

1 Лекция Веденеева

Маргарита Эрнестовна попросила заменить жидкости. Речь пойдёт о модели идеальной жидкости.

Известно, что реальные жидкости обладают вязкостью, но уравнения Навье—Стокса очень сложны. В реальности вязкие свойства проявляются очень слабо, вязкости очень часто не имеют значения. Поэтому модель идеальной жидкости — это некое приближение, но оно простое.

Часто движение жидкости является потенциальным, то есть $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$.

Какие здесь уравнения. Вы уже знаете: уравнение неразрывности и уравнение Эйлера

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{F}. \end{cases} \quad (1)$$

Есть линии тока, есть траектории. Траектория от времени не зависит. Если течение установившееся, то траектории и линии тока совпадают.

Течение баротропно, если плотность есть однозначная функция давления. Например, изотермическое движение совершенного газа $p = \rho RT$, $T = T_0$. Другой пример — это несжимаемая жидкость. Движение так же баротропно.

Приведём уравнения движения к специальной форме, которая называется формой Громека—Лэмба

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \quad (2)$$

Нужно посчитать такой определитель

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & v_1 & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & v_2 & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & v_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3$$

Теперь считаем векторное произведение

$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \omega_1 & v_1 & \mathbf{e}_1 \\ \omega_2 & v_2 & \mathbf{e}_2 \\ \omega_3 & v_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = (\omega_2 v_3 - \omega_3 v_2) \mathbf{e}_1 + \dots$$

Получаем уравнение (2) в форме

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x} v_3 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) v_3 - \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) v_2 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y} v_2 + \frac{\partial v_1}{\partial z} v_3$$

Докажем, что уравнение (2) имеют первый интеграл.

Будем выводить интеграл Бернулли. Будем считать, что

- (1) Жидкость идеальна;
- (2) Движение установившееся $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$.
- (3) Массовые силы потенциальны $\mathbf{F} = \operatorname{grad} W$.

Проктируем градиент на касательное направление

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial l} - \frac{\partial w}{\partial l} = 0.$$

Давление p : $\operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$.

Вдоль линии тока у нас давление и плотность являются функциями линии тока $p = p(l) \Leftrightarrow l = l(p)$, $\rho = \rho(l) \Leftrightarrow l = l(\rho)$. На линии тока всегда можно посчитать интеграл $p = \int \frac{dp}{\rho(p)}$. Делаем замену.

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + p - W \right) = 0.$$

Это соотношение можно проинтегрировать вдоль линии тока

$$\frac{v^2}{2} + p - W = C(L).$$

Константа зависит, вообще говоря, от линии тока.

Если летит самолёт, то все линии тока обтекают это тело и уходят в бесконечность, где если поток однородный, то все константы одинаковы (на бесконечности).

Пусть есть несжимаемая жидкость в поле силы тяжести. В этом случае $p = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int dp = \frac{p}{\rho}$. В случае силы тяжести $F_x = F_y = 0$, $F_z = -g$. Очевидно, что потенциал этого дела $W = -gz$.

Хочется сделать замечание. Разные частицы могут иметь разную плотность. Но на одной линии тока плотности одинаковы. Таким образом, интеграл Бернулли верен и для неоднородного потока.

Интеграл Бернулли очень важен во многих физических приложениях. Что он означает: в тех точках, где скорость больше, давление меньше. Это позволяет сделать общий вывод о характере течения.

1.1 Различные приложения интеграла Бернулли

Начнём с понятия кавитации.

Давление не может падать бесконечно. Есть граница, после которой жидкость перестанет быть жидкостью, то есть $p > P_{\text{к.п.}}$. Мы знаем, что при $T = 100^\circ\text{C}$ давление насыщенных паров одна атмосфера 10^5 Па. Для $T = 20^\circ\text{C}$ давление насыщенных паров $p_{\text{н.п.}} = 0,023 \text{ см} = 23 \cdot 10^2$ Па. Явление вскипания жидкости при определённом давлении называется кавитацией.

Течение сначала сужается, затем расширяется. Будем считать, что труба практически горизонтальна и потенциал почти не меняется. Индекс 0 будет в широком начале трубы, без индекса в узкой части.

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}.$$

Воспользуемся законом сохранения массы $vS = v_0S_0$. Поставим отсюда v в интеграл Бернулли

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = v_0^2 \left(\frac{S_0^2}{S} \right)^2 + \frac{p}{\rho}.$$

Теперь отсюда выразим p .

$$p = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \left(1 - \left(\frac{S_0}{S} \right)^2 \right).$$

Видим, что если S достаточно маленькая, то давление снизится насколько, что возникнет явление кавитации. Появятся пузырьки будут двигаться дальше, а дальше давление будет повышаться. Будет происходить схлопывание пузырька, что эквивалентно маленькому ядерному взрыву. Если смотреть схлопывание около стенок, то пузыри вырывают куски материала стенки. Это называется кавитационной эрозией. Это есть негативная сторона явления кавитации.

Ещё один пример. Будем считать, что на бесконечности поток однородный. Рассмотрим линию тока, которая исходит из точки A , врезается в тело в точке B обтекает его через точку C , отходит от тела в точке D и утекает в точку E . Имеем $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C$ для каждой точки.

$$\frac{v_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{v_C^2}{2} + \frac{p_C}{\rho}.$$

Часто если движение безразрывно (не отрывается от поверхности тела), то $v_C = 2v_\infty$ — это некий факт, который в лекциях будем докажем.

Если снова выражать, $p_c = p_\infty + \frac{\rho}{2} (v_\infty^2 - v_c^2) = p_\infty - \frac{3}{2} \rho v_\infty^2$.

Представьте, что мы берём цилиндр и начинаем его двигать в воде. Увеличивая скорость, уменьшаем давление. Будут снова образовываться пузырьки и возникнет кавитационная эрозия. Это большая проблема для двигателей судов. Чем быстрее крутится винт, тем меньше давление. В начале двадцатого века это не представляло никаких проблем. Потом выяснилось. Поставили новый винт на пассажирский корабль, полчаса проплыл и остановился. Водолазы посмотрели, а винта уже нет.

Есть и положительная сторона кавитации. Если пузырьков очень много и находятся они в локальной какой-то области, они превращаются в один большой паровой пузырь. Если он не схлопывается, то не представляет опасности для тела. Это называется развитая кавитация: из-за развитых пузырей снижается трение. Иногда специально делают воздушный пузырь, такой называется каверной, если используется специально для снижения трения. Где-то вдали каверна схлопывается, но это уже нас не волнует.

Другой пример: торпеда Шквал. На носу стоит кавитатор, подаётся воздух. Сопротивление снижается до минимальных значений, что позволяет развить скорость 300–400 км/ч.

Ещё пример: липосакция. Если кто-то страдает ожирением, можно удалить жир с помощью ультразвуковой кавитацией. Звуковые волны — это колебания давления. Где давление сильно отрицательное, появляется вскипание воды, образуются пузыри, затем пузыри схлопываются и разрушают жир.

1.2 Трубка Пито—Прандтля

Две трубки с продолжением вверх. Одна тонкая с отверстием B , другая шире с отверстием A .

$$\frac{p_A}{\rho} = \frac{p_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2}, \quad v_B = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}}.$$

Если трубочка достаточно тонкая в B , то $v_B \sim v_\infty$. А разницу давлений мерим в вертикальной части трубок $P_A - P_B = g\Delta h\rho$. Можно просто глазом.

2 16 октября 2014

- (1) Установившееся адиабатическое движение совершенного газа;
- (2) Интеграл Бернулли для адиабатического движения совершенного газа;
- (3) Параметры торможения. Максимальная скорость;
- (4) Число Маха. Другие формы интеграла Бернулли;
- (5) Примеры расчётов с помощью интеграла Бернулли.

Вчера прилетела из Таджикистана. Там было очень хорошо, но схватила грипп или что ещё. Попробуем с набранном тексте, а то я возможно не выстою писать у доски. Вообще на мех-мате считает плохим тоном

В прошлой лекции был интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости. А сегодня мы должны рассмотреть интеграл Бернулли для адиабатического движения совершенного газа. Если автомобиль едет со скоростью 250 км/ч, то можно считать, что он обтекается несжимаемой жидкостью.

2.1 Установившееся адиабатическое движение совершенного газа

Итак что же такое совершенный газ. Он удовлетворяет двум соотношениям.

$$p = R\rho T; \quad u = c_V T + \text{const}. \quad (3)$$

Теперь что такое адиабатическое движение: это движение, в котором отсутствуют притоки тепла к частицам, то есть $dq = 0$ для каждой частицы, нет обмена телом даже между частицами.

Для адиабатического движения идеального совершенного газа из уравнения притока тепла можно вывести связь «адиабата Пуассона». Она имеет вид $p = A\rho^\gamma$, где A есть функция энтропии s , $\gamma = \frac{c_P}{c_V} > 1$. В данном случае в каждой частице $s = \frac{dq}{T} = 0$ и $A = \text{const}$. Тем не менее в разных частицах A может быть разной и в точке пространства не является постоянной по времени.

2.2 Интеграл Бернулли для адиабатического движения совершенного газа

Теперь нужно писать интеграл Бернулли. Это соотношение, которое выполняется для линии тока при установившемся движении. Если течение установившееся, то линии тока не меняются со временем, и частицы движутся именно по линиям тока, хоть и сложным образом (ускоряются, замедляются), но скорости все направлены по касательной.

У нас есть постоянная в каждой частице величина энтропия. Так вот эта энтропия будет постоянна вдоль линии тока, так как частицы движутся вдоль линии тока. На другой линии тока энтропия может быть и другая. Поэтому замечательно то, что хоть давление зависит от плотности и энтропии, но вдоль линии тока только от плотности.

Выведем интеграл Бернулли для адиабатического движения совершенного газа при отсутствии массовых сил. Общий вид:

$$\frac{v^2}{2} + P = C(L), \quad P = \int_L \frac{1}{\rho} dp, \quad (4)$$

$C(L)$ — константа вдоль линии тока. Это соотношение выводится из уравнения Эйлера, лишь бы движение было установившееся, жидкость идеальная, то есть нет трения, массовые силы потенциальны.

Если бы была несжимаемая жидкость, всё было бы проще. А теперь нам нужно интегрировать, так как $\rho = \frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{A^{\frac{1}{\gamma}}}$. Тогда

$$P = \int_L A^{\frac{1}{\gamma}} p^{-\frac{1}{\gamma}} dp = \frac{\gamma}{\gamma - 1} A^{\frac{1}{\gamma}} p^{1 - \frac{1}{\gamma}}.$$

И тогда интеграл Бернулли записывается в данном случае так:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} A^{\frac{1}{\gamma}} p^{1-\frac{1}{\gamma}} = C(L).$$

Можно получить и другие выражения для функции P с помощью адиабаты Пуассона и уравнения состояния. Имеем

$$P = \frac{\gamma}{\gamma-1} A^{\frac{1}{\gamma}} p^{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} A \rho^{\gamma-1} = c_P T = \frac{a^2}{\gamma-1}.$$

Здесь $a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma R T$ — это производная $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{s=\text{const}}$, оказывается (но мы этого пока не знаем) скоростью звука в газе. Формулу для распространения звука мы ещё только будем изучать.

Также мы использовали, что $p = R \rho T$, $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$, $R = c_P - c_V$, то есть $\gamma R = c_P(\gamma-1)$. Поэтому $\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} T = c_P T$.

Вторая форма интеграла Бернулли: $\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = C(L)$.

Третья форма: $\frac{v^2}{2} + c_P T = C(L)$.

Четвёртая $\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} A \rho^{\gamma-1} = C(L)$.

Пятая форма: $\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = C(L)$.

Из первой формы видно, что чем больше скорость, меньше давление

Чем больше скорость, тем меньше температура, видно из третьей формы.

Четвёртая форма показывает, что плотность уменьшается при разгоне.

Пятая показывает, что скоростью звука уменьшается при разгоне.

2.3 Параметры торможения. Максимальная скорость

Параметры торможения — это значения p_* , ρ_* , T_* , a_* величин p , ρ , T , a в той точке линии тока, где $v = 0$. Она называется давлением торможения, плотностью торможения, температурой торможения, скоростью звука торможения. При установившемся движении это максимальные значения на линии тока. Они вводятся, как величины параметров, которые получились бы, если поток адиабатически затормозить до нулевой скорости — это такое более общее определение (ведь может не быть точек с нулевой скоростью).

Теперь мы ещё введём понятие максимальной скорости. Из интеграла Бернулли видно, что при уменьшении температуры, скорость увеличивается на линии тока. Самое большое значение скорости на данной линии тока получилось бы, если бы давление обратилось бы в нуль. Если из сопла вытекание жидкости в вакуум, то скорость будет максимальной. То есть какие бы вы двигатели не ставили, больше чем v_{\max} для данного C скорость вы не получите.

Константу C интеграла Бернулли можно выразить через параметры торможения и через максимальную скорость

$$c(L) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_*} = c_P T_* = \frac{\gamma}{\gamma-1} A^{\frac{1}{\gamma}} p_*^{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{a_*^2}{\gamma-1} = \frac{v_{\max}^2}{2}. \quad (5)$$

Эти формулы дают и связи между параметрами торможения и максимальной скоростью.

Запишем ещё формы интеграла Бернулли, где $C(L)$ мне надоело писать: $\frac{v^2}{2} + c_P T = c_P T_*$ или $\frac{v^2}{2} + c_P T = \frac{v_{\max}^2}{2}$. Ну и разные другие формы.

2.4 Число Маха

Число Маха M — это соотношения величины скорости потока к скорости звука в рассматриваемом потоке. Очень важное число для установившегося движения. Если $M > 1$, течение сверхзвуковое, < 1 — дозвуковое. Как выразить интеграл Бернулли через число Маха.

Какое здесь есть рассуждения. Разделим все члены соотношения $\frac{v^2}{2} + P = C(L)$ на P .

$$\frac{v^2}{2P} + 1 = \frac{C(L)}{P}.$$

Для P и C можно использовать разные эквивалентные выражения. Мы будем в левой части P выражать через число Маха, справа через давление, а C через давление торможения. Левый член получится $\frac{\gamma-1}{M^2}$. Получим в итоге

$$1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 = \left(\frac{p_*}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}; \quad \frac{P_*}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Аналогично можно получить и следующие формы интеграла Бернулли

$$\frac{\rho_*}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \frac{T_*}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2; \quad \frac{a_*}{a} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.5 Примеры расчётов

Пусть температура набегающего потока $T = 288 \text{ К}$, $v = 300 \text{ м/с}$. Нам нужно ещё знать теплоёмкость при постоянном давлении для воздуха $c_P \cong 10^3 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \text{К}}$. Скорость в точке C равна нулю, поэтому $T_C = T_*$. Из интеграла в Бернулли $\frac{v^2}{2} + c_P T = c_P T_*$. Тогда $T_* = 333 \text{ К}$. При скорости $v = 200 \text{ км/ч}$, это ещё ничего. Тогда $T_C = T_* = T + 1,8 \text{ К} = 289,8 \text{ К}$. А при скорости набегающего потока $v = 2000 \text{ м/с}$ $T = 2288 \text{ К}$. При таких температурах тело уже может начать гореть.

Есть такое замечание. Если сверхзвуковое течения, то оно такое как на рисунке. Образуется ударная волна, давление меняется скачком. Тут интеграл Бернулли годятся только перед ударной волны и после ударной волны, ведь мы его выводили из дифференциальных уравнений. Но оказывается, что если внимательно посмотреть на условия на границе разрыва, то константа интеграла Бернулли сохранится на линии тока, проходящей через границу разрыва.

Пусть газ вытекает через сопло из большого резервуара. Пусть дело происходит летом, то есть $T_* = 300 \text{ К}$, а $c_P = 1000 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \text{К}}$. Тогда $v_{\max} = \sqrt{2c_P T_*} = 770 \text{ м/с}$ — такая вот непреодолимая в установившемся течении скорость. Теперь при $v = 770 \text{ м/с}$ получим из интеграла Бернулли $T = 55 \text{ К}$. Раствор из этого резервуара вытекает, покрывая металлическую пластинку, помещённую вдоль оси такой струи. Это я своими глазами всё видала.

Поговорим немного про насадки. Вот имеется у меня трубка тока. Имеется какой-то контур замкнутый, через него проходят какие-то линии тока, мы следим за ними. Следим за площадью сечения и скоростью. Как они между собой связаны при установившемся движении. Пишем закон сохранения массы (или закон сохранения расхода это называется) $\rho v \Sigma = \text{const}$. Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, значит $v \Sigma = \text{const}$ и $\frac{dv}{v} = -\frac{d\Sigma}{\Sigma}$. А если сжимаемая жидкость и установившееся движение. Тогда $v dv + \frac{1}{\rho} dp = 0$. Можно ввести сюда скорость звука $v dv + \frac{a^2}{\rho} d\rho = 0$, откуда видно, что $d\rho = -\frac{\rho v}{a^2} dv$. Результат получается такой: если течение сверхзвуковое, то поток будет разгоняться только при увеличении площади сечения. Если сопло сужается, то никогда нельзя получить сверхзвуковое течение.

3 23 октября 2014

1. О форме трубок тока при установившемся движении несжимаемой и сжимаемой жидкости. Понятие о сопле Лавала.
2. Оценка влияния сжимаемости при установившемся движении газа.
3. Потенциальные движения. Интеграл Коши—Лагранжа.
4. Циркуляция скорости и формула Стокса.
5. Теорема Томсона о циркуляции скорости.

На самом деле теорема Томсона хоть и знаменита, она лишь частный случай теоремы Лагранжа, которую мы скорее всего не успеем.

3.1 О форме трубок тока при установившемся движении несжимаемой и сжимаемой жидкости. Понятие о сопле Лавала

Рассмотрим трубку тока. Что это такое? Рассматривается установившееся движение. Что такое установившееся движение: в каждой точке области, занятой средой, со временем ничего не меняется. Всегда можно ввести понятие линий тока. Возьмём малый контур, через каждую его точку проведём линию тока, получим трубку.

Можно считать, что трубка составлена из линий тока, а можно считать ограниченной жёсткими стенками.

Считаем, что скорости в каждом сечении во всех точках сечения одинаковы и направлены по нормали к сечению. Но в разных сечениях, конечно, разные. Тогда рассмотрим, что будет, если сечение трубки увеличивается, уменьшается? Как ведёт себя среда при установившемся движении, если трубки расширяются и сужаются. В основном будем пользоваться законом сохранения масс. Мы пишем такое соотношение, если плотность в сечении $\Sigma(x)$ (x вдоль трубки) обозначим ρ , скорость v

$$\rho v \Sigma = \text{const}.$$

$\rho v \Sigma$ называют расходом. Расход константа для трубки тока. А если дополнительно сделать предположения, получим больше.

- (1) Жидкость несжимаема, то есть $\rho = \text{const}$, тогда и $v\Sigma = \text{const}$. Формально это обозначает, что $\ln v + \ln \Sigma = \text{const}$, можно продифференцировать:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{d\Sigma}{\Sigma}.$$

В сужающейся трубке скорость увеличивается, с расширяющейся уменьшается, если жидкость несжимаемая. Здесь мы даже не пользовались интегралом Бернулли: $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{const}$, но он даёт те же выводы.

- (2) Сжимаемая жидкость. ρ изменяется, но $\rho v\Sigma = \text{const}$ и

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{d\Sigma}{\Sigma} = 0.$$

Введём дополнительные предположения.

- (а) Жидкость идеальная;
- (б) Массовые силы отсутствуют;
- (с) Теплообмен отсутствует ($dq = 0$).

Тогда $p = p(\rho)$ и $\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} = \text{const}$, где $\mathcal{P} = \int \frac{1}{\rho} dp$. Следовательно,

$$u dv + \frac{1}{\rho} dp = 0; \quad v dv + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{\rho} d\rho = 0.$$

Введём обозначение $\left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{s=\text{const}} = a^2$ — это, как мы позже узнаем, скорость звука в среде. Тогда

$$v dv = -\frac{a^2}{\rho} d\rho.$$

Я вынесу $\frac{dv}{v}$

$$\frac{dv}{v} \left(1 - \frac{v^2}{a^2} \right) = -\frac{d\Sigma}{\Sigma}.$$

Обозначают $M = \frac{v}{a}$ число Маха. Тогда

$$\frac{dv}{v} (1 - M^2) = -\frac{d\Sigma}{\Sigma}.$$

Если $M < 1$, то поток называется дозвуковым. Он ведёт себя качественно как несжимаемая жидкость: в сужающейся трубке увеличение скорости, а расширяющейся трубке получается уменьшение скорости.

А вот если потом сверхзвуковой, то всё наоборот: в сужающейся трубке потом замедляется, а чтобы его разогнать, нужна расширяющаяся трубка. Для чего нам нужно, чтобы на выходе была большая скорость. Эти трубки, эти насадки часто называются соплом. Для ракетных двигателей, например. Чему равняется поток количества движения через сечение трубки? $\rho v^2 \Sigma$ и чтобы увеличить тягу, нужна большая скорость.

Так как скорость увеличить? Газ течёт за счёт разности давлений. Если давление уменьшаем, скорость увеличиваем. Но если газ движется из баллона, где скорость ноль, то при сужающемся сопле не будет никогда достигнута сверхзвуковая скорость. А если сопло будет расширяться после какого-то момента, то может быть достигнута максимальная скорость. Такое сопло (которое сначала сужается, потом расширяется) называется соплом Лаваля.

До Лаваля паровые турбины были неэффективны. Лаваль сделал их эффективными. Насадки в паровых турбин маленькие, на истребителе уже большие.

3.2 Оценка влияния сжимаемости при установившемся движении газа

Оказывается, что при малых скоростях и установившемся движении можно пренебречь сжимаемостью. Какую мы при этом можем сделать ошибку?

Пусть

1. жидкость идеальная;
2. движение установившееся;
3. массовые силы не учитываются.

Тогда для несжимаемой жидкости сначала можно написать интеграл Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \frac{p_*}{\rho},$$

где P_* — давление торможения (сейчас обычно обозначают ρ_0 , но раз на прошлой лекции было со звёздочкой, пусть будет со звёздочкой). $v = 0$, $p = p_*$, $\rho = \text{const} = \rho_*$, тогда

$$p = p_* - \frac{\rho v^2}{2} = P_* - \frac{\rho_* v^2}{2}.$$

Теперь я хочу применить это уравнения для газа.

Добавочные предположения

1. газ совершенный;
2. движение адиабатическое.

Тогда интеграл Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} A^{\frac{1}{\gamma}} p^{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{a_*^2}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} A^{\frac{1}{\gamma}} P_*^{1-\frac{1}{\gamma}}.$$

Я это перепису

$$\frac{\gamma-1}{2} \frac{v^2}{a_*^2} + \left(\frac{p}{p_*} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1.$$

Далее $\frac{p}{p_*} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{v^2}{a_*^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. Разложу по биному Ньютона, считая, что $\frac{v^2}{a_*^2}$ мал

$$p = p_* \left[1 - \frac{\gamma}{2} \frac{v^2}{a_*^2} + \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - 1 \right)}{2!} \frac{(\gamma-1)^2 v^4}{4 a_*^4} + \dots \right] = p_* \left[1 - \frac{\gamma}{2} \frac{v^2}{a_*^2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{v^2}{a_*^2} + \dots \right) \right].$$

А что такое $a_*^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_* = \gamma \frac{p_*}{\rho_*}$ в адиабатическом процессе в совершенном газе.

$$p = p_* - \frac{\rho_* v^2}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{v^2}{a_*^2} + \dots \right).$$

Если я буду пользоваться относительной погрешностью, рассмотрим величину: отношение перепада давления к величине напора

$$\left| \frac{p - p_*}{\frac{\rho v^2}{2}} \right| = 1 - \frac{1}{4} \frac{v^2}{a_*^2} + \dots$$

А в несжимаемой жидкости эта величина была равна единице. Значит, если мы хотим, чтобы относительная погрешность была порядка процента, то нужно

$$\frac{1}{4} \frac{v^2}{a_*^2} \leq 0,01 \quad \frac{v}{a_*} \leq \frac{1}{5}.$$

Какие это числа? В нормальных условиях $a_* = 340 \text{ м/с}$, то $v < 68 \text{ м/с} \approx 245 \text{ км/ч}$. Эту оценку мы слепали для того, чтобы вы не думали, что несжимаемая жидкость — это что-то несуществующее.

Но это всё для установившегося движения. Для неустановившегося нужно делать ещё оценки.

3.3 Потенциальные движения. Интеграл Коши—Лагранжа

Рассмотрим потенциальное движение, то есть существует такая функция φ , что скорость \mathbf{v} есть градиент $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$, $v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$.

Если течение потенциально $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$, то течение безвихревое $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} = 0$. И обратное верно: $\boldsymbol{\omega} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \text{grad } \varphi$. В этом случае есть ещё один интеграл, который и называется интегралом Коши—Лагранжа.

Пусть выполнены следующие условия:

1. жидкость идеальна (то есть верны уравнения Эйлера);
2. движение потенциально, то есть $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$;
3. движение баротропное, то есть $\rho = \rho(p)$ или $\rho = \text{const}$;

4. массовые силы имеют потенциал, то есть $\mathbf{F} = \text{grad } W$.

Тогда из уравнений Эйлера выводится следующее соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} - W = f(t), \quad (6)$$

где $\mathcal{P} = \int \frac{1}{\rho} dp$ называется функцией давления, а $f(t)$ — произвольная функция времени, то есть не зависит от координат. Соотношение (6) и называется интегралом Коши—Лагранжа. Вывел это соотношение тоже Эйлер, но Коши и Лагранж их использовали очень широко.

Как этот интеграл выводится? Берём уравнение Эйлера в форме Громеки—Лэмба (Lamb)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \text{grad } \frac{v^2}{2} + 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

А так как $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$, то $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Пояснение

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}.$$

Далее так как $\rho = \rho(p)$, то $\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } \mathcal{P}$. ($\mathcal{P} = \mathcal{P}(p)$ и $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = \frac{d\mathcal{P}}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$.)

Тогда уравнение Эйлера переписывается в виде

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - W + \mathcal{P} \right) = 0.$$

А раз градиент равняется нулю, то выражение в скобках не зависит от x, y, z , но может зависеть от времени.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - W + \mathcal{P} = f(t).$$

Чтобы найти $f(t)$, нужно знать левую часть выражения ровно в одной точке потока. Этот интеграл уже не на линии тока, а на всём потоке выполняется.

Но есть одно замечание. Оно очень серьёзно, ведь этот интеграл мы будем использовать постоянно. Замечание такое: можно всегда переопределить потенциал φ так, чтобы в интеграле Коши—Лагранжа справа стояла любая константа и, в частности, ноль. Как это сделать?

$$\varphi_1 = \varphi - \int f(t) dt + C_1.$$

Скорость для этого потенциала будет та же самая, что и для φ .

Мне сегодня четвёртый курс сдавал практикум. Там студенты сказали, что интеграл Бернулли выводится из интеграла Коши—Лагранжа. Это нехорошо.

3.3.1 Различия между интегралом Бернулли и интегралом Коши—Лагранжа

	Движение уст.	Движение потенц.	Баротропия	Выполняется где
интеграл Бернулли	обязательно	не обязательно	не обязательно	вдоль линии тока
интеграл Коши—Лагранжа	не обязательно	обязательно	обязательно	всюду в потоке

Если движение установившееся и потенциальное, и баротропное, то интеграл Коши—Лагранжа по форме совпадает с интегралом Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} - W = \text{const}.$$

4 30 октября 2014

Сегодня будет основная теорема о вихрях. Но у нас есть пункты, которые остались с прошлой лекции.

1. Циркуляция скорости и формула Стокса.
2. Теорема Томсона о циркуляции скорости.
3. Теорема Лагранжа о сохранении свойства потенциальности движения.
4. Причины возникновения вихрей.

5. Граничные условия в задачах о движении идеальной жидкости.
6. Постановки задач о потенциальном движении несжимаемой идеальной жидкости. Уравнения Лапласа для потенциала скорости и граничные условия.

В прошлый раз мы вводили интеграл Коши—Лагранжа в случае, когда движение потенциальное. Этот интеграл в отличие от интеграла Бернули только для потенциальных движений. Остаётся вопрос, а когда же движение будет потенциальным.

Я напомним, что движение потенциально, если $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$. Это, конечно же, бывает далеко не всегда. Всё же это бывает довольно часто. Первая половина лекции посвящена этому вопросу.

4.1 Циркуляция скорости и формула Стокса

Прежде чем упоминать теоремы, надо упомянуть формулу Стокса. У неё есть хороший механический вывод.

Основное понятие здесь — это циркуляция скорости по замкнутому контуру C . Это вот такой интеграл. Поскольку контур в среде, могу в каждой точке нарисовать вектор скорости. Радиус-вектор точки контура будет \mathbf{r} , $d\mathbf{r}$ — вектор, который соединяет концы маленького отрезка контура. Нам нужно интегрировать скалярное произведение, которое можно записать по-разному. Например, через \cos , или как сумму произведений компонент.

$$\oint_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = \oint_C (v_x dx + v_y dy + v_z dz) \equiv \Gamma_C.$$

Почему циркуляция? Если жидкость движется по контуру замкнутому, то циркуляция будет не нулевая, ясное дело. Но вообще не обязательно, чтобы что-нибудь циркулировало. Потом идёт только в одном направлении. Тогда $\Gamma_C =$ чему? Будет ли она равна $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{BC}$? Вот нет, она не будет, потому что циркуляция всегда определяется так, чтобы обход контура был против часовой стрелки. Скорее всего здесь будет минус $-\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{BC}$.

Формула Стокса заключается в следующем.

$$\oint_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = 2 \int_{\Sigma} \omega_n d\sigma,$$

где $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$ — вектор вихря, а ω_n — это проекция вихря на нормаль к поверхности σ , причём нормаль эта должна быть направлена так, чтобы обход этого контура C шёл против часовой стрелки.

Интеграл $\int_{\Sigma} \omega_n d\sigma$ называется потоком вектора вихря через поверхность σ . Если бы под интегралом была скорость, это был бы просто поток вещества.

Такая формула верна, если существует такая поверхность Σ , надетая на контур C , в каждой точке которой \mathbf{v} и $\text{rot } \mathbf{v}$ существуют. В каком-то смысле вращательное движение присутствует при ненулевой циркуляции. Оно может быть спрятано деформациями.

Ещё одно замечание. Когда это бывает, что не существует скорости или её производных в какой-то точке? Это бывает, когда изучают плоскопараллельное движение. Формула Стокса может быть неприменима в теории плоских задач. Что это такое? Когда рассматривается очень длинное тело. В гидромеханике это, например, крыло самолёта. В области не примыкающей к фюзеляжу или к концу крыла, я могу рассечь крыло вертикальной плоскости. В сечении крыло будет иметь вот такую форму. Можем считать, что всё во всех плоскостях происходит одинаковым.

Определение 4.1. Течение называется плоскопараллельным, если существует такая плоскость, что $\mathbf{v} \parallel$ этой плоскости и не зависит от расстояния до этой плоскости.

Если возьму другие плоскости, то будет всё то же самое. То есть $v_x = v_x(x, y, t)$, $v_y = v_y(x, y, t)$, $v_z = 0$ и другие параметры не зависят от z . Конечно, это упрощение. Но когда длинные объекты.

Тогда смотрите, что получается. Возьмём контур C , которое окружает профиль крыла, то формула Стокса неприменима, ведь скорость неопределена в точках профиля крыла. Возникает в безвихревом течении циркуляция. Она и даёт подъёмную силу.

4.2 Теорема Томсона о циркуляции скорости

Это тот самый Томсон, которому звание Лорда и дали имя Кельвин. Поэтому эта теорема встречается ещё как теорема Кельвина.

Теорема 4.1 (Теорема Томсона о циркуляции скорости). Пусть выполнены следующие условия:

1. Жидкость идеальная (верны уравнения Эйлера);
2. Массовые силы имеют потенциал $\mathbf{F} = \text{grad } W$;
3. Движение баротропное, то есть $\rho = \rho(p)$ или $\rho = \text{const}$;

4. Движение непрерывное¹, то есть нет поверхностей разрыва;

5. Контур C — так называемый «жидкий», то есть движется вместе с частицами жидкости;

Тогда циркуляция скорости по этому контуру C сохраняется по времени, то есть

$$\frac{d}{dt}\Gamma + C = 0.$$

Доказательство. Состоит из двух частей.

1. Сначала доказывается, что если C — жидкий контур, то $\frac{d}{dt} \oint_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = \oint_C \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \right)$, а $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$ — ускорение точек среды. Это обычно называется первой теоремой Кельвина.
2. Затем доказывается, что при условиях 1–3 $\oint_C (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}) = 0$.

Первая часть. Давайте попробуем доказать теорему. Нам надо продифференцировать

$$\frac{d}{dt} \oint_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) \text{ ---?}$$

Контур C подвижный, поэтому чтобы продифференцировать этот интеграл, переходим к лагранжевым координатам ξ^i . Так как лагранжевы координаты частиц (это их фамилия, имя, отчество) на контуре не меняются, мы можем написать

$$\frac{d}{dt} \oint_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = \underbrace{\oint_C \left(\frac{\partial \mathbf{v}(t, \boldsymbol{\xi})}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} \right)}_{No1} + \underbrace{\oint_C \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial d\mathbf{r}}{\partial t} \right)}_{No2}.$$

А теперь смотрим: $No1 = \oint_C (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r})$, а в $No2$ имеем

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} d\xi^i, \quad \frac{\partial d\mathbf{r}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} \right) d\xi^i = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) d\xi^i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^i} d\xi^i = d\mathbf{v}.$$

Таким образом $No2 = \oint_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = 0$. И первая часть доказана. Нужно только, чтобы ускорение существовало.

Доказательство второй части теоремы Томсона. Берём уравнение Эйлера

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

И всё, это уравнение движения идеальной жидкости. Теперь учитываем предположения 2–3: $\mathbf{F} = \text{grad } W$, а

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P} = \int \frac{1}{\rho} dp$. Таким образом, при условиях 1–3 теоремы Томсона уравнения Эйлера имеют вид

$$\mathbf{a} = \text{grad}(W - \mathcal{P}).$$

Теперь рассмотрим циркуляцию

$$\oint_C (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}) = \oint_C (\text{grad}(W - \mathcal{P}) \cdot d\mathbf{r}) = \oint_C \frac{\partial W - \mathcal{P}}{\partial x} dx + \frac{\partial W - \mathcal{P}}{\partial y} dy + \frac{\partial W - \mathcal{P}}{\partial z} dz = \oint_C d(W - \mathcal{P}) = 0.$$

И теорема доказана. ■

4.3 Теорема Лагранжа о сохранении свойства потенциальности движения

Теперь давайте обсудим условия теоремы Томсона.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия теоремы Томсона, то есть

1. Жидкость идеальная (верны уравнения Эйлера);

¹ В частности мы под этим понимаем, что везде производные существуют.

2. Массовые силы имеют потенциал $\mathbf{F} = \text{grad } W$;
3. Движение баротропное, то есть $\rho = \rho(p)$ или $\rho = \text{const}$;
4. Движение непрерывное¹, то есть нет поверхностей разрыва.

Тогда если в какой-то массе жидкости в какой-то момент времени t_0 движение потенциально (то есть нет вихрей, $\omega = 0$), то в этой массе жидкости движение было потенциальным раньше и будет потенциальным в дальнейшем, то есть выполнены условия 1–4, вихри не могут возникнуть.

Доказательство. Я хочу показать, что не может быть $\omega \neq 0$. От противного. Пусть в момент t в какой-то точке $\omega \neq 0$. Тогда, поскольку движение непрерывное, могу провести контур маленький в плоскости, перпендикулярной вектору ω . Можем применить формулу Стокса, получив, что поток вектора вихря отличен от нуля и циркуляция по контуру C отличен от нуля. То есть существует контур C , хотя бы маленький, такой, что $\Gamma_C \neq 0$.

Но это же та же самая жидкость. Значит, этот контур C возник из какого-то контура C_0 , он есть образ контура C_0 . Тогда по теореме Томсона $\Gamma_{C_0} = \Gamma_C \neq 0$. Но так как в момент времени t_0 по теореме Стокса $\Gamma_{C_0} = 0$, то и $\Gamma_C = 0$. Получили противоречие. Ну и всё доказательство. ■

Значит, вихри не могут возникнуть.

Но ведь на самом деле вихри возникают. Над Исландией такое вихревое течение в атмосфере или вообще где-нибудь смерчи возникают. Из-за чего вихри возникают в атмосфере и в океане? Надо посмотреть на наши доказательства. На самом деле что мы можем сказать про циркуляцию ускорения вообще? Всегда можем написать уравнения движения для жидкости в таком виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nabla_j \tau^{ij} \mathbf{e}_i$$

Ну и имеем

$$\oint_C (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}) = \oint_C (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) - \oint_C \frac{1}{\rho} (\text{grad } p \cdot d\mathbf{r}) + \oint_C (\nabla_j \tau^{ij} \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{r}).$$

Видим, что все предположения важны. Причинами вихрей могут быть

1. Массовые силы не потенциальны (первые интеграл не равен нулю);
2. Нет баротропии;
3. Действует вязкость.

Когда силы могут быть не потенциальны? Например, на Земле иногда существенна сила Кориолиса, которая не является потенциальной. На экваторе воздух сильно нагревается и поднимается, на полюсах опускается вниз. Возникает такое течение. И есть сила Кориолиса, которая действует перпендикулярно скорости. Возникают циклоны, антициклоны...

Баротропия. Также возникает в океанах и в атмосфере. В разных участках Земли температура разные. Возникают муссоны, бризы.

Действие вязкости. Если её предположить, то течение может лишь случайно оказаться потенциальным. Но это только случайно.

4.4 Граничные условия в задачах о движении идеальной жидкости

Какие бывают граничные условия в задачах движения идеальной жидкости? Границы бывают двух типов (в каком-то смысле даже трёх)²:

1. Твёрдые границы: положения которых заданы³;
2. Свободные границы: положения и движения границы заранее не известны, нужно их найти⁴.

Примёр твёрдой границы: дно озера. В озере что-то там плавает.

Или труба — это тоже твёрдые границы.

Условие на твёрдой границе в идеальной жидкости называется условием непроницаемости и формулируется так:

$$\mathbf{v}_n|_{\text{на тв.}} = \mathbf{v}_n|_{\text{гран.}}; \quad \mathbf{v}_n|_{\text{на пов.}} = \mathbf{v}_n|_{\text{тела}};$$

¹ В частности мы под этим понимаем, что везде производные существуют.

² Бывают границы выделенными мысленно.

³ Например, твёрдое тело, движущееся в жидкости.

⁴ Например, поверхность моря (волны).

Скорости на границе тела должно совпадать. Если скорость поверхности тела меньше скорости жидкости, жидкость оторвётся. Это на самом деле и условие непроницаемости, и безотрывности. Второе слово «безотрывность» почему-то никогда не произносится. Знаете, как движется жидкость? В одном месте тело жидкость выталкивает, с другой стороны, жидкость подтекает.

Если тело неподвижно, что граничное условие $v_n|_{\text{на пов. тела}} = 0$. Если вы изучаете обтекание автомобиля (поставили в аэродинамическую трубу), то граничное условие как раз такое.

Есть ещё свободные границы. Есть твёрдая и свободная граница одновременно. Например, обтекание тела с капилляционно полостью.

Свободная граница — бак с неполностью заполненный жидкостью и вы его везёте.

Ещё нефтяники говорят, что трубы, как правило, с не полным заполнением. Так может эта волна трубу заткнуть.

Все струи, например, струя реактивная.

Тут требуется больше больше граничных условий.

5 6 ноября 2014

Мы сегодня должны с вами лекцию 10 попробовать. Мы хотели заниматься граничными условиями. Мы их не разобрали, а они важны.

1. Граничные условия на свободной поверхности в идеальной жидкости.
2. Потенциальные течения несжимаемой идеальной жидкости. Уравнение Лапласа для потенциала скорости. Граничные условия.
3. Задачи о нахождении потенциала скорости при отсутствии свободных поверхностей в качестве границ. Свойство линейности этих задач (важно именно это подчеркнуть).
4. Примеры потенциальных течений несжимаемой жидкости.

5.1 Граничные условия на свободной поверхности в идеальной жидкости

Примеры твёрдых поверхностей: подводная лодка в воде, обтекание автомобиля, рыба-меч (скорость до 230 км/ч), примеры, касающиеся самолётов, аэродинамические трубы, обтекание зданий. Суть условий на твёрдой границы это жидкость не протекает через границу. Если жидкость протекает, поверхность называется пористой. Иногда специально отсасывают протекающую жидкость.

Второй тип поверхностей: форма и движение не заданы. Говорим мы про поверхности разрыва. Разрыв чего? Скорости, плотности и ещё может быть чего. Свободной границы — это границы, через которые среда не перетекает. Все колебания связаны с тем, что сама жидкость ходит. Нет потока массы через границу. Движение этой границы нужно найти.

Примеры свободных поверхностей: поверхность волны (цунами, например, или корабельный волны), кавитация на торпеде Шквал, нефтепровод с неполным заполнением. Если образуются волны, запирающие сечение, то течение может затормозиться.

Ещё пример это гидравлический прыжок. Справа идёт река, а слева начинается прилив из моря. И вода поступает из моря в реку и они сшибаются. Прыжок распространяется с довольно большой скоростью. Даже когда вы в раковине умываетесь, происходит стоячий гидравлический прыжок.

Какие условия на свободной границе? Одного условия не хватает, нужно два. Одно называется кинематическое, другое — динамическое. По одну сторону одна среда, по другую — другая. Условие сохранения массы говорит о том, что

$$v_n - D|_{\text{пов. 1}} = (v_n - D)|_{\text{пов. разр.}} = D_n.$$

Это условие непроницаемости.

Кинематическое условие на свободной поверхности это как раз

$$v_n = D_n,$$

где D_n — скорость поверхности.

Условие из закона сохранения количества движения

$$(P_n)_1 = (P_n)_2.$$

Это называется динамическим граничным условием на свободной границе.

Тензор напряжений мы задать не можем. Это 9 компонент. Мы можем задать только вектор напряжений относительно нормали к границе.

Поскольку скорость границы мы не знаем, а нам хотелось бы форму границы вычислить. Поэтому делается так. Есть другая запись кинематического условия на свободной поверхности. Пусть уравнение свободной поверхности заранее неизвестно, но обозначим его $f(t, x, y, z) = 0$. Условие, что $\mathbf{v}_n = \mathbf{D}_n$, означает, что частицы, которые находятся на поверхности, находятся на ней всегда, не могут с неё сойти (и по физике и по формальному), то есть для координат этих частиц всегда выполнено условие $f(t, x, y, z) = 0$. Здесь уже x, y, z — эйлеровы координаты точек частиц среды, лежащий на поверхности. Поэтому мы можем это соотношение продифференцировать по времени, считая, что $\frac{dx}{dt} = v_x$ и аналогично с y, z . Когда продифференцируем, получится кинематическое условие такое

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

при $f(t, x, y, z) = 0$. Или $\frac{df}{dt} = 0$ при $f(t, x, y, z) = 0$.

Теперь это уравнение на f .

Пример. Если я рассматриваю волны на поверхности воды. Есть дно и есть свободная поверхность. Уравнение поверхности будет такое $z = h(t, x, y)$, ну или можно написать $f = h(t, x, y) - z = 0$. Тогда кинематические условия пишутся вот так:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z = 0 \Leftarrow z = h(x, y, z).$$

Или $v_z = \frac{\partial h}{\partial t}$ при $z = h(t, x, y)$ — кинематическое граничное условие на поверхности волны.

5.1.1 Динамическое граничное условие в идеальной жидкости

Теперь давайте динамическое условие, считая жидкость идеальной. Что мы делаем? Мы должны это $\mathbf{P}_n|_{\text{св. пов.}} = \mathbf{P}_n|_{\text{внеш.}} = \mathbf{P}_{na}$ (индекс a обозначает атмосферное) преобразовать с предположением $\mathbf{P}_n = -p\mathbf{n}$. Поэтому динамическое условие пишется, как $p = p_a$ на поверхности $f(t, x, y, z) = 0$.

В примере с волнами $p = p_a$ при $z = h(t, x, y)$.

Это условие можно переписать, как условие на скорость. Это можно сделать, например, если существует интеграл Коши—Лагранжа. Но пока я этого не буду делать.

Мы написали условия довольно сложные. Какая-то неизвестная скорость, всё нелинейное. Задачи со свободными границами неизмеримо сложнее чем задачи, где этих свободных границ нет.

Сейчас есть много пакетов для расчёта движения сред. Чтобы ими пользоваться, главное уметь правильно задать граничные условия. Тогда можно уже на кнопку нажать.

5.2 Потенциальные течения несжимаемой идеальной жидкости. Уравнение Лапласа для потенциала скорости. Граничные условия

Течения в океанах все вихревые. Плотность везде разная, всё достаточно трудно устроено. Поэтому сразу напишу, что жидкость несжимаемая.

Движение потенциально означает, что $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ — уравнение потенциальности. Жидкость несжимаема, значит $\text{div } \mathbf{v} = 0$ — уравнение неразрывности. Ну что это означает вместе взятое:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Это уравнение называется уравнением Лапласа. А $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ называется оператором Лапласа. Функция φ , являющаяся решением, называется гармонической функцией.

Из этого уравнения можно найти φ и, соответственно, скорости. А другие величины уже будут находиться из других законов.

Теперь надо надо написать для этого уравнения Лапласа граничные условия. Тогда уже можно будет решать задачу. Коронной нашей задачей будет задача о движении сферы в несжимаемой жидкости.

5.2.1 Граничные условия для уравнения Лапласа в задачах о движении жидкости

Сначала запишем условия на поверхности твёрдого тела.

$$\mathbf{v}_n|_{\text{пов. тв. тела}} = \mathbf{v}_n \text{ тела}.$$

Если же $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$, то $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и т. д. Тогда можно написать, что $\mathbf{v}_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, где ∂n — расстояние вдоль нормали. Я могу взять на минуточку ось x в направлении нормали. $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\varphi(n_0 + \Delta n) - \varphi(n_0)}{\Delta n}$.

Просто вот такой вот факт $v_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$. Тогда условие на поверхности твёрдого тела в случае потенциального движения пишется так

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\text{на пов. тела}} = v_n|_{\text{тела}}.$$

Вот так задаётся ещё условие непроницаемости. Если нет землетрясений. А что написать на свободной границе.

В Алма-Ате строили плотину методом взрыва. Ученики Лаврентьева рассчитали, чтобы при взрыве все камни летели в одно место.

Давайте теперь напишем условие на свободной поверхности для потенциальной скорости. Можно ли их записать, как условие на φ ? Сначала кинематическое условие. Это легко

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Leftarrow f(t, x, y, z) = 0.$$

Неизвестные здесь уже теперь φ и f .

Теперь динамическое условие: $p|_{f=0} = p_a$. Можно записать, как условие на потенциал, если существует интеграл Коши—Лагранжа. А он существует? жидкость идеальна, движение баротропно, движение потенциальное, а потенциал массовых сил тоже существует, иначе бы движение тоже не было бы потенциальным. Значит, интеграл существует. Осталось понять, как именно будет выглядеть динамическое условие на свободной границе.

Интеграл Коши—Лагранжа выполнен везде в жидкости:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - W = \frac{p_a}{\rho}.$$

Справа вообще может стоять любая функция времени, поставим удобную нам константу. Это влияет на вид зависимости потенциала от времени, но не влияет на скорость. $\frac{p_a}{\rho}$ пишут тут довольно часто.

Тогда на поверхности $f = 0$ условие $p = p_a$ и интеграл Коши—Лагранжа вместе дают

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] - W = 0 \Leftarrow f = 0.$$

Это условие очень сложное. Поэтому книги по задачам о движении волн очень большие и сложные. Исследовать это дело очень сложно.

Задачи о схлопывании пузырьков (о разрушениях, ими наносимых), задачи о взрывах, задачи о струях.

5.3 Задачи о потенциальном движении несжимаемой жидкости в случае отсутствия свободных поверхностей

Будем считать, что

1. Область, где движется жидкость, ограничена. Бак в ракете. В Баке находится какое-то тело. Тогда уравнение $\Delta \varphi = 0$, если на границе заданы условия $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\text{на гр.}} = 0$, называется внутренней задачей Неймана.

Если же задана сама функция φ , то имеем задачу Дирихле.

Уравнение Лапласа линейно и граничные условия тоже линейны. Значит, внутренняя задача Неймана линейна. Раз задача линейная, то для неё есть много хороших методов решения.

2. Область неограничена, то есть содержит бесконечно удалённую точку. Это идеализация, но оказывается, для этого уравнения её можно сделать.

Здесь задачи бывают двух типов. Например

- (а) Тело движется в безграничной покоящейся жидкости. (Внешняя задача Неймана.) Если нет земли, сплошной воздух, летит самолёт. Если я отойду от тела на расстояние порядка нескольких линейных размеров, то можно считать, что точка бесконечно удалена.

Итак задача: $\Delta \varphi = 0$ всюду вне тела, а на границе тела имеем $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\text{на пов. тела}} = v_n|_{\text{тела}}$, и на бесконечности задана скорость $\mathbf{v} = 0$, то есть $\text{grad } \varphi|_{\infty} = 0$. (Одно добавочное условие появилось, градиент на бесконечности.)

- (б) Ещё бывает задача, где тело обтекается потоком, но это то же самое. Например, исследования в аэродинамической трубе. Или просто здания обтекаются потоком. В этом случае на поверхности тела $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\text{на пов. тела}} = 0$ и ещё $\text{grad } \varphi|_{\infty} = \mathbf{v}_{\infty}$ задано. Это тоже называется внешней задачей Неймана.

В общем, если нет свободный границ, то задача линейна.

5.4 Примеры потенциальных течений несжимаемой жидкости

Из сложения этих течений я буду потом получать более сложные.

1. Поступательное движение вдоль оси x . Здесь $\varphi = v_0 x$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, $\Delta \varphi = 0$.
2. Источник или сток в начале координат. Что это такое. Потенциал $\varphi = -Q/4\pi r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Хочется это разобрать, как устроено течение, удовлетворяет ли это течение уравнению Лапласа.

Как поступим? Можно ввести наукообразие, ввести сферические координаты. Но здесь всё достаточно просто, будем работать в декартовых.

$$v_x = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{x}{r} = \frac{Qx}{4\pi r^3}, \quad v_y = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{y}{r}, \quad v_z = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{z}{r}.$$

Или, векторно

$$\mathbf{v} = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Если $Q > 0$, источник; $Q < 0$ — сток.

6 13 ноября 2014

1. Примеры потенциальных потоков идеальной несжимаемой жидкости.
2. Безотрывное обтекание сферы потенциальным потоком несжимаемой жидкости. Распределение скоростей и давление на поверхности сферы. Парадокс Даламбера—Эйлера.
3. Движение сферы в безграничной с постоянной и переменной скоростью. Присоединённая масса сферы.

Мы рассматриваем потенциальное движение несжимаемой жидкости. Значит, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Вместе уравнение Лапласа $\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$.

Потенциалы сложных движений будем получать, как суммы потенциалов простых.

Пример простого движения.

Пример 6.1. Поступательный поток со скоростью $\mathbf{v}_0(t)$ вдоль оси x . Потенциал $\varphi = v_0(t)x$.

Пример 6.2. Источник или сток в начале

$$\varphi = -\frac{Q(t)}{4\pi r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{Q}{4\pi r^2} \frac{x}{r}, \dots, \mathbf{v} = -\frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Если $Q > 0$, источник, если $Q < 0$ — сток.

Удовлетворяет ли такое течение уравнению Лапласа? То есть является ли жидкость в примере несжимаемой? Можно было бы написать в сферических координатах. Тогда пришлось бы высчитывать символы Кристоффеля. Мы не будем, давайте в этом простом случае проверим выполнения уравнения Лапласа в декартовых координатах.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{3Qx^2}{4\pi r^5} + \frac{Q}{4\pi r^3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \dots, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \dots \quad \Delta \varphi = -\frac{3Q}{4\pi r^3} + \frac{3Q}{4\pi r^3} = 0$$

Например, если источник. Скорость направлена по радиусу. Как посчитать, сколько протекает через поверхность за единицу времени. Надо взять маленькую площадку. Через время t частицы этой площадки куда-то сместятся на $v_R d\sigma dt$. Тогда $\int_{\Sigma} v_n d\sigma$ — количество жидкости, которая протекает через сферу Σ за единицу времени. При этом $|v_n| = |v_r|$. Величина

$$\int_{r=\text{const}} \frac{|Q|}{4\pi r^2} d\sigma \frac{|Q|}{4\pi r} = |Q|$$

называется расходом источника или стока, мощностью или интенсивностью.

Пример 6.3. Сумма источника ($Q > 0$ и источник положим в начале координат) и поступательного потока (обтекание полубесконечного тела). Опять какое-то течение несжимаемой жидкости.

$$\varphi = v_0 x - \frac{Q}{4\pi r}, \quad \Delta \varphi = 0, \quad r \rightarrow \infty, \varphi \sim v_0 x \quad r \rightarrow 0, \varphi \sim -\frac{Q}{4\pi r}.$$

Найдётся точка (см рис), где скорость поступательного потока равна скорости источника (источник как бы сдувает линии поступательного потока). И оказывается, что поток выглядит таким образом: он разделяется на часть, которая идёт от источника (это не линии на рис, это поверхности), поступательный поток идёт вне этой области. Найдё координаты точки A и расстояние от B до оси x . Это очень легко найти. Внутренность

зоны ABC могу заменить на твёрдое тело. Скорость на границе равна по касетельной — это такое же граничное условие, как для обтекания потоком твёрдого тела.

Будем считать, что решаем задачу обтекания ракеты.

Найдём x_A , то есть координату точки, где $v = 0$. Так как φ известно, скорость можно получить, как

$$v_x = v_0 + \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{x}{r}.$$

Эта формула верна везде. Хочу искать точку на оси x , то есть $r = |x_A|$ и $v_x = 0$. Получается для x_A такая формула

$$x_A = -\frac{v_0 4\pi |x_A|^3}{Q} \Rightarrow |x_A| = \sqrt{\frac{Q}{4\pi v_0}}.$$

Форма поверхности ABC регулируется скоростью v_0 (обозначение для скорости поступательного потока на бесконечности).

Обозначим R_∞ — радиус сечения обтекаемого тела в ∞ . Тогда расход через это поперечное сечение (в ∞) $v_0 \pi R_\infty^2$, а с другой стороны он равняется Q . Получается формула

$$R_\infty = \sqrt{\frac{Q}{\pi v_0}}.$$

Пример 6.4. Источник или сток не в начале координат, а в точке x_0, y_0, z_0 . Ну это совсем просто

Нужно просто ввести систему координат $x' = x - x_0, y' = y - y_0, z' = z - z_0$. Тогда

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} = -\frac{Q}{4\pi \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Пример 6.5. Источник плюс сток с равными расходами на расстоянии l . Сток поместим в начале координат, а источник на отрицательной полуоси x . Линии тока вытекают из источника и втекают в сток. Это всё тривиально. Как выглядит потенциал:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi r(x, y, z)} - \frac{Q}{4\pi r(x + l, y, z)}.$$

Пример 6.6. Диполь. Возьмём источник и сток на расстоянии Δx и устремим $\Delta x \rightarrow 0$. Так просто мы ничего не получим. Но если ещё и $Q = \frac{M}{x} \rightarrow \infty$, где $M = \text{const}$ (не зависит от x , зависит от времени). Какой получается предел:

$$\varphi = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M}{4\pi \Delta x} \left(\frac{1}{r(x + \Delta x, y, z)} - \frac{1}{r(x, y, z)} \right) = -\frac{M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Это называется потенциалом диполя.

В каждый момент перехода к пределу уравнение Лапласа выполнено, значит, и в пределе выполнено. Или можно так рассуждать: если φ удовлетворяет уравнению Лапласа, то и её первая производная, вторая производная, миллионная производная тоже будут удовлетворять уравнению Лапласа. Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется Гармонической.

Линии тока выглядят таким образом

А теперь я хочу сделать ещё один пример.

Пример 6.7. Источник плюс сток плюс поступательный поток. Оказывается, вот что получается. Вот есть источник, есть сток и вдали есть поступательный поток. Надо всё, что мы знаем сложить.

$$\varphi = v_0 x + \frac{Q}{4\pi r(x, y, z)} - \frac{Q}{4\pi r(x + l, y, z)}$$

Будут характерные точки A и B , где скорости друг друга компенсируют. Через точки A, B проходит поверхность, ограничивающая овальное тело. Либо линии тока внутри этого тела, либо вне.

Пример 6.8. Диполь плюс поступательный поток. Оказывается, что это и будет обтекание сферы. Мы это сейчас прямо докажем

Есть такой метод источников и стоков. Не обязательно их ставить два. Их можно ставить много и получать разные тела. Есть математическая теорема о том, что источниками и стоками можно получить любое осесимметричное тело. Если задано осесимметричное тело, то можно найти такое распределение источников и стоков на оси симметрии, чтобы получилось обтекание этого тела.

Несмотря на то, что потенциалы, нами рассмотренные, довольно простые, они решают достаточно серьёзные задачи.

6.1 Задача о безотрывном обтекании сферы

Рассмотрим безотрывное обтекание сферы потоком со скоростью на ∞ , равной v_0 . Жидкость будем считать несжимаемой, течение потенциальным.

Радиус сферы обозначим через R . $\Delta\varphi = 0$ всюду вне сферы ($r > R$). Граничные условия на поверхности сферы: $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{r=R} = 0$. И граничные условия на бесконечности: $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{\infty} = v_0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{\infty} = 0$, если ось x направлена по скорости набегающего потока.

Ищем решение в виде

$$\varphi = v_0 x - \frac{M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = v_0 x + \frac{Mx}{4\pi r^3}.$$

У нас v_0 уже задано. Можно ли подобрать M , чтобы были выполнены граничные условия на сфере. Ведь уравнение Лапласа мы уже проверили для этого потенциала.

Итак, граничные условия на сфере:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial r} \stackrel{?}{=} 0.$$

Лучше всего ввести сферические координаты. Будем проводить сечения шар в рассматриваемой точке, перпендикулярные оси x . Это получаются окружности. Вводим угол θ , как угол между осью x и радиус-вектором рассматриваемой точки, α — угол на сечении, отсчитываемый от вертикали. Тогда

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \alpha, \quad z = r \sin \theta \sin \alpha.$$

И теперь считаем производную потенциала по r в точке $r = R$.

$$\varphi = \left(v_0 + \frac{M}{4\pi r^3} \right) r \cos \theta, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = v_0 \cos \theta - \frac{2M}{4\pi r^3} \cos \theta \Big|_{r=R} = 0.$$

Отсюда получается, что если $M = 2\pi R^3 v_0$, то $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$ на $r = R$.

Итак, потенциал получается

$$\varphi = v_0 x + \frac{v_0 R^3 x}{2r^3} = v_0 x \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) = v_0 r \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \cos \theta.$$

Это всё пока формулы какие-то, а я хочу найти распределение скорости на поверхности сферы.

Всё будет симметрично относительно оси x . Нормальная составляющая скорости на границе равна нулю по граничному условию. Скорость направлена по касательной. Как скорость проще всего найти. Пусть s — натуральный параметр от левого края в правый через верхнюю дугу. Тогда

$$v_s = \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \quad ds = -R d\theta; \quad v_s\Big|_{r=R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Big|_{r=R} = \frac{3}{2} v_0 \sin \theta.$$

Что мы видим из этого распределения скорости? (Потом надо будет ещё давление получить.) Действительно есть критические точки и это A, B . А где скорость максимальна? В точках C, D . И что это за скорость: $v_{\max} = \frac{3}{2} v_0$.