$\forall x \in H \quad \exists! y \in L: \rho(x, L) = \|x - y\|.$$

Определим ортогональную проекцию  $P(x) = y \in L, P: H \rightarrow L$ . Мы можем ещё рассмотреть элемент  $z = x - y \perp L$  по доказанной лемме 14.1. Поэтому  $x = y + z$ , где  $y \in L$ , а  $z \in L^{\perp}$ .

Осталось доказать, что подпространства не пересекаются. Для этого нужно доказать единственность разложения. Пусть у нас есть два разложения  $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$ , Тогда  $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in L \cap L^{\perp}$ . Значит, эти элементы-разности ортогональны самим себе, то есть равны нулю. Таким образом,  $L \cap L^{\perp} = \{0\}$ . ■

**Следствие 14.1.** Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $L \subset H$  — линейное подпространство. Тогда  $L$  всюду плотно в  $H$ , если и только если  $L^{\perp} = 0$ .

**Доказательство.** Докажем необходимость. Если  $L$  всюду плотно в  $H$ , то по определению  $\bar{L} = H$ . Значит, всякий элемент из  $H$  является пределом последовательности элементов из  $L$ , то есть

$$\forall x \in H \quad \exists x_n \in L: x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x.$$

Тогда в силу непрерывности скалярного произведения 14.5

$$\forall x \in H, \forall y \in L^{\perp}: y \neq 0 \quad \langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, \underbrace{y}_{\neq 0} \rangle = 0.$$

Поэтому отсюда вытекает, что  $L^{\perp} \subset H^{\perp}$ , ну а  $H^{\perp} = \{0\}$ . И необходимость доказана.

Достаточность. Пусть  $L^\perp = \{0\}$ . Ну а  $(\bar{L})^\perp \subset L^\perp = \{0\} \Rightarrow (\bar{L})^\perp = \{0\}$ . Значит,  $H = \bar{L} \oplus (\bar{L})^\perp = \bar{L}$ . ■

В необходимости достаточно евклидовости пространства, а в достаточности существенна полнота гильбертова пространства. Пример на случай, когда для евклидова пространства эта достаточность не верна. Рассмотрим  $C[0, 1] \subset \mathcal{L}_2[0, 1]$  (здесь, конечно, берётся мера Лебега на отрезке  $[0, 1]$ ).  $E = C[0, 1]$  евклидово, если рассматривать скалярное произведение и норму из  $\mathcal{L}_2$ . Теперь рассмотрим множество многочленов

$$M = \left\{ P(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k \mid P \perp \chi_{[0, 1/2]} \right\}.$$

Ясно, что  $M \subset C[0, 1]$ . И его ортогональное дополнение  $M^\perp = 0$  в  $C[0, 1]$ , так как в  $\mathcal{L}_2$  ортогональным дополнением будет прямая, натянутая на  $\chi_{[0, 1/2]}$ .  $M$  не является всюду плотным в  $C[0, 1]$ , если бы являлось, то и в  $\mathcal{L}_2$  тоже, а это не верно.

## 15 Ортонормированные системы

Сначала мы докажем одно следствие теоремы об ортогональном разложении. Оно опирается на ещё несколько теорем.

**Теорема 15.1** (Рисса). Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $\alpha \in H^*$ . Тогда  $\exists! y \in H$ :

1.  $\forall x \in H \quad \alpha(x) = \langle x, y \rangle$ ;
2.  $\|\alpha\| = \|y\|$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $L$  ядро этого функционала  $L = \ker(\alpha) = \{x \in H \mid \alpha(x) = 0\}$ . Так как функционал ограниченный, он непрерывный,  $L \subset H$  замкнутое подпространство. Если  $L^\perp = 0$ , то по теореме об ортогональном разложении  $L = H \Rightarrow \alpha = 0$ . Тогда можно взять  $y = 0$ .

Теперь предположим, что  $L^\perp \neq 0$ . Тогда  $\exists z \in L^\perp: \|z\| = 1$  (потому что ортогональное дополнение имеет элемент неравный нулю, возьмём его и нормируем). Положим  $u = \alpha(x)z - \alpha(z)x$ . Очевидно,  $\alpha(u) = 0$ . Значит,  $u \in L$ . Поэтому

$$0 = \langle u, z \rangle = \alpha(x)\langle z, z \rangle - \alpha(z)\langle x, z \rangle = \alpha(x) - \langle x, y \rangle,$$

где элемент  $y = \overline{\alpha(z)}z$ . Значит, мы нашли элемент  $y$ , для которого  $\forall x \in H \quad \alpha(x) = \langle x, y \rangle$ .

Докажем его единственность. Пусть  $\forall x \in H \quad \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$ . Тогда  $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$  и, значит,  $y_1 - y_2 = 0$ .

Ну и теперь осталось доказать последнее условие теоремы. В силу неравенства Коши—Буняковского, имеем

$$|\alpha(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|\alpha\| \leq \|y\|, \quad x = \frac{y}{\|y\|} \Rightarrow \|\alpha\| = \|y\|.$$

■

Отсюда вытекает

**Следствие 15.1.**  $H^*$  изоморфно  $H$ .

Пример 1.  $H = l_2$ ,  $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \in l_2, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n \bar{y}_n$ . Тогда

$$\forall \alpha \in l_2^* \quad \exists y \in l_2: \forall x \in l_2 \quad \alpha(x) = \langle x, y \rangle, \|\alpha\| = \|y\|_{l_2}.$$

Такой же пример можно привести и для  $L_2(E, \mu)$ ,  $\|f\| = \left( \int_E |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}, \langle f, g \rangle = \int_E f \bar{g} d\mu$  для  $f, g \in L_2(E, \mu)$ .

Тогда

$$\forall \alpha \in L_2^*(E, \mu) \quad \exists! g \in L_2(E, \mu): \alpha(f) = \int_E f g d\mu.$$

Единственность понимается специальным образом. С точностью до эквивалентности. Сопряжение от  $g$  можно было бы поставить, но ведь  $\bar{g}$  тоже лежит в  $L_2(E, \mu)$ .

Мы даже не будем требовать гильбертовость сейчас.

**Определение 15.1.** Система элементов  $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset E$  евклидова пространства называется ортонормированной, если

$$\langle e_n, e_m \rangle = 0 \quad (n \neq m), \quad \langle e_n, e_n \rangle = 1.$$

Просто ортогональной, если только первое условие.

Система  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  называется **тотальной**, если

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \langle x, e_n \rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Иногда это называют полнотой системы  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ .

**Определение 15.2.** Пусть  $x \in E$ . Обозначим  $c_n = \langle x, e_n \rangle$ . Эти числа  $c_n$  называются коэффициентами Фурье. Тогда каждому элементу  $x$  соответствует ряд Фурье

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n.$$

Обозначим также  $S_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k$  — частичные суммы ряда Фурье.

Вообще говоря, этот ряд не сходится к элементу  $x$ . Для того, чтобы элемент сходился, нужно, чтобы система была полной.

Давайте несколько свойств перечислим.

**Утверждение 15.1** (Неравенство Бесселя).  $\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ .

**Доказательство.** Доказывается очень просто. Вычисляя скалярный квадрат по свойствам скалярного произведения, мы получим

$$\|x - S_n\|^2 = \langle x - S_n, x - S_n \rangle = \langle x, x \rangle - 2\operatorname{Re}\langle x, S_n \rangle + \langle S_n, S_n \rangle = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \geq 0.$$

Отсюда вытекает неравенство Бесселя, если перейти к пределу по  $n \rightarrow \infty$  в неравенстве. ■

**Утверждение 15.2** (Равенство Парсеваля). Равенство в неравенстве Бесселя выполняется тогда и только тогда, когда ряд Фурье сходится к элементу  $x$ , то есть

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \Leftrightarrow \|x - S_n\| \searrow 0$$

в силу доказанного равенства.

**Утверждение 15.3** (Обобщённое равенство Парсеваля). Равенство Парсеваля выполняется, если и только если выполняется обобщённое равенство

$$\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \Leftrightarrow \forall x, y \in E \quad \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \bar{d}_n,$$

где  $c_n = \langle x, e_n \rangle$ ,  $d_n = \langle y, e_n \rangle$ .

**Доказательство.** Берём  $\lambda \in \mathbb{F}$ , элемент  $x + \lambda y \in E$ . Раскроем равенство Парсеваля для этого элемента

$$\|x + \lambda y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x + \lambda y, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n + \lambda d_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(\bar{\lambda} c_n \bar{d}_n) + |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2.$$

В лекциях у нас на кафедре двоечка пропущена.

С другой стороны можно раскрыть скалярный квадрат по свойствам скалярного произведения

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \langle x, y \rangle) + |\lambda|^2 \|y\|^2.$$

Опять используя равенство Парсеваля, видим, что  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2$ , а  $\|\lambda\|^2 \|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2$ . Откуда

$$\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \langle x, y \rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(\bar{\lambda} c_n \bar{d}_n).$$

**Теорема 15.2** (Стеклова). Ортонормированная система  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$  является полной, если и только если выполняется равенство Парсеваля, то есть ■

$$\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — полная система. Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ ,  $x \in E$ . Тогда найдётся  $y = \sum_{k=1}^m \lambda_k e_k \in \operatorname{sp} \{e_k\}_{k=1}^m =: L_m$ , для которого  $\|x - y\| < \varepsilon$ . Так как  $x - s_m \perp L_m$ , для  $n \geq m$  имеем

$$\|x - S_n\| \leq \|x - S_m\| \leq \|x - y\| < \varepsilon.$$

Докажем достаточность. Пусть выполнено равенство Парсеваля  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ . Тогда

Ну это и означает, что всякий  $x$  отклоняется от частичной суммы меньше чем на  $\varepsilon$ . То есть линейная оболочка всюду плотна и, следовательно, система полна. ■

**Доказательство.** Необходимость. Если система полна и  $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = 0$ , то из равенства Парсеваля, следует, что норма  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 0$ . Значит,  $x = 0$ . Это мы доказали тотальность.

В евклидовом пространстве это неверно. Мы в конце прошлой лекции построили пример.  $M \subset C[0, 1] \subset L_2[0, 1]$ , состоящее из алгебраических многочленов. Его ортогональное дополнение в  $C$  в евклидовой норме из  $L_2$  всюду плотно, но его ортогональное дополнение не равно нулю.

**Теорема 15.3** (Метод ортогонализации Грамма—Шмидта). *Для всякой счётной системы линейно независимых элементов евклидова пространства существует линейная ортонормированная система, то есть*

**Доказательство.** Положим  $y_1 = x_1$ , нормируем  $e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$ . Берём  $y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1 \perp e_1$  и нормируем  $e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$ . И так далее

Получаем систему уравнений

[illegible]

**Теорема 15.4** (Рисса—Фишера). Каждое сепарабельное гильбертово пространство  $H$  изометрически изоморфно либо пространству  $\mathbb{F}^n$ , либо пространству  $l_2$ . Соответственно, если  $H$  над  $\mathbb{R}$ , то  $\mathbb{F}^n = \mathbb{R}^n$ , а  $l_2$  над  $\mathbb{R}$  над  $\mathbb{C}$  аналогично.

Построим по полученной полной счётной линейно независимой системе счётную полную ортонормированную  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ . Таким образом, может для любого элемента  $x \in H$  рассматривать ряд Фурье  $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ , где  $c_n = \langle x, e_n \rangle$  — коэффициенты Фурье. Определим отображение

Почему  $c \in l_2$ ? В силу равенства Парсеваля  $\|F\|^2 = \|c\|_{l_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2$ . Получается изометричное отображение. Осталось доказать, изоморфность, то есть, что  $F$  — это «отображение на», то есть  $\text{Im}(F) = l_2$ .

Для этого рассмотрим  $S_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k \in H$ . Раскроем скалярный квадрат по свойствам скалярного произведения



и используем ортонормированность системы.

$$\|S_n - S_m\|^2 = \langle S_n - S_m, S_n - S_m \rangle = \left\langle \sum_{k=m+1}^n c_k e_k, \sum_{k=m+1}^n c_k e_k \right\rangle = \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

Таким образом,  $\{S_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность Коши в  $H$ . Значит, существует предел  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x \in H$ . Осталось доказать, что  $c_n$  есть его коэффициенты Фурье.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \langle x, e_n \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle S_m, e_n \rangle = c_n.$$

Таким образом,  $c_n$  — последовательность коэффициентов Фурье. И, следовательно, теорема доказана полностью. Мы даже получили изометрический изоморфизм. ■

Осталось мне привести примеры. Рассмотрим  $L_2[0, 1]$ , мера Лебега обычна. И рассмотрим  $e_n = e^{2\pi i n x} = \cos(2\pi n x) + i \sin(2\pi n x)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Покажем, что эта система является полной. Пусть  $\varepsilon > 0$ . Тогда по теореме о всюду плотности  $C[0, 1]$  в  $L_p[0, 1]$

$$\forall f \in L_2[0, 1] \quad \exists g \in C[0, 1]: \|f - g\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Чтобы применить теорему Вейерштрасса, нам нужна не просто непрерывная функция, но ещё и периодическая. Это довольно легко сделать.

$$\exists \varphi \in C[0, 1]: \varphi(0) = \varphi(1), \quad \|g - \varphi\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Можно на отрезке  $[0, \delta]$  заменить функцию на линейную  $g(1) + (g(\delta) - g(1))t$ . Если  $\delta$  маленькая, получаемая площадь разностей  $g - \varphi$  будет маленькая.

Далее по теореме Вейерштрасса

$$\exists T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e_k: \|\varphi - T\|_{L_2} \leq \|\varphi - T\|_C < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Построили такие функции, теперь применяем неравенство треугольника.

$$\|f - T\|_{L_2} \leq \|f - g\|_{L_2} + \|g - \varphi\|_{L_2} + \|\varphi - T\|_{L_2} < \varepsilon.$$

Вот мы и доказали, что линейная оболочка системы  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  всюду плотна в  $L_2[0, 1]$ . Также  $L_2[0, 1]$  изометрически изоморфна  $l_2$ . Точно так же изоморфизм строится. Для каждой функции берём последовательность коэффициентов Фурье.

## 16 Пространства сходимости

Для того, чтобы нам теорию обобщённых функций рассмотреть, сегодняшняя лекция будет о некоторых специальных пространствах.

Пространства будут определяться с помощью определения того, что значит последовательность сходится. Введём понятие абстрактной сходимости.

Пусть  $E$  — линейное пространство над  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .  $\zeta$  — множество всех сходящихся последовательностей. Предполагается, что задано какое-то множество последовательностей, которые мы называем сходящимися.

**Определение 16.1.** Пара  $(E, \zeta)$  называется пространством сходимости, если выполнены следующие аксиомы:

1.  $\forall \{x_n\} \in \zeta \quad \exists! x = \lim x_n$ ;
2. если  $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \quad x_n = x$ , то  $\{x_n\} \in \zeta$  и  $\lim x_n = x$ ;
3. если  $\{x_n\} \in \zeta$ , то  $\forall \{x_{n_k}\} \in \zeta$  и  $\lim x_{n_k} = \lim x_n$ ;
4. если  $\{x_n\}, \{y_n\} \in \zeta$ , то  $\{x_n + y_n\} \in \zeta$  и  $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$ ;
5. если  $\{x_n\} \in \zeta$  и  $\{\lambda_n\} \in \zeta_{\mathbb{F}}$ , то  $\{\lambda_n x_n\} \in \zeta$  и  $\lim \lambda_n x_n = \lim \lambda_n \cdot \lim x_n$ .

Эти аксиомы естественные. Они выполняются в нормированных и метрических линейных пространствах.

**Определение 16.2.** Отображение  $f: E \rightarrow F$  одного пространства сходимости в другое называется непрерывным (секвенциально), если

$$\forall \{x_n\} \in \zeta_E \quad \{f(x_n)\} \in \zeta_F \text{ и } \lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

Естественное определение непрерывности по последовательностям.

Ну давайте ещё одно определение дам.

**Определение 16.3.** Пространство сходимости  $(E, \zeta)$  называется регулярным, если для всякой двойной последовательности  $\{x_{nk}\}$ , для которой существует предел  $\exists \lim_k x_{nk} = x_n$  и  $\exists \lim_n x_n = x$ , существует  $\exists k_n \rightarrow \infty$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk_n} = x$ .

**Лемма 16.1.** Метрическое линейное пространство  $(E, \rho)$  является регулярным пространством сходимости. В частности, это верно и для нормированных.

**Доказательство.** Сходимость там уже задана. Нужно доказать регулярность. По условию задана двойная последовательность, у которой есть пределы по строкам и существует предел этих пределов.

Обозначим квазинорму  $\|x\| = \rho(x, 0)$  — расстояние от  $x$  до нуля. Хотя мне квазинорма не нужна.

Запишем наше условие:

$$\lim_k \rho(x_{nk}, x_n) = 0; \quad \lim_n \rho(x_n, x) = 0.$$

Для фиксированного  $n$  имеем  $\exists k_n \rightarrow \infty: \rho(x_{nk_n}, x_n) < \frac{1}{n}$ . Следовательно, расстояние

$$\rho(x_{nk_n}, x) \leq \rho(x_{nk_n}, x_n) + \rho(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

■

То есть некоторая диагональная последовательность стремится к  $x$ .

**Определение 16.4.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется безусловно суммируемой, если для каждой подпоследовательности сходится ряд, то есть  $\forall \{x_{n_k}\}$  сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ , то есть последовательность частичных сумм лежит в  $\zeta$ .

Для последовательности действительных чисел — это абсолютная сходимость ряда из этих чисел. Для комплексных чисел чуть по-другому.

**Определение 16.5.** В пространстве сходимости  $(E, \zeta)$  выполняется аксиома полноты, если

$$\forall \{x_n\} \in \zeta: \lim x_n = 0 \quad \exists \{x_{n_k}\} \text{ безусловно суммируемая.}$$

Это определение вводится для того, чтобы в последствии доказать полноту сопряжённого пространства.

**Лемма 16.2.** Если метрическое линейное пространство  $(E, \rho)$  полно, то в нём выполняется аксиома полноты.

**Доказательство.** Нам задана последовательность, которая стремится к нулю. Здесь нам понадобится квазинорма  $\|x\| = \rho(x, 0)$ . Раз последовательность стремится к нулю, выполняется следующее свойство

$$\lim \|x_n\| = 0.$$

Отсюда следует, что существует такая подпоследовательность  $\{n_k\}$ , для которой  $\|x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$ .

Давайте докажем теперь, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$  сходится. В самом деле, берём частичные суммы  $S_n = \sum_{k=1}^n x_{n_k}$  этого ряда и рассматриваем

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m x_{n_k} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_{n_k}\| < \frac{1}{2^n}.$$

Значит, последовательность частичных сумм является последовательностью Коши. А так как пространство полное, то значит, существует предел  $\exists S_n$ . Но нам нужно доказать больше, что всякий подряд тоже сходится. Это доказывается аналогично с помощью того же самого неравенства. ■

Давайте теперь приведём плохой пример.  $\mathcal{K}(\mathbb{R}) = C_0(\mathbb{R})$  — по-разному обозначают множество непрерывных функций  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , определённых на всей прямой, у которых компактный носитель, то есть  $\text{supp}(\varphi) \in \mathbb{R}$ .

$$\text{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}}.$$

**Определение 16.6.**  $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$ , если

$$(1) \quad \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{R} \varphi;$$

$$(2) \quad \exists K \in \mathbb{R}: \text{supp}(\varphi_n) \subset K.$$

Мы знаем, что всякая равномерная последовательность Коши является равномерно сходящейся. Значит, в этом пространстве  $\mathcal{K}(\mathbb{R})$  выполняется аксиома полноты. Но однако, это пространство не является метрическим пространством, поскольку сходимость не является регулярным. То есть не существует метрики, чтобы сходимость по метрике совпадала с данной.

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

И построим последовательность  $\varphi_{nk}(x) = \frac{1}{k}\eta\left(\frac{x}{n}\right)$ . Выполнены условия из определения сходимости, то есть  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{nk}(x) = 0$  в  $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ . Но если у нас есть последовательность  $\{k_n\}$ , то  $\varphi_{nk_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  в  $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ , потому что  $\text{supp } \varphi_{nk} = [-n, n]$  и когда  $n$  растёт, носители расширяются и не находятся на одном компакте.

Таким образом,  $\mathcal{K}(\mathbb{R})$  не является метрическим по лемме (16.1). ■

Этот пример характерный. Мы увидим, что пространство основных функций также не является метрическим.

**Определение 16.7.** Пусть  $(E, \zeta)$  — пространство сходимости. Через  $(E', \zeta')$  будем называть сопряжённое пространство сходимости. Здесь  $E'$  — множество всех линейных непрерывных функционалов  $f: E \rightarrow \mathbb{F}$ , а сходимость определяется так:  $f_n \rightarrow f$ , если  $\forall x \in E \quad \lim f_n(x) = f(x)$ .

**Лемма 16.3.** Пусть задана двойная последовательность комплексных чисел  $\{a_{mn}\} \subset \mathbb{F}$ , такая, что

- (1)  $\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists \lim_n a_{mn} = b_m$ ,
- (2)  $\exists \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}: |b_m| > \varepsilon$ ,
- (3)  $\forall n$  ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$  абсолютно сходится.

Тогда  $\exists m_l \rightarrow \infty$  и  $\exists n_k \rightarrow \infty$ , для которых

$$\left| \sum_{l=1}^{\infty} a_{m_l n_k} \right| = \infty.$$

**Доказательство.** Мы не будем доказывать для комплексных. Это доказательство сводится к случаю действительных чисел. Пусть  $a_{mn} \in \mathbb{R}$ . Существует  $n_1 < n_2 < \dots$ , для которой  $\forall n \geq n_k \quad |a_{nk}| > \varepsilon$  по первым двум свойствам. Отсюда

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn_k}| \geq \sum_{m=1}^k |a_{mn_k}| > k\varepsilon.$$

Действительно, поскольку  $n_k$  возрастают, вместо  $n_k$  могу брать  $n_m$ , для которого есть уже эта оценка.

$$\lim_k \sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn_k}| = \infty \Rightarrow \lim_k \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn_k}^+ = \infty \text{ или } \lim_k \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn_k}^- = \infty.$$

где  $a^{\pm} = \max\{\pm a, 0\}$ . ■

**Теорема 16.1.** Если в  $(E, \zeta)$  выполнена аксиома полноты, то  $(E', \zeta')$  является полным.

**Доказательство.** От противного, пусть  $f_n \rightarrow f$  и  $f_n \in E'$ , однако  $f \notin E'$ . Придём к противоречию при помощи леммы. Функционал линейный, а то, что он не из  $E'$ , значит, он не является непрерывным, причём во всех точках (в силу линейности), например не является непрерывным в нуле. Это значит, что

$$\exists \varepsilon > 0, \exists x_m \rightarrow 0: |f(x_m)| > \varepsilon.$$

Значит,  $\{x_m\}$  — безусловно суммируемая последовательность. Теперь используем лемму. Пусть  $a_{mn} := f_n(x_m)$ . Легко проверить, что ряды по  $n$  безусловно сходятся, ну и все остальные условия леммы будут выполнены. Поэтому существуют такие подпоследовательности  $m_l \rightarrow \infty$  и  $n_k \rightarrow \infty$ , такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{l=1}^{\infty} a_{m_l n_k} \right| = \infty.$$

Пусть  $x = \sum_{l=1}^{\infty} x_{m_l}$ . Так как последовательность  $x_n$  безусловно суммируемая, то ряд сходится к элементу  $x$ . Тогда в силу того, что  $f_n$  сходится в каждой точке

$$|f(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k}(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{l=1}^{\infty} f_{n_k}(x_{m_l}) \right| = \infty.$$

Вынести сумму смогли, так как  $f_{n_k} \in E'$  и в частности непрерывны. Значит, у нас функционал оказался равен бесконечности. ■

Напомним определение полунормы.

**Определение 16.8.**  $p: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  полунорма, если

$$(1) \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall x \in E \quad p(\lambda x) = |\lambda|p(x).$$

$$(2) \forall x, y \in E \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

**Определение 16.9.** Пусть  $(E, \mathcal{P})$ , где  $E$  — линейное пространство, где  $\mathcal{P}$  — система полунорм. Пара называется *полинормированным пространством*, если из того, что  $\forall p \in \mathcal{P} \quad p(x) = 0$  следует, что  $x = 0$ .

**Определение 16.10.**  $x_n \rightarrow x$  в  $(E, \mathcal{P})$ , если  $\forall p \in \mathcal{P} \quad \lim_n p(x_n - x) = 0$ , то есть

$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \quad p(x_n - x) < \varepsilon.$$

**Определение 16.11.**  $\{x_n\}$  — последовательность Коши в  $(E, \mathcal{P})$ , если  $\forall p \in \mathcal{P} \quad \lim_{m,n} p(x_n - x_m) = 0$ , то есть

$$\forall p \in \mathcal{P} \quad \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N \quad p(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Например, сопряжённое пространство  $(E', \zeta')$  является полинормированным пространством относительно системы полунорм  $p_x(f) := |f(x)|$ . Очевидно, что так как модуль обладает определёнными свойствами, то это будут полунормы. А если все модули равны нулю, то и  $f \equiv 0$ .

**Определение 16.12.** Полинормированное пространство  $(E, \mathcal{P})$  называется *счётно нормированным*, если система полунорм *счётная*, задаётся последовательность полунорм  $\mathcal{P} = \{p_n\}$ .

**Лемма 16.4.** Пусть  $(E, \mathcal{P})$ ,  $\mathcal{P} = \{p_n\}$  — счётно нормированное пространство. Тогда сходимость в этом пространстве  $(E, \mathcal{P})$  равносильна сходимости относительно метрики

$$\rho(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}.$$

Можно, конечно, и другую формулу придумать. Но нам достаточно её, чтобы доказать, что каждое счётно нормированное пространство является метрическим.

**Доказательство.** Надо доказать сначала, что это метрика. Мы с вами уже сталкивались с ней, я просто повторю.

1.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  очевидно;
2.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ , а это уже нужно доказывать.

Имеем  $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$  возрастает,  $\varphi(t + s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$ . Отсюда и вытекало у нас неравенство треугольника.

3.  $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow \forall n \quad p_n(x - y) = 0 \Rightarrow x = y$ .

Таким образом, эта формула определяет некоторую метрику. Нужно ещё проверить, что относительно этой метрики операции сложения и умножения на число непрерывны. Я не буду это проверять, это достаточно просто делается.

Значит,  $(E, \rho)$  — метрическое линейное пространство. Покажем, что сходимости равносильны.

Пусть  $x_n \rightarrow x$  в  $(E, \mathcal{P})$ . Берём  $\varepsilon > 0$ , тогда  $\exists m: \frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{2^m}$ . Так как  $p_k(x_n - x) \rightarrow 0$ , то

$$\exists n_k: \forall n \geq n_k \quad p_k(x_n - x) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Возьмём  $N := \max_{1 \leq k \leq m} \{n_k\}$ . Тогда

$$\rho(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x_n - x)}{1 + p_k(x_n - x)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} m p_k(x_n - x) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Разбили сумму на две. В одной дробь больше единицы, в другой — меньше.

Теперь обратно нужно доказать. Пусть  $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ . Тогда  $\frac{1}{2^k} \frac{p_k(x_n - x)}{1 + p_k(x_n - x)} \rightarrow 0$ , то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \quad \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x_n - x)}{1 + p_k(x_n - x)} < \varepsilon.$$

Фиксируем число  $k$ . Тогда  $\forall n \geq N \quad p_k(x_n) < \frac{\varepsilon 2^k}{1 - \varepsilon 2^k}$ . Поэтому последовательность у нас сходится в счётно нормированном пространстве.

■ Можно доказать, что последовательности Коши относительно счётной системы полунорм и последовательности Коши относительно метрики.

**Определение 16.13.** Пусть  $(E, \mathcal{P}_E)$  и  $(F, \mathcal{P}_F)$  — полунормированные пространства. Линейное отображение  $f: E \rightarrow F$  называется *ограниченным*, если

$$\forall p \in \mathcal{P}_F \quad \exists p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_E, \exists c > 0: p(f(x)) \leq c(p_1(x) + \dots + p_n(x)).$$

Это определение согласуется с определением ограниченных операторов в нормированных пространствах.

**Теорема 16.2.** Пусть  $(E, \mathcal{P})$  — счётно нормированное пространство. Тогда линейное отображение  $f: E \rightarrow F$  ограничено, если и только если  $f$  непрерывно.

**Доказательство.** Необходимость очевидная. Если ограничены, то есть выполнено неравенство; в нём если правая часть стремится к нулю, то и левая тоже.

Нужно доказать достаточность. Пусть отображение непрерывно. Пусть  $q_n(x) = \sum_{k=1}^n p_k(x)$ , где  $\mathcal{P}_E = \{p_n\}$  — заданная счётная система полунорм. Если  $f$  не является ограниченным, то существует  $p \in \mathcal{P}_F$  и последовательность  $\{x_n\}$ , такие, что

$$p(f(x_n)) \geq n q_n(x_n). \quad (7)$$

Пусть у нас  $y_n = \frac{1}{\sqrt{n} q_n(x_n)} \cdot x_n$ . Рассмотрим такие элементы. В силу неравенства (7) получаем  $p(y_n) > \sqrt{n}$ . То есть  $p_k(y_n) \rightarrow 0$ , но  $f(y_n) \not\rightarrow 0$ , поскольку

$$p_k(y_n) = \frac{p_k(x_n)}{\sqrt{n} q_n(x_n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Нужно ещё привести примеры. Функция  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{F}$  называется *бесконечно дифференцируемой*, если существуют все частные производные

$$\partial^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_m} x_m}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad |\alpha| = \sum_{k=1}^m \alpha_k.$$

Через  $C_0^\infty(X)$  — пространство бесконечно дифференцируемых функций, у которых  $\text{supp}(\varphi) \Subset X$ . На этом пространстве вводится счётная система полунорм

$$p_k(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in X} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Это будет счётно нормированное пространство. Сходимость в этом пространстве будет определяться также метрикой

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(\varphi - \psi)}{1 + p_k(\varphi - \psi)}.$$

Полное счётно нормированное пространство называется пространством Фреше. Пример — пространство Фреше.

## 17 Обобщённые функции

Введём некоторые обозначения.  $\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Здесь есть норма  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ .  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

$$C_0^\infty(X) = \{\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F} \mid \exists \partial^\alpha \varphi(x), \text{supp}(\varphi) \Subset X\}.$$

Бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем. В нём водится сходимости по системе норм  $p_k(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in X} |\partial^\alpha \varphi(x)|$  для  $k = 0, 1, \dots$ . Если  $X$  является компактным, то  $C_0^\infty$  будет полным, то есть пространством Фреше.

### 17.1 Примеры бесконечно дифференцируемых функций

Приведём несколько примеров бесконечно дифференцируемых функций, которые нам понадобятся в дальнейшем.

1. Рассмотрим функцию

$$e(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Это бесконечно дифференцируемая функция,  $e(t) \geq 0$ ,  $\text{supp}(e) = \mathbb{R}_+$ . Дифференцируемость в нуле проверяется по правилу Лопиталя.

$$2. \xi(x) = e(1 - \|x\|^2), \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^m x_k^2, \quad \text{supp}(\xi) = S, \quad \text{где}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq 1\}$$

единичный шар.

$$3. \text{ Система функций } \theta_r(x) = c_r \xi\left(\frac{x}{r}\right) \text{ для } r > 0. \text{ Константу } c_r \text{ выбираем так, чтобы } \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(x) dx = 1. \text{ Называется}$$

аппроксимативной единицей. Все бесконечно дифференцируемы и  $\text{supp}(\theta_r) = S_r = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq r\}$ .

$$4. \eta(x) = \int_{S_2} \theta_1(x - y) dy. \text{ Легко проверить, что эта функция}$$

- $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ ;
- $\text{supp}(\eta) = S_3$ ;
- $\eta(x) = 1$  на  $x \in S_1$ ,  $\eta(x) = 0$  вне  $S_3$ . И принимает значения между нулём и единицей на разности  $S_3 \setminus S_1$ .

## 17.2 Пространство основных функций

Перейдём к определению обобщённых функций.

**Определение 17.1.**  $\mathcal{D}(X)$  — пространство основных функций. В  $\mathcal{D}(X) \subset C_0^\infty(X)$  определена сходимость  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ , если

$$(1) \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^m \quad \partial^\alpha \varphi_n \xrightarrow{\rightarrow \infty} \partial^\alpha \varphi \text{ на } X.$$

$$(2) \exists K \Subset X: \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{supp}(\varphi_n) \subset K.$$

**Определение 17.2.** Сопряжённое пространство  $\mathcal{D}'(X)$  к пространству сходимости  $\mathcal{D}(X)$  называется пространством обобщённой функции.

Как мы и определяли сопряжённое пространство — это множество всех линейных непрерывных функционалов. Непрерывность понимается относительно сходимости в  $\mathcal{D}(X)$ . Обозначение  $\langle f, \varphi \rangle$  для  $f \in \mathcal{D}'(X)$  и  $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ .

Свойства.

$$(1) f \in \mathcal{D}'(X) \text{ обязательно линейная функция, то есть}$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(X) \quad \langle f, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle f, \varphi_2 \rangle.$$

$$(2) f \text{ — непрерывный функционал в } \mathcal{D}(X), \text{ то есть если } \varphi_n \rightarrow \varphi \text{ в } \mathcal{D}(X), \text{ то и } \langle f, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle.$$

$$(3) \text{ Если } f_n \rightarrow f, f_n \in \mathcal{D}'(X), \text{ то } f \in \mathcal{D}'(X). \text{ То есть сходимость в } \mathcal{D}'(X) \text{ это просто поточечная сходимость:}$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle.$$

из теоремы о полноте сопряжённого пространства к пространству сходимости, которое мы доказали на прошлой лекции.

**Пример 17.1.**  $\delta(x - a)$  —  $\delta$ -функция. Определяется по формуле

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \quad \langle \delta(x - a), \varphi \rangle := \varphi(a).$$

Очевидно, что  $\delta(x - a) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ .

**Пример 17.2.**  $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$  — главное значение  $\frac{1}{x}$ , то есть

$$\left\langle \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \text{frac} \varphi(x) x dx = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

### 17.3 Действия с обобщёнными функциями

1. Функция называется локально интегрируемой, если интегрируема по Лебегу на каждом компакте. Обозначают  $\mathcal{L}_{\text{loc}}(X)$ . Такие  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{F}$  и  $\forall K \Subset X \quad \varphi \in \mathcal{L}_1(K)$ . Тогда для  $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  можно определить обобщённую функцию

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle f, \varphi \rangle := \int_X f(x) \varphi(x) dx.$$

Непрерывность вытекает из теоремы Лебега о предельном переходе.

2. Если  $\psi \in C^\infty(X)$  и  $f \in \mathcal{D}'(X)$ , то

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle \psi \cdot f, \varphi \rangle := \langle f, \psi \varphi \rangle.$$

Оператор  $M_\psi := \psi \cdot \varphi$  непрерывен в  $\mathcal{D}(X)$ . Значит,  $\psi f \in \mathcal{D}'(X)$ .

3. Пусть  $\tau_a \varphi(x) := \varphi(x - a)$  и оператор растяжения  $\rho_\lambda \varphi(x) := \varphi(\lambda x)$ . Если  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ , то определяются следующие обобщённые функции

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle := \langle f, \tau_a \varphi \rangle; \quad \langle \rho_\lambda f, \varphi \rangle := |\lambda|^{-m} \langle f, \rho_{\lambda^{-1}} \varphi \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Линейность очевидна, а непрерывность обобщённых функций следует из непрерывности операторов.

4. Пусть у нас есть линейное преобразование  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  (или линейный оператор на пространстве  $\mathbb{R}^m$ ), у которого определитель  $\det A \neq 0$ . Определим оператор замены переменных  $T_A \varphi(x) = \varphi(Ax)$ . Тогда определяется оператор замены переменных для обобщённых функций.

$$\langle T_A f, \varphi \rangle = |\det A|^{-1} \langle f, T_{A^{-1}} \varphi \rangle.$$

Непрерывность этого функционала вытекает из непрерывности этого оператора в пространстве  $\mathcal{D}(X)$ . Если частные производные сходятся равномерно, то и частные производные функции-образа будут сходиться равномерно.

5. Пусть  $f \in \mathcal{D}'(X)$ . Частная производная порядка  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$  определяется по формуле

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Если  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  в  $\mathcal{D}(X)$ , то и  $\partial^\alpha \varphi_n \xrightarrow{\rightarrow \infty} \partial^\alpha \varphi$  в  $\mathcal{D}(X)$ . Значит,  $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}'(X)$ .

**Утверждение 17.1** (Формула Лейбница). Пусть  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$  для  $k = 1, \dots, m$ . Тогда

$$\partial_k(\psi \cdot f) = (\partial_k \psi) f + \psi(\partial_k f), \quad f \in \mathcal{D}'(X), \quad \psi \in C_0^\infty(X).$$

Имеем по формуле Лейбница для обычных функций и определению производной для обобщённой функции.

$$\langle \partial_k(\psi f), \varphi \rangle = -\langle f, \psi(\partial_k \varphi) \rangle = \langle f, (\partial_k \psi) \varphi \rangle - \langle f, \partial_k(\psi \varphi) \rangle = \langle (\partial_k \psi) f, \varphi \rangle + \langle \psi(\partial_k f), \varphi \rangle.$$

**Теорема 17.1** (о локальной структуре). Пусть у нас  $X \subset \mathbb{R}^m$  ограниченное замкнутое множество<sup>1</sup>. Тогда (здесь  $C(X)$  пространство непрерывных ограниченных)

$$\forall f \in \mathcal{D}'(X) \quad \exists \alpha \in \mathbb{Z}_+^m, \quad \exists g \in C(X): f = \partial^\alpha g,$$

то есть

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_X g(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx.$$

**Доказательство.** Для простоты мы будем считать, что  $X \subset [0, 1]^m$ . Кстати, это легко получить в результате применения операции замены переменных. Тогда существует

$$\exists c > 0, \quad \exists k \in \mathbb{N}: \forall \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad |\langle f, \varphi \rangle| \leq c p_k(\varphi).$$

<sup>1</sup> В определении обобщённых функций, которое мы с вами дали  $X$  всегда открытое множество. В данном случае оно будет ещё и ограничено. Тогда можно представить формулой любую обобщённую функцию.

Это вытекает из того, что  $f$  непрерывен на  $D(X)$ , а значит, он непрерывен и в  $C_0^\infty$ . А раз сходимость задаётся такими полунормами

$$p_k(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in X} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Мы с вами доказали на прошлой лекции эквивалентность непрерывности и ограниченности. От туда и вытекает неравенство.

При этом  $p_0(\varphi) = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$ . По формуле Лагранжа (о среднем значении, то есть теорема Лагранжа) для  $k = 1, 2, \dots, m$

$$p_0(\varphi) \leq p_0(\partial_k \varphi)$$

Обозначим  $D = \partial_1 \dots \partial_m$ . Тогда можем записать такое неравенство

$$\begin{aligned} \exists c_k > 0: p_k(\varphi) &\leq c_k p_0(D^k \varphi) \leq c_k \int_{[0,1]^m} |D^{k+1} \varphi(x)| dx \leq \\ &\text{применяем неравенство Коши—Буняковского} \\ &\leq C_k \|D^{k+1} \varphi\|_{\mathcal{L}_2}. \end{aligned}$$

За конечной суммой будет некоторая константа. Ещё мы обозначили здесь

$$D^k \varphi(x) := \int_{\Delta_x} D^{k+1} \varphi(y) dy; \quad \Delta_x = [0, x_1] \times \dots \times [0, x_m].$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\forall \varphi \in D(X) \quad |\langle f, \varphi \rangle| \leq c_k \|D^{k+1} \varphi\|_{\mathcal{L}_2}.$$

Рассмотрим оператор  $A: D^{k+1}: D(X) \rightarrow D(X)$ . Он является взаимнооднозначным, то есть биективным, так как пространства функций с компактным носителем и там нет констант (у оператора ядро равно нулю, если и только если он биективен). И определим функционал  $F(\psi) := \langle f, A^{-1} \psi \rangle$ , где  $\psi = A\varphi$ , а  $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ . Из нашего неравенства вытекает, ограниченность в  $\mathcal{L}_2$ , то есть

$$|F(\psi)| \leq c_k \|\psi\|_{\mathcal{L}_2}$$

Можем продолжить этот функционал по тереме Хана—Банаха.

Так как  $\mathcal{L}_2$  — гильбертово пространство, можно применить теорему Рисса для гильбертова пространства. Значит, этот функционал представляется в виде скалярного произведения. А в  $\mathcal{L}_2$  — это интеграл

$$\exists h \in \mathcal{L}_2: F(\psi) = \int_X h(x) \psi(x) dx.$$

Доопределим  $h(x) = 0$  для  $x \notin X$ . Тогда при интегрировании по частям неинтегральных членов не будет.

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_X h(x) D^{k+1} \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_X g(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx$$

где  $g(x) = (-1)^{|\alpha|+m} \int_{\Delta_x} h(y) dy$ ,  $\alpha = (k+2, \dots, k+2)$ .

Ну и теорема доказана. ■

Что мы понимаем под равенством двух обобщённых функций?

**Определение 17.3.** *Заданы две обобщённые функции  $f, g \in \mathcal{D}'(X)$ . Они равны  $f = g$ , если*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle,$$

*то есть если равны соответствующие линейные функционалы на определённом множестве.*

*Можно определить равенство функционалов  $f(x) = g(x)$  в точке  $x \in X$ , если  $\exists$  окрестность  $O_x \subset X$  точки  $x$ , для которой*

$$\forall \langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle.$$

*Если перебрать все обобщённые функции совпадают в точке, нужно брать объединение всех окрестностей — это открытое множество. Значит, обобщённые функции совпадают на открытом множестве.*

**Определение 17.4.** *Пусть  $f \in \mathcal{D}'(X)$ . Тогда  $\text{supp}(f) = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$ .*



Это множество замкнуто в  $X$  (существует замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$ , которое при пересечении с  $X$  даёт наше).

Приведём теорему без доказательства.

**Теорема 17.2** (о структуре обобщённой функции с носителем в одной точке). *Если  $f \in \mathcal{D}'(X)$  и  $\text{supp}(f) = \{a\} \subset X$ , то  $\exists k \in \mathbb{Z}_+$ , существуют такие константы  $c_\alpha \in \mathbb{F}$ , для которых  $|\alpha| \leq k$  и*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial^\alpha \delta(x - a).$$

Любая такая функция есть линейная комбинация дельта-функции и её производных. До некоторого конечного порядка.

## 17.4 Задача существования первообразной обобщённой функции

Рассмотрим случай  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}$ . Первообразная определяется как обычно: такая функция, что обобщённая производная равна заданной.

Вначале докажем лемму.

**Лемма 17.1.** *Если  $f \in \mathcal{D}'(a, b)$  и её обобщённая производная  $\partial f = 0$ , то  $f = c \in \mathbb{F}$  на интервале  $(a, b)$ .*

**Доказательство.** Запишем условие того, что обобщённая производная равна нулю. Это означает, что для всех  $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$  имеет место  $\langle f, \varphi' \rangle = 0$ . Рассмотрим два подпространства в  $\mathcal{D}(a, b)$ .

- $L := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(a, b) \mid \int_a^b \varphi dx = 0 \right\};$
- $M := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(a, b) \mid \exists \psi \in \mathcal{D}(a, b): \varphi = \psi' \right\}.$

Оказывается, что эти подпространства равны. Если  $\varphi \in M$ , то  $\int_a^b \varphi dx = \psi(b) - \psi(a) = 0$  и  $\varphi \in L$ .

Обратно. Пусть  $\varphi \in L$ . Тогда  $\psi(x) := \int_a^x \varphi(t) dt$ ,  $\psi' = \varphi$ ,  $\psi \in \mathcal{D}(a, b)$ .

Таким образом,  $L = M$ .

Рассмотрим теперь произвольную функцию  $\eta \in \mathcal{D}(a, b)$ , у которой интеграл  $\int_a^b \eta(t) dt = 1$ . Тогда

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(a, b) \quad \varphi = \psi + \eta \int_a^b \varphi(t) dt.$$

Значит,  $\varphi$  произвольная, а вот  $\psi \in L$ . Применяем этот функционал к нашему равенству  $\langle f, \varphi' \rangle = 0$ .

$$\langle f, \varphi \rangle = \underbrace{\langle f, \eta \rangle}_c \int_a^b \varphi(t) dt.$$

Тогда  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(a, b) \quad \langle f, \varphi \rangle = \langle c, \varphi \rangle$ . ■

**Теорема 17.3** (о существовании первообразной).  $\forall f \in \mathcal{D}'(a, b) \quad \exists g \in \mathcal{D}'(a, b): \partial g = f$ .

**Доказательство.** Определим функционал на подпространстве  $M$  по формуле

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(a, b) \quad \langle g, \varphi' \rangle = -\langle f, \varphi \rangle.$$

$g$  определён только на производных, поэтому он определён только на подпространстве. Тогда

$$\varphi = \psi + \eta \int_a^b \varphi(t) dt, \quad \psi \in M = L.$$

Можем продолжить функционал с  $M$  на всё пространство  $\mathcal{D}(a, b)$  вот по такой формуле

$$\langle g, \varphi \rangle := \langle g, \psi \rangle + \underbrace{\langle g, \eta \rangle}_c \int_a^b \varphi(t) dt = -\langle f, A\varphi \rangle + \langle c, \varphi \rangle.$$

При этом  $A$  задан формулой

$$A\varphi(x) = \int_a^x \left( \varphi - \eta \int_a^b \varphi(t) dt \right) dy.$$

Легко проверить, что раз оператор  $A$  непрерывен на  $\mathcal{D}(a, b)$ , то и оператор  $g$  будет непрерывен. И также видно, что  $\partial g = f$ . ■

## 18 Пространства Соболева

Вначале докажем несколько утверждений вспомогательных. Пусть  $X \subset \mathbb{R}^m$  — открытое множество, поле  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Положим

$$\mathcal{E}(x) = \{ \varphi: X \rightarrow \mathbb{F} \mid \forall x \in X \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^m \exists \partial^\alpha \varphi(x) \} = C^\infty(X).$$

Определим сходимость на этом множестве

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ в } \mathcal{E}(x), \text{ если } \forall K \Subset X \quad \partial^\alpha \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{K} \partial^\alpha \varphi.$$

**Определение 18.1.**  $\mathcal{E}'(X)$  называется пространством обобщённых функций с компактным носителем.

Логичность такого определения сразу не видна. На самом деле  $\mathcal{E}'(X) \subset D'(X)$ .

Значение функционала на функции  $\varphi$  будем обозначать через  $\langle f, \varphi \rangle$ , где  $f \in \mathcal{E}'(X)$ ,  $\varphi \in \mathcal{E}(X)$ . Свойства

(1)  $\forall f \in \mathcal{E}'(X)$  является линейным функционалом, то есть

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}(X), \forall l_1, l_2 \in \mathbb{F} \quad \langle f, l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2 \rangle = l_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + l_2 \langle f, \varphi_2 \rangle.$$

(2)  $\forall f \in \mathcal{E}'(X)$  является непрерывным, то есть если  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  в  $\mathcal{E}(X)$ , то  $\langle f, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ .

(3) Если все  $f_n \in \mathcal{E}'(X)$  и  $\forall \varphi \in \mathcal{E}(X) \quad \langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ , то  $f \in \mathcal{E}'(X)$ .

**Доказательство.** Докажем третье. Если выполнена аксиома полноты, то сопряжённое пространство полное. Это доказывали в прошлом семестре. Кроме того была доказана теорема, что во всяком полном метрическом пространстве аксиома полноты выполняется.

Покажем, что  $\mathcal{E}(X)$  полное линейное метрическое пространство. Рассмотрим

$$K_l := \{ x \in X \mid \|x\| \leq l, \rho(x, \partial X) > 1/l \}.$$

Расстояние до границы больше  $1/l$ . Имеем  $K_1 \subset K_2 \subset \dots$  и  $\bigcup_{l=1}^{\infty} K_l = X$ . Положим системой полунорм

$$q_l(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{x \in K_l} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad l = 1, 2, \dots$$

Здесь  $q_1 \leq q_2 \leq \dots$ . Тогда  $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi$  в  $\mathcal{E}(X)$ , если и только если  $\forall l \in \mathbb{N} \quad q_l(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

Осталось заметить, что в качестве метрики нужно взять

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \frac{q_l(\varphi - \psi)}{1 + q_l(\varphi - \psi)}.$$

Доказательство полноты сводится к известным теоремам курса математического анализа (критерий Коши). ■

**Теорема 18.1.**  $f \in D'(X)$  имеет  $\text{supp}(f) \Subset X$ , если и только если  $\exists g \in \mathcal{E}'(X)$ , для которого  $g|_{\mathcal{D}(X)} = f$ .

На самом деле такая функция будет даже единственной.

**Доказательство.** Необходимость. Будем использовать ту же последовательность компактов, что сегодня строили.  $K_1 \subset K_2 \subset \dots \quad \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l = X$  (но теперь  $l > 0$  любое действительное число). Рассмотрим

$$\eta_l(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \theta_{\frac{1}{4l}}(x - y) \chi_{K_{\frac{4l}{3}}}(y) dy.$$

$\theta(x)$  мы строили на прошлой лекции. Это аппроксимативная единица. В наших обозначениях выполняется

$$\eta_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_l; \\ 0, & x \notin K_{2l}. \end{cases}$$

Теперь давайте доказывать. Пусть  $g \in \mathcal{E}'(X)$ , определённый по формуле

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}(X) \quad \langle f, \eta_l \varphi \rangle,$$

где  $l: \text{supp}(f) \subset K_l$ .

Определим оператор  $A: \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(X)$  по формуле  $A\varphi = \eta_l \varphi$ . Если докажем, что  $A$  непрерывен, то  $g \in \mathcal{E}'(X)$ .

Имеем  $\text{supp}(\varphi - \eta_l \varphi) \subset X \setminus K_l$ .

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle - \underbrace{\langle f, \varphi - \eta_l \varphi \rangle}_{=0} = \langle f, \varphi \rangle.$$

Таким образом, необходимость мы доказали.

Докажем достаточность.  $g \in \mathcal{E}'(X)$ ,  $f = g|_{\mathcal{D}(X)}$ . Если  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  в  $\mathcal{D}(X)$ , то  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  в  $\mathcal{E}(X)$ . Значит,  $f \in \mathcal{D}'(X)$ . Осталось вспомнить теорему, что если функционал непрерывен на счётно нормированном пространстве, то он ограничен. То есть из того, что  $g \in \mathcal{E}'(X)$  следует, что

$$\exists c > 0: \forall \varphi \in \mathcal{E}(X) \quad |\langle g, \varphi \rangle| \leq c \cdot q_l(\varphi).$$

Отсюда следует, что  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(X): \text{supp}(\varphi) \subset X \setminus K_l$  выполнено  $\langle g, \varphi \rangle = 0$ . А это и означает, что  $\text{supp}(f) \subset K_l$ , ну то есть является компактным. И теорема доказана. ■

**Определение 18.2.** Пусть  $\{\theta_r\}$  — аппроксимативная единица и  $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(X)$ . Обозначим через  $f_r(X)$  вот такой интеграл (этот интеграл обычно называют свёрткой двух сдвигов; можем сделать сдвиг, ведь мера Лебега инвариантна относительно сдвигов)

$$f_r(x) := \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) f(x-y) dy,$$

где  $\forall x \notin X \quad f(x) = 0$ .

В этих обозначениях система  $\{f_r\}_{r>0}$  называется усреднением  $f$  в смысле Соболева.

$f_r$  обладает следующими свойствами

- (1)  $f_r \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ , можем дифференцировать под знаком интеграла.
- (2)  $\text{supp}(f_r) \subset B_r(X)$ , где  $B_r(X) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \rho(x, X) \leq r\}$ .
- (3) Если  $f \in \mathcal{L}_p(X)$ , то  $\|f_r - f\|_{\mathcal{L}_p} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  для  $1 \leq p < \infty$ .

**Доказательство.** Первые два свойства очевидны, а для третьего приведём доказательство. Мы знаем, что  $\forall \varepsilon > 0 \quad C_0(X) \subset \mathcal{L}_p(X)$  всюду плотно (нолик означает, что множество непрерывных функций с компактным носителем). Поэтому существует такая  $f \in C_0(X)$ , что  $\|f - g\|_{\mathcal{L}_p} < \frac{\varepsilon}{3}$ . Обозначим оператор сдвига  $\tau_y f(x) := f(x-y)$ .

Так как  $g$  непрерывна, а носитель на компакте, то она равномерно непрерывна и

$$\exists \delta > 0: \forall y: \|y\| < \delta \quad \|\tau_y g - g\|_{\mathcal{L}_p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Просто можно максимум вынести из-под знака нормы. Тогда

$$\|\tau_y f - f\| \leq \tau_y f - \tau_y g\|_{\mathcal{L}_p} + \|\tau_y g - g\|_{\mathcal{L}_p} + \|g - f\| < \varepsilon.$$

Легко проверить равенство ( $\int \theta_r(y)$  интеграл равен единицы)

$$f_r(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) (\tau_y f(x) - f(x)) dy.$$

И применяем обобщённое неравенство Миньковского (норму можно занести под знак интеграла)

$$\|f_r - f\|_{\mathcal{L}_p} \leq \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) \|\tau_y f - f\|_{\mathcal{L}_p} dy \leq \sup_{\|y\| \leq r} \|\tau_y f - f\|_{\mathcal{L}_p}.$$

Правая часть неравенства стремится к нулю, значит, и левая стремится к нулю. ■

**Лемма 18.1** (о плотности). Пусть  $X \subset \mathbb{R}^m$  открытое множество и  $1 \leq p < \infty$ . Тогда

$$\forall f \in \mathcal{L}_p(X) \quad \exists \{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(X):$$

$$(a) \quad \forall x \in X \quad |\varphi_n(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}_\infty};$$

$$(б) \quad \|f - \varphi_n\|_{\mathcal{L}_p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Первое свойство нам понадобится только один раз, оно несущественно. А второе свойство говорит о том, что основные функции всюду плотны в  $\mathcal{L}_p$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\exists K \Subset X: \int_{X \setminus K} |f(x)|^p dx < (\frac{\varepsilon}{2})^p$ . Это вытекает из того, что функция интегрируема. Можно представить  $X \setminus K$  в виде объединения компактов, можно интеграл считать мерой.

Давайте обозначим через  $g(x)$  функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K \\ 0, & x \notin K. \end{cases}$$

Положим  $d = \rho(K, \partial X)$ . Тогда носитель усреднения функции  $g$  по Соболеву  $\text{supp}(g_r) \Subset X$ ,  $\forall 0 < r < d$ . Отсюда вытекает неравенство

$$\|f - g_r\|_{\mathcal{L}_p} \leq \|f - g\|_{\mathcal{L}_p} + \|g - g_r\|_{\mathcal{L}_p} < \varepsilon$$

для достаточно малых  $r \in (0, \delta)$ . Поэтому если теперь взять функцию  $\varphi_n(x) := g_{\frac{d}{2n}}$ , то мы получим, что эта последовательность из  $\mathcal{D}(X)$  и удовлетворяет требуемому. ■

**Следствие 18.1.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^m$  открытое ограниченное. Тогда

$$\forall f \in \mathcal{L}_\infty(X) \quad \exists \{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(X):$$

$$(a) \quad |\varphi_n(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}_\infty};$$

$$(б) \quad \varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \text{ почти всюду на } X.$$

**Доказательство.** Из леммы для  $p = 1$  получаем последовательность, сходящуюся в  $\mathcal{L}_p$ , выбираем из неё подпоследовательность, сходящуюся почти всюду. ■

**Определение 18.3.** Пусть  $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(X)$ , где  $X$  — открытое множество. Каждой такой функции определим функционал  $f \in \mathcal{D}'(X)$ , такой, что

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \varphi(x) dx.$$

Такой функционал  $f$  называется регулярной обобщённой функцией.

Пространство локально интегрируемых функций можно считать счётно нормированным, если ввести такие полунормы

$$r_l(f) = \int_{K_l} |f(x)| dx, \quad l = 1, 2, \dots, \quad K_1 \subset K_2 \subset \dots \quad \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l = X.$$

Эти компакты мы берём так же, как уже сегодня строили. Для соответствующей метрики пространство будет полным и выполняется аксиома полноты.

**Теорема 18.2** (о вложении).  $\mathcal{L}_{\text{loc}}(X) \subset \mathcal{D}'(X)$ , вложение непрерывно и взаимнооднозначно с образом (ядро является нулём).

**Доказательство.** Запишем следующее неравенство. Так как  $\varphi$  имеет компактный носитель, интегрирование всегда ведётся по компакту.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad |\langle f_n - f, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^m} |f_n - f| \cdot |\varphi| dx \leq \max_{x \in K} |\varphi(x)| \int_K |f_n - f| dx$$

Из этого неравенства вытекает, то из сходимости  $f_n \rightarrow f$  в  $\mathcal{L}_{\text{loc}}(X)$  следует  $f_n \rightarrow f$  в  $\mathcal{D}'(X)$ , то есть отображение непрерывно.

Нам осталось доказать, что это действительно вложение. Пусть

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \int_X f(x) \varphi(x) dx = 0.$$

Тогда  $f(x) = 0$  почти всюду? Возьмём

$$e(x) = \begin{cases} \frac{|f(x)|}{f(x)}, & \text{если } f(x) \neq 0; \\ 0, & \text{если } f(x) = 0. \end{cases} \quad X_l = \{x \in X \mid \|x\| < l\} \subset X.$$

Тогда  $\exists \{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(X)$ , то есть

(а)  $|\varphi_n(x)| \leq 1,$

(б)  $\varphi_n(x) \rightarrow e(x)$  почти всюду на  $X_l$ .

Тогда мы можем записать равенство

$$\int_{X_l} |f(x)| dx = \int_{X_l} f(x)e(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_l} f(x)(e(x) - \varphi_n(x)) dx = 0.$$

Последнее равенство нулю по теореме Лебега. Значит, действительно, для всех  $l$  выполнено  $f(x) = 0$  на  $X_l$  почти всюду. Значит и  $f(x) = 0$  почти всюду на  $X$ . ■

**Определение 18.4.** Пусть  $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(X)$ . Говорят, что эта функция имеет производную  $\partial^\alpha f$  в смысле Соболева, если

$$\exists g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(X) : \forall \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \int_X g(x)\varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_X f(x)\partial^\alpha \varphi(x) dx.$$

Функция  $\partial^\alpha f := g$  называется производной в смысле Соболева. Определяется с точностью до эквивалентности.

Обозначим  $W_p^k(X) = \{f \in \mathcal{L}_p(X) \mid \forall |\alpha| \leq k \exists \partial^\alpha f \in \mathcal{L}_p(X)\}$  (если писать  $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}$ , то потом всё равно нулевая производная требуется из  $\mathcal{L}_p$ , так что лучше сразу напишем). В этом множестве определим норму

$$\|f\|_{W_p^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{\mathcal{L}_p}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \alpha \in \mathbb{Z}_+^m, 1 \leq p \leq \infty.$$

**Теорема 18.3.**  $W_p^k(X)$  — банахово пространство для  $k \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq p \leq \infty$ .

Пространство Соболева — это не одно пространство. Это целый спектр пространств.

**Доказательство.** Пусть  $\{f_n\} \subset W_p^k(X)$  является последовательностью Коши. Тогда для каждого  $\alpha: |\alpha| \leq k$  у нас последовательность частных производных  $\{\partial^\alpha f_n\}$  будет последовательностью Коши в  $\mathcal{L}_p(X)$  (это легко видеть из определения нормы в  $W_p^k(X)$ , а  $\mathcal{L}_p(X)$  полно, то есть  $\partial^\alpha f_n \rightarrow g_\alpha \in \mathcal{L}_p(X)$  и  $f_n \rightarrow g_0 = f$ . Осталось показать, что у функции  $f$  существуют частные производные в смысле Соболева и равны именно  $g_\alpha$ .

Для этого запишем одно неравенство и применим к нему неравенство Гёльдера.

$$|\langle f_n - f, \varphi \rangle| \leq \int_X |f_n - f| \cdot |\varphi| dx \leq \|f_n - f\|_{\mathcal{L}_p} \cdot \|\varphi\|_{\mathcal{L}_q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Отсюда следует, что  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle f_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle f, \varphi \rangle$ . Точно так же из этого же неравенства вытекает, что  $\langle \partial^\alpha f_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle g_\alpha, \varphi \rangle$ .

Значит,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(X) \quad \langle g_\alpha, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial^\alpha f_n, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \langle f_n, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

Значит,  $\partial^\alpha f = g_\alpha$ . Таким образом  $f_n \rightarrow f$  в  $W_p^k(X)$ . ■ Ну ещё давайте примерчик приведём и на этом закончим.

Докажем, что  $\delta$ -функция не является регулярной.  $\langle \delta(x-a), \varphi \rangle = \varphi(a)$ . Пусть

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 3. \end{cases}, \quad \eta \in \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Рассмотрим  $\varphi_n(x) := \eta(n(x-a))$ . Носитель находится в  $|x-a| \leq \frac{1}{n}$ .  $\varphi_n$  ограничена и стремится к нулю для всех  $x \neq a$ . Отсюда вытекает, что

$$1 = \varphi_n(a) = \langle \delta(x-a), \varphi_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Получили противоречие. Кроме того, рассмотрим

$$\theta(x-a) = \begin{cases} 1, & x > a; \\ 0, & x \leq a. \end{cases}$$

Тогда  $\partial\theta(x-a) = \delta(x-a)$ . Причём  $\theta \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . Её производная нерегулярна, значит  $\theta(x-a)$  не имеет производной в смысле Соболева.

## 19 Обобщённые функции. Преобразование Фурье обобщённых функций

### 19.1 Пространство Шварца

Будем обозначать  $x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_m^{\beta_m}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ ,  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Также обозначим

$$S(\mathbb{R}^m) = \left\{ \varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{F} \mid \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \text{ и } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty \right\}.$$

Такие функции называются быстро убывающими. Они убывают быстрее любой степени. Определим на этом пространстве сходимость

$$\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi \text{ в } S(\mathbb{R}^m) \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m \quad x^\beta \partial^\alpha \varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^\beta \partial^\alpha \varphi(x) \text{ на } \mathbb{R}^m.$$

Данное пространство сходимости называется пространством Шварца.

**Определение 19.1.**  $S'(\mathbb{R}^m)$  называется пространством обобщённых функций медленного роста.

Например, берём  $f(x) = e^{x^2}$ , она растёт быстрее многочлена. И она определяет обобщённую функцию, так как локально интегрируема

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx.$$

Однако эта обобщённая функция  $f \notin S'(\mathbb{R})$ , поскольку для  $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \in S(\mathbb{R})$ , но её подставить нельзя под интеграл, определяющий  $f$ . Обобщённая функция  $f$  непродолжаема на  $S(\mathbb{R})$ . Таким образом это доказывается. Но  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

Из определения вытекают свойства.

**Утверждение 19.1.** Если  $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ , то  $f$  линейный функционал, то есть

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathbb{R}^m), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F} \quad \langle f, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle f, \varphi_2 \rangle.$$

**Утверждение 19.2.** Если  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ , то  $f$  непрерывный функционал, то есть если  $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$  в  $S(\mathbb{R}^m)$ , то  $\langle f, \varphi_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle f, \varphi \rangle$ .

**Утверждение 19.3.**  $S'(\mathbb{R}^m)$  полно, то есть если  $f_n \in S'(\mathbb{R}^m)$  и  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  в  $S'(\mathbb{R}^m)$ , то  $f \in S'(\mathbb{R}^m)$  (сходимость здесь имеется в виду поточечная).

Это надо обосновать. Используем теорему о полноте сопряжённого пространства.

**Доказательство.** Докажем, что  $S(\mathbb{R}^m)$  полное линейное метрическое пространство. Для этого найдём счётную систему полунорм, которой задаётся сходимость.

$$s_l(\varphi) := \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} (1 + \|x\|^2)^l |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Здесь  $l = 0, 1, \dots$ , а  $\|x\| = \sum_{k=1}^m x_k^2$ .

Раз пространство счётно нормированное, то можно ввести метрику, которая задаёт ту же сходимость.

Если все производные сходятся равномерно, то у функции-предела будут все производные. ■ Сейчас мы докажем, что каждый функционал из  $S'(\mathbb{R}^m)$  является обобщённой функцией. Мы пока только назвали.

**Лемма 19.1.**  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset S(\mathbb{R}^m)$  всюду плотно (раз на бесконечности ноль, то, конечно, убудет быстрее любой степени).

**Доказательство.** Рассмотрим такую функцию  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ , которая

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \|x\| \leq 1; \\ 0, & \|x\| \geq 3. \end{cases}$$

Мы такую функцию строили. И рассмотрим такие функции

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^m) \quad \varphi_n(x) := \eta\left(\frac{x}{n}\right) \varphi(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Такие  $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ . Надо показать, что  $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$  в  $S(\mathbb{R}^m)$ . Имеем по формуле Ньютона—Лейбница

$$\partial^\alpha (\varphi_n(x) - \varphi(x)) = \partial^\alpha \left( \left( \eta \left( \frac{n}{x} \right) - 1 \right) \varphi(x) \right) = \sum_{\gamma \leq \alpha} c_{\alpha\gamma} \partial^\gamma \left( \eta \left( \frac{x}{n} \right) - 1 \right) \partial^{\alpha-\gamma} \varphi(x), \quad c_{\alpha\gamma} \in \mathbb{N}.$$

Замеим, что

$$\forall \|x\| \leq n \quad \partial^\gamma \left( \eta \left( \frac{x}{n} \right) - 1 \right) = 0.$$

Поскольку функция является быстро убывающей, имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \forall \|x\| \geq N, \forall \gamma < \alpha \quad |x^\beta \partial^{\alpha-\gamma} \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Отсюда  $|x^\beta \partial^\alpha (\varphi_n(x) - \varphi(x))| < c\varepsilon$ . В качестве константы надо взять

$$c := \sum_{\gamma \leq \alpha} c_{\alpha\gamma} \max |\partial^\gamma \eta(x)|.$$

Таким образом теорема доказана. ■

**Теорема 19.1.** *Отображение  $S'(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  является непрерывным вложением, то есть*

$$\forall f \in S'(\mathbb{R}^m) \quad \exists! g = f|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m).$$

**Доказательство.** Это очень просто. Если  $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$  в  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ , то есть  $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$  в  $S(\mathbb{R}^m)$ . Поскольку все  $\varphi_n$  имеют компактный носитель, то конечно все выражения типа

$$|x^\beta \partial^\alpha (\varphi_n(x) - \varphi(x))|$$

равномерно стремятся к нулю. Значит,  $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ .

Пусть  $f \in S'(\mathbb{R}^m)$  и  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \quad \langle f, \varphi \rangle = 0$ . Нам нужно доказать, что тогда он нулевой и на  $S(\mathbb{R}^m)$ . Тогда мы докажем, что ядро этого отображения является нулевым.

Для этого мы берём последовательность функций по лемме

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^m) \quad \exists \varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m): \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi \text{ в } S(\mathbb{R}^m).$$

Следовательно,  $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^m) \quad \langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, \varphi_n \rangle = 0$ . ■

Перечислим те же действия, что определяли для обобщённых функций.

1. Пусть  $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ , обозначим оператор сдвига  $\tau_a \varphi(x) := \varphi(x - a)$ , и определим двиг для обобщённой функции  $f$ :

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^m) \quad \langle \tau_a f, \varphi \rangle := \langle f, \tau_{-a} \varphi \rangle.$$

Так как оператор  $\tau_a$  непрерывный в  $S(\mathbb{R}^m)$ , то  $\tau_a f \in S'(\mathbb{R}^m)$ .

Пусть  $\lambda \neq 0$ ,  $\rho_\lambda \varphi(x) := \varphi(\lambda x)$ . Тогда

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^m) \quad \langle \rho_\lambda f, \varphi \rangle := |\lambda|^{-m} \langle f, \rho_{\lambda^{-1}} \varphi \rangle.$$

2. Пусть  $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ ,  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , такой оператор, что  $\det A \neq 0$ . Обозначим  $T_A \varphi(x) := \varphi(Ax)$ . Тогда

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^m) \quad \langle T_A f, \varphi \rangle = |\det A|^{-1} \langle f, T_{A^{-1}} \varphi \rangle.$$

3. И дифференцирование. Пусть  $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^m) \quad \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

## 19.2 Преобразование Фурье

**Определение 19.2.** Пусть  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$ . Обозначим  $\varkappa = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$ ,  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^m x_k y_k$ .

Тогда прямое преобразование Фурье определяется по формуле

$$\hat{f}(x) := \kappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy.$$

Обратное преобразование Фурье (это не обратный оператор в  $\mathcal{L}_1$ )

$$\tilde{f}(x) = \kappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{i\langle x, y \rangle} dy.$$

$$\mathcal{F}(f) := \hat{f}; \quad \mathcal{F}^{-1}(f) = \tilde{f}.$$

Пример.  $e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} = \prod_{k=1}^m e^{-\frac{x_k^2}{2}}$ . Давайте найдём преобразование Фурье. Достаточно найти для одномерной функции. Дальше перемножим.

$$\hat{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \kappa \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2} - ixy} dy = e^{-\frac{x^2}{2}} \kappa \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y+ix)^2}{2}} dy.$$

По теореме Коши из комплексного анализа.

$$\hat{e}^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} \kappa \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

И для произведения это тоже будет верно, то есть  $e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} = e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$ .

**Лемма 19.2.** Оператор  $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^m) \rightarrow S(\mathbb{R}^m)$  непрерывный и биективный.

**Доказательство.** Пусть  $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$\partial^\alpha \hat{\varphi}(x) = \kappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) (-iy)^\alpha e^{-i\langle x, y \rangle} dy.$$

А теперь наоборот. В данном случае нужно интегрировать по частям. (поправить знак крышки)

$$\partial^{\hat{\alpha}} \varphi(x) = \kappa^m (ix)^\alpha \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy.$$

Совместим эти формулы, получим

$$x^\beta \partial^\alpha \hat{\varphi}(x) = (-i)^{|\alpha+\beta|} \mathcal{F}(\partial^\beta (y^\alpha \varphi(y))).$$

Из этой формулы мы сделаем оценочку.

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} |x^\beta \partial^\alpha \hat{\varphi}(x)| \leq \kappa^m \int_{\mathbb{R}^m} |\partial^\beta (y^\alpha \varphi(y))| dy \leq (\kappa \pi)^m \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |(1 + \|y\|^2)^m| |\partial^\beta (y^\alpha \varphi(y))|.$$

Для оценки я использую такой интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx_k}{1+x_k^2} = \pi$  для  $k = 1, 2, \dots$ , а  $|x_k|^2 \leq \|x\|^2$ .

Отсюда получаем, что  $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^m)$  и если  $\varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$  в  $S(\mathbb{R}^m)$ , то  $\hat{\varphi}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{\varphi}$  в  $S(\mathbb{R}^m)$ . А это означает, что оператор преобразования Фурье действует из  $S(\mathbb{R}^m)$  в  $S(\mathbb{R}^m)$  и то, что он непрерывный.

Осталось доказать биекцию. Это — самая трудная часть доказательства. Докажем, что  $\tilde{\tilde{\varphi}} = \varphi(x)$  и  $\tilde{\hat{\varphi}} = \varphi(x)$ , то есть  $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} = I$ . Докажем первую, вторая доказывается аналогично. Это такое не очень приятное занятие.

$$\tilde{\tilde{\varphi}} = \kappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\varphi}(y) e^{i\langle x, y \rangle} dy = \kappa^m \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\varphi}(y) e^{i\langle x, y \rangle - \varepsilon^2 \frac{\|y\|^2}{2}} dy.$$

Поскольку  $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^m)$ , то  $\hat{\varphi}$  убывает быстро и интеграл существует, можно оценить подынтегральное выражение,



значит, можно перейти к пределу под знаком интеграла. Далее

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} &= \kappa^{2m} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z) \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle z-x, y \rangle - \varepsilon^2 \frac{\|y\|^2}{2}} dy dz = \\ &\quad \text{делаем замену переменных} \\ &= \kappa^{2m} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon^m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z) \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle \frac{z-x}{\varepsilon}, y \rangle - \frac{\|y\|^2}{2}} dy dz = \\ &\quad \text{Делаем преобразование Фурье, одна } \kappa \text{ пропадёт} \\ &= \kappa^m \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon^m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z) e^{-\frac{\|z-x\|^2}{2}} dz = \kappa^m \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x + \varepsilon z) e^{-\frac{\|z\|^2}{2}} dz = \varphi(x).\end{aligned}$$

■ Теперь можем определить преобразование Фурье для обобщённых функций медленного роста.

**Определение 19.3.** Пусть  $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ . Мы определяем функционал

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^m) \quad \langle \hat{f}, \varphi \rangle := \langle f, \tilde{\varphi} \rangle; \quad \langle \tilde{f}, \varphi \rangle := \langle f, \hat{\varphi} \rangle.$$

То есть  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}^{-1}: S(\mathbb{R}^m) \rightarrow S(\mathbb{R}^m)$  непрерывные и  $\hat{f}, \tilde{f} \in S'(\mathbb{R}^m)$ .

Будем обозначать  $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$  и  $\mathcal{F}^{-1}(f) = \tilde{f}$  прямое и обратное преобразования Фурье в  $S'(\mathbb{R}^m)$ .

**Теорема 19.2.**  $\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}^m) \rightarrow S'(\mathbb{R}^m)$  является линейным непрерывным и биективным оператором.

Ну и соответственно  $\mathcal{F}^{-1}$  будет тоже линейным непрерывным и биективным.

**Доказательство.** Линейность очевидная по определению. Нужно проверить его непрерывность. Если  $f_n \in S'(\mathbb{R}^m)$  и  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  в  $S'(\mathbb{R}^m)$ , то  $\langle f_n, \hat{\varphi} \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle f, \hat{\varphi} \rangle$ . Следовательно,  $\mathcal{F}$  непрерывный.

Теперь проверим биективность. Она вытекает из таких формул

$$\langle \tilde{\hat{f}}, \varphi \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\hat{\varphi}} \rangle = \langle \hat{f}, \varphi \rangle; \quad \langle \hat{\tilde{f}}, \varphi \rangle = \langle \tilde{f}, \tilde{\hat{\varphi}} \rangle = \langle \tilde{f}, \varphi \rangle.$$

Значит, это биективный оператор и теорема доказана. ■

Приведём некоторые формулы для преобразования Фурье и примерчик рассмотрим.

**Утверждение 19.4.** Формула сдвига (на самом деле будут две формулы). Если  $f \in S'(\mathbb{R}^m)$  и  $\tau_a \varphi(x) = \varphi(x-a)$ , то

$$\mathcal{F}(\tau_a f) = e^{-i\langle a, x \rangle} \mathcal{F}f; \quad \tau_a(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(e^{i\langle a, y \rangle} f(y)).$$

**Доказательство.** Если  $f = \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ , эти формулы легко проверяются по определению преобразования Фурье.

Зная, что эти формулы справедливы для функций из  $S(\mathbb{R}^n)$ , докажем для обобщённых.

$$\langle \mathcal{F}(\tau_a f), \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-a} \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \langle f, \mathcal{F}(e^{-i\langle a, y \rangle} \varphi(y)) \rangle = \langle e^{-i\langle a, y \rangle} \mathcal{F}(f), \varphi \rangle.$$

■  
**Утверждение 19.5.** Формула замены переменных. Пусть  $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ ,  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m: \det A \neq 0$ ,  $\tau_A \varphi(x) = \varphi(Ax)$ . Будем обозначать через  $A'$  сопряжённый оператор (с транспонированной матрицей). Тогда

$$\mathcal{F}(T_A f) = |\det A'|^{-1} T_{A^{-1}} f, \quad T_A(f) = |\det A'|^{-1} \mathcal{F}(T_{A^{-1}} f).$$

Доказывается так же. Сначала проверяется для  $f = \varphi \in S(\mathbb{R}^m)$ , потом из этого для обобщённых.

**Утверждение 19.6.** Формула дифференцирования. Пусть  $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ . Тогда

$$\partial^\alpha(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}((-i y)^\alpha f(y)), \quad \mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (i x)^\alpha \mathcal{F}f.$$

Опять же техника уже разработана. Используем только определение, доказываем для  $f = \varphi \in S(\mathbb{R}^m)$ . Потом перетаскиваем на обобщённые.

Рассмотрим пример. Посчитаем преобразование Фурье для производной от  $\delta$ -функции. Пусть  $f(x) = \partial^\alpha \delta(x-a)$ .

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta(x-a), \partial^\alpha \mathcal{F}(\varphi) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(a) =$$

напишем формулу для преобразования Фурье и производные сразу напомним

$$= (-1)^{|\alpha|} \kappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) (-i y)^\alpha e^{-i\langle a, y \rangle} dy.$$

Значит,

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha \delta(x-a)) = \varkappa^m (i y)^\alpha e^{-i\langle a, y \rangle}; \quad \mathcal{F}^{-1}(y^\alpha e^{-i\langle a, y \rangle}) = \varkappa^{-m} (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta(x-a).$$

## 20 Преобразование Фурье в пространствах Лебега первого и второго порядков

Я напомним, что  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^m x_k y_k$ . Для  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$  преобразование Фурье

$$\hat{f}(x) := \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy = \mathcal{F}(f); \quad \tilde{f}(x) := \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{i\langle x, y \rangle} dy = \mathcal{F}^{-1}(f).$$

Обычно  $\varkappa = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ . Тогда  $\tilde{f}(x) = \hat{f}(-x)$ .

**Лемма 20.1** (Римана—Лебега). Если  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$ , то

$$(1) \quad \hat{f} \in C(\mathbb{R}^m);$$

$$(2) \quad \|\hat{f}\|_C := \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |\hat{f}(x)| \leq \varkappa^m \|f\|_{\mathcal{L}_1};$$

$$(3) \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \hat{f}(x) = 0.$$

Здесь норма обычная  $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$ .

**Доказательство.** Первое свойство

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x-a) - \hat{f}(x)| &= |\tau_a \hat{f}(x) - \hat{f}(x)| = \varkappa^m \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(y) (e^{-i\langle x-a, y \rangle} - e^{-i\langle x, y \rangle}) dy \right| \leq \\ &\leq \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)| |e^{-i\langle x, y \rangle} - 1| dy = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)| 2 \left| \sin \frac{\langle a, y \rangle}{2} \right| dy \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Значит,  $\hat{f}$  равномерно непрерывна.

Второе

$$\|\hat{f}\|_C \leq \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)| dy = \varkappa^m \|f\|_{\mathcal{L}_1}.$$

Третье посложнее. Положим  $a := \frac{\pi x}{\langle x, x \rangle}$  для  $x \neq 0$ . Тогда  $\tau_a \hat{f} = -\hat{f}$ . Следовательно

$$|\hat{f}(x)| = \frac{1}{2} |\hat{f}(x) - \tau_a \hat{f}(x)| = \frac{\varkappa^m}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^m} (f(y) - \tau_a f(y)) e^{-i\langle x, y \rangle} dy \right| \leq \frac{\varkappa^m}{2} \|f - \tau_a f\|_{\mathcal{L}_1} \leq$$

Теперь применяем неравенство треугольника для нормы

$$\leq \frac{\varkappa^m}{2} (\|f - g\|_{\mathcal{L}_1} + \|g - \tau_a g\|_{\mathcal{L}_1} + \|\tau_a g - \tau_a f\|_{\mathcal{L}_1}).$$

Функцию  $g$  выбираем так, чтобы  $\|f - g\|_{\mathcal{L}_1} < \frac{2\varepsilon}{3\varkappa^m}$ , где  $\varepsilon > 0$  и  $g \in C_0(\mathbb{R}^m)$  (непрерывная функция с компактным носителем). Если сдвинем, получим то же неравенство

$$\|\tau_a f - \tau_a g\|_{\mathcal{L}_1} < \frac{2\varepsilon}{3\varkappa^m}.$$

В силу непрерывности на компактном носителе,  $g$  равномерно непрерывна. Существует  $\delta > 0$ :  $\|a\| < \delta \Rightarrow \|g - \tau_a g\|_{\mathcal{L}_1} < \frac{2\varepsilon}{3\varkappa^m}$  (по норме в  $C$  это верно, по норме в  $\mathcal{L}_1$  тем более).

Тогда для  $\|a\| < \varepsilon$  имеем  $|\hat{f}(x)| < \varepsilon$ . А  $\|a\| = \frac{\pi}{\|x\|} < \delta$ . Значит,  $\|x\| > \frac{\pi}{\delta}$ . То есть предел в бесконечности равен нулю. ■

Докажем теперь условие Дини, но в одномерном случае. В отличие от преобразования Фурье обобщённой функции, функция может получиться не из  $\mathcal{L}_1$ . Но можно на исходную функцию наложить ограничение.

**Теорема 20.1** (условие обращения Дини). Пусть  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$  и при некотором  $\delta > 0$  и некотором  $x$  имеем  $\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \right| < \infty$ . Тогда утверждается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \hat{f}(y) e^{-i x y} dy = f(x).$$

**Доказательство.** Запишем интеграл и применим теорему Фубини

$$\kappa \int_{-n}^n \hat{f}(y) e^{-i x y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \left( \int_{-n}^n e^{-i(x-z)y} dy \right) dz = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \frac{\sin n(x-z)}{(x-z)} dz.$$

Представим подынтегральную функцию через экспоненту по формуле Эйлера и используем, что  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin nt}{t} dt = \pi$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \frac{\sin n(x-z)}{(x-z)} dz - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin nt dt = \\ &= \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq \delta} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin nt dt}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ (интегрируема)}} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{|t| > \delta} \frac{f(x-t)}{t} \sin nt dt}_{\rightarrow 0 \text{ (20.1)}} + \underbrace{\int_{|t| > \delta n} f(x) \frac{\sin nt}{t} dt}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \end{aligned}$$

**Утверждение 20.1** (Формула умножения). Пусть  $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$ . Тогда  $\int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx$ . ■

**Доказательство.**  $\int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{-i \langle x, y \rangle} dy \right) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^m} g(x) e^{-i \langle x, y \rangle} dx \right) dy$ . ■

**Утверждение 20.2** (Формула обращения). Пусть  $f, \hat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$\tilde{\hat{f}}(x) = \tilde{f}(x) = f(x) \text{ н. в. } x \in \mathbb{R}^m$$

**Доказательство.** Имеем

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^m) \quad \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{\hat{f}}(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \tilde{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \varphi(x) dx.$$

Значит,  $\tilde{\hat{f}}(x) - f(x) = 0$  почти всюду. ■

**Утверждение 20.3** (Формулы дифференцирования). Пусть  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$ ,  $x^\alpha f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$ . Тогда  $\partial^\alpha \hat{f}(x) = (-i y)^\alpha f(y)$ .

Если  $f \in W_1^k(\mathbb{R}^m)$ , то  $\forall |\alpha| \leq k, \forall x \in \mathbb{R}^m \quad \partial^\alpha f(x) = (ix)^\alpha \hat{f}(x)$ .

Раз мы уже показали, что данное преобразование совпадает с обобщённым, то всё уже доказано. Просто равенства выполнены почти всюду, но для элементов из  $\mathcal{L}_1$  это неважно.

**Утверждение 20.4.** Формула свёртки. Пусть  $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) g(x-y) dy \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m); \quad f \hat{\star} g(x) = \kappa^{-m} \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x).$$

**Доказательство.** Рассмотрим невырожденное линейное преобразование (ведь существует обратное)  $(x, y) \rightarrow (y, x-y): \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ . Так как преобразование линейно, оно переводит измеримые в измеримые. Так как  $f(x) \cdot g(y)$  измерима, то  $f(y)g(x-y)$  тоже измерима в  $\mathbb{R}^{2m}$ . Более того,  $f(y)g(x-y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{2m})$ . И выполняются неравенства

$$\|f \star g\|_{\mathcal{L}_1} \leq \int_{\mathbb{R}^m} dx \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)g(x-y)| dy \right) = \|f\|_{\mathcal{L}_1} \|g\|_{\mathcal{L}_1}.$$

Кроме того

$$\begin{aligned} \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(z) g(y-z) dz \right) e^{-i\langle x, y \rangle} dy = \\ = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(z) \left( \int_{\mathbb{R}^m} g(y-z) e^{-i\langle x, y-z \rangle} dy \right) e^{-i\langle x, z \rangle} dz = \{y \rightarrow y-z\} = \varkappa^{-m} \hat{f}(x) \hat{g}(x). \end{aligned}$$

■

## 20.1 Преобразование Фурье в $\mathcal{L}_2$

**Определение 20.1.** Обозначим  $\Delta_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid \max_{1 \leq k \leq m} |x_k| < n \right\}$ . Пусть  $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ . Тогда определим преобразование Фурье

$$\hat{f}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta_n} f(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy.$$

Здесь предел берётся в  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$ .

Как и в признаке Дини приходится брать предел. Обозначим  $f_n(x) = f(x) \chi_{\Delta_n}(x)$ . Тогда  $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда считаем по определению  $\tilde{f}(x) := \hat{f}(-x)$ .

Докажем, что предел существует и оператор сохраняет норму.

**Теорема 20.2** (Планшереля). Если  $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$ , то  $\exists \hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  в  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$  и  $\|\hat{f}\|_{\mathcal{L}_2} = \|f\|_{\mathcal{L}_2}$ .

**Доказательство.** Легко проверить, что если возьмём функцию  $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$ , то

$$\|\varphi\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \overline{\varphi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{\varphi}(x) \overline{\varphi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\varphi}(x) \overline{\hat{\varphi}(x)} dx = \|\hat{\varphi}\|_{\mathcal{L}_2}^2.$$

Таким образом для функций из  $S$  мы доказали.

Пусть  $f(x) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$  и  $f(x) = 0$  для всех  $x \in \Delta_r$ . Тогда  $\exists \varphi_n \in \mathcal{D}(\Delta_r)$ :  $\|f - \varphi_n\|_{\mathcal{L}_2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Мы это доказывали для  $\mathcal{L}_p$ . Значит,  $\{\varphi_n\}$  — последовательность Коши в  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$ . Следовательно и  $\{\hat{\varphi}_n\}$  — последовательность Коши в  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$ . Сходятся в  $\mathcal{L}_2$ , значит, сходятся в  $\mathcal{L}_1$ , а  $\varphi_n, f \in \mathcal{L}_1(\Delta_r)$  и  $\hat{\varphi}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \hat{f}$ . Значит,  $\hat{\varphi}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \hat{f}$  в  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$ . Значит,

$$\|f\|_{\mathcal{L}_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_{\mathcal{L}_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{\varphi}_n\| = \|\hat{f}\|_{\mathcal{L}_2}.$$

Докажем теперь в общем случае. Пусть  $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$ . Тогда  $f_n = f \cdot \chi_{\Delta_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  в  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$ . Значит,  $\{f_n\}$  — последовательность Коши в  $\mathcal{L}_2$ . Отсюда и преобразование Фурье тоже является последовательностью Коши в силу последнего выключного равенства. Отсюда существует предел в  $\mathcal{L}_2$ , то есть  $\exists \hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n$  в  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$ . И осталось написать равенство норм. ■

Давайте сформулируем теперь свойства преобразования Фурье для функций из  $\mathcal{L}_2$ .

**Утверждение 20.5.** Формула умножения.  $f, g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \hat{g}(x) dx.$$

Эта формула получается из теоремы Планшереля и непрерывности скалярного произведения.

**Утверждение 20.6.** Формула обращения. Если  $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$ , то  $\tilde{\hat{f}}(x) = \hat{\tilde{f}}(x) = f(x)$  почти всюду на  $\mathbb{R}^m$ .

Доказывается так же, как и в  $\mathcal{L}_1$ .

**Утверждение 20.7.** Формула свёртки. Пусть  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$ ,  $g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$f \star g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m), \quad f \hat{\star} g(x) = \varkappa^{-m} \hat{f}(x) \hat{g}(x) \text{ почти всюду на } \mathbb{R}^m.$$

**Доказательство.** Интегрируемость в квадрате вытекает и обобщённого неравенства Миньковского

$$\|f \star g\|_{\mathcal{L}_2} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_1} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}_2}.$$

Применя теорему Плашереля, переходя к пределу, получаем формулу. ■

## 20.2 Функции Эрмита

Это вот такие функции  $h_n(x) := c_n e^{\frac{x^2}{2}} \left( \left( \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2} \right)$ . Здесь  $c_n$  константа. Если произвести дифференцирование

$$h_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad H_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$H_n(x)$  называются многочленами Эрмита.

**Утверждение 20.8.**  $\{h_n(x)\}$  ортогональны.

**Доказательство.** Имеем

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(x) h_m(x) dx = c_n \int_{\mathbb{R}} H_n(x) \left( \frac{d}{dx} \right)^m e^{-x^2} dx = c_n (-1)^m \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \left( \frac{d}{dx} \right)^m H_n(x) dx = 0, \quad m > n.$$

Для  $n = m$  это равно  $c_n^2 2^n n! \sqrt{\pi}$ , так как  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ . ■ Значит, для ортонормированной системы берём

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}.$$

**Лемма 20.2.** Пусть  $a, b > 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ , функция  $\varphi$  измерима и удовлетворяет неравенству  $0 < |\varphi(x)| \leq b e^{-a|x|}$ . Тогда система функций  $\varphi_n(x) = x^n \varphi(x)$  при  $n \in \mathbb{Z}_+$  полна в  $\mathcal{L}_2$ .

**Доказательство.** Мы из прошлого семестра знаем критерий полноты. Мы им и воспользуемся. Пусть  $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  и  $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad f \perp \varphi_n$ , то есть

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = 0.$$

Рассмотрим функцию комплексного переменного  $F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) e^{-it z} dt$ , где  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ :  $|y| < a$ . Можно дифференцировать под знаком интеграла, значит, функция получится голоморфной в  $|\operatorname{Im} z| < a$ . Заметим, что производные в нуле равны нулю, то есть

$$F^{(n)}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t) (-it)^n \varphi(t) dt = 0$$

в силу условия ортогональности. Значит, по теореме об аналитическом продолжении функция будет тождественным нулём в полосе  $|\operatorname{Im} z| < a$ . В частности, она будет равна нулю для всех  $x \in \mathbb{R}$ . А тогда это с точностью до константы преобразование Фурье ноль, но существует обратное. И обратное обязано быть нулём почти всюду. Значит,  $f(t) \varphi(t) = 0$  почти всюду. Отсюда  $f(t) = 0$  почти всюду. ■

**Теорема 20.3.** Функции Эрмита  $\{h_n\}$  образуют полную ортонормированную систему, такую, что  $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \hat{h}_n(x) = (-i)^n h_n(x)$ . То есть они являются собственными функциями преобразования Фурье и образуют полную ортонормированную систему.

**Доказательство.**  $\{h_n\}$  является ортогонализацией Грама–Шмидта системы  $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Осталось доказать, что функции Эрмита являются собственными.

$$\begin{aligned} \hat{h}_n(x) &= \kappa \int_{\mathbb{R}} h_n(y) e^{-i x y} dy = \kappa c_n \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{y^2}{2} - i x y} \left( \frac{d}{dy} \right)^n e^{-y^2} dy = \\ &= \kappa c_n e^{\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(y-i x)^2}{2}} \left( \frac{d}{dy} \right)^n e^{-y^2} dy = \kappa c_n (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \left( \frac{d}{dy} \right)^n e^{\frac{(y-i x)^2}{2}} dy = \\ &= \kappa c_n (-i)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2} - i x y - \frac{x^2}{2}} dy = \text{Мы доказывали, что } e^{-\frac{(y-i x)^2}{2}} = e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-i x y} e^{\frac{x^2}{2}} \\ &= c_n (-i)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left( \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2} = (-i)^n h_n(x). \end{aligned}$$

■

## 21 Сопряжённые операторы

Сначала несколько дополнительных сведений, которые вам известны уже.

Пусть  $E$  — нормированное пространство над полем  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $E^*$  — сопряжённое пространство, оно состоит из всех линейных ограниченных функционалов. Мы говорили, что такое ограниченный. В данном случае это

означает, что норма  $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$ , где  $S = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$  ограничена.

**Определение 21.1.** Система  $\{e_k\}_{k=1}^n \subset E$  называется линейно независимой, если из  $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$  следует  $\lambda_k = 0$  для  $k = 1, \dots, n$ .

Система функционалов  $\{f_k\}_{k=1}^n \subset E^*$  называется линейно независимой, если из  $\forall x \in E \sum_{k=1}^n f_k(x) = 0$  следует, что  $\lambda_k = 0$  для  $k = 1, \dots, n$ .

**Определение 21.2.** Системы  $\{e_k\}_{k=1}^n \subset E$  и  $\{f_k\}_{k=1}^n \subset E^*$  называют биортогональными, если для  $l \neq k$   $f_k(e_l) = 0$  и  $f_l(e_k) = 1$ .

Бесконечная система линейно независима, если линейна независима любая конечная подсистема. По лемме Цорна можно выбрать максимальную линейно независимую систему. Её называют базисом Гамеля. Она может быть несчётной.

**Теорема 21.1.** Система функционалов  $\{f_k\}_{k=1}^n \subset E^*$ . Тогда существует  $\{e_k\}_{k=1}^n$  биортогональная с  $f_k$ , если и только если  $\{f_k\}_{k=1}^n$  линейно независима.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $\forall x \in E \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) = 0$ . Берём  $x = e_k$ , откуда  $\lambda_k = 0$  для  $k = 1, \dots, n$ .

Достаточность по индукции. Для  $n = 1$  пусть  $f_1 \neq 0$ . Тогда  $\exists e_1 \in E: f_1(e_1) = 1$ . Пусть верно для  $n - 1$ , то есть  $\exists \{x_k\}_{k=1}^{n-1}: f_l(x_k) = \delta_{lk}$ . Рассмотрим  $y = x - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) x_k$  для  $x \in E$ . Отсюда вытекает, что  $f_k(y) = 0$  для  $k = 1, \dots, n - 1$  в силу линейности. Если применить к нашему равенству функционал, будет только одно слагаемое. Поэтому это равно нулю для любого  $x$ . Если  $\forall x \in E f_n(y) = 0$  ( $y$  зависит от  $x$ ), то отсюда следует,

если приметь функционал, что  $\forall x \in E f_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) x_k$ , что невозможно. Значит, существует такой элемент  $x \in E: f_n(y) \neq 0$ . Обозначим через  $e_n = \frac{y}{f_n(y)}$ , а через  $e_k$  обозначим элементы  $e_k = x_k - f_n(x_k) e_n$  для  $k = 1, \dots, n - 1$ . Теперь легко проверить, что эти элементы будут биортогональны нашим функционалам. ■

**Следствие 21.1.** Пусть задана система элементов  $\{e_k\}_{k=1}^n \subset E$ . Тогда существует биортогональная система функционалов  $\{f_k\}_{k=1}^n \subset E^*$ , если и только если  $\{e_k\}_{k=1}^n$  линейно независима.

**Доказательство.** Надо вспомнить, как пространство вложено в своё второе сопряжённое  $J: E \rightarrow E^{**}$ .  $\forall x \in E J(x) = \delta_x \in E^{**}$ , где  $\delta_x(f) = f(x)$  для  $f \in E^*$ . Здесь  $\{\delta_{e_k}\}_{k=1}^n$  линейно независимы если и только если система  $\{e_k\}_{k=1}^n$  линейно независима. Отсюда существует  $\{f_k\}_{k=1}^n \subset E^*$  биортогональная системе  $\{\delta_{e_k}\}_{k=1}^n$ . ■

Пусть  $E, F$  — нормированные пространства над полем  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Через  $\mathcal{L}(E, F)$  мы обозначали пространство линейных ограниченных операторов  $A: E \rightarrow F$  с нормой  $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| < \infty$ .

С каждым линейным оператором (не обязательно ограниченным) связано понятие ядра  $\ker(A) = \{x \in E \mid A(x) = 0\}$  и понятие образа  $\text{Im}(A) = \{y \in F \mid \exists x \in E: y = f(x)\}$ .

**Утверждение 21.1.**  $\ker(A) \subset E$  замкнутое линейное подпространство,  $\text{Im}(A) \subset F$  линейное подпространство.

**Доказательство.** Если  $x, y \in \ker(A)$ , то  $A(x + y) = A(x) + A(y) = 0$ . Значит,  $x + y \in \ker(A)$ . С умножением на число аналогично. Если  $x = \lim x_n$ , где  $x_n \in \ker(A)$ , то  $A(x) = \lim A(x_n) = 0$ , то есть  $x \in \ker(A)$ .

Для образа аналогично доказательность того, что оно подпространство. ■

**Утверждение 21.2.** Линейный оператор  $A: E \rightarrow F$  (не обязательно ограниченный) является биективным, если и только если его ядро нулевое, а образ всё  $F$ , то есть

$$\ker(A) = 0, \text{Im}(A) = F.$$

**Доказательство.** Если  $A$  биективен, то ядро  $\ker(A) = A^{-1}(0) = \{0\}$ . и в силу биективности  $\text{Im}(A) = F$ . Обратно, если  $A(x) = A(y)$ , то отсюда  $A(x - y) = 0$ , ну а следовательно, так как ядро ноль,  $x - y = 0$ . Значит, отображение  $A$  является взаимнооднозначным. ■

**Определение 21.3.** Пусть есть два оператора  $A: E \rightarrow F$  и  $C: F \rightarrow G$ . Тогда  $BA: E \rightarrow G$  определяется по правилу  $\forall x \in E BA(x) = A(A(x))$  и называется произведением операторов.

**Определение 21.4.** Оператор  $B: F \rightarrow E$  называется обратным к оператору  $A: E \rightarrow F$ , если  $BA = I_E$  и  $AB = I_F$  (тождественный оператор).

**Утверждение 21.3.** Если  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  и  $B \in \mathcal{L}(F, G)$ , то  $\|BA\| \leq \|A\| \|B\|$ .

**Доказательство.** Имеем  $\forall x \in S \|BA(x)\| \leq \|B\| \|A(x)\| \leq \|B\| \|A\|$ . ■

**Утверждение 21.4.** Линейный оператор (не обязательно даже ограниченный)  $A: E \rightarrow F$  является биективным, если и только если  $A^{-1}F \rightarrow E$  является линейным и биективным.

**Доказательство.** Биективность понятна. Первое условие определения даёт, что ядро ноль, а второе условие — образ есть  $F$ .

Нужно доказать линейность. Пусть  $u, v \in F$  и  $A^{-1}(u) = x, A^{-1}(v) = y$ . Тогда

$$A^{-1}(u + v) = A^{-1}(A(x) + A(y)) = A^{-1}A(x + y) = x + y = A^{-1}(u) + A^{-1}(v).$$

Пусть  $\lambda \in \mathbb{F}$ . Тогда  $A^{-1}(\lambda u) = A^{-1}(\lambda A(x)) = A^{-1}A(\lambda x) = \lambda x = \lambda A^{-1}(x)$ . ■

**Определение 21.5.** Оператор  $A^*: F^* \rightarrow E^*$  называется сопряжённым оператором к оператору  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , если

$$\forall f \in F^* \quad A^*(f) = g: \forall x \in E \quad g(x) := f(Ax).$$

Видно, что так как оператор и функционал линейны и ограничены, то и сопряжённый будет линейный и ограниченный. Только что с вами доказывали, что нормы не более чем перемножаются.

Если ввести обозначения, как мы с вами рассматривали в теории обобщённых функций,  $f(x) = \langle f, x \rangle$ , то можно записать следующее равенство.

$$\forall x \in E, \forall f \in F^* \quad \langle A^*f, x \rangle = \langle f, Ax \rangle.$$

**Утверждение 21.5.** Если  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , то  $A^*(F^*, E^*)$  и  $\|A^*\| = \|A\|$ .

**Доказательство.** В начале надо доказать линейность. Пусть  $f, g \in F^*$  и  $A^*(f + g) = h$ . Тогда по определению

$$h(x) = (f + g)(Ax) = f(Ax) + g(Ax); \Rightarrow A^*(f + g) = A^*f + A^*g.$$

Пусть  $\lambda \in \mathbb{F}$ . Тогда

$$A^*(\lambda f) = h, \quad h(x) = (\lambda f)(Ax) = \lambda f(Ax); \Rightarrow A^*(\lambda f) = \lambda A^*(f).$$

Осталось доказать равенство норм.  $|(A^*f)(x)| = |f(Ax)| \leq \|f\| \|Ax\| \leq \|f\| \|A\| \|x\|$ . Следовательно,

$$\|A^*f\| \leq \|f\| \|A\| \Rightarrow \|A^*\| \leq \|A\|.$$

По теореме Хана—Банаха для фиксированного  $x \in E$  существует функционал  $f \in F^*$ , для которого  $f(Ax) = \|Ax\|$  и  $\|f\| = 1$ . Отсюда вытекает, что

$$\|Ax\| = f(Ax) \leq A^*f(x) \leq \|A^*f\| \cdot \|x\| \leq \|A^*\| \|x\|,$$

так как  $\|f\| = 1$ . Ну а отсюда вытекает обратное неравенство  $\|A\| \leq \|A^*\|$ . ■

**Утверждение 21.6.** Пусть  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $B \in \mathcal{L}(F, G)$ . Тогда  $(BA)^* = A^*B^*$ . В частности  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ , если  $A$  биективен.

**Доказательство.** Докажем первое равенство.

$$((BA)^*g)(x) = g(B(A(x))) = (B^*g)(Ax) = A^*B^*g(x).$$

Второе утверждение следует из того, что  $A^{-1}A = I_F$  и  $AA^{-1} = I_E$ . С помощью только что доказанного равенства имеем

$$A^*(A^{-1})^* = I_{F^*}; \quad (A^{-1})^*A^* = I_{E^*}.$$

То что обратный оператор ограничен следует из теоремы Банаха, которую мы докажем позже. ■

**Определение 21.6.** Пусть  $V \subset E$  и  $W \subset E^*$  — некоторые множества. Тогда аннулятором\* (аналогично ортогональному дополнению)  $V$  называется  $V^\perp = \{f \in E^* \mid \forall x \in V \quad f(x) = 0\}$ . Аналогично  $W_\perp = \{x \in E \mid \forall f \in W: f(x) = 0\}$  — аннулятор  $W$ .

**Лемма 21.1.**  $V^\perp \subset E^*$ ,  $W_\perp \subset E$  являются замкнутыми подпространствами.

**Доказательство.** Вытекает из равенств  $W_\perp = \bigcap_{f \in W} \ker(f)$ ,  $V^\perp = \bigcap_{x \in V} \ker(\delta_x)$ . ■

**Теорема 21.2.** Если  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , то

- (1)  $\ker(A) = (\operatorname{Im} A^*)_\perp$ ;
- (2)  $\ker(A^*) = (\operatorname{Im} A)^\perp$ ;
- (3)  $\operatorname{Im}(A) \subset (\ker(A^*))_\perp$ ;
- (4)  $\operatorname{Im}(A^*) \subset (\ker(A))^\perp$ .

**Доказательство.** Самое сложное равенство первое. Нужно применять теорему Хана—Банаха. Имеем

$$x \in \ker(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow \forall f \in F^* \quad f(Ax) = 0 \Leftrightarrow \forall f \in F^* \quad (A^*f)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (\operatorname{Im} A^*)_\perp.$$

Доказательство второго.

$$f \in \ker(A^*) \Leftrightarrow \forall x \in E \quad f(Ax) = 0 \Leftrightarrow f \in (\operatorname{Im} A)^\perp.$$

Третье. Если  $y \in \operatorname{Im}(A)$ , то  $\exists x \in E: y = Ax$ . Значит,

$$\forall f \in \ker(A^*) \quad f(y) = f(Ax) = (A^*f)(x) = 0 \Leftrightarrow y \in (\ker(A^*))_\perp.$$

И последнее. Если  $g \in \text{Im}(A^*)$ , то  $\exists f \in F^*: \forall x \in E \quad g(x) = f(Ax)$ . А это как раз и означает, что  $g \in (\ker(A))^\perp$ . ■

Теперь нам осталось привести два примера и закончим.

**Пример 21.1.**  $A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  задаётся матрицей  $A = \{a_{kl}\}_{k,l=1}^{m,n}$ . Это означает, что если  $Ax = y$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$  и  $y_k = \sum_{l=1}^n a_{kl}x_l$  для  $k = 1, \dots, m$ . Найдём сопряжённый. Пусть  $A^*u = v$ . Тогда мы имеем

$$\langle u, Ax \rangle = \sum_{k=1}^m u_k y_k = \sum_{k=1}^m u_k \left( \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l \right) = \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^m a_{kl} u_k \right) x_l = \langle A^*u, x \rangle.$$

То есть как раз  $A^* = \{a_{kl}^*\}$ , где  $a_{kl}^* = a_{lk}$ .

**Пример 21.2.** Возьмём такой интегральный оператор  $Af(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$ . Функция  $K(x, y)$  называется ядром интегрального оператора  $A$ . Предполагается, что

(1)  $K(x, y)$  измерима на  $[0, 1]^2$ ;

(2)  $\|K\|_{\mathcal{L}_{pq}} = \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 |K(x, y)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$  для  $q = \frac{p}{p-1}$ ,  $1 < p < \infty$  или  $(p, q) = (1, \infty)$ .

**Доказательство.** Применяем обобщённое неравенство Миньковского, а затем неравенство Гёльдера.

$$\left( \int_0^1 |Af(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^1 \left( \int_0^1 |K(x, y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot |f(y)| dy \leq \|K\|_{\mathcal{L}_{pq}} \cdot \|f\|_{\mathcal{L}_p}.$$

Отсюда  $\|A\| \leq \|K\|_{\mathcal{L}_{pq}} < \infty$ .

Построим теперь сопряжённый. Мы знаем, что  $\mathcal{L}_p^*[0, 1] = \mathcal{L}_q[0, 1]$ . Возьмём от-туда  $g \in \mathcal{L}_q[0, 1]$ . Тогда

$$\langle g, Ag \rangle = \int_0^1 g(x) \left( \int_0^1 K(x, y) f(y) dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, y) g(x) dx \right) f(y) dy = \langle A^*g, \rangle.$$

Значит,  $A^*g(y) = \int_0^1 K(x, y) g(x) dx$ , пишут  $K^*(x, y) = K^*(y, x)$ . ■

## 22 Теорема о замкнутом графике

В начале мы рассмотрим произведение нормированных пространств. Пусть  $E, F$  — нормированные пространства. Тогда прямое произведение есть

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

Тогда на этом прямом произведении заданы операции

(а)  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ;

(б)  $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ ;

(в) и норму введём  $\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ .

Легко понять, что это именно нормированное пространство.

**Лемма 22.1.** Если  $E, F$  — банаховы пространства, то  $E \times F$  — банахово пространство.

**Доказательство.** Пусть у нас задана последовательность Коши  $\{(x_n, y_n)\}$  в прямом произведении  $E \times F$ . Тогда из определения нормы вытекает, что  $\{x_n\}$  является последовательностью Коши в  $E$  и  $\{y_n\}$  является последовательностью Коши в  $F$ . И, следовательно, существуют пределы  $x = \lim x_n$  и  $y = \lim y_n$ . А так как

$$\|(x, y) - (x_n, y_n)\| \leq \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

то существует предел  $\lim(x_n, y_n)$ . ■

Вот такая простая лемма. Вы могли её сами доказать. Это как утверждения о том, что так как  $\mathbb{R}$  полно, то и  $\mathbb{R}^2$  полно. Доказательство точно такое же.

Дальше у нас будет всюду  $E, F$  — банаховы пространства, а  $L \subset E$  — линейное подпространство (не обязательно замкнутое).



Рассмотрим оператор  $A: L \rightarrow F$  (мы будем рассматривать линейные операторы, но не обязательно ограниченные). У этого оператора область определения есть  $\text{dom}(A) = L$ . Определим и обозначим график этого оператора

$$\text{gr}(A) = \{(x, y) \in E \times F \mid x \in L, y \in Ax\}.$$

График является линейным подпространством в  $E \times F$ .

**Определение 22.1.** *Линейный оператор  $A: L \rightarrow F$  называется замкнутым, если его график  $\text{gr}(A)$  замкнут в  $E \times F$ .*

$\text{gr}(A)$  замкнут, если и только если

$$\forall x_n \rightarrow x, \forall y_n \rightarrow y \quad x \in L, Ax = y.$$

**Теорема 22.1** (критерий замкнутости ограниченного оператора).  $A \in \mathcal{L}(L, F)$  является замкнутым, если и только если его область определения  $\text{dom}(A) = L$  замкнута в  $E$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть оператор  $A$  замкнут. Пусть  $x_n \rightarrow x$  и  $x_n \in L$ . Нам нужно доказать, что  $x \in L$  тоже. В силу непрерывности оператора  $A$  следует, что  $y_n = Ax_n \rightarrow y \in F$ , так как  $F$  полно. А в силу того, что оператор  $A$  замкнут имеем  $x \in L$  и  $Ax = y$ . Так мы и доказали, что  $\bar{L} = L$ .

Обратно. Пусть теперь  $\bar{L} = L$  и  $x_n \rightarrow x, y_n = Ax_n \rightarrow y$ . Нужно доказать, что  $x \in L$  и  $Ax = y$ . Действительно, так как  $A$  является непрерывным, то  $Ax_n \rightarrow Ax$ ; в силу единственности предела  $Ax_n \rightarrow y$  и  $x \in L$  в силу замкнутости  $L$ . ■

В обе стороны использовали непрерывность оператора  $A$ .

Но бывают примеры неограниченных замкнутых операторов. Я хочу один такой пример привести. Пусть мы работаем с пространством Соболева  $L = W_1^1[0, 1]$ , а оператор имеет вид  $D\varphi(x) = \varphi'(x)$  почти всюду на  $[0, 1]$ . Тогда  $D: L \rightarrow \mathcal{L}_1[0, 1]$ . Докажем, что этот оператор неограниченный. Будем рассматривать  $L \subset \mathcal{L}_1[0, 1]$  с соответствующей нормой. Для доказательства неограниченности такого оператора возьмём, например, функции  $\varphi_n(x) = e^{in x}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда  $\varphi'_n(x) = in e^{in x}$ , а норма  $\|\varphi'_n\| = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  при  $\|\varphi_n\| = 1$ .

Это мы доказали, что оператор  $D$  неограничен. Теперь покажем, что он замкнут. Пусть у нас  $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$  и  $\varphi'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \psi$  в  $\mathcal{L}_1[0, 1]$ . При этом  $\varphi_n \in L = W_1^1[0, 1]$ , её можно изменить на множестве меры нуль так, чтобы эквивалентная ей была абсолютно непрерывной. Будем считать, что  $\varphi_n$  абсолютно непрерывны. Значит,  $\varphi_n(x) = \varphi_n(0) + \int_0^x \varphi'_n(t) dt$  почти всюду на  $[0, 1]$ . Так как  $|\varphi_n(0)| < c$ , можем перейти к пределу под знаком равенства

$$\varphi(x) = c + \int_0^x \psi(t) dt$$

почти всюду на  $[0, 1]$ .

Это может быть и очень сложный пример. Можно было взять подпространство непрерывных функций. Но полезно рассмотреть именно этот пример, в приложениях часто встречается именно пространство Соболева.

Дальше у нас  $S_r(x)$  будет обозначать шар

$$S_r(x) = \{y \in E \mid \|x - y\| \leq r\},$$

а  $S_r := S_r(0)$ ,  $S := S_1(0)$ .

**Лемма 22.2.** Пусть  $E$  — банахово пространство,  $A: E \rightarrow F$  — линейный оператор; множество функций задано следующим образом  $M_c = \{x \in E \mid \|Ax\| \leq c\}$  для  $c > 0$ . Тогда

$$\forall c > 0 \quad \exists r > 0: S_r \subset \overline{M}_c.$$

Серьёзная лемма. Мы не предполагаем непрерывность оператора. Из-за этого утверждение становится нетривиальным.

**Доказательство.** Воспользуемся теоремой Бэра о категориях: представим  $E$  в виде

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{kc}$$

для достаточно большого  $c$ . Но  $E$  является полным метрическим пространством, поэтому существует хоть одно  $M_{kc}$ , которое содержит некоторых шар вокруг некоторой точки, то есть

$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists r > 0, \exists x \in E: S_r(x) \subset \overline{M}_{kc}.$$

Множество  $M_c$  симметрично, то есть вместе с  $x$  лежит всегда  $-x$ .  $-M_{kc} = M_{kc}$ , значит, и  $-\overline{M}_{kc} = \overline{M}_{kc}$ . Отсюда следует, что и  $S_r(-x) \subset \overline{M}_{kc}$ .

Пусть  $y \in S_r$ . Тогда  $y \pm x \in S_r(\pm x)$  и существуют такие последовательности  $x_n^\pm \in M_{kc}$ , для которых  $x_n^\pm \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \pm x$ . Отсюда  $x_n = \frac{x_n^+ + x_n^-}{2} \in M_{kc}$  и  $x_n \rightarrow y$ , значит,  $y \in \overline{M}_{kc}$ . Отсюда  $S_r \subset \overline{M}_{kc}$ . Ну и в силу однородности можем записать, что  $S_{r/k} \subset \overline{M}_c$ . ■

**Теорема 22.2** (о замкнутом графике). Пусть  $E, F$  — банаховы пространства и  $A: E \rightarrow F$  — замкнутый оператор (замкнутость предполагает линейность оператора). Тогда  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ .

**Доказательство.** По лемме  $\forall c > 0 \exists r > 0: S_r \subset \overline{M}_c$ . Пусть  $c_n = \frac{c}{2^n}$ ,  $r_n = \frac{r}{2^n}$ . Тогда  $S_{r_n} \subset \overline{M}_{c_n}$ .

Пусть  $x \in S_r$ . Так как  $S_r \in \overline{M}_c$ , то  $\exists x_0 \in M_c: \|x - x_0\| < r_1$ . Так как  $S_{r_1} \in \overline{M}_{c_1}$ , то  $\exists x_1 \in M_{c_1}: \|x - x_0 - x_1\| < r_2$ . И так далее по индукции. Так как  $S_{r_k} \in \overline{M}_{c_k}$ , то  $\exists x_k \in M_{c_k}: \left\|x - \sum_{k=1}^n x_k\right\| < r_{k+1}$ .

Значит, ряд сходится  $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$ . Положим  $y_k = Ax_k$ . Тогда

$$\|y_m - y_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m Ax_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|Ax_k\| \leq \sum_{k=n+1}^m c_k < \frac{c}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 (m > n).$$

Значит,  $\{y_n\}$  последовательность Коши в  $F$ , а оно банахово, значит,  $\exists y = \lim y_n$ . Так как  $A$  замкнут, то  $Ax = y$ . Следовательно,

$$\|Ax\| = \|y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|Ax_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k = 2c.$$

Таким образом, мы имеем  $\forall x \in S_r \|Ax\| \leq 2c$ . Отсюда следует, что  $\|A\| \leq \frac{2c}{r}$  в силу однородности. Отсюда имеем  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ . ■

## 22.1 Эрмитовы сопряжённые операторы

Операторы в гильбертовых пространствах. Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $\langle x, y \rangle$  — скалярное произведение,  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  — евклидова норма. Пусть  $L \subset H$  — линейное подпространство. Рассмотрим линейный оператор  $A: L \rightarrow H$ , определённый на этом подпространстве.

**Определение 22.2.** Оператор  $A': M \rightarrow H$  называется эрмитово сопряжённым к оператору  $A$ , если  $A'y = z$ , где  $z$  определяется из уравнения  $\forall x \in L \langle z, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$ .

Область определения такого уравнения есть  $M = \text{dom}(A') = \{y \in H \mid \exists z \in H: \forall x \in L \langle z, x \rangle = \langle y, Ax \rangle\}$ .

Если бы оператор  $A$  был ограничен, можно было бы определить значительно проще.

**Утверждение 22.1.** Оператор  $A'$  существует, если и только если  $\overline{L} = H$ .

**Доказательство.** Что означает существование сопряжённого оператора? Это тот факт, что уравнение  $\langle z, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$  решается однозначно, то есть из равенства  $\langle z_1, x \rangle = \langle z_2, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$  для всех  $x \in L$  следует  $z_1 = z_2 = 0$ . Из равенства следует  $\forall z \in L \langle z_1 - z_2, x \rangle = 0$ . Чтобы это гарантировало равенство  $z_1 = z_2$ , нужно как раз, чтобы  $\overline{L}$  было всюду плотным. ■

**Утверждение 22.2.**  $A'$  — линейный оператор.

**Доказательство.** Пусть  $\forall x \in L \langle z_1, x \rangle = \langle y_1, Ax \rangle$ ,  $\langle z_2, x \rangle = \langle y_2, Ax \rangle$ . Тогда и

$$\forall x \in L \langle z_1 + z_2, x \rangle = \langle y_1 + y_2, Ax \rangle.$$

Значит,  $A'(y_1 + y_2) = z_1 + z_2$ .

Если  $\forall x \in L, \forall \lambda \in \mathbb{F} \langle z, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$ , то и  $\langle \lambda z, x \rangle = \langle \lambda y, Ax \rangle$ . То есть  $A'(\lambda y) = \lambda z$ . ■

**Утверждение 22.3.**  $A'$  — замкнутый оператор.

**Доказательство.** Пусть  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ ,  $Ay_n = z_n \rightarrow z$  и  $y_n \in M$ .

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in L \langle z_n, x \rangle = \langle y_n, Ax \rangle$ , перейдём к пределу  $\langle z, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$ . Отсюда  $y \in M$  и  $A'y = z$ . ■

**Теорема 22.3** (достаточное условие ограниченности  $A'$ ). Если  $A \in \mathcal{L}(L, H)$  и  $\overline{L} = H$ , то  $A' \in \mathcal{L}(H, H)$  и  $\|A'\| = \|A\|$ .

**Доказательство.** Рассмотрим линейный функционал  $f(x) = \langle Ax, y \rangle$  на пространстве  $L$ . Тогда по неравенству Коши—Буняковского

$$|f(x)| \leq \|Ax\| \cdot \|y\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|, \quad x \in L, y \in H.$$

Видим, что функционал ограничен. Можно его продолжить по теореме Хана—Банаха, то есть считаем, что  $f \in H^*$ . По теореме Рисса  $\exists z \in H: f(x) = \langle x, z \rangle$ . Тогда  $\forall x \in L \langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$  влечёт  $\forall x \in L \langle z, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$ . Тогда

$$\forall y \in H \quad A'y = z, \quad \|A'y\| = \|z\| = \|f\| \leq \|A\| \cdot \|y\|.$$

Отсюда следует, что  $\|A'\| \leq \|A\|$ .

Легко доказать, что  $A'' = A$  на подпространстве  $L$ . Отсюда получаем равенство  $\|A\| = \|A'\|$ . ■

**Определение 22.3.** Линейный оператор  $A: L \rightarrow H$ , где  $L \subset H$  подпространство, называется самосопряжённым, если  $A' = A$ , то есть  $\dim(A') = \dim(A)$  и

$$\forall x, y \in L \quad \langle A'y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$$

**Определение 22.4.** Линейный оператор  $A: H \rightarrow H$  называется эрмитовым, если является самосопряжённым, то есть

$$\forall x, y \in H \quad \langle Ay, x \rangle = \langle y, Ax \rangle.$$

**Теорема 22.4** (Хемингера—Теплица). Если  $A: H \rightarrow H$  является эрмитовым, то  $A \in \mathcal{L}(H, H)$ .

**Доказательство.** Так как  $A' = A$ , то оператор  $A$  является замкнутым. По теореме о замкнутом графике получаем требуемое. ■

Осталось нам примеры привести. Пусть  $A: L \rightarrow l_2$ , где  $L \subset l_2$  по формуле

$$(Ax)_n = \lambda_n x_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad x = \{x_n\}; \quad \|x\|_{l_2} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Такой оператор называют диагональным. Область определения этого оператора

$$L := \{z \in l_2 \mid Ax \in l_2\}.$$

**Пример 22.1.** Если  $\sup |\lambda_n| < \infty$ , то  $L \subset l_2$  и  $A$  ограниченный оператор.

**Пример 22.2.** Если  $\bar{\lambda}_n = \lambda_n$ , то  $A$  — самосопряжённый оператор.

**Пример 22.3.** Если  $\bar{\lambda} = \lambda_n$  и  $\sup |\lambda_n| < \infty$ , то  $A$  — эрмитов оператор.

**Пример 22.4.** Если  $\sup |\lambda_n| < \infty$  или  $\inf |\lambda_n| > 0$ , то  $A$  — замкнутый оператор.

Последнее вытекает из первого и из критерия замкнутости ограниченного оператора. В случае  $\inf$  нужно рассмотреть обратный оператор.

## 23 Теорема о гомеоморфизме

**Теорема 23.1** (Банаха об обратном оператора). Пусть  $E, F$  — банаховы пространства,  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  и  $A$  обратим. Тогда  $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ .

**Доказательство.** Доказательство совсем простое. Пусть  $A: E \rightarrow F$  непрерывен. Он имеет замкнутый график  $\text{gr}(A) \subset E \times F$ , то есть

$$x_n \rightarrow x, \quad y_n = Ax_n \rightarrow y \Rightarrow Ax = y.$$

Поскольку  $A$  обратим, то есть осуществляет инъекцию, если  $y_n \rightarrow y$  и  $x_n = A^{-1}y_n \rightarrow x$ , то  $A^{-1}y = 0$ . Значит,  $\text{gr}(A^{-1}) \subset F \times E$  тоже замкнут. По теореме о замкнутом графике  $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ . ■

Для теоремы о гомеоморфизме нужно ввести понятие факторпространства для нормированного пространства.

**Определение 23.1.** Пусть  $E$  — нормированное пространство,  $M \subset E$  — замкнутое подпространство. Тогда фактор-пространством называется

$$\hat{E} = E/M = \{\hat{x} = x + M \mid x \in E\}.$$

На этом пространстве смежных классов вводятся операции

$$(a) \quad \forall x, y \in E \quad \hat{x} + \hat{y} = \hat{x + y};$$

$$(b) \quad \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\} \quad \lambda \cdot \hat{x} = \hat{\lambda x};$$

$$(c) \quad \|\hat{x}\| := \inf_{y \in M} \|x + y\|.$$

**Утверждение 23.1.**  $\|\hat{x}\|$  есть норма.

**Доказательство.**  $\lambda \hat{x} = \|\lambda \hat{x}\| = \int_{y \in M} \|\lambda x + y\| = |\lambda| \int_{y \in M} \|x + y\| = |\lambda| \cdot \|\hat{x}\|.$

Неравенство треугольника

$$\|\hat{x} + \hat{y}\| = \|x + y\| = \inf_{z \in M} \|x + y + z\| = \inf_{u, v \in M} \|x + y + u + v\| \leq \inf_{u \in M} \|x + u\| + \inf_{v \in M} \|y + v\| = \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|.$$

И последнее свойство нормы. Если  $\|\hat{x}\| = 0$ , то  $\exists y_n \in M: x + y_n \rightarrow 0$ . Значит,  $x = -\lim y_n \in M$  и  $\hat{x} = 0$ . ■

**Лемма 23.1.** Если  $M \subset E$  замкнутое подпространство в банаховом пространстве  $E$ , то фактор-пространство  $\hat{E} = E/M$  тоже является банаховым пространством.

**Доказательство.** Мы уже доказали, что факто-пространство является нормированным пространством. Докажем полноту по этой норме. Пусть нам задана последовательность Коши  $\{\hat{x}_n\}$  в  $\hat{E}$ . Выберем последовательность индексов  $n_1 < n_2 < \dots$  так, что  $\forall n, m \geq n_k \quad \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\| < \frac{1}{2^k}$ . По определению последовательности Коши такая последовательность индексов существует.

Пусть  $z_{n_k} \in \hat{x}_{n_k} = x_{n_k} + M$  такие, что  $\|z_{n_{k+1}} - z_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$ . И определим элемент

$$z := z_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (z_{n_{k+1}} - z_{n_k}) \in E.$$

Частичные суммы будут как раз  $z_{n_k}$ . Этот ряд сходится по норме, так как  $1/2^k$  сходится.

Кроме того для  $n \geq n_k$  имеем

$$\|\hat{z} - \hat{x}_n\| \leq \|\hat{z} - \hat{x}_{n_k}\| + \|\hat{x}_{n_k} - \hat{x}_n\| \leq \|z - z_{n_k}\| + \frac{1}{2^k} < \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^k} < \frac{3}{2^k}.$$

Отсюда  $\lim \hat{x}_n = \hat{z} \in \hat{E}$ . ■

**Определение 23.2.** *Линейный оператор  $A: E \rightarrow F$  называется открытым отображением, если он отображает всякое открытое множество в открытое, то есть*

$$\forall U \subset E \text{ откр.} \quad A(U) \subset F \text{ откр.}$$

Давайте докажем, что факто-отображение  $\pi: E \rightarrow \hat{E}$ , определённое по формуле  $\pi(x) := \hat{x}$  является открытым отображением.

**Доказательство.** Во-первый,  $\pi$  непрерывно, так как  $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ . Во-вторых  $\pi$  открыто, так как  $\pi(U_r) = \hat{U}_r$ , где

$$U_r = \{x \in E \mid \|x\| < r\}, \quad r > 0; \quad \hat{U}_r = \{\hat{x} \in \hat{E} \mid \|\hat{x}\| < r\}.$$

В общем это очевидно. Ну а раз открытый шар переходит в открытый, то его сдвиг тоже отображается в открытый шар. А всякое открытое множество является объединением шаров. ■

**Определение 23.3.** *Линейный оператор  $A: E \rightarrow F$  называется гомоморфизмом, если*

- (1)  $A$  непрерывный;
- (2)  $A$  открытый.

В частности мы доказали, что фактор-отображение является гомоморфизмом линейных пространств.

**Теорема 23.2** (о гомоморфизме). *Если  $E, F$  — банаховы пространства,  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  сюръективный, то  $A$  гомоморфизм.*

**Доказательство.** Пусть у нас  $M$  будет ядром этого оператора, то есть  $M = \ker(A) = \{x \in E \mid A(x) = 0\}$ . Ядро ограниченного оператора является замкнутым подпространством, мы с вами это доказывали. Поэтому можем рассмотреть фактор-пространство, которое будет банаховым пространством  $\hat{E} = E/M$ . Оно банахово, поскольку  $M$  замкнуто, а  $E$  банахово. Определим  $\hat{A}(\hat{x}) = A(x)$  для  $x \in E$ . Мы ходим, чтобы  $\hat{A}: \hat{E} \rightarrow F$ . Этот оператор корректно определён, так как если  $\hat{x} = \hat{y}$ , то  $x - y \in M$ , значит,  $A(x) = A(y)$ .

Кроме того,  $\ker(\hat{A}) = 0$  и  $\text{Im } \hat{A} = F$ , поэтому отсюда следует, что  $\hat{A}$  обратимый оператор. Докажем, что  $\|\hat{A}\| = \|A\|$ . В самом деле

$$\|\hat{A}(\hat{x})\| = \|A(x)\| = \inf_{y \in M} \|A(x+y)\| \leq \|A\| \cdot \inf_{y \in M} \|x+y\| = \|A\| \|\hat{x}\| \Rightarrow \|\hat{A}\| \leq \|A\|.$$

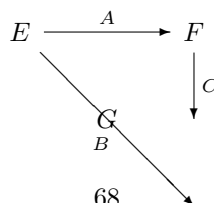
И теперь обратное неравенство.

$$\|A(x)\| = \|\hat{A}(\hat{x})\| \leq \|\hat{A}\| \cdot \|\hat{x}\| \leq \|\hat{A}\| \|x\|.$$

По теореме Банаха об обратном операторе, этот оператор гомоморфизм. Ну а сам оператор  $A$  является композицией или произведением двух операторов  $A = \hat{A}\pi$ . Легко проверить, что произведение двух гомеоморфизмов будет гомеоморфизмом. ■

**Теорема 23.3** (о тройке). *Пусть  $E, F, G$  — банаховы пространства,  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $B \in \mathcal{L}(E, G)$ ,  $A$  сюръективный и  $\ker(A) \subset \ker(B)$ . Тогда  $\exists C \in \mathcal{L}(F, G): B = CA$ .*

**Доказательство.** Чтобы это понимать, лучше нарисовать диаграмму.



Положим  $C(y) = B(x)$ , если  $y = Ax$ . Пусть случилось так, что  $y = Ax_1 = Ax_2$ . Тогда  $x_1 - x_2 \in \ker(A) \subset \ker(B)$ . Значит,  $Bx_1 = Bx_2$ .

Возьмём  $\lambda \in \mathbb{F}$ . Тогда  $C(\lambda y) = C(\lambda Ax) = C(A(\lambda x)) = B(\lambda x) = \lambda Bx = \lambda C(y)$ .

Пусть  $y_1 = Ax_1$  и  $y_2 = Ax_2$ . Тогда  $C(y_1 + y_2) = C(A(x_1 + x_2)) = B(x_1 + x_2) = Bx_1 + Bx_2 = C(y_1) + C(y_2)$ .

Положим  $M = \ker(A)$  и  $\hat{E} = E/M$ .  $\hat{A} \in \mathcal{L}(\hat{E}, F)$ ,  $\|\hat{A}\| = \|A\|$ .

$$\|C(y)\| = \|B(x)\| = \inf_{z \in M} \|B(x+z)\| \leq \|B\| \inf_{z \in M} \|x+z\| = \|B\| \|\hat{x}\| = \|B\| \|\hat{A}^{-1}y\| \leq \|B\| \|\hat{A}^{-1}\| \|y\|.$$

$$\|C\| \leq \|B\| \cdot \|\hat{A}^{-1}\|.$$

Если  $V \subset E$  и  $W \subset E^*$ , то определяются аннулятор

$$V^\perp = \{f \in E^* \mid \forall x \in V \quad f(x) = 0\} \subset E^*;$$

и аннулятор

$$W_\perp = \{x \in E \mid \forall f \in W \quad f(x) = 0\} \subset E.$$

Мы с вами доказывали, что это замкнутые подпространства.

**Лемма 23.2** (о бианнуляторе). Если  $M \subset E$  замкнутое подпространство, то  $(M^\perp)_\perp = M$ .

**Доказательство.** То, что  $M \subset (M^\perp)_\perp$  очевидно.

Существует  $x \in (M^\perp)_\perp$ , для которого  $x \notin M$ . Для него  $\|\hat{x}\| \neq 0$ . Положим

$$L := \text{sp } x, M.$$

Имеем  $f(\lambda x + y) = \lambda$  в  $\hat{E} = E/M$ .

$$\|f\|_L = \sup_{z \in L \setminus 0} \frac{|f(z)|}{\|z\|} = \sup_{y \in M} \frac{|\lambda|}{\|\lambda x + y\|} = \sup_{y \in M} \frac{1}{\|x + y\|} = \frac{1}{\inf_{y \in M} \|x + y\|} = \frac{1}{\|\hat{x}\|} < \infty.$$

Значит,  $\exists g \in E^*: \|g\| = \|f\|_L$  по теореме Хана—Банаха и  $g(x) = f(x) = 1$ . Получили противоречие. ■

**Теорема 23.4.** Пусть  $E, F$  — банаховы пространства,  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  и его образ  $\text{Im}(A) \subset F$  замкнут. Тогда  $\text{Im}(A) = \ker(A^*)^\perp$  и  $\text{Im}(A^*) = \ker(A)^\perp$ .

Очень важная теорема. Мы уже доказывали одно из включений. А сейчас при новом условии замкнутости образа докажем равенства.

**Доказательство.** Первое равенство прямо вытекает из леммы. У нас было доказано равенство  $\ker(A^*) = \text{Im}(A)^\perp$ . Берём аннулятор, получится бианнулятор

$$\ker(A^*)^\perp = (\text{Im}(A)^\perp)^\perp = \text{Im}(A),$$

так как образ замкнут.

Второе равенство из включения, которое мы уже строили  $\text{Im}(A^*) \subset \ker(A)^\perp$  и теоремы о тройке. Пусть  $y \in \ker(A)^\perp$ . Тогда в частности  $\ker(A) \subset \ker(y)$ . Поэтому можно применить теорему о тройке: существует  $f \in E^*$ , для которого  $\forall x \in \ker(A) \quad g(x) = f(Ax)$ , а это как раз и означает, что  $g = A^*f$ , то есть  $g \in \text{Im}(A^*)$ . Ну и значит, мы доказали обратное включение. ■

**Определение 23.4.** Линейный оператор  $P: E \rightarrow E$  называется проектором на подпространство  $M \subset E$ , если  $P^2 = P$  и  $\text{Im}(P) = M$ .

Все элементы образа не изменяются при отображении  $P$ .

**Утверждение 23.2.**  $P|_M = I|_M$ .

**Доказательство.** Если  $y = P(x)$ , то  $P(y) = P^2(x) = P(x) = y$ . ■

**Утверждение 23.3.**  $\ker(I - P) = \text{Im}(P)$  и  $\text{Im}(I - P) = \ker(P)$ .

**Доказательство.** Докажем одно, второе сами разберёте. Оно совершенно простое. Пусть  $x \in \ker(I - P)$ . Тогда  $(I - P)x = x - P(x) = 0$  и  $x \in \text{Im}(P)$ .

Если  $y = P(x) \in \text{Im}(P)$ , то  $(I - P)y = (I - P)P(x) = (P - P^2)x = 0$ . Значит,  $y \in \ker(I - P)$ . ■

**Утверждение 23.4.**  $E = M \oplus L$ ,  $M = \text{Im}(P)$ ,  $L = \ker(P)$ .

**Доказательство.** Так как  $I = P + (I - P)$ , то  $E = M + L$ . Осталось доказать, что эти пространства не пересекаются. Если  $y \in M \cap L$ , то  $y = P(x) = x - P(x)$ . Отсюда следует, что  $x = 2P(x)$ ; если к этому равенству применить  $P$ , получим  $P(x) = 2P(x)$ , ну и отсюда  $y = P(x) = 0$ . ■

Теперь введём такое понятие, очень важное.

**Определение 23.5.** Подпространство  $M \subset E$  называется дополняемым в  $E$ , если

(1)  $M$  замкнуто;

(2)  $\exists L \subset E$  замкнутое, такое, что  $E = M \oplus L$ .

Если замкнутость не требовать, то разложение в прямую сумму будет всегда. А с замкнутостью не всегда. Приведу пример позже и без доказательства.

**Теорема 23.5.** Пусть  $E$  — банахово пространство, и  $M \subset E$  — замкнутое подпространство. Тогда  $M$  дополняемо, если и только если существует ограниченный проектор  $P \in \mathcal{L}(E, E)$  на подпространство  $M$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $E = M \oplus L$ , где  $M, L$  — замкнутые подпространства. По определению прямой суммы будем строить проектор.

$$\forall y \in E \quad \exists! y \in M, z \in L: x = y + z.$$

Поэтому корректно определён оператор  $P(x) = y \in M$ . Очевидно, что он (из определения прямой суммы) будет проектором на подпространство  $M$ . Нам нужно доказать, что он непрерывен. Для этого воспользуемся теоремой о замкнутом графике. Покажем, что  $P: E \rightarrow E$  имеет замкнутый график. Пусть  $x_n \rightarrow x$  и  $y_n = P(x_n) \rightarrow y$ . Так как  $x_n = y_n + z_n$ , то  $z_n \rightarrow z$ . Поэтому  $x_n = y_n + z_n \rightarrow x = y + z$ . В силу единственности этого разложения мы получаем, что  $P(x) = y$ , то есть график замкнут. И по теореме о замкнутом графике оператор ограничен.

Достаточность. Пусть  $P \in \mathcal{L}(E, E)$  — ограниченный проектор на подпространство  $M$ , где  $M = \text{Im}(P)$ . Мы доказывали, что  $M = \ker(I - P)$ . И обозначим через  $L$  ядро  $P$ , то есть  $L = \ker(P) = \text{Im}(I - P)$ . Так как  $P$  ограничен,  $I - P$  как сумма ограниченных тоже ограничен. Тогда у них замкнутые ядра. Отсюда  $E = M \oplus L$ . ■

**Лемма 23.3.** Пусть  $E$  — банахово пространство,  $M \subset E$  — замкнутое подпространство. Тогда если

- (1)  $\dim M < \infty$ ;
- (2) или  $\text{codim } M := \dim(\hat{E}) < \infty$ ,

то  $M$  является дополняемым подпространством.

**Доказательство.** Два случая.

- (1) Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис в  $M$ , а  $\{f_1, \dots, f_n\} \subset E^*$  биортгогональная система. Пусть  $x \in E$ . Положим

$$y := \sum_{k=1}^n f_k(x) e_k \in M; \quad z := x - y \in L = \bigcap_{k=1}^n \ker(f_k).$$

Имеем  $x = y + z$ , а  $E = \oplus L$ .

- (2) Берём базис  $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$  в  $\hat{E} = E/M$ . Положим  $L := \text{sp}\{e_1, \dots, e_n\}$ . Тогда

$$\forall x \in E \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}: \hat{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \hat{e}_k.$$

Положим  $z := \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \in L$  и  $y = x - z \in M$ . Тогда  $x = y + z$  и  $E = M \oplus L$ . ■

Пример недополняемого замкнутого пространства.  $C(T) = \{f: T \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ — непрерывна на } T\}$ . Ещё положим

$$T := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}; \quad A(D) = \{f: D \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ — голом. в } D \text{ и непр. в } \overline{D}\}; \quad D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

Вот это  $A(D) \subset C(T)$  недополняемое пространство.

## 24 Спектр ограниченного оператора

Теория ограниченных операторов очень большая, а неограниченных вообще — необозримая.

Пусть  $E$  — банахово пространство над  $\mathbb{C}$ . Обозначим  $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$ ,  $A \in \mathcal{L}(E)$ .

**Определение 24.1.**  $\lambda \in \rho(A)$  — элемент множества регулярных значений  $A$ , если  $A_\lambda := \lambda I - A$  обратим и обратный оператор

$$R_\lambda := A_\lambda^{-1}$$

называется резольвентой  $A$ . Естественно резольвента определяется только для  $\lambda \in \rho(A)$ .

**Определение 24.2.** Дополнение множества регулярных значений  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  называется спектром  $A$ .

Приведём пример необратимого оператора. Пусть  $A: l_p \rightarrow l_p$ , где  $1 \leq p \leq \infty$  (последовательности, суммируемые в степени  $p$ ). Пусть задан оператор по формуле

$$(Ax)_n = \lambda_n x_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad x = \{x_n\} \in l_p.$$

Можно представить себе бесконечную диагональную матрицу, которая полностью описывает данный оператор. Непосредственно проверяется

$$\|A\| = \sup_n |\lambda_n|$$

Можно проверить, что все  $\lambda_n \in \sigma(A)$ . А так как у нас  $\ker(A_{\lambda_n}) \neq 0$  и  $A_{\lambda_n}$  необратим. Если рассмотрим резольвенту для некоторого  $\lambda \neq \lambda_n$ .

$$(R_\lambda x)_n = \frac{x_n}{\lambda - \lambda_n}.$$

Чтобы  $\lambda \in \rho(A)$ , нужно, чтобы резольвента была ограниченным оператором, то есть  $\|R_\lambda\| = \sup_n \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|} < \infty$ .

Итак,  $\sigma(A) = \{\lambda_n\}$  для данного оператора.

**Определение 24.3.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{C}$  — открытое множество и задана функция  $f: \Omega \rightarrow E$ , принимающая значения в банаховом пространстве  $E$ . Эта функция называется голоморфной, если

$$\forall z_0 \in \Omega \quad \exists r > 0, \exists c_n \in E: \forall |z - z_0| < r \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n c_n.$$

То есть функция представляется в виде сходящегося по норме ряда. Обычно в комплексном анализе коэффициенты комплексные и область определения является областью, а не произвольным открытым множеством. Мы же обобщаем.

Имеет место формула Коши—Адамара.

$$\frac{1}{r} := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x_n\|}.$$

Доказывать не буду. Всё аналогично случаю комплексных коэффициентов.

Радиус сходимости можно вычислить как расстояние от точки до границы плохого множества.

**Лемма 24.1.** Если  $\|A\| < 1$  и  $B = I - A$ , то  $B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ , где  $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_n$ .

Вот такая простая лемма.

**Доказательство.** Нужно доказать, что ряд сходится и его сумма является обратной к  $B$ . Покажем, что частичные суммы образуют последовательность Коши

$$c_n = \sum_{k=0}^n A^k, \quad \|A\| = a < 1.$$

Тогда

$$\|c_m - c_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m A^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|A^k\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|A\|^k < \frac{a^{n+1}}{1-a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Сумма геометрической прогрессии. Следовательно, существует предел, ведь пространство ограниченных операторов банахово, то есть  $\exists c = \lim c_n$  в  $\mathcal{L}(E)$ .

Осталось показать, что сумма есть обратный оператор. Имеем

$$BC = \lim_{n \rightarrow \infty} Bc_n = \sum_{k=0}^{\infty} (A^k - A^{k+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I,$$

так как  $\lim A^{n+1} = 0$ , поскольку  $\|A\| < 1$ . Здесь  $I$  тождественный оператор. Аналогично  $CB = I$ . Значит,  $C = B^{-1}$ . ■

**Теорема 24.1** (о резольвенте). Если  $A \in \mathcal{L}(E)$ , то  $\rho(A) \subset \mathbb{C}$  открыто и для  $\lambda \in \rho(A)$  резольвента  $R_\lambda$  голоморфна  $\|R_\lambda\| \geq \frac{1}{d_\lambda}$ , где  $d_\lambda = \inf_{z \in \sigma(A)} |\lambda - z|$  — расстояние от точки  $\lambda$  до спектра.

**Доказательство.** Пусть  $z \in \mathbb{C}: |\lambda - z| < \|R_\lambda\|^{-1}$ , где  $\lambda \in \rho(A)$ . Покажем, что тогда  $z$  тоже регулярное значение, то есть что множество регулярных значений открыто. Запишем

$$A_z = A_\lambda - (\lambda - z)I = A_z(I - (\lambda - z)R_\lambda).$$

Теперь по лемме мы обратим этот оператор. Надо взять обратный к правому и умножить на обратный к левому сомножителям соответственно.

$$R_z = A_z^{-1} = (I - (\lambda - z)R_\lambda)^{-1} \cdot A_\lambda^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - z)^n R_\lambda^{n+1}.$$

Ряд сходится по операторной норме. И это  $R_z$  резольвента  $A$ , если  $|\lambda - z| < \|R_\lambda\|^{-1}$ .

Осталось доказать неравенство. От противного. Если  $\lambda \in \rho(A)$ , то  $\forall z \in \sigma(A) \quad |\lambda - z| \geq \|R_\lambda\|^{-1}$ . Если обратить это неравенство, то получится как то, что и требовалось доказать. ■

**Следствие 24.1.** Если  $A \in \mathcal{L}(E)$ , то спектр  $\sigma(A)$  является непустым, замкнутым и ограниченным множеством.

В комплексной плоскости замкнутость с ограниченностью и компактность это одно и то же.

**Доказательство.** Пусть  $|\lambda| > \|A\|$ . Тогда резольвенту можно представить в виде ряда Лорана. Применяем лемму

$$R_\lambda = A_\lambda^{-1} \lambda^{-1} (I - A/\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{\lambda^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Функция является голоморфной в бесконечности.

Отсюда следует, что  $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\|\}$ .

Осталось доказать, что спектр не пустой. Пусть  $f \in \mathcal{L}^*(E)$  и положим  $g(\lambda) := f(R_\lambda)$  для  $\lambda \in \rho(A)$ . Так как  $f$  непрерывный линейный функционал, то  $g(\lambda)$  голоморфна в  $\rho(A)$  и  $|g(\lambda)| \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  (в смысле топологии комплексной плоскости, то есть модуль  $|\lambda| \rightarrow +\infty$ ).

Если  $\rho(A) = \mathbb{C}$ , то  $g(\lambda) \equiv 0$  по теореме Лиувилля. Так как  $f$  произвольный, то по теореме Хана—Банаха  $R_\lambda = 0$ . Противоречие. ■

## 24.1 Свойства спектра сопряжённого оператора

**Утверждение 24.1.** Если  $A \in \mathcal{L}(E)$ , то  $\sigma(A^*) = \sigma(A)$ .

**Доказательство.** В самом деле, берём  $A_\lambda = \lambda I - A$ . Тогда  $A^* = \lambda I - A^*$ . Сопряжение и взятие обратного можно менять местами, мы это доказывали (если оператор, конечно, обратим).

$$\forall \lambda \in \rho(A) \quad (A_\lambda^{-1})^* = (A_\lambda^*)^{-1}.$$

Поэтому  $R_\lambda^* = R_\lambda(A^*)$  и  $\rho(A) = \rho(A^*)$ . ■

Теперь для гильбертова сопряжённых.

**Утверждение 24.2.** Если  $A \in \mathcal{L}(H)$ , где  $H$  — гильбертово пространство, то  $\sigma(A') = \overline{\sigma(A)}$ .

**Доказательство.** Для доказательства напомним следующее равенство.

$$\forall x, y \in H \quad \langle A_\lambda x, y \rangle = \langle \lambda x - Ax, y \rangle = \langle x, \bar{\lambda}y - A'y \rangle = \langle x, A'_\lambda - y \rangle,$$

то есть  $(A_\lambda)' = A'_\lambda$ . Отсюда получаем, что

$$(R_\lambda)' = (A_\lambda^{-1})' = (A'_\lambda)^{-1} = R'_{\bar{\lambda}}.$$

И  $\overline{\rho(A')} = \rho(A)$ . ■

**Определение 24.4.** Пусть  $A \in \mathcal{L}(E)$ . Число  $\lambda$  называется собственным значением  $A$ , если  $\exists e \neq 0: Ae = \lambda e$ .

Множество всех собственных значений обозначается  $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(A_\lambda) \neq 0\}$  и называется точечным спектром.

Непрерывным спектром называется множество

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(A_\lambda) = 0, \operatorname{Im}(A_\lambda) \neq E, \overline{\operatorname{Im}(A_\lambda)} = E\}$$

Остаточным спектром называется множество

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(A_\lambda) = 0, \overline{\operatorname{Im}(A_\lambda)} \neq E, \}.$$

Легко проверить следующее свойство.

**Утверждение 24.3.** Если  $A \in \mathcal{L}(E)$ , то  $\sigma(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A)$ .

**Утверждение 24.4.** Если  $A \in \mathcal{L}(E)$ ,

- $\sigma_p(A) \subset \sigma_p(A^*) \sqcup \sigma_r(A^*)$ ;
- $\sigma_c(A) \subset \sigma_c(A^*) \sqcup \sigma_r(A^*)$ ;
- $\sigma_r(A) \subset \sigma_p(A^*)$ .

**Доказательство.** Это достаточно простые включения.

- Пусть  $\lambda \in \sigma_p(A)$ . Тогда  $\ker(A_\lambda) = (\operatorname{Im} A_\lambda^*)_{\text{perp}} \neq 0$ . Поэтому либо ядро  $\ker(A_\lambda^*) \neq 0$ , либо  $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda^*} \neq E$ . Так что первое включение доказано.



- Точно так же проверяется и второе включение. Пусть  $\lambda \in \sigma_c(A)$ . Воспользуемся равенством из определения непрерывного спектра

$$\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = E.$$

Поэтому  $\ker(A_\lambda^*) = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp = 0$ , так как замыкание всё  $E$ . Либо  $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda^*} = E$ , либо  $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda^*} \neq E$ . То есть принадлежит лио непрерывному спектру, либо остаточному.

- Пусть  $\lambda \in \sigma_r(A)$ . Тогда  $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq E$  и  $\ker(A_\lambda^*) = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp \neq 0$ . Получаем последнее включение. ■

Следующее свойство сейчас доказывать не будем. Оно аналогично предыдущим.

**Утверждение 24.5.** Пусть  $A \in \mathcal{L}(H)$ , где  $H$  — гильбертово пространство, то

- $\sigma_p(A) \subset \overline{\sigma_p(A')} \sqcup (A')$ ;
- $\sigma_r(A) \subset \overline{\sigma_p(A')}$ ;
- $\sigma_c(A) = \overline{\sigma_c(A')}$ .

Мы это докажем на последней лекции.

Обсудим ещё одно разбиение спектра.

**Определение 24.5.**  $\lambda \in \mathbb{C}$  называется обобщённым собственным значением  $A \in \mathcal{L}(E)$ , если

$$\exists \{x_n\} \in E: \|x_n\| = 1, \|A_\lambda x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Множество обобщённых собственных значений называется предельным спектром оператора  $A$

$$\sigma_l(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0\}.$$

Докажем, что дополнением к этому спектру является вот такое множество

$$\sigma_d(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(A_\lambda) = 0, \overline{\operatorname{Im}(A_\lambda)} = \operatorname{Im} A_\lambda \neq E\}.$$

Это называется дефектным спектром.

**Утверждение 24.6.** Пусть  $A \in \mathcal{L}(E)$ . Тогда  $\sigma(A) = \sigma_l(A) \sqcup \sigma_d(A)$ .

**Доказательство.** Мы должны доказать, что эти множества являются спектральными, то есть содержатся в спектре. Пусть  $\lambda \in \sigma_l(A)$ . Тогда существует такая последовательность  $\{x_n\}$ , для которой  $\|x_n\| = 1$  и  $\|A_\lambda x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Если бы  $\lambda \in \rho(A)$ , то существовала бы резольвента, то есть

$$\|x_n\| = \|R_\lambda A_\lambda x_n\| \leq \|R_\lambda\| \|A_\lambda x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Соответственно  $\lambda \in \sigma(A)$ . Пусть  $\lambda \notin \sigma_l(A)$ . Тогда  $\exists c > 0: \|A_\lambda x\| \geq c\|x\|$ . Отсюда следует, что ядро  $\ker(A_\lambda) = 0$ .

Докажем, что образ оператор  $A_\lambda$  является замкнутым множеством. Пусть  $y_n = A_\lambda x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ . Докажем, что  $y \in \operatorname{Im}(A_\lambda)$ . Имеем

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{c} \|A_\lambda x_n A_\lambda x_m\| \leq \frac{1}{c} \|A_\lambda x_n - y\| + \frac{1}{c} \|y - A_\lambda x_n\| \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0.$$

Отсюда  $\{x_n\} \subset E$  есть последовательность Коши и существует предел  $x = \lim x_n$ , так как  $E$  банахово пространство. И  $A_\lambda x = y \in \operatorname{Im} A_\lambda$ .

Таким образом  $\sigma(A) \setminus \sigma_l(A) \subset \sigma_d(A)$ . Если  $\lambda \in \sigma_d(A)$ ,  $A_\lambda$  будет гомеоморфизмом. ■

**Теорема 24.2** (о границе спектра). Если  $A \in \mathcal{L}(E)$ , то граница спектра  $\partial\sigma(A)$  (это стандартное обозначение)  $\subset \sigma_l(A)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\lambda \in \partial\sigma(A)$ . Тогда существует  $\lambda_n \in \rho(A): \lambda_n \rightarrow \lambda$ . Следовательно,

$$d_{\lambda_n} = \inf_{z \in \sigma(A)} |z - \lambda| < |\lambda - \lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Определим операторы  $B_n = \frac{R_{\lambda_n}}{\|R_{\lambda_n}\|}$ . Имеем, что  $R_{\lambda_n} A_{\lambda_n} = I$ . Следовательно, можно записать такое равенство

$$A_\lambda B_n = (\lambda - \lambda_n) B_n + A_{\lambda_n} B_n = (\lambda - \lambda_n) B_n + \frac{I}{\|R_{\lambda_n}\|}.$$

Получили такую формулу, мы её в дальнейшем воспользуемся.

Так как  $\|B_n\| = 1$ , то  $\exists \|y_n\| = 1$ , для которых  $\|B_n y_n\| = \frac{1}{2}$ . Определим

$$x_n := \frac{B_n y_n}{\|B_n y_n\|}.$$

Теперь воспользуемся нашей формулой и получим то, что нужно.

$$A_\lambda x_n = \frac{A_\lambda B_n y_n}{\|B_n y_n\|} = (\lambda - \lambda_n) x_n + \frac{y_n}{\|R_{\lambda_n}\| \|B_n y_n\|}.$$

Отсюда вытекает, что норма такого элемента оценивается ( $\|x_n\| = 1$  и  $\|R_{\lambda_n}\| \geq \frac{1}{d_{\lambda_n}}$  по теореме о резольвенте;  $\|y_n\| = 1$ )

$$\|A_\lambda x_n\| \leq |\lambda - \lambda_n| + 2d_{\lambda_n} \leq 3|\lambda - \lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно,  $\lambda \in \sigma_l(A)$  и теорема доказана. ■

Рассмотрим опять наш диагональный оператор, который рассматривали в самом начале  $A: l_p \rightarrow l_p$  для  $1 \leq p \leq \infty$ . Оператор задаётся формулой

$$(Ax)_n = \lambda_n x_n, \quad x = \{x_n\} \in l_p.$$

Мы знаем его спектр — это замыкание точечного спектра. Нужно выяснить структуру спектра, то есть найти непрерывный и остаточный.

$$\sigma_p(A) = \{\lambda_n\},$$

так как если взять такие последовательности  $e_n = \{e_{nk}\}$ , где

$$e_{nk} = \begin{cases} 0, & n \neq k; \\ 1, & n = k, \end{cases}$$

то  $Ae_n = \lambda_n e_n$ .

Пусть  $1 \leq p < \infty$ . Известно, что в  $l_p$  множество финитных последовательностей (конечное число членов отлично от нуля) всюду плотно. Поэтому образ оператора (пусть  $\lambda \in \overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$ )  $\text{Im } A_\lambda$  содержит все финитные последовательности.

$$(A_\lambda x)_n = (\lambda - \lambda_n) x_n.$$

Раз он содержит все финитные последовательности, значит, он всюду плотен в  $l_p$ . Отсюда  $\lambda \in \sigma_c(A)$ .

Пусть теперь  $p = \infty$ . Так как  $\lambda \in \overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$ ,  $\exists \{n_k\}: \forall y = \{y_n\} \in \text{Im } A_\lambda$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = 0$ . Теперь нужно применять теорему Хана—Банаха. Определим функционал на пространстве  $c_0$  последовательностей, которые стремятся к нулю

$$f(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}.$$

Он по теореме Хана—Банаха имеет непрерывное продолжение на  $l_\infty$ . Значит,  $\lambda \in \sigma_r(A)$ ю

## 25 Теорема о спектральном радиусе

Сначала мы разберём примеры.

Найдём спектр преобразования Фурье  $\mathcal{F}: \mathcal{L}_2(\mathbb{R})^n \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$ . Как известно определяется

$$\mathcal{F}(f) := \hat{f}(x).$$

Я напомним, что оператор преобразования Фурье сохраняет норму

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{\mathcal{L}_2} = \|f\|_{\mathcal{L}_2}.$$

При этом  $\text{Im}(\mathcal{F}) = \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ . Значит,  $\mathcal{F}$  — изометрия  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ .

Рассмотрим  $h_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$  — функции Эрмита. Имеем  $\mathcal{F}(h_k) = (-1)^n h_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то есть это собственные функции оператора Фурье. Кроме того  $\{h_n\}$  — полная ортонормированная система в  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ . Таким образом  $\sigma(\mathcal{F}) = \{\pm 1, \pm i\}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . То есть у оператора Фурье спектр чисто точечный  $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma_p(\mathcal{F})$ .

Вычислим резольвенту оператора Фурье.

$$\mathcal{L}_2(\mathbb{R}) = H_1 \oplus H_{-1} \oplus H_i \oplus H_{-i}, \quad H_\lambda = \ker(\mathcal{F}_\lambda), \quad \mathcal{F}_\lambda = \lambda I - \mathcal{F}.$$

Здесь будет даже ортогональная прямая сумма. В каждом слагаемом можно выделить базис из функций Эрмита. И таким образом, тождественный оператор можно представить в виде суммы проекторов

$$I = P_1 + P_{-1} + P_i + P_{-i}, \quad P_\lambda: \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow H_\lambda \text{ — ортогональный проектор.}$$

Применим преобразование Фурье

$$\mathcal{F} = P_1 - P_{-1} + iP_i - iP_{-i}.$$

Тогда  $\mathcal{F}_\lambda = \lambda I - \mathcal{F} = (\lambda - 1)P_1 + (\lambda + 1)P_{-1} + (\lambda - i)P_i + (\lambda + i)P_{-i}$ . Чтобы найти резольвенту, нужно взять обратный к этому оператор

$$\mathcal{R}_\lambda = \mathcal{F}_\lambda^{-1} = \mathcal{F}_\lambda = (\lambda - 1)^{-1}P_1 + (\lambda + 1)^{-1}P_{-1} + (\lambda - i)^{-1}P_i + (\lambda + i)^{-1}P_{-i}.$$

**Определение 25.1.** Пусть  $E, F$  — банаховы пространства,  $A \in \mathcal{L}(E)$ ,  $B \in \mathcal{L}(F)$ . Говорят, что  $A$  и  $B$  эквивалентны или подобны (обозначают  $A \sim B$ ), если существует биективный оператор  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , для которого  $BT = TA$ .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & E \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ F & \xrightarrow{B} & F \end{array}$$

$A \approx B$ , если  $T$  изометрия.

Вот такие свойства

**Утверждение 25.1.** Если  $A \sim B$ , то  $\sigma(A) = \sigma(B)$  и  $\sigma_*(A) = \sigma_*(B)$ , где  $*$  =  $p, c, r, l, d$ .

**Доказательство.** Пусть  $A_\lambda = \lambda I - A$ ,  $B_\lambda = \lambda I - B$ . Тогда  $B_\lambda T = TA_\lambda$ . Соответственно  $A_\lambda$  обратим, если и только если  $B_\lambda$  обратим.

$\ker B_\lambda = T(\ker A_\lambda)$  и  $\text{Im } B_\lambda = I(\text{Im } A_\lambda)$ . Таким образом,  $R_\lambda(B) = TR_\lambda(A)T^{-1}$ ,  $\lambda \in \rho(A)$ . ■

**Утверждение 25.2.** Пусть  $A \approx B$ . Тогда  $\|A\| = \|B\|$ .

**Доказательство.** Пусть  $B = TAT^{-1}$ . Тогда  $\|B\| \leq \|T\|\|A\|\|T^{-1}\| = \|A\|$ , так как  $T$  — изометрия и  $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$ . Аналогично доказывается  $\|A\| \leq \|B\|$ . ■

Теперь мы готовы обсудить следующий пример. Пусть  $K \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ . Рассмотрим оператор свёртки

$$\forall f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \quad Af(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y)f(y) dy; \quad A: \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathbb{R}).$$

Тогда  $\widehat{Af}(x) = 2\pi \hat{K}(x)\hat{f}(x)$  почти всюду на  $\mathbb{R}$ . Положим  $\varphi(x) = 2\pi \hat{K}(x)$ .

Рассмотрим умножение на функцию  $\varphi$ , то есть

$$\forall g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \quad Bg(x) = \varphi(x)g(x).$$

Ясно, что  $B \approx A$ . Имеем

$$B_\lambda g(x) = (\lambda - \varphi(x))g(x); \quad R_\lambda g(x) = \frac{g(x)}{\lambda - \varphi(x)}$$

Докажем пару утверждений, хотя они уже у нас доказаны.

- (а)  $\|A\| = \|B\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$ .
- (б)  $\sigma(A) = \sigma(B) = \varphi(\overline{\mathbb{R}}) = \{\lambda = \varphi(x) \mid x \in \overline{\mathbb{R}}\}$ ,  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{\pm\infty\}$ .
- (в)  $\sigma_p(A) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \mid \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0\}$ .
- (г)  $\sigma_c(A) = \sigma_c(B) = \{\lambda \in \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \mid \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0\}$ .
- (д)  $\sigma(A) = \sigma_e(A) = \sigma(A) \sqcup \sigma_c(A)$ .

Доказывать достаточно просто, нужно работать с нашим оператором. Если  $\mu(\varphi^{-1}(A)) > 0$ , то в качестве собственной функции можно взять  $e(x) = \chi_{\varphi^{-1}(\lambda)}(x)$ .

Если  $\mu(\varphi^{-1}(x)) = 0$ . То берём окрестности  $O_\delta(\lambda) = \{z \mid |z - \lambda| < \delta\}$  и функции для  $g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ , а именно

$$g_\delta(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\lambda - \varphi(x)}, & x \notin \varphi^{-1}(O_\delta); \\ 0, & x \in \varphi^{-1}(O_\delta). \end{cases}$$

Тогда  $g_\delta \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  и

$$\|g - B_\lambda g_\delta\|_{\mathcal{L}_2} < \varepsilon$$

**Теорема 25.1** (о спектральном радиусе). Пусть  $A \in \mathcal{L}(E)$ ,  $E$  — банахово пространство. Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$  (спектральному радиусу), где

$$r(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Спектральный радиус — это радиус наименьшего круга, содержащего спектр. Мы доказывали, что спектр — замкнутое и ограниченное множество в комплексной плоскости.

**Доказательство.** Пусть  $\lambda \in \sigma(A)$ . Запишем такое равенство

$$\lambda^n - z^n = (\lambda - z)p_{n-1}(z).$$

Здесь  $p_{n-1}(z)$  — многочлен степени  $n-1$  от  $z$ . Если теперь подставить оператор  $A$  вместо  $z$ , то мы получим такое равенство

$$\lambda^n I - A^n = (\lambda I - A)p_{n-1}(A) = p_{n-1}(A)(\lambda I - A).$$

Если оператор  $\lambda^n I - A^n$  обратим, то и  $\lambda I - A$  тоже обратим. Это не возможно, так как  $\lambda \in \sigma(A)$ . Значит, и  $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ . Отсюда

$$|\lambda| \leq \|A^n\|$$

Это мы в прошлый раз доказывали. Отсюда следует, что спектральный радиус будет меньше

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Теперь давайте рассмотрим резольвенту.

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n, \quad |\lambda| > \|A\|.$$

Возьмём функционал  $f \in \mathcal{L}^*(E)$ , рассмотрим функцию  $F(\lambda) = f(R_\lambda)$ , последняя является голоморфной в  $\rho(A)$ . Значит ряд сходится для

$$\forall |\lambda| > r(A) \quad F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} f(A^n).$$

Ряд сходится, значит есть ограничение

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad |f(A^n)/\lambda^{n+1}| \leq c_f.$$

По теореме Банаха—Штенгауза имеем

$$\|A^n/\lambda^{n+1}\| \leq c.$$

Отсюда имеем

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq |\lambda|.$$

Значит,  $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq r(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ . ■

**Определение 25.2.** Линейный оператор  $A: E \rightarrow F$ , где  $E, F$  — банаховы пространства, называется компактным, если  $\forall A \ M \subset E$  ограниченного множества образ  $A(M) \subset F$  является предкомпактным.

Давайте обозначим  $\mathcal{K}(E, F)$  — множество всех компактных операторов.

**Утверждение 25.3.**  $\mathcal{K}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ . Ведь предкомпактное множество является ограниченным. Значит, каждое ограниченное множество компактный оператор переводит в ограниченное.

**Утверждение 25.4.**  $A \in \mathcal{K}(E, F) \Leftrightarrow A(S) \subset F$  является предкомпактным, где  $S = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ .

Шар радиуса  $S_r = rS$ . Так что это утверждение очевидно.

**Утверждение 25.5.** Если  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  и  $\dim E < \infty$  или  $\dim F < \infty$ , то  $A$  компактный.

Потому в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество предкомпактно. Так что это утверждение тоже очевидно.

**Утверждение 25.6.** Если  $A, B \in \mathcal{K}(E, F)$ , то их сумма  $A + B \in \mathcal{K}(E, F)$ .

**Доказательство.** В самом деле. Берём последовательность  $\{x_n\} \subset S$  с единичного шара. Существует последовательность индексов  $\{n_k\}$ , для которой  $A_{x_{n_k}} \rightarrow y$ . Ну и существует ещё одна последовательность  $\{n_{k_j}\}$ , для которой  $B_{x_{n_{k_j}}} \rightarrow z$ . Таким образом

$$(A + B)x_{n_{k_j}} \rightarrow Ax_{n_{k_j}} + Bx_{n_{k_j}} \rightarrow y + z.$$

И согласно второму свойству, сумма является компактным оператором. ■

**Утверждение 25.7.** Если  $A \in \mathcal{K}(E, F)$ ,  $B \in \mathcal{L}(F, G)$ , то  $BA \in \mathcal{K}(E, G)$ .

**Утверждение 25.8.** Если  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $B \in \mathcal{K}(F, G)$ , то  $BA \in \mathcal{K}(E, G)$ .

Эти утверждения очевидны. В первом:  $B$  непрерывны, а значит, предкомпактные переводит в предкомпактные.

**Утверждение 25.9.** Если  $A \in \mathcal{K}(E, F)$  и  $\dim E = \infty$ , то  $A$  необратимый оператор.

Тоже почти очевидное свойство.

**Доказательство.** Если  $A$  обратимый, то  $A^{-1}$  будет ограниченный, то есть из  $\mathcal{L}(F, E)$  по теореме Банаха об обратном операторе. Поэтому  $A^{-1}A = I$  в  $E$ . Ну и согласно свойству 5, тождественный оператор будет компактным. Но тождественный оператор не является компактным в бесконечномерном пространстве по теореме Рисса. Единичный шар является компактным тогда и только тогда, пространство имеет конечную размерность. ■

**Лемма 25.1.** Если  $A_n \in \mathcal{K}(E, F)$  и  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$  (пространство  $\mathcal{L}(E, F)$  является банаховым, поэтому  $A$  будет как минимум ограниченным), то  $A$  компактный оператор.

**Доказательство.**  $\forall \varepsilon > 0 \exists n: \|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Пусть у нас  $\{y_k\}_{k=1}^m \subset A_n(S) - \varepsilon/2$ -сеть в  $A_n(S)$ . По неравенству треугольника имеем

$$\|y_k - Ax\| \leq \|y_k - A_n x\| + \|A_n x - Ax\|.$$

Имеет место следующее  $\forall x \in S \exists k: \|y_k - A_n x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Значит

$$\|y_k - Ax\| < \varepsilon.$$

Значит  $\{y_k\}_{k=1}^m$  является  $\varepsilon$ -сеть в  $A(S)$ . ■

**Теорема 25.2** (Шаудера). Пусть  $E, F$  — банаховы пространства,  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ . Тогда  $A \in \mathcal{K}(E, F)$ , если и только если  $A^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть у нас  $K = \overline{A(S)}$ . Это — компакт (замыкание предкомпактного). Для каждой функции  $f$  из единичного шара сопряжённого пространства построим функцию на компакте  $K$ .

$$\forall f \in S^* \subset F^* \quad g(y) := f(y), \quad \forall y \in K \Rightarrow g \in C(K).$$

Так как функционал непрерывный, то и функция будет непрерывной на компакте  $K$ .

Проверим, что семейство таких функций будет равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. Действительно

$$\sup_{y \in K} |g(y)| = \sup_{x \in S} |f(Ax)| \leq \|A\|.$$

И равностепенная непрерывность следует из

$$|g(y_1) - g(y_2)| = |f(y_1 - y_2)| \leq \|y_1 - y_2\|.$$

Поэтому вот это  $V = \{g \in C(K) \mid \forall y \in K, f \in S^* \quad g(y) = f(y)\}$  является предкомпактным. Кроме того  $M$  изометрично  $A^*(S^*)$ . В самом деле  $\|A^*f\| = \sup_{x \in S} \|A^*f(x)\| = \sup_{x \in S} |f(Ax)| = \|g\|_{C(K)}$ . Ну раз они изометричны и одно из них предкомпактно, то и второе предкомпактно.

Теперь достаточность. Пусть  $A^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$ . Отсюда следует, что второй сопряжённый будет компактным, то есть  $A^{**} \in \mathcal{K}(E^{**}, F^{**})$  по доказательству необходимости. Тогда рассмотрим изометрические вложения  $J_1: E \rightarrow E^{**}$ ,  $J_2: F \rightarrow F^{**}$ . Тогда  $A^{**}J_1 = J_2A$ . Следовательно,  $J_2(A(S)) = A^{**}(J_1S) \subset A^{**}(S)$ . ■

Осталось нам пример рассмотреть. Мы рассмотрим интегральный оператор.  $Af(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy$ .  $K(x, y)$  называется ядром оператора

$$A: \mathcal{L}_p[0, 1] \rightarrow \mathcal{L}_p[0, 1], \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Не обязательно для всех таких ядер оператор будет определён.

- (1)  $k(x, y) \in C[0, 1]^2$ . Докажем, что  $A \in \mathcal{K}(\mathcal{L}_p, \mathcal{L}_p)$ . Воспользуемся теоремой Арцелла—Асколли. Ограниченность вытекает из неравенства (неравенство Гёльдера и мажорирование нормы из  $\mathcal{L}_q$ )

$$\|Af\|_{\mathcal{L}_p} \leq \|k\|_C \cdot \|f\|_{\mathcal{L}_p}.$$

А значит, что  $A(S)$  — ограниченное множество в  $\mathcal{L}_p$ .

Теперь для  $\forall \varepsilon > 0$  найдём такое  $\delta > 0: \forall |x_1 - x_2| < \delta, \forall y \in [0, 1] \quad |k(x_1, y) - k(x_2, y)| < \varepsilon$ . Тогда

$$|Af(x_1) - Af(x_2)| < \varepsilon \|f\|_{\mathcal{L}_p}.$$

Значит,  $A(S)$  — равностепенно непрерывна. Если множество предкомпактно  $\mathcal{L}_p$ , то оно предкомпактно в  $C[0, 1]$ .

- (2) Пусть  $k \in \mathcal{L}_r[0, 1]^2$ , где  $r = \max\{p, q\}$ , где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Ну и будем считать, что  $1 < p < \infty$ .  $\|f\|_{\mathcal{L}_p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_q}$ , если  $p < q$ . Неравенство Гёльдера один раз применить. Нужно взять здесь  $s = \frac{q}{p}$ . Написать  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1} = 1$ . И получится требуемое неравенство.

Из этого неравенства вытекает, что

$$\|Af\|_{\mathcal{L}_p} \leq \|k\|_{\mathcal{L}_r} \cdot \|f\|_{\mathcal{L}_p}, \quad A: \mathcal{L}_p \rightarrow \mathcal{L}_p.$$

Теперь лемму применим. Существует последовательность  $K_n \in C[0, 1]^2$ , для которой  $\|k - k_n\|_{\mathcal{L}_r} < \frac{1}{n}$ , так как множество непрерывных всюду плотно в  $\mathcal{L}_p$ . Применим оператор

$$A_n f(x) = \int_0^1 k_n(x, y) f(y) dy.$$

У нас из старого неравенства вытекает следующее

$$\|Af - A_n f\|_{\mathcal{L}_p} \leq \|k - k_n\|_{\mathcal{L}_r} \|f\|_{\mathcal{L}_p}.$$

Отсюда  $\|A - A_n\| < \frac{1}{n}$  и  $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$  по норме. Отсюда  $A$  компактный оператор.

## 26 Фредгольмовы операторы

Вначале докажем теорему Рисса—Шауде. Рассмотрим спектр компактного оператора.

Пусть  $\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ , где  $E$  — банахово пространство, причём

$$\mathcal{K}(E) := \{A: E \rightarrow E \mid A \text{ — компактный оператор.}\}$$

Тогда верно следующее

**Утверждение 26.1.** Пусть  $A \in \mathcal{K}(E)$ . Тогда  $\sigma_l(A) \subset \sigma_p(A) \cup \{0\}$ .

**Доказательство.** Возьмём  $\lambda \in \sigma_l(A) \setminus \{0\}$ . Найдём последовательность  $\{x_n\} \subset E$  таких элементов, что  $\|x_n\| = 1$  и  $A_\lambda x_n \rightarrow 0$ , где  $A_\lambda = \lambda I - A$ .

Существует сходящая подпоследовательность  $A_{x_{n_k}} \rightarrow e \in E$ . Можем записать

$$x_{n_k} = \frac{(A_\lambda x_{n_k} + A x_{n_k})}{\lambda} \rightarrow \frac{e}{\lambda}.$$

Ну и затем, поскольку у нас оператор  $A$  непрерывный, получается, что применяя оператор  $A$  к последнему соотношению, получаем

$$A x_{n_k} \rightarrow A \frac{e}{\lambda} = e \Rightarrow A e = \lambda e.$$

То есть  $\lambda$  является собственным значением, если  $e \neq 0$ . Но  $e$  не равно нулю, так как  $\|x_n\| = 1$ . ■

**Утверждение 26.2.** Если  $A \in \mathcal{K}(E)$ , то множество

$$\Lambda_\varepsilon = \{\lambda \in \sigma_p(A) \mid |\lambda| \geq \varepsilon\}$$

конечно или пусто.

**Доказательство.** От противного. Пусть существует целая последовательность различных  $\{\lambda_n\} \subset \Lambda_\varepsilon$  точек этого множества. По определению этого множества все эти точки являются собственными значениями. Значит, существуют собственными векторы  $A e_n = \lambda_n e_n$ ,  $e_n \neq 0$ . Из курса линейной алгебры известно, что  $e_n$  линейно независимы.

Рассмотрим последовательность линейных оболочек  $L_n = \text{sp}\{e_1, \dots, e_n\} \subset L_{n+1}$ . По лемме Рисса о почти перпендикуляре  $\exists y_n \in L_n: \|y_n\| = 1$  и  $\forall x \in L_{n-1} \quad \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}$ . Можно представить в виде комбинации

$$y_n = c_n e_n + x_n, \quad x_n \in L_{n-1}.$$

Тогда у нас  $A y_n = \lambda_n c_n e_n + A x_n = \lambda_n y_n - \underbrace{(\lambda_n x_n - A x_n)}_{\in L_{n-1}}$ . Теперь давайте мы рассмотрим для  $n > k$  вот такую разность

$$A y_n - A y_k = \lambda_n y_n - \underbrace{(\lambda_n x_n - A x_n + A x_k)}_{L_{n-1}}.$$

Следовательно, если мы теперь возьмём норму, получим

$$\forall n > k \quad \|Ay_n - Ay_k\| = \left\| \lambda_n y_n - \underbrace{(\dots)}_{\in L_{n-1}} \right\| \geq \frac{\lambda_n}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, последовательность  $\{Ax_n\}$  не имеет сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора  $A$ . ■

**Теорема 26.1** (Рисса—Шаудера). Пусть  $E$  — банахово пространство,  $\dim E = \infty$ ,  $A \in \mathcal{K}(E)$ . Тогда

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}; \quad \forall \lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\} \quad \dim E_\lambda < \infty,$$

где  $E_\lambda = \ker A_\lambda$ .

**Доказательство.** По теореме о границе спектра, граница спектра содержится в предельном спектре. А по свойству один предельный спектр содержится в точечном спектре плюс ноль.

$$\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A) \subset \sigma_p(A) \cup \{0\}$$

А по свойству два вне всякого круга радиуса  $\varepsilon$  с центром в нуле на комплексной плоскости имеется только конечное число граничных точек. Легко понять, что такое множество является дискретным, все точки изолированные. Чтобы это понять, возьмём  $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ .

Получаем  $\sigma(A) = \partial\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ . Первое мы доказали.

Теперь второе. Пусть  $\lambda \in \sigma_p(A)$ . Тогда  $A: E_\lambda \rightarrow E_\lambda$  компактный оператор и кратен тождественному, то есть  $A|_{E_\lambda} = \lambda I_{E_\lambda}$ . А тождественный оператор обратим. А мы доказывали, что компактный оператор в бесконечномерном банаховом пространстве необратим. Значит,  $\dim E_\lambda < \infty$ . ■

**Определение 26.1.** Пусть  $E, F$  — банаховы пространства,  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ . Оператор  $A$  называется фредгольмовым, если выполнены следующие два свойства

- (1)  $\dim \ker A < \infty$ ,
- (2)  $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} A) < \infty$ .

Здесь обозначения  $\operatorname{Im} A \subset F$ ,  $\hat{F} = F / \operatorname{Im} A$ ,  $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} A) := \dim(\hat{F})$ .

Пространство таких операторов обозначают  $\mathcal{F}(E, F)$ .

**Лемма 26.1.** Если  $A \in \mathcal{F}(E, F)$ , то образ  $\operatorname{Im} A \subset F$  замкнут.

**Доказательство.** Рассмотрим базис  $\hat{F} = \operatorname{sp}\{\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m\}$ . Берём  $y$ , берём его смежный класс, пишем линейную комбинацию

$$\forall y \in F \quad \hat{y} = \sum_{k=1}^m c_k \hat{y}_k.$$

Отсюда сам  $y$  можно представить в виде

$$y = \sum_{k=1}^m c_k y_k + z, \quad z \in \operatorname{Im} A.$$

Отсюда следует, что пространство  $F$  представляется в виде прямой суммы  $F = \operatorname{Im} A \oplus M$ , где

$$M = \operatorname{sp}\{y_1, \dots, y_m\}.$$

Рассмотрим оператор  $B: E \times M \rightarrow F$ , заданный по формуле  $B(x, y) = Ax + y$ . Этот оператор является отображением на, то есть сюръективным, а так как  $A$  непрерывный, то и  $B$  будет непрерывным. По теореме о гомеоморфизме образ любого открытого будет открыт, а образ замкнутого будет замкнут. Таким образом,  $B(E \times 0) = \operatorname{Im} A$  замкнуто. ■

**Определение 26.2.** Пусть  $E$  — банахово пространство,  $A \in \mathcal{K}(E)$ .  $B = I - A$  называется классическим оператором Фредгольмана.

**Теорема 26.2.** Если  $A \in \mathcal{K}(E)$  и  $E$  — банахово пространство, то  $B \in \mathcal{F}(E)$ .

**Доказательство.** По теореме Рисса—Шаудера имеем  $\dim(\ker B) < \infty$ . Поскольку оператор  $B$  можем рассматривать, как оператор  $A_1$  (то есть где  $\lambda = 1$ ). Поэтому можем выбрать дополнительное подпространство к ядру (ядро-то замкнуто).

$$E = \ker B \oplus M,$$

$M \subset E$  — замкнутое подпространство.

Мы сначала докажем, что образ замкнут, то есть  $\operatorname{Im} B$  замкнут. Рассмотрим  $C = B|_M$ ,  $\ker C = 0$  и  $\operatorname{Im} C = \operatorname{Im} B$ .

По свойству один выполняется такое неравенство

$$\|C_x\| \geq c\|x\|,$$

где  $c > 0$ .

Осталось доказать, что образ  $C$  замкнут. Рассмотрим  $y \in \overline{\text{Im } C}$ . Тогда  $\exists \{x_n\} \subset E$ , для которой  $Cx_k \rightarrow y$ . Тогда

$$\|x_k - x_s\| \leq \frac{(\|Cx_k - y\| + \|y - Cx_s\|)}{c} \rightarrow 0 \quad (k, s \rightarrow \infty).$$

Применили только что полученное неравенство.

Значит,  $\{x_k\}$  — последовательность. Следовательно,  $\exists \lim x_k = x \in M$ , так как  $M$  замкнутое подпространство. Ну и следовательно,  $Cx = y \in \text{Im } C$ . И мы доказали замкнутость образа  $C$ .

Осталось доказать, что образ  $\text{Im } B$  имеет конечную размерность. Мы уже доказали, что

$$\text{Im } B = (\ker B^*)^\perp.$$

По теореме Рисса—Шаудера имеем конечную размерность

$$\dim(\ker B^*) < \infty.$$

Выберем базис  $\text{Im } B = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$ , где  $\{f_k\}$  — базис в  $\ker B^*$ . А отсюда давайте мы возьмём теперь  $\{e_k\}_{k=1}^m$  — биортогональная система  $\{f_k\}_{k=1}^n$ . Тогда можно рассмотреть подпространство

$$L = \text{sp}\{e_1, \dots, e_m\}.$$

Каждый  $x \in E$  можно записать в виде

$$z = \sum_{k=1}^m f_k(x)e_k, \quad y = x - z.$$

То есть всякий элемент  $x$  представляется в виде суммы  $x = y + z$ . А  $y \in \text{Im}(B)$ , поскольку если к  $y$  применить  $f_k$ , получим ноль, то есть  $y$  принадлежит пересечению ядер. Отсюда следует, что

$$\text{codim}(\text{Im } B) = m < \infty.$$

■

## 26.1 Теоремы Фредгольма

Из линейной алгебры известны такие альтернативы. Либо система имеет решение для любой правой части, либо имеет ненулевое решение однородной системы. Это — альтернатива Фредгольма.

Пусть  $E$  — банахово пространство,  $A$  — компактный оператор,  $B = I - A$  — классический оператор Фредгольма,  $B^* = I - A^*$  (он тоже будет фредгольмовым по доказанной теореме).

Обозначим  $\dim(\ker B) = n$ ,  $\dim(\ker B^*) = m$ .

**Теорема 26.3** (Первая теорема Фредгольма). Пусть  $\{f_k\}_{k=1}^m$  — базис решений однородного уравнения  $B^*f = 0$  (то есть базис ядра  $B^*$ ). Тогда  $\exists x \in E: Bx = y \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad f_k(y) = 0$ .

**Доказательство.** У нас была доказана формула

$$\text{Im } B = (\ker B^*)^\perp.$$

Ну и поскольку  $f_k$  составляют базис ядра сопряжённого оператора

$$\text{Im } B = (\ker B^*)^\perp = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k.$$

Таким образом,  $y \in \text{Im } B \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad f_k(y) = 0$ . ■

**Теорема 26.4** (Вторая теорема Фредгольма). Пусть  $\{x_k\}_{k=1}^n$  — базис решений однородного уравнения  $Bx = 0$ . Тогда  $\exists f \in E^*: B^*f = g \Leftrightarrow \forall k = 1, \dots, n \quad g(x_k) = 0$ .

**Доказательство.** Доказательство этой теоремы, как и первой, сводится к формуле (поскольку  $B^*$  фредгольмов оператор, по первой теореме)  $\text{Im } B^* = (\ker B)^\perp = \bigcap_{k=1}^n \ker \delta_{x_k}$ , где  $\delta_{x_k}(f) = f(x_k)$ ,  $f \in E^*$ .

Из этой формулы вытекает, что  $g \in \text{Im } B^* \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \delta_{x_k}(g) = g(x_k) = 0$ . ■

**Теорема 26.5** (Альтернатива Фредгольма). Уравнение  $Bx = y$  имеет решения для всех  $y \in E$ , если и только если уравнение  $Bx = 0$  имеет только нулевое решение.

Можно сформулировать как альтернативу: либо имеет решение для любого  $y$ , либо имеет ненулевое решение однородной.



**Доказательство.** Необходимость. Пусть у нас неоднородное уравнение имеет решение для любого  $y$ . Но предположим, что есть ненулевое решение  $x_0 \neq 0: Bx_0 = 0$ . Рассмотрим такие подпространства  $L_k = \ker B^k$ . Ясно, что  $L_1 \subset L_2 \subset \dots$

Покажем, что включения являются строгими. В самом деле, построим  $x_{k+1}$  из  $L_{k+1}$ , для которых  $Bx_{k+1} = x_k$  при  $k = 0, 1, \dots$

Если  $B^k x_{k+1} = x_0 \neq 0$ , то  $x_{k+1} \notin L_k$ .

$$\exists y_k \in L_k: \|y_k\| = 1 \text{ и } \forall x \in L_{k-1} \quad \|y_k - x\| > \frac{1}{2}.$$

Если  $B = I - A$ , то  $Ay_k = y_k - By_k$ . Тогда

$$Ay_k - Ay_s = y_k - \underbrace{(By_k + y_s - By_s)}_{\in L_{k-1}}.$$

Имеем  $\|Ay_k - Ay_s\| > \frac{1}{2}$  для  $k > s$ . Стало быть  $\{Ay_k\}$  не имеет сходящихся подпоследовательностей. А это противоречит компактности оператора  $A$ . Получили противоречие, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть  $Bx = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Тогда в силу второй теоремы сопряжённое однородное уравнение  $B^*f = y$  разрешимо для любого  $y \in E^*$ . Ну теперь в силу доказанной необходимости этой теоремы (берём в качестве  $B$  оператор  $B^*$ ) имеет место  $B^*f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ . Ну а следовательно, по первой теореме  $Bx = y$  имеет решение для любого  $y \in E$ . ■

**Теорема 26.6** (Четвёртая теорема Фредгольма). *Уравнения  $Bx = 0$  и  $B^*f = 0$  имеют одинаковое число линейно независимых решений, то есть размерность  $\dim(\ker B) = \dim \ker(B^*)$ .*

**Доказательство.** Обозначим  $\dim \ker B = n$  и  $\dim \ker B = m$ .

Пусть  $\{x_i\}_{i=1}^n$  — базис  $\ker B$ ,  $\{f_i\}_{i=1}^n$  — биортогональная система функционалов. Берём  $\{g_j\}_{j=1}^m$  — базис  $\ker B^*$  и  $\{y_j\}_{j=1}^m$  — соответствующая биортогональная система. Мы с вами доказывали, что для каждой конечной системы элементов (функционалов) существует биортогональная система функционалов (элементов).

Рассмотрим два случая.

- (1) Пусть  $n < m$ . Положим  $Cx = Ax + \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$  и оператор  $D = I - C$ . Докажем, что  $\ker D = 0$ . Пусть  $x \in \ker D$ . Тогда

$$Bx = \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i.$$

Так как  $B^*g_j = 0$  ( $g_j$  — это элементы ядра  $B^*$ ) для  $j \in \{1, \dots, m\}$ , то получаем определению

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad 0 = B^*g_j(x) = g_j(Bx) = f_j(x).$$

Значит,  $Bx = 0$ . Ну а поскольку  $x \in \ker B$ , то он записывается в виде линейной комбинации

$$x = \sum_{i=1}^n f_i(x)x_i = 0,$$

так как все  $f_i = 0$ . Вот мы и доказали, что ядро равно нулю.

Ну а теперь заметим, что  $C \in \mathcal{K}(E)$ , поскольку  $A$  компактный, к которому добавляем конечномерный. И следовательно, согласно третьей теореме существует  $z \in E$ , для которого  $Dz = y_m$  (нужно вспомнить, что такое  $y_m$ ; это элементы биортогональной системы к базису ядра сопряжённого оператора). Поэтому  $D^*g_m(z) = g_m(Dz) = g_m(y_m) = 1$  в силу биортогональности (как раз она определяется по этому равенству и  $g_i(y_j) = \delta_{ij}$ ).

Если сравнить  $Dz$  и  $Bz$ , получается такое равенство

$$g_m(Dz) = g_m(Bz) = B^*g_m(z) = 0.$$

- (2) Случай  $n > m$  разбирается точно так же. Мы должны взять  $C^*f = A^*f + \sum_{j=1}^m f(y_j)f_j$ , взять  $D^* = I - C^*$ . Ну и подобными рассуждениями докажем, что  $\ker D^* = 0$ . А затем замечаем, что  $C^*$  является сопряжённым к такому оператору:  $Cx = Ax + \sum_{j=1}^m f_j(x)y_j$  и  $D = I - C$ . Если на экзамене вы разберёте первый случай, второй скажете, что «аналогично». ■

Теперь ещё пример разберём. Рассмотрим оператор  $(Ax)_n = \lambda_n x_n$ , здесь  $A: l_p \rightarrow l_p$  для  $1 \leq p \leq \infty$ . Рассмотрим  $N = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n = 0\}$  и  $M = \mathbb{N} \setminus N$ . Тогда само пространство  $l_p$  будет раскладываться в прямую

сумму

$$l_p = l_p(N) \oplus l_p(M).$$

Если  $A \in \mathcal{F}(l_p)$ , то  $\ker A = l_p(N)$  имеет конечную размерность и  $\operatorname{Im} A = A(l_p(M))$  замкнут. Следовательно,  $N$  — конечное множество и  $A: l_p(M) \rightarrow \operatorname{Im}(A)$ . По теореме Банаха об обратном операторе  $A$  имеет ограниченный обратный. Из второго вытекает, что  $\sup_{n \in M} |\lambda_n|^{-1} < \infty$ . Ну и поскольку множество  $N$  конечно, отсюда следует, что 0 не является предельной точкой последовательности  $\{\lambda_n\}$ . Таким образом, если оператор Фредгольмовым, то 0 не является предельной точкой последовательности  $\{\lambda_n\}$ . На самом деле это критерий, но мы не будем это обсуждать.

## 27 Эрмитовы операторы

Я хотел бы обратить ваше внимание на примеры, которые я включил прямо в вопросы.

Определение эрмитовых операторов у нас уже было. Но я сейчас напомним. В линейной алгебре тоже есть понятие эрмитова оператора, он задаётся эрмитовой матрицей в конечномерном пространстве.

**Определение 27.1.** Пусть  $H$  — гильбертово пространство, линейный оператор  $A: H \rightarrow H$  эрмитовый, если для  $\forall x, y \in H$  выполняется равенство

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

То есть это ограниченный самосопряжённый оператор. Мы доказывали теорему, которая утверждает, что всякий эрмитовый оператор ограничен. Пусть  $\mathcal{H}(H)$  — множество всех эрмитовых операторов. Тогда  $\mathcal{H}(H) \subset \mathcal{L}(H)$ .

Перейдём к свойствам спектра эрмитового оператора.

**Утверждение 27.1.** Если  $A \in \mathcal{H}(H)$  и  $\lambda \in \sigma_p(A)$ , то  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $H_{\lambda_1} \perp H_{\lambda_2}$  для  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , где  $H_\lambda = \ker A_\lambda$ ,  $A_\lambda = \lambda I - A$ .

**Доказательство.** Это фактически было доказано в курсе линейной алгебры. Мы это тоже докажем. Пусть  $Ae = \lambda e$ ,  $\|e\| = 1$ . Тогда имеем  $\lambda = \langle Ae, e \rangle = \langle e, Ae \rangle = \bar{\lambda}$ . То есть доказали, что  $\lambda$  число действительное.

Пусть у нас теперь есть два числа  $Ae_1 = \lambda e_1$  и  $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ . Тогда получаем такое равенство:  $\lambda_1 \langle e_1, e_2 \rangle = \langle Ae_1, e_2 \rangle = \langle e_1, Ae_2 \rangle = \lambda_2 \langle e_1, e_2 \rangle$ . Поскольку  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , получаем, что  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ , то есть  $e_1 \perp e_2$ . ■

**Утверждение 27.2** (Критерий Вейля). Если  $A \in \mathcal{H}(H)$ , то  $\sigma(A) = \sigma_e(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0\}$ .

Есть операторы, у которых предельный спектр содержит не только собственные значения.

**Доказательство.** Мы доказывали, что  $\sigma_e(A) \subset \sigma(A)$ . Нам надо доказать обратное включение. Пусть  $\lambda \in \sigma_e(A)$ . По определению существует такая  $c > 0$ , для которой

$$\forall x \in H \quad \|A_\lambda x\| \geq c\|x\|.$$

Докажем, что образ  $\operatorname{Im} A_\lambda$  замкнут. Предположим, что у нас есть последовательность  $A_\lambda x_n \rightarrow y$ . Тогда используя только что полученное неравенство,

$$\|x_m - x_n\| \leq \|A_\lambda x_m - A_\lambda x_n\|$$

Прибавим и вычтем  $y$  и поделим на  $c$

$$\frac{\|A_\lambda x_m - y\|}{c} + \frac{\|A_\lambda x_n - y\|}{c} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Значит,  $\{x_n\}$  последовательность Коши в гильбертовом пространстве. И существует предел  $x = \lim x_n$ . Значит,  $A_\lambda x = y \in \operatorname{Im} A_\lambda$ . Таким образом, замкнутость образа доказана.

Может ли  $\operatorname{Im} A_\lambda = H$ ? Пусть  $\exists y \neq 0: y \perp \operatorname{Im} A_\lambda$ . Ну если это так, то

$$\forall x \in H \quad \langle A_\lambda x, y \rangle = \langle x, A_{\bar{\lambda}} y \rangle = 0.$$

Ну а следовательно оператор  $A_\lambda y = 0$ . Мы доказывали, что собственные числа действительные, значит,  $A_\lambda y = 0$ , что невозможно, поскольку выполняется неравенство  $\|A_\lambda x\| \geq c\|x\|$ .

Следовательно,  $\operatorname{Im} A_\lambda = H$ ,  $\ker A_\lambda = 0$  и  $\lambda \notin \sigma(A)$ . ■

**Утверждение 27.3.** Если  $A \in \mathcal{H}(H)$ , то его спектр  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ .

Мы пока доказали, что собственные значения лежат на действительной оси, а теперь покажем, что и весь спектр.

**Доказательство.** Пусть  $\lambda \in \mathbb{C}: \lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ . Тогда запишем следующие равенства ( $A_\lambda = A_\alpha + i\beta I$ )

$$\|A_\lambda x\|^2 = \langle A_\lambda x, A_\lambda x \rangle = \langle A_\alpha x, A_\alpha x \rangle - i\beta \langle A_\alpha x, x \rangle + i\beta \langle x, A_\alpha x \rangle + \beta^2 \langle x, x \rangle.$$

В силу эрмитовости остаётся только два слагаемых

$$\|A_\lambda x\|^2 = \|A_\lambda x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2.$$

Отсюда выполняется такое неравенство  $\|A_\lambda x\| \geq |\beta| \cdot \|x\|$ , а это означает, что  $\lambda$  не принадлежит предельному спектру. По критерию Вейля  $\lambda$  не принадлежит и всему спектру. ■

**Утверждение 27.4.** Если  $A \in \mathcal{H}(H)$ , то спектральный радиус совпадает с нормой  $r(A) = \|A\|$ .

**Доказательство.** Мы доказывали теорему о спектральном радиусе, мы ей воспользуемся сейчас. Имеем  $A^2 = A \cdot A$ . Тогда  $\|A^2\| \leq \|A\|^2$  и  $\|A^{2^n}\| \leq \|A\|^{2^n}$ .

Применим неравенство Коши—Буняковского (здесь  $S \subset H$  — единичный шар)

$$\|A^2\| = \sup_{x \in S} \|A^2 x\| = \sup_{x, y \in S} \langle A^2 x, y \rangle = \sup_{x, y \in S} \langle Ax, Ay \rangle \geq \sup_{x \in S} \langle Ax, Ax \rangle = \sup_{x \in A} \|Ax\|^2 = \|A\|^2.$$

Значит,  $\|A^2\| \geq \|A\|^2$ , отсюда  $\|A^2\| = \|A\|^2$ .

Если вспомнить теорему о спектральном радиусе, существует  $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2^n]{\|A^{2^n}\|} = \|A\|$ . ■

**Утверждение 27.5.** Если  $A \in \mathcal{K}(H) \cap \mathcal{H}(H)$ , то  $\sigma_p(A) \neq \emptyset$ .

Вы это и в линейной алгебре доказывали.

**Доказательство.** Будем считать, что  $\dim H = \infty$ . В конечномерном случае рассматривается характеристический многочлен и по основной теореме алгебры у него есть хотя бы один корень. У нас будет бесконечная размерность. Пусть  $\sigma_p(A) = \emptyset$ . По теореме Рисса—Шаудера в этом случае  $\sigma(A) = \{0\}$ . Ну и следовательно спектральный радиус  $r(A) = \|A\| = 0$ . И наш оператор нулевой. А все вектора являются собственными для нулевого оператора с собственным значением  $\lambda = 0$ , противоречие. ■

**Теорема 27.1** (Гильберта—Шмидта). Если  $A \in \mathcal{K}(H) \cap \mathcal{H}(H)$ , то  $\exists \{e_n\} \subset H$  полная ортонормированная система собственных векторов оператора  $A$ .

Стоит отметить, что в курсе линейной алгебры эта теорема доказывалась.

**Доказательство.** Докажем для  $H$  сепарабельного. (Без этого требования нужно выбирать несчётную ортонормированную систему.) Пусть  $\dim H = \infty$ . Поскольку  $A \in \mathcal{K}(H)$ , то его спектр не более чем счётный  $\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$  (по теореме Рисса—Шаудера), кроме того по свойству 1 эти собственные числа действительные, а по свойству два эти собственные пространства ортогональны:

$$\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}, \quad H_{\lambda_1} \perp H_{\lambda_2} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2).$$

Можем выделить счётную ортонормированную систему в каждом из подпространств  $H_{\lambda_n}$ , а затем объединяем в одну систему, получим ортонормированную систему.

Нам осталось доказать, что замкнутая линейная оболочка этой системы  $L = \overline{\text{sp}}\{e_n\}$  совпадает с  $H$ . Это будет означать, что система полна.

В силу непрерывности  $A: L \rightarrow L$ . Всякий элемент из подпространства  $L$  записывается в виде ряда Фурье. А в силу эрмитовости  $A: L^\perp \rightarrow L^\perp$  — ортогональное дополнение тоже является инвариантным подпространством. По свойству 5 следует, что ортогональное дополнение  $L^\perp$  содержит собственный вектор оператора  $A$ . (Ведь замкнутое подпространство гильбертова пространства само является гильбертовым.) Отсюда противоречие с тем, что все собственные векторы содержатся в  $L$ . Таким образом,  $L^\perp = \{0\}$ . Следовательно  $H = L \oplus L^\perp = L$ . ■

Давайте приведём пример компактного эрмитова оператора. Стандартный пример  $A: \mathcal{L}_2([a, b]) \rightarrow \mathcal{L}_2([a, b])$ , который является интегральным оператором

$$\forall f \in \mathcal{L}_2([a, b]) \quad Af(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy.$$

Здесь на ядро  $k(x, y)$  интегрального оператора накладывается условия

- (1)  $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$  — это условие обеспечивает эрмитовость оператора. Мы с вами на одной из лекций считали сопряжённый к интегральному оператору.
- (2)  $k \in \mathcal{L}_2([a, b])$  — это, мы доказывали, обеспечивает компактность.

## 28 Задача Штурма—Лиувилля

Задача ставится так. Есть дифференциальный оператор второго порядка

$$Du(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x).$$

Здесь  $x \in [a, b]$ . Ставится задача найти собственные функции и доказать, что из них можно выбрать полную ортонормированную систему. Собственные функции в общем случае найти не удаётся, только в частных. Мы сделаем некоторые предположения.

Пусть  $p \in C^1[a, b]$ ,  $p(x) > 0$ ,  $q(x) \in C[a, b]$  и  $q(x) \in \mathbb{R}$ . Оператор  $D: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_2([a, b])$ , где  $\mathcal{L} \subset W_2^2([a, b])$  (подпространства пространства Соболева). Значит, функция  $u \in \mathcal{L}$ , если  $u' \in AC[a, b]$ ,  $u'' \in \mathcal{L}_2([a, b])$ . И задаём граничные условия

$$a_0 u(a) + a_1 u'(a) = 0; \quad b_0 u(b) + b_1 u'(b) = 0.$$

Будем полагать, что граничные условия нетривиальны, то есть  $a_0^2 + a_1^2 > 0$ ,  $b_0^2 + b_1^2 > 0$ .

Нам нужно найти собственные функции, удовлетворяющие всем этим условиям.

Для начала докажем, что этот оператор является симметрическим.

**Лемма 28.1.**  $D$  — симметрический оператор, то есть

$$\forall u, v \in \mathcal{L} \quad \langle Du, v \rangle = \langle u, Dv \rangle,$$

$u \in \mathcal{L} \subset \mathcal{L}_2([a, b])$  всюду плотно.

**Доказательство.** Второе утверждение мы доказывали уже. А первое следует из соотношения

$$\langle Du, v \rangle - \langle u, Dv \rangle = \int_a^b ((pu')'\bar{v} - u(p\bar{v})') dx = p(u'\bar{v} - u\bar{v}')|_a^b = 0$$

в силу того, что выполнены граничные условия. Потому что если выполнены граничные условия, то определители

$$\det \begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ \bar{v}(a) & \bar{v}'(a) \end{vmatrix} = 0, \quad \det \begin{vmatrix} u(b) & u'(b) \\ \bar{v}(b) & \bar{v}'(b) \end{vmatrix} = 0.$$

■ Таким образом, мы доказали, что оператор  $D$  является симметрическим. Ну а теперь будем строить функцию Грина.

**Лемма 28.2.** Если ядро оператор  $\ker D = 0$ , то существует функция Грина  $G(x, y)$ , которая удовлетворяет следующим условиям

- (а)  $G$  — действительная, симметричная и непрерывная на  $[a, b]^2$ .
- (б) При  $y \neq x$  функция  $G(x, y)$  как функция  $y$  имеет вторую непрерывную производную по  $y$ .
- (в) При  $y \neq x$  имеем  $D_y G(x, y) = 0$  и удовлетворяет граничным условиям.
- (г) При  $y = x$   $G'_y(x, y)|_{x-0}^{x+0} = G'_y(x, x+0) - G'_y(x, x-0) = -\frac{1}{p(x)}$ .

**Доказательство.** Пусть  $Du_1 = 0$ ,  $Du_2 = 0$ ,  $u_1$  удовлетворяет первому граничному условию,  $u_2$  удовлетворяет второму граничному условию. Так как у нас ядро равно нулю, то эти два решения линейно независимы (иначе  $u_1$ , например, будет удовлетворять сразу двум граничным условиям), то есть всякое решение имеет вид  $u = C_1 u_1 + C_2 u_2$ . Ну ещё известно из теории дифференциальных уравнений, что определитель Вронского  $u_1 u'_2 - u'_1 u_2 \neq 0$ . Тогда  $\Delta = p(u_1 u'_2 - u'_1 u_2) \neq 0$ . Можно даже показать, что это константа, ведь

$$\Delta' = u_1(ou'_2)' - u_2(pu'_1) = 0.$$

Ну почти вот и всё доказательство. Осталось определить эту функцию. Функцию мы определяем следующим образом. Фиксируем переменную  $x$ ,  $y$  меняем

$$G(x, y) = \begin{cases} c_1 u_1(y), & y \leq x; \\ c_2 u_2(y), & y \geq x. \end{cases}$$

Так берём  $c_1, c_2$ , чтобы

$$\begin{cases} c_1 u_1(x) - c_2 u_2(x) = 0; \\ c_1 u'_1(x) - c_2 u'_2(x) = \frac{1}{p(x)}. \end{cases}$$

Осталось выписать коэффициенты  $c_1 = -\frac{u_1(x)}{\Delta}$ ,  $c_2 = -\frac{u_2(x)}{\Delta}$ .

$$G(x, y) = -\frac{1}{\Delta} \begin{cases} u_1(y)u_2(x), & a \leq y \leq x \leq b; \\ u_1(x)u_2(y), & a \leq x \leq y \leq b. \end{cases}$$

Выполнение всех условий гладкости следует из теоремы существования. ■

**Теорема 28.1.** Пусть  $\ker D = 0$  и  $f \in \mathcal{L}_2[a, b]$ . Тогда  $Du = f$ ,  $u \in \mathcal{L} \Leftrightarrow u = Af$ , где

$$Af(x) = \int_a^b G(x, y)f(y) dy.$$

Иными словами, этот интегральный оператор является обратным к оператору  $D$ .

**Доказательство.** Докажем, что  $\forall u \in \mathcal{L} \quad ADu = u$ . Пусть  $Du = f$ . Тогда

$$\int_a^b G(x, y)f(y) dy = \int_a^b G(x, y)Du(y) dy$$

Будем теперь интегрировать по частям только первое слагаемое оператора  $D$ . Я не буду всё подробно писать. Думаю, что то, что я напишу, будет понятно. Вспомним лемму, что  $D$  симметрический оператор, но остаются некоторые неинтегральные члены, которые я напишу.

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x, y)Du(y) dy &= \int_a^x G(x, y)Du(y) dy + \int_x^b G(x, y)Du(y) dy = \\ &= \int_a^x D_y G(x, y)u(y) dy + p(G'_y u - Gu')|_a^{x-0} + p(G'_y u - Gu')|_x^{b+0}. \end{aligned}$$

Многие слагаемые обращаются в ноль, остаются только

$$p(G'_y u - Gu')|_x^{x-0} = 1.$$

В точке  $x$  функции  $u, u', G$  непрерывны, а  $G'$  испытывает скачок.

Теперь докажем, что  $Daf = f$  почти всюду на  $[a, b]$ . Для этого воспользуемся тем, что у нас функция Грина является действительной и симметричной. Значит, оператор  $Af$  будет эрмитовым оператором.

$$\forall v \in \mathcal{L} \quad \langle Daf, v \rangle = \langle f, ADV \rangle = \langle f, v \rangle.$$

Ведь  $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_2[a, b]$  всюду плотно. Получаем, что  $Daf = f$  почти всюду на  $[a, b]$ . ■

**Следствие 28.1** (единственность решения задачи Штурма—Лиувилля). Существует полная ортонормированная система  $\{e_n\}$  в  $\mathcal{L}_2[a, b]$ , состоящая из собственных функций оператора Штурма—Лиувилля.

**Доказательство.** Для доказательства следствия рассмотрим два случая.

- (а)  $\ker D = 0$ . В этом случае можем просто применить теорему. Ну поскольку в теореме Гильберта—Шмидта существует полная ортонормированная система собственных функций, то и у оператора  $D$  существует полная ортонормированная система собственных функций. А оператор функции Грина будет как раз непрерывным и компактным.
- (б)  $\ker D \neq 0$ . Тогда существует  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , которое не является собственным числом оператора  $D$ , то есть  $\ker(\lambda I - D) = 0$ . ( $\mathcal{L}_2$  сепарабельно, значит, собственных чисел счётное множество, значит, есть действительное, не являющееся собственным числом). У оператора  $D_0 = \lambda_0 I - D$  и оператора  $D$  собственные функции не отличаются. Таким образом у нас существует полная ортонормированная система оператора  $D$ . ■

Давайте простой пример я приведу. Без доказательства, хотя там доказывать нечего. Вы наверняка этот пример разбирали в курсе дифференциальных уравнений. Вот такой оператор  $Du = -u''$  и граничные условия  $u(0) = u(1) = 0$ . Легко видеть, что  $x, 1 - x$  — решения уравнения  $Du = 0$  (одно для одного граничного условия, другое для второго). Вычислим функцию Грина

$$G(x, y) = \begin{cases} y(1-x), & 0 \leq y \leq x \leq 1; \\ x(1-y), & 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Выписав  $u'' + \lambda u = 0$ , вы вспомните, что решения  $\sin$  и  $\cos$ , но  $\cos$  отпадает из-за одного граничного условия, остаётся только  $\sin$ . Таким образом  $\lambda_n = \pi^2 n^2$ ,  $e_n = \sqrt{2} \sin \pi n x$ .