Уравнения в частных производных

1 6 октября 2014

1.1 Прямое произведение двух обобщённых функций

В прошлый раз раз мы с вами обсуждали теорему о конечном порядке сингулярности.

Нам понадобится ещё одно понятие: прямое произведение двух функций. Ещё иногда его называют тензорным произведением. Вот тут мы не про тензоры говорим, а про функции — это такой вырожденный тензор. В чём смысл прямого произведения: берёте функцию $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, другую $\mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, перемножаете, получаете функцию $m+n$ переменных.

Пусть $f \in \mathbb{C}^\infty(F)$, $g \in C^\infty(G)$, где $F \subset \mathbb{R}^n$ — открытое непустое множество, $G \subset \mathbb{R}^m$ — открытое непустое множество. Тогда просто построим вот такую вот функцию:

$$(x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{m+n}) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots, x_{n+m}).$$

Называем её прямым произведением f и g. Как мы её обозначаем, чтобы показать, что это всё-таки что-то новое: fg, $f \cdot g$ или $f \otimes g$. Это $F \times G \to \mathbb{C}$.

Мы знаем, что C^∞ вкладывается в D'. Так что ничего нового не должно происходить. Будем понимать $f \in C^\infty(F)$ и $g \in C^\infty(G)$ как обобщённые функции из $D'(F)$ и $D'(G)$. Что это означает? Возьмём прямое произведение $fg \in C^\infty(F \times G)$ и применим к $\varphi \in D(F \times G)$.

$$\big(f(x)g(y), \varphi(x,y)\big) = \int\limits_{F \times G} f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_F \int\limits_G f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dy\,dx = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big).$$

Это на самом деле уже готовая формула для определения прямого произведения.

Определение 1.1. *Прямым произведением обобщённых функций $f(x) \in D'(F)$ и $g(y) \in D'(G)$ называется обобщённая функция $f(x)g(y)$ (сохраняем символ аргумента, хотя понимаем, что это не бесконечно гладкие функции), такая, что*

$$\forall\ \varphi(x,y) \in D(F \times G) \quad \big(f(x)g(y), \varphi(x,y)\big) = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big).$$

При каждом x сначала получаем $\big(g(y), \varphi(x,y)\big)$. Понятно, что это бесконечно гладкая функция, понятно, что у неё гладкий носитель; по теореме из конца прошлой лекции знаем, что $\big(g(y), \varphi(x,y)\big) \in D(F)$. Непонятно, почему при этом получится непрерывная в секвенциальном смысле функция; линейность действительна, нет сомнений. Нужно же показать, что если $\varphi_k \to \varphi$, то всё вот это $\big(f(x)g(y), \varphi_k(x,y)\big) \to \big(f(x)g(y), \varphi(x,y)\big)$. Не знаю, насколько для вас это очевидно, поэтому давайте на этом остановимся.

Итак, очевидно, что $f(x)g(y)$ — линейная функция. Покажем, что $f(x)g(y)$ непрерывный в $D(F \times G)$ функционал. В самом деле, пусть $\varphi_k(x,y) \to \varphi(x,y)$ в $D(F \times G)$ при $k \to \infty$, то есть

(1) Существует компакт $H \subset F \times G \colon \forall\ k \in \mathbb{N} \quad \operatorname{supp} \varphi_k \subset H$;

(2) $\forall\ m \quad \|\varphi_k - \varphi\|_{C^m(F \times G)} \to 0$ при $k \to \infty$.

Тогда $\big(g(y), \varphi_k(\cdot, y)\big) \to \big(g(y), \varphi(\cdot, y)\big)$ в норме $C^m(F)$ при $k \to \infty$ для всех $m \geqslant 0$.

Другими словами, для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (я уже могу дифференцировать по параметру)

$$\partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi_k(x,y)\big) \to \partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi(x,y)\big)$$

равномерно по $x \in F$.

Вот теперь можем дифференцировать по параметру. Имеем,

$$\partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi_k(x,y)\big) = \big(g(y), \partial_x^\alpha \varphi_k(x,y)\big), \qquad \partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi(x,y)\big) = \big(g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\big).$$

Ну а теперь возьмём разность.

$$\Big|\partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi_k(x,y)\big) - \partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big| = \Big|\big(g(y), \partial_x^\alpha \varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\big)\Big|.$$

Дальше мы знаем, что носитель разности $\partial_x^\alpha \varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha \varphi(x,y)$ лежит в некотором компакте. Поэтому я могу записать, что всё это равно

$$\Big|\Big(g(y), \eta(y)\big(\partial_x^\alpha \varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\big)\Big)\Big|,$$

где $\eta \in D(G)$ и при этом $\eta \equiv 1$ в окрестности проекции H на G. Ничего не изменилось от такого домножения, но мне это даёт возможность написать следующее. Таким образом,

$$\Big|\partial_x^\alpha\big(g(y), \varphi_k(x,y)\big) - \partial_x^\alpha\big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big| = \Big|\big(g(y)\eta(y), \partial_x^\alpha\varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha\varphi(x,y)\big)\Big|,$$

где $g(y)\eta(y)$ — обобщённая функция с компактным носителем. А раз так, то я могу написать, что всё это не превосходит

$$\leqslant A\big\|\partial_x^\alpha\varphi_k(x,\cdot) - \partial_x^\alpha\varphi(x,\cdot)\big\|_{C^N(G)} \leqslant A\|\varphi_k - \varphi\|_{C^{N+|\alpha|}(F\times G)} \to 0. \quad (k\to\infty.)$$

Дальше я должен показать, что есть компакт, где лежат все носители. Очевидно, что $\operatorname{supp}\big(g(y), \varphi_k(\cdot,y)\big)$ есть подмножество проекции H на F.

Тем самым, $\big(g(y), \varphi_k(\cdot,y)\big) \to \big(g(y), \varphi(\cdot,y)\big)$ в $D(F)$ при $k\to\infty$, поэтому ввиду непрерывности $f(x)$ будем иметь

$$\Big(f(x), \big(g(y), \varphi_k(x,y)\big)\Big) \to \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big),$$

то есть $f(x)g(y)$ непрерывный функционал на $D(F\times G)$.

Всё очень просто. Надо только воспользоваться неравенством из компактности носителя.

1.2 Коммутативность прямого произведения обобщённых функций

Когда писали прямое произведение двух бесконечно гладких функций, воспользовались теоремой Фубини. Могли бы интегрировать в другом порядке и результат интегрирования не изменился. А для обобщённых функций порядок важен?

Теорема 1.1. *Пусть $f(x) \in D'(F)$, $g(y) \in D'(G)$, а $\varphi \in D(F\times G)$. Тогда*

$$\Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big) = \Big(g(x), \big(f(y), \varphi(x,y)\big)\Big).$$

Вообще прямое произведение не коммутативно по своей природе. А у нас получилось коммутативное — частный случай. У нас в определении прямого произведения обобщённых функций есть некоторый произвол — вот о чём теорема.

Доказательство. Если бы $\varphi(x,y) = \psi_1(x)\cdot\psi_2(y)$, всё очевидно. А как в общем случае сделать? Любую функцию φ разложим, так сказать, в ряд. Любую функцию $\varphi \in D(F\times G)$ можно разложить в ряд

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\varphi_k(y),$$

где $\varphi_k \in D(F)$, $\varphi_k \in D(G)$, $k = 1, 2, \ldots$

Так всегда можно сделать. Надо только понять как. Мне приходит в голову разложить в ряд фурье, по каким-то экспонентам разложить. Коэффициенты очень быстро сходится к нулю у бесконечно гладких функций. Мне нужна сходимость $C^N(F\times G)$. Коэффициенты убывают быстрее любой степени, получу всё как надо. Идея понятна, а сейчас я это напишу.

1. Разложим $\varphi(x,y)$ в ряд Фурье

$$\varphi(x,y) = \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp}e^{isx}e^{ipy}.$$

   Мы можем выбрать достаточно большой куб размерности $m+n$, которому будет принадлежать $F\times G$. Разнесём этот куб по $\mathbb{R}^{m+n}$, доопределив φ до периодической. Нам хочется, чтобы ребро куба было 2π. Поэтому делаем такую приписку. Считаем без ограничения общности $F\times G \subset (-\pi,\pi)^{n+m}$.

   Ввиду того, что φ бесконечно гладкая функция, будем иметь

$$\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} |c_{sp}|(1+|s|+|p|)^N < +\infty \quad \forall\ N\in\mathbb{N}.$$

2. Возьмём $\eta \in D(F)$[1], $\lambda \in D(G)$, такие, что $\eta \equiv 1$ на проекции $\operatorname{supp}\varphi$ на F, $\lambda \equiv 1$ на проекции $\operatorname{supp}\varphi$ на G. Тогда, очевидно, получим

$$\eta(x)\lambda(y)\varphi(x,y) \equiv \varphi(x,y).$$

[1] D и C_0^∞, кстати, одно и то же.

При этом весь ряд можно написать вот так вот, смотрите (слева и справа умножили на бесконечно гладкую функцию)

$$\varphi(x,y) = \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp}e^{isx}\eta(x)e^{ipy}\lambda(y).$$

Заметим, что ряд $\sum\limits_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp}e^{isx}e^{ipy}$ сходится к функции $\varphi(x,y)$ в пространстве $C^N(F\times G)$ для любого N ввиду бесконечной гладкости φ. Таким образом, $\sum\limits_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp}e^{isx}\eta(x)e^{ipy}\lambda(y)$ сходится к $\varphi\equiv\eta(x)\lambda(y)\varphi$ в пространстве $C^N(F\times G)$ для любого N. Ну и всё, сходимость у нас есть, какая нужно.

Тем самым вот этот вот ряд $\sum\limits_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp}e^{isx}\eta(x)e^{ipy}\lambda(y)$ сходится к $\varphi(x,y)$ в пространстве $D(F\times G)$ (частичные суммы ряда образуют сходящуюся последовательность). Перенумеруем члены этого ряда. Получим

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\varphi_k(y), \quad \varphi_k(x) \rightleftharpoons e^{isx}\eta(x)c_{sp}, \quad \psi_k(y) \rightleftharpoons e^{ipy}\lambda(y).$$

Имеем

$$\Big(f(x),\big(g(y),\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\psi_k\big)\Big) = \sum_{k=1}^{N}\big(f(x),\varphi_k(x)\big)\big(g(y),\psi_k(y)\big).$$

Аналогично

$$\Big(g(y),\big(f(x),\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\psi_k\big)\Big) = \sum_{k=1}^{N}\big(g(y),\psi_k(y)\big)\big(f(x),\varphi_k(x)\big).$$

То есть для всех k

$$\Big(f(x),\big(g(y),\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\psi_k\big)\Big) = \Big(g(y),\big(f(x),\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\psi_k\big)\Big).$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$ получим

$$\Big(f(x),\big(g(y),\varphi(x,y)\big)\Big) = \Big(g(x),\big(f(y),\varphi(x,y)\big)\Big).$$

∎

Упражнение 1.1. *Почему предел существует? (Из непрерывности прямого произведения.)*

2 13 октября 2014

На чём мы остановились. Доказали теорему о конечном порядке сингулярности обобщённой функции с компактном носителем. Доказали коммутативность прямого произведения.

2.1 Свёртка обобщённой функции

Я напомню, что такое свёртка двух функций в пространстве $L_1(\in\mathbb{R}^n)$. Пусть $f,g\in L_1(\mathbb{R}^n)$ (пока просто считайте, что это функции, интегрируемые по Риману). Что называется свёрткой?

$$f\star g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\underbrace{x-y}_{\xi})g(\underbrace{y}_{x-\xi})\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Я всегда забываю $x-y$ или $y-x$, но вот есть способ себя проверить: $f\star g = f\star y$.

Что замечательно в пространстве L_1? Это свёрточная алгебра. Там естественно есть структура линейного пространства.

Давайте попробуем посчитать (есть такая теорема, называется Фубини)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} = \big|f\star g(x)\big|\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy\Big| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big|f(x-y)\big|\big|g(y)\big|\,dy.$$

Как работают с интегралом Лебега. Рассматривают фундаментальные последовательности ступенчатых функций. Они сходятся к измеримым функциям. Норма определяется так: берёте интеграл Лебега от модуля функции. Существует предел интегралов ступенчатых функций, этот предел называют интегралом Лебега. Что я хочу сказать: если функция интегрируема по Лебегу, то её модуль интегрируем, поэтому наш интеграл слева существует. И есть такая теорема, что модуль интеграла не превосходит интеграла модуля.

А что такое теорема Фубини: есть функция двух векторных переменных, тогда можно кратный интеграл считать как повторный. Что у нас получается:

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} dy \big|g(y)\big| \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|f(x-y)\big|\, dx}_{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|f(\xi)\right| d\xi} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|g(y)\big|, dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|f(\xi)\big|\, d\xi = \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Тем самым мы утверждаем, что

$$\|f \star g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

И интеграл от свёртки поэтому существует. Мы сразу двух зайцев убили: из теоремы Фубини показали и что свёртка существует и что она суммируема.

Как поступать с обобщёнными функциями? Мы знаем, что $L_1(\mathbb{R}^n)$ вкладывается в $D'(\mathbb{R}^n)$. Будем понимать $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ как обобщённые функции из $D'(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{cases} f\colon \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\varphi\, dx, & \varphi \in D(\mathbb{R}^n); \\ g\colon \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} g\varphi\, dx, & \varphi \in D(\mathbb{R}^n); \end{cases}$$

При этом

$$f \star g\colon \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \star g \varphi\, dx, \qquad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Что бы нам сделать, чтобы угадать определение для обобщённой функции? Делать какие-то замены.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f \star g(x)\varphi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\varphi(x)\, dy\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)g(y)\varphi(\xi+y)\, dy\, d\xi.$$

Последнее похоже на действите прямого произведение на функцию, но это не так. Всё же $\varphi(\xi+y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, но не имеет компактного носителя. Действительно $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$, значит, $-A \leqslant \xi + y \leqslant A$ — диагональная полоса, это не компактное множество.

Как нам, собственно говоря, выйти из положения? Введём понятие.

Определение 2.1. *Компактным исчерпанием единицы в* $\mathbb{R}^m$ *называется последовательность функций*

$$\eta_k \in D(\mathbb{R}^m),\ k = 1, 2, \ldots,$$

таких, что выполнены два свойства:

(1) Для любого компакта $H \subset \mathbb{R}^m \quad \exists\, k_0\colon \forall\, k > k_0 \quad \eta_k\big|_H = 1$*;*

(2) $\forall\, s \quad \exists A\colon \forall\, k \quad \|\eta_k\|_{C^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant A$*.*

Ественный вопрос: существует ли хоть одна такая последовательность? Оказывается существует. Пусть $\eta \in D(B_1)$, такая, что $\eta\big|_{B_{\frac{1}{2}}} = 1$. Положим

$$\eta_k(x) = \eta\left(\frac{x}{k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Первое свойство, очевидно, выполнено. Второе:

$$\partial_x^\alpha \eta_k(x) = \frac{1}{k^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha \eta(x)\big|_{\xi = \frac{x}{k}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

А теперь мы готовы написать определение свёртки обобщённой функции.

Определение 2.2. *Пусть* $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$*. Говорим, что существует свёртка* $f \star g$*, если* $\forall\, \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$*,* $\forall$ *компактного исчерпания единицы* $\nu_k \in D(\mathbb{R}^{2n})$ *существует предел*

$$(f \star g, \varphi) = \lim_{k\to\infty} \big(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x+y)\big).$$

Почему это хорошо? Почему, если $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то получим то же самое? Какое выражение получится:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)g(y)\eta_k(\xi, y)\varphi(\xi + y)\, dy\, d\xi.$$

На любом компакте к какого-то номера последовательность стабилизируется. Поэтому можем применить теорему об ограниченной сходимости (это вы тоже скоро узнаете: все функции ограничены сверху, почти всюду функции сходятся к некоей, тогда интеграл последовательности будет сходиться к интегралу предела). Получится, что в пределе нужный интеграл и будет.

Так мы видим, что определение подходит. Оно не даёт ничего нового для L_1.

Есть вопросы к самому определению. Зависит ли предел от выбора компактного исчерпания?

Упражнение 2.1. *Покажите, что предел не зависит от компактного исчерпания.*

Это утверждение тривиально. По сути оно содержит в себе корректность определение свёртки. Сделаю вам одну подсказку. Есть два компактных исчерпания единицы η_k, λ_k. Перемешаю: $\eta_1, \lambda_1, \eta_2, \lambda_2, \ldots$

Есть вопрос ещё вот какой: почему в результате получится обобщённая функция? Предел есть, функция получается линейная относительно φ. Вопрос с непрерывностью. Если последовательность обобщённой функции сходится слабо, то предел — обобщённая функция. Мы это сейчас сформулируем без доказательства (можно прочитать у Шилова, оно громоздкое).

Определение 2.3. *Говорят, что последовательность обобщённых функций $f_k \in D'(\Omega)$ слабо сходится к $f: D(\Omega) \to \mathbb{C}$, если*

$$\forall\ \varphi \in D(\Omega) \quad (f_k, \varphi) \to (f, \varphi).$$

Можно придумать и другие сходимости, но естественной является именно слабая.

Теорема 2.1 (о полноте $D(\Omega)$ относительно слабой сходимости)**.** *Пусть $f_k \in D'(\Omega)$ слабо сходится к $f: F(\Omega) \to \mathbb{C}$ при $k \to \infty$. Тогда $f \in D'(\Omega)$.*

Доказывать не будем. Доказательво, к сожалению, достаточно громозкое. В Шилове доказательство, обратите вниманиме, страницах наверное на пяти. Меня извиняет, что Владимиров тоже так делает: даёт эту теорему без доказательства.

Упражнение 2.2. *Покажите, что $\varphi \mapsto \big(f(x)g(y), \nu_k(x, y)\varphi(x + y)\big)$ является линейным непрерывным функционалом в $D(\mathbb{R}^n)$.*

Решение писать не буду, потому что оно тривиально. Хотя первое тоже было тривиально.

Прямое произведение всегда существует, а вот свёртка существует на для всех пар функций. Можно даже пару из $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ (суммируемые на каждом компакте) взять. Единицу с единицей мы не свернём.

Какие свойства есть у классической свёртки? Коммутативность. Это действительно так. Мы это сформулируем в виде теоремы небольшой.

Теорема 2.2 (коммутативность свёртки)**.** *Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$: существует свёртка $f \star g$. Тогда $\exists$ свёртка $g \star f = f \star g$.*

Доказательство. Пусть $\eta_k \in D(\mathbb{R}^{2n})$ — некоторое компактное исчерпание. Имеем

$$\big(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big) = \Big(f(x), \big(g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big)\Big) = \Big(g(y), \big(f(x), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big)\Big).$$

■

3 20 октября 2014

3.1 Свёртка с обобщённой функцией, имеющей компактный носитель

Теперь такое утверждение будет. Что у нас получится, если одна из компонент свёртки имеет компактный носитель.

Теорема 3.1. *Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$, причём $\operatorname{supp} f$ — компакт. Тогда всёртка $f \star g$ существует, причём*

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (f \star g, \varphi) = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x + y)\big)\Big) = \Big(g(y), \big(f(x), \varphi(x + y)\big)\Big). \tag{1}$$

Обратите внимание, что самая правая часть формулы устроена каким образом: функцию f применяете к $\varphi(x + y)$. Если y фиксирована, то φ уже имеет компактный носитель, тут всё понятно. А то, что получается, является бесконечно гладкой функцией, но почему это будет с компактным носителем — вот в чём вопрос. Дальше $g(y)$ применяем к бесконечно гладкой функции, а должны применять к функции с компактным носителем.

Как обобщённую функцию с компакным носителем доопределить на всё $\mathbb{R}^n$? Находим $\sigma \in D(\mathbb{R}^n)$: $\sigma = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} f$, и $\forall\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (f, \psi) := (f, \sigma\psi)$. Тогда мы распространили $f: C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. Корректно ли? Проверим

$$\forall\ \psi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (f, \psi) = (f\sigma, \psi) = (f, \sigma\psi).$$

Если есть две такие σ_1, σ_2, то $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ в окрестности носителя f. Значит, от выбора σ выражение не зависит.

Тогда почему в (1) проблем нет? Потому что у f компактный носитель и $g(y)$ применяется к функции с компактным носителем.

Доказательство. Рассмотрим компактное исчерпание единицы $\eta_k(x,y) \in D(\mathbb{R}^{2n})$, $k = 1, 2, \ldots$ Имеем

$$\big(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big).$$

Вот если у неё предел есть, то свёртка существует. Предела нет — не существует. Напишем вот в таком силе

$$= \Big(f(x), \big(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big)\Big)$$

Вспомним, что f с компактным носителем, а σ равна единице в окрестности носителя f

$$= \Big(f(x)\sigma(x), \big(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big)\Big) =$$

По определению умножения обобщённой функции на бесконечно гладкую

$$= \Big(f(x), \sigma(x)\big(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big)\Big) =$$

А дальше по линейности функционала $g(y)$.

$$= \Big(f(x), \Big(g(y)\eta_k(x,y)\underbrace{\sigma(x)\varphi(x+y)}_{\in D(\mathbb{R}^{2n})}\Big)\Big)$$

Если x большое, то σ обнулится, если y большое, но x небольшое, то $x+y$ большое, тогда φ обнулится. И всё это равняется вот такому вот выражению

$$= \Big(f(x), \big(g(y), \sigma(x)\varphi(x+y)\big)\Big),$$

если k такое, что $\eta_k\big|_{\operatorname{supp}\sigma(x)\varphi(x+y)} = 1$. Ввиду того, что η_k — компактное исчерпание единицы, для любого компакта нужное k найдётся. Предел существует просто потому, что стабилизировалась последовательность.

Таким образом,

$$\exists\, k_0\colon \forall\, k \geqslant k_0 \quad \big(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big) = \Big(f(x), \big(g(y), \sigma(x)\varphi(x+y)\big)\Big) = \\ = \Big(\underbrace{f(x)\sigma(x)}_{f(x)}, \big(g(y), \varphi(x+y)\big)\Big) = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x+y)\big)\Big),$$

поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \big(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big) = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x+y)\big)\Big)$.

А теперь надо показать, что второе равенство тоже имеет местро. Ну понятно почему: очевидно, что

$$\Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x+y)\big)\Big) = \Big(f(x)\sigma(x), \big(g(y), \varphi(x+y)\big)\Big) = \Big(f(x), \big(g(y), \sigma(x)\varphi(x+y)\big)\Big) \overset{1.1}{=} \\ = \Big(g(y), \big(f(x)\sigma(x), \varphi(x+y)\big)\Big) = \Big(g(y), \big(f(x), \varphi(x+y)\big)\Big).$$

∎

В качестве примера мы возьмём δ-функцию. У неё компактный носитель множество из одной точки. Пусть $f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Тогда (напишем сперва ответ)

$$f(x) \star \delta(x) = f(x).$$

В самом деле, $\forall\, \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\big(f(x) \star \delta(x), \varphi(x)\big) = \Big(f(x), \big(\delta(y), \varphi(x+y)\big)\Big) = \big(f(x), \varphi(x)\big).$$

Когда у обобщённой функции носитель компакт, её можно применять к любой бесконечно гладкой, не обязательно имеющей компактный носитель.

3.2 Дифференция свёртки

Теорема 3.2. *Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$, такие, что существует свёртки $f \star g$. Тогда существуют свёртки $\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g$, $f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$ и при этом*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \star g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \star g = f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Есть такие студенты, которые скажут: вы тут описались, надо было плюс поставить. Нет, не описался.

Обратное, очевидно, неверно: не факт, что если есть свёртки $\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g$, $\star \frac{\partial g}{\partial x_i}$, то существует $f \star g$. Простой пример: функции из L^1_{loc}.

Доказательство. Для начала напишу определение производной. Для любой $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, для любого компактного исчерпания единицы $\eta_k \in D(\mathbb{R}^{2n})$, $k = 1, 2, \dots$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f \star g), \varphi\right) = -\left(f \star g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right).$$

Это с одной стороны. А теперь другую сторону равенства хотим переписать в таком же виде. Хотим показать, что существует предел

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g, \varphi\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right),$$

причём

$$-\lim_{k\to\infty}\left(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right).$$

Вот для этого разберёмся, в чём разница в выражениях под знаком предела. В самом деле

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right) \overset{1.1}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \left(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) =$$
$$-\left(f(x), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) = -\left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right)\right) =$$
$$-\left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial \eta_k(x,y)}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right)\right) - \left(f(x), \left(g(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_i}\right)\right).$$

Покажем, что предел от первого слагаемого есть ноль, то есть

$$\lim_{k\to\infty}\left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial \eta_k(x,y)}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right)\right). \tag{2}$$

Догадаться, чем воспользоваться очень непросто. Обычно начинают какие-то оценки писать, и ничего не получается. Нужно построить новое компактное исчерпание единицы. Положим $\lambda_k(x,y) = \eta_k(x,y) + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}(x,y)$, $k = 1, 2, \dots$ Очевидно, что $\lambda_k(x,y)$ также будет компактным исчерпанием единицы. Предел о определении свёртки не зависит от выбора компактного исчерпания единицы

$$\lim_{k\to\infty}\left(f(x), \left(g(y), \lambda_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) = \lim_{\to k}\infty\left(f(x), \left(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right).$$

Однако

$$\left(f(x), \left(g(y), \lambda_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) = \left(f(x), \left(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) + \left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial \eta_k(x,y)}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right)\right).$$

Откуда следует (2).

Ввиду (Я) соотношение (Ы) влечёт за собой (ЯЯ). Соотношение (ЯЯ) в свою очередь означает, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f \star g), \varphi\right) = -\left(f \star g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x+y)\right) =$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g, \varphi\right).$$

Другими словами, свёртка $\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g$ существует и при этом

$$\frac{\partial f \star g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \star g.$$

Последнее ввиду коммутативности свёртки позволяет утверждать, что существует также $f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$, причём $\frac{\partial(f \star g)}{\partial x_i} = f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$. Что и требовалось доказать. ∎

3.3 Теорема существования и теорема единственности

Пусть $\mathcal{L} = \sum\limits_{|a| \leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \ldots \partial x^{\alpha_n}}$.

Определение 3.1. *$\mathcal{E}(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$ называется фундаменальным решением оператора $\mathcal{L}$, если $\mathcal{L}\mathcal{E} = \delta(x)$.*

В качестве примера возьмём $\mathcal{L} = \frac{d}{dx}$. Тогда $\mathcal{E}(x) = \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ — фундаментальное решение $\mathcal{L}$. В самом деле, имеем, $\theta'(x) = \delta(x)$.

У нас осталось пять минут. Ровно столько, сколько нужно, чтобы доказать две теоремы.

Теорема 3.3. *Пусть $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$, такая, что существует свёртка $u = f \star \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}(x)$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{L}u = f$.*

Доказательство. Имеем $\mathcal{L}u = \mathcal{L}(f \star \mathcal{E}) = f \star \mathcal{L}\mathcal{E} = f \star \delta = f$. Ведь у свёртки можно дифференцировать только одну компоненту. ∎

Теорема 3.4. *Пусть $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ — решение уравнения $\mathcal{L}u = f$, такое, что существует свёртка $u \star \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$. Тогда $u = f \star \mathcal{E}$.*

Доказательство. Имеем $\mathcal{L}(u \star \mathcal{E}) = u \star \mathcal{L}\mathcal{E} = u \star \delta = u$. С другой стороны

$$\mathcal{L}(u \star \mathcal{E}) = \mathcal{L}u \star \mathcal{E} = f \star \mathcal{E} \Rightarrow u = f \star \mathcal{E}.$$

Я на две минуты вас обманул всего. ∎

4 Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

В качестве $\mathcal{L}$ возьмём такой дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dx} + a_0. \quad a_s \in \mathbb{C},\ s = 0, 1, \ldots, m-1.$$

А задача Коши формулируется так:

$$\mathcal{L}w = f(x), \quad w(0) = w_0, \ldots, w^{(n-1)}(0) = w_{n-1}, \quad w_s \in \mathbb{C},\ s = 0, 1 \ldots, m-1.$$

Для простоты будем считать, что $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Вы знаете из курса ОДУ, что у этой задачи имеется единственное решение. Коэффициенты не обязательно для этого должны быть постоянными, но для уравнения с постоянными коэффициентами существует единственное глобальное решение, определённое по всём $\mathbb{R}$.

Обозначим

$$\widetilde{w}(x) = \begin{cases} w(x), & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}; \qquad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

И применим к $\widetilde{w}$ оператор $\mathcal{L}$. Если будете считать классическую производную, то поймёте, что в нуле это сделать нельзя. Но вы можете интерпретировать $\widetilde{w}(x)$ как обобщённую функцию, и, значит, её можно дифференцировать.

$$(\mathcal{L}\widetilde{w}, \varphi) = (w, \mathcal{L}^*\varphi),$$

где $\mathcal{L}^*$ — такой вспомогательный оператор. Как он устроен? Если вы берёте одну производную, минус вылезает:

$$\left(\frac{du}{dx}, \varphi\right) = -\left(u, \frac{d\varphi}{dx}\right)$$

Значит, $\mathcal{L}^* = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} + (-1)^{m-1} d_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$. Он называется формально сопряжённым оператором. Слово «формально» появляется, так как мы не задумываемся об области определения оператора, интересуемся лишь символической записью.

Так как $\widetilde{w} \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, то

$$(\widetilde{w}, \mathcal{L}^*\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{w}\mathcal{L}^*\varphi\, dx = \int\limits_{0}^{\infty} w\mathcal{L}^*\varphi\, dx = \sum_{s=1}^{m} (-1)^s a_s \int\limits_{0}^{\infty} w\varphi^{(s)}\, dx. \tag{3}$$

Здесь одна тонкость, s меняется от 0 до m, а старший коэффициент единица. Значит, положим $a_m = 1$.

Дальше я проделаю процедуру, называемую интегрированием по частям (учту ещё, что φ имеет компактный носитель, то есть на ∞ $\varphi = 0$)

$$\int_0^\infty w\varphi^{(s)}\,dx = w\varphi^{s-1}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty w'\varphi^{(s-1)}\,dx == -w(0)\varphi^{(s-1)}(0) - w'\varphi^{s-2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty w''\varphi^{s-2}\,dx =$$

$$= -w(0)\varphi^{(s-1)}(0) + w'(0)\varphi^{(s-2)}(0) + \dots + (-1)^s w^{(s-1)}(0)\varphi(0) + (-1)^s \int_0^\infty s^{(s)}\varphi\,dx.$$

Теперь мы подставим всё в сумму (3) (учтём начальные условия $w^{(p)}(0) = w_p \in \mathbb{C}$)

$$(\widetilde{w}, \mathcal{L}^*\varphi) = \sum_{s=1}^m (-1)^s a_s \sum_{p=0}^{s-1} (-1)^{p+1} w^{(p)}(0)\varphi^{(s-p-1)}(0) + \int_0^\infty \underbrace{\sum_{s=0}^m (-1)^s a_s w^{(s)}}_{\mathcal{L}w=f}\varphi\,dx =$$

$$= \sum_{s=1}^m \sum_{p=0}^{s-1} (-1)^{s+p+1} a_s w_p \underbrace{\varphi^{(s-p-1)}(0)}_{(-1)^{s-p-1}\left(\delta^{(s-p-1)}(x),\varphi(x)\right)} + \underbrace{\int_0^\infty f\varphi\,dx}_{(\widetilde{f},\varphi)} =$$

$$= \left(\sum_{s=1}^m \sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) + \widetilde{f}(x), \varphi(x)\right),$$

откуда следует, что

$$\mathcal{L}\widetilde{w} = \sum_{s=1}^m \sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) + \widetilde{f}(x). \tag{4}$$

В качестве примера рассмотрим вот такое уравнение $y'' + \omega^2 y = f(x)$ с начальными условиями $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ $(\omega > 0)$. Такое уравнение колебаний с правой частью. Положим

$$\widetilde{y}(x) = \begin{cases} y(x), & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда, используя (4), получим $\widetilde{y}'' + \omega^y = \delta(x)y_1 + \delta'(x)y_0 + \widetilde{f}(x)$.

У нас была задача Коши. А мы получили одно уравнение, в которое входит всё.

4.1 Фундаментальные решения обыкновенного оператора $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентами

Теорема 4.1. *Пусть W — решение задачи Коши*

$$\mathcal{L}w = 0, \quad w(0) = 0, \dots, w^{(m-2)}(0) = 0,\ w^{(m-1)}(0) = 1.$$

Тогда $\mathcal{E}(x) = \theta(x)W(x)$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$, то есть $\mathcal{L}\mathcal{E}(x) = \delta(x)$.

Доказательство. Непосредственно следует из формулы (4). ■

В качестве примера возьмём оператор уже рассмотренного сегодня уравнения $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2$, $\omega > 0$. Рассмотрим задачу

$$w'' + \omega^2 w = 0, \quad w(0) = 0,\ w'(0) = 1.$$

Решение, как мы давно знаем, $W(x) = \frac{1}{\omega}\sin\omega x$. Фундаментальное решение

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\theta(x)}{\omega}\sin\omega x.$$

4.2 Свёрточная алгебра

Обозначим $\mathcal{A} == \left\{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})\colon \operatorname{supp} f \subset [0, \infty)\right\}$.

Лемма 4.1. *Множество $\mathcal{A}$ образует коммутативную алгебру с единицей относительно свёртки и операций сложения и умножения на скаляр.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\forall\ f, g \in \mathcal{A}\ \ \exists\ f \star g \in \mathcal{A}$. Пусть η_k — компактное исчерпание единицы. Возьмём такое $\tau \in C^\infty(\mathbb{R})$, что $\tau\big|_{(-\infty,-1]} = 0$, $\tau\big|_{[-1/2,\infty)} = 1$. Положим $\tau_\varepsilon(x) = \tau\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Воспользуемся определениями свёртки и умножения обобщённой функции на бесконечно гладкую: $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\big(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big) = \big(\tau_\varepsilon(x)f(x)\tau_\varepsilon(y)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big) = \big(f(x)g(y), \underbrace{\eta_k(x,y)\tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y)}_{\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}\big) = \ldots$$

Почему просто понять, что у аргумента компактный носитель? Пусть $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$. Тогда $-A \leqslant x + y \leqslant A$. Теперь φ умножается на две функции, у которых носитель луч. А так как η_k — компактное исчерпание единицы и существует предел это выражения (последовательность стабилизируется на компактном носителе произведения $\tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y)$ с какого-то номера k.

$$\cdots = \big(f(x)g(y), \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y)\big)$$

для достаточно больших k.

Таким образом, свёртка $f \star g$ существует, причём

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \forall\ \varepsilon > 0\quad (f \star g, \varphi) = \big(f(x)g(y), \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y)\big).$$

Осталось показать, что $\operatorname{supp} f \star g \subset [0, \infty)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}\big((-\infty, 0)\big)$. Покажем, что $(f \star g, \varphi) = 0$. Для этого надо формулой воспользоваться.

$$\operatorname{supp}\varphi \subset (-\infty, 0)\ \Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0\colon \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y) \equiv 0.$$

Что является единицей? δ-функция. Все функции с ней сворачиваются и результат свёртки сама функция. ∎

5 17 ноября 2014

Сейчас мы напишем формулу для нахождения решения задачи Коши. В прошлый раз мы взяли решение и обрезали его, оставив только положительные значения времени. Сейчас попробуем воспользоваться теоремой существования.

Как строить фундаментальные решения я уже говорил и даже пример привёл.

Теорема 5.1. *Пусть w — решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = f(x), \\ w(0) = w_0, \\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w^{(m-1)}(0) = w_{m-1}. \end{cases} \tag{5}$$

где

$$\mathcal{L} = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dx} + a_0, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}),\ a_s \in \mathbb{R},\ s = 0, 1, 2\ldots, m-1, \quad a_n = 1.$$

Тогда

$$w(x) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p W^{(s-p-1)}(x) + \int\limits_0^x W(x-\xi)f(\xi)\,d\xi, \tag{6}$$

где W — решение задачи Коши вот такой

$$\begin{cases} \mathcal{L}W = 0, \\ W(0) = \cdots = W^{(m-2)}(0) = 0, \\ W^{(m-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Вот такой формулой достаточно удобно пользоваться.

Доказательство. Решение существует по теореме существования и единственноси. Пусть w — решение задачи Коши (5). Обозначим $\widetilde{w}(x) = \theta(x)w(x)$, где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

И $\widetilde{f}(x) := \theta(x)f(x)$.

$$\mathcal{L}\widetilde{w} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) + \widetilde{f}(x).$$

Тогда по теореме единственности будем иметь

$$\widetilde{w}(x) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) \star \mathcal{E}(x) + f(x) \star \mathcal{E}(x),$$

где $\mathcal{E}(x) = \theta(x)W(x)$ — фундаментальное решение оператора J.

Мы знаем, что у δ-функции с любой обобщённой свёртка существует и равна

$$\delta^{(s-p-1}(x) \star \mathcal{E}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{s-p-1} \big(\delta(x) \star \mathcal{E}(x)\big) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{s-p-1} \mathcal{E}(x) = \theta(x)W^{(s-p-1)}(x),$$

так как $\mathcal{E}(x), \mathcal{E}(x), \ldots, \mathcal{E}^{(m-2)}(x)$ абсолютно непрерывны. Для чего придуманы абсолютно непрерывные функции: это в точности те функции, для которых верна формула Ньютона—Лейбница.

Мы заметим вот что. Функции $\widetilde{f}$ и $\mathcal{E}(x)$ локально интегрируемы по Лебегу. Значит, свёртку можно считать по классической формуле.

$$\widetilde{f} \star \mathcal{E}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x-\xi)\widetilde{f}(\xi)\,d\xi =$$

Теперь вспоминаем, что такое $\mathcal{E}$:

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x-\xi)W(x-\xi)\theta(\xi)f(\xi)\,d\xi = \theta(x)\int\limits_{x}^{x} W(x-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

$\theta(x)$ для того, чтобы в отрицательных точках точно был ноль.

$$\widetilde{w}(x) = \theta(x)\sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p W^{(s-p-1)}(x) + \theta(x)\int\limits_{0}^{x} W(x-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Если $x > 0$, то последнее выражение совпадает с (6). А как с отрицательными? Покажем, что (6) имеет место и при $x < 0$. В задаче (5) сделаем замену переменных $x \rightleftharpoons -x$. Получим для $v(x) = (-1)^m w(-x)$ следующую задачу Коши

$$\begin{cases} (-1)^m \mathcal{L}^* v = f(-x), \\ v^{(P)}(0) = (-1)^{p+m} w_p, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \end{cases} \tag{7}$$

где $\widetilde{L}^* = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} + (-1)^{m-1} a_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots - a_1 \frac{d}{dx} + a_0$ — оператор, формально сопряжённый к $\mathcal{L}$. Откуда это берётся? Вот была задача для функции w $\mathcal{L}w = f(x)$. Теперь мы рассмотрели новую функцию $v(x)$. Что можно написать: $w(x) = (-1)^m v(-x)$, подставляем в задачу, что получем (надо дифференцировать функцию v, а когда мы дифференцируем сложную функцию, возникает (-1) в той же степени, что и производная, а если применять оператор, формально сопряжённый, то все эти (-1) сокращаются)

$$(-1)^m \mathcal{L}^* v(x) = \cancel{(-1)^m} \sum_{s=1}^{m} (-1)^s a_s \frac{d^s}{dx^s} \cancel{(-1)^m} w(-x) =$$

Я должен s раз профифференцировать функцию $\frac{d^s w(-x)}{dx^s} = (-1)^s \frac{d^s w(y)}{dy^s}\Big|_{y=-x}$

$$= \sum_{s=0}^{m} a_s \frac{d^s w(y)}{dy^s}\bigg|_{y=-x} = f(-x).$$

Вот и получили уравнение. А как найти условие? Это ещё проще.

$$v^{(p)}(0) = (-1)^m \frac{d^p}{dx^p} w(-x)\bigg|_{x=0} = (-1)^{m+p} w_p.$$

Собственно говоря, вот (7) и вытекает.

Очевидно, что функция $V(x) = (-1)^{m-1}W(-x)$ (это W из (6)) будет решением задачи Коши

$$\begin{cases}(-1)^m\mathcal{L}^*V = 0,\\ v(0) = \dots = v^{m-2}(0) = 0,\\ v^{m-1}(0) = 1.\end{cases}$$

Таким образом, функция $\theta(x)V(x)$ является фундаментальным решением оператора $(-1)^m\mathcal{L}^*$. Повторяя предыдущие рассуждения с заменой функции $\widetilde{w}(x)$ на $\widetilde{v}(x) = \theta(x)v(x)$ получим

$$\widetilde{v}(x) = \theta(x)\sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1}(-1)^{s+p}a_s w_p V^{(s-p-1)}(x) + \theta(x)\int\limits_0^x V(x-\xi)f(-\xi)\,d\xi.$$

При $x > 0$ из последнего выражения находим

$$(-1)^m w(-x) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1}(-1)^{s+p}a_s w_p V^{s-p-1}(x) + \int\limits_0^x (x-\xi)f(-\xi)\,d\xi.$$

Теперь надо перейти к W. Под интегралом сделаем замену $\zeta = -\xi$ и получим (6) для отрицательных аргументов функции w. ■

5.1 Фундаментальное решение оператора Лапласа

Теорема 5.2. *Пусть $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, где Ω — ограниченная область с кусочно гладкой границей. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} f\cos(\boldsymbol{v}, x_i)\,ds,$$

где $\boldsymbol{v}$ — вектор единичной нормали к $\partial\Omega$, внешней по отношению к Ω.

Эта формула называется формулой Грина.

Доказательство. В общей формуле Стокса (см. Диф. геом.)

$$\int\limits_{\partial\Omega}\omega = \int\limits_{\Omega} d\omega$$

положим $\omega = (-1)^{i-1}f(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^m$. ■ Здесь происходит состыковка строгой математики и нестрогой. Если нужно что-то посчитать, нагляднее пользоваться косинусами. Если же надо что-то доказывать, то пользуемся дифференциальной геометрией.

Из этой теоемы есть замечательное следствие, а именно формула Грина интегрирования по частям

Теорема 5.3. *Пусть $f, g \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, Ω — ограниченная область с кусочно гладкой границей. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial x_i}g\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} fg\cos(\boldsymbol{\nu}x_i)\,ds - \int\limits_{\Omega} f\frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx,$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — вектор единичной нормали к $\partial\Omega$, внешней по отношению к области Ω.

Доказательство. Берём в предыдущей теореме $u = fg$, получаем

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx + \int\limits_{\Omega} f\frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} fg\cos(\boldsymbol{\nu}, x_i)\,ds.$$

■

6 24 ноября 2014

6.1 Фундаментальное решение оператора Лапласа

Доказали две вспомогательные леммы в прошлый раз, а теперь сформулируем теорему.

Теорема 6.1. *Пусть*

$$\mathcal{E}_n(x) = \begin{cases}-\frac{1}{(n-2)|S_1|}\cdot\frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geqslant 3;\\ \frac{1}{2\pi}\ln|x|, & n = 2.\end{cases}$$

Тогда $\Delta\mathcal{E}_n(x) = \delta(x)$, то есть $\mathcal{E}_n(x)$ является фундаментальным решением оператора Лапласа (оператора $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$).

Оператор хорошо известен и в математике и в приложениях.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда оператор Лапласа, применённый

$$\big(\Delta\mathcal{E}_n(x), \varphi(x)\big) = \big(\mathcal{E}_n(x), \Delta\varphi(x)\big) =$$

В случае $n = 2$ особенность $\ln|x|$ в нуле суммируема. Получаем там $x\ln|x|$, что в нуле стремится к нулю. В случае $n \geqslant 3$ тоже получается величина, которая при $x \to 0$ стремится к нулю. А значит, последнее выражение можно записать в виде интеграла

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_n} \mathcal{E}_n(x)\Delta\varphi(x)\,dx =$$

А дальше хочется оператор Лапласа перебрасывать обратно только уже в классическом смысле. Для этого мы доказали теорему 5.3. Самое сложное в теореме — это условие $C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$. $\varphi(x)$ — хорошая функция, бесконечно гладкая, а $\mathcal{E}_n(x)$ — плохая, у неё особенность в нуле. И более того, область $\mathbb{R}^n$ не является ограниченной, а в теореме требуется именно ограниченная. Поэтому мы поступим так.

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{B_R\setminus\overline{B}_\varepsilon} \mathcal{E}_n(x)\Delta\varphi(x)\,dx.$$

Здесь $R > 0$ — некоторое вещественное число, такое, что $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R$. Интеграл у нас хороший. Имеем

$$\int\limits_{B_R\setminus\overline{B}_\varepsilon} \mathcal{E}_n(x)\Delta\varphi(x)\,dx = \int\limits_{B_R\setminus\overline{B}_\varepsilon} \mathcal{E}_n(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \mathcal{E}_n(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}(x)\,dx =$$

Дальше применим ту теорему 5.3

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \mathcal{E}_n(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\cos(\boldsymbol{\nu}, x_i)\,dS - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \frac{\partial\mathcal{E}_n(x)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,dx =$$

И ещё раз применяем теорему, а заодно делаем полезное преобразование в первом интеграле $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\cos(\boldsymbol{\nu}, x_i) = \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}$.

$$= \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \mathcal{E}_n(x)\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\cos(\boldsymbol{\nu}, x_i)}_{\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}}\,dS - \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\cos(\boldsymbol{\nu}, x_i)}_{\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}}\,\varphi\,dS + \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \Delta\mathcal{E}_n(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \mathcal{E}_n(x)\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,ds - \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \frac{\partial\mathcal{E}_n(x)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\varphi\,ds + \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \Delta\mathcal{E}_n(x)\varphi(x)\,dx.$$

Утверждается, что последнее слагаемое равно нулю. Покажем, что $\Delta\mathcal{E}_n(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. В самом деле, в многомерных полярных координатах оператор Лапласа имеет вида

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S_1},$$

где Δ_{S_1} — оператор Лапласа—Бельтрами на единичной сфере (например, $\Delta_{S_1} = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$, если $n = 2$), который зависит только от угловых переменных.

Таким образом,

$$\Delta\mathcal{E}_n(x) = \begin{cases} \frac{(2-n)(1-n)}{(n-2)|S_1|}r^{-n} - \frac{(2-n)(n-1)}{(n-2)|S_1|}r^{-n} = 0, & n \geqslant 3; \\ -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^2} = 0, & n = 2. \end{cases}$$

Отсюда что следует? От всей формулы остаётся два слагаемых. Это позволяет утверждать, что

$$\big(\Delta\mathcal{E}_n(x), \varphi(x)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \mathcal{E}_n\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,dS - \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\boldsymbol{\nu}}\varphi\,dS\Bigg).$$

Несложно увидеть, что $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R$, то есть $\varphi = 0$ в окрестности S_R. А $\partial(B_R \setminus B_\varepsilon) = S_R \cup S_\varepsilon$.

$$\left| \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \mathcal{E}_n \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\, dS \right| \leqslant \int\limits_{S_\varepsilon} |\mathcal{E}_n| \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right| dS \leqslant |\mathcal{E}_n|\big|_{S_\varepsilon} \sup_{S_\varepsilon} |\nabla\varphi||S_\varepsilon|, \tag{8}$$

где $|S_\varepsilon|$ — $(n-1)$-мерный объём сферы S_ε.

$$|S_\varepsilon| \cdot |\mathcal{E}_n|\big|_{S_\varepsilon} = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)|S_1|}\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \cdot |S_1|\varepsilon^{n-1}, & n \geqslant 3; \\ \frac{1}{2\pi}|\ln\varepsilon|\varepsilon \cdot 2\pi\varepsilon, & n = 2. \end{cases}$$

Поэтому $|S_\varepsilon| \cdot |\mathcal{E}_n|\big|_{S_\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. И мы будем иметь

$$\left| \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \mathcal{E}_n(x) \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x)\, dS \right| \to 0 \quad \varepsilon \to 0.$$

На что надо обратить было внимание: $\sup\limits_{S_\varepsilon} |\nabla\varphi| \leqslant \|\varphi\|_{C^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Ну и всё, устремляем правую часть неравенства (8) к нулю.

Посмотрим, как ведёт себя другой интеграл. Нам нужно сосчитать такую производную на сфере радиуса ε (нормаль направлена внутрь сферы, чтобы быть внешней по отношению к области). Нормаль коллинеарная радиусу, но производная по радиусу имеет другой знак. (Обратим внимание, что $|S_1| = 2\pi$ для $n = 2$.)

$$\left.\frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right|_{S_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r} \begin{cases} \left.\frac{1}{(n-2)|S_1|}\frac{1}{r^{n-2}}\right|_{r=\varepsilon}, & n \geqslant 3; \\ \left.\frac{1}{2\pi}\ln r\right|_{r=\varepsilon}, & n = 2 \end{cases} = \frac{1}{|S_1|\varepsilon^{n-1}}$$

Там самым, аналогичное выражение для второго слагаемого

$$\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\boldsymbol{\nu}}\varphi\, dS = \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\boldsymbol{\nu}}\varphi\, dS = \frac{1}{|S_\varepsilon|}\int\limits_{S_\varepsilon} \varphi\, dS$$

К чему стремится последнее? Несложно увидеть, что к $\varphi(0)$, но как это строго доказать? В самом деле, напишем

$$\frac{1}{|S_\varepsilon|}\int\limits_{S_\varepsilon} \varphi\, dS - \varphi(0) = \frac{1}{|S_\varepsilon|}\int\limits_{S_\varepsilon} \big(\varphi(x) - \varphi(0)\big)\, dS.$$

Поэтому

$$\left| \frac{1}{|S_\varepsilon|}\int\limits_{S_\varepsilon} \varphi\, dx - \varphi(0) \right| \leqslant \frac{1}{|S_\varepsilon|}\int\limits_{S_\varepsilon} \big|\varphi(x) - \varphi(0)\big|\, dS \leqslant \sup_{x\in S_\varepsilon} \big|\varphi(x) - \varphi(0)\big|.$$

Все наши умозаключения позволяют прийти вот к такому вот выводу.

$$\big(\Delta\mathcal{E}_n(x), \varphi(x)\big) = \varphi(0)$$

или, иными словами, что и требовалось доказать. ∎

6.2 Фундаментальное решение оператора теплопроводности

Громоздкие формулы запоминать не надо.

Есть некие методы получать фундаментальные решения. Методы достаточно громоздкие и требуется предварительная теория преобразований Фурье для обобщённой функции. Мы поэтому будем лишь смотреть на результаты.

Теорема 6.2. *Пусть*

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}},$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Тогда
$$\mathcal{E}_t - a^2\Delta\mathcal{E} = \delta(x,t),$$
то есть $\mathcal{E}(x,t)$ является фундаментальным решением оператора теплопроводности $\partial_t - a^2\Delta$.

Очень трудно угадать, что фундаментальное решение будет именно такое. Есть некая непростая процедура, которую кто-то когда-то проделал, например, лесница Ферма. Если её проделать для оператора теплопроводности, это займёт больше одного целого дня. Зная же результат, мы можем просто доказать.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ (есть ещё переменная t). Имеем
$$(\mathcal{E}_t - a^2\Delta\mathcal{E}, \varphi) = (\mathcal{E}, -\varphi_t - a^2\Delta\varphi) =$$
У нас $\mathcal{E}$ локально суммируемая функция. Единственная проблема при $t=0$. Знаменатель стремится к нулю, а в числителе стоит экспонента, которая тоже стремится к нулю и причём быстрее. Отсюда следует вот что, что наше выражение есть ничто иное, как интеграл
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{E}(-\varphi_t - a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt = -\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}(\varphi_t - a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt =$$
При перебрасывании производной по t возникает проблема в нуле, там особенность. Поэтому будем переходить к пределу по t, а по x будем брать интеграл по достаточно большому шару B_R.
$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^\infty\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}(\varphi_t - a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt,$$
где $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R\times\mathbb{R}$. У нас тут два интеграла написано. Первый
$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^\infty\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi_t\,dx\,dt = \int\limits_{B_R}\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi_t\,dt\,dx = \int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi\Bigg|_{t=\varepsilon}^\infty dx - \int\limits_{B_R}\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\right)\varphi\,dt\,dx.$$
В этом выражении меня пока интересует первое слагаемое. Сосчитаем его
$$\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi\Bigg|_{t=\varepsilon}^\infty dx = -\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\varepsilon}}}{(2a\sqrt{\pi\varepsilon})^n}\varphi(x,\varepsilon)\,dx$$
Попробуем выяснить, к чему это стремится, когда $\varepsilon\to 0$. Это мы сегодня уже не успеем.

Пок что для второго слагаемого напишем следующее выражение
$$\int\limits_\varepsilon^\infty\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\Delta\varphi\,dx\,dt =$$
При каждом фиксированном t $\varphi = 0$ в окрестности B_R, поэтому
$$= \int\limits_\varepsilon^\infty \Delta\left(\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi\right)\varphi\,dx\,dt.$$
Таким образом,
$$\int\limits_\varepsilon^\infty\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}(\varphi_t + a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt = -\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\varepsilon}}}{(2a\sqrt{\pi\varepsilon})^n}\varphi(x,\varepsilon)\,dx + \int\limits_0^\varepsilon\int\limits_{B_R}(\partial_t - a^2\Delta)\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi\,dx\,dt.$$
В следующий раз перейдём к пределу и всё покажем. ∎

7 Фундаментальное решение оператора теплопроводности

Мы доказывали, что вот такая вот формула
$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{\frac{-|x|^2}{4a^2t}}$$

является фундаментальным решением оператора теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$. Что мы с вами получили:

$$\int_\varepsilon^\infty \int_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}(\varphi_t + a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt = -\int_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\varepsilon}}}{(2a\sqrt{\pi\varepsilon})^n}\varphi(x,\varepsilon)\,dx + \int_0^\varepsilon \int_{B_R} (\partial_t - a^2\Delta)\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi\,dx\,dt.$$

Теперь надо посчитать, во что это всё превратится, когда мы ε устремим к нулю. Первое, что хочу заметить: последнее слагаемое при $t > 0$

$$\int_0^\varepsilon \int_{B_R} (\partial_t - a^2\Delta)\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi\,dx\,dt = 0.$$

Непосредственным дифференцированием в этом можно убедиться. Если угодно, это будет упражнение на дом. Уж очень громозкого выражения вы не получите.

В то же время под интегралом

$$\int_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\varepsilon}}}{(2a\sqrt{\pi\varepsilon})^n}\varphi(x,\varepsilon)\,dx$$

сделаю вот такую замену: $y = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$, $dx = (2a\sqrt{t})^n\,dy$. Как при этом преобразуется интеграл?

$$\int_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\varepsilon}}}{(2a\sqrt{\pi\varepsilon})^n}\varphi(x,\varepsilon)\,dx = \frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2}\varphi\big((2a\sqrt{\varepsilon})^n y,\varepsilon\big)\,dy$$

Что можно сказать про функцию φ? Это функция из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$. Значения $\varphi\big((2a\sqrt{\varepsilon})^n y,\varepsilon\big) \to \varphi(0)$ при $\varepsilon \to 0$. А вот к чему стремится по теореме Лебега об ограниченной сходимости всё выражение (есть мажоранта, ведь у φ на компакте есть наибольшее значение)

$$\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2}\varphi\big((2a\sqrt{\varepsilon})^n y,\varepsilon\big)\,dy \to \frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2}\varphi(0)\,dy = \frac{\varphi(0)}{\pi^{n/2}}\int_{\mathcal{E}^n} e^{-|y|^2}\,dy = \varphi(0).$$

Таким образом (вспомним, с чего начиналось наше рассуждение)

$$(\Delta\mathcal{E},\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \int_{B_R} \frac{e^{\frac{-|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}(\varphi_t + a^2\Delta\varphi) = \varphi(0)$$

или, другими словами $\Delta\mathcal{E} = \delta(x)$.

8 Волновой оператор

Разберёмся сначала с одномерным случаем.

Теорема 8.1. *Пусть* $\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|)$, *где* $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ *— тэта-функция Хевисайда,* $a > 0$. *Тогда*

$$(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)\mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t),$$

то есть $\varepsilon(x,t)$ *— фундаментальное решение одномерного волнового оператора* $\Box_a = (\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)$.

Доказательство. Сделаем так, как вы привыкли делать на семинаре. Разложим на множители.

$$\Box_a = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2 = (\partial_t - a\partial_x)(\partial_t + a\partial_x).$$

Для тех, кому это в новинку, всегда можно рассмотреть алгебру, порождённую данными операторами ∂_t^2 и ∂_x^2 и тождественным (всевозможные линейные комбинации и композиции) и рассматривать умножение операторов, как композицию. Алгебра получается коммутативной.

Теперь хотим сделать линейную замену переменных, такую, что $\partial_\xi = \partial_t + a\partial_x$, $\partial_\eta = \partial_t - a\partial_x$. Ищем $x = x(\xi,\eta)$ и $t = t(\xi,\eta$, такие, что

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \underbrace{\frac{\partial t}{\partial\xi}}_{1}\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial\xi}}_{a}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial\eta} = \underbrace{\frac{\partial t}{\partial\eta}}_{1}\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial\eta}}_{-a}\frac{\partial}{\partial x}$$

Здесь сомнений нет: $x = a\xi - a_\eta$, $t = \xi + \eta$. Обратные выражения к ним

$$\xi = \frac{x+at}{2a}; \quad \eta = \frac{-x+at}{2a}; \quad \left\| \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,t)} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Во что превратится уравнения после такой замены?

$$\partial_\eta \partial_\xi \mathcal{E}\big(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)\big) = \delta\big(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)\big).$$

Уравнения достаточно простое получилось, я лишь хочу понять, что из себя представляет вот эта δ. Согласно формуле замены переменных у обобщённой функции получим следующее

$$\Big(\delta\big(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)\big), \psi(\xi,\eta)\Big) = \left(\delta(x,t), \psi\big(\xi(x,t), \eta(x,t)\big) \middle| \det \left\| \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,t)} \right\| \right| \right) = \frac{1}{2a}\varphi(0),$$

то есть $\delta\big(\xi(x,t), \eta(x,t)\big) = \frac{1}{2a}\delta(\xi,\eta) = \frac{1}{2a}\delta(\xi)\delta(\eta)$. Тем самым будем иметь

$$\partial_\eta \partial_\xi \mathcal{E}\big(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)\big) = \frac{1}{2a}\delta(\xi)\delta(\eta).$$

Несложно увидеть, что функция

$$\mathcal{E}\big(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)\big) = \frac{1}{2a}\theta(\xi)\theta(\eta)$$

является решением последнего уравнения (разумно искать решение в виде прямого произведения, подставляем убеждаемся).

Осталось сделать обратную замену.

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{2a}\theta\left(\frac{x+at}{2a}\right)\theta\left(\frac{-x+at}{2a}\right) =$$

должно быть $x + at > 0$ и $-x + at > 0$. Это имеет место тогда и только тогда, когда $|x| < at$. Тогда имеем

$$= \frac{1}{2a}\theta(at - |x|)$$

Что и требовалось доказать. ∎

Далее получим результат для трёхмерного случая, а из него уже получим для двумерного. Для двумерного вычисления очень громоздкие.

Теорема 8.2. *Пусть* $\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x)$, $\quad x = (x_1, x_2, x_3)$, *где*

$$(\delta_{S_r}, \varphi) = \int\limits_{S_r} \varphi\, dS, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^3).$$

Тогда $\Box_a \mathcal{E}(x,t) = (\partial_t^2 - a^2\Delta)\mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t)$, *то есть* $\mathcal{E}(x,t)$ *есть фундаментальное решение трёхмерного волнового оператора.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и честно её продифференцируем согласно определению. При перебрасывании производной чётного порядка знак не выносится.

$$\big(\Box_a \mathcal{E}(x,t), \varphi\big) = \big(\mathcal{E}(x,t), \Box_a \varphi\big) = \int\limits_0^\infty \frac{dt}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}} \Box_a \varphi\, dS =$$

Получили уже что-то похожее на цель, но не совсем. Обозначим $r = at$, $dt = dr/a$. Я хочу воспользоваться формулой интегрирования с сферических координатах.

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^\infty \frac{dr}{r} \int\limits_{S_r} \Box_a \varphi\, dS = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^\infty \frac{dr}{r} \int\limits_{S_r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dS - \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^\infty \frac{dr}{r} \int\limits_{S_r} \Delta\varphi\, dS =$$

Теперь сделаем замену t на r в функции φ. Имеем $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}a^2$. Под интегралом по сфере всюду $|x| = r$,

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_0^\infty \frac{dr}{r} \int\limits_{S_r} \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\, dS - \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^\infty \frac{dr}{r} \int\limits_{S_r} \Delta\varphi\, dS = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi_{rr}(x, r/a)}{|x|}\bigg|_{r=|x|} dx - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta_x \varphi(x, r/a)}{|x|}\bigg|_{r=|x|} dx$$

Дальше мы должны будем избавляться от r. ■

9 8 декабря 2014

Мы исследуем выражение $\mathcal{E}_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \quad x=(x_1,x_2,x_3)$. Мы остановились на выражении

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta_x\varphi(x,r/a)}{|x|}\Big|_{r=|x|}\,dx. \tag{9}$$

Мы используем формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} u\cos(\nu,x_i)\,dx,$$

где ν — вектор единичной нормали; из этой формулы Грина в своё время получалась формула интегрирования по частям.

$$\int\limits_{\Omega} f\frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} fg\cos(\nu,x_i)\,dS - \int\limits_{\Omega} f\frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx.$$

Вот это (9) то же самое или нет? У нас не выполнены условия, будем применять формулу Грина в нашем случае для $u=fg$ и доказывать интегрирование по частям для нашего случая отдельно.

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\Delta_x\varphi(x,r/a)}{|x|}\Big|_{r=|x|}\,dx = \frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{\Delta_x\varphi\left(x,\frac{r}{a}\right)}{|x|}\Big|_{r=|x|}\,dx,$$

где $R>0$ настолько велико, чтобы $\operatorname{supp}\varphi\subset B_R\times\mathbb{R}$. Такие $R>0$, очевидно, существуют, так как $\operatorname{supp}\varphi$ — компакт. Дальше мы вот что с вами сделаем.

$$\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{\Delta_x\varphi\left(x,\frac{r}{a}\right)}{|x|}\Big|_{r=|x|}\,dx = \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\varphi\left(x,\frac{r}{a}\right)\Big|_{r=|x|}\,dx =$$

дальше выделим полную производную. Что вы при этом получите. Дифференцируете по x_i и дифференцируете по r, как сложную функцию

$$= \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x,r/a)\Big|_{r=|x|}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x,r/a)\big|_{r=|x|}\frac{\partial|x|}{\partial x_i}\right)\,dx =$$

Дальше я напишу короче. Идея простая: продифференцировали, подставили, продифференцировали, подставили.

$$= \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^3\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x,r/a)\big|_{r=|x|}\right)\,dx - \frac{1}{a}\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^3\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_i}(x,r/a)\big|_{r=|x|} =$$

$$= \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)}\frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^3\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x,r/a)\big|_{r=|x|}\cos(\nu,x_i)\,dS -$$

$$- \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\sum_{i=1}^3\frac{\partial\varphi(x,r/a)}{\partial x_i}\big|_{r=|x|}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x|}\,dx - \frac{1}{a}\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^3\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_i}(x,r/a)\frac{\partial|x|}{\partial x_i}\,dx =$$

Давайте запись подсократим. Ясно, что вместо сумм можно писать градиенты. Вектор нормали записывается по направляющим косинусам: $\nu = \big(\cos(\nu,x_1),\cos(\nu,x_2),\cos(\nu,x_3)\big)$.

$$= \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)}\frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi(x,r/a)}{\partial\nu_x}\Big|_{r=|x|}\,dS - \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\nabla_x\varphi(x,r/|x|)\nabla\frac{1}{|x|} - \frac{1}{a}\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\,dx -$$

$$- \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\nabla_x\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\nabla|x|\,dx =$$

Сделали то же, что и при интегрировании по частям делаем. Дальше нужно окончательно избавиться от производных φ

$$= \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi(x,r/a)}{\partial\nu_x}\Big|_{r=|x|} - \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \varphi(x,r/a)\big|_{r=|x|}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|x|}\,dS+$$

$$+\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\nabla|x|\nabla\frac{1}{|x|}\,dx + \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\varphi(x,r/a)\Delta\frac{1}{|x|}\;dx-$$

$$-\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \frac{1}{|x|}\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\frac{\partial|x|}{\partial\nu}\,dS + \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\varphi_{rr}(x,r/a)\big|_{r=|x|}\nabla|x|\cdot\nabla|x|\,dx+$$

$$+\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\nabla\frac{1}{|x|}\cdot\nabla|x|\,dx + \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\Delta|x|\,dx.$$

Всё, что написано, результат, который легко получить, проделав элементарную процедуру выделения полной производной под интегралом (как интегрирование по частям). Дорога прямая, она вас обязательно приведёт к ответу.

Я теперь должен досчитать все пределы до границы. Первое слагаемое, ясно, что стремится к нулю. Ещё один интеграл по поверхности тоже легко оценивается. Чтобы интеграл не пошёл в ноль, нужно подынтегральное выражение больше нуля. $\frac{\partial|x|}{\partial\nu}$ однородный степени один. В другом слагаемом $\Delta\frac{1}{|x|}=0$. Кроме того, $\nabla|x|\cdot\nabla|x|=1$. Я это всё сосчитаю. Посмотрим слагаемые с интегралами по шаровому слою, содержащие в подынтегральном выражении первую производную

$$\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\nabla|x|\nabla\frac{1}{|x|}\,dx + \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\nabla\frac{1}{|x|}\cdot\nabla|x|\,dx + \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\Delta|x|\,dx.$$

Что и них подынтегральное выражение

$$\nabla|x|\nabla\frac{1}{|x|}+\nabla\frac{1}{|x|}\nabla|x|+\frac{\Delta|x|}{|x|}.$$

Я хочу показать, что это будет ноль. Попробуем убедиться, что это действительно так. Что такое модуль $|x|=(\Sigma x_i^2)^{\frac12}$. Значит,

$$\frac{\partial|x|}{\partial x_i}=\frac12 2x_i\left(\sum_{i=1}^3 x_i^2\right)^{-\frac12}=\frac{x_i}{|x|}.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x|}=-\frac{1}{|x|^2}\frac{\partial|x|}{\partial x_i}=-\frac{1}{|x|^2}\frac{x_i}{|x|}=-\frac{x_i}{|x|^3}.$$

Удивительные вещи. Значит, $\nabla|x|\nabla\frac{1}{|x|}=\frac{\sum_{i=1}^3 x_i^2}{|x|^4}=-\frac{1}{|x|^2}$. Второе слагаемое, аналогично, $\nabla\frac{1}{|x|}\nabla|x|=\frac{\Delta|x|}{|\Delta}$. Можно было проще поступит и посчитать в полярных координатах.

$$\Delta|x|=\left(\frac{\partial^2}{\partial r}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)r\Big|_{r=|x|}=\frac{2}{r}\big|_{r=|x|}=2\frac{|}{x}|$$

В тогда конечном итоге мы получим $\frac{\Delta|x|}{|x|}=\frac{2}{|x|}^2$. Таким образом

$$\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{\Delta_x\varphi(x,r/a)}{|x|}\Big|_{r=|x|}=\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi(x,r/a)}{\partial\nu_x}\big|_{r=|x|}-$$

$$-\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)}\varphi(x,r/a)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|x|}\,dS-\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)}\frac{1}{|x|}\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\frac{\partial|x|}{\partial\nu}\,dS+\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\varphi_{rr}(x,r/a)\big|_{r=|x|}\,dx$$

Мне надо ε устремить к нулю.Несложно увидеть, что

$$\Big|\int\limits_{(\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi(x,r/a)}{\partial\nu_x}\Big|_{r=|x|}\,dS\Big| = \Big|\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S_\varepsilon}\underbrace{\Big|\frac{\partial\varphi,r/a)}{\partial\ni_x}\Big|_{r=|x|}}_{\leqslant\|\varphi\|_{C^1(\mathbb{R}^4)}}\Big|\,dS \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon}\|\varphi\|_{c^1(\mathbb{R}^4)} \to 0 \quad (\varepsilon\to 0).$$

Аналогично,

$$\Big|\int\limits_{(\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \frac{1}{|x|}\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\frac{\partial|x|}{\partial\nu}\,dS\Big| \quad = \quad \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S_\varepsilon}\big|\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|} \quad\cdot\quad \Big|\frac{\partial|x|}{\partial\nu}\Big|\,dS \quad\leqslant\quad \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon}\|\varphi\|_{C^1}(\mathbb{R}^4)$$

В то же время $\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|x|} = \frac{d}{dr}\frac{1}{r}\big|_{r=|x|} = \frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$, если $x\in S_3$.

$$\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)}\varphi(x,r/a)\big|_{r=|x|}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|x|}\,dS = \int\limits_{S_\varepsilon}\varphi(x,\varepsilon/a)\frac{1}{\varepsilon^2}\,dS =$$

$$= 4\pi\varphi(0) + \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{S_\varepsilon}\big(\varphi(x,\varepsilon/a)-\varphi(0)\big)\,dS \to 4\pi\varphi(0)$$

при $\varepsilon\to 0+$, так как

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{S_\varepsilon}\big|\varphi(x,\varepsilon/a)-\varphi(0)\big|\,dS \leqslant \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\sup_{x\in S_\varepsilon}\big|\varphi(x,\varepsilon/a)-\varphi(0)\big| \to 0$$

при $\varepsilon\to 0$ ввиду непрерывности φ.

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{B_R\setminus B_D}\frac{\Delta_x\varphi(x,r/a)}{|x|}\Big|_{r=|x|}dx = -4\pi\varphi(0) + \int\limits_{B_r}\frac{1}{|}x|\varphi_{rr}(x,r/a)\big|_{\varepsilon=|x|}\,dx.$$

И мы будем иметь

$$\big(\Box_a\mathcal{E}_3(x,t),\varphi(x,t)\big) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi_{rr}(x,r/a)}{|x|}\Big|_{r=|x|}x - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\Delta_x\varphi(x,r/a)}{|x|}\Big|_{r=|x|}dx = \varphi(0).$$

То есть $\Box_a\mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t)$, что и требовалось доказать.

10 15 декабря

Есть такое свойство у обобщённой функции, определённой на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, которая на самом деле зависит только от первых n переменных, то есть зависимость от x_{n+1} чисто формальная.

Определение 10.1. *Говорим, что* $f(x)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ *допускает продолжение* $f_0(x')\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *на функции* $\varphi(x')\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $x=(x',x_{n+1})$, *если для любого компактного исчерпания единицы* $\eta_k\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $k=1,2,\dots$ *имеет место соотношение*

$$\big(f_0(x'),\varphi(x')\big) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x),\varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big). \tag{10}$$

<++>

Сразу возникает вопрос о корректности определения. Вот возьмём мы другое компактное исчерпание единицы, вдруг получится другой предел. Требуется, понять, почему предел не зависит от компактного исчерпания единицы. Это будет в качестве упражнения.

Упражнение 10.1. *Пусть для любого компактного исчерпания едницы существует предел в правой части* (10). *Докажите, что этот предел не зависит от выбора* η_k, $k=1,2,\dots$

Приведу готовое решение в силу важности упражнения. Пусть $\eta_l\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и $\lambda_k\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $k=1,2,\dots$ — два компактных исчерпания единицы. Тогда $\eta_1,\lambda_1,\eta_2,\lambda_2,\eta_3,\lambda_3,\dots$ — тоже компактное исчерпания единицы.

Теорема 10.1. *Пусть* $\mathcal{L} = \sum\limits_{q=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}^q}\mathcal{L}_q + \mathcal{L}_0$, *где дифференциальный оператор*

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{|\alpha'|\leqslant m_0} a_{\alpha'}\partial^{\alpha'}, \quad \alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \partial^{\alpha'} = \frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{|\alpha_n|}}, \quad |\alpha'| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

и оператор

$$\mathcal{L}_q = \sum_{|\alpha|\leqslant m_q} a_q\partial^{\alpha}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}), \quad \partial^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_{n+1}^{|\alpha_{n+1}|}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1},$$

все числа $a_{\alpha'}, a_\alpha \in \mathbb{C}$.

Предположим, что $\mathcal{L}u = f(x')\delta(x_{n+1})$ *и при этом* $u(x)$ *допускает продолжение* $u_0(x')$ *на пространстве основных функций* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, *то есть*

$$\big(u_0(x'), \varphi(x')\big) = \lim_{k\to\infty}\big(u(x), \varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big)$$

для любого компактного исчерпания единицы $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $k = 1, \ldots, n$.

Тогда $\mathcal{L}_0 u_o(x') = f(x')$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x') \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\eta_k(x_{n+1}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $k = 1, 2, \ldots$ — компактное исчерпание единицы. Имеем

$$\big(\mathcal{L}u, \varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big) = \big(f(x')\delta(x_{n+1}), \varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big).$$

Несложно заметить, что такой вот предел

$$\lim_{k\to\infty}\big(f(x')\delta(x_{n+1}), \varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x'), \varphi(x')\big)\big(\delta(x_{n+1}), \eta_k(x_{n+1})\big) = \\ = \big(f(x'), \varphi(x')\big)\lim_{k\to\infty}\eta_k(0) = \big(f(x'), \varphi(x')\big).$$

С другой стороны посчитаем предел

$$\big(\mathcal{L}u, \varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big) = \Big(u(x), \mathcal{L}^*\big(\varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big)\Big),$$

где $\mathcal{L}^* = \sum\limits_{q=1}^{N}(-1)^q\frac{\partial}{\partial x_n^q}\mathcal{L}_q^* + \mathcal{L}_0^*$ — формально сопряжённый оператор к $\mathcal{L}$, где

$$\mathcal{L}_q^* = \sum_{|\alpha|\leqslant m_q}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha\partial^\alpha, \ q = 1, \ldots, N, \quad \mathcal{L}_0^* = \sum_{|\alpha'|\leqslant m_q}(-1)^{|\alpha'|}a_{\alpha'}\partial^{\alpha'}.$$

Теперь мы можем продолжить формулу (что там за l_q и M нам совершенно не важно)

$$\big(\mathcal{L}u, \varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big) = \Big(u(x), \mathcal{L}^*\big(\varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big)\Big) = \eta_k(x_{n+1})\mathcal{L}_o^*\varphi(x') + \sum_{q=1}^{M}\frac{d^q\eta_k(x_{n+1})}{dx_n^q}\sum_{|\alpha'|\leqslant l_q}b_{\alpha'}\partial^{\alpha'}\varphi(x')$$

Здесь $b_{\alpha'} \in \mathbb{C}$, какие — совершенно не важно. Для удобства обозначим $\varphi_q(x') = \sum\limits_{|\alpha'|\leqslant l_q} b_{\alpha'}\partial^{\alpha'}\varphi(x')$. Таким образом, получим

$$\big(\mathcal{L}u(x), \varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big) = \big(u(x), \eta_k(x_{n+1})\mathcal{L}_0^*\varphi(x')\big) + \sum_{q=1}^{M}\bigg(u(x), \frac{d^q\eta_k(x_{n+1})}{dx_n^q}\varphi_q(x')\bigg).$$

При этом, очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty}\big(u(x), \eta_k(x_{n+1})\mathcal{L}_0^*(x')\big) = \big(u_0(x'), \mathcal{L}_0^*\varphi(x')\big) = \big(\mathcal{L}_0 u(x'), \varphi(x')\big),$$

равняется тому, чему нужно для нашего уравнения. В то же время для любого $q = 1, 2, \ldots, M$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}\bigg(u(x), \frac{d^q\eta_k(x_{n+1})}{dx_n^q}\varphi_q(x')\bigg) = 0.$$

Почему? Это в каком-то смысле у вас рассуждение уже встречалось, когда выписывали правило дифференцирования свёртки. Там для похожего предела надо было доказать, что предел равен нулю. В самом деле, обозначим

$$\lambda_k(x_{n+1}) = \eta_k(x_{n+1}) + \frac{d^q \eta_k(x_{n+1})}{dx_n^q}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Эти λ_k дадут компактное исчерпание единицы. Тем самым пределы от выражения на η_k и выражения на λ_k должны равняться одному и тому же.

$$\big(u_o(x'), \varphi(x')\big) = \lim_{k\to\infty} \big(u(x), \eta_k(x_{n+1})\varphi_q(x')\big) = \lim_{k\to\infty} \big(u(x), \lambda_k(x_{n+1})\varphi_q(x')\big).$$

Из этого равенства следует, что

$$\cancel{\lim_{k\to\infty} \big(u(x), \eta_k(x_{n+1})\varphi_q(x')\big)} = \cancel{\lim_{k\to\infty} \big(u(x), \eta_k(x_{n+1})\varphi(x')} + \lim_{k\to\infty} \left(u(x), \frac{d^q \eta_k(x_{n+1})}{dx_{n+1}^q}(x')\right).$$

Откуда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \left(u(x), \frac{d^q \eta_k(x_{n+1})}{dx_n^q}\varphi_q(x')\right) = 0.$$

Последнее влечёт за собой

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{q=1}^{M} \left(u(x), \frac{d^q \eta_k(x_{n+1})}{dx_{n+1}^q}\varphi_q(x')\right) = 0.$$

Поэтому будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} \big(\mathcal{L}u, \varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big) = \big(\mathcal{L}_0 u_0(x'), \varphi(x')\big).$$

Таким образом, получим

$$\big(\mathcal{L}_0 u_0(x'), \varphi(x')\big) = \big(f(x'), \varphi(x')\big)$$

или, другими словами, $\mathcal{L}u_0(x') = f(x')$, что и требовалось доказать. ■

Попробуем в качестве следствия получить фундаментельное решение оператора для $n = 2$.

10.1 Фундаментальное решение двумерного волнового оператора

Теорема 10.2. *Пусть* $\mathcal{E}_2(x,t) = \frac{\varnothing(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}$, *где* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. *Тогда*

$$\Box_a \mathcal{E}_2(x,t) = \delta(x,t), \quad \Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Другими словами, $\mathcal{E}_2(x,t)$ *является фундаментальным решением двумерного волнового оператора.*

Мы с вами знаем фундаментальное решение трёхмерного.

Доказательство. Мы знаем, что обобщённая функция

$$\mathcal{E}_3(x,t) = \frac{\varnothing(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

является фундаментальным решением трёхмерного волнового оператора, то есть

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_3}{\partial t^2} + a^2\left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_3}{\partial x_3^2}\right) = \underbrace{\delta(t)\delta(x')\delta(x_3)}_{\delta(x,t)}, \quad x' = (x_1, x_2).$$

Покажем, что $\mathcal{E}_3(x,t)$ допускает продолжение на пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, причём это продолжение как раз есть функция $\mathcal{E}_2(x',t)$, то есть вот такое соотношение нужно доказать

$$\lim_{k\to\infty} \big(\mathcal{E}_3(x,t), \eta_k(x_3)\varphi(x',t)\big) = \big(\mathcal{E}_2(x',t), \varphi(x',t)\big).$$

Действительно

$$\big(\mathcal{E}_3(x,t), \eta_k(x_3)\varphi(x',t)\big) = \left(\frac{\varnothing(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \eta_k(x_3)\varphi(x')\right) = \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{t} \int\limits_{|x|=at} \eta_k(x_3)\varphi(x',t)\, dS.$$

У нас t фиксировано, значит, φ зависит только от x'. Поэтому интеграл можно так устроить. Есть элемент поверхности сферы. Его ожно спроецировать на сечение. Как будут связаны площади dS и dS' на x и x' соответственно? $dx' = dS' = dS\cos(\nu, x_3)$, где ν — внешняя нормаль. Теперь надо сосчитать этот самый $\cos(\nu, x_3)$.

Нужно взять радиус at и $\cos(\nu, x_3) = \frac{\sqrt{a^2t^2-|x'|^2}}{at}$. И теперь я могу написать, чему равно dS

$$dS = \frac{at\,dS'}{\sqrt{a^2t^2-|x'|^2}}.$$

Интегралы по верхней половинке сферы и по нижней одинаковы. Сосчитаем один и удвоим.

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{t}\int\limits_{|x|=at}\eta_k(x_3)\varphi(x',t)\,dS = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^\infty dt \int\limits_{|x'|\leqslant at}\frac{\eta_k(x_3)\varphi(x',t)}{\sqrt{a^2t^2-|x'|^2}}\,dx' \to$$

$$\to \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^\infty dt\int\limits_{|x'|\leqslant at}\frac{\varphi(x',t)}{\sqrt{a^2t^2-|x'|^2}}\,dx' = \big(\mathcal{E}_2(x',t),\varphi(x',t)\big).$$

по теореме Лебега об ограниченной сходимости. Доказательство завершается применением предыдущей теоремы. ■

11 Задача Коши для уравнения теплопроводности

Задача Коши для уравнения теплопроводности имеет вид

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + f(x,t), & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0, a=\text{const}>0;\\ u(x,0)=u_0(x). \end{cases} \tag{11}$$

Мы будем понимать обобщённую задачу Коши, как в учебнике Владимирова, то есть решение из класса $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Но всё началось с классической задачи.

Определение 11.1. *Обозначим за $\mathfrak{M}$ множество измеримых функций f, таких, что во-первых,*

$$\forall\, T>0 \quad f\in\mathcal{L}_\infty\big(\mathbb{R}^N\times[0,T]\big),$$

и при этом $f=0$ почти всюду на промежутке $\mathbb{R}^n\times(-\infty,0)$

То есть множеством определения является $\mathbb{R}^{n+1}$, они существенно ограничены на любом ограниченном промежутке справа от нуля и эквивалентны нулевой функции на отрицательной полуоси по последнему аргументу.

Сколько нужно гладкостей для решения? Нужно диффререцировать по иксам, по t, и нужно выполнение равенства $u(x,0)=u_0(x)$. Вроде бы этого достаточно. Но тут есть такая деталь. В тридцатые годы академик Тихонов заметил, что если рассмотреть задачу $u_t=\Delta u$ и $u(x,0)=0$, то ноль очевидно решение. Но ведь есть и ещё решения нетривиальные. Физически эта ситуация абсурдна, ведь такая задача описывает нагревания бесконечно длинного стержня. Получается, что и без источника тепла стержень может нагреться. Тихонов обратил на это внимание. Как преодолеть эту ситуацию? Мы не будем ловить точность. Мы будем использовать класс $\mathfrak{M}$, его достаточно. Ещё, мы потребуем немножно уже класс дифференцирования.

Определение 11.2. *Классическим решением задачи Коши 11 называется функция*[1]

$$u\in M\cap C^2\big(\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\big)\cap C\big(\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\big),$$

такая что выполнено[2] (11).

Мы хотим доказывать существование и единственность решения. Это удобнее делать для обобщённых решений. Мы сначала всё для них сделаем, а потом покажем, как это связано с классическими решениями.

Пусть в (11) $u\in C^{2,1}\big(\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\big)\cap C\big(\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\big)$ (два раза дифференцируема по x, один раз по t), $f\in C\big(\mathbb{R}^n\cap(0,\infty)\big)$, $u_0\in C(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$\widetilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & x\in\mathbb{R}^n,\ t\geqslant 0\\ 0 & ,x\in\mathbb{R}^n, t<0. \end{cases}$$

[1] По t избыточное требование на дифференцируемость. Но мы будем пользоваться такой устоявшейся подстановкой. Здесь следует обратить внимание, что дифференцируемость требудется на открытом множестве.

[2] В классическом смысле дифференцирования, как вас учили на первом курсе.

И подставим $\widetilde{u}$ в уравнение, производя обобщённое дифференцирование. Для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ имеем

$$(\widetilde{u}_t - a^2\Delta\widetilde{u}, \varphi) = (\widetilde{u}, -\varphi_t - a^2\Delta\varphi) = -\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \widetilde{u}\,\varphi_t\,dx\,dt - a^2\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \widetilde{u}\Delta\varphi\,dx\,dt =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^\infty u\,\varphi_t\,dt\,dx - a^2\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n} u\,\Delta\varphi\,dx\,dt = \text{Формула у нас такая } \int\limits_a^b h'\,g\,dt = fg\big|_a^b - \int\limits_a^b f\,g'\,dt$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(u(x,0)\,\varphi(x,0) + \int\limits_0^\infty u_t\,\varphi\,dt\right)dx - a^2\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta u\,\varphi\,dx\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx + \int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n}\underbrace{(u_t - a^2\Delta u)}_{=f}\varphi\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx + \int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\,\varphi(x,t)\,dx\,dt =$$

запишем это через прямое произведение обощённых функций $u_0(x), \delta(t)$.

$$= \big(u_0(x)\delta(t), \varphi(x,t)\big) + +\big(\widetilde{f}(x,t), \varphi(x,t)\big)$$

где $\widetilde{f}$ — локально суммируемая функция, определённая формулой

$$\widetilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n,\ t \geqslant 0; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t < 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\widetilde{u}_t - a^2\Delta\widetilde{u} = \widetilde{f}(x,t) + u_0(x)\,\delta(t). \tag{12}$$

Вот, что получается из классического решения. Теперь всё готово для того, чтобы дать определение обобщённого решения.

Определение 11.3. *Обобщённым решением задачи Коши (11) называется функция $\widetilde{u} \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющая соотношению (12). При этом мы предполагаем, что $\widetilde{f} \in \mathfrak{M}$ и $u_0 \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Найти решение уравнения (12) нам проще, чем решить задачу Коши. Там надо было искать определённый класс гладкости, смотреть, что выполнено начальное условие, ещё были другие требования. Здесь у нас только одно уравнение. Оказывается, что в таком классе решения, если существуют, то единственные. Спрашивается, при каких условиях? Вот при тех, которые мы написали

- $\widetilde{u} \in \mathfrak{M}$;
- $\widetilde{f} \in \mathfrak{M}$;
- $u_0 \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Как показать это? У нас метод один: взять фундаментальное решение, доказать, что существует свёртка. Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 11.1. *Пусть*

- $\widetilde{f} \in \mathfrak{M}$;
- $u_0 \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Тогда обобщённая задача Коши имеет, причём единственное, решение $\widetilde{u} \in \mathfrak{M}$. Более того, мы можем написать даже формулу, которая позволяет сосчитать обобщённое решение: формула Пуассона

$$\widetilde{u}(x,t) = \theta(t)\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\xi,\tau)}{2\,a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\,a^2(t-\tau)}}\,d\xi\,d\tau + \frac{\theta(t)}{(2\,a\sqrt{\pi}t)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi)\,e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\,a^2\,t}}\,d\xi. \tag{13}$$

Обратите внимание, что все интегралы здесь корректно определены. В любой конечной полосе по t функции f ограничены, значит, первый интеграл сходится.

Доказательство. Покажем, что существует свёртка $\widetilde{u}$

$$\mathcal{E}(x,t) \star \big(\widetilde{f}(x,t) + u_0(x)\,\delta(t)\big),$$

где

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2\,a\sqrt{\pi\,t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4\,a^2\,t}}$$

есть фундаментальное решение уравнения (или, можно сказать, оператора) теплопроводности.

В самом деле, пусть $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+2})$, $k = 1, 2, \ldots$ — компактное исчерпание единицы. Имеем $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\lim_{k\to\infty} \Big(\mathcal{E}(x,t)\big(\widetilde{f}(\xi,\tau) + \widetilde{u}_0(\xi)\,\delta(\tau)\big), \varphi(x+\xi, t+\tau)\,\eta_k(x,t,\xi,\tau)\Big) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \big(\mathcal{E}(x,t)\widetilde{f}(\xi,\tau), \varphi(x+\xi,t+\tau)\eta_k(x,t,\xi,\tau)\big) + \lim_{k\to\infty} \big(\mathcal{E}(x,t)\,\widetilde{u}_0(\xi)\,\delta(\tau), \varphi(x+\xi,t+\tau)\eta_k(x,t,\xi,\tau)\big).$$

Заметим, что $\widetilde{f}$ локально суммируемая функция. Значит, следующую скобку можем заменить на интеграл.

$$\big(\mathcal{E}(x,t)\widetilde{f}(\xi\tau), \varphi(x+\xi,t+\tau)\eta_k(x,t,\xi,\tau)\big) =$$
$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x,t)\widetilde{f}(\xi,\tau)\varphi(\underbrace{x+\xi}_{y}, \underbrace{t+\tau}_{s})\eta_k(x,t,\xi,\tau)\,dx\,\xi\,dt\,d\tau =$$

$x = y - \xi$, $t = s - \tau$ — простейшая линейная замена. Каждый модуль якобиана единица.

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \mathcal{E}(y-\xi, s-\tau)\widetilde{f}(\xi,\tau)\varphi(y,s)\eta_k(y-\xi,s-\tau,\xi,\tau)\,ds\,d\tau\,dy\,d\xi =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{\theta(s-\tau)e^{-\frac{|y-\xi|}{4\,a^2(s-\tau)}}}{(2\,a\,sqrt\pi(s-\tau))^n}\widetilde{f}(\xi,\tau)\varphi(y,s)\eta_k(y-\xi,s-\tau,\xi,\tau)\,ds\,d\tau\,dy\,d\xi =$$

Может ли $s > \tau$? там мы интегрируем ноль

$$=$$

■