1 Гильбертовы пространства

Начнём с определений. Сначала определим евклидово бесконечномерное пространство. Обычно математики считают, что евклидово пространство обязательно конечномерное, но нам будет удобно определить иначе.
Определение 1.1. *Пусть E — линейное пространство на полем $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Для каждой пары элементов $\forall\ x, y \in\ E$ определено скалярное произведение $\langle x, y\rangle$, если выполнены следующие свойства.*

1. *$\forall\ x, y \in E \quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.*

2. *Этот функционал является линейным по первому аргументу*

$$\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F},\ x, y \in E \quad \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1\langle x_1, y\rangle + \lambda_2\langle x_2, y\rangle.$$

3. *Скалярный квадрат положительно определён как квадратичная форма, то есть $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*

Пространство вместе со скалярным произведением называется евклидовым пространством. На нём вводится евклидова норма $\|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}$ и евклидова метрика $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Давайте проверим, что нами действительно введена норма.

Следущее неравенство Коши доказал для последовательностей, а Буняковский доказал для интегралов. Иногда ещё называют неравенством Шварца.
Утверждение 1.1 (Неравенство Коши—Буняковского)**.** $\forall\ x, y \in E \quad \big|\langle x, y\rangle\big| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.
Доказательство. Берём $z = tx + \lambda y$, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\left|\langle x,y\rangle\right|}$, $|\lambda| = 1$ и раскрываем скалярный квадрат

$$\langle z, z\rangle = t^2\langle x, x\rangle + 1t\,\mathrm{Re}\left(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle\right) + |\lambda|^2\langle y, y\rangle = t^2\|x\|^2 + 2t\big|\langle x, y\rangle\big| + \|y\|^2 \geqslant 0.$$

Это выполнено для любого t, значит, есть условие на неотрицательность дискриминанта:

$$\big|\langle x, y\rangle\big|^2 \leqslant \|x\|^2 \cdot \|y\|^2.$$

причём отсюда же вытекает, что в случае равенства $z = tx + \lambda y = 0$, то есть x и y линейно зависимы. ■
Утверждение 1.2. $\forall\ x, y \in E \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
Доказательство. Берём скалярный квадрат и раскрываем по свойствам скалярного произведения.

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.$$

Это неравенство верно тогда, когда верно неравенство Коши—Буняковского. Если же $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\|$, то $x = \lambda y$, где $\lambda \in \mathbb{F}$ и $\mathrm{Re}\,\lambda = |\lambda| \geqslant 0$. ■

Таким образом евклидово пространство является строго нормированным. Это нам пригодиться, когда будем говорить об элементе наилучшего приближения.
Утверждение 1.3 (Равенство параллелограмма)**.** $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$.
Доказательство. Доказательство очень простое

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm \mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

■ Оказывается, это равенство является характеристическим свойством евклидова пространства.
Утверждение 1.4. *Если нормированное пространство таково, что выполняется равенство параллелограмма, то пространство евклидово, то есть существует скалярное произведение, порождающее заданную норму.*

Доказательство этого утверждения можно прочитать в учебнике «Колмогоров—Фомин».

$B(X)$ не является евклидовым пространством. Пусть $X = A \sqcup B$, $f(x) = \chi_A(x)$, $g(x) = \chi_B(x)$, Нормы $\|f\|_B := \sup_x \in X\big|f(x)\big|$. Значит

$$\|f\| = \|g\| = \|f + g\| = \|f - g\| = 1.$$

И неравенство параллелограмма не выполняется.
Утверждение 1.5. *Непрерывность скалярного произведения $\langle x, y\rangle$ для $x, y \in E$.*
Доказательство. Достаточно доказать, что оно пепрерывно в точке x_0, y_0. Применяем неравенство треугольника для модуля.

$$\big|\langle x, y\rangle - \langle x_0, y_0\rangle\big| \leqslant \big|\langle x - x_0, y_0\big| + \big|\langle x_0, y - y_0\big| + \big|\langle x - x_0, y - y_0\big| \leqslant$$

Если снять модули, неравенство превращается в равенство. Это так, отступление.

Теперь применяем неравенство Коши—Буняковского

$$\leqslant \|x - x_0\| \cdot \|y_0\| + \|x_0\| \cdot \|y - y_0\| + \|x - x_0\| \cdot \|y - y_0\|$$

Зафиксируем $\varepsilon\rangle 0$. Возьмём $C\rangle \max\big(\|x_0\|, \|y_0\|\big)$ Берём $0\langle \max\left\{\delta\langle \frac{\varepsilon}{3C}, C\right\}$. Тогда для $\|x-x_0\|\langle\delta$ и $\|y-y_0\|\langle\delta$ имеем

$$\leqslant \|x-x_0\|\cdot\|y_0\| + \|x_0\|\cdot\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\cdot\|y-y_0\|\langle\varepsilon.$$

■

Утверждение 1.6 (Неравенство Беппо—Леви)**.** *Пусть $L\subset E$ линейное подпространство, $x\in E\setminus L$, $d=\rho(x,L)=\int\limits_{y\in L}\|x-y\|$. Утверждается, что*

$$\|y-z\|\leqslant\sqrt{\|x-y\|^2-d^2}+\sqrt{\|x-z\|^2-d^2}.$$

Мы это неравенство докажем, используя только свойства скалярного произведения, то есть без геометрических соображений.

Доказательство. Пусть $u=\frac{ty+z}{t+1}\in L$, $\|x-u\|\geqslant d$. Рассмотрим скалярный квадрат следующего вида

$$\big\|t(x-y)+x-z)\big\|^2=\big\|(t+1)(x-u)\big\|^2=(t+1)^2\|x-u\|^2\geqslant(t+1)^2d^2.$$

Теперь сам скалярный квадрат раскроем. Я ещё кое-что сразу перенесу из правой части неравенство в левую.

$$t^2\big(\|x-y\|^2-d^2\big)+2t\big(\operatorname{Re}\langle x-y,x-z\rangle-d^2\big)+\big(\|x-z\|^2-d^2\big)\geqslant 0.$$

Опять получили, как в доказательстве неравенства Коши—Буняковского, квадратный трёхчлен. Условие на дискриминант принимает вид

$$\big(\operatorname{Re}\langle x-y,x-z\rangle-d^2\big)^2\leqslant\big(\|x-y\|^2-d^2\big)\big(\|x-z\|^2-d^2\big).$$

Мы теперь будем использовать это неравенство.

$$\begin{aligned}\|y-z\|=\big\|(x-z)-(x-y)\big\|^2&=\|x-z\|^2-2\operatorname{Re}\langle x-z,x-y\rangle+\|x-y\|^2=\\&=\big(\|x-z\|^2-d^2\big)-2\big(\operatorname{Re}\langle x-z,x-y\rangle-d^2\big)+\big(\|x-y\|^2-d^2\big)\leqslant\\&\leqslant\big(\|x-z\|^2-d^2+2\sqrt{\big(\|x-z\|^2-d^2\big)\big(\|x-y\|^2-d^2\big)}+\big(\|x-y\|^2-d^2\big).\end{aligned}$$

А это равносильно доказываемому неравенству. ■

Определение 1.2. *Элементы $x,y\in E$ называются ортогональными $x\perp y$, если $\langle x,y\rangle=$.*

$x\perp L$, если $\forall\ y\in L\quad\langle x,y\rangle=0$.

$M\perp L$, если $\forall x\in M,\ \forall\ y\in L\quad\langle x,y\rangle=0$.

Лемма 1.1. *Пусть $L\subset E$ линейное подпространство, $x\in E$. Тогда*

$$\rho(x,L)=\|x-y\|,\ y\in L\ \Leftrightarrow\ x-y\perp L.$$

Доказательство. Пусть $\exists\ z\in L$: $\langle x-y,z\rangle\neq0$. Рассмотрим такой элемент $u=y+\lambda z$, где $\lambda=\frac{\langle x-y,z\rangle}{\langle z,z\rangle}$. Тогда по свойствам скалярного произведения.

$$\|x-u\|^2=\big\|(x-y)-\lambda z\big\|^2=\|x-y\|^2-2\operatorname{Re}\big(\overline{\lambda}\langle x-y,z\rangle\big)+|\lambda|^2\langle z,z\rangle=\|x-y\|^2-\underbrace{|\lambda|^2\langle z,z\rangle}_{\neq0}.$$

Отсюда видно, что необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\forall\ z\in L\quad\langle x,y,z\rangle=0$. Так как z ортогонален, могу заменить $\langle x-y,x-y\rangle=\langle x-y,x-z\rangle$. Тогда

$$\|x-y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle=\langle x-y,x-z\rangle\leqslant\|x-y\|\cdot\|x-z\|.$$

Можно сократить, получим $\forall\ z\in L\quad\|x-y\|\leqslant\|x-z\|$. ■

Теорема 1.1. *Пусть $L=\operatorname{sp}\{x_1,\dots,x_n\}$, где $x_1,\dots,x_n\in E$ линейно независимы. Пусть также $x\in E\setminus L$. Утверждается, что расстояние выражается через определители*

$$\rho(x,L)=\sqrt{\frac{D(x_1,\dots,x_n,x)}{D(x_1,\dots,x_n)}},\quad D(x_1,\dots,x_n)=\det\begin{pmatrix}\langle x_1,x_1\rangle&\dots&\langle x_n,x_1\rangle&&&\\ \vdots&\ddots&\vdots\langle x_1,x_n\rangle&\dots&\langle x_n,x_n\rangle\end{pmatrix}$$

Этот определитель, составленный из скалярных произведений, называется определителем Грама.

Доказательство. В строго нормированном пространстве элемент наилучшего приближения единственный, то есть $\exists!\ y \in L\colon \rho(x, L) = \|x - y\| = d$. Запишем такой скалярный квадрат.

$$\langle x-y, x-y\rangle = \langle x-y, x\rangle = d^2; \quad \langle y, x\rangle = \langle x, x\rangle - d^2, \quad \rangle y, x_k\rangle\langle x, x_k\rangle.$$

Отсюда если мы запишем y в виде линейной комбинации $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in L$, $l_k \in \mathbb{F}$, $k = 1, \ldots, n$, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1\langle x_1, x_1\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n, x_1\rangle = \langle x, x_1\rangle; \\ \lambda_1\langle x_1, x_n\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n, x_n\rangle = \langle x, x_n\rangle; \\ \lambda_1\langle x_1, x\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n, x\rangle = \langle x, x\rangle; \end{cases}$$

Так как элемент единственный, система имеет единственное решение, значит, ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы. Определитель расширенной матрицы будет равен нулю. Последний столбец можно представить в виде суммы двух столбцов. Таким образом,

$$D(x_1, \ldots, x_n) - d^2 D(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Чтобы доказать, что второе слагаемое не равно нулю, нужно применить метод индукции. При $n = 1$ верно. Дальше по индуции доказывам, что определитель Грама не равен нулю, когда элементы линейно независимы. Хотя вы можете это помнить из линейной алгебры. ■

1.1 Гильбертовы пространства

Определение 1.3. *Полное евклидово пространство H называется гильбертовым пространством.*

Пример: $\mathcal{L}_2(E, \mu)$ является гильбертовым пространством. Можем ввести скалярное произведение по формуле

$$\forall\ f, g \in \mathcal{L}_2(E, \mu) \quad \langle f, g\rangle := \int\limits_E f\overline{g}\, d\mu, \quad \|f\|_{\mathcal{L}_2} = \left(\int\limits_E |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Другой пример. Частный случай $\mathcal{L}_2$, а именно l_2. Оно тоже является гильбертовым и часто его используют для примеров. Напомню, что это последовательности элементов поля $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_n \in \mathbb{F}$, для который $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Скалярное произведение определяется как

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n, \quad \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Это частный случай $\mathcal{L}_2$, а именно когда $E = \mathbb{N}$, а мера $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \mu(\{n\}) = 1$, которую можно продолжить.

Теорема 1.2 (о наилучшем приближении)**.** *Пусть H — гильбертово пространство, $L \subset H$ — замкнутое подпространство. Тогда*

$$\forall\ x \in H \quad \exists!\ y \in L\colon \rho(x, L) = \|x - y\|.$$

Доказательство. Главное доказать существование, единственность очевидна. Пусть $d = \rho(x, y) = \|x - y\|$. Тогда

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \exists\ y_n \in L\colon \|x - y_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2}.$$

Теперь применяем неравенство Беппо—Леви.

$$\forall\ n, m \in \mathbb{N} \quad \|y_n - y_m\| \leqslant \sqrt{\|x - y_n\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x - y_m\|^2 - d^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Пусть $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Коши в H. Тогда $\exists\ y = \lim\limits_{n\to\infty} \in L$ и

$$\|x - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| \leqslant d.$$

Это неравенство получено из предыдущего и лемме о переходе к пределу в неравенствах из курса мат анализа. Ну а меньше быть не может, значит, равевняется. ■

Теорема 1.3 (об ортогональном ражложении)**.** *Пусть H — гильбертово пространство, $L \subset H$ — замкнутое подпространство. Тогда*

$$L^{\perp} := \{x \in H \,|\, \forall\ y \in L \quad \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Тогда $H = L \oplus L^{\perp}$.

Мы здесь ещё утверждаем, что прямое произведение топологий совпадает с топологией на H, это мы доказывать не будем, хотя это совсем просто.

Доказательство. По теореме о наилучшем приближении

$$\forall\ x \in H \quad \exists!\ y \in L\colon \rho(x, L) = \|x - y\|.$$

Определим ортогональную проекцию $P(x) = y \in L$, $P\colon H \to L$. Мы можем ещё рассмотреть элемент $z = x - y \perp L$ по доказанной лемме. Поэтому $z \in L^\perp$. Следовательно, $x = y + z$, где $y \in L$, а $z \in L^\perp$.

Осталось доказать, что подпространства не пересекаются. Для этого нужно доказать единственность разложения. Пусть у нас есть два разложения $x = y_1 + z + 1 = y_2 + z_2$, Тогда $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in L \cap L^\perp$. Значит, эти элементы-разности ортогональны самим себе, то есть равны нулю. Таким образом, $L \cap L^\perp = \{0\}$. ■

Следствие 1.1. *Пусть H — гильбертово пространство, $L \subset H$ — линейное подпространство. Тогда L всюду плотно в H, если и только если $L^\perp = 0$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Если L всюду плотно в H, то по определению $\overline{L} = H$. Значит, всякий элемент из H является пределом последовательности элементов из L, то есть

$$\forall\ x \in H \quad \exists\ x_n \in L\colon x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x.$$

Тогда в силу непрерывности скалярного произведения

$$\forall\ y \in L^\perp \quad \langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, \underbrace{y}_{\neq 0}\rangle = 0.$$

Поэтому отсюда вытекает, что $L^\perp \subset H^\perp$, ну а $H^\perp = \{0\}$. И необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $L^\perp = \{0\}$. Ну а $(\overline{L})^\perp \subset L^\perp = 0 \Rightarrow (\overline{L})^\perp = 0$. Значит, $H = \overline{L} \oplus (\overline{L})^\perp = \overline{L}$. ■

В необходимости достаточно евклидовости пространства, а в достаточности существенна полнота гильбертова пространства. Пример на случай, когда для евклидова пространства эта достаточность не верна. Рассмотрим $C[0,1] \subset \mathcal{L}_2[0,1]$ (здесь, конечно, берётся мера Лебега на отрезке $[0,1]$). $E = C[0,1]$ евлидово, если рассматривать скалярное произведение и норму из $\mathcal{L}_2$. Теперь рассмотрим множество многочленов

$$M = \left\{ P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \,\middle|\, P \perp \chi_{[0,1/2]} \right\}.$$

Ясно, что $M \subset C[0,1]$. И его ортогональное дополнение $M \subset C[0,1]$ и $M^\perp = 0$ в $C[0,1]$, так как в $\mathcal{L}_2$ ортогональным дополнением будет прямая, натянутая на $\chi_{[0,1/2]}$. M не является всюду плотным в $C[0,1]$, если бы являлось, то и в $\mathcal{L}_2$ тоже, а это не верно.