

# 1 Лекция Веденеева

Маргарита Эрнестовна попросила заменить жидкости. Речь пойдёт о модели идеальной жидкости.

Известно, что реальные жидкости обладают вязкостью, но уравнения Навье—Стокса очень сложны. В реальности вязкие свойства проявляются очень слабо, вязкости очень часто не имеют значения. Поэтому модель идеальной жидкости — это некое приближение, но оно простое.

Часто движение жидкости является потенциальным, то есть  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ .

Какие здесь уравнения. Вы уже знаете: уравнение неразрывности и уравнение Эйлера

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{F}. \end{cases} \quad (1)$$

**Определение 1.1.** *Линия тока — линия, которая определяется для фиксированного момента времени и обладает тем свойством, что в любой точке направление касательной совпадает с направлением вектора  $\mathbf{v}$ .*

**Определение 1.2.** *Траектория — путь одной индивидуальной частицы.*

Есть линии тока, есть траектории. Траектория от времени не зависит. Если течение установившееся, то траектории и линии тока совпадают.

Течение баротропно, если плотность есть однозначная функция давления. Например, изотермическое движение совершенного газа  $p = \rho RT$ ,  $T = T_0$ . Другой пример — это несжимаемая жидкость. Движение так же баротропно.

Приведём уравнения движения к специальной форме, которая называется формой Громека—Лэмба. Для этого представим полную производную скорости в следующем виде.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \quad (2)$$

Чтобы убедиться в правильности этого выражения, нужно посчитать такой определитель

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & v_1 & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & v_2 & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & v_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3$$

Теперь считаем векторное произведение

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \omega_1 & v_1 & \mathbf{e}_1 \\ \omega_2 & v_2 & \mathbf{e}_2 \\ \omega_3 & v_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = (\omega_2 v_3 - \omega_3 v_2) \mathbf{e}_1 + \dots$$

Получаем производную в форме (2)

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_1}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_1}{\partial z} v_z = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x} v_3 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) v_3 - \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) v_2$$

Само уравнение движения в форме Громеки—Лэмба имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (3)$$

## 1.1 Интеграл Бернулли

Докажем, что уравнение (3) имеют первый интеграл.

Будем выводить интеграл Бернулли. Будем считать, что

- (1) Жидкость идеальна;
- (2) Движение установившееся  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ .
- (3) Массовые силы потенциальны  $\mathbf{F} = \operatorname{grad} W$ .

С учётом этих предположений уравнение (3) имеем вид

$$\operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \operatorname{grad} W - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p.$$

Пусть  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3$ :  $|\mathbf{l}| = 1$ . Тогда  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} = (\mathbf{l}, \text{grad } \cdot)$ . Умножим уравнение на направление  $\mathbf{l}$  и используем свойство производной по направлению. Проектируем градиент на касательное направление ( $|\mathbf{v}| \mathbf{l} = \mathbf{v}$ )

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \underbrace{2\mathbf{l} \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}]}_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{l}} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{l}} = 0.$$

Вдоль линии тока у нас давление и плотность являются функциями линии тока  $p = p(l) \Leftrightarrow l = l(p)$ ,  $\rho = \rho(l) \Leftrightarrow l = l(\rho)$ . На линии тока всегда можно посчитать интеграл  $\mathcal{P} = \int \frac{dp}{\rho(p)}$ . Делаем замену.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \left( \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} - W \right) = 0.$$

Это соотношение можно проинтегрировать вдоль линии тока. Полученное и называется интегралом Бернулли.

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} - W = C(L).$$

Константа зависит, вообще говоря, от линии тока.

Если летит самолёт, то все линии тока обтекают это тело и уходят в бесконечность, где если поток однородный, то все константы одинаковы (на бесконечности).

Пусть есть несжимаемая жидкость в поле силы тяжести. В этом случае  $\mathcal{P} = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int dp = \frac{p}{\rho}$ . В случае силы тяжести  $F_x = F_y = 0$ ,  $F_z = -g$ . Очевидно, что потенциал этого дела  $W = -gz$ . А уравнение бернулли тогда принимает вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C(l).$$

Хочется сделать замечание. Разные частицы могут иметь разную плотность. Но на одной линии тока плотности одинаковы (ведь плотности не меняются на траекториях, а при установившемся движении траектории и линии тока совпадают). Таким образом, интеграл Бернулли верен и для неоднородного потока.

Интеграл Бернулли очень важен во многих физических приложениях. Что он означает: в тех точках, где скорость больше, давление меньше. Это позволяет сделать общий вывод о характере течения.

## 1.2 Различные приложения интеграла Бернулли

Начнём с понятия кавитации.

Давление не может падать бесконечно. Есть граница, после которой жидкость перестанет быть жидкостью, то есть  $p > p_{\text{н.п.}}$ . Мы знаем, что при  $T = 100^\circ \text{C}$  давление насыщенных паров одна атмосфера  $10^5$  Па. Для  $T = 20^\circ \text{C}$  давление насыщенных паров  $p_{\text{н.п.}} = 0,023 \text{ см} = 23 \cdot 10^2$  Па. Явление вскипания жидкости при определённом давлении называется кавитацией.

**Определение 1.3.** Кавитация — это образование пузырьков (возникновение полостей, заполненных парами жидкости и выделившимся из жидкости газом) за счёт понижения давления.

Рассмотрим пример возникновения кавитации в трубе с пережатием. Течение сначала сужается, затем расширяется. Будем считать, что труба практически горизонтальна и потенциал почти не меняется. Индекс 0 будет в широком начале трубы, без индекса в узкой части. Площадь поперечного сечения  $S_0$ , но труба имеет местное сужение, в самом узком месте площадь  $S_A$ . Если считать, что массовые силы отсутствуют, а жидкость несжимаема, имеем интеграл Бернулли в виде

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}.$$

Воспользуемся законом сохранения массы  $vS = v_0 S_0$ . Поставим отсюда  $v = \frac{v_0 S_0}{S}$  в интеграл Бернулли

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} \left( \frac{S_0}{S} \right)^2 + \frac{p}{\rho}.$$

Теперь отсюда выразим  $p$ .

$$p = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \left( 1 - \left( \frac{S_0}{S} \right)^2 \right).$$

Видим, что если  $S$  достаточно маленькая, то давление снизится насколько, что возникнет явление кавитации. Появятся пузырьки будут двигаться дальше, а дальше давление будет повышаться. Будет происходить схлопывание пузырька, что эквивалентно маленькому ядерному взрыву. Если смотреть схлопывание около стенок, то пузырьки вырывают куски материала стенки. Это называется кавитационной эрозией. Это есть негативная

сторона явления кавитации.

Ещё один пример. Будем считать, что на бесконечности поток однородный. Рассмотрим линию тока, которая исходит из точки  $A$ , врезается в тело в точке  $B$  обтекает его через точку  $C$ , отходит от тела в точке  $D$  и утекает в точку  $E$ . Имеем  $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C$  для каждой точки.

$$\frac{v_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{v_C^2}{2} + \frac{p_C}{\rho}.$$

Часто если движение безразрывно (не отрывается от поверхности тела), то  $v_C = 2v_\infty$  — это некий факт, который в лекциях будет доказан.

Если снова выражать,  $p_c = p_\infty + \frac{\rho}{2}(v_\infty^2 - v_c^2) = p_\infty - \frac{3}{2}\rho v_\infty^2$ .

Представьте, что мы берём цилиндр и начинаем его двигать в воде. Увеличивая скорость, уменьшаем давление. Будут снова образовываться пузырьки и возникнет кавитационная эрозия. Это большая проблема для двигателей судов. Чем быстрее крутится винт, тем меньше давление. В начале двадцатого века это не представляло никаких проблем. Потом выяснилось. Поставили новый винт на пассажирский корабль, полчаса проплыл и остановился. Водолазы посмотрели, а винта уже нет.

Есть и положительная сторона кавитации. Если пузырьков очень много и находятся они в локальной какой-то области, они превращаются в один большой паровой пузырь. Если он не схлопывается, то не представляет опасности для тела. Это называется развитая кавитация: из-за развитых пузырей снижается трение. Иногда специально делают воздушный пузырь, такой называется каверной, если используется специально для снижения трения. Где-то вдали каверна схлопывается, но это уже нас не волнует. У торпеды Шквал на носу стоит каветатор, подаётся воздух. Сопротивление снижается до минимальных значений, что позволяет развить скорость 300–400 км/ч.

Ещё пример: липосакция. Если кто-то страдает ожирением, можно удалить жир с помощью ультразвуковой кавитации. Звуковые волны — это колебания давления. Где давление сильно отрицательное, появляется вскипание воды, образуются пузырьки, затем пузырьки схлопываются и разрушают жир.

### 1.3 Трубка Пито—Прандтля

Две трубки с продолжением наверх. Одна тонкая с отверстием  $B$ , другая шире с отверстием  $A$ .

$$\frac{p_A}{\rho} = \frac{p_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2}, \quad v_B = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}}.$$

Если трубочка достаточно тонкая в  $B$ , то  $v_B \sim v_\infty$ . А разницу давлений мерим в вертикальной части трубок  $p_A - p_B = g\Delta h\rho$ . Можно просто глазом.

## 2 16 октября 2014

- (1) Установившееся адиабатическое движение совершенного газа;
- (2) Интеграл Бернулли для адиабатического движения совершенного газа;
- (3) Параметры торможения. Максимальная скорость;
- (4) Число Маха. Другие формы интеграла Бернулли;
- (5) Примеры расчётов с помощью интеграла Бернулли.

Вчера прилетела из Таджикистана. Там было очень хорошо, но схватила грипп или что ещё. Попробуем набранным текстом, а то я, возможно, не выстою писать у доски. Вообще на мех-мате считает плохим тоном

В прошлой лекции был интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости. А сегодня мы должны рассмотреть интеграл Бернулли для адиабатического движения совершенного газа. Если автомобиль едет со скоростью 250 км/ч, то можно считать, что он обтекается несжимаемой жидкостью.

### 2.1 Установившееся адиабатическое движение совершенного газа

Итак, что же такое совершенный газ. Он удовлетворяет двум соотношениям.

$$p = R\rho T; \quad u = c_V T + \text{const}. \quad (1)$$

Теперь что такое адиабатическое движение: это движение, в котором отсутствуют притоки тепла к частицам, то есть  $dq = 0$  для каждой частицы, нет обмена телом даже между частицами.

Для адиабатического движения идеального совершенного газа из уравнения притока тепла можно вывести связь «адиабата Пуассона». Она имеет вид  $p = A\rho^\gamma$ , где  $A$  есть функция энтропии  $s$ ,  $\gamma = \frac{c_P}{c_V} > 1$ . В данном случае в каждой частице  $ds = \frac{dq}{T} = 0$  и  $A = \text{const}$ . Тем не менее в разных частицах  $A$  может быть разной и в точке пространства не является постоянной по времени.

## 2.2 Интеграл Бернулли для адиабатического движения совершенного газа

Теперь нужно писать интеграл Бернулли. Это соотношение, которое выполняется для линии тока при установившемся движении. Если течение установившееся, то линии тока не меняются со временем, и частицы движутся именно по линиям тока, хоть и сложным образом (ускоряются, замедляются), но скорости все направлены по касательной.

У нас есть постоянная в каждой частице величина — энтропия. Так вот эта энтропия будет постоянна вдоль линии тока, так как частицы движутся вдоль линии тока. На другой линии тока энтропия может быть и другая. Поэтому замечательно то, что хоть давление зависит от плотности и энтропии, но вдоль линии тока только от плотности.

Выведем интеграл Бернулли для адиабатического движения совершенного газа при отсутствии массовых сил. Общий вид:

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} = C(L), \quad \mathcal{P} = \int_L \frac{1}{\rho} dp, \quad (2)$$

$C(L)$  — константа вдоль линии тока. Это соотношение выводится из уравнения Эйлера, лишь бы движение было установившееся, жидкость идеальная, то есть нет трения, массовые силы потенциальны.

Если бы была несжимаемая жидкость, всё было бы проще. А теперь нам нужно интегрировать, так как  $\rho = \frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{A^{\frac{1}{\gamma}}}$ . Тогда

$$\mathcal{P} = \int_L A^{\frac{1}{\gamma}} p^{-\frac{1}{\gamma}} dp = \frac{\gamma}{\gamma-1} A^{\frac{1}{\gamma}} p^{1-\frac{1}{\gamma}}.$$

И тогда интеграл Бернулли записывается в данном случае так:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} A^{\frac{1}{\gamma}} p^{1-\frac{1}{\gamma}} = C(L). \quad (3)$$

Можно получить и другие выражения для функции  $\mathcal{P}$  с помощью адиабаты Пуассона и уравнения состояния. Имеем

$$\mathcal{P} = \frac{\gamma}{\gamma-1} A^{\frac{1}{\gamma}} p^{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} A \rho^{\gamma-1} = c_P T =: \frac{a^2}{\gamma-1}.$$

Здесь  $a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma R T$  — это производная  $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{s=\text{const}}$ , оказывается (но мы этого пока не знаем) скоростью звука в газе. Формулу для распространения звука мы ещё только будем изучать.

Также мы использовали, что  $p = R\rho T$ ,  $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ ,  $R = c_P - c_V$ , то есть  $\gamma R = c_P(\gamma-1)$ . Поэтому  $\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} T = c_P T$ .

Таким образом получаем ещё четыре вида интеграла Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = C(L); \quad (4)$$

$$\frac{v^2}{2} + c_P T = C(L); \quad (5)$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} A \rho^{\gamma-1} = C(L); \quad (6)$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = C(L). \quad (7)$$

Из первой формы видно, что чем больше скорость, меньше давление. Чем больше скорость, тем меньше температура, видно из третьей формы. Четвёртая форма показывает, что плотность уменьшается при разгоне. Пятая показывает, что скоростью звука уменьшается при разгоне.

## 2.3 Параметры торможения. Максимальная скорость

Параметры торможения — это значения  $p_*$ ,  $\rho_*$ ,  $T_*$ ,  $a_*$  величин  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $a$  в той точке линии тока, где  $v = 0$ . Она называется давлением торможения, плотностью торможения, температурой торможения, скоростью звука торможения. При установившемся движении это максимальные значения на линии тока. Они вводятся, как

величины параметров, которые получились бы, если поток адиабатически затормозить до нулевой скорости — это такое более общее определение (ведь может не быть точек с нулевой скоростью).

Теперь мы ещё введём понятие максимальной скорости. Из интеграла Бернулли видно, что при уменьшении температуры, скорость увеличивается на линии тока. Самое большое значение скорости на данной линии тока получилось бы, если бы давление обратилось в нуль. Если из сопла вытекание жидкости в вакуум, то скорость будет максимальной. То есть какие бы вы двигатели не ставили, больше чем  $v_{\max}$  для данного  $C$  скорость вы не получите.

Константу  $C$  интеграла Бернулли можно выразить через параметры торможения и через максимальную скорость

$$C(L) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_*} = c_P T_* = \frac{\gamma}{\gamma-1} A^{\frac{1}{\gamma}} p_*^{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{a_*^2}{\gamma-1} = \frac{v_{\max}^2}{2}. \quad (8)$$

Эти формулы дают и связи между параметрами торможения и максимальной скоростью.

Запишем ещё формы интеграла Бернулли, где  $C(L)$  мне надоело писать:  $\frac{v^2}{2} + c_P T = c_P T_*$  или  $\frac{v^2}{2} + c_P T = \frac{v_{\max}^2}{2}$ . Ну и разные другие формы.

## 2.4 Число Маха

Число Маха  $M$  — это соотношения величины скорости потока к скорости звука в рассматриваемом потоке. Очень важное число для установившегося движения. Если  $M > 1$ , течение сверхзвуковое,  $M < 1$  — дозвуковое. Как выразить интеграл Бернулли через число Маха.

Какое здесь есть рассуждение. Разделим все члены соотношения  $\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} = C(L)$  на  $\mathcal{P}$ .

$$\frac{v^2}{2\mathcal{P}} + 1 = \frac{C(L)}{\mathcal{P}}.$$

Для  $\mathcal{P}$  и  $C$  можно использовать разные эквивалентные выражения. Мы будем в левой части  $\mathcal{P}$  выражать через число Маха, справа через давление, а  $C$  через давление торможения. Получим в итоге

$$1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 = \left( \frac{p_*}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}; \quad \frac{p_*}{p} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Аналогично можно получить и следующие формы интеграла Бернулли

$$\frac{\rho_*}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \frac{T_*}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2; \quad \frac{a_*}{a} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## 2.5 Примеры расчётов

Пусть температура набегающего потока  $T = 288$  К,  $v = 300$  м/с. Нам нужно ещё знать теплоёмкость при постоянном давлении для воздуха  $c_P \cong 10^3 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \text{К}}$ . Скорость в точке  $C$  равна нулю, поэтому  $T_C = T_*$ . Из интеграла в Бернулли  $\frac{v^2}{2} + c_P T = c_P T_*$ . Тогда  $T_* = 333$  К. При скорости  $v = 200$  км/ч, это ещё ничего. Тогда  $T_C = T_* = T + 1,8$  К = 289,8 К. А при скорости набегающего потока  $v = 2000$  м/с  $T = 2288$  К. При таких температурах тело уже может начать гореть.

Есть такое замечание. Если сверхзвуковое течения, то оно такое как на рисунке. Образуется ударная волна, давление меняется скачком. Тут интеграл Бернулли годятся только перед ударной волной и после ударной волны, ведь мы его выводили из дифференциальных уравнений. Но оказывается, что если внимательно посмотреть на условия на границе разрыва, то константа интеграла Бернулли сохранится на линии тока, проходящей через границу разрыва.

Пусть газ вытекает через сопло из большого резервуара. Пусть дело происходит летом, то есть  $T_* = 300$  К, а  $c_P = 1000 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \text{К}}$ . Тогда  $v_{\max} = \sqrt{2c_P T_*} = 770$  м/с — такая вот непреодолимая в установившемся течении скорость. Теперь при  $v = 770$  м/с получим из интеграла Бернулли  $T = 55$  К. Раствор из этого резервуара вытекает, покрывая металлическую пластинку, помещённую вдоль оси такой струи. Это я своими глазами всё видала.

Поговорим немного про насадки. Вот имеется у меня трубка тока. Имеется какой-то контур замкнутый, через него проходят какие-то линии тока, мы следим за ними. Следим за площадью сечения и скоростью. Как они между собой связаны при установившемся движении. Пишем закон сохранения массы (или закон сохранения расхода это называется)  $\rho v \Sigma = \text{const}$ . Для несжимаемой жидкости  $\rho = \text{const}$ , значит  $v \Sigma = \text{const}$  и  $\frac{dv}{v} = -\frac{d\Sigma}{\Sigma}$ . А если сжимаемая жидкость и установившееся движение. Тогда  $v dv + \frac{1}{\rho} dp = 0$ . Можно ввести сюда скорость звука  $v dv + \frac{a^2}{\rho} d\rho = 0$ , откуда видно, что  $d\rho = -\frac{\rho v}{a^2} dv$ . Результат получается такой: если течение сверхзвуковое, то поток будет разгоняться только при увеличении площади сечения. Если сопло сужается, то никогда нельзя получить сверхзвуковое течение.

### 3 23 октября 2014

1. О форме трубок тока при установившемся движении несжимаемой и сжимаемой жидкости. Понятие о сопле Лаваля.
2. Оценка влияния сжимаемости при установившемся движении газа.
3. Потенциальные движения. Интеграл Коши—Лагранжа.
4. Циркуляция скорости и формула Стокса.
5. Теорема Томсона о циркуляции скорости.

На самом деле теорема Томсона хоть и знаменита, она лишь частный случай теоремы Лагранжа, которую мы скорее всего не успеем.

#### 3.1 О форме трубок тока при установившемся движении несжимаемой и сжимаемой жидкости. Понятие о сопле Лаваля

Рассмотрим трубку тока. Что это такое? Рассматривается установившееся движение. Что такое установившееся движение: в каждой точке области, занятой средой, со временем ничего не меняется. Всегда можно ввести понятие линий тока. Возьмём малый контур, через каждую его точку проведём линию тока, получим трубку.

Можно считать, что трубка составлена из линий тока, а можно считать ограниченной жёсткими стенками.

Считаем, что скорости в каждом сечении во всех точках сечения одинаковы и направлены по нормали к сечению. Но в разных сечениях, конечно, разные. Тогда рассмотрим, что будет, если сечение трубки увеличивается, уменьшается? Как ведёт себя среда при установившемся движении, если трубки расширяются и сужаются. В основном будем пользоваться законом сохранения масс. Мы пишем такое соотношение, если плотность в сечении  $\Sigma(x)$  ( $x$  вдоль трубки) обозначим  $\rho$ , скорость  $v$

$$\rho v \Sigma = \text{const}.$$

$\rho v \Sigma$  называют расходом. Расход константа для трубки тока. А если дополнительно сделать предположения, получим больше.

- (1) Жидкость несжимаема, то есть  $\rho = \text{const}$ , тогда и  $v \Sigma = \text{const}$ . Формально это обозначает, что  $\ln v + \ln \Sigma = \text{const}$ , можно продифференцировать:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{d\Sigma}{\Sigma}.$$

В сужающейся трубке скорость увеличивается, с расширяющейся уменьшается, если жидкость несжимаемая. Здесь мы даже не пользовались интегралом Бернулли:  $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{const}$ , но он даёт те же выводы.

- (2) Сжимаемая жидкость.  $\rho$  изменяется, но  $\rho v \Sigma = \text{const}$  и

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{d\Sigma}{\Sigma} = 0.$$

Введём дополнительные предположения.

- (а) Жидкость идеальная;
- (б) Массовые силы отсутствуют;
- (в) Теплообмен отсутствует ( $dq = 0$ ).

Тогда  $p = p(\rho)$  и  $\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} = \text{const}$ , где  $\mathcal{P} = \int \frac{1}{\rho} dp$ . Следовательно,

$$v dv + \frac{1}{\rho} dp = 0; \quad v dv + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{\rho} d\rho = 0.$$

Введём обозначение  $\left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{s=\text{const}} = a^2$  — это, как мы позже узнаем, скорость звука в среде. Тогда

$$v dv = -\frac{a^2}{\rho} d\rho.$$

Я вынесу  $\frac{dv}{v}$

$$\frac{dv}{v} \left( 1 - \frac{v^2}{a^2} \right) = -\frac{d\Sigma}{\Sigma}.$$

Обозначают  $M = \frac{v}{a}$  число Маха. Тогда

$$\frac{dv}{v}(1 - M^2) = -\frac{d\Sigma}{\Sigma}.$$

Если  $M < 1$ , то поток называется дозвуковым. Он ведёт себя качественно как несжимаемая жидкость: в сужающейся трубке увеличение скорости, а расширяющейся трубке получается уменьшение скорости.

А вот если потом сверхзвуковой, то всё наоборот: в сужающейся трубке потом замедляется, а чтобы его разогнать, нужна расширяющаяся трубка. Для чего нам нужно, чтобы на выходе была большая скорость. Эти трубки, эти насадки часто называются соплом. Для ракетных двигателей, например. Чему равняется поток количества движения через сечение трубки?  $\rho v^2 \Sigma$  и чтобы увеличить тягу, нужна большая скорость.

Так как скорость увеличить? Газ течёт за счёт разности давлений. Если давление уменьшаем, скорость увеличиваем. Но если газ движется из баллона, где скорость ноль, то при сужающемся сопле не будет никогда достигнута сверхзвуковая скорость. А если сопло будет расширяться после какого-то момента, то может быть достигнута максимальная скорость. Такое сопло (которое сначала сужается, потом расширяется) называется соплом Лавала.

До Лавала паровые турбины были неэффективны. Лаваль сделал их эффективными. Насадки в паровых турбин маленькие, на истребителе уже большие.

### 3.2 Оценка влияния сжимаемости при установившемся движении газа

Оказывается, что при малых скоростях и установившемся движении можно пренебречь сжимаемостью. Какую мы при этом можем сделать ошибку?

Пусть

1. жидкость идеальная;
2. движение установившееся;
3. массовые силы не учитываются.

Тогда для несжимаемой жидкости сначала можно написать интеграл Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_*}{\rho},$$

где  $p_*$  — давление торможения (сейчас обычно обозначают  $p_0$ , но раз на прошлой лекции было со звёздочкой, пусть будет со звёздочкой).  $v = 0$ ,  $p = p_*$ ,  $\rho = \text{const} = \rho_*$ , тогда

$$p = p_* - \frac{\rho v^2}{2} = p_* - \frac{\rho_* v^2}{2}.$$

Теперь я хочу применить это уравнения для газа.

Добавочные предположения

1. газ совершенный;
2. движение адиабатическое.

Тогда интеграл Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} A^{\frac{1}{\gamma}} p^{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{a_*^2}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} A^{\frac{1}{\gamma}} p_*^{1-\frac{1}{\gamma}}.$$

Я это перепишу

$$\frac{\gamma-1}{2} \frac{v^2}{a_*^2} + \left(\frac{p}{p_*}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1.$$

Далее  $\frac{p}{p_*} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{v^2}{a_*^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ . Разложу по биному Ньютона, считая, что  $\frac{v^2}{a_*^2}$  мал

$$p = p_* \left[ 1 - \frac{\gamma}{2} \frac{v^2}{a_*^2} + \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - 1\right)}{2!} \frac{(\gamma-1)^2 v^4}{4 a_*^4} + \dots \right] = p_* \left[ 1 - \frac{\gamma}{2} \frac{v^2}{a_*^2} \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{v^2}{a_*^2} + \dots \right) \right].$$

А что такое  $a_*^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_* = \gamma \frac{p_*}{\rho_*}$  в адиабатическом процессе в совершенном газе.

$$p = p_* - \frac{\rho_* v^2}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{v^2}{a_*^2} + \dots\right).$$

Если я буду пользоваться относительной погрешностью, рассмотрим величину: отношение перепада давления к величине напора

$$\left| \frac{p - p_*}{\frac{\rho v^2}{2}} \right| = 1 - \frac{1}{4} \frac{v^2}{a_*^2} + \dots$$

А в несжимаемой жидкости эта величина была равна единице. Значит, если мы хотим, чтобы относительная погрешность была порядка процента, то нужно

$$\frac{1}{4} \frac{v^2}{a_*^2} \leq 0,01 \quad \frac{v}{a_*} \leq \frac{1}{5}.$$

Какие это числа? В нормальных условиях  $a_* = 340$  м/с, то  $v < 68$  м/с  $\approx 245$  км/ч. Эту оценку мы слепали для того, чтобы вы не думали, что несжимаемая жидкость — это что-то несуществующее.

Но это всё для установившегося движения. Для неустановившегося нужно делать ещё оценки.

### 3.3 Потенциальные движения. Интеграл Коши—Лагранжа

Рассмотрим потенциальное движение, то есть существует такая функция  $\varphi$ , что скорость  $\mathbf{v}$  есть градиент  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ ,  $v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ .

Если течение потенциально  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ , то течение безвихревое  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} = 0$ . И обратное верно:  $\boldsymbol{\omega} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ . В этом случае есть ещё один интеграл, который и называется интегралом Коши—Лагранжа.

Пусть выполнены следующие условия:

1. жидкость идеальна (то есть верны уравнения Эйлера);
2. движение потенциально, то есть  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ ;
3. движение баротропное, то есть  $\rho = \rho(p)$  или  $\rho = \text{const}$ ;
4. массовые силы имеют потенциал, то есть  $\mathbf{F} = \text{grad } W$ .

Тогда из уравнений Эйлера выводится следующее соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} - W = f(t), \quad (1)$$

где  $\mathcal{P} = \int \frac{1}{\rho} dp$  называется функцией давления, а  $f(t)$  — произвольная функция времени, то есть не зависит от координат. Соотношение (1) и называется интегралом Коши—Лагранжа. Вывел это соотношение тоже Эйлер, но Коши и Лагранж их использовали очень широко.

Как этот интеграл выводится? Берём уравнение Эйлера в форме Громеки—Лэмба (Lamb)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \text{grad } \frac{v^2}{2} + 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

А так как  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ , то  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Пояснение

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}.$$

Далее так как  $\rho = \rho(p)$ , то  $\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } \mathcal{P}$ . ( $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p)$  и  $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = \frac{d\mathcal{P}}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ .)

Тогда уравнение Эйлера переписывается в виде

$$\text{grad} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - W + \mathcal{P} \right) = 0.$$

А раз градиент равняется нулю, то выражение в скобках не зависит от  $x, y, z$ , но может зависеть от времени.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - W + \mathcal{P} = f(t).$$



Чтобы найти  $f(t)$ , нужно знать левую часть выражения ровно в одной точке потока. Этот интеграл уже не на линии тока, а на всём потоке выполняется.

Но есть одно замечание. Оно очень серьёзно, ведь этот интеграл мы будем использовать постоянно. Замечание такое: можно всегда переопределить потенциал  $\varphi$  так, чтобы в интеграле Коши—Лагранжа справа стояла любая константа и, в частности, ноль. Как это сделать?

$$\varphi_1 = \varphi - \int f(t) dt + C_1.$$

Скорость для этого потенциала будет та же самая, что и для  $\varphi$ .

Мне сегодня четвёртый курс сдавал практикум. Там студенты сказали, что интеграл Бернулли выводится из интеграла Коши—Лагранжа. Это нехорошо.

### 3.3.1 Различия между интегралом Бернулли и интегралом Коши—Лагранжа

	Движение уст.	Движение потенц.	Баротропия	Выполняется где
интеграл Бернулли	обязательно	не обязательно	не обязательно	вдоль линии тока
интеграл Коши—Лагранжа	не обязательно	обязательно	обязательно	всюду в потоке

Если движение установившееся и потенциальное, и баротропное, то интеграл Коши—Лагранжа по форме совпадает с интегралом Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} - W = \text{const}.$$

## 4 30 октября 2014

Сегодня будет основная теорема о вихрях. Но у нас есть пункты, которые остались с прошлой лекции.

1. Циркуляция скорости и формула Стокса.
2. Теорема Томсона о циркуляции скорости.
3. Теорема Лагранжа о сохранении свойства потенциальности движения.
4. Причины возникновения вихрей.
5. Граничные условия в задачах о движении идеальной жидкости.
6. Постановки задач о потенциальном движении несжимаемой идеальной жидкости. Уравнения Лапласа для потенциала скорости и граничные условия.

В прошлый раз мы вводили интеграл Коши—Лагранжа в случае, когда движение потенциальное. Этот интеграл в отличие от интеграла Бернулли только для потенциальных движений. Остается вопрос, а когда же движение будет потенциальным.

Я напомним, что движение потенциально, если  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ . Это, конечно же, бывает далеко не всегда. Всё же это бывает довольно часто. Первая половина лекции посвящена этому вопросу.

### 4.1 Циркуляция скорости и формула Стокса

Прежде чем упоминать теоремы, надо упомянуть формулу Стокса. У неё есть хороший механический вывод.

Основное понятие здесь — это циркуляция скорости по замкнутому контуру  $C$ . Это вот такой интеграл. Поскольку контур в среде, могу в каждой точке нарисовать вектор скорости. Радиус-вектор точки контура будет  $\mathbf{r}$ ,  $d\mathbf{r}$  — вектор, который соединяет концы маленького отрезка контура. Нам нужно интегрировать скалярное произведение, которое можно записать по-разному. Например, через  $\cos$ , или как сумму произведений компонент.

$$\oint_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = \oint_C (v_x dx + v_y dy + v_z dz) \equiv \Gamma_C.$$

Почему циркуляция? Если жидкость движется по контуру замкнутому, то циркуляция будет не нулевая, ясное дело. Но вообще не обязательно, чтобы что-нибудь циркулировало. Потом идёт только в одном направлении. Тогда  $\Gamma_C =$  чему? Будет ли она равна  $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{BC}$ ? Вот нет, она не будет, потому что циркуляция всегда определяется так, чтобы обход контура был против часовой стрелки. Скорее всего здесь будет минус  $-\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{BC}$ .

Формула Стокса заключается в следующем.

$$\oint_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = 2 \int_{\Sigma} \omega_n d\sigma,$$

где  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$  — вектор вихря, а  $\omega_n$  — это проекция вихря на нормаль к поверхности  $\sigma$ , причём нормаль эта должна быть направлена так, чтобы обход этого контура  $C$  шёл против часовой стрелки.

Интеграл  $\int_{\Sigma} \omega_n d\sigma$  называется потоком вектора вихря через поверхность  $\sigma$ . Если бы под интегралом была скорость, это был бы просто поток вещества.

Такая формула верна, если существует такая поверхность  $\Sigma$ , надетая на контур  $C$ , в каждой точке которой  $\mathbf{v}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  существуют. В каком-то смысле вращательное движение присутствует при ненулевой циркуляции. Оно может быть спрятано деформациями.

Ещё одно замечание. Когда это бывает, что не существует скорости или её производных в какой-то точке? Это бывает, когда изучают плоскопараллельное движение. Формула Стокса может быть неприменима в теории плоских задач. Что это такое? Когда рассматривается очень длинное тело. В гидромеханике это, например, крыло самолёта. В области не примыкающей к фюзеляжу или к концу крыла, я могу рассечь крыло вертикальной плоскости. В сечении крыло будет иметь вот такую форму. Можем считать, что всё во всех плоскостях происходит одинаковым.

**Определение 4.1.** Течение называется плоскопараллельным, если существует такая плоскость, что  $\mathbf{v} \parallel$  этой плоскости и не зависит от расстояния до этой плоскости.

Если возьму другие плоскости, то будет всё то же самое. То есть  $v_x = v_x(x, y, t)$ ,  $v_y = v_y(x, y, t)$ ,  $v_z = 0$  и другие параметры не зависят от  $z$ . Конечно, это упрощение. Но когда длинные объекты.

Тогда смотрите, что получается. Возьмём контур  $C$ , которое окружает профиль крыла, то формула Стокса неприменима, ведь скорость неопределена в точках профиля крыла. Возникает в безвихревом течении циркуляция. Она и даёт подъёмную силу.

## 4.2 Теорема Томсона о циркуляции скорости

Это тот самый Томсон, которому звание Лорда и дали имя Кельвин. Поэтому эта теорема встречается ещё как теорема Кельвина.

**Теорема 4.1** (Теорема Томсона о циркуляции скорости). Пусть выполнены следующие условия:

1. Жидкость идеальная (верны уравнения Эйлера);
2. Массовые силы имеют потенциал  $\mathbf{F} = \operatorname{grad} W$ ;
3. Движение баротропное, то есть  $\rho = \rho(p)$  или  $\rho = \operatorname{const}$ ;
4. Движение непрерывное<sup>1</sup>, то есть нет поверхностей разрыва;
5. Контур  $C$  — так называемый «жидкий», то есть движется вместе с частицами жидкости;

Тогда циркуляция скорости по этому контуру  $C$  сохраняется по времени, то есть

$$\frac{d}{dt} \Gamma + C = 0.$$

**Доказательство.** Состоит из двух частей.

1. Сначала доказывается, что если  $C$  — жидкий контур, то  $\oint_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = \oint_C \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \right)$ , а  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$  — ускорение точек среды. Это обычно называется первой теоремой Кельвина.
2. Затем доказывается, что при условиях 1–3  $\oint_C (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}) = 0$ .

Первая часть. Давайте попробуем доказать теорему. Нам надо продифференцировать

$$\frac{d}{dt} \oint_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) \text{ --- ?}$$

Контур  $C$  подвижный, поэтому чтобы продифференцировать этот интеграл, переходим к лагранжевым координатам  $\xi^i$ . Так как лагранжевы координаты частиц (это их фамилия, имя, отчество) на контуре не меняются, мы можем написать

$$\frac{d}{dt} \oint_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = \underbrace{\oint_C \left( \frac{\partial \mathbf{v}(t, \boldsymbol{\xi})}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} \right)}_{No1} + \underbrace{\oint_C \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial d\mathbf{r}}{\partial t} \right)}_{No2}.$$

<sup>1</sup> В частности мы под этим понимаем, что везде производные существуют.

А теперь смотрим:  $N01 = \oint_C (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r})$ , а в *No2* имеем

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} d\xi^i, \quad \frac{\partial d\mathbf{r}}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} \right) d\xi^i = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) d\xi^i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^i} d\xi^i = d\mathbf{v}.$$

Таким образом  $N02 = \oint_C (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = \oint_C d\frac{d^2}{2} = 0$ . И первая часть доказана. Нужно только, чтобы ускорение существовало.

Доказательство второй части теоремы Томсона. Берём уравнение Эйлера

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

И всё, это уравнение движения идеальной жидкости. Теперь учитываем предположения 2–3:  $\mathbf{F} = \text{grad } W$ , а

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } \mathcal{P},$$

где  $\mathcal{P} = \int \frac{1}{\rho} dp$ . Таким образом, при условиях 1–3 теоремы Томсона уравнения Эйлера имеют вид

$$\mathbf{a} = \text{grad}(W - \mathcal{P}).$$

Теперь рассмотрим циркуляцию

$$\oint_C (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}) = \oint_C (\text{grad}(W - \mathcal{P}) \cdot d\mathbf{r}) = \oint_C \frac{\partial W - \mathcal{P}}{\partial x} dx + \frac{\partial W - \mathcal{P}}{\partial y} dy + \frac{\partial W - \mathcal{P}}{\partial z} dz = \oint_C d(W - \mathcal{P}) = 0.$$

И теорема доказана. ■

### 4.3 Теорема Лагранжа о сохранении свойства потенциальности движения

Теперь давайте обсудим условия теоремы Томсона.

**Теорема 4.2.** Пусть выполнены условия теоремы Томсона, то есть

1. Жидкость идеальная (верны уравнения Эйлера);
2. Массовые силы имеют потенциал  $\mathbf{F} = \text{grad } W$ ;
3. Движение баротропное, то есть  $\rho = \rho(p)$  или  $\rho = \text{const}$ ;
4. Движение непрерывное<sup>1</sup>, то есть нет поверхностей разрыва.

Тогда если в какой-то массе жидкости в какой-то момент времени  $t_0$  движение потенциально (то есть нет вихрей,  $\boldsymbol{\omega} = 0$ ), то в этой массе жидкости движение было потенциальным раньше и будет потенциальным в дальнейшем, то есть выполнены условия 1–4, вихри не могут возникнуть.

**Доказательство.** Я хочу показать, что не может быть  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ . От противного. Пусть в момент  $t$  в какой-то точке  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ . Тогда, поскольку движение непрерывное, могу провести контур маленький в плоскости, перпендикулярной вектору  $\boldsymbol{\omega}$ . Можем применить формулу Стокса, получив, что поток вектора вихря отличен от нуля и циркуляция по контуру  $C$  отличен от нуля. То есть существует контур  $C$ , хотя бы маленький, такой, что  $\Gamma_C \neq 0$ .

Но это же та же самая жидкость. Значит, этот контур  $C$  возник из какого-то контура  $C_0$ , он есть образ контура  $C_0$ . Тогда по теореме Томсона  $\Gamma_{C_0} = \Gamma_C \neq 0$ . Но так как в момент времени  $t_0$  по теореме Стокса  $\Gamma_{C_0} = 0$ , то и  $\Gamma_C = 0$ . Получили противоречие. Ну и всё доказательство. ■

Значит, вихри не могут возникнуть.

Но ведь на самом деле вихри возникают. Над Исландией такое вихревое течение в атмосфере или вообще где-нибудь смерчи возникают. Из-за чего вихри возникают в атмосфере и в океане? Надо посмотреть на наши доказательства. На самом деле что мы можем сказать про циркуляцию ускорения вообще? Всегда можем написать уравнения движения для жидкости в таком виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nabla_j \tau^{ij} \mathbf{e}_i$$

Ну и имеем

$$\oint_C (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}) = \oint_C (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) - \oint_C \frac{1}{\rho} (\text{grad } p \cdot d\mathbf{r}) + \oint_C (\nabla_j \tau^{ij} \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{r}).$$

---

<sup>1</sup> В частности мы под этим понимаем, что везде производные существуют.

Видим, что все предположения важны. Причинами вихрей могут быть

1. Массовые силы не потенциальны (первые интеграл не равен нулю);
2. Нет баротропии;
3. Действует вязкость.

Когда силы могут быть не потенциальны? Например, на Земле иногда существенна сила Кориолиса, которая не является потенциальной. На экваторе воздух сильно нагревается и поднимается, на полюсах опускается вниз. Возникает такое течение. И есть сила Кориолиса, которая действует перпендикулярно скорости. Возникают циклоны, антициклоны...

Баротропия. Тоже возникает в океанах и в атмосфере. В разных участках Земли температура разные. Возникают муссоны, бризы.

Действие вязкости. Если её предположить, то течение может лишь случайно оказаться потенциальным. Но это только случайно.

#### 4.4 Граничные условия в задачах о движении идеальной жидкости

Какие бывают граничные условия в задачах движения идеальной жидкости? Границы бывают двух типов (в каком-то смысле даже трёх)<sup>1</sup>:

1. Твёрдые границы: положения которых заданы<sup>2</sup>;
2. Свободные границы: положения и движения границы заранее не известны, нужно их найти<sup>3</sup>.

Пример твёрдой границы: дно озера. В озере что-то там плавает.

Или труба — это тоже твёрдые границы.

Условие на твёрдой границе в идеальной жидкости называется условием непроницаемости и формулируется так:

$$v_n|_{\text{на тв.}} = v_n|_{\text{гран.}}; \quad v_n|_{\text{на пов.}} = v_n|_{\text{тела}};$$

Скорости на границе тела должны совпадать. Если скорость поверхности тела меньше скорости жидкости, жидкость оторвется. Это на самом деле и условие непроницаемости, и безотрывности. Второе слово «безотрывность» почему-то никогда не произносится. Знаете, как движется жидкость? В одном месте тело жидкость выталкивает, с другой стороны, жидкость подтекает.

Если тело неподвижно, что граничное условие  $v_n|_{\text{на пов.}} = 0$ . Если вы изучаете обтекание автомобиля (поставили в аэродинамическую трубу), то граничное условие как раз такое.

Есть ещё свободные границы. Есть твёрдая и свободная граница одновременно. Например, обтекание тела с капиллярной полостью.

Свободная граница — бак с неплотностью заполненный жидкостью и вы его везёте.

Ещё нефтяники говорят, что трубы, как правило, с не полным заполнением. Так может эта волна трубы заткнётся.

Все струи, например, струя реактивная.

Тут требуется больше больше граничных условий.

## 5 6 ноября 2014

Мы сегодня должны с вами лекцию 10 попробовать. Мы хотели заниматься граничными условиями. Мы их не разобрали, а они важны.

1. Граничные условия на свободной поверхности в идеальной жидкости.
2. Потенциальные течения несжимаемой идеальной жидкости. Уравнение Лапласа для потенциала скорости. Граничные условия.
3. Задачи о нахождении потенциала скорости при отсутствии свободных поверхностей в качестве границ. Свойство линейности этих задач (важно именно это подчеркнуть).
4. Примеры потенциальных течений несжимаемой жидкости.

<sup>1</sup> Бывают границы выделенными мысленно.

<sup>2</sup> Например, твёрдое тело, движущееся в жидкости.

<sup>3</sup> Например, поверхность моря (волны).

## 5.1 Граничные условия на свободной поверхности в идеальной жидкости

Примеры твёрдых поверхностей: подводная лодка в воде, обтекание автомобиля, рыба-меч (скорость до 230 км/ч), примеры, касающиеся самолётов, аэродинамические трубы, обтекание зданий. Суть условий на твёрдой границе это жидкость не протекает через границу. Если жидкость протекает, поверхность называется пористой. Иногда специально отсасывают протекающую жидкость.

Второй тип поверхностей: форма и движение не заданы. Говорим мы про поверхности разрыва. Разрыв чего? Скорости, плотности и ещё может быть чего. Свободной границе — это границы, через которые среда не перетекает. Все колебания связаны с тем, что сама жидкость ходит. Нет потока массы через границу. Движение этой границы нужно найти.

Примеры свободных поверхностей: поверхность волны (цунами, например, или корабельный волны), кавитация на торпеде Шквал, нефтепровод с неполным заполнением. Если образуются волны, запирающие сечение, то течение может затормозиться.

Ещё пример это гидравлический прыжок. Справа идёт река, а слева начинается прилив из моря. И вода поступает из моря в реку и они сшибаются. Прыжок распространяется с довольно большой скоростью. Даже когда вы в раковине умываетесь, происходит стоячий гидравлический прыжок.

Какие условия на свободной границе? Одного условия не хватает, нужно два. Одно называется кинематическое, другое — динамическое. По одну сторону одна среда, по другую — другая. Условие сохранения массы говорит о том, что

$$\mathbf{v}_n - D|_{\text{пов. 1}} = (\mathbf{n}_2 - D); \mathbf{v}_n|_{\text{пов. разр.}} = D_n.$$

Это условие непроницаемости.

Кинематическое условие на свободной поверхности это как раз

$$\mathbf{v}_n = D_n,$$

где  $D_n$  — скорость поверхности.

Условие из закона сохранения количества движения

$$(\mathbf{P}_n)_1 = (\mathbf{P}_n)_2.$$

Это называется динамическим граничным условием на свободной границе.

Тензор напряжений мы задать не можем. Это 9 компонент. Мы можем задать только вектор напряжений относительно нормали к границе.

Поскольку скорость границы мы не знаем, а нам хотелось бы форму границы вычислить. Поэтому делается так. Есть другая запись кинематического условия на свободной поверхности. Пусть уравнение свободной поверхности заранее неизвестно, но обозначим его  $f(t, x, y, z) = 0$ . Условие, что  $\mathbf{v}_n = D_n$ , означает, что частицы, которые находятся на поверхности, находятся на ней всегда, не могут с неё сойти (и по физике и по формальному), то есть для координат этих частиц всегда выполнено условие  $f(t, x, y, z) = 0$ . Здесь уже  $x, y, z$  — эйлеровы координаты точек частиц среды, лежащий на поверхности. Поэтому мы можем это соотношение продифференцировать по времени, считая, что  $\frac{dx}{dt} = v_x$  и аналогично с  $y, z$ . Когда продифференцируем, получится кинематическое условие такое

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

при  $f(t, x, y, z) = 0$ . Или  $\frac{df}{dt} = 0$  при  $f(t, x, y, z) = 0$ .

Теперь это уравнение на  $f$ .

Пример. Если я рассматриваю волны на поверхности воды. Есть дно и есть свободная поверхность. Уравнение поверхности будет такое  $z = h(t, x, y)$ , ну или можно написать  $f = h(t, x, y) - z = 0$ . Тогда кинематические условия пишутся вот так:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z = 0 \Leftrightarrow z = h(x, y, z).$$

Или  $v_z = \frac{\partial h}{\partial t}$  при  $z = h(t, x, y)$  — кинематическое граничное условие на поверхности волны.

### 5.1.1 Динамическое граничное условие в идеальной жидкости

Теперь давайте динамическое условие, считая жидкость идеальной. Что мы делаем? Мы должны это  $\mathbf{P}_n|_{\text{св. пов.}} = \mathbf{P}_n|_{\text{внеш.}} = \mathbf{P}_{na}$  (индекс  $a$  обозначает атмосферное) преобразовать с предположением  $\mathbf{P}_n = -p\mathbf{n}$ . Поэтому динамическое условие пишется, как  $p = p_a$  на поверхности  $f(t, x, y, z) = 0$ .

В примере с волнами  $p = p_a$  при  $z = h(t, x, y)$ .

Это условие можно переписать, как условие на скорость. Это можно сделать, например, если существует интеграл Коши—Лагранжа. Но пока я этого не буду делать.

Мы написали условия довольно сложные. Какая-то неизвестная скорость, всё нелинейное. Задачи со свободными границами неизмеримо сложнее чем задачи, где этих свободных границ нет.

Сейчас есть много пакетов для расчёта движения сред. Чтобы ими пользоваться, главное уметь правильно задать граничные условия. Тогда можно уже на кнопку нажать.

## 5.2 Потенциальные течения несжимаемой идеальной жидкости. Уравнение Лапласа для потенциала скорости. Граничные условия

Течения в океанах все вихревые. Плотность везде разная, всё достаточно трудно устроено. Поэтому сразу напишу, что жидкость несжимаемая.

Движение потенциально означает, что  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$  — уравнение потенциальности. Жидкость несжимаема, значит  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  — уравнение неразрывности. Ну что это означает вместе взятое:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Это уравнение называется уравнением Лапласа. А  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  называется оператором Лапласа. Функция  $\varphi$ , являющаяся решением, называется гармонической функцией.

Из этого уравнения можно найти  $\varphi$  и, соответственно, скорости. А другие величины уже будут находиться из других законов.

Теперь надо написать для этого уравнения Лапласа граничные условия. Тогда уже можно будет решать задачу. Коронной нашей задачей будет задача о движении сферы в несжимаемой жидкости.

### 5.2.1 Граничные условия для уравнения Лапласа в задачах о движении жидкости

Сначала запишем условия на поверхности твёрдого тела.

$$\mathbf{v}_n|_{\text{пов. тв. тела}} = \mathbf{v}_n \text{ тела}.$$

Если же  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ , то  $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  и т.д. Тогда можно написать, что  $\mathbf{v}_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , где  $\partial n$  — расстояние вдоль нормали. Я могу взять на минуточку ось  $x$  в направлении нормали.  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\varphi(n_0 + \Delta n) - \varphi(n_0)}{\Delta n}$ .

Просто вот такой вот факт  $v_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$ . Тогда условие на поверхности твёрдого тела в случае потенциального движения пишется так

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\text{на пов. тела}} = v_n|_{\text{тела}}.$$

Вот так задаётся ещё условие непроницаемости. Если нет землетрясений. А что написать на свободной границе.

В Алма-Ате строили плотину методом взрыва. Ученики Лаврентьева рассчитали, чтобы при взрыве все камни летели в одно место.

Давайте теперь напишем условие на свободной поверхности для потенциальной скорости. Можно ли их записать, как условие на  $\varphi$ ? Сначала кинематическое условие. Это легко

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Leftarrow f(t, x, y, z) = 0.$$

Неизвестные здесь уже теперь  $\varphi$  и  $f$ .

Теперь динамическое условие:  $p|_{f=0} = p_a$ . Можно записать, как условие на потенциал, если существует интеграл Коши—Лагранжа. А он существует? жидкость идеальна, движение баротропно, движение потенциальное, а потенциал массовых сил тоже существует, иначе бы движение тоже не было бы потенциальным. Значит, интеграл существует. Осталось понять, как именно будет выглядеть динамическое условие на свободной границе.

Интеграл Коши—Лагранжа выполнен везде в жидкости:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - W = \frac{p_a}{\rho}.$$

Справа вообще может стоять любая функция времени, поставим удобную нам константу. Это влияет на вид зависимости потенциала от времени, но не влияет на скорость.  $\frac{p_a}{\rho}$  пишут тут довольно часто.

Тогда на поверхности  $f = 0$  условие  $p = p_a$  и интеграл Коши—Лагранжа вместе дают

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] - W = 0 \Leftarrow f = 0.$$

Это условие очень сложное. Поэтому книги по задачам о движении волн очень большие и сложные. Исследовать это дело очень сложно.

Задачи о схлопывании пузырьков (о разрушениях, ими наносимых), задачи о взрывах, задачи о струях.

### 5.3 Задачи о потенциальном движении несжимаемой жидкости в случае отсутствия свободных поверхностей

Будем считать, что

1. Область, где движется жидкость, ограничена. Бак в ракете. В Баке находится какое-то тело. Тогда уравнение  $\Delta\varphi = 0$ , если на границе заданы условия  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\text{на гр.}} = 0$ , называется внутренней задачей Неймана.

Если же задана сама функция  $\varphi$ , то имеем задачу Дирихле.

Уравнение Лапласа линейно и граничные условия тоже линейны. Значит, внутренняя задача Неймана линейна. Раз задача линейная, то для неё есть много хороших методов решения.

2. Область неограничена, то есть содержит бесконечно удалённую точку. Это идеализация, но оказывается, для этого уравнения её можно сделать.

Здесь задачи бывают двух типов. Например

- (a) Тело движется в безграничной покоящейся жидкости. (Внешняя задача Неймана.) Если нет земли, сплошной воздух, летит самолёт. Если я отойду от тела на расстояние порядка нескольких линейных размеров, то можно считать, что точка бесконечно удалена.

Итак задача:  $\Delta\varphi = 0$  всюду вне тела, а на границе тела имеем  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\text{на пов. тела}} = v_n$  тела, и на бесконечности задана скорость  $\mathbf{v} = 0$ , то есть  $\text{grad } \varphi|_{\infty} = 0$ . (Одно добавочное условие появилось, градиент на бесконечности.)

- (b) Ещё бывает задача, где тело обтекается потоком, но это то же самое. Например, исследования в аэродинамической трубе. Или просто здания обтекаются потоком. В этом случае на поверхности тела  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\text{на пов. тела}} = 0$  и ещё  $\text{grad } \varphi|_{\infty} = \mathbf{v}_{\infty}$  задано. Это тоже называется внешней задачей Неймана.

В общем, если нет свободных границ, то задача линейна.

### 5.4 Примеры потенциальных течений несжимаемой жидкости

Из сложения этих течений я буду потом получать более сложные.

1. Поступательное движение вдоль оси  $x$ . Здесь  $\varphi = v_0 x$ ,  $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ ,  $\Delta\varphi = 0$ .
2. Источник или сток в начале координат. Что это такое. Потенциал  $\varphi = -Q4\pi r$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Хочется это разобрать, как устроено течение, удовлетворяет ли это течение уравнению Лапласа.

Как поступим? Можно ввести наукообразие, ввести сферические координаты. Но здесь всё достаточно просто, будем работать в декартовых.

$$v_x = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{x}{r} = \frac{Qx}{4\pi r^3}, \quad v_y = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{y}{r}, \quad v_z = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{z}{r}.$$

Или, векторно

$$\mathbf{v} = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Если  $Q > 0$ , источник;  $Q < 0$  — сток.

## 6 13 ноября 2014

1. Примеры потенциальных потоков идеальной несжимаемой жидкости.
2. Безотрывное обтекание сферы потенциальным потоком несжимаемой жидкости. Распределение скоростей и давление на поверхности сферы. Парадокс Даламбера—Эйлера.
3. Движение сферы в безграничной с постоянной и переменной скоростью. Присоединённая масса сферы.

Мы рассматриваем потенциальное движение несжимаемой жидкости. Значит,  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  и  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ . Вместе уравнение Лапласа  $\Delta\varphi = \text{div grad } \varphi = 0$ .

Потенциалы сложных движений будем получать, как суммы потенциалов простых.

Пример простого движения.

**Пример 6.1.** Поступательный поток со скоростью  $v_0(t)$  вдоль оси  $x$ . Потенциал  $\varphi = v_0(t)x$ .

**Пример 6.2.** Источник или сток в начале

$$\varphi = -\frac{Q(t)}{4\pi r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{x}{r}, \dots \mathbf{v} = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Если  $Q > 0$ , источник, если  $Q < 0$  — сток.

Удовлетворяет ли такое течение уравнению Лапласа? То есть является ли жидкость в примере несжимаемой? Можно было бы написать в сферических координатах. Тогда пришлось бы высчитывать символы Кристоффеля. Мы не будем, давайте в этом простом случае проверим выполнения уравнения Лапласа в декартовых координатах.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{3Qx^2}{4\pi r^5} + \frac{Q}{4\pi r^3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \dots, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \dots \quad \Delta \varphi = -\frac{3Q}{4\pi r^3} + \frac{3Q}{4\pi r^3} = 0$$

Например, если источник. Скорость направлена по радиусу. Как посчитать, сколько протекает через поверхность за единицу времени. Надо взять маленькую площадку. Через время  $t$  частицы этой площадки куда-то сместятся на  $v_R d\sigma dt$ . Тогда  $\int_{\Sigma} v_n d\sigma$  — количество жидкости, которая протекает через сферу  $\Sigma$  за единицу времени. При этом  $|v_n| = |v_r|$ . Величина

$$\int_{r=\text{const}} \frac{|Q|}{4\pi r^2} d\sigma \frac{|Q|}{4\pi r} = |Q|$$

называется расходом источника или стока, мощностью или интенсивностью.

**Пример 6.3.** Сумма источника ( $Q > 0$  и источник положим в начале координат) и поступательного потока (обтекание полубесконечного тела). Опять какое-то течение несжимаемой жидкости.

$$\varphi = v_0 x - \frac{Q}{4\pi r}, \quad \Delta \varphi = 0, \quad r \rightarrow \infty, \varphi \sim v_0 x \quad r \rightarrow 0, \varphi \sim -\frac{Q}{4\pi r}.$$

Найдётся точка (см рис), где скорость поступательного потока равна скорости источника (источник как бы сдвигает линии поступательного потока). И оказывается, что поток выглядит таким образом: он разделяется на часть, которая идёт от источника (это не линии на рис, это поверхности), поступательный поток идёт вне этой области. Найдё координаты точки  $A$  и расстояние от  $B$  до оси  $x$ . Это очень легко найти. Внутренность зоны  $ABC$  могу заменить на твёрдое тело. Скорость на границе равна по касательной — это такое же граничное условие, как для обтекания потоком твёрдого тела.

Будем считать, что решаем задачу обтекания ракеты.

Найдём  $x_A$ , то есть координату точки, где  $v = 0$ . Так как  $\varphi$  известно, скорость можно получить, как

$$v_x = v_0 + \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{x}{r}.$$

Эта формула верна везде. Хочу искать точку на оси  $x$ , то есть  $r = |x_A|$  и  $v_x = 0$ . Получается для  $x_A$  такая формула

$$x_A = -\frac{v_0 4\pi |x_A|^3}{Q} \Rightarrow |x_A| = \sqrt{\frac{Q}{4\pi v_0}}.$$

Форма поверхности  $ABC$  регулируется скоростью  $v_0$  (обозначение для скорости поступательного потока на бесконечности).

Обозначим  $R_\infty$  — радиус сечения обтекаемого тела в  $\infty$ . Тогда расход через это поперечное сечение (в  $\infty$ )  $v_0 \pi R_\infty^2$ , а с другой стороны он равняется  $Q$ . Получается формула

$$R_\infty = \sqrt{\frac{Q}{\pi v_0}}.$$

**Пример 6.4.** Источник или сток не в начале координат, а в точке  $x_0, y_0, z_0$ . Ну это совсем просто

Нужно просто ввести систему координат  $x' = x - x_0, y' = y - y_0, z' = z - z_0$ . Тогда

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} = -\frac{Q}{4\pi \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

**Пример 6.5.** Источник плюс сток с равными расходами на расстоянии  $l$ . Сток поместим в начале координат, а источник на отрицательной полуоси  $x$ . Линии тока вытекают из источника и втекают в сток. Это всё тривиально. Как выглядит потенциал:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi r(x, y, z)} - \frac{Q}{4\pi r(x + l, y, z)}.$$



**Пример 6.6.** *Диполь.* Возьмём источник и сток на расстоянии  $\Delta x$  и устремим  $\Delta x \rightarrow 0$ . Так просто мы ничего не получим. Но если ещё и  $Q = \frac{M}{x} \rightarrow \infty$ , где  $M = \text{const}$  (не зависит от  $x$ , зависит от времени). Какой получается предел:

$$\varphi = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M}{4\pi \Delta x} \left( \frac{1}{r(x + \Delta x, y, z)} - \frac{1}{r(x, y, z)} \right) = - \frac{M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right).$$

Это называется потенциалом диполя.

В каждый момент перехода к пределу уравнение Лапласа выполнено, значит, и в пределе выполнено. Или можно так рассуждать: если  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа, то и её первая производная, вторая производная, миллионная производная тоже будут удовлетворять уравнению Лапласа. Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется Гармонической.

Линии тока выглядят таким образом

А теперь я хочу сделать ещё один пример.

**Пример 6.7.** *Источник плюс сток плюс поступательный поток.* Оказывается, вот что получается. Вот есть источник, есть сток и вдали есть поступательный поток. Надо всё, что мы знаем сложить.

$$\varphi = v_0 x + \frac{Q}{4\pi r(x, y, z)} - \frac{Q}{4\pi r(x + l, y, z)}$$

Будут характерные точки  $A$  и  $B$ , где скорости друг друга компенсируют. Через точки  $A, B$  проходит поверхность, ограничивающая овальное тело. Либо линии тока внутри этого тела, либо вне.

**Пример 6.8.** *Диполь плюс поступательный поток.* Оказывается, что это и будет обтекание сферы. Мы это сейчас прямо докажем

Есть такое метод источников и стоков. Не обязательно их ставить два. Их можно ставить много и получать разные тела. Есть математическая теорема о том, что источниками и стоками можно получить любое осесимметричное тело. Если задано осесимметричное тело, то можно найти такое распределение источников и стоков на оси симметрии, чтобы получилось обтекание этого тела.

Несмотря на то, что потенциалы, нами рассмотренные, довольно простые, они решают достаточно серьёзные задачи.

## 6.1 Задача о безотрывном обтекании сферы

Рассмотрим безотрывное обтекание сферы потоком со скоростью на  $\infty$ , равной  $v_0$ . Жидкость будем считать несжимаемой, течение потенциальным.

Радиус сферы обозначим через  $R$ .  $\Delta \varphi = 0$  всюду вне сферы ( $r > R$ ). Граничные условия на поверхности сферы:  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{r=R} = 0$ . И граничные условия на бесконечности:  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{\infty} = v_0$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{\infty} = 0$ , если ось  $x$  направлена по скорости набегающего потока.

Ищем решение в виде

$$\varphi = v_0 x - \frac{M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = v_0 x + \frac{Mx}{4\pi r^3}.$$

У нас  $v_0$  уже задано. Можно ли подобрать  $M$ , чтобы были выполнены граничные условия на сфере. Ведь уравнение Лапласа мы уже проверили для этого потенциала.

Итак, граничные условия на сфере:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial r} \stackrel{?}{=} 0.$$

Лучше всего ввести сферические координаты. Будем проводить сечения шар в рассматриваемой точке, перпендикулярные оси  $x$ . Это получаются окружности. Вводим угол  $\theta$ , как угол между осью  $x$  и радиус-вектором рассматриваемой точки,  $\alpha$  — угол на сечении, отсчитываемый от вертикали. Тогда

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \alpha, \quad z = r \sin \theta \sin \alpha.$$

И теперь считаем производную потенциала по  $r$  в точке  $r = R$ .

$$\varphi = \left( v_0 + \frac{M}{4\pi r^3} \right) r \cos \theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = v_0 \cos \theta - \frac{2M}{4\pi R^3} \cos \theta \Big|_{r=R} = 0.$$

Отсюда получается, что если  $M = 2\pi R^3 v_0$ , то  $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$  на  $r = R$ .

Итак, потенциал получается

$$\varphi = v_0 x + \frac{v_0 R^3 x}{2r^3} = v_0 x \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) = v_0 r \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \cos \theta.$$

Это всё пока формулы какие-то, а я хочу найти распределение скорости на поверхности сферы.

Всё будет симметрично относительно оси  $x$ . Нормальная составляющая скорости на границе равна нулю по граничному условию. Скорость направлена по касательной. Как скорость проще всего найти. Пусть  $s$  — натуральный параметр от левого края в правый через верхнюю дугу. Тогда

$$v_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad ds = -R d\theta; \quad v_s|_{r=R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = \frac{3}{2} v_0 \sin \theta.$$

Что мы видим из этого распределения скорости? (Потом надо будет ещё давление получить.) Действительно есть критические точки и это  $A, B$ . А где скорость максимальна? В точках  $C, D$ . И что это за скорость:  $v_{\max} = \frac{3}{2} v_0$ .

## 7 Лекция 12

1. Продолжение задачи об обтекании сферы потоком идеальной несжимаемой жидкости. Распределение давлений по поверхности сферы. Сила, действующая со стороны жидкости. Парадокс Даламбера.
2. Движение сферы в жидкости, которая покоится на бесконечности.
3. Силы, действующая на сферу, движущуюся с переменной скоростью. Присоединённая масса.

Что мы в прошлый раз уже делали? Мы рассматривали задачу об обтекании сферы.

Постановка задачи такая (отдельно запишем  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ )

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 & \text{всюду вне сферы;} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{r=R} = 0; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{\infty} = v_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{\infty} = 0. \end{cases}$$

Находим решение в виде  $\varphi = v_0 x + \frac{v_0 x R^3}{2r^3}$ . Имеем  $\varphi \sim v_0 x$  при  $r \rightarrow \infty$

Напишем, что на поверхности сферы  $\frac{v}{v_0} = \frac{3}{2} \sin \theta$ . Точки  $\theta = 0, \pi$  — точки торможения, то есть  $v = 0$ . В точке  $\theta = \frac{\pi}{2}$  достигается  $v_{\max} = \frac{3}{2} v_0$ .

Хотим найти силу, действующую на сферу. Для этого найдём распределение давления. Имеем всегда (не обязательно в идеальной жидкости)

$$\mathbf{f} = \int_{\Sigma_{\text{сферы}}} \mathbf{P}_n d\sigma,$$

уже в идеальной жидкости

$$\mathbf{P} - n = -pn, \quad \mathbf{f} = - \int_{\Sigma_{\text{сферы}}} pn d\sigma.$$

Проекция силы, действующей на тело со стороны жидкости на направление скорости набегающего потока, называется силой сопротивления. Сила сопротивления в данной задаче

$$f_x = - \int_{\Sigma_{\text{сферы}}} pn_x d\sigma$$

Так как,  $v_0 = \text{const}$ , движение установившееся, не учитываются массовые силы, имеем интеграл Бернулли вдоль линии тока  $A'ACBB'$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}.$$

Отсюда видно,

$$p = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \left( 1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right) = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \left( 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right).$$

Выводы из этой формулы.

- (1) При  $\theta = 0, \pi$  (в критических точках  $A, B$ )  $p = p_0 + \frac{\rho v^2}{2}$ .
- (2) При  $\theta = \frac{\pi}{2}$  имеем  $p = p_{\min} = p_0 - \frac{5}{8} \rho v_0^2$ .
- (3) При  $\theta = \arcsin \frac{2}{3}$ .

Теперь поговорим о кавитации. Формально мы можем получить нулевое давление и даже отрицательное. В жизни даже нулевого давления не бывает, так как до наступления этого состояния жидкость успевает превратиться в пар.

Пусть  $p_0 = 1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} = 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$ ,  $\rho = 102 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $p > 0, p_{\min} = 0$ ,  $v_0 = \sqrt{\frac{8 p_0}{5 \rho}} = \sqrt{160} \text{ м} = 45 \text{ км}$ ,  $p = p_d = 0.013 \text{ Па}$

Теперь как вычислить полную силы. Вспомним  $f_x = - \int_{\Sigma \text{ сферы}} p n_x d\sigma$ . Ещё раз нарисуем картинку. Тогда  $n_x = \cos \theta$ , а  $d\sigma = 2\pi R \sin \theta R d\theta$ . Когда я буду складывать симметричное давление в разных точках, то эта сила в проекции на ось  $x$  получится равна нулю. Это вообще-то видно из вида давления

$$p = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \left( 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right).$$

То есть сила сопротивления равна нулю. А мы понимаем, что чтобы человек, например, плыл, нужно грести. Такой результат нулевой силы называется парадоксом Даламбера ( $f_y$ , кстати, тоже оказывается равным нулю).

Вообще парадокс Даламбера для любого конечного тела это вот что. Можно доказать, что **сила сопротивления** при обтекании любого конечного тела потоком несжимаемой идеальной жидкости при условии, что движение непрерывное и безотрывное, а скорость и давление в бесконечности выравнивается, **равна нулю**. Более того, парадокс Даламбера верен и для сжимаемой жидкости, но для баротропного дозвукового движения.

Давайте поговорим о том, как доказывается парадокс Даламбера.

Зачем нам его доказывать, раз он неверный? Но доказательство простое. Рассмотрим тело помещённое в трубу. Жидкость идеальная. Скорость набегающего потока  $v_0$ . Рассмотрим два сечения вдали от тела  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , то есть до и после. Боковые поверхности обозначим  $\Sigma_{\text{бок}}$ . Запишем закон сохранения количества движения для пространственного объёма  $ABCD$  и ещё телом он ограничен. Подробно делать не будем, проговорим, что сколько через границу втекает, столько и вытекает, так как границы далеко от тела. Силы будем рассматривать в проекции на направление скорости. Получаются, что  $f_x = 0$  (сила, действующая на тело). Ну а когда труда расширяется до бесконечности, всё сохраняется. Такое доказательство есть в книге Седова.

Когда же сопротивление не равно нулю? За счёт чего.

1. Вязкость (трение);
2. За счёт того, что жидкость может отрываться от тела (течение не безотрывное). Разберу потом.
3. Могут образовываться ударные волны (если среда сжимаема).
4. Тело может быть неконечное, например, бесконечно длинное.
5. Если есть свободные поверхности.
6. Если тело движется с переменной скоростью или набегающий поток имеет переменную скорость.

Если это всё учесть, силу можно вычислить. Она будет ненулевая.

Хочу прокомментировать пункт два, а потом вычислим силу из пункта шесть. Вот смотрите, есть зоны повышенного давления, есть зоны пониженного давления. Имеется полная симметрия в симметричных точках. Это всё, если движение безотрывное. Неважно, что так всё симметрично. Зоны повышенного и пониженного давления возникнут и на крыле.

Что такое развитая кавитация. Если струи срываются целой полосой, давление на той части получается не таким, как в симметричной точке.

А есть ещё отрывное течение из-за вязкости. Жидкость разгоняется от большого давления к маленькому, а потом тормозится от маленького к большому до критической точки сзади. Если жидкость идеально, ей хватает кинетической энергии, чтобы не остановиться и получается безотрывное движение. Если есть вязкость, то жидкость доходит до малого давления, а область высокого давления сзади может уже и не преодолеть. И сзади получается вихревое движение, давления там другое. Возникает добавочное сопротивление. Что замечательно: был такой замечательный человек Прандтль, гидромеханик. Во время первой мировой войны, он сказал: «давайте приклеим проволочку, и снаряд полетит быстрее». Ведь действительно, движение становится турбулентным. Скачущие частицы разгоняют затормозившийся поток, отрыв получается меньше.

Расчитать точку отрыва и сделать её как можно дальше — целая наука.

Вообще парадокс Даламбера это неправда, но опытом подтверждается. Вот в каком смысле. Когда задний хвост острый и течение имеет в нём критическую точку, то движение безотрывное. И сопротивление в этом случае, действительно, почти нуль.

## 7.1 Задача о движении сферы в жидкости, которая покоится на бесконечности

Теперь поговорим про движение с переменной скоростью.

Если бы было обтекание, то потенциал был  $\varphi = v_0 x + \frac{v_0 x R^3}{2r^3}$ . Введём систему координат, которая движется вместе с жидкостью со скоростью  $v_0$ . Тогда на бесконечности скорость будет 0.

$$\varphi = v_0 x + \frac{v_0 x R^3}{2r^3} + (-v_0 x) = -\frac{v_0 x R^3}{2r^3}.$$

Если  $v_0 > 0$  движется против оси  $x$ , а я хочу наоборот. Поэтому потенциал движения сферы будет такой

$$\varphi = -\frac{v_0 x R^3}{2r^3}.$$

Вот такой будет потенциал абсолютного движения (относительное движение в том случае, когда тело обтекается жидкостью) в подвижной системе координат, связанной со сферой. Дальше можно вычислить скорости, давления и прочее. Никто не сказал, что  $v_0$  будет константа. Она может зависеть от времени  $v_0(t)$ . Одно но: координаты, в которых записан потенциал,  $r$  — расстояние от центра сферы, то есть сфера же движется. Наши координаты подвижны.

Давление получим из интеграла Коши—Лагранжа. Координаты, связанные с пространством, относительно которого происходит движение, обозначим  $X^i$ . Как пишется интеграл

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{X^i = \text{const}} t + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = f(t).$$

Можно раз и навсегда вывести интеграл Коши—Лагранжа в подвижной системе координат. Так и сделаем.

## 7.2 Интеграл Коши—Лагранжа в подвижной системе координат

Пусть  $X^i$  — координаты в неподвижной системе,  $x^i$  — координаты в системе, связанной со сферой.

$$X^1 = x^1 + v_0 t; \quad X^2 = x^2, \quad X^3 = x^3.$$

А в общем случае есть какие-то связи  $X_i = X_i(x^k, t)$ . Нужно вычислить  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{x^k = \text{const}}$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{x^k = \text{const}} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial X^i} \frac{dX^i}{dt} \right|_{x^i = \text{const}} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{x^i = \text{const}}.$$

А частная производная

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{x^i = \text{const}} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{X = \text{const}} + v_i v^i_{\text{перенос}}.$$

Что-то со знаками неправильно.

Итак, интеграл Коши—Лагранжа в подвижной системе координат записывается так

$$\varphi = \varphi(x, t), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{x^i = \text{const}} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - v_i v^i_{\text{перенос}} = f(t).$$

## 8 Лекция 13

Будет продолжение

1. Движение сферы в идеальной несжимаемой жидкости. Сила, действующая со стороны жидкости на сферу, когда сфера движется с переменной скоростью. Присоединённая масса.
2. Плоские (плоскопараллельные) движения несжимаемой жидкости. Функция тока, её механический смысл.
3. Плоские потенциальные движения несжимаемой жидкости. Комплексный потенциал.
4. Примеры комплексных потенциалов. (На самом деле примеры течений, конечно, которые они описывают.)

### 8.1 Движение сферы в идеальной несжимаемой жидкости

Ну вот, надо постараться выполнить план. А то мы сильно опаздываем. Вторую лекцию подряд будем изучать движение сферы в идеальной жидкости.

Есть линии тока, которые идут прямо и упираются в сферу в точках, которые называются критическими. Частицы движутся вдоль сферы, разделившись на два потока, и в другой критической точке соединяются и идут на бесконечность.

Теперь движение сферы в пространстве. Частицы подтекают, чтобы не образовывался вакуум. Хотим вычислить силу, которая действует на сферу. Наверно, надо сразу сказать, что раз мы уже получили парадокс Даламбера. Если обтекание с постоянной скоростью на бесконечности, то сила равна нулю. И ясно, что в случае движения сферы будет то же самое. Если же сфера движется с ускорением, сила не будет равна нулю.

Пусть сфера движется со скоростью  $v_0$ . Не совсем прямым способом мы получили потенциал

$$\varphi = -\frac{v_0 x R^3}{2r^3}.$$

Это есть решение, если выполнены следующие условия  $\Delta\varphi = 0$  (это формулировка задачи, из которой  $\varphi$  находится), а ещё граничное условие на сфере:  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\text{на сфере}} = v_0 \cos\theta$ , и граничное условие на бесконечности  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{\infty} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{\infty} = 0$ .

Я не буду проверять, что потенциал этим условиям удовлетворяет и это есть решение задачи.

Отметим, что  $v_0$  может быть как постоянная, так и переменная. Этот потенциал подходит и при  $v_0 = \text{const}$  и при  $v_0 = v_0(t)$ .

## 8.2 Сила, действующая со стороны жидкости на сферу, когда сфера движется с переменной скоростью

Сейчас меня больше всего интересует сила. Линии тока, распределение скоростей — это меня не интересует. Вычислим силу  $\mathbf{f}_{\text{жидк}}$ , действующую со стороны жидкости.

$$\mathbf{f}_{\text{жидк}} = \int_{\Sigma_{\text{сф}}} \mathbf{P}_n d\sigma = - \int_{\Sigma_{\text{сф}}} p \mathbf{n} d\sigma.$$

Значит,  $f_{x\text{жидк}} = - \int_{\Sigma_{\text{сф}}} p n_x d\sigma$ . А какое  $p$ ? Движение не установившееся, значит, не можем использовать интеграл Бернулли. Но есть ещё интеграл Коши—Лагранжа. Запишем его, не учитывая массовые силы, считая  $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$  производной при постоянных пространственных координатах.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t).$$

В прошлый раз мы вводили обозначения  $X^i$  ( $X, Y, Z$ ) для пространственной системы координат, относительно которой рассматривается движение, а  $x^i$  — координаты относительно сферы. Будет соотношение  $x = X + v_0(t)$ . Мне хочется  $\varphi$  дифференцировать. Будем считать, что функция  $\varphi = \varphi(X^i(x^k, t))$ . Поэтому

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{x^k=\text{const}} = \frac{\partial\varphi}{\partial X^i} \frac{dX^i}{dt}\Big|_{\underbrace{x=\text{const}}_{v_{\text{перенос}}}} + \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{X=\text{const}}}_{\text{}}.$$

Последнее слагаемое стоит в интеграле Коши—Лагранжа. Оно нам и интересно. Выражаем его и записываем интеграл

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{x^k=\text{const}} - v_i v_{\text{пер}}^i + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t).$$

Можно в более удобном варианте написать.

$$\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t} - v_i v_{\text{пер}}^i + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t).$$

Что происходит на бесконечности:  $\frac{\partial\varphi}{\partial t} \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow 0$ , а  $p \rightarrow p_0$  — давление в бесконечности. Значит,  $f(x) = \frac{p_0}{\rho}$ . И окончательная формула для давления будет такая.

$$p = p_0 - \frac{\rho v^2}{2} + \rho v_x v_0 - \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Теперь надо подставить в интеграл по сфере и вычислять. Но можно и упростить себе жизнь таким образом.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{dv_0}{dt} \frac{x R^3}{2r^3}$$

Если бы скорость была константа, то просто не было бы члена  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . То есть на самом деле нужно вычислить только интеграл от последнего слагаемого, ведь при постоянной скорости полная сила ноль. Кто не верит, может посчитать всё, будет, конечно, ноль. Я этого делать не буду.

$$f_{x\text{жидк}} = - \int_{\Sigma_{\text{сф}}} p n_x d\sigma = - \int_{\Sigma_{\text{сф}}} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} n_x d\sigma.$$

При этом  $n_x = \cos \theta$ ,  $x = R \cos \theta$ ,  $d\sigma = R d\sigma 2\pi R \sin \theta$ .

Если всё подставить, что же мы получим.

$$f_{x\text{жидк}} = -\rho \frac{dv_0}{dt} \frac{R}{2} 2\pi R^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\frac{2}{3} \pi R^3 \rho \frac{dv_0}{dt}.$$

Получается, что сила проаорциональна ускорению  $f_{x\text{жидк}} = -\mu \frac{dv_0}{dt}$ , где  $\mu = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho = \frac{1}{2} v_\rho$  — половина массы жидкости в объёме.

Если сфера останавливается, она тормозит жидкость, а у жидкости есть инерция.

### 8.2.1 Присоединённая масса

Коэффициент  $\mu$  называется присоединённой массой. Почему он такое странный. Когда сфера движется, на неё кроме силы со стороны жидкости действует сила  $f_{x\text{двиг}}$  (я её назову силой двигателя), которая её движет, со стороны двигателя, мотора.

Уравнение движения сферы выглядит таким образом

$$m a_x = f_{x\text{двиг}} + f_{x\text{жидк}} = f_{x\text{дв}} - \mu a_x.$$

В итоге получается, что уравнение движения сферы в проекции на ось  $x$  сейчас пока

$$(m + \mu) a_x = f_{x\text{дв}}.$$

Жидкость движется так, как в пустоте, если бы её масса увеличилась на  $\mu$ . Поэтому  $\mu$  называется присоединённой массой.

Если движение вдоль другой оси, то всё то же самое. Но если тело не является симметричным, то присоединённая масса зависит от направления. А если тело несимметричное и вращается (пока сфера крутится, ничего не происходит), от вращения появится добавочная присоединённая масса. Если всё это учесть, возникает целый тензор присоединённых масс  $\lambda_{ik}$ .

Обтекание сферы бывает такое, как мы показали, но с увеличением скорости начинают срываться вихри. Оказывается, что в передней части распределение давления реальное близко к теоретическому. А сзади образуются отрывы жидкости. И нужно делать тела как можно более обтекаемые. Это, конечно, ещё в древности знали.

## 8.3 Плоские задачи

**Определение 8.1.** Течение называется плоскопараллельным, если существует такая плоскость, что скорости течения всех точек параллельны этой плоскости и, кроме того, и скорость, и все остальные параметры не зависят от расстояния до этой плоскости. Если эту плоскость назвать плоскостью  $x, y$  (вернее оси координат в этой плоскости ввести), то для плоского движения  $v_x = v_x(x, y, t)$ ,  $v_y = v_y(x, y, t)$ ,  $v_z = 0$ .

В каждой плоскости линии тока такие же, как и в основной плоскости.

### 8.3.1 Примеры, когда такая модель применима

Такое бывает приближённо. Большая колонна моста, есть дно, есть крыша. Для достаточно удалённых от границы плоскостей, всё происходит одинаково.

Ну или, например, самолёт. Если он имеет длинные крылья, то далеко от фюзеляжа во всех сечениях обтекание одинаковое.

Приток нефти в скважине в каждой плоскости всё происходит одинаково

Труба расширяется под давлением. Можно рассчитать, что расширение во все стороны одинаково и во всех сечениях одинаково

А если взрывается, то уже нельзя применять плоские модели.

В лавина всё движется одинаково.

### 8.3.2 Функция тока

Теперь рассмотрим плоское течение несжимаемой жидкости. В этом случае можно ввести функцию тока. Мы имеем уравнение неразрывности  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , можно записать  $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  или  $\frac{\partial}{\partial x}(v_x) = \frac{\partial}{\partial y}(-v_y)$ . Отсюда можно записать точную дифференциальную форму  $-v_y dx + v_x dy = d\psi$ . Тогда  $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ , а  $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ .

Такую функцию можно ввести, когда задача плоская, а жидкость несжимаема. Неважно, если ли вихри.

Мезанический смысл функции тока. На линии тока  $\psi = \text{const}$ . Ведь что такое линия тока? Линия, определённая в фиксированный момент времени и такая, что направление касательной к этой линии в каждой точке совпадает с направлением скорости. Как написать уравнение линии тока:  $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$ . Теперь если напишем  $\frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{dy}{-\frac{\partial \psi}{\partial x}}$ , то получим  $-\frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$ . Вот поэтому она и называется функцией тока.

Если имеется какая-то линия  $A, B$ , можно вычислить так называемый расход через линию  $AB$ , то есть  $\psi(B) - \psi(A)$ . Вообще у нас всё в пространстве. Поверхность с образующей  $AB$ , единичной высоты. Расход через такую поверхности и есть расход через линию. А вообще это интеграл

$$\text{Расх} = Q = \int_A^B v_n dl.$$

Как показать, что это  $\psi(B) - \psi(A)$ . Можно выбрать  $x$  по нормали на минуточку, а  $y$  по касательной к линии. Тогда

$$Q = \int_A^B \frac{\partial \psi}{\partial l} dl = \psi(B) - \psi(A).$$

Теперь связи между  $\psi$  и вектором вихря  $\boldsymbol{\omega}$ . Оказывается, что в плоском течении всегда  $\omega_x = \omega_y = 0$ , а  $\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \Delta \psi$ . Поэтому, если течение вихревое, то оператор Лапласа от функции тока не равен нулю.

## 8.4 Плоское потенциальное течение несжимаемой жидкости

В этом случае в силу потенциальности и из определения функции тока  $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ . Видим, что  $\varphi$  и  $\psi$  связаны условиями Коши—Римана. Это значит, что можно ввести функцию  $W = \varphi + i\psi$  и это будет аналитической функцией комплексного переменного  $x + iy = z$ . Функция  $W$  называется комплексным потенциалом.

## 9 Лекция 14

1. Плоские потенциальные течения несжимаемой жидкости. Комплексный потенциал, комплексная скорость. Примеры комплексных потенциалов некоторых течений.
2. Постановка об определении комплексного потенциала при обтекании тел идеальной несжимаемой жидкостью.
3. Обтекание цилиндра (безциркуляционное и с циркуляцией). Подъёмная сила.
4. Метод конформных отображений при решении плоских задач об обтекании тел.

### 9.1 Примеры комплексных потенциалов

Мы рассматриваем плоское движение. Это значит, что у нас есть только  $v_x = v_x(x, y, t)$  и  $v_y = v_y(x, y, t)$ , время нам сейчас неважно, поскольку, как мы увидим, время в решении будет входить как параметр. Жидкость несжимаема, значит,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где  $\psi$  — функция тока. Потенциальность же гарантирует  $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ . Значит,  $\Delta \varphi \Delta \psi = 0$ . Можно соорудить комплексно-аналитическую функцию  $\varphi + i\psi = W(z)$ , где  $z = x + iy$ . Она аналитическая, так как выполнены условия Коши—Римана.  $W(z)$  называют комплексным потенциалом.

Теперь я хочу посмотреть, чему равна производная от комплексного потенциала. Если функция  $\mathbb{C}$ -дифференцируема, то можно брать производную по любому направлению. Я сейчас возьму по направлению оси  $x$ .

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - i v_y.$$

Если я представлю скорость, как комплексное число, то есть  $v = v_x + iv_y$ , то получится

$$\frac{dW}{dz} = v_x - iv_y = \bar{v}.$$

Эта величина называется **комплексной скоростью**.

Любая дифференцируемая функция может быть представлена в виде потока на комплексной плоскости. Например,  $W = az$  — поступательный поток вдоль оси  $x$  со скоростью  $a$ , если  $a \in \mathbb{R}$ . Действительно,  $W = ax + iay$ , значит,  $\varphi = ax$ ,  $\psi = ay$ . Линиями тока являются линии  $\psi = \text{const}$ , то есть  $y = \text{const}$ .

А если я напишу так:  $W = (a + bi)z$ , ясно, что это будет тоже поступательный поток.  $\frac{dW}{dz} = a + bi = v_x - iv_y$ .

### 9.1.1 Квадратичный потенциал

Ещё пример  $W = az^2$ , где  $a \in \mathbb{R}$ . Значит,  $W = a(x^2 - y^2 + 2ixy)$ . Функция тока  $\psi = 2xy$  порождает линии тока  $x = 0$ ,  $y = 0$  либо  $y = \frac{1}{2x}$ . При  $z = 0$  чему равняется скорость?  $\frac{dW}{dz} = 2az$ , значит при  $z = 0$  скорость нулевая. Это критическая точка называется. Каким потокам это течение соответствует? Говорят, это поток внутри прямого угла. Я всегда в идеальной жидкости могу линию тока заменить на твёрдую стенку. Это может быть представлено, как течение внутри прямого угла с нулевой скоростью в самом углу. Или это может быть набеганием на плоскую стенку Или это может быть набеганием на тело. Обтекание всегда выглядит таким образом, что есть линия тока разделяющая поток, входящая в критическую точку. В окрестности критической точки течение имеет как раз наш вид. В малой окрестности критической точки раскладываю в ряд комплексный потенциал  $W = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ . Тогда  $\frac{dW}{dz} = a_1 + 2a_2z$ . При  $z = 0$  скорость должна быть нулевая, если  $z = 0$  — критическая точка, значит,  $a_1 = 0$ . Таким образом, всегда будет угол девяносто градусов.

Что ещё тут может быть? Соударение двух потоков (г) и (д) — это течение в изогнутом канале (у которого стенки — гиперболы).

### 9.1.2 Моном

Пусть  $W = az^n$ , где  $a \in \mathbb{R}$ . Тогда в тригонометрической форме  $z = re^{i\theta}$

$$W(z) = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad \psi = r^n \sin n\theta.$$

Линии тока, например,  $\psi = 0 = \sin n\theta$ .  $n\theta = k\pi$ ,  $\theta = k\frac{\pi}{n}$ . Говорят, что это течение вне угла. При этом  $\frac{dW}{dz} = anz^{n-1}$ . Это может быть кусочком какой-то задачки. Обтекается какой-нибудь ёжик. И в окрестности любого угла будет такое течение. В вершине угла всегда скорость ноль.

### 9.1.3 Источник или сток

Плоские задачи означают, что есть не одна точка-источник, а прямая. Задача о взрыве шнура. В каждой плоскости получается точечный источник.

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln z = \frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\theta).$$

Линии тока  $\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta = \text{const} \Leftrightarrow \theta = \text{const}$ . Можно вычислить скорость через полярные координаты  $v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}$ . Расход на линии  $AB$  из окружности всегда равен  $\psi(B) = \frac{Q}{2\pi} (\theta_b - \theta_a)$ . Расход на всей окружности равен  $Q$ . Если  $Q > 0$  это называется источник, иначе сток.

Можно рассмотреть источник плюс поступательный поток.

Опять же метод источников и стоков применять для обтекания тел.

### 9.1.4 Точечный вихрь

$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$ , где  $\Gamma$  — действительное число. В тригонометрическом виде

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} (\ln r + i\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln r, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r, \quad \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta.$$

Линии тока в данном случае  $\psi = \text{const}$ , то есть  $r = \text{const}$  — окружности.

Что значит  $v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ ? Если  $\Gamma > 0$ , движение по часовой стрелки,  $\Gamma < 0$  — против часовой. Скорость растёт всё ближе к нулю. Твёрдое тело крутится не так как жидкость. Хотя жидкость может крутиться и как твёрдое тело.



А почему потенциальное течение  $W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$  называется точечным вихрем? Вихрь равен везде нулю кроме начала координат. Вычислим циркуляцию скорости по окружности, обхватывающей начало координат.

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (v_r dr + v_\theta r d\theta) = \oint_C \frac{\Gamma}{2\pi} d\theta = \Gamma,$$

если начало координат внутри контура. Если же начало координат лежит вне контура, то циркуляция будет равна нулю.

У нас есть формула Стокса

$$\Gamma_C = \oint_C v_l dl = 2 \int_\Sigma \omega_n d\sigma,$$

если существует такая  $\Sigma$ , что во всех её точках  $\omega_n$  определена, то есть скорость дифференцируемая функция.

У нас  $\Gamma \neq 0$ , так как скорость не дифференцируема. Циркуляция не зависит от формы контура вокруг начала координат. Если в малой окрестности нуля заменить течение на непрерывное, то формула Стокса будет годиться. Тогда  $\Gamma = \omega_n \Delta\sigma$ . Дальше мы радиус окружности устремим к нулю.

### 9.1.5 Сток плюс вихрь

$W = \left(\frac{Q}{2\pi} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\right) \ln z$ . Ещё это называют вихрестокком. Это можно рассматривать как модель торнадо. Давление на оси очень маленькое, туда будет всё засасывать.

## 9.2 Задача об обтекании тела в терминах комплексного потенциала

В терминах  $\varphi$  имеем следующую задачу

- (1)  $\Delta\varphi = 0$  всюду вне контура тела;
- (2)  $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$  на контуре;
- (3)  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\big|_\infty = v_{x\infty}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\big|_\infty = v_{y\infty}.$

Теперь то же самое в терминах комплексного потенциала  $W$

- (1) Найти  $W$  — аналитическую всюду вне контура;
- (2)  $\text{Im } W = \text{const}$  на контуре;
- (3)  $\frac{dW}{dz}\big|_\infty = \bar{v}_\infty.$

В терминах  $W$  решать задачу проще, так как найти решение уравнения Лапласа так сходно непросто.

## 9.3 Задача об обтекании цилиндра радиуса $a$ потоком несжимаемой жидкости

Можно было и построить решение, но я просто скажу ответ.

$$W = v_\infty \left( z + \frac{a^2}{z} \right).$$

Докажем, что выполнены условия (1)–(3) выполнены.

- (1)  $\frac{dW}{dz} = v_\infty \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right)$  — вне цилиндра. Функция удовлетворяет условиям Коши—Римана.
- (2)  $W = v_\infty \left( x + iy + \frac{a^2}{r^2}x - i\frac{a^2}{r^2}y \right)$ . Значит,  $\psi = v_\infty \left( y - \frac{a^2}{r^2}y \right)$ . Значит, линии тока есть либо  $y = 0$ , либо  $r = \text{const}$ . В частности  $r = a$ , то нам и нужно было.
- (3)  $\varphi = v_\infty x \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$ . На поверхности тела

Найдём распределение скоростей на поверхности  $r = a$ .  $\varphi = v_\infty \cos\theta \cdot 2a$ .  $v_\theta = -2v_\infty \sin\theta$  на поверхности цилиндра  $|v| = 2v_\infty \sin\theta$ .

Суммарная сила будет ноль. Парадокс Даламбера. Однако, решение не единственно.

## 10 Лекция 15

1. Обтекание цилиндра идеальной несжимаемой жидкостью с циркуляцией. Подъёмная сила.
2. Метод конформных отображений для решения задач об обтекании контура идеальной несжимаемой жидкостью.
3. О величине циркуляции при обтекании контура с одной острой кромкой (постулат Жуковского—Чаплыгина).
4. Потенциальное течение сжимаемой жидкостью. Полная система механических уравнений для баротропных процессов.
5. Распространение малых возмущений в покоящейся среде. Линеаризация уравнений.

Теперь можно начать по существу. В прошлый раз занимались задачей об обтекании цилиндра потенциальным несжимаемым потоком.

На бесконечности скорость обозначали  $v_0$ , потенциал получился

$$W = v_0 \left( v_0 z + \frac{a^2}{z} \right), \quad x = u + iy, \quad v_0 = -2v_0 \sin \theta.$$

Это решение называется безциркуляционным обтеканием цилиндра идеальной несжимаемой жидкостью.

По формуле Стокса циркуляция по любому контуру, не охватывающему цилиндр, равна нулю. А если контур  $C$  — окружность, внутри которой вложен цилиндр

$$\Gamma = \oint_C v_l dl - \oint_C v_0 a d\theta = 0.$$

Но, оказывается, решение задачи об обтекании цилиндра и других контуров не является единственным. Задача о нахождении  $W$

1.  $W$  — аналитическая функция в области, занятой жидкостью.
2.  $\text{Im } W = \text{const}$  на контуре (условие непроницаемости).
3.  $\frac{dw}{dz} = \bar{v}_0$ .

Этим условиям удовлетворяет много решений.

$$W = v_0 \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + \left( \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \right), \quad \Gamma \in \mathbb{R}.$$

Убедимся, что условия (1)–(2) выполнены.

1.  $W$  аналитична при  $|z| \geq a$ .
2. При  $r = a$  имеем  $\text{Im } W = v_0 y \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln a = \text{const}$ .
3.  $\frac{dW}{dz} = v_0 \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}$ . При  $z \rightarrow \infty$   $\frac{dW}{dz} \rightarrow v_0$ .

При этом  $\Gamma_C = \oint_C v_0 a d\theta = \Gamma$ . То есть имеем обтекание с циркуляцией. Добавили точечный вихрь.

При  $\Gamma = 0$   $v(A) = v(B) = 0$ ,  $A, B$  — критические точки.

Где  $\Gamma \neq 0$  критические точки сместятся. При  $\Gamma > 0$  критические точки сместятся вверх. Линии тока должны проходить в критические точки под углом  $90^\circ$ , это мы обсуждали, когда рассматривали поток с потенциалом  $\frac{1}{z^2}$ . А на бесконечности линии тока горизонтальны.

Снизу скорости складываются или можно заметить, что частицам снизу нужно больший путь пройти. Так что получится сила, действующая вниз для  $\Gamma > 0$ . Посмотрим на это через интеграл Бернулли. Проверьте для точечного вихря добавок.

$$v_0 = -2v_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}, \quad v_0^2 = 4v_0^2 \sin^2 \theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2} - \frac{2\Gamma v_0 \sin \theta}{\pi a}, \quad p = p_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2 - \frac{\rho}{2} v^2,$$

если массовых сил нет. Силы Архимеда я не учитываю.  $n_x = \cos \theta$ ,  $n_y = \sin \theta$ ,  $d\sigma = a d\theta$ .

$$f_{x\text{жидк}} = - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta, \quad f_{y\text{жидк}} = - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta.$$

Так как есть симметрия по оси  $y$  в том смысле, что модули скорости одинаковы с двух сторон и давления одинаковы. И поэтому  $f_x$  получится равной нулю. А по  $y$  давайте попробуем посчитать. Интеграл от  $p_0$  ничего не даст, так как нормали по окружности распределены симметрично. Второе слагаемое постоянно, оно тоже ничего не даст. Интегрировать нужно только последнее слагаемое из  $v_0^2$  (от него и зависит  $p$ )

$$f_{y\text{жидк}} = - \int_0^{2\pi} \left( \frac{\rho}{2} \frac{2\Gamma v_0 \sin \theta}{\pi a} \right) \sin \theta a d\theta.$$

Если проинтегрировать получится

$$f_{y\text{жидк}} = -\rho v_0 \Gamma$$

Таким образом для известной скорости потока на бесконечности  $v_0$  имеем формулу Кутта—Жуковского

$$f_{\text{жидк}} = -i\rho v_0 \Gamma. \quad (1)$$

$f_{\text{жидк}} \perp$  скорости набегающего потока называется подъёмной силой.

## 10.1 Метод конформных отображений для решения задач об обтекании профилей идеальной несжимаемой жидкостью

А зачем мы безотрывно обтекаем цилиндр на лекции. На практике безотрывно почти никогда не обтекается. Образуются срывы. Но есть формы, которые обтекаются безотрывно. Формы торпед делает именно с этим соображением.

Чтобы обтекать произвольные контуры, можно применить так называемый метод конформных отображений, который сводит обтекание произвольного тела к обтеканию цилиндра. А почему не к плоскости сводить? По плоскости нельзя сделать циркуляцию.

Пусть есть замкнутый плоский контур  $L$ . Задача 1. найти аналитическую вне контура  $L$  функцию  $W(z)$  Можно всё это обобщать, а мы напомним, что ищем такую  $W$ , что  $\text{Im } W = \text{const}$  на  $L$  и  $\frac{dW}{dz} \Big|_{\infty} = v_0$ .

Пусть на плоскости  $\zeta$  знаем аналитическую функцию  $W_1(\zeta)$ , для которой  $\text{Im } W_1 \Big|_{L_1} = \text{const}$  и  $\frac{dW_1}{d\zeta} = \frac{1}{k} v_0$ . Пусть также мы знаем конформное отображение внешности  $L_1$  на внешность  $L$  и обратно. Известна теорема Римана о том, что такое отображение существует и единственно при дополнительных условиях  $z_{\infty} \Rightarrow \zeta = \infty$ ,  $\frac{d\zeta}{dz} = k$  — действительное число.

Если я подставлю  $W_1(f(z)) = W(z)$ , то получу решение задачи 1. Условие аналитичности выполнено, так как  $\exists \frac{dW_1}{d\zeta}, \frac{d\zeta}{dz}, \frac{dW}{dz} = \frac{dW_1}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ . Условие на контуре выполняется, так как граница области конформности перейдёт в границу области конформности. Условие на бесконечности  $\frac{dW}{dz} \Big|_{\infty} = \frac{1}{k} v_0 k = v_0$ .

Мы не просто доказали, что решение существует, мы даже формулу можем написать

$$W_1 = v_0 \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta, \quad \zeta = f(z).$$

## 10.2 Постулат Чаплыгина

Как выбрать  $\Gamma$ ? При  $\Gamma = 0$  должна быть симметрия сил и особые точки располагаются симметрично. Но ясно, что такое обтекание никогда не выполняется, происходит срыв потока. Мы хотим безотрывное обтекание выбором циркуляции. Мы выберем так, чтобы задняя критическая точка сместилась перешла в острый конец профиля. На нашем рисунке критические точки сдвинуты вниз. Конформное отображение на даст нужное расположение критических точек на цилиндре. Нам нужно  $\Gamma < 0$  выбрать.

Чаплыгин говорит, что безотрывное движение осуществляется, если и только если задняя критическая точка является точкой излома контура.

## 10.3 Потенциальное движение сжимаемой жидкости

Предположим, что

1. Жидкость идеальная.
2. Массовые силы не учитываются.
3. Движение безотрывное.

Обычно течение потенциальное.

Запишем систему уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} = f(t); \quad (3)$$

$$\rho = \rho(p). \quad (4)$$

Если учесть потенциальность в уравнении неразрывности, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \rho \Delta \varphi = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \mathcal{P}(p) = f(t); \quad (6)$$

$$\rho = \rho(p). \quad (7)$$

## 10.4 Распространение малых возмущений

Никаких комплексных переменных, ничего сделать нельзя. Нелинейности, всё очень сложно. Но мы упростим себе задачу. Рассмотрим распространение малых возмущений, я хочу объяснить, как распространяется звук. Фон — это основное состояние.  $v = 0$ ,  $p = p_0$ ,  $\rho = \rho_0$  — такое состояние будем называть фоном. Введём малые возмущения:  $v = \tilde{v}$  — малая величина (их квадратами будем пренебрегать по сравнению с их первыми степенями),  $p = p_0 + \tilde{p}$  — малая добавка,  $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$ . Тогда

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \mapsto \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{P}_0 + \frac{a_0^2}{\rho_0} + \frac{a_0^2}{\rho_0} \tilde{\rho} = f(t) \quad \mapsto \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{a_0^2}{\rho_0} \tilde{\rho} = 0. \quad (9)$$

Здесь  $\varphi_1 = \varphi + \mathcal{P}_0 t - \int f(t) dt$ . Это линеаризованная система.  $\operatorname{grad} \varphi_1 = \operatorname{grad} \varphi = v$ .

## 11 Распространение малых возмущений в покоящейся сжимаемой идеальной жидкости или газе

1. Линеаризованная система уравнений;
2. Волновые уравнения для скорости, плотности и давления;
3. Одномерные движения с плоскими волнами.
  - (а) Решение Даламбера. Физический смысл.
  - (б) Решение задачи Коши. Область влияния начальных данных и область зависимости решения.
  - (с) Условия Куранта.
  - (д) Связь между скоростью и плотностью в бегущей волне.
  - (е) Гармонические бегущие волны.

Мы сейчас сделаем такие предположения о среде и движении.

1. Жидкость идеальна, сжимаема; (если вязка, нужно сделать поправки на выводы);
2. Массовые силы учитывать не будем;
3. Движение является баротропным. Это значит, что  $\rho = \rho(p)$ .
4. Движение потенциально;
5. Движение есть малое возмущение состояния покоя.

Из условий 1–4 какая следует система уравнений (если условие 5 пока не учитывать)? Мы уже начинали её писать, ничего, напомним ещё раз. Уравнение неразрывности и интеграл Коши—Лагранжа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \mathcal{P} = f(t). \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ ,  $\mathcal{P} = \int \frac{1}{\rho} dp = \mathcal{P}$ ,  $f(t)$  — произвольная функция  $t$ .

В случае общего положения эти уравнения сложно исследовать. Но мы будем изучать их при предположении 5. Основное состояние покоя<sup>1</sup> значит  $v = 0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ . Движение с малыми возмущениями значит  $v$  мало,  $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$ , где  $\tilde{\rho}$  мало;  $p = p_0 + \tilde{p}$ , где  $\tilde{p}$  мало. Все параметры равны фоновым плюс малые добавки. Добавки малы вместе со своими производными.

Понятие малости имеет смысл в безразмерных переменных. Нужно ввести величины  $\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}$  и  $\frac{\tilde{p}}{p_0}$  малые. А  $v$  с чем сравнивать? Мы сегодня ответим на этот вопрос.

Мы пока будем считать факт малости как возможность не учитывать члены второго и более порядков.

Так что делается с исходной системой уравнений в случае малого возмущения покоя?

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{P}_0 + \tilde{\mathcal{P}} = f(t). \quad (4)$$

Учтём, что  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ , мы будем на  $\varphi$  уравнение составлять. А ещё учтём, что  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho} \frac{d\rho}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_0} \tilde{\rho}$ . Величина  $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho_0}$ , а  $\frac{d\rho}{d\rho} = a_0^2$ . Тогда получаем линейную систему следующего вида

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \varphi; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{a_0^2}{\rho_0} \tilde{\rho} = 0, & \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \tilde{\rho}. \end{cases}$$

У нас ведь  $\tilde{\rho} = -\frac{\rho_0}{a_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . А для давления  $p = p(\rho) = p_0 + \underbrace{a_0^2 \tilde{\rho}}_{\tilde{p}}$ . Получаем три волновых уравнения (они называются

волновыми, как вы знаете)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \varphi; \\ \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \tilde{\rho}; \\ \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \tilde{p}. \end{cases}$$

Я не буду решать всё. Рассмотрим одномерные движения с плоскими волнами. Это значит, что в декартовой системе координат  $v_y = v_z = 0$ ,  $v_x = v(x, t)$ ,  $\rho = \rho(x, t)$ ,  $p = p(x, t)$ . В каждом сечении, перпендикулярном оси  $x$ , всё происходит одинаково; вот, что означают слова «движение с плоскими волнами». Бывает ещё одномерное движение с цилиндрическими волнами, когда  $v_r = v_r(r, t)$ . И одномерное движение со сферическими волнами, когда сфера пульсирует,  $v_r(r, t)$ .

У нас только одномерное движение с плоскими волнами. Уравнение  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ . Решение вы знаете

$$\varphi = f_1(x - a_0 t) + f_2(x + a_0 t).$$

Это называется решением Даламбера. Здесь  $f_1, f_2$  произвольные. В конкретной задаче эти функции определяются из граничных условий. В задаче с цилиндрическими волнами такого не получится. Со сферическими и общими волнами тем более.

Какой физический смысл этого решения Даламбера. Рассмотрим  $f_1(x - at)$ .

В какой-то момент  $t = t_1$  можно нарисовать график функции  $f_1(x - a_0 t_1)$ , как функции от  $x$ . Обозначим некоторую точку  $x_A$  и  $f_A := f_1(x_A - a_0 t_1)$ . В момент  $t = t_2$  в точке  $x$ , для которой выполнено равенство  $x_A - a_0 t_1 = x - a_0 t_2 \Leftrightarrow x = x_A + a_0(t_2 - t_1)$ . В этой точке  $f_1(x) = f_A$ . Это означает, что состояние  $f_A$  сдвигает по оси  $x$  в точку  $x$ . Также сдвигается весь график. Волна — это перемещение состояния, а не перемещение точек. Это скорость продвижения фазы, скорость продвижения значения, без изменения формы. Говорят, что это бегущая волна. Форма не меняется, а график перемещается.

Можно рассмотреть функцию  $f(x + a_0 t)$ , будет волна, бегущая влево. Говорят, что  $a_0$  есть скорость малых возмущений. Когда я говорю, происходит очень малые возмущения давления, плотности. Поэтому  $a_0$  ещё называют скоростью звука  $a_0 = \left( \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \right)_{\rho_0}$ . Но на самом деле малые возмущения бывают разные. Зависит от того, какой происходит процесс. Я могу рассмотреть случай совершенного газа и  $T = \text{const}$ . Тогда  $p = RT_0 \rho$ . Скорость звука будет  $\sqrt{RT_0}$ . А если считать, что звук распространяется адиабатически, то зависимость будет  $p = A\rho^\gamma$ . Тогда будет  $\left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{ад}} = \gamma A \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma RT$ . Тогда  $a_0 = \sqrt{\gamma RT_0}$ .

Так какая формула для скорости звука? Ньютон предложил  $\sqrt{RT_0}$ . Начинаем считать на практике, получается, что формула даёт заниженную скорость звука. А Лаплас рассуждал так: звук распространяется очень быстро, звук состояние частиц изменил и убежал, поэтому нет притока тепла. Формула Лапласа это как раз  $a_0 = \sqrt{\gamma RT_0}$ . Для воздуха  $\gamma = 1.4$ .

<sup>1</sup> Основным состоянием могло бы быть какое-то движение, оно ещё называется фоном.

Несколько слов о решении задачи. Задачи могут быть, например, граничные. Есть у области границы. Она начинает колебаться. Может быть иначе, задача Коши. Может в начальный момент быть задано значение потенциала и значение производной по времени. Я хочу задачу Коши сформулировать не как математическую задачу, а с точки зрения механики сплошных сред.

Для уравнения  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$  задача Коши имеет следующий вид. При  $t = 0$   $\varphi = F(x)$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Phi(x)$ . Что это значит с точки зрения механики? Какой смысл в задании  $\varphi$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Мы задаём  $v = V(x)$  в начальный момент и плотность  $\tilde{\rho} = \rho(x) = \mathcal{R}(x)$ . Но ведь  $v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , а  $\varphi = \int V(x) dx = F(x)$ . А производную я откуда задам? Всегда, не только в начальный момент, выполнено  $\tilde{\rho} = -\frac{\rho_0}{a_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Получаю, что в начальный момент  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{a_0}{\rho_0} \mathcal{R}(x)$ .

Вот мы имеем  $\varphi = f_1(x - a_0 t) + f_2(x + a_0 t)$ . При  $t = 0$  имеем

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = F(x); \\ -a_0 f_1'(x) + a_0 f_2'(x) = \Phi(x). \end{cases}$$

Отсюда находим  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , и, соответственно, решение.

Теперь немного поговорим про область влияния начальных данных. Это очень важно при построении разных решений. Это область на плоскости  $(x, t)$ . Всё движение у нас одномерное.

Пусть есть некоторая волна между  $x_I$  и  $x_{II}$  в начальный момент. Через некоторое время получится две волны. Они будут перемещаться по полосам. В середине между полосами ничего не будет, если вне  $(x_I, x_{II})$  ничего не было. Если в этом интервале изменить начальные условия, то в двух полосах через некоторое время что-то изменится. В других областях не изменится ничего. Только наблюдатель из полосы заметит изменения. На границе таких областей могут быть склеены совершенно разные, они друг на друга никак не влияют. Это область влияния.

А теперь область зависимости решения.

Берём точку из  $(x, t)$ , от чего зависит состояние в этой точке, от начальных условий на какой области? Нужно провести через точку  $M$  две прямые. Проекция  $x_M$  зажата между  $x_I$  (пересечение первой прямой с положительным наклоном  $\frac{1}{a_0}$ ) и  $x_{II}$ . В  $(x_I, x_{II})$  условия будут влиять на точку  $M$ . А то, что задано справа или слева не влияет на  $M$ .

Это всё очень важно в численных методах. Какие там методы. Чуть-чуть покажу метод конечных разностей. Производные заменяются  $\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{\Delta v}{\Delta x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{\Delta v}{\Delta t}$ .

Всегда хочется брать по времени как можно больше шаги, чтобы быстрее считать. Если я выбрала  $\Delta x$ , то  $\Delta t$  нужно брать только  $\Delta t < \frac{\Delta x}{a}$ . Это условие называется условием Куранта.

Поговорим о связи между  $\tilde{v}$  и  $\tilde{\rho}$  в волне, бегущей в одну сторону. Например, пусть  $\varphi = f(x - a_0 t)$ . Как же эту связь получить? Зачем мне эта связь? Я хочу показать, какое условие нужно выставлять на  $v$ , чтобы можно было пользоваться линеаризацией. Получается оно очень просто.  $v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1'(x - a_0 t)$ ;  $\tilde{\rho} = -\frac{\rho_0}{a_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\rho_0}{a_0} f_1'(x - a_0 t)$ . Получается связь, что  $\tilde{\rho} = \frac{\rho_0}{a_0} v$ , а  $\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} = \frac{v}{a_0}$ . Таким образом, условие малости возмущений плотности  $\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \ll 1$  означает, что  $\frac{v}{a_0} \ll 1$ .

Ну ещё хотела несколько слов про гармонические волны и закончить. Общая философия такая, что на самом деле решения волнового уравнения можно часто искать в виде произведений рядов Фурье. Механика и плоха (труднее) и хороша по сравнению с математикой. Механики не могут ввести определение и для полученного объекта доказать свойства. Мы, механики, не можем сказать, что звук — это радуга, нам нужен физический смысл. С другой стороны разрывы, которые часто используются в математических моделях, — это идеализация. На самом деле всё всегда непрерывно меняется. Другое дело, что изменения часто бывает очень резким.

Малые возмущения — это некие синусоиды. Часто достаточно изучить поведение решений в виде

$$\varphi = A \sin(kx - \omega t); \quad \text{или} \quad A e^{i(kx - \omega t)}.$$

Если решения растут, то есть неустойчивость, и так далее. Можно такие решения исследовать. Они многое показывают.

Пусть  $\varphi = A \sin k(x - \frac{\omega}{k} t)$ . Значит,  $a = \frac{\omega}{k}$ . При  $t = \text{const}$  имеем  $A \sin(kx + \text{const})$ .  $k$  называется волновым числом, а  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  длиной волны. Ещё можно рассмотреть период по времени. Нужно  $x$  зафиксировать, получим функцию времени  $A \sin(\text{const} - \omega t)$ . Период по времени есть  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

## 12 Лекция 1 (17)

План у нас такой. Мы немного не разобрали два вопроса, которые встречаются в гос. экзамене. Распространение малых возмущений в газе и возмущение немалых возмущений. Поэтому первые несколько лекций будем продолжать жидкости.

Сегодня продолжение предыдущей лекции. Но волны будут не плоские, а сферические.

1. Движение сжимаемой идеальной жидкости с малыми возмущениями (со сферическими волнами). Уравнение для потенциала скорости.

2. Источник в сжимаемой жидкости. Запздывающий потенциал.

3. Распространение малых возмущений от движущегося источника. Эффект Доплера. Конус Маха.

Нам нужно будет написать уравнения в сферических координатах.

Мы рассматриваем вот что. Считаем, что

1. Жидкость сжимаемая идеальная (прежде всего пренебрегаем трением);

2. Массовые силы не учитываем.

3. Движение баротропное, то есть  $\rho = \rho(p)$ .

4. Движение потенциальное, то есть  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ .

Мы будем рассматривать движения, начинающиеся с покоя. Покой потенциален, значит, и дальнейшее движение будет потенциально. Уравнение неразрывности и уравнение Эйлера.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v^i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho}}_{a^2} \text{grad } \rho = 0; \quad (2)$$

Обозначают  $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$  и называют эту величину скоростью малых возмущений.

Будем рассматривать малые возмущения. Будем называть фоном состояние  $\mathbf{v}_0 = 0, \rho = \rho_0, p = p_0$ . Переходим к переменным-возмущениям  $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, \tilde{v}$ , и т. д. При этом  $\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \ll 1$ .

После перехода к переменным-возмущениям и учёта потенциальности движения получаем систему.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi &= 0; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{a_0^2}{\rho_0} \tilde{\rho} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi = \text{div } \mathbf{v}$ . Если делать подстановки одного уравнения в другое, то на каждую переменную получаем волновое уравнение.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \varphi; \quad \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \tilde{\rho} \dots$$

Движение с плоскими волнами мы рассматривали. Мы считаем в этом случае  $\varphi = \varphi(t, x)$  — зависимость только от одной координаты. Тогда волновое уравнение становится уравнением колебания струны.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Для этого уравнения есть решение д'Аламбера  $\varphi = f_1(x - a_0 t) + f_2(x + a_0 t)$ . Если  $x - a_0 t = \text{const}$ , то  $f_1 = \text{const}$ , то есть  $f_1 = \text{const}$  в точках  $x = \text{const} + a_0 t$ .

Бегущая волна перемещается без изменения формы и амплитуды.

Как послушать, что говорят соседи. Нужно взять стеклянную банку и приложить к стене. Через банку пойдёт плоская волна почти без затухания. Рупор делают с этой же целью. Вот я говорю и звук распространяется вокруг сферически. Чтобы потерь было меньше, нужно сделать рупор.

## 12.1 Сферические волны

Пусть  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \varphi$ ,  $\varphi = \varphi(t, r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Получим формулу для оператора Лапласа в сферических координатах.

$$\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi = \nabla_i (g^{ij} \nabla_j \varphi) = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \varphi.$$

Что нужно делать, чтобы на ходу получить итоговую формулу? Нужно знать, что есть набла от тензора с одним нижним индексом.

$$\nabla_i v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - v_k \Gamma_{ij}^k = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k.$$

Введём сферические координаты следующего типа.

$$\begin{aligned}x^1 &= r \sin \theta \cos \lambda; \\x^2 &= r \sin \theta \sin \lambda; \\x^3 &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

Нужно вычислить компоненты метрического тензора

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + (r \sin \theta)^2 d\lambda^2.$$

Это компоненты с нижними индексами, а нам нужны будут с верхними. Ещё нам нужны некоторые символы Кристоффеля, но не все. Нужны только  $\Gamma_{22}^1 = -r$  и  $\Gamma_{33}^1 = r^2$ .

Ответ получится следующий. Если  $\varphi = \varphi(t, r)$ , то

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \varphi)}{\partial r^2}.$$

Напишем теперь уравнение для потенциала для малых возмущений со сферическими волнами.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{a_0^2}{r} \frac{\partial^2 (r \varphi)}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \varphi) = a_0^2 \frac{\partial^2 r \varphi}{\partial r^2}.$$

Таким образом  $(r \varphi)$  удовлетворяет уравнению колебания струны. Можем использовать решение д'Аламбера

$$r \varphi = f_1(r - a_0 t) + f_2(r + a_0 t); \quad \varphi = \frac{f_1(r - a_0 t)}{r} + \frac{f_2(r + a_0 t)}{r}.$$

Что же это за решение? Это опять две волны. Пусть в начальный момент  $\varphi$  задано при  $t = 0$ . Что будет при  $t > 0$ ? Будет так. Пусть  $r - a_0 t = r_0$ , то есть  $r = a_0 t + r_0$  и  $\varphi(r, t) = \frac{f_1(r_0)}{r}$ .  $a_0$  — скорость волны, она не меняется. С другой стороны меняется амплитуда.

$\varphi$  состоит из двух слагаемых: сходящаяся волна с растущей амплитудой, расходящаяся волна с убывающей амплитудой (как расходящиеся круги колеблются всё с меньшей амплитудой). Это уже не бегущая волна, которая не меняет форму. Форма здесь меняется.

## 12.2 Расходящаяся волна как течение из источника

Рассмотрим теперь только расходящуюся волну  $\varphi = \frac{1}{r} f_1(r - a_0 t)$ . Её можно трактовать, как движение от источника. Я хочу ввести такое обозначение

$$\varphi = \frac{f_1\left(a_0\left(\frac{r}{a_0} - 1\right)\right)}{r} = \frac{f_1\left(-a_0\left(t - \frac{r}{a_0}\right)\right)}{r} = \frac{-Q\left(t - \frac{r}{a_0}\right)}{4\pi r}.$$

Само переобозначение определяется формулой

$$f_1\left(-a_0\left(t - \frac{r}{a_0}\right)\right) \equiv -\frac{Q\left(t - \frac{r}{a_0}\right)}{4\pi} \quad (3)$$

Решение  $\varphi = \frac{-Q\left(t - \frac{r}{a_0}\right)}{4\pi r}$  соответствует источнику в начале координат. Почему это источник? Если  $\varphi = \text{const}$ , то  $r = \text{const}$  — это сфера. Можно посчитать расход через сферу радиуса  $R$ .

$$\int_{\Sigma} v_r d\sigma = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} \cdot 4\pi R^2 = \left( \frac{Q'}{4\pi R a_0} + \frac{Q}{4\pi R^2} \right) 4\pi R^2 = \frac{Q' \cdot R}{a_0} + Q(t - R/a_0) \xrightarrow{R \rightarrow 0} Q(t).$$

Сравним источники в несжимаемой жидкости  $\varphi = -\frac{Q(t)}{4\pi t}$  и в сжимаемой жидкости  $\varphi = -\frac{Q(t-r/a_0)}{4\pi r}$ . Пусть  $Q(t) \neq 0$  только при  $t_1 > t > 0$ .

- В несжимаемой жидкости  $\varphi \neq 0$  во всех точках, если  $Q \neq 0$ . Кто-то один сказал слово, то слышит сразу вся вселенная. Звук распространяется с бесконечной скоростью. Если я рассматриваю небольшие объекты, это нормально. Вот я говорю и задние парты, можно считать, мгновенно меня слышат.
- В сжимаемой жидкости получается, что  $\varphi \neq 0$ , когда аргумент у  $Q$  лежит в промежутке

$$0 < t - r/a_0 < t_1 \Rightarrow a_0 t > r > a_0(t - t_1).$$



Когда источник включился, это не значит, что уже есть движение вокруг. Движение находится только в сферическом слое. Если источник включился и тут же выключился, то всё движение находится на сфере, которая расширяется. Таким образом, если источник включился, это ещё не значит, что движение где-то есть. А если источник уже выключился, то движение ещё где-нибудь может быть. Это два основных отличия от случая несжимаемой жидкости.

### 12.3 Эффект Доплера. Конус Маха

Пусть источник движется с постоянной скоростью  $u$ . Будут разные картины при  $u <, =, > a_0$ .

## 13 Продолжение о распространении волн сферической формы

1. Добавления о потенциале источника в сжимаемой жидкости. Запаздывающий потенциал.
2. Распространение малых возмущений от движущегося источника. Эффект Доплера. Конус Маха.
3. Распространение конечных (не малых) возмущений. Пример: волны Римана.

### 13.1 Источник в газе (в сжимаемой жидкости)

Потенциал такой

$$\varphi = -\frac{Q\left(t - \frac{r}{a_0}\right)}{4\pi r}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Из этого следуем два вывода. Одни я говорила, а второй не сказала. Пусть  $Q(t) \neq 0$  при  $0 \leq t \leq t_1$ .

1. В любой момент времени  $\varphi \neq 0$ , если  $0 \leq t - \frac{r}{a_0} \leq t_1$ . Где он не равен нулю? Во всём пространстве или нет? Неравенство на  $r$  получается  $a_0(t - t_1) \leq r \leq a_0 t$ . Пока источник работает, есть только один фронт передний  $a_0 t$ . Если же  $t > t_1$  появится задний фронт  $a_0(t - t_1)$ . Чем больше время, тем тоньше слой между сферами.

А в несжимаемой жидкости потенциал отличен от нуля везде, но только моменты работы источника.

2. В любой точке  $r$   $\varphi \neq 0$ , если  $\frac{r}{a_0} \leq t \leq t_1 + \frac{r}{a_0}$ . Это инструкция по нахождению времени, за которое возмущение дойдёт до заданной точки. Человек слышит источник ровно столько, сколько работает источник, но с запаздыванием. Используют термин «запаздывающий потенциал» для вот этой формулы

$$\varphi = -\frac{Q\left(t - \frac{r}{a_0}\right)}{4\pi r}.$$

### 13.2 Возмущения от движущегося источника

#### 13.2.1 Движение по прямой

Пусть источник сначала движется по прямой со скоростью  $u$ . Будем считать, что потенциал источника формируется из набора источников, каждый из которых вспыхивает в тот момент, когда наша точка через него проходит.

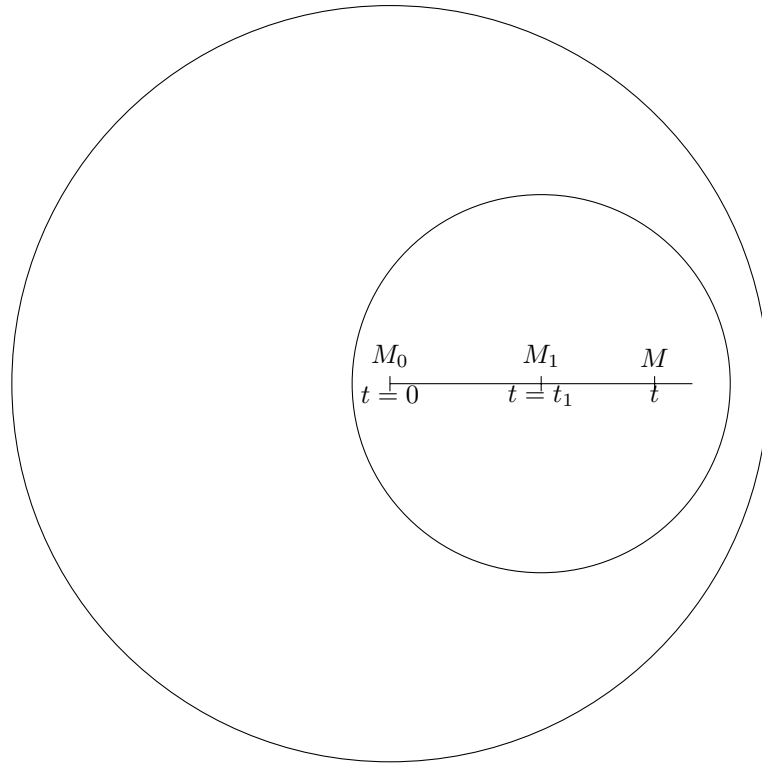


Рис. 1. Источник движется по прямой

1. Пусть  $u < a_0$ . Возмущения обгоняют источник. Возмущение, которое было послано в момент  $t = 0$  находится на сфере  $a_0 t > u t$ . Возмущение, которое возникло при  $t = t_1$  в точке  $M_1$  — на сфере с центром в  $M_1$  радиуса  $a_0(t - t_1) > u(t - t_1)$ . Это не концентрические сферы, это сферы со смещёнными центрами. Если источник движется бесконечно долго, всё пространство и позади и впереди будет возмущено. Если не бесконечно долго, будет передний фронт; если поставит наблюдателя, он услышит источник быстрее, чем сам источник к нему дойдёт.

Как раз в этом случае имеет смысл говорить про эффект Доплера. Открыт Доплером. Про свет этот эффект лучше заметен, потому что свет всегда движется с досветовой скоростью. Эффект состоит в том, что если источник работает, например, периодически, издаёт звук определённой частоты, и движется, то наблюдатель, к которому этот источник движется, слышит звук более высокой частоты, чем издавал источник, а тот, который позади источника, слышит звук более низкой частоты. (См. Седов «МСС», том 2).

Вычислим, как же меняется частота. Пусть источник  $Q(t)$  имеет такой вид

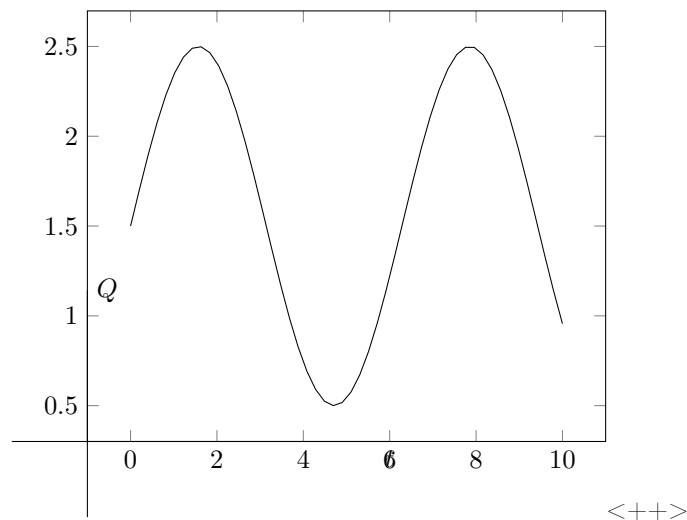


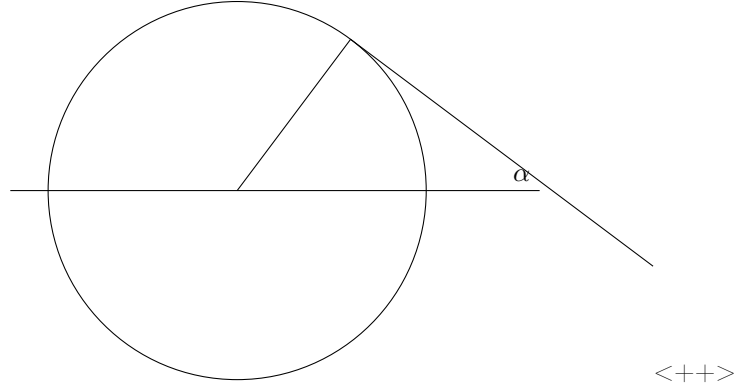
Рис. 2. <+caption text+>

Пусть  $Q(t)$  таков, что  $\tau$  — период его колебаний по времени.  $\omega = \frac{1}{\tau}$  — частота. И есть наблюдатель впереди.

Наблюдатель находится на расстоянии  $l$  от  $M_0$ . Тогда

$$\tau_{\text{набл}} = \Delta t = \tau + \frac{l - u\tau}{a_0} - \frac{l}{a_0} = \tau \left( 1 - \frac{u}{a_0} \right); \quad \omega_{\text{набл}} = \frac{1}{\tau_{\text{набл}}}.$$

2. Теперь картина возмущений при  $u = a_0$ . Передний фронт находится там же, где находится источник. Все сферы имеют в каждый момент общую точку, совпадающую с позицией источника. Если наблюдатель стоит впереди, то он его не слышит. Когда источник придёт, тогда и услышит. А когда источник движется бесконечно долго со звуковой скоростью, то сфера-фронт растягивается в плоскость. Слева от плоскости возмущённая среда, права — невозмущённая.
3.  $u > a_0$ . Источник крикнул и убежал. Тогда радиусы сфер будут меньше расстояния от источника, до центра сферы. Все сферы находятся внутри некоторого конуса.



<+++>  $\alpha$  — половина угла Конуса, внутри которого наблюдаются возмущения при сверхзвуковом движении источника. Называется он углом Маха.

$$\sin \alpha = \frac{a_0(t - t_1)}{u(t - t_1)} = \frac{a_0}{u} = \frac{1}{M}.$$

Ну а  $M = \frac{u}{a_0}$  — число Маха.

Наблюдатель тем более не слышит источник, когда тот к нему приближается. Если летит сверхзвуковой самолёт, сначала его видите, а потом уже слышите.

Никто не исследует в лаборатории быстро движущийся источник. Источник фиксируют и обтекают сверхзвуковым потоком.

А если источник движется не по прямой и не с постоянной скоростью, то картинки сложнее. Можно рассматривать тонкое крыло, как источник малых возмущений. Фронт уже не конус, но наклон линий Маха будет только так же определяться  $\frac{u}{a_0}$ . а зависит от плотности и поэтому угол будет меняться.

А если толстое крыло или вообще сфера или твёрдый конус движется? Это уже не малые возмущения. Появляются ударные волны при определённом угле раствора, а при совсем большом угле раствора, эти ударные волны склеиваются в одну. Это всё сверхзвуковое движение.

### 13.3 Конечные возмущения

Будем рассматривать систему уравнений газовой динамики до линеаризации. Рассматривать будем не в общем, а только лишь частные решения.

Рассмотрим конечные возмущения в сжимаемой жидкости. Будем рассматривать волны частного вида, которые называются простыми волнами или волнами Римана. Это решения, в которых все параметры (сначала совсем грубое определение) зависят не отдельно от времени и координат, а только от их некоторых комбинаций. В одномерном случае эта комбинация  $f(t, x)$  и  $\rho = \rho(f)$ ,  $v = v(f)$ ,  $p = p(f)$ . В теории упругости деформации будут зависеть от одной какой-то  $f$ .

Рассмотрим движение с плоскими волнами (одномерный случай) в сжимаемой жидкости или газе. Это означает, что  $v_x = v(t, x)$ ,  $\rho = \rho(t, x)$ ,  $p = p(t, x)$ ,  $v_y = v_z = 0$ . Мы считаем, что жидкость или газ идеальные, но сжимаемые, массовые силы не учитываются и движение баротропное. Напишем систему уравнений.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

## 14 Вторая неделя февраля

1. Распространение конечных возмущений в сжимаемой идеальной жидкости (газе). Волны Римана. Эффект опрокидывания волн. Возникновение ударных волн.
2. Ударные волны в сжимаемых идеальных жидкостях. Условия на ударных волнах. Возрастание энтропии при переходе частиц через ударную волну. Теорема Цемплена.

### 14.1 Конечные возмущения

Конечные, значит, не малые. Будем иметь в виду следующие предположения о течении.

1. Жидкость идеальная сжимаемая.
2. Массовые силы не учитываются.
3. Движение баротропное,  $\rho = \rho(p)$  или  $p = p(\rho)$  (например, адиабатическое движение совершенного газа, когда энтропия всех частиц одинакова, то есть  $p = C \rho^\gamma$ ,  $C = A e^{\frac{s}{c_v}} = \text{const}$ )
4. Рассматриваем движение с плоскими волнами, то есть

$$v_x = v(t, x), \quad v_y = v_z = 0, \quad \rho = \rho(x, t), \quad p = p(t, x).$$

5. Ищем решения специального вида:  $v = v(f)$ ,  $\rho = \rho(f)$ ,  $p = p(f)$ , где  $f = f(t, x)$ .

Последнее условие определяет волны Римана. Другое название — простые волны.

Оказывается, такие решения уравнений газовой динамики существуют.

Условие 5 равносильно условию  $v = v(\rho)$ , ну а  $p$  и так есть  $p(\rho)$ .

Напишем систему уравнений («газовой динамики») для движения сжимаемой идеальной жидкости с плоскими волнами: уравнение неразрывности и проекция на ось  $x$  уравнения Эйлера.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Переобозначим последнее слагаемое  $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$ . Мы теперь не будем пренебрегать вторыми слагаемыми, но зато  $v = v(\rho)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{dv}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0; \\ \frac{dv}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{dv}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Можно эту систему рассмотреть относительно неизвестных  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ . Система однородная, значит, чтобы были нетривиальные решения, определитель должен равняться нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & v + \rho \frac{dv}{d\rho} \\ \frac{dv}{d\rho} & v \frac{dv}{d\rho} + \frac{a^2}{\rho} \end{vmatrix} = 0; \quad \frac{a^2}{\rho} = \rho \left( \frac{dv}{d\rho} \right)^2;$$

Значит, возможно два типа решений  $v = \pm \int \frac{a}{\rho} d\rho$ . Говорят о двух типах волн Римана.

- (1) Первый тип, где  $v = \int \frac{a}{\rho} d\rho$ . Тогда  $\frac{dv}{d\rho} = \frac{a}{\rho}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (v + a) \frac{\partial \rho}{\partial x};$$

Это уравнение уже надо решать.

- (2) Второй тип, где  $v = - \int \frac{a}{\rho} d\rho$ ,  $\frac{dv}{d\rho} = -\frac{a}{\rho}$ .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (v - a) \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Эти решения нельзя складывать, так как уравнения не линейные. Но решения ведут себя похожим образом. Рассмотрим первый тип, то есть

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{a}{\rho}.$$

Я хочу переписать уравнение  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (v + a) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$  вот в таком виде:  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ , где  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v + a) \frac{\partial}{\partial x}$  — производная вдоль линии  $\frac{dx}{dt} = v + a$  (если бы  $\frac{dx}{dt} = v$ , то это была бы материальная производная, то есть вдоль траектории).

На линии  $x(t)$  имеем  $\rho = \rho(t, x) = \rho(t, x(t))$ . Таким образом на линии  $\frac{dx}{dt} = v + a$  плотность не меняется, а значит и  $v + a$  на этой линии не меняется. Значит,  $x(t)$  — это просто прямая. Существуют линии (они имеют попарно разные наклоны), вдоль которых плотность сохраняется. Уравнение на эти линии есть  $x - (v + a)t = \text{const}$ , но константа есть функция  $\rho$ , поэтому иногда пишут  $x - (v + a)t = F(\rho)$ .

Итак, что у нас получилось. В решении Римана если  $x - (v + a)t = \text{const}$ , то  $\rho = \text{const}$ . И меняться плотность может только при переходе от одной линии к другой. Это значит, что

$$\rho = \rho(x - (v + a)t); \quad v = v(x - (v + a)t).$$

Это не тривиальные уравнения, справа функции от  $\rho$ .

Как же найти это решение, и каково поведение этого решения? Очень по форме похоже на бегущую волну. Пусть, например, при  $t = 0$  распределение плотности задано какое-то. Что будет при  $t_1 > 0$ ? Чтобы в  $t_1$  была такая же плотность, как в момент  $t_0 = 0$  в точке  $x_0$ , нужен  $x = x_0 + (v + a)t_1$ . Разные значения плотности и будут переноситься с разными скоростями. Поэтому форма волны будет деформироваться. Большая плотность переносится быстрее, чем малая.

Если при  $t = 0$  распределение плотности задано. Можно найти наклон линий  $x - (v + a)t = \text{const}$ . Вдоль каждой линии плотность сохраняется.

Как конкретнее зависит  $v + a$  от плотности и вообще, что это за волна? Исследуем такую величину  $\frac{d}{d\rho}(v + a)$  на знак. Это равно

$$\frac{d}{d\rho}(v + a) = \frac{dv}{d\rho} + \frac{da}{d\rho} = \frac{a}{\rho} + \frac{1}{2a} \frac{d^2 p}{d\rho^2} \equiv \frac{1}{2a\rho^4} = \frac{d^2 p}{dV^2},$$

где  $V = \frac{1}{\rho}$  — удельный объём. Доказывается непосредственной выкладкой.

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{dp}{dV} \frac{dV}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{dp}{dV}; \quad \frac{d^2 p}{d\rho^2} = \frac{2}{\rho^3} \frac{dp}{dV} + \frac{1}{\rho^4} \frac{d^2 p}{dV^2} = -2 \frac{a^2}{\rho} + \frac{1}{\rho^4} = -\frac{2a^2}{\rho} + \frac{1}{\rho^4} \frac{dp}{dV^2}.$$

Всё зависит от знака во этого  $\frac{1}{2a\rho^4} \frac{d^2 p}{dV^2}$ , что зависит только от самого газа и процесса.

Если газ или жидкость и процесс таковы, что  $\frac{d^2 p}{dV^2} > 0$ , то бóльшие значения плотности распространяются с бóльшей скоростью. Эта ситуация типична. В частности для адиабатических процессов. Газы с таким свойством часто называют «нормальными».

Пример адиабатического движения идеального совершенного газа  $p = C \rho^\gamma = C V^{-\gamma}$  — адиабата Пуассона. Какая-то гипербола степени  $\gamma$ . Здесь  $\frac{d^2 p}{dV^2} > 0$ . Даже по выпуклости кривой можно понять.

Пусть в начальный момент задано распределение плотности,  $v > 0$ , движется направо вся жидкость,  $a + v > v > 0$ . Это означает, что распределение плотности движется обгоняя частицы. Часть волны, где слева направо (по  $x$ ), плотность падает (в начальный момент времени), называется волной сжатия. Плотность именно частиц будет увеличиваться. Часть же, где слева направо плотность возрастает, называется волной разрежения.

Пусть  $\frac{d^2 p}{dV^2} > 0$ . Происходит вот что. Бóльшее значение плотности продвигается далеко, а меньше недалеко за один промежуток времени. Верхушка распространяется с бóльшей скоростью, чем остальная часть волны. Волна разрежения становится положе, а волна сжатия — круче. В конце концов верхушка обгоняет хвост, нижняя часть отстаёт от верхушки. Физически такое отставание не осуществимо, так как невозможно в одной точке иметь три различных значений плотности. Это явление называется опрокидывание волны. Оно очень похоже на опрокидывание волны воды. На самом деле область неоднозначности заменяется на разрыв. Нужно делить решение на две непрерывные части и на скачок, рассчитываемый из условий на поверхности разрыва.

Чем быстрее толкнуть поршень, тем быстрее опрокинется волна и возникнет ударная волна. Поршень можно и выдвигать, тогда будет волна расширения, которая она не опрокидывается.

Получается, что даже если начально решение было гладкое, могут уже в модели идеальной жидкости, появиться поверхности разрыва.

## 14.2 Ударные волны

Где прочитать про поверхности разрыва.

1. Седов МСС, том первый.

2. Ландау и Лифшиц «Гидродинамика».

3. Чёрный «Газовая Динамика».

4. МСС в задачах, там очень много задач про поверхности разрыва, в котором есть кое-что, что было изучено позже, чем были написаны указанные выше книги.

Давайте напишем условия на поверхностях разрыва в сжимаемых идеальных жидкостях при условии, что движение адиабатическое. С одной стороны от поверхности разрыва значения переменных будем обозначать цифрой «1», с другой — «2». Если скоростью разрыва ноль, то условия на разрыве (закон сохранения массы, количества движения, энергии)

$$\begin{aligned}\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2} &= j (\equiv m); \\ j(v_2 - v_1) &= P_{n2} - P_{n1}; \\ j\left(\frac{v_2^2}{2} + u_2 - \frac{v_1^2}{2} - u_1\right) &= (P_{n2} \cdot v_2) - (P_{n1} \cdot v_1) - q_{n2} + q_{n1}.\end{aligned}$$

Последние два слагаемый — приток тепла, если он есть.

## 15 Вязкая жидкость

Вспомним ещё раз, как обстояло дело с идеальной жидкостью. Для идеальной жидкости тензор напряжений имеет вид  $p^{ij} = -p g^{ij}$ , где  $g^{ij}$  в декартовых координатах просто символы Кронеккера. Если подставить это в вектор напряжений, получим

$$P_n = p^{ij} n_j e_i = -p g^{ij} n_j e_i = -p n^i e_i = -p n.$$

То есть в идеальной жидкости давление действует по нормали к площадке, давление, как в школе, сила, делённая на объём.

В вязкой жидкости имеем

$$p^{ij} = -p g^{ij} + \tau^{ij}(e_{\alpha,\beta}).$$

Здесь  $\tau_{ij}$  — тензор вязких напряжений. Можно предположить, что этот тензор даст только касательные напряжения, но это не так. Рассмотрим вектор напряжений

$$p_n = p^{ij} n_j e_i = (-p g^{ij} + \tau^{ij}) n_j e_i = -p n + \tau^{ij} n_j e_i.$$

Тогда  $p_{nn} = P_n \cdot n = -p + \underbrace{\tau^{ij} n_j n_i}_{\neq 0}$ .

Далее, вспомним, что  $e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$ . Первый инвариант этого тензора

$$I_1(e) = g^{ij} e_{ij} = \frac{1}{2}(g^{ij} \nabla_i v_j + g^{ij} \nabla_j v_i) = \operatorname{div} v.$$

Давайте словаи скажем, что такое  $e_{11}$ . Это скорость относительного удлинения координатного волокна, направленного по координате  $x_1$ .  $e_{12}$  отвечает за скос между координатными волокнами.

### 15.1 Закон Навье—Стокса

Нам надо определить соотношение между  $\tau^{ij}$  и  $e_{\alpha,\beta}$ . Самый простой вид соотношений, естественно, линейный:  $\tau^{ij}(e_{\alpha,\beta}) = A^{ijkl} e_{kl}$ . При этом любым такое соотношение быть не может и общий вид из физических соображений задаётся двумя коэффициентами

$$\tau^{ij} = \lambda \operatorname{div} v g^{ij} + 2\mu e^{ij}.$$

При этом тезор скоростей деформаций можно разложить на шаровой и девиатор  $e_d^{ij} = e^{ij} - \frac{1}{3} I(e) g^{ij}$ , его первый инвариант равен нулю. Разложение имеет вид

$$e^{ij} = \frac{1}{3} I_1(e) g^{ij} + e_d^{ij}.$$

Первое слагаемое называется изменением объёма, а второе деформацией сдвига (без изменения объёма). В этом виде закон Навье—Стокса запишем

$$\tau^{ij} = \underbrace{(\lambda + 2/3\mu)}_{\zeta} \operatorname{div} v g^{ij} + 2\mu e_d^{ij}.$$

Здесь  $\zeta$  — объёмный коэффициент вязкости.

Ещё вводят другой параметр  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  — кинематический коэффициент вязкости. В  $\{L, M, T\}$  имеем  $[p^{ij}] = \frac{M}{LT^2}$ ,  $[e^{ij}] = \frac{1}{T}$ . Тогда

$$[\mu] = \frac{M}{LT}; \quad [\nu] = \frac{L^2}{T}.$$

Это обоснование того, почему один из них называется динамическим (в нём есть масса).

Почти во всех задачах  $\zeta$  принимается равным нулю, тогда  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$  и остаётся один коэффициент вязкости.

Итак выведем уравнения Навье—Стокса. Объединяем закон Навье—Стокса и общий закон движения

$$p^{ij} = -p g^{ij} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} g^{ij} + 2\mu e^{ij}; \quad \rho a^i = \rho F^i + \nabla p^{ij}.$$

Пусть  $\lambda, \mu = \text{const}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_j p^{ij} &= \nabla_j (-p g^{ij}) + \nabla_j (\lambda \operatorname{div} \mathbf{v} g^{ij}) + \nabla_j (2\mu e^{ij}) = -(\operatorname{grad} p)^i + \lambda (\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}))^i + \mu \nabla_j \nabla^i v^j + \mu \nabla_j \nabla_j v^i = \\ &= -(\operatorname{grad} p)^i + \lambda (\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}))^i + \mu \nabla^i \nabla_j v^j + \mu \nabla_j \nabla_j v^i = \mu \nabla^i \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu (\Delta \mathbf{v})^i. \end{aligned}$$

Итого, получаем

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v}.$$

Важно то, что  $\lambda, \mu$  предположили константы. Но они могут зависеть, например, от температуры. Замёрзшее масло в автомобиле вязкое, а температура может зависеть от координат и так не получится. Выписывать в общем случае не получится, понятно, как это делается.

## 15.2 Граничные условия

### 15.2.1 Условие прилипания

В уравнении Навье—Стокса можно положить  $\lambda, \mu = 0$ , уравнение будет идентичным уравнению Эйлера. Но задача всё равно будет другая, отличная от задачи с идеальной жидкостью. Условия на границе было условием непроницаемости, а проскальзывать вдоль границы жидкость могла.

Условие прилипания  $\mathbf{v}_{\text{на пов. тела}} = \mathbf{v}_{\text{тела}}$ .

### 15.2.2 Свободная граница

Если свободная граница записывается соотношением  $f(x, y, z, t) = 0$ , то кинематическое условие имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} f.$$

Скорость нормального перемещения границы, как геометрического объекта, должна совпадать со скоростью частиц жидкости.

Динамическое условие  $\mathbf{P}_n \text{ на границе} = \mathbf{P}_n \text{ внешнее}$ .

## 15.3 Вязкая несжимаемая жидкость. Замкнутая система уравнений

Чтобы написать замкнутую систему, нужно чтобы число уравнений совпадало с числом неизвестных.

Определение несжимаемой жидкости такое  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  (но не значит, что жидкость однородная. Можно взять воду и керосин в одной задаче). Тогда из уравнения неразрывности имеем  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ . Из-за этого уравнение Навье—Стокса упрощается.

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v}; \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{dp}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Неизвестные  $\mathbf{v}, p, \rho$ . 5 уравнений, 5 неизвестных. Если плотность заранее известна, то последнего уравнения нет.

## 15.4 Отличие граничных условий от случая идеальной жидкости

Ещё раз их подчеркнём. Вы наверняка решали такие задачи: идеальная жидкость, течение потенциальная. Что это такое? =  $\text{grad } \varphi$ . Из уравнения неразрывности

$$0 = \text{div } \mathbf{v} = \text{div grad } \varphi = \Delta \varphi /$$

Наверняка решали задачу обтекания тела. Надо было решать уравнение Лапласа  $\Delta \varphi = 0$  с условиями  $v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0$ ,  $(\text{grad } \varphi)_{\infty} = v_{\infty}$ . Решение такое даёт, что  $v_n|_{\Sigma} = 0$ , а  $v_{\tau}|_{\Sigma} \neq 0$ .

А как с вязкой жидкостью?

$$\mu \Delta \mathbf{v} = \mu \underbrace{(\text{grad div } \mathbf{v})}_0 - \underbrace{\text{rot rot } \mathbf{v}}_0 = 0,$$

так как  $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \varphi = 0$ .

То есть снова получим уравнение Лапласа в случае задачи отыскания потенциального течения несжимаемой жидкости. Но краевые условия другие, гораздо более сложные.

Вывод: различия не только в уравнениях и это очень важно.

## 15.5 Уравнение притока тепла

То, что мы с вами обсуждали, было у вас уже ранее. А теперь вспоминаем термодинамику. Первый закон термодинамики говорит, что есть такая функция полной энергии, которая разделяется на кинетическую и на внутреннюю и изменение выражается  $d\mathcal{E} = dU + E_{\text{кин}} = dA^{(e)} + dQ$  (можно и подробнее написать, но мы не будем). Можно написать теорема живых сил  $dE_{\text{кин}} = dA^{(e)} + DA^{(i)}$  и уравнение притока тепла  $dU = -dA^{(i)} = dQ$ . Введём плотности  $du = \frac{dU}{dm}$  и  $dq = \frac{dQ}{dm}$ , получаем уравнение притока тепла

$$du = -\frac{dA^{(i)}}{dm} + dq.$$

Если тензор  $p^{ij}$  симметричный, что почти всегда и бывает, то

$$\frac{dA_{\text{пов}}^{(i)}}{dm} = -\frac{1}{\rho} p^{ij} e_{ij} dt = -\frac{1}{\rho} (-p g^{ij} + \tau^{ij}) e_{ij} dt = \frac{p}{\rho} g^{ij} e_{ij} dt - \frac{1}{\rho} \tau^{ij} e_{ij} dt.$$

Отметим, что

$$\frac{p}{\rho} g^{ij} e_{ij} dt = \frac{p}{\rho} I_1(e) dt = \frac{p}{\rho} \text{div } \mathbf{v} dt = -\frac{p}{\rho} \frac{dp}{\rho} = p d\frac{1}{\rho}.$$

И из уравнения неразрывности получаем, что

$$du = -p d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \tau^{ij} e_{ij} dt + dq.$$

Именно такое уравнение притока тепла вы и знаете, наверное.

Теперь давайте вспомним второй закон термодинамики

$$T ds = dq + dq', \quad dq' \geq 0.$$

Отсюда  $dq = T ds - dq'$ . Тогда

$$du = -p \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \tau^{ij} e_{ij} dt + T ds - dq'.$$

Мы будем считать, что тождество Гиббса

$$du = -p \frac{1}{\rho} + T ds$$

в вязкой жидкости тоже должно выполняться. Чтобы для покоящейся жидкости и для малых скоростей всё было логично.

Тогда  $\frac{1}{\rho} \tau^{ij} e_{ij} dt$  — работа вязких напряжений (со знаком минус), — эта величина есть  $dq'$  и должна быть  $\geq 0$ . Делаем частный вывод: работа вязких напряжений (которые отрицательны) даёт уменьшение кинетической энергии.

Вам наверняка вводили вектор потока тепла  $\mathbf{q}$  — сколько тепла протекает через поверхность (от объёма). Тогда

$$dQ = - \int_{\Sigma} \mathbf{q} \mathbf{n} d\sigma dt = - \int_V \text{div } \mathbf{q} dV dt.$$



Можно ввести плотность

$$dq = \frac{dQ}{dm} = \frac{1}{\rho} \frac{dQ}{dV} = -\frac{\operatorname{div} \mathbf{q} dV dt}{\rho dV} = -\frac{\rho}{\operatorname{div}} \mathbf{q} dt.$$

А помните закон Фурье? При  $\kappa = \text{const}$  имеем

$$\varnothing = -\kappa \operatorname{grad} T \quad \operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div}(-\kappa \operatorname{grad} T) = -\kappa \Delta T.$$

Таким образом,  $dq = -\frac{\kappa}{\rho} \Delta T dt$ . Теперь можно записать настоящее уравнение притока тепла

$$\frac{du}{dt} = -p \frac{d(1/\rho)}{dt} + \frac{1}{\rho} \tau^{ij} e_{ij} + \frac{\kappa}{\rho} \Delta T.$$

## 15.6 Уравнения для распространения тепла в вязкой несжимаемой однородной жидкости

Будем считать, что  $u = cT + \text{const}$ , где  $c$  — удельная теплоёмкость, пусть она постоянна. В наших предположениях  $\tau^{ij} = 2\mu e^{ij}$ . Тогда запишем полную систему уравнений

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v}; \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0; \\ c \frac{dT}{dt} &= \frac{2\mu}{\rho} e^{ij} e_{ij} + \frac{\kappa}{\rho} \Delta T. \end{aligned}$$

Пять уравнений, пять неизвестных:  $\mathbf{v}, \rho, T$ . Но первые четыре уравнения составляют замкнутую систему на  $\mathbf{v}, p$ . Распределение скоростей не зависит от температуры, но температура зависит от распределения скоростей. Но если я хочу всё-таки учесть зависимость вязкости от температура, я не могу использовать такой вид уравнения Навье—Стокса.

### 15.6.1 Уравнение теплопроводности

Вот вы знаете классическое уравнение теплопроводности  $\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T$ . Оно имеет какое-то отношение тому, что мы делаем? Пусть  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\rho = \text{const}$ . Тогда последнее уравнение из замкнутой системы

$$c \frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{\rho} \Delta T.$$

Почти уравнение теплопроводность, только производная не та, но жидкость покоится и полная производная совпадает с частной. Тогда  $a^2 = \frac{\kappa}{\rho c}$ .

## 15.7 Пример замкнутой системы уравнений для вязкого совершенного теплопроводного газа

Опять те же предположения, я их не обговариваю.

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v}; \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0; \\ \frac{du}{dt} &= -p \frac{d(1/\rho)}{dt} + \frac{1}{\rho} \tau^{ij} e_{ij} + \frac{\kappa}{\rho} \Delta T; \\ \tau^{ij} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} g^{ij} + 2\mu e^{ij}; \\ p &= \rho T T; \\ u &= c_v T + u_0. \end{aligned}$$

Семь уравнений, семь неизвестных  $\mathbf{v}, u, \rho, p, T$

Если есть температура, то нужны и граничные условия для температуры.

1.  $T_{\text{пов.}} = T_{\text{заданн}};$
2. теплоизоляция. На стенке  $\mathbf{q} \mathbf{q} = q_n = -\kappa \frac{\partial T}{\partial n} = 0$ .

## 15.8 Простая задача: течение Куэтта

На воду положили фанерку и начали её тянуть с горизонтальной скоростью. Задача у нас плоская. Слой толщины  $h$ . Если на идеальную жидкость положил, то ничего не происходит: фанерка сама по себе, жидкость сама по себе. Но давайте считать жидкость вязкой и использовать условие прилипания. Будем считать, что

1.  $\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (u, 0)$ ;
2.  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ , значит,  $u = u(x, y)$ .
3. несжимаемая, вязкая, однородная.
4.  $\mathbf{F} = 0$  (если это не так, то можно легко свести эту задачу к нашему случаю, просто появляется ещё гидростатическое распределение давления)/

Очень быстро пишем систему уравнений

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v}; \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0; \\ \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y} + 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

У нас получается, что  $p = p(x)$ ,  $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  и  $u = u(y)$ . Значит,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Функции разных переменных равняются, значит, они константы. Обозначим  $\frac{\partial p}{\partial x} = -i = \text{const}$ . Это перепад давления вдоль этого канала (фанерка ограничивает этот канал вместе со дном). Примем, что  $i = 0$ , что нет перепада давления, мы насос не включаем. И что мы с вами получим:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0; \quad u = Ay + B.$$

Используем граничные условия. На дне жидкость прилипает  $u(0) = 0$ ,  $u(h) = u_\infty$ . Тогда  $B = 0$ , а  $A = \frac{u_\infty}{h}$ , то есть  $u = \frac{u_\infty}{h} y$ . Мы всё нашли. Распределение давления константа, распределение скоростей линейной.

Можно ещё посмотреть трение на нижней стенке.

$$\tau_{xy} = \mu e_{xy} = 2\mu \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{u_\infty}{h} = \tau_h.$$

Эта величина вообще константа в любом слое, не только на дне.

Для получения этого решения мы использовали очень сильное предположение: скорость только горизонтальная. Это верно только для ламинарных течений.

## 16 Лекция 5

1. Отступление: об ударных волнах в сжимаемых жидкостях или газах.
2. Плоское течение Пуазейля.
3. Комбинация решений для течения Куэтто и Пуазейля.
4. Оценка величин различных членов уравнения Навье—Стокса. Число Рейнольдса.
5. Приближение Стокса для течений с малыми числами Рейнольдса.

## 16.1 Об ударных волнах

Возвращаемся на время к модели идеальной жидкости. В идеальной жидкости приходится строить решения с поверхностями разрыва. Например, волны Римана не могут существовать достаточно долгое время (именно волны сжатия), волны опрокидываются, поэтому приходится строить решения с ударными волнами. И не только волны Римана, это часто случается.

Поверхности разрыва — поверхности, по разные стороны которых разные значения скорости, давления, плотности, температуры. С физической точки зрения это тонкий слой, где параметры меняются быстро.

Я написала вам условия на поверхности разрыва, следующие из законов сохранения. Напишем их конкретно для идеальной жидкости. В системе координат, в которой поверхность разрыва неподвижна эти условия (без учёта идеальности жидкости) выглядят следующим образом. Масса часто обозначается через букву  $j$ . Массовых сил нет, так как масса поверхности равна нулю. Итак законы сохранения массы, количества движения, энергии (притоки тепла, как правило, считаются равными нулю, так как переход через поверхность разрыва происходит достаточно быстро и процесс можно считать адиабатическим)

$$\begin{aligned} v_{n_1} \rho_1 &= v_{n_2} \rho_2 = j; \\ j(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) &= \mathbf{P}_{n_1} - \mathbf{P}_{n_2}; \\ j\left(\frac{v_2^2}{2} + u_2 - \frac{v_1^2}{2} - u_1\right) &= (\mathbf{P}_{n_2}, \mathbf{v}_2) - (\mathbf{P}_{n_1}, \mathbf{v}_1) - q_{n_1} + q_{n_2}; \\ j(s_2 - s_1) &= \Omega. \end{aligned}$$

Пусть теперь жидкость идеальная и сжимаемая, то есть  $\mathbf{P}_n = -p\mathbf{n}$ . Рассмотрим, так называемые, адиабатические скачки, то есть  $\mathbf{q} = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} v_{n_1} \rho_1 &= v_{n_2}; \\ j(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = (p_1 - p_2)\mathbf{n} &\Leftrightarrow \begin{cases} j(v_{n_2} - v_{n_1}) = p_1 - p_2; \\ j(\mathbf{v}_{\tau_2} - \mathbf{v}_{\tau_1}) = 0. \end{cases} \\ j\left(\frac{v_2^2}{2} + u_2 - \frac{v_1^2}{2} - u_1\right) &= p_1 v_{n_1} - p_2 v_{n_2}; \\ j(s_2 - s_1) &= 0? \quad \text{нет!} \end{aligned}$$

Итого, касательные составляющие не рвутся, рвутся только нормальные.

Если газ идеальный совершенный, а процесс адиабатический, то  $s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const}$ ,  $p = A e^{\frac{s}{c_v}} \rho^\gamma$ ,  $T ds = dq = 0$ ,  $u = c_v T = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$ .

У нас получается, что соотношений четыре на три неизвестных. Если из первых трёх получить четвёртое, не получим ноль. Но поверхность разрыва — это узкая зона, но велики скорости деформаций, поэтому там нужно обязательно учитывать вязкость.

Передняя сторона скачка — сторона, с которой жидкость входит в скачок. В данном случае пусть передняя сторона помечается индексом 1.

Вся эта теория применяется для изучения движения транспорта или потока людей. В этом случае распределение плотности людей — полна Римана и она опрокидывается. Люди быстро бегут и утыкаются в пробку, тогда пробка растёт в сторону, против движения людей. А может быть и наоборот, пробка рассасывается быстрее набега людей.

Из написанных нами соотношения (из первых трёх), зная всё с одной стороны, можно вычислить всё с другой.

Если скачок движется со скоростью  $\mathbf{D}$ , то в соотношениях нужно заменить (только в первом соотношении) скорость  $v_n$  на  $v_n - D$ . Тогда за скачком нужно задать ещё одно условие. В конкретных задачах обычно ясно, какое условие задать.

### 16.1.1 3 факта о свойствах ударных волн в идеальной жидкости

Без доказательства. Можно прочесть во втором томе Седова.

1. Соотношения (1)–(3) допускает два типа ударных волн. Что вообще такое ударная волна: это разрыв, в котором  $j$  не равно нулю (то есть те поверхности разрыва, которые не являются границами раздела сред. Если говорим о поверхности моря, то это тангенсальный разрыв или контактный разрыв, перетока массы через границы нет). Итак два типа ударных волн:

- (а) Скачки уплотнения: если 1 — передняя сторона, то определяется  $\rho_2 > \rho_1$ . При этом всегда  $p_2 > p_1$ .
- (б) Скачки разрежения: если 1 — передняя сторона, то определяется через  $\rho_2 < \rho_1$ . Всегда при этом  $p_2 < p_1$ .

Мы это не выводим, но это следствия (1)–(3) и второго закона термодинамики.

2. Вытекает из второго закона термодинамики. Если уравнение состояния среды таково, что вторая производная  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{s=\text{const}} > 0$ , где  $V = \frac{1}{\rho}$ , то при переходе среды через скачок уплотнения энтропия растёт, а при переходе через скачок разрежения энтропия падает.

Это утверждение называется теоремой Цемплена. Из него следует, что в газах  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{s=\text{const}} > 0$  скачки разрежения невозможны.

Например, совершенный газ:  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_s = \gamma(\gamma + 1)c(s)\rho^{\gamma+2} > 0$ . Когда поршень отодвигается в эксперименте и не возникает ударной волны, но непрерывное уменьшение плотности.

3. Из второго закона термодинамики и условий (1)–(3) доказывается, что  $v_{n1} > a_1$ ,  $v_{n2} < a_2$ , где  $a_1$  — скоростью звука перед скачком,  $a_2$  — скоростью звука за скачком (нормаль направлена в сторону 2), при условии, что  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_s > 0$ . Это значит, что при этом условии, стоящие скачки возможны только в сверхзвуковых потоках.

Это же утверждение равносильно тому, что скоростью скачка относительно газа, расположенного впереди скачка больше скорости звука, а по отношению к газу за скачком — меньше скорости звука.

На самом деле факт номер три верен для любых сред, не обязательно условие на вторую производную. Но тогда он выводится не из второго закона термодинамики, а из условий эволюционности, которые я не буду рассказывать. О них можно почитать в нашем задачнике.

## 16.2 Что такое вязкая жидкость

Тензор напряжений состоит из двух частей  $p_{ij} = -p g_{ij} + \tau_{ij}$ , где  $p$  не зависит явно от скорости — давление,  $\tau_{ij}$  — функции компонент тензора скорости деформаций  $e_{ij}$ , которые равны нулю, если все  $e_{ij} = 0$ . Также  $\tau_{ij}$  могут зависеть от  $T$ , они называются компонентами тензора вязких напряжений.

Жидкость называется линейно-вязкой, если  $\tau^{ij} = A^{ijkl} e_{kl}$ . Если жидкость изотропная, то линейная связь представляется в виде закона Навье—Стокса

$$\tau_{ij} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} g_{ij} + 2\mu e_{ij}.$$

Здесь  $\lambda, \mu$  — коэффициенты вязкости.

Уравнения движения вязкой жидкости называются уравнениями Навье—Стокса. Для несжимаемой жидкости (для сжимаемой ещё есть член  $\frac{\lambda + \mu}{\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}$ )

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

Здесь  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  — кинематический коэффициент вязкости.

Эти уравнения гораздо сложнее уравнений Эйлера. Для несжимаемой жидкости есть только один параметр, характеризующий вязкость. Если  $\nu = 0$ , жидкость идеальна.

Вам было в прошлый раз рассказано, что такое течение Куэтта. Это стациональное, ламинарное (не знаем ещё, но интуитивно знаем) движение вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями, одна из которых движется, а другая неподвижна, при отсутствии перепада давления (или градиента давления). Если верхняя пластинка движется со скоростью  $v_0$ , а нижняя покоится, то  $v_x = v_0 \frac{y}{h}$ , а сила  $\tau = \mu \frac{v_0}{h}$ .

На самом деле, если имеется две сферы, то течение в слое между ними тоже называется течением Куэтта.

Вычислим  $\tau$  для течения Куэтта на конкретном примере. Пусть  $h = 1$  см,  $v_0 = 1$  м/с. Пусть жидкость вода  $\mu = 10^{-3}$  Па · с при комнатной температуре. Тогда  $\tau = 10^{-1}$  Па. Сравним с атмосферным давлением  $p_a = 10^5$  па. Отношение  $\frac{\tau}{p_a}$  в миллион раз. Во многих случаях вязкостью можно пренебречь, но не течением Куэтта, конечно, у него вообще движение вызвано только вязкостью.

## 16.3 Плоское течение Пуазейля

Это ламинарное стационарное течение вязкой жидкости между двумя параллельными неподвижными плоскостями, вызванное перепадом давления вдоль пластин. Можно рассматривать движение и в трубе

## 17 Лекция 6

1. Плоское течение Пуазейля.
2. Течение между двумя плоскостями, одна из которых движется, причём имеется градиент (или перепад) давления вдоль потока (это есть комбинация Куэтта и Пуазейля).

3. Задача об обтекании тела вязкой жидкостью. Понятие пространственного и временного масштабов явления. Оценка величины членов уравнений Навье—Стокса.
4. Число Рейнольдса.
5. Приближения Стокса для движений с малыми числами Рейнольдса.
6. Движение с большими числами Рейнольдса.

## 17.1 Плоское течение Пуазейля

Рассматриваем ламинарное стационарное течение вязкой жидкости между двумя параллельными неподвижными плоскостями, происходящее под действием перепада давления вдоль плоскостей. Пусть есть два сечения и  $p_1 > p_2$ .

Предположения о жидкости и движении

1. Жидкость несжимаемая, изотропная, линейно вязкая, коэффициент вязкости постоянен.
2. Движение стационарное.
3. Все частицы движутся параллельно градиенту давления. Если ось  $x$  параллельна градиенту давления, ось  $y$  направлена по нормали к плоскостям, то  $v_y = v_z = 0$ ,  $v_x = v_x(x, y, z)$ .
4. Движение плоскопараллельное  $v_x = v_x(x, y)$ .
5. Массовые силы не учитываются.

Задача найти  $v_x = v(x, y)$ .

Математическая постановка задачи, то есть уравнения и граничные условия.

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x; \quad (2)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y; \quad (3)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z; \quad (4)$$

$$(5)$$

Здесь  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  — кинематический коэффициент вязкости.

Граничные условия на пластинках  $v|_{y=0} = 0$ ,  $v|_{y=h} = 0$ . Ещё условия на давление  $p|_{x=x_1} = p_1$ ,  $p|_{x=x_2} = p_2$ .

Из (1) имеем  $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$  и  $v_x = v(y)$ . Из (3), (4) имеем  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ , то есть  $p = p(x)$ .

Рассмотрим уравнение (2)

$$\frac{dv_x}{dt} = \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial t}} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Каждое слагаемое равно нулю. Первое из-за стационарности движения, второе по уравнению (1) третье по предположению  $v_y = v_z = 0$ . Значит,  $\frac{dv_x}{dt} = 0$ .

Далее  $\Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{d^2 v}{dy^2}$  в силу (1).

Из уравнения (2) имеем равенство  $\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 v}{dy^2}$ . Левая часть не зависит от  $y$ , правая не зависит от  $x$ . Значит, это — равенство некоторых констант. Обозначают  $\frac{dp}{dx} = \text{const} = -i$  и  $p = -ix + \text{const}$ .

Из граничных условий получаем  $i = \frac{p_1 - p_2}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta p}{l} \neq 0$ , где  $l = x_2 - x_1$ , а  $\Delta p = p_1 - p_2$ . Таким образом основное уравнение для определения скорости

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l}.$$

Получается уже не линейный, а параболический профиль скорости. Давайте его найдём. Интегрируем один раз  $\frac{dv}{dy} = -\frac{\Delta p}{\mu l} y + C$ . Интегрируем второй раз

$$v = -\frac{\Delta p}{2\mu l} y^2 + C y + C_1.$$

Из граничных условий: при  $y = 0$   $y = h$   $C_1 = 0$ , при  $y = h$  получаем  $C = \frac{\Delta p}{2\mu l} h$ . Итого профиль скорости имеет вид

$$v = \frac{\Delta p}{2\mu l} (-y^2 + y h).$$

Распределение скорости по периметру потоку называется профилем скорости.

Где  $v_{\max}$ ? Из условия  $\frac{dv}{dy} = 0$  получаем  $y_{\max} = \frac{h}{2}$ . А чему он равняется?

$$v_{\max} = v|_{y=\frac{h}{2}} = \frac{\Delta p}{8\mu l} h^2.$$

Вычислим расход на единицу ширины, то есть

$$Q = \int_0^h v_x dy = \frac{\Delta p}{2\mu l} \left( -\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{2} \right) = \frac{\Delta p}{12\mu l} h^3.$$

Часто пишут вот в таком виде

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{12\mu Q}{h^3}.$$

Это течение называется течением Пуазейля, почему? Он был врач, многие тогда были учёными энциклопедическими. Изучал, что произойдёт с кровеносной системой человека, если ширина сосуда из-за стресса увеличится в два раза. Если течение рассматривать в круглой трубе, то получим  $h^4$  в знаменателе. Соответственно, уменьшение диаметра сосуда вдвое, давление увеличится в 16 раз, и сердце разовьётся. Вывели эти формулы экспериментально.

Теперь я хочу ввести понятие коэффициента сопротивления.

$$c_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho v^2 S}.$$

Очень удобная безразмерная величина. Здесь  $v$  — скорость тела.

В трубопроводе аналог такого коэффициента обозначают  $\lambda = \frac{\Delta p h}{\frac{1}{2} \rho v_{\text{ср}}^2 l}$ , где  $v_{\text{ср}} = \frac{Q}{h} = \frac{\Delta p}{12\mu l} h^2$ . Можно выразить  $\Delta p = \frac{12\mu l}{Q h^2}$  и подставить, получим

$$\lambda = \frac{24\mu}{\rho v_{\text{ср}} h} = \frac{24}{\text{Re}}.$$

Так появляется в рассмотрении число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{v_{\text{ср}} h \rho}{\mu} = \frac{v_{\text{ср}} h}{\nu}.$$

## 17.2 Течение между двумя плоскостями с подвижно плоскостью и с перепадом давления

Посмотрим на течение, которое получается при этом. Такое течение часто встречается при обтекании тела.

Какой будет профиль скорости? Уравнения для течений Пуазейля и Куэтта линейные. Значит, решения можно складывать.

$$v = \frac{v_0}{h} y + \frac{\Delta p}{2\mu l} y(h-y).$$

Граничные условия  $v|_{y=0} = 0$  и  $v|_{y=h} = v_0$  выполняются. Есть две ситуации

1.  $\Delta p < 0$ . Тогда  $v = y \left( \frac{v_0}{h} - \frac{|\Delta p|}{2\mu l} (h-y) \right)$ . Если  $|\Delta p|$  маленькое, то просто линейный профиль скорости течения Куэтта изгибается. А если  $|\Delta p|$  большое, то есть точка нулевой скорости и область противотечения. Часть жидкости, прилегающая к неподвижному телу, движется в противополодную сторону, оттесняет линии тока,двигающиеся в направлении подвижного тела. Это называется отрывным течением. Как с этим бороться? Нужно, чтобы тело было такое, что градиент давления был мал. Если к сфере пристроить хвостик, то можно уменьшить градиент давления.

## 17.3 Обтекания и упрощения

Если к течению прибавляется ускорение, то есть нелинейность, то ни одного аналитического решения. Течения эти очень сложные, даже на компьютерах эти течения тяжело рассчитывать. Пытались упростить уравнения в некоторых случаях. Надо как-то выбросить некоторые члены. Есть два подхода: выбросить нелинейные члены или выбросить слагаемые с вязкостью.

Напишем уравнение Навье—Стокса, например, для несжимаемой жидкости в проекции на ось  $x$ .

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right).$$

Здесь в левой части всё, кроме первого слагаемого — нелинейные инерционные члены, в правой части всё, что умножается на  $\nu$ , — вязкие члены. Нельзя сравнивать размерные величины. Введём характерные величины. Характерная величина  $v_x$ , это такая величина  $V$ , что  $v_x \sim V$  почти во всех точках потока. Характерный линейный масштаб  $L$  — это расстояние, на котором величина  $v_x$  меняется на величину порядка её самой. Если  $\Delta x \sim L$ , то  $\Delta v_x \sim V$ . И отношение  $\frac{\Delta v_x}{\Delta x} \sim \frac{V}{L}$ , а производные  $\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \sim \frac{V}{L}$ . Тогда  $L = \frac{V}{\frac{\partial v_x}{\partial x}}$ .

Бывает так, что масштабы тела в одном направлении и в перпендикулярном совсем разные.

Введём ещё временной масштаб  $T$ . Это когда если  $\Delta t \sim T$ , то (на месте  $v_x$  может быть любая величина)  $\Delta v_x \sim V$ , то есть  $\frac{\partial v_x}{\partial t} \sim \frac{V}{T}$ .

## 18 Лекция 7

До сих пор у вас были точные решения.

Мы решаем уравнения Навье—Стокса, дополненное уравнением неразрывности.

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v}; \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

Для решения задач добавляют граничные условия.

Оказывается, уравнения очень сложные. Полная производная содержит нелинейную часть уравнения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z.$$

Этот кусочек и мешает нам получать точные решения. Поэтому необходимо использовать некоторые приближения.

Запишем уравнение Навье—Стокса в проекции на ось  $x$ .

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right).$$

Это уравнение есть уравнение количества движения, представляет баланс сил.

Введём такую терминологию. Будем считать, что есть характерные  $V$ ,  $L$ , то есть  $v_x \sim V$ ,  $\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \sim \frac{V}{L}$ . Тогда  $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \sim V \cdot \frac{V}{L} = \frac{V^2}{L}$ . А вторые производные  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{V}{L^2}$ . Таким образом, отношение инерционных членов к вязким имеет порядок

$$\frac{\rho \frac{V^2}{L}}{\mu \frac{V}{L^2}} = \frac{\rho V L}{\mu} = \text{Re}.$$

### 18.1 Приближение Стокса

Пусть  $\text{Re} \ll 1$ . Тогда уравнения Стокса называется

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v}; \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

Когда это удобно? Обтекание сферы стационарным течением при отсутствии массовых сил. Тогда силы давления компенсируются силами вязкости

$$\begin{aligned} \text{grad } p &= \mu \Delta \mathbf{v}; \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

В такой постановке уже можно решать.

Есть существенное ограничение у такой постановки. Если  $\nu = \frac{\mu}{\rho} = 0,01 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$  и  $\text{Re} < 1$ , то  $VL < 0,01 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$ . Если  $V < 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , то размер сферы должен быть очень маленький  $L < 0,01 \text{см}$ .

Имеет место формула Стокса для силы сопротивления

$$W = 6 \pi \mu a v_\infty.$$

Давайте эту формулу получим из теории размерности.

Обращаю ваше внимание: у нас малые числа  $Re = \frac{\rho v_\infty a}{\mu}$ . Когда говорят про Стоксовое приближение, говорят о медленном движении в очень вязкой жидкости.

$$W = f(a, v_\infty, \mu).$$

Введём  $\{L, M, T\}$ . Запишем размерности  $[a] = L$ ,  $[v_\infty] = \frac{L}{T}$ ,  $[\mu] = \frac{M}{LT}$ . Давайте попробуем найти такую комбинацию величин, чтобы

$$\left[ \frac{W}{a^\alpha v_\infty^\beta \mu^\gamma} \right] = M^0 L^0 T^0.$$

Имеем  $M^1 L^1 T^{-2} = L^\alpha L^\beta T^{-\beta} M^\gamma L^{-\gamma} T^{-\gamma}$ . Отсюда

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 1; \\ \gamma = 1; \\ -2 = -\beta - \gamma. \end{cases}$$

Отсюда видно, что  $\alpha = \beta = \gamma$ . По  $\pi$ -теореме  $\exists C = \text{const}: W = C a v_\infty \mu$ .

Эта задача о медленном движении маленьких сфер (эксперимент показывает похожие результаты при  $Re < \frac{1}{2}$ ). Капелька тумана в воздухе.

## 18.2 Течение Хилл—Шоу

Между вертикальными стенками. Число Рейнольдса между такими стенками оказывается малым, если течение медленное, а стенки расположены близко. Визуализация обтекания цилиндра идеальной жидкостью сделана именно в лотке Хилл—Шоу.

Есть такое техническое устройство, как подшипник. Внешняя часть называется цапфой. Два цилиндра, между ними жидкость. По сравнению с радиусом подшипника толщина слоя жидкости маленький. Возникают огромные вязкие силы. Из уравнения Стокса здесь получаются близки к действительности движения.

Ещё применение годится в задачах фильтрации.

Итак, для постановки Стокса пренебрегаются нелинейными членами, связанными с ускорением.

## 18.3 Теория пограничного слоя

Если у нас есть обтекаемое тело. Оно стоит. На поверхности тела скорости ноль. Если отойти подальше, идёт поток. Если посмотреть на профиль скорости, то на уже небольшом расстоянии от тела скорость выйдет на стабильный уровень. Пусть  $(u, v)$ . Тогда члены  $\tau_{xy} = \mu \frac{u}{y}$  близко к телу существенны, а далеко нет больших перепадов. Это соображения наводят на мысль о том, что при больших числах Рейнольдса можно влияние вязкости учитывать только в тонком слое, называемом пограничным, а в пограничном не учитывать. Дальше будем склеивать решения по непрерывности. Напишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Давайте обезразмерим.  $u_1 = u/V$ ,  $v_1 = v/V$ ,  $x_1 = x/L$ ,  $y_1 = y/L$ ,  $p_1 = \frac{p}{\rho V^2}$ ,  $t_1 = t \frac{V}{L}$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{v^2}{L} \frac{\partial u_1}{\partial t_1}; \quad u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{V^2}{L} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}.$$

Что же у меня получилось

$$\frac{V^2}{L} \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right) = -\frac{V^2}{L} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\nu V}{L^2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} \right).$$

Если сократим, вот что получится.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\nu}{LV} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} \right).$$



Итого, в безразмерном виде уравнение имеет вид (я не сказал, но вы поняли, что массовые силы я не пишу)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

Что будет при больших числах  $\Re$ ? Казалось бы, можно считать жидкость идеальной. Но постановки задач вязкой и идеальной жидкости разные. Нам надо добиться такого решения, чтобы было выполнено условие прилипания (или условие на свободной поверхности). В общем решение для идеальной жидкости крайевым условиям удовлетворять не будет.

А что будет если положить  $\frac{1}{\Re} = 0$ ? Тогда изменится порядок уравнения, станет меньше констант, меньшему количеству условий решение сможет удовлетворить. Рассмотрим обыкновенно дифференциальное уравнение

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0.$$

Рассмотрим следующие случаи малой массы.

(а)  $m = 0$ . Тогда  $x = Ae^{-\frac{ct}{k}}$ .

(б) При  $m \neq 0$ , но  $m \ll \frac{k^2}{4c}$ , то  $x = A_1 e^{-\frac{ct}{k}} + A_2 e^{-\frac{kt}{m}}$ . Потребуем, чтобы  $A_1 = A$ , то есть с какого-то  $t$  это решение стало близко к предыдущему пункту, а вторая константа из условия  $x(0) = 0$ . Имеем  $A_2 = -A_1 = -A$ . Тогда  $x = A(e^{-\frac{ct}{k}} - e^{-\frac{kt}{m}})$ . Быстрое решение быстро выходит на медленное.

Это пример Прандтля.

Пусть поверхность тела прямолинейная и есть какой-то пограничный слой. Обобщим толщину пограничного слоя через  $\delta_p$ . Имеем характерные величины  $\rho, V, L$ . Тогда  $\frac{\partial u}{\partial x} \sim 1$ ,  $\delta = \frac{\delta_p}{L} \ll 1$ . Из уравнения неразрывности  $\frac{\partial v}{\partial y} \sim 1$ ,  $\frac{\Delta v}{\Delta y} \sim 1$ ,  $\Delta y \sim \delta$ , значит,  $\Delta v \sim \delta$ ,  $v \sim \delta$ .

Мы предполагаем, что силы инерции, силы вязкости и силы давления должны быть одного порядка. Насильственное предположение:  $\frac{\partial u}{\partial t} \sim 1$ ,  $\frac{p}{x} \sim 1$  и  $\frac{1}{\Re} \sim \delta$ . Остальные слагаемые в первом уравнении оцениваются автоматически. И после предположений можно оценить все из второго. В итоге получаем  $\frac{\partial p}{\partial y} \sim \delta$ , а это изменение давления поперёк пограничного слоя. То есть  $\Delta p \sim \delta$ . Отсюда можем сделать вывод, что давление не зависит от  $y$ , а зависит от  $(x, t)$ .

И последнее  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \frac{\partial u}{\partial x^2}$ .

Вернёмся к размерным переменным и ещё поговорим. Следующие уравнения называются уравнением Прандтля.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

Нет  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , это можно было выкинуть и по интуиции. И второго уравнения нет. Но из того, что  $p(x, y)$ , мы эти уравнения решить не можем. Но мы будем считать давление не искомой, а известной величиной. Мы его получим при склейке с решением задачи о движении идеальной жидкости. Итак в уравнении пограничного слоя неизвестные есть  $u, v$ .

Внешний поток обтекает не само тело, а некоторое тело, включающее пограничный слой. Но пограничный слой достаточно тонкий.

У нас получилось, что  $\frac{1}{\Re} \sim \delta$ . А что мы этими буквами обозначили  $\Re = \frac{VL}{\nu}$ ,  $\delta = \frac{\delta_p}{L}$ . Тогда  $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{VL}}$ , а  $\delta_p \sim \sqrt{\frac{\nu L}{v}}$ .

Есть некоторые проблемы использования этой теории. Одна из проблем связана с отрывом пограничного слоя. Вы изучали обтекание сферы идеальной жидкостью. Поток симметричный, есть парадокс Даламбера. Когда частицы верхней точку пролетает, она тормозится, а давление увеличивается. Но если жидкость вязкая, то вблизи сферы происходит подтормаживание. Не хватает инерции, чтобы двигаться против давления. Частицы останавливаются, перепад давления оказывается в другую сторону и частицы отрываются. Отрыв приводит к большой силе сопротивления.

Уравнения погран слоя можно интегрировать только до точки отрыва. Предельный случай, когда профиль скорости имеет вертикальную касательную (в  $y(x)$ ). Ясно, что это и будет точкой отрыва, давайте её найдём из

уравнения Прандтля.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0 \Rightarrow u=v=0}.$$

и  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=0} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0}$ . Рассмотрим случаи

$$(1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=1} < 0;$$

$$(2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=1} > 0;$$

$$(3) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=1} = 0;$$

Этот перепад давления и подгоняет частицы оторваться. Происходит обратное подтекание.

Для пространственного случая эти же идеи применимы.

Маргарита Эрнестовна рассказывала плоское течение Пуазейля. Течение между двумя плоскими пластинами. Расстояние между пластинами  $h$ , расстояние, которое рассматриваем  $l$ .  $v_{\text{ср}} = \frac{Q}{h} = \frac{\Delta p}{12\mu l} h^2$ . Если у нас садовый участок. Высота столба воды 10 м. Длина горизонтальной трубы  $l = 100$  м,  $h = 0,5$  м. Бак создаёт одну атмосферу и ещё атмосфера сама давит. А на выходе только одна атмосфера. Тогда  $v_{\text{ср}} = \frac{10^5 \cdot 0,5^2}{12 \cdot 10^{-3} \cdot 100} \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 20 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ .

Вообще когда попытаемся эту теорию применить для расчёта течения Волги, получим  $v = 12,5 \text{ км/с}$ . Корабли бы вылетали с речки со второй космической скоростью. Почему такой бред? Подкрасим жидкость. Потекут полосочки, но при увеличении скорости полосочки пропадут. Начиная с какой-то скорости появляются интенсивные поперечные составляющие.

Предположение о ламинарности очень сильное. Всё определяется числом  $\mathfrak{Re} = \frac{\rho v_{\text{ср}} d}{\mu}$ . Ламинарность при маленьких. Переход при  $\mathfrak{Re}_{\text{кр}} \approx 2400$  в круглой трубе.

## 19 Что-то новое

1. Турбулентность. Осреднение параметров турбулентности движения. Свойства операции усреднения.
2. Осреднение уравнения движения. Уравнения Рейнольдса.
3. Тензор турбулентных напряжений. Физический смысл.
4. Проблема замыкания уравнений Рейнольдса. О полуэмпирических теориях турбулентности.

### 19.1 Понятия турбулентности и осреднения

Движение называется турбулентным, если характеристики движения испытывают нерегулярные пульсации в пространстве и во времени.

В одной точке и в соседней могут скорости меняться в разы. Когда горная река течёт это даже глазом видно. В реке Волге глазом не видно, но пульсации там есть и они существенные.

Турбулентные движения возникают не обязательно при больших числах Рейнольдса.  $\mathfrak{Re} = \frac{vL}{\nu}$ . Вот если  $\mathfrak{Re} < \mathfrak{Re}_{\text{крит}}$  (для каждого течения это критическое значение своё), то течение получается, как бы его ни возмущали, ламинарным.

Как ввести осреднение и осреднить все наши уравнения. Можно усреднять по объёму, можно усреднять по времени.

#### 19.1.1 Осреднение по времени

В каждый момент времени  $t$  выбирается интервал величины  $T$ , в который попадает достаточно много пульсаций, но «осреднённое» движение меняется мало. Среднее значение величины  $\varphi(x^i, t)$  обозначается

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(x^i, \tau) d\tau.$$

У операции осреднения есть шесть свойств.

**Утверждение 19.1.** Если  $C$  — константа, то  $\langle C \rangle = C$ .

**Утверждение 19.2.** Если осредняем ещё раз,  $\langle \langle \varphi \rangle \rangle = \langle \varphi \rangle$ .

**Утверждение 19.3.** Из линейности интеграла  $\langle \varphi + f \rangle = \langle \varphi \rangle + \langle f \rangle$ .

Осреднить уравнение значит осреднить каждый его член. Это пока простые свойства.

**Утверждение 19.4.** Как найти среднее значение произведения ( $\langle f\varphi \rangle \neq \langle f \rangle \langle \varphi \rangle$ ).

$$\langle f \rangle g = \langle f \rangle \langle \varphi \rangle + \langle f' \varphi' \rangle.$$

**Доказательство.** Введём, так называемую, пульсационную добавку  $\varphi' = \varphi - \langle \varphi \rangle$ . То же самое для любой величины, например,  $f = \langle f \rangle + f'$ . Среднее значение от пульсационной добавки равно нулю.

$$\langle \varphi' \rangle = \langle \varphi - \langle \varphi \rangle \rangle.$$

Теперь считаем среднее от произведения.

$$\langle fg \rangle = \langle (\langle f \rangle + f')(\langle \varphi \rangle + \varphi') \rangle = \langle \langle f \rangle \langle \varphi \rangle + \langle f \rangle \varphi' + f' \langle \varphi \rangle + f' \varphi' \rangle = \langle f \rangle \langle \varphi \rangle + \langle f' \varphi' \rangle.$$

Если  $f'$  и  $\varphi'$  как-то согласованы по знаку, то среднее значение произведения может быть не ноль. ■

**Утверждение 19.5.** Прямо по определению осреднения  $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right\rangle = \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial x^i}$ .

**Утверждение 19.6.**  $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial t}$ .

**Доказательство.** Аккуранто вычисляем левую часть равенства.

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial \varphi(x^i, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{T} \left[ \varphi \left( x^i, t + \frac{T}{2} \right) - \varphi \left( x^i, t - \frac{T}{2} \right) \right]$$

Теперь правую по теореме о дифференцировании интеграла по параметру.

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(x^i, \tau) d\tau = \frac{1}{T} \left[ \varphi \left( x^i, t + \frac{T}{2} \right) - \varphi \left( x^i, t - \frac{T}{2} \right) \right]$$

■

## 19.2 Осреднение уравнений движения. Уравнения Рейнольдса

Посмотрим на сами уравнения

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho F + \nabla_i P^i.$$

В декартовой системе координат

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = \rho F_x + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z}.$$

Здесь  $P_{ij}$  — компоненты тензора напряжений. Полученное осреднение будет верно для любых сред, не обязательно линейно вязких.

Преобразуем величину

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \right) + v_x \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right)}_{=0 \text{ ур. нер-ти}} = \\ &= \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_x v_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Теперь только производные входят в сумму. Я уже пропагандировала эту формулу. Она ведь удобна и для численных методов, где производные заменяются на разности. А если разность нужно умножить на значение, то значение в какой точке брать: начальной или конечно? Это повлияет на решение.

### 19.2.1 Вывод уравнения Рейнольда при $\rho = \text{const}$

Это осреднение уравнений движения. Возьмём уравнение в проекции на ось  $x$

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_x v_z}{\partial z} = \rho F_x + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z}.$$

Имеем  $v_i = \langle v_i \rangle + v'_i$ , силы могут пульсировать  $F_x = \langle F_x \rangle + F'_x$ ,  $P_{xx} = \langle P_{xx} \rangle + P'_{xx}$ . И самое интересное следующее, считаем при  $\rho = \text{const}$ , то есть среда только однородная и несжимаемая среда.

$$\langle \rho v_x v_x \rangle = \rho \langle v_x \rangle \langle v_x \rangle + \langle \rho v'_x v'_x \rangle.$$

Применяем осреднение ко всему тому уравнению. Все пульсационные добавки переносим в правую часть.

$$\frac{\partial \rho \langle v_x \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle v_x \rangle \langle v_x \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \rho \langle v_x \rangle \langle v_y \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \rho \langle v_x \rangle \langle v_z \rangle}{\partial z} = \rho \langle F_x \rangle + \frac{\partial (\langle P_{xx} \rangle + T_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (\langle P_{xy} \rangle + T_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial (\langle P_{xz} \rangle + T_{xz})}{\partial z},$$

где  $T_{ij} = -\langle \rho v'_i v'_j \rangle$ .

Получили уравнение на среднее значение скорости.

Получим ещё осреднение уравнения неразрывности для  $\rho = \text{const}$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Осредняем

$$\frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v_y \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle v_z \rangle}{\partial z} = 0.$$

Поэтому  $\frac{\partial \rho \langle v_x \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle v_x \rangle \langle v_x \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \rho \langle v_x \rangle \langle v_y \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \rho \langle v_x \rangle \langle v_z \rangle}{\partial z} = \rho \frac{d \langle v_x \rangle}{dt}$ .

Таким образом, результат усреднения имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{d \langle v_x \rangle}{dt} &= \rho \langle F_x \rangle + \frac{\partial (\langle P_{xx} \rangle + T_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (\langle P_{xy} \rangle + T_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial (\langle P_{xz} \rangle + T_{xz})}{\partial z}, \\ \rho \frac{d \langle v_y \rangle}{dt} &= \rho \langle F_y \rangle + \frac{\partial (\langle P_{yx} \rangle + T_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial (\langle P_{yy} \rangle + T_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (\langle P_{yz} \rangle + T_{yz})}{\partial z}, \\ \rho \frac{d \langle v_z \rangle}{dt} &= \rho \langle F_z \rangle + \frac{\partial (\langle P_{zx} \rangle + T_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial (\langle P_{zy} \rangle + T_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial (\langle P_{zz} \rangle + T_{zz})}{\partial z}, \end{aligned}$$

Здесь  $T_{ij} = -\langle \rho v'_i v'_j \rangle$  — компоненты тензора турбулентных напряжений. Вообще в индексных обозначениях уравнение Рейнольдса имеет вид

$$\rho \frac{d \langle v^i \rangle}{dt} = \rho \langle F^i \rangle + \frac{\partial (\langle P^{ij} \rangle + T^{ij})}{\partial x^j}.$$

А тензор турбулентных напряжений  $T^{ij} = -\langle \rho v'^i v'^j \rangle$ .

Турбулентные напряжения похожи на молекулярные. Но гораздо более существенные. Какая масса переносится через площадку:  $\langle -\rho v'_x \mathbf{v} \rangle d\sigma$  — это и будет увеличение количества движения на площадке. А если хочешь вектор напряжений, надо поделить на  $d\sigma$

## 19.3 Проблема замыкания

Мы усреднили уравнение неразрывности и уравнения движения. Имеем четыре уравнения на пятнадцать неизвестных. Нам нужно уравнение на  $\langle p_{ij} \rangle$ , оно считается известным. Если жидкость линейно-вязкая, то есть

$$P_{ij} = -pg_{ij} + \tau_{ij}, \quad \tau_{ij} = 2\mu e_{ij}.$$

то  $\langle p_{ij} \rangle = -\langle p \rangle g_{ij} + 2\mu \langle e_{ij} \rangle$ , где  $\langle e_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x^j} + \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x^i} \right)$ .

А что делать с тензором турбулентных напряжений непонятно. Пульсации могут быть самые разные для одной и той же среды. Они могут зависеть от граничных условий, от сил, которые действуют. Для этих  $T^{ij}$  нельзя написать универсальные уравнения.

## 20 Лекция 9

1. Полуэмпирическая теория Прандтля для турбулентной потоков вдоль сетки.
2. Логарифмический профиль скорости в турбулентных потоках вдоль твёрдой стенки.

Мы с вами занимаемся турбулентными движениями, когда характеристики движения кроме своих средних значений испытывают некую пульсацию. Например,  $v_x = \langle v_x \rangle + v'_x$ , где  $v'_x$  — пульсационный добавок,  $\langle v'_x \rangle = 0$ .

Написали Рейнольсово осреднение уравнений для несжимаемой жидкости.

$$\operatorname{div}\langle \mathbf{v} \rangle = 0; \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\langle v_x \rangle}{dt} = \rho \langle F_x \rangle + \frac{\partial(\langle P_{xx} \rangle + T_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\langle P_{xy} \rangle + T_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\langle P_{xz} \rangle + T_{xz})}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{d\langle v_y \rangle}{dt} = \rho \langle F_y \rangle + \frac{\partial(\langle P_{yx} \rangle + T_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(\langle P_{yy} \rangle + T_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(\langle P_{yz} \rangle + T_{yz})}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\rho \frac{d\langle v_z \rangle}{dt} = \rho \langle F_z \rangle + \frac{\partial(\langle P_{zx} \rangle + T_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\langle P_{zy} \rangle + T_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial(\langle P_{zz} \rangle + T_{zz})}{\partial z}, \quad (4)$$

$$(5)$$

Если жидкость сжимаема, нужна ещё и термодинамика. А порой и химические реакции нужно учитывать. Но даже в нашем простейшем случае несжимаемой жидкости система не замкнута. Что нам нужно ещё:

1. Как выражается  $\langle p^{ij} \rangle$  через  $\langle v_i \rangle, \langle p \rangle$ .
2. Как выражается  $T_{ij}$  через хоть какие-нибудь осреднённые параметры.

Второй пункт самый трудный в этой теории. Ведь  $T_{ij} = -\langle \rho v'_i v'_j \rangle$  — компоненты тензора турбулентных напряжений, где  $v'_i$  зависят не только от среды, но и от условий, в которых происходит движение. На стенке пульсации нет, пульсации могут гаситься.

Получается так, что для разных классов движений вводятся гипотезы и обрабатываются эксперименты. Просто предлагаются формулы или уравнения. Это называется полуэмпирическая теория. Авторы разные, предлагают разное. У некоторых только конечные соотношения, у других какие-то дифференциальные уравнения.

Напишем законы для  $T_{ij}$ , необходимые для замыкания системы уравнений. Для вязких напряжений в линейно-вязкой несжимаемой жидкости, то есть

$$p_{ij} = -p g_{ij} + \tau_{ij}, \quad \tau_{ij} = 2\mu e_{ij},$$

$\mu$  — коэффициент вязкости,  $e_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформаций.

Предположим, что  $T_{ij} = 2\mu_T \langle e_{ij} \rangle$ , где  $\mu_T$  — коэффициент турбулентной вязкости. Это называется гипотезой Буссинеска.

А дальше для  $\mu_T$  нужно давать какие-то законы. Замыкание мы ещё не выполнили.

А вообще эта гипотеза обобщается. Пока она не изотропная. В разных направлениях, разные вязкости. Поэтому используют тензор вместо одного коэффициента, то есть  $T_{ij} = A_{ijkl}^T \langle e_{kl} \rangle$ .

## 20.1 Полуэмпирическая модель Прандтля для течения вдоль стенки

Она была построена на аналогии между молекулярной вязкости и турбулентной. Частицы перескакивают из слоя в слой, возникает взаимодействие между слоями.

### 20.1.1 Для каких потоков строится теория Прандтля

1. Жидкость несжимаемая, однородная, вязкая (то есть могут быть касательные напряжения, не обязательно линейность вязкости по скоростям);
2. Рассматривается поток вдоль твёрдой стенки.
3. Направим ось  $x$  вдоль средней скорости потока. Тогда предполагаем  $\langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$ .
4. Направим ось  $y$  перпендикулярно стенке. Предполагаем, что течение плоско-параллельное, то есть всё не зависит от  $z$ .
5. Всё не зависит от  $x$  (в том числе нет градиента давления вдоль оси  $x$ , он есть где-то сверху, а у стенки уже несущественно).
6. Массовые силы не учитываются.
7. Движение в среднем стационарно.

Уравнение неразрывности выполняется автоматом в силу предположения (5)

$$\operatorname{div}\langle \mathbf{v} \rangle = 0; \quad \rho \frac{d\langle v_x \rangle}{dt} = \rho \langle F_x \rangle + \frac{\partial(\langle P_{xx} \rangle + T_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\langle P_{xy} \rangle + T_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\langle P_{xz} \rangle + T_{xz})}{\partial z}.$$

Преобразуем то, что осталось. Имеем  $p_{xy} = \tau_{xy} = 2 \mu e_{xy}$ . Тогда

$$\langle p_{xy} \rangle = 2 \mu e_{xy} = \mu \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = \mu \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y} \right].$$

Это просто, а для  $T_{xy}$  надо строить четыре предположения Прандтля про  $T_{xy} = -\langle \rho v'_x v'_y \rangle$ .

1. Можно ввести понятие **поток смещения**  $l_1$  как расстояние, на которое прыгают частицы за счёт турбулентности (поперёк потока).
2. Пульсации  $v'_x$  связана с тем, что частицы переходят из слоя в слой и превносят количество движения. Предполагаем, что  $v'_x = \langle v_x \rangle (y + l_1) - \langle v_x \rangle (y) = l_1 \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y}$  (в круглых скобках указана точка, в которой замеряется средняя скорость).
3. Нет преимущества у какого-либо направления пульсации; пульсации по всем направлениям одного порядка, то есть  $|v'_y| = \alpha |v'_x|$ , где  $\alpha \sim 1$ .

В силу первых трёх предположений имеем

$$|T_{xy}| = \langle \rho \alpha l_1^2 \rangle \left| \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y} \right|^2.$$

4. Предположение на величину  $\langle \alpha l_1^2 \rangle$  будет ниже.

Сначала поймём, как написать звёздочку без модулей с учётом знака. Рассмотрим два случая.

- (1)  $\frac{\partial v_x}{\partial y} > 0$ . Тогда если  $v'_y > 0$ , то  $v'_x < 0$ . Тогда  $T_{xy} = -\langle \rho v'_x v'_y \rangle < 0$ .
- (2) Наоборот  $\frac{\partial v_x}{\partial y} < 0$ . Тогда ясно, если  $v'_y > 0$ , то это означает, что снизу (у стенки) скорость большая, а сверху поменьше, то есть  $v'_x > 0$ . Если  $v'_y < 0$ , то  $v'_x < 0$ . Тогда и  $T_{xy} < 0$ .

Раскрываем модули

$$T_{xy} = \langle \rho \alpha l_1^2 \rangle \left| \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y} \right| \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y}.$$

Теория была бы закончена, если бы мы знали  $\alpha l_1^2$ .

4. Обозначим  $\langle \alpha l_1^2 \rangle =: l^2$ . Гипотеза состоит в том, что в течении у стенки задаётся формулой  $l = \varkappa y$ , где  $\varkappa = \text{const}$  находится из эксперимента.

Окончательно, формула для  $T_{xy}$  в теории Прандтля

$$T_{xy} = \rho \varkappa^2 y^2 \left| \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y} \right| \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y}.$$

Можно записать эту формулу в виде  $T_{xy} = \mu_T \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y}$  — аналогично формуле  $\tau_{xy}$ . Здесь  $\mu_T$  — коэффициент турбулентной вязкости, но  $\mu_T \neq \text{const}$ , а зависит от  $y$  и от  $\frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y}$ .

Оказалось, что для всех сред эта  $\varkappa \approx 0,4$  для потоков у стенки. Называется постоянной Кáрманa.

## 20.2 Задача об обтекании профиля в потоках у стенки при условиях (1)–(7)

Покажем, что в турбулентной области профиль скорости логарифмический. Показать очень просто для линейно-вязкой жидкости.

$$\frac{d(\langle p_{xy} \rangle + T_{xy})}{dy} = 0; \quad \langle p_{xy} \rangle = \langle \tau_{xy} \rangle = \mu \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y}, \quad \langle \tau_{xy} \rangle + T_{xy} = \tau_0 = \text{const}.$$

В частности у стенки касательные напряжения  $\tau_0$ . Подставляем формулу для  $T_{xy}$ , имея в виду, что  $\frac{\partial v_x}{\partial y} > 0$  (стенка тормозит)  $T_{xy} = \rho \varkappa^2 y^2 \left( \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y} \right)$ . Интегрировать не будем.

Разобьём область на три части.

1. Течение в тонком слое у самой стенки (вязкий подслой). Там пульсации малы, так как стенка мешает. Поэтому там в этом тонком слое можно пренебречь нелинейным  $T_{xy}$ . Имеем  $\langle \tau_{xy} \rangle = \tau_0$ , то есть  $\frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y} = \frac{\tau_0}{\mu}$ ,

$$\langle v_x \rangle = \frac{\tau_0}{\mu} y + C.$$

Но  $C = 0$  в силу условия прилипания, то есть  $v_x|_{y=0} = 0$ . В общем, линейный профиль.

2. Теперь более-менее вдали рассмотрим, где  $T_{xy} \gg \langle \tau_{xy} \rangle$ . Пренебрегаем  $\tau_{xy}$ . Тогда  $T_{xy} = \tau_0$  и

$$\rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y} \right)^2 = \tau_0.$$

Отсюда  $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{\kappa} \frac{1}{y}$  и получаем логарифмический профиль

$$\langle v_x \rangle = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{\kappa} \ln y + C_1.$$

Есть переходный слой.  $C_1$  получается из склейки слоёв.

В трубе тоже есть логарифмический профиль. Так что теория действительно работает.

Мы рассмотрели только частный случай движения — движение у стенки. Существуют другие полуэмпирические модели. Они более сложны, содержат большее количество констант. Наиболее популярная сейчас, так называемая,  $k - \varepsilon$ -модель; здесь  $k$  — плотность энергии турбулентных пульсаций,  $k \sim \langle (v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2 \rangle$ ,  $\varepsilon$  — диссипация турбулентной энергии. И тогда просто по теории размерности остаётся необходимым выяснить  $\mu_T(k, \varepsilon)$ . Надо будет писать закон сохранения энергии, осреднять и по дороге делать добавочные предположения.

## 21 Лекция 14

1. Добавление о свойствах системы уравнений линейной теории упругости (возможность суперпозиции решений).
2. Задача Ламе. Физическая и математическая постановки.
3. Уравнения и граничные условия в цилиндрической системе координат при наличии цилиндрической симметрии.
4. Решение задачи Ламе и его исследование.

### 21.1 О суперпозиции

Так как уравнения и граничные условия в линейной теории упругости линейные и граничные условиям задаются на поверхности тела до деформации, то сумма решений для одного и того же тела при разных массовых и поверхностных силах будет тоже решением задачи, в которой массовые силы равны сумме массовых сил для разных задач и поверхностные силы есть сумма поверхностных сил для разных задач.

### 21.2 Задача Ламе о напряжении и деформации в стенках трубы из упругого материала, которые возникают под действием внутреннего и внешнего давления.

Физическая постановка задачи

1. Геометрия: круглая труба; радиусы сечений  $a$ ,  $b$ , длина  $l$ .
2. Труба находится в равновесии.
3. Материал трубы линейно упругий изотропный, модули упругости постоянны.
4. Массовые силы не учитываются.
5. Давление внутри трубы  $p_a = \text{const}$ , а вне трубы  $p_b = \text{const}$ .
6.  $T = T_0$ , где  $T_0$  — температура, при которой в отсутствие сил деформаций нет (то есть не учитываем возможные температурные напряжения и деформации).
7. Перемещения вдоль оси трубы отсутствуют. Например, труба бесконечно длинная, а мы рассматриваем кусок длины  $l$  или торцы упрутся в жёсткие гладкие (следующий пункт) плоскости, которые не дают частицам трубы перемещаться в продольном направлении, как на картинке нарисовано.
8. Торцевые плоскости не препятствуют перемещению частиц трубы в поперечном (оси цилиндров) направлении.

Требуется найти напряжения в стенках трубы. Не привьются ли они критические значения, при которых трубы начнёт пластически деформироваться или появятся трещины.

Если слишком большое давление в трубе, трещины начнут появляться на внутренней стенке.

Имеет смысл всё писать в цилиндрической системе координат. Но мы запишем в инвариантном виде систему уравнений.

### 21.3 Система уравнений в криволинейной системе координат

Как мы писали уравнения Навье—Ламе в векторной форме

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} + \mu \Delta \mathbf{w} = 0.$$

Напишем выражения для  $\operatorname{div}$ , для  $\operatorname{grad}$  и оператор  $\Delta$ .

$$\operatorname{div} \omega = \nabla_i w^i = g^{ij} \nabla_i w_j.$$

А про оператор Лапласа мы знаем в декартовых координатах  $\Delta w_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^k \partial x^k} = \delta^{kl} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^k \partial x^l}$ .

$$\Delta w_i = g^{kl} \nabla_k \nabla_l w_i.$$

И для градиента частные производные скаляра совпадают с ковариантными. Итак, уравнения в компонентах имеют вид

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x^i} \operatorname{div} \mathbf{w} + \mu g^{kl} \nabla_k \nabla_l w_i = 0.$$

Теперь граничные условия. Границы определяются из  $r = a$ ,  $r = b$ ,  $z = 0$ ,  $z = l$ .

- При  $r = a$   $\mathbf{P}_n = -p_a \mathbf{n}$ .
- При  $r = b$   $\mathbf{P}_n = -p_b \mathbf{n}$ .
- При  $z = 0$  и  $z = l$  имеем  $w_z = 0$  и  $\mathbf{P}_{n\tau} = 0$ .

После того, как найдём  $w_i$  вычислим  $\varepsilon_{ij}$  и  $p_{ij}$ , где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i w_j + \nabla_j w_i).$$

Основная цель решения  $p_{ij} = \lambda J_1(\varepsilon) g_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ .

### 21.4 Цилиндрическая система координат

Обозначения  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = z$ .

Имеем следующую информацию об этой системе координат

$$\begin{aligned} (dr)^2 &= ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 = g_{ij} dx^i dx^j; \\ (g_{ij}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ g_{ij} &= (\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_j); \quad |\mathfrak{e}_i| = \sqrt{g_{ii}}; \quad |\mathfrak{e}_1| = 1; \quad |\mathfrak{e}_2| = r; \quad |\mathfrak{e}_3| = 1. \end{aligned}$$

Теперь надо пересчитать все наши операторы

$$\begin{aligned} \nabla_i w_j &= \frac{\partial w_j}{\partial x^i} w_k \Gamma_{ji}^k; \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{ks} \left( \frac{\partial g_{si}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{sj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k} \right); \\ \Gamma_{22}^1 &= -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \quad \text{остальные } 0; \\ \nabla_i T_{kl} &= \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^i} - T_{\alpha l} \Gamma_{ki}^\alpha - T_{k\alpha} \Gamma_{li}^\alpha; \\ T &= T_{kl} \mathfrak{e}^k \mathfrak{e}^l. \end{aligned}$$

Все формулы в цилиндрической системе координат. Предположение один даёт  $\mathbf{w} = w^1 \mathfrak{e}_1 + w_1 \mathfrak{e}^k$ ,  $w_2 = 0$ ,  $w_3 = 0$ . При этом  $|\mathfrak{e}^1| = |\mathfrak{e}_1| = 1$  и  $\mathfrak{e}^1 \mathfrak{e}_1 = 1$ .



Предположение два даёт  $w_1 = w(r)$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \nabla_1 w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial x^1} - \cancel{w_k \Gamma_{11}^k} = \frac{\partial w}{\partial r}; \\ \varepsilon_{22} &= \nabla_2 w_2 = \cancel{\frac{\partial w_2}{\partial x^2}} - w_k \Gamma_{22}^k = r w_1 = r w; \\ \varepsilon_{33} &= \nabla_3 w_3 = \cancel{\frac{\partial w_3}{\partial x^3}} - \cancel{w_k \Gamma_{33}^k} = 0; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}(\nabla_1 w_2 + \nabla_2 w_1) = \frac{1}{2} \left( \cancel{\frac{\partial w_2}{\partial x^1}} - \cancel{w_2 \Gamma_{21}^k} + \cancel{\frac{\partial w_1}{\partial x^2}} - \cancel{w_k \Gamma_{12}^k} \right); \\ \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{33} = 0; \quad \varepsilon_{11} \neq 0 \neq \varepsilon_{22}.\end{aligned}$$

Теперь

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = J_1(\varepsilon) = g^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}.$$

В нашей задаче  $\operatorname{div} \mathbf{w} = J_1(\varepsilon) = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r}$ . Поэтому

$$\begin{aligned}p_{11} &= \lambda \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial r}; \\ p_{23} &= r^2 \lambda \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \right) + 2\mu r w; \\ p_{33} &= \lambda \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \right).\end{aligned}$$

При  $i \neq j$  имеем  $p_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} = 0$ .

Вычислим оператор Лапласа от  $w_i$ .

$$\Delta w_1 = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta w_1 = g^{11} \nabla_1 \nabla_1 w_1 + g^{22} \nabla_2 \nabla_2 w_1 + g^{33} \nabla_3 \nabla_3 w_1$$

От скаляра просто считать, а здесь компонента вектора

$$\nabla_1 \nabla_1 w_1 = \nabla_1 (\nabla_1 w_1) = \frac{\partial}{\partial x^1} (\nabla_1 w_1) - \cancel{\nabla_k w_1 \Gamma_{11}^k} - \cancel{\nabla_1 w_k \Gamma_{11}^k} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w_1}{\partial r} - w_k \Gamma_{11}^k \right) = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right).$$

Теперь вычислим

$$\nabla_2 (\nabla_2 w_1) = \cancel{\frac{\partial}{\partial x^2} (\nabla_2 w_1)} - \nabla_k w_1 \Gamma_{22}^k - \nabla_2 w_k \Gamma_{12}^k = (\nabla_1 w_1) \cdot r - (\nabla_2 w_2) \frac{1}{r} = r \frac{\partial w}{\partial r} - w_1.$$

Ну а  $\nabla_3 (\nabla_3 w_1) = 0$ .

Итак, оператор Лапласа

$$\Delta w_1 = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \right).$$

А уравнения Навье—Ламе

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \right) &= 0; \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \right) &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом,  $\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} = \text{const} =: 2A$  — так обозначают эту постоянную.

$$wr = r^2 A + B; \quad w = Ar + \frac{B}{r}.$$

Это — решение уравнений Навье—Ламе при условии, что  $w_1 = w(r)$ ,  $w_2 = w_3 = 0$  и равновесие и массовых сил.

## 22 Лекция 15

1. Решение задачи Ламе и его исследование;
2. Термодинамические соотношения в теории упругости.

Вот такой короткий план на сегодня.

Повторим кратко математическую постановку задачи: уравнения Навье—Ламе

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} + \nu \Delta \mathbf{w} = 0.$$

И граничные условия

- при  $r = a$  условие  $\mathbf{P}_n = -p_a \mathbf{n}$ ;
- при  $r = b$  условие  $\mathbf{P}_n = -p_b \mathbf{n}$
- при  $z \in \{0, l\}$  условие  $w_n = 0$ ,  $\mathbf{P}_{n\tau} = 0$  (не запрещается перемещаться в поперечном направлении, но в продольном есть ограничители).

Предполагается, что  $w_z = 0$ ,  $W_2 = 0$ , а  $w_1 = w = w(r)$ . Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r}; \quad \Delta w_1 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2}; \quad \Delta w_2 = \Delta w_3 = 0.$$

Решение задачи есть  $w = Ar + \frac{B}{r}$ , где  $A, B$  — константы, которые зависят от граничных условий.

Ещё мы вычислили

$$\varepsilon_{11} = \nabla_1 w_1 = \frac{\partial w}{\partial r} = A - \frac{B}{r^2}; \quad \varepsilon_{22} = \nabla_2 w_2 = wr = Ar^2 + B; \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Ну и компоненты тензора напряжений

$$p_{ij} = \lambda J_1(\varepsilon) g_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}; \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 2A.$$

Тогда

$$P_{11} = 2A\lambda + 2\mu \left( A - \frac{B}{r^2} \right) = 2A(\lambda + \mu) - \frac{2\mu B}{r^2}.$$

Обозначим  $A_1 = 2A(\lambda + \mu)$ ,  $B_1 = 2\mu B$ . Тогда

$$\begin{aligned} P_{11} &= A_1 - \frac{B_1}{r^2}; \\ P_{22} &= 2A\lambda r^2 + 2\mu r \left( Ar + \frac{B}{r} \right) = A_1 r^2 + B_1; \\ P_{33} &= 2A\lambda. \end{aligned}$$

Мы на этом и остановились. Теперь мы должны обратиться к граничным условиям и написать их так, чтобы константы можно было по ним определить. Записать через  $w$ .

- При  $r = a$  имеем  $P_{ni} = -p_a n_i$ . По формуле Коши  $P_{ni} = p_{ik} n^k$ , то есть

$$p_{ik} n^k = -p_a g_{ij} n^k i, \quad i = 1, 2, 3$$

Имеем  $\mathbf{n} = n^1 \mathbf{e}_1$ ,  $n^2 = n^3 = 0$ ,  $n^1 = -1$ . Значит,

$$-P_{11}|_{r=a} = p_a \Rightarrow P_{11}|_{r=a} = -p_a; \quad P_{12}|_{r=a} = 0; \quad P_{13}|_{r=a} = 0.$$

- Условие при  $r = b$  будет почти таким же. Только нормаль будет с плюсом по радиусу

$$P_{11}|_{r=b} = -p_b; \quad P_{12}|_{r=b} = P_{13}|_{r=b} = 0.$$

- Граничное условие на торцах  $z \in \{0, l\}$ :

$$w_3|_{z \in \{0, l\}} = 0, \quad P_{13}|_{z \in \{0, l\}} = P_{23}|_{z \in \{0, l\}} = 0.$$

Условия на торцах уже выполнены автоматом в силу нашего предположения. Я не дописала, что  $P_{ij} = 0$  при  $j \neq i$  на всём решении. Условия на границах тоже частично выполнены. Осталось добиться выполнения двух

$$P_{11}|_{r=a} = -p_a; \quad P_{11}|_{r=b} = -p_b.$$

Получаются простенькие уравнения

$$\begin{cases} A_1 - \frac{B_1}{a^2} = -p_a; \\ A_1 - \frac{B_1}{b^2} = -p_b. \end{cases}$$

Какие же формулы получаются

$$B_1 = \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2}; \quad A_1 = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}.$$

Собственно говоря, решение найдено.

$$\begin{aligned} P_{11} &= A_1 - \frac{B_1}{r^2}; \\ P_{22} &= A_1 r^2 + B_1; \\ P_{33} &= 2\lambda A = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} A_1 = 2\sigma A_1. \end{aligned}$$

Чтобы ощутить силы, нам нужны физические компоненты, так как  $|\varepsilon_i| = \sqrt{g_{ij}}$ .

$$\mathcal{P} = p_{11}\varepsilon^1\varepsilon^1 + p_{22}\varepsilon^2\varepsilon^2 + p_{33}\varepsilon^3\varepsilon^3 = p_{11\text{физ}}e^1e^1 + p_{22\text{физ}}e^2e^2 + p_{33\text{физ}}e^3e^3.$$

Обозначения будут следующими

$$P_{11} = P_{11\text{физ}} = P_{rr}; \quad P_{22\text{физ}} = P_{22} \frac{1}{r^2} = P_{\theta\theta}; \quad P_{33\text{физ}} = P_{33} = P_{zz}.$$

Запишем ответ

$$\begin{aligned} P_{rr} &= \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right); \\ P_{\theta\theta} &= \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right); \\ P_{zz} &= 2\sigma \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma$  — коэффициент Пуассона, который вычисляется по формуле  $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ .

## 22.1 Исследуем это решение

Сначала рассмотрим ситуацию, когда внешнее давление мало по сравнению с внутренним. Так в случае пушки. Пренебрежём  $p_b$ , то есть полагаем  $p_b = 0$ . Тогда формулы становятся более короткими

$$\begin{aligned} p_{rr} &= \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) < 0; \\ p_{\theta\theta} &= \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) > 0; \\ p_{rr} &= 2\sigma \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} > 0. \end{aligned}$$

Если не сажать внутрь маленьких чёртиков, которые будут на себя тянуть, то давление внутри трубы  $p_a > 0$ .

Под действием  $P_{rr}$  происходит сжатие вдоль  $r$ , под действием  $P_{\theta\theta}$  происходит растяжение вдоль  $\theta$ , под действием  $P_{zz}$  растяжение вдоль  $z$ .

Что опаснее: растяжение или сжатие? Бетон слабее на растяжение, чем на сжатие; у стали примерно одинаково. Как правило, растягивающее напряжение опаснее.

У нас какое из растягивающих по модулю больше?  $2\sigma < 1 \Rightarrow |P_{\theta\theta}| > |P_{zz}|$ , и  $P_{\theta\theta}$  — самое опасное напряжение.  $P_{\theta\theta}$  максимально при  $r = a$ , то есть на внутренней стенке

$$P_{\theta\theta \max} = p_a \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}.$$

Вот эта величина должна быть меньше, чем предел прочности.

Сами напряжения почти ( $P_{zz}$  зависит слабо) не зависят от материала. Но у материалов разные пределы прочности.

В последнее время стало модно исследовать материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона. Многие кристаллические материалы так устроены. Такие материалы называются ауксетиками.

$P_{\theta\theta}$  можно уменьшить увеличением  $P_b$ . Для этого артиллеристы делают составную трубу. Трубу меньшего радиуса нагреваем, а большего радиуса охлаждаем. И надеваем маленькую трубу на внешнюю. Внешняя труба после охлаждения становится напряжённой.

Следующий вопрос такой. Как влияет толщина трубы? Если  $b \rightarrow \infty$ , то  $P_{\theta\theta} \rightarrow p_a$ . А при стремлении к  $b \rightarrow a$ , то  $P_{\theta\theta} \rightarrow \infty$ . Ничего меньше чем  $p_a$  не получится.

Ещё у задачи Ламе есть решение для сферы. Но я её делать не буду. Мы разобрали одну из простейших. А если сложные, то они и решения имеют довольно сложные.

## 22.2 Термодинамические соотношения в теории упругости

Хочу написать соотношения, которые учитывают ещё температурные напряжения. Ведь от взрыва пороха внутри трубы газы горячие. И влияние температуры очень важно.

Пишем первый и второй законы термодинамики в дифференциальной форме (уравнение притока тепла и уравнение для энтропии)

$$du = -\frac{1}{dm}dA^{(i)} + dq + dq^{**},$$

$u$  — плотность внутренней энергии,  $dq$  — приток тепла к единице массы,  $dq^{**}$  — приток энергии, отличный от работы сил и тепла.

В классической теории упругости  $dq^{**} = 0$  (в моментной теории упругости  $dq^{**}$  — работа пар.

## 23 Лекция 16

1. Уравнение притока тепла и уравнения второго закона термодинамики для упругих сред (в классической теории). Тождество Гиббса.
2. Внутренняя и свободная энергии как термодинамические потенциалы.
3. Свободная энергия и энтропия линейно-упругой анизотропной среды. Уравнение притока тепла. Число коэффициентов, определяющих анизотропную линейно-упругую среду.
4. Свободная энергия и энтропия линейно-упругой изотропной среды.
5. Плоская система уравнения изотропной линейно-упругой среды.
6. Закон Гука для адиабатических процессов в линейной термоупругой среде.
7. Задача о температурных напряжениях в стенках трубы.

В классической теории упругости три предположения.

1. Кроме работы сил и тепла, других притоков энергии нет;
2. Тензор напряжений симметричен;
3. Процессы еформирования обратимые.

Напишем два закона

- Первый закон термодинамики  $dU + dE_{\text{кин}} = dA^{(e)} + dQ^{(e)} (+dQ^{**})$ ;
- Теорема живых сил  $dE_{\text{кин}} = dA^{(i)} + dA^{(e)}$ .

Отсюда следует уравнение притока тепла  $dU = -dA^{(i)} + dQ^{(e)}$ . Или, в дифференциальной форме,

$$du = -\frac{1}{dm}dA^{(i)} + dq.$$

Здесь  $u$  — плотность внутренней энергии;  $dq$  — приток тепла к единице массы,  $\frac{1}{dm}dA^{(i)}$  — работа внутренних сил на единицу массы;  $\frac{1}{dm}dA^{(i)} = \frac{1}{\rho}P^{ij}\nabla_j v_i dt$ ,  $v_i$  — компоненты скорости.

Найдём выражение для плотности работы внутренних сил

$$\frac{1}{dm}dA^{(i)} = -\frac{1}{\rho}P^{ij}\nabla_j v_i dt = -\frac{1}{\rho}P^{ij}\left[\underbrace{\frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)}_{e_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j)}_{\text{тензор вихря}}\right] dt = -\frac{1}{\rho}P^{ij}e_{ij} dt,$$

так как  $P^{ij} = P^{ji}$ .

Далее верно ли  $e_{ij} dt = d\varepsilon_{ij}$ ? Это верно в общем случае при лагранжевом описании в лагранжевой системе координат. При эйлеровом описании неверно. Но мы рассматриваем теорию, в которой деформации и перемещения, и скорости малы. Тогда, в частности, отличие лагранжевой системы координат от пространственной мало.

В геометрически линейной (малы деформации и перемещения) теории упругости. В этой теории формула  $e_{ij} dt = d\varepsilon_{ij}$ , даже когда не выполняется закон Гука, нужна именно геометрическая линейность.

Тогда в результате всех этих разговоров получается, что в геометрически линейной теории (если ещё  $P^{ij} = P^{ji}$ )

$$\frac{1}{dm} dA^{(i)} = -\frac{1}{\rho} P^{ij} d\varepsilon_{ij}.$$

Кроме того, вместо  $\rho$  можно писать  $\rho_0$ . В этом слагаемом учитывается только главный член.

Уравнение притока тепла в теории упругости

$$du = \frac{1}{\rho_0} P^{ij} d\varepsilon_{ij} + dq. \quad (1)$$

Теперь второй закон термодинамики в дифференциальной форме  $T ds = dq + dq'$ . Здесь  $T$  — абсолютная температура,  $s$  — плотность энтропии,  $dq'$  — некомпенсированное тепло, то есть  $dq' = T \overline{d_i s}$ , где  $\overline{d_i s}$  — производство энтропии на единицу массы за счёт всех процессов, кроме теплопроводности.

В теории упругости  $dq' = 0$ , так как деформация — обратимый процесс. Значит, второй закон термодинамики в теории упругости

$$R ds = dq. \quad (2)$$

Из первого и второго законов получается, так называемое, тождество Гиббса

$$du = \frac{1}{\rho} P^{ij} d\varepsilon_{ij} + T ds. \quad (3)$$

Из тождества Гиббса следует, что

$$u = u(\varepsilon_{ij}, s).$$

Если эти аргументы константы, то  $u$  тоже константа.

Если  $d\varepsilon_{ij}$  независимы, то

$$P^{ij} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{s=\text{const}}; \quad T = \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_{\varepsilon_{ij}=\text{const}}. \quad (4)$$

Замечание. Для несжимаемой среды  $g^{ij} d\varepsilon_{ij} = 0$ . Для сжимаемой среды, этого нет и  $d\varepsilon_{ij}$  независимы. Мы рассматриваем сжимаемые среды, поэтому (4) верно.

Если откуда-то известна  $u = u(\varepsilon_{ij}, s)$ , то из (4) находим  $T = T(\varepsilon_{ij}, s)$  или  $s = s(\varepsilon_{ij}, T)$  и  $P^{ij} = P^{ij}(\varepsilon_{ij}, s)$ , то есть  $P^{ij} = P^{ij}(\varepsilon_{ij}, T)$ .  $u$  называют термодинамическим потенциалом, если  $u = u(\varepsilon_{ij}, s)$ .

Если вы не хотите иметь дело с энтропией, но сразу с температурой, то можно ввести другой термодинамический потенциал. А именно свободную энергию. В расчёте на единицу массы свободная энергия определяется следующим образом

$$\mathcal{F} = u - Ts; \quad u = \mathcal{F} + Ts.$$

Если это подставить в тождество Гиббса, найдём

$$du = d\mathcal{F} + T ds + s dT = \frac{1}{\rho} P^{ij} d\varepsilon_{ij} + T ds.$$

Таким образом

$$d\mathcal{F} = \frac{1}{\rho} P^{ij} d\varepsilon_{ij} - s dT. \quad (5)$$

Отсюда следует, что  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varepsilon_{ij}, T)$ . Тогда

$$P^{ij} = \rho \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{T=\text{const}}; \quad s = - \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}=\text{const}} \quad (6)$$

Таким образом, закон Гука задавать не обязательно для линейно-упругой среды. Можно вместо этого определить внутреннюю энергию, как функцию от деформаций и энтропии или свободную энергию, как функцию деформаций и температуре.

Обычно вводят свободную энергию единицы объёма  $\Phi = \rho_0 \mathcal{F}$ . Тогда формулы (6) переписываются таким образом  $P^{ij} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{T=\text{const}}$ ,  $s = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}=\text{const}}$ .

Как задать  $\Phi$ ? Будем считать, что  $\varepsilon_{ij}$  малы и  $T - T_0$  мало ( $T_0$  — температура, при которой  $\varepsilon_{ij} = 0$ , если не действуют силы). Тогда можно представить  $\Phi$  в виде ряда

$$\begin{aligned}\Phi(\varepsilon_{ij}, (T - T_0)) = & \Phi_0 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_0 \varepsilon_{ij} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_0 (T - T_0) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \right)_0 \varepsilon_{ij} (T - T_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \right)_0 (T - T_0)^2 + \dots\end{aligned}$$

Если  $\varepsilon_{ij}$ ,  $T - T_0$  малы, то следующие члены можно не учитывать.

Обозначим  $A^{ijkl} = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_0$ ,  $B^{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \right)_0$ ,  $c = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \right)_0$ . Тогда

$$\Phi = \Phi_0 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_0 \varepsilon_{ij} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_0 (T - T_0) + \frac{1}{2} A^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + B^{ij} \varepsilon_{ij} (T - T_0) + \frac{1}{2} c (T - T_0)^2.$$

Тогда  $P^{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}$ ,  $s = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi}{\partial T}$ .

$$\begin{cases} P^{ij} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_0 + A^{ijkl} \varepsilon_{kl} + B^{ij} (T - T_0); \\ s = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_0 - B^{ij} \varepsilon_{ij} - c (T - T_0). \end{cases}$$

Если начальное состояние выбрано так, что напряжения нулевое при  $T = T_0$  и  $\varepsilon_{ij} = 0$ , то  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_0 = 0$ . Обозначим

$$s_0 = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_0$$

плотность энтропии в недеформированном состоянии.

Итак, в линейно-упругой анизотропной среде

$$\begin{aligned}P^{ij} &= A^{ijkl} \varepsilon_{kl} + B^{ij} (T - T_0); \\ s &= s_0 - \frac{1}{\rho_0} B^{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{c}{\rho_0} (T - T_0).\end{aligned}$$

Сначала выясним физический смысл коэффициента  $c$ . Про  $A^{ijkl}$  и  $B^{ij}$  мы что-то знаем. А вот коэффициент  $c$  для нас новый. Для понимания его физического смысла рассмотрим уравнение притока тепла.

$$du = \frac{1}{\rho} P^{ij} d\varepsilon_{ij} + dq.$$

Надо задать  $du$  и  $dq$ , тогда будет уравнение притока тепла. Что такое  $u$ ? Можно вывести, в задачнике оно написано. Но можно без  $u$  обойтись, потому что из тождества Гиббса следует, что

$$u - \frac{1}{\rho} P^{ij} d\varepsilon_{ij} = T ds.$$

Тогда получим собственно второй закон термодинамики:  $T ds = dq$ . Уравнение притока тепла и второй закон термодинамики равносильны, если учесть тождество Гиббса.

Будем писать  $T ds = dq$ . Более того, будем писать  $T_0 ds = dq$ . Теперь чему равняется  $ds$ .

$$-\frac{T_0}{\rho_0} B^{ij} d\varepsilon_{ij} - \frac{c T_0}{\rho_0} dT = dq.$$

Если мы рассмотрим процесс, в котором деформаций нет, то есть  $d\varepsilon_{ij} = 0$ , закладываем в жёсткий контейнер и греем. Тогда

$$\left( \frac{dq}{dT} \right)_{\varepsilon_{ij}=\text{const}} = -\frac{c T_0}{\rho_0} = c_\varepsilon.$$

Таким образом,  $c = -\frac{\rho_0}{T_0} c_\varepsilon$ , где  $c_\varepsilon$  — теплоёмкости при постоянной деформации.

Сколько коэффициентов надо задать, чтобы задать анизотропную упругую среду?  $A^{ijkl}$ ,  $B^{ij}$ ,  $c_\varepsilon$  и ещё, может быть, коэффициент теплопроводности, если среда теплопроводная и подчиняется закону Фурье. Сколько независимых  $A^{ijkl}$ ? Так как  $P^{ij}$  симметричны, и  $A^{ijkl}$  — это вторые производные, независимых компонент не так много. Вторые производные не зависят от порядка дифференцирования. Итого, всего независимых  $A^{ijkl}$  двадцать одна штука. Всего коэффициентов  $21 + 6 + 1 + 1 = 29$ , если есть теплопроводность.

Это для произвольного анизотропного тела.

## 24 Лекция 18

Я пропустила один пункт в прошлой лекции.

1. Система уравнений для адиабатических процессов в изотропной линейно термоупругой среде. В частности, адиабатическая модель упругости.
2. Задача о температурных напряжениях в стенках трубы.

Ну и хватит.

### 24.1 Адиабатические процессы

Если процессы изотермические, то температурны напряжения и деформации отсутствуют. Там закон Гука, а температура должна быть задана.

Существует (и много таких) процессы, когда температура разная. В частности, например, если мы рассматриваем звук, распространяющийся в упругой среде, как распространяется звук в стенке. Или как возникает землетрясение. В этих случаях процессы происходят очень быстро и тепло не успевает переходить. Это адиабатические процессы. Можно в этом случае написать замкнутую систему уравнений.

Что такое адиабатический процесс. Это процесс, в котором  $dq = 0$  в каждой частице. В упругой среде выполняется соотношение, которое можно назвать вторым законом термодинамики (мы знаем, что в нашей ситуации оно же может играть роль уравнения притока тепла),  $T ds = dq = 0$ , если процесс адиабатический. Таким образом в адиабатическом процессе постоянна в каждой частице. Мы можем написать для этого соотношение

$$s = \frac{\alpha(3\lambda + 2\mu)}{\rho_0} J_1(\varepsilon) + c_\varepsilon \frac{T - T_0}{T_0} + s_0.$$

Если  $s = s_0$ , то

$$T - T_0 = - \frac{\alpha(3\lambda + 2\mu)}{c_\varepsilon} \frac{T_0}{\rho_0} J_1(\varepsilon).$$

Это и есть аналог адиабаты Пуассона в газе. Здесь  $J_1(\varepsilon) = g^{ij} \varepsilon_{ij}$  — относительное изменение объёма.

Теперь можем подставить эту связь в закон Гука с учётом температурных напряжений.

$$P^{ij} = \lambda J_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu \varepsilon^{ij} - \alpha(3\lambda + 2\mu)(T - T_0) g^{ij}.$$

А  $T - T_0$  есть какой-то коэффициент, умноженный на  $J_1(\varepsilon)$ . Поэтому первый и последний члены объединяются. Получаем

$$P^{ij} = \left( \lambda + \frac{\alpha^2(3\lambda + 2\mu)^2}{c_\varepsilon} \frac{T_0}{\rho_0} \right) J_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu \varepsilon^{ij}.$$

Введём обозначение  $\lambda_{ад} = \lambda + \frac{\alpha^2(3\lambda + 2\mu)^2}{c_\varepsilon} \frac{T_0}{\rho_0}$ . Тогда

$$P^{ij} = \lambda_{ад} J_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu \varepsilon^{ij}.$$

Коэффициенты  $\lambda_{ад}$  — адиабатические модули упругости. По форме закон совпадает с законом Гука при  $T = T_0$ .

Оценим величину этих коэффициентов. В таблицах вы обычно не найдёте  $\lambda$  и  $\mu$ . Вместо них приводятся модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Их можно выразить. Обозначим  $\lambda_{ад} = \lambda(1 + e)$ . Тогда

$$e = \frac{\alpha^2(3\lambda + 2\mu)^2}{\lambda c_\varepsilon} \frac{T_0}{\rho_0}; \quad \lambda = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}; \quad 3\lambda + 2\mu = 3K = \frac{E}{1 - 2\sigma}.$$

Отсюда

$$e = \frac{E(1 + \sigma)}{\sigma(1 - 2\sigma)} \frac{\alpha^2}{c_\varepsilon} \frac{T_0}{\rho_0}.$$

Для стали  $E = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$ ,  $\sigma = 0,25$ ,  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{К}}$ ,  $T_0 = 300\text{К}$ ,  $c_\varepsilon = 460 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{К}}$ ,  $\rho_0 = 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Получается

$$e = 0,026 = 2,6\%.$$

Какие же уравнения получаются для адиабатических процессов в изотропной линейной термоупругой среде.

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} &= \rho_0 F^i + \nabla_j P^{ij}; \\ P^{ij} &= \lambda_{ад} J_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu \varepsilon^{ij}; \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_i w_j + \nabla_j w_i). \end{aligned}$$

Это замкнутая система переменных  $w_i, \varepsilon_{ij}, P^{ij}$ . Но если вам нужна ещё температура, то добавляется

$$T = T_0 - \frac{\alpha(3\lambda + 2\mu)}{c_\varepsilon} \frac{T_0}{\rho_0} J_1(\varepsilon).$$

## 24.2 Задача о температурных напряжениях в стенках трубы

Внутри трубы температура одна, вне — другая. Только за счёт этого будут разные деформации в разных местах этой трубы. Мы можем сразу сказать, что будет, если в трубе очень горячий газ, а снаружи очень холодный. Внутри частицы хотят расширяться. А внешняя часть не хочет расширяться. Но внутренняя растягивает внешнюю, а внешняя стремится внутреннюю вернуть в исходное положение. Сделаем для этого точную постановку задачи.

### 24.2.1 Физическая постановка задачи

1. Имеется труба длины  $l$ , радиусы сечения  $a$  и  $b$ .
2. Материал стенок: изотропный линейный термоупругий теплопроводный, модули упругости константы (это некое упрощение, они зависят от температуры на самом деле).
3. Давление внутри  $P_a = 0$ , вне  $P_b = 0$ , массовые силы не учитываем. В силу линейности задач, решения можно будет сложить, если понадобится<sup>1</sup>.
4. Перемещения вдоль оси нет, то есть труба с торцов ограничена двумя гладкими жёсткими плоскостями.
5. Температура вне трубы  $T_0$ , а внутри  $T_1 > T_0$ . Причём  $T_0$  — та температура, при которой при отсутствии сил деформации равны нулю.  $T_0 = \text{const}$ ,  $T_1 = \text{const}$ .

Можно задачу ставить и наоборот: внутри температура чтобы меньше была, чем снаружи.

### 24.2.2 Математическая постановка задачи

Равновесие и отсутствие массовых сил сводятся к уравнению  $\nabla_j P^{ij} = 0$ . Закон Гука принимает вид

$$P^{ij} = \lambda J_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu \varepsilon^{ij} - \alpha(3\lambda + 2\mu)(T - T_0) g^{ij}.$$

И связь деформаций с вектором напряжений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i).$$

Уравнение притока тепла  $\Delta T = 0$  (считаем, что распределение температуры стационарное).

Теперь к этой системе уравнений напомним граничные условия.

- При  $r = a$  выполнено  $P_n = 0$  (так как  $p_a = 0$ ) и  $T = T_1$ ;
- При  $r = b$  выполнено  $P_n = 0$  (так как  $p_a = 0$ ) и  $T = T_0$ ;
- При  $z \in \{0, l\}$  выполнено  $w_n = 0$ ,  $P_{n\tau} = 0$ .

Общий вывод из этой постановки задачи. Уравнение и граничные условия на температуру отделяются, не зависят от механики, можно найти заранее температуру  $T$  внутри стенок независимо от распределения деформаций и напряжений. Потом можно подставить в закон Гука и решать механическую задачу.

### 24.2.3 Решение задачи

Итак,  $T$  находится из задачи  $\Delta T = 0$  при  $a < r < b$ ,  $T|_{r=a} = T_1$ ,  $T|_{r=b} = T_0$ . Задача Дирихле. Будем считать, что  $T(r)$  уже найдена и рассмотрим задачу механики, найдём  $P^{ij}$ .

Напишем уравнения Навье—Ламе с учётом температурных напряжений. Разобьём напряжения на те, что порождены перемещениями, и температурные.

$$\nabla_j P_w^{ij} + P_T^{ij} = 0.$$

Тогда для первого слагаемого мы выражение уже знаем. Таким образом,

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{w} + \mu \Delta \mathbf{w} - \alpha(3\lambda + 2\mu) \text{grad}(T - T_0) = 0.$$

<sup>1</sup> Уже можно почувствовать, что при нагреве трубы изнутри разрывающие напряжения на внутренней стенке станут меньше.



Считаем, что  $w_1 = w(r)$ ,  $w_2 = w_3 = 0$  в цилиндрических координатах  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = z$ . Что мы про цилиндрические координаты знаем:  $g_{11} = g_{33} = g_{22} = r^2$ .

$$\Gamma_{22}^1 = -r; \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}.$$

Используем результаты лекций 14–15 про задачу Ламе о напряжениях под действием давления  $p_a$  и  $p_b$ , потому что очень всё похоже здесь. Там было такое, что

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r}.$$

Тогда уравнения Навье—Ламе в компонентах выглядит следующим образом. В проекции на ось  $r$  имеем

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \right) = \alpha(3\lambda + 2\mu) = CP(T - T_0)r.$$

Это уравнение сразу можно проинтегрировать

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} = \frac{\alpha(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} (T - T_0) + 2A.$$

Здесь  $2A$  — удобное обозначение константы интегрирования. Интегрируем ещё раз

$$wr = \beta \int_a^r \xi(T - T_0) d\xi = Ar^2 + B.$$

Обозначим интеграл вместе с  $\beta$  известной функцией  $f(r) = \beta \int_a^r \xi(T - T_0) d\xi$ .

Ответ для перемещений получился такой

$$w = Ar + \frac{B}{r} + \frac{f(r)}{r}.$$

Теперь по этому ответу нужно найти деформации и напряжения. Заметим, что  $f(a) = 0$  и что  $\frac{\partial f}{\partial r} = \beta r(T - T_0)$ .

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial w}{\partial r} = A - \frac{B}{r^2} + \beta(T - T_0) - \frac{f}{r^2}.$$

Это деформации, а напряжение

$$P_{11} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{w} + 2\mu f - \alpha(3\lambda + 2\mu)(T - T_0); \quad \operatorname{div} w = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} = A - \frac{B}{r^2} + \beta(T - T_0) - \frac{f}{r^2} + A + \frac{B}{r^2} + \frac{f}{r^2} = 2A + \beta(T - T_0).$$

И это понятно,

$$\begin{aligned} P^{11} &= \lambda(2A + \beta(T - T_0)) + 2\mu \left( A - \frac{B}{r^2} + \beta(T - T_0) - \frac{f}{r^2} \right) - \alpha(3\lambda + 2\mu)(T - T_0) = \\ &= 2A(\lambda + 2\mu) - \frac{2\mu B}{r^2} + \beta(T - T_0)(\lambda + 2\mu) - \alpha(2\lambda + 2\mu)(T - T_0) - \frac{2\mu f}{r^2}. \end{aligned}$$

Раньше мы обозначали  $P_{11} = A_1 - \frac{B_1}{r^2} - \frac{2\mu f}{r^2}$ . И сейчас чему равняется  $\beta$ ?

$$\beta = \frac{\alpha(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}; \quad (\lambda + 2\mu)\beta = \alpha(3\lambda + 2\mu).$$

И два слагаемых сокращаются. Итак

$$P_{11} = A_1 - \frac{B_1}{r^2} - \frac{2\mu f}{r^2}.$$

Найдём  $A_1$  и  $B_1$  из граничных условий.

- На внутренней стенке  $P_{11}|_{r=a} = -p_a = 0$ , кроме того  $f(a) = 0$ . Таким образом

$$A_1 - \frac{B_1}{a^2} = 0.$$

(В задаче Ламе было справа  $-P_a$ .)

- На внешней стенке  $P_{11}|_{r=b} = -p_b = 0$ . Таким образом

$$A_1 - \frac{B_1}{b^2} = \frac{2\mu f(b)}{b^2}.$$

(В задаче Ламе было справа  $-p_b$ .)

Выражения для  $A_1$  и  $B_1$  можно прямо взять из решения задачи Ламе с подстановкой других  $p_a = 0$  и  $p_b = -\frac{2\mu f(b)}{b^2}$ .

$$A_1 = \frac{\Omega}{b^2 - a^2}, \quad B_1 = \frac{a^2 \Omega}{b^2 - a^2}; \quad \Omega = 2\mu f(b).$$