Уравнения в частных производных

1 6 октября 2014

1.1 Прямое произведение двух обобщённых функций

В прошлый раз раз мы с вами обсуждали теорему о конечном порядке сингулярности.

Нам понадобится ещё одно понятие: прямое произведение двух функций. Ещё иногда его называют тензорным произведением. Вот тут мы не про тензоры говорим, а про функции — это такой вырожденный тензор. В чём смысл прямого произведения: берёте функцию $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, другую $\mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, перемножаете, получаете функцию $m+n$ переменных.

Пусть $f \in \mathbb{C}^\infty(F)$, $g \in C^\infty(G)$, где $F \subset \mathbb{R}^n$ — открытое непустое множество, $G \subset \mathbb{R}^m$ — открытое непустое множество. Тогда просто построим вот такую вот функцию:

$$(x_1, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{m+n}) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_{n+m}).$$

Называем её прямым произведением f и g. Как мы её обозначаем, чтобы показать, что это всё-таки что-то новое: fg, $f \cdot g$ или $f \otimes g$. Это $F \times G \to \mathbb{C}$.

Мы знаем, что C^∞ вкладывается в D'. Так что ничего нового не должно происходить. Будем понимать $f \in C^\infty(F)$ и $g \in C^\infty(G)$ как обобщённые функции из $D'(F)$ и $D'(G)$. Что это означает? Возьмём прямое произведение $fg \in C^\infty(F \times G)$ и применим к $\varphi \in D(F \times G)$.

$$\big(f(x)g(y), \varphi(x,y)\big) = \int\limits_{F \times G} f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_F \int\limits_G f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dy\,dx = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big).$$

Это на самом деле уже готовая формула для определения прямого произведения.

Определение 1.1. *Прямым произведением обобщённых функций $f(x) \in D'(F)$ и $g(y) \in D'(G)$ называется обобщённая функция $f(x)g(y)$ (сохраняем символ аргумента, хотя понимаем, что это не бесконечно гладкие функции), такая, что*

$$\forall\ \varphi(x,y) \in D(F \times G) \quad \big(f(x)g(y), \varphi(x,y)\big) = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big).$$

При каждом x сначала получаем $\big(g(y), \varphi(x,y)\big)$. Понятно, что это бесконечно гладкая функция, понятно, что у неё гладкий носитель; по теореме из конца прошлой лекции знаем, что $\big(g(y), \varphi(x,y)\big) \in D(F)$. Непонятно, почему при этом получится непрерывная в севенциальном смысле функция; линейность действительна, нет сомнений. Нужно же показать, что если $\varphi_k \to \varphi$, то всё вот это $\big(f(x)g(y), \varphi_k(x,y)\big) \to \big(f(x)g(y), \varphi(x,y)\big)$. Не знаю, насколько для вас это очевидно, поэтому давайте на этом остановимся.

Итак, очевидно, что $f(x)g(y)$ — линейная функция. Покажем, что $f(x)g(y)$ непрерывный в $D(F \times G)$ функционал. В самом деле, пусть $\varphi_k(x,y) \to \varphi(x,y)$ в $D(F \times G)$ при $k \to \infty$, то есть

(1) Существует компакт $H \subset F \times G \colon \forall\ k \in \mathbb{N} \quad \operatorname{supp} \varphi_k \subset H$;

(2) $\forall\ m \quad \|\varphi_k - \varphi\|_{C^m(F \times G)} \to 0$ при $k \to \infty$.

Тогда $\big(g(y), \varphi_k(\cdot, y)\big) \to \big(g(y), \varphi(\cdot, y)\big)$ в норме $C^m(F)$ при $k \to \infty$ для всех $m \geqslant 0$.

Другими словами, для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (я уже могу дифференцировать по параметру)

$$\partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi_k(x,y)\big) \to \partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi(x,y)\big)$$

равномерно по $x \in F$.

Вот теперь можем дифференцировать по параметру. Имеем,

$$\partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi_k(x,y)\big) = \big(g(y), \partial_x^\alpha \varphi_k(x,y)\big), \qquad \partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi(x,y)\big) = \big(g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\big).$$

Ну а теперь возьмём разность.

$$\Big|\partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi_k(x,y)\big) - \partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big| = \Big|\big(g(y), \partial_x^\alpha \varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\big)\Big|.$$

Дальше мы знаем, что носитель разности $\partial_x^\alpha \varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha \varphi(x,y)$ лежит в некотором компакте. Поэтому я могу записать, что всё это равно

$$\Big|\Big(g(y), \eta(y)\big(\partial_x^\alpha \varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\big)\Big)\Big|,$$

где $\eta \in D(G)$ и при этом $\eta \equiv 1$ в окрестности проекции H на G. Ничего не изменилось от такого домножения, но мне это даёт возможность написать следующее. Таким образом,

$$\left|\partial_x^\alpha\big(g(y), \varphi_k(x,y)\big) - \partial_x^\alpha\big(g(y), \varphi(x,y)\big)\right| = \left|\big(g(y)\eta(y), \partial_x^\alpha \varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\big)\right|,$$

где $g(y)\eta(y)$ — обобщённая функция с компактным носителем. А раз так, то я могу написать, что всё это не превосходит

$$\leqslant A\big\|\partial_x^\alpha \varphi_k(x,\cdot) - \partial_x^\alpha \varphi(x,\cdot)\big\|_{C^N(G)} \leqslant A\|\varphi_k - \varphi\|_{C^{N+|\alpha|}(F\times G)} \to 0. \quad (k \to \infty.)$$

Дальше я должен показать, что есть компакт, где лежат все носители. Очевидно, что $\operatorname{supp}\big(g(y), \varphi_k(\cdot,y)\big)$ есть подмножество проекции H на F.

Тем самым, $\big(g(y), \varphi_k(\cdot,y)\big) \to \big(g(y), \varphi(\cdot,y)\big)$ в $D(F)$ при $k \to \infty$, поэтому ввиду непрерывности $f(x)$ будем иметь

$$\Big(f(x), \big(g(y), \varphi_k(x,y)\big)\Big) \to \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big),$$

то есть $f(x)g(y)$ непрерывный функционал на $D(F \times G)$.

Всё очень просто. Надо только воспользоваться неравенством из компактности носителя.

1.2 Коммутативность прямого произведения обобщённых функций

Когда писали прямое произведение двух бесконечно гладких функций, воспользовались теоремой Фубини. Могли бы интегрировать в другом порядке и результат интегрирования не изменился. А для обобщённых функций порядок важен?

Теорема 1.1. *Пусть $f(x) \in D'(F)$, $g(y) \in D'(G)$, а $\varphi \in D(F \times G)$. Тогда*

$$\Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big) = \Big(g(x), \big(f(y), \varphi(x,y)\big)\Big).$$

Вообще прямое произведение не коммутативно по своей природе. А у нас получилось коммутативное — частный случай. У нас в определении прямого произведения обобщённых функций есть некоторый произвол — вот о чём теорема.

Доказательство. Если бы $\varphi(x,y) = \psi_1(x)\cdot\psi_2(y)$, всё очевидно. А как в общем случае сделать? Любую функцию φ разложим, так сказать, в ряд. Любую функцию $\varphi \in D(F \times G)$ можно разложить в ряд

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\varphi_k(y),$$

где $\varphi_k \in D(F)$, $\varphi_k \in D(G)$, $k = 1, 2, \ldots$

Так всегда можно сделать. Надо только понять как. Мне приходит в голову разложить в ряд фурье, по каким-то экспонентам разложить. Коэффициенты очень быстро сходится к нулю у бесконечно гладких функций. Мне нужна сходимость $C^N(F \times G)$. Коэффициенты убывают быстрее любой степени, получу всё как надо. Идея понятна, а сейчас я это напишу.

1. Разложим $\varphi(x,y)$ в ряд Фурье
$$\varphi(x,y) = \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp} e^{isx} e^{ipy}.$$

   Мы можем выбрать достаточно большой куб размерности $m+n$, которому будет принадлежать $F \times G$. Разнесём этот куб по $\mathbb{R}^{m+n}$, доопределив φ до периодической. Нам хочется, чтобы ребро куба было 2π. Поэтому делаем такую приписку. Считаем без ограничения общности $F \times G \subset (-\pi, \pi)^{n+m}$.

   Ввиду того, что φ бесконечно гладкая функция, будем иметь
$$\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} |c_{sp}|(1 + |s| + |p|)^N < +\infty \quad \forall\ N \in \mathbb{N}.$$

2. Возьмём $\eta \in D(F)$[1], $\lambda \in D(G)$, такие, что $\eta \equiv 1$ на проекции $\operatorname{supp}\varphi$ на F, $\lambda \equiv 1$ на проекции $\operatorname{supp}\varphi$ на G. Тогда, очевидно, получим
$$\eta(x)\lambda(y)\varphi(x,y) \equiv \varphi(x,y).$$

[1] D и C_0^∞, кстати, одно и то же.

При этом весь ряд можно написать вот так вот, смотрите (слева и справа умножили на бесконечно гладкую функцию)

$$\varphi(x,y) = \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp} e^{isx}\eta(x)e^{ipy}\lambda(y).$$

Заметим, что ряд $\sum\limits_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp}e^{isx}e^{ipy}$ сходится к функции $\varphi(x,y)$ в пространстве $C^N(F\times G)$ для любого N ввиду бесконечной гладкости φ. Таким образом, $\sum\limits_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp}e^{isx}\eta(x)e^{ipy}\lambda(y)$ сходится к $\varphi\equiv\eta(x)\lambda(y)\varphi$ в пространстве $C^N(F\times G)$ для любого N. Ну и всё, сходимость у нас есть, какая нужно.

Тем самым вот этот вот ряд $\sum\limits_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp}e^{isx}\eta(x)e^{ipy}\lambda(y)$ сходится к $\varphi(x,y)$ в пространстве $D(F\times G)$ (частичные суммы ряда образуют сходящуюся последовательность). Перенумеруем члены этого ряда. Получим

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\varphi_k(y),\quad \varphi_k(x)\rightleftharpoons e^{isx}\eta(x)c_{sp},\quad \psi_k(y)\rightleftharpoons e^{ipy}\lambda(y).$$

Имеем

$$\Big(f(x),\big(g(y),\sum_{k=1}^N\varphi_k\psi_k\big)\Big) = \sum_{k=1}^N\big(f(x),\varphi_k(x)\big)\big(g(y),\psi_k(y)\big).$$

Аналогично

$$\Big(g(y),\big(f(x),\sum_{k=1}^N\varphi_k\psi_k\big)\Big) = \sum_{k=1}^N\big(g(y),\psi_k(y)\big)\big(f(x),\varphi_k(x)\big).$$

То есть для всех k

$$\Big(f(x),\big(g(y),\sum_{k=1}^N\varphi_k\psi_k\big)\Big) = \Big(g(y),\big(f(x),\sum_{k=1}^N\varphi_k\psi_k\big)\Big).$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$ получим

$$\Big(f(x),\big(g(y),\varphi(x,y)\big)\Big) = \Big(g(x),\big(f(y),\varphi(x,y)\big)\Big).$$

∎

Упражнение 1.1. *Почему предел существует? (Из непрерывности прямого произведения.)*

2 13 октября 2014

На чём мы остановились. Доказали теорему о конечном порядке сингулярности обобщённой функции с компактном носителем. Доказали коммутативность прямого произведения.

2.1 Свёртка обобщённой функции

Я напомню, что такое свёртка двух функций в пространстве $L_1(\in\mathbb{R}^n)$. Пусть $f,g\in L_1(\mathbb{R}^n)$ (пока просто считайте, что это функции, интегрируемые по Риману). Что называется свёрткой?

$$f\star g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\underbrace{x-y}_{\xi})g(\underbrace{y}_{x-\xi})\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Я всегда забываю $x-y$ или $y-x$, но вот есть способ себя проверить: $f\star g = f\star y$.

Что замечательно в пространстве L_1? Это свёрточная алгебра. Там естественно есть структура линейного пространства.

Давайте попробуем посчитать (есть такая теорема, называется Фубини)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} = \big|f\star g(x)\big|\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy\Big| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big|f(x-y)\big|\big|g(y)\big|\,dy.$$

Как работают с интегралом Лебега. Рассматривают фундаментальные последовательности ступенчатых функций. Они сходятся к измеримым функциям. Норма определяется так: берёте интеграл Лебега от модуля функции. Существует предел интегралов ступенчатых функций, этот предел называют интегралом Лебега. Что я хочу сказать: если функция интегрируема по Лебегу, то её модуль интегрируем, поэтому наш интеграл слева существует. И есть такая теорема, что модуль интеграла не превосходит интеграла модуля.

А что такое теорема Фубини: есть функция двух векторных переменных, тогда можно кратный интеграл считать как повторный. Что у нас получается:

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} dy\big|g(y)\big| \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|f(x-y)\big|\,dx}_{\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|f(\xi)\right|d\xi} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|g(y)\big|, dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|f(\xi)\big|\,d\xi = \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Тем самым мы утверждаем, что

$$\|f \star g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

И интеграл от свёртки поэтому существует. Мы сразу двух зайцев убили: из теоремы Фубини показали и что свёртка существует и что она суммируема.

Как поступать с обобщёнными функциями? Мы знаем, что $L_1(\mathbb{R}^n)$ вкладывается в $D'(\mathbb{R}^n)$. Будем понимать $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ как обобщённые функции из $D'(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{cases} f\colon \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\varphi\,dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n); \\ g\colon \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} g\varphi\,dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n); \end{cases}$$

При этом

$$f \star g\colon \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \star g\varphi\,dx, \qquad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Что бы нам сделать, чтобы угадать определение для обобщённой функции? Делать какие-то замены.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f \star g(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\varphi(x)\,dy\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)g(y)\varphi(\xi+y)\,dy\,d\xi.$$

Последнее похоже на действите прямого произведение на функцию, но это не так. Всё же $\varphi(\xi+y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, но не имеет компактного носителя. Действительно $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$, значит, $-A \leqslant \xi + y \leqslant A$ — диагональная полоса, это не компактное множество.

Как нам, собственно говоря, выйти из положения? Введём понятие.

Определение 2.1. *Компактным исчерпанием единицы в $\mathbb{R}^m$ называется последовательность функций*

$$\eta_k \in D(\mathbb{R}^m),\ k = 1, 2, \ldots,$$

таких, что выполнены два свойства:

(1) Для любого компакта $H \subset \mathbb{R}^m$ $\exists\ k_0\colon \forall\ k > k_0$ $\eta_k\big|_H = 1$;

(2) $\forall\ s$ $\exists A\colon \forall\ k$ $\|\eta_k\|_{C^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant A$.

Естественный вопрос: существует ли хоть одна такая последовательность? Оказывается существует. Пусть $\eta \in D(B_1)$, такая, что $\eta\big|_{B_{\frac{1}{2}}} = 1$. Положим

$$\eta_k(x) = \eta\left(\frac{x}{k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Первое свойство, очевидно, выполнено. Второе:

$$\partial_x^\alpha \eta_k(x) = \frac{1}{k^{|\alpha|}}\partial_\xi^\alpha \eta(x)\big|_{\xi = \frac{x}{k}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

А теперь мы готовы написать определение свёртки обобщённой функции.

Определение 2.2. *Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$. Говорим, что существует свёртка $f \star g$, если $\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $\forall$ компактного исчерпания единицы $\nu_k \in D(\mathbb{R}^{2n})$ существует предел*

$$(f \star g, \varphi) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big).$$

Почему это хорошо? Почему, если $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то получим то же самое? Какое выражение получится:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)g(y)\eta_k(\xi, y)\varphi(\xi + y)\,dy\,d\xi.$$

На любом компакте к какого-то номера последовательность стабилизируется. Поэтому можем применить теорему об ограниченной сходимости (это вы тоже скоро узнаете: все функции ограничены сверху, почти всюду функции сходятся к некоей, тогда интеграл последовательности будет сходиться к интегралу предела). Получится, что в пределе нужный интеграл и будет.

Так мы видим, что определение подходит. Оно не даёт ничего нового для L_1.

Есть вопросы к самому определению. Зависит ли предел от выбора компактного исчерпания?

Упражнение 2.1. *Покажите, что предел не зависит от компактного исчерпания.*

Это утверждение тривиально. По сути оно содержит в себе корректность определение свёртки. Сделаю вам одну подсказку. Есть два компактных исчерпания единицы η_k, λ_k. Перемешаю: $\eta_1, \lambda_1, \eta_2, \lambda_2, \ldots$

Есть вопрос ещё вот какой: почему в результате получится обобщённая функция? Предел есть, функция получается линейная относительно φ. Вопрос с непрерывностью. Если последовательность обобщённой функции сходится слабо, то предел — обобщённая функция. Мы это сейчас сформулируем без доказательства (можно прочитать у Шилова, оно громоздкое).

Определение 2.3. *Говорят, что последовательность обобщённых функций $f_k \in D'(\Omega)$ слабо сходится к $f\colon D(\Omega) \to \mathbb{C}$, если*

$$\forall\ \varphi \in D(\Omega) \quad (f_k, \varphi) \to (f, \varphi).$$

Можно придумать и другие сходимости, но естественной является именно слабая.

Теорема 2.1 (о полноте $D(\Omega)$ относительно слабой сходимости)**.** *Пусть $f_k \in D'(\Omega)$ слабо сходится к $f\colon F(\Omega) \to \mathbb{C}$ при $k \to \infty$. Тогда $f \in D'(\Omega)$.*

Доказывать не будем. Доказательво, к сожалению, достаточно громозкое. В Шилове доказательство, обратите вниманиме, страницах наверное на пяти. Меня извиняет, что Владимиров тоже так делает: даёт эту теорему без доказательства.

Упражнение 2.2. *Покажите, что $\varphi \mapsto \big(f(x)g(y), \nu_k(x, y)\varphi(x + y)\big)$ является линейным непрерывным функционалом в $D(\mathbb{R}^n)$.*

Решение писать не буду, потому что оно тривиально. Хотя первое тоже было тривиально.

Прямое произведение всегда существует, а вот свёртка существует на для всех пар функций. Можно даже пару из $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ (суммируемые на каждом компакте) взять. Единицу с единицей мы не свернём.

Какие свойства есть у классической свёртки? Коммутативность. Это действительно так. Мы это сформулируем в виде теоремы небольшой.

Теорема 2.2 (коммутативность свёртки)**.** *Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$: существует свёртка $f \star g$. Тогда $\exists$ свёртка $g \star f = f \star g$.*

Доказательство. Пусть $\eta_k \in D(\mathbb{R}^{2n})$ — некоторое компактное исчерпание. Имеем

$$\big(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big) = \Big(f(x), \big(g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big)\Big) = \Big(g(y), \big(f(x), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big)\Big).$$

■

3 20 октября 2014

3.1 Свёртка с обобщённой функцией, имеющей компактный носитель

Теперь такое утверждение будет. Что у нас получится, если одна из компонент свёртки имеет компактный носитель.

Теорема 3.1. *Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$, причём $\operatorname{supp} f$ — компакт. Тогда всёртка $f \star g$ существует, причём*

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (f \star g, \varphi) = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x + y)\big)\Big) = \Big(g(y), \big(f(x), \varphi(x + y)\big)\Big). \tag{1}$$

Обратите внимание, что самая правая часть формулы устроена каким образом: функцию f применяете к $\varphi(x + y)$. Если y фиксирована, то φ уже имеет компактный носитель, тут всё понятно. А то, что получается, является бесконечно гладкой функцией, но почему это будет с компактным носителем — вот в чём вопрос. Дальше $g(y)$ применяем к бесконечно гладкой функции, а должны применять к функции с компактным носителем.

Как обобщённую функцию с компакным носителем доопределить на всё $\mathbb{R}^n$? Находим $\sigma \in D(\mathbb{R}^n)$: $\sigma = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} f$, и $\forall\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (f, \psi) := (f, \sigma\psi)$. Тогда мы распространили $f\colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. Корректно ли? Проверим

$$\forall\ \psi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (f, \psi) = (f\sigma, \psi) = (f, \sigma\psi).$$

Если есть две такие σ_1, σ_2, то $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ в окрестности носителя f. Значит, от выбора σ выражение не зависит.

Тогда почему в (1) проблем нет? Потому что у f компактный носитель и $g(y)$ применяется к функции с компактным носителем.

Доказательство. Рассмотрим компактное исчерпание единицы $\eta_k(x, y) \in D(\mathbb{R}^{2n})$, $k = 1, 2, \ldots$ Имеем

$$\big(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big).$$

Вот если у неё предел есть, то свёртка существует. Предела нет — не существует. Напишем вот в таком силе

$$= \Big(f(x), \big(g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big)\Big)$$

Вспомним, что f с компактным носителем, а σ равна единице в окрестности носителя f

$$= \Big(f(x)\sigma(x), \big(g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big)\Big) =$$

По определению умножения обобщённой функции на бесконечно гладкую

$$= \Big(f(x), \sigma(x)\big(g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big)\Big) =$$

А дальше по линейности функционала $g(y)$.

$$= \Big(f(x), \Big(g(y)\eta_k(x, y)\underbrace{\sigma(x)\varphi(x + y)}_{\in D(\mathbb{R}^{2n})}\Big)\Big)$$

Если x большое, то σ обнулится, если y большое, но x небольшое, то $x + y$ большое, тогда φ обнулится. И всё это равняется вот такому вот выражению

$$= \Big(f(x), \big(g(y), \sigma(x)\varphi(x + y)\big)\Big),$$

если k такое, что $\eta_k\big|_{\operatorname{supp}\sigma(x)\varphi(x+y)} = 1$. Ввиду того, что η_k — компактное исчерпание единицы, для любого компакта нужное k найдётся. Предел существует просто потому, что стабилизировалась последовательность.

Таким образом,

$$\exists\, k_0 \colon \forall\, k \geqslant k_0 \quad \big(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big) = \Big(f(x), \big(g(y), \sigma(x)\varphi(x + y)\big)\Big) =$$
$$= \Big(\underbrace{f(x)\sigma(x)}_{f(x)}, \big(g(y), \varphi(x + y)\big)\Big) = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x + y)\big)\Big),$$

поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \big(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big) = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x + y)\big)\Big)$.

А теперь надо показать, что второе равенство тоже имеет местро. Ну понятно почему: очевидно, что

$$\Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x + y)\big)\Big) = \Big(f(x)\sigma(x), \big(g(y), \varphi(x + y)\big)\Big) = \Big(f(x), \big(g(y), \sigma(x)\varphi(x + y)\big)\Big) \overset{1.1}{=}$$
$$= \Big(g(y), \big(f(x)\sigma(x), \varphi(x + y)\big)\Big) = \Big(g(y), \big(f(x), \varphi(x + y)\big)\Big).$$

■

В качестве примера мы возьмём δ-функцию. У неё компактный носитель множество из одной точки. Пусть $f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Тогда (напишем сперва ответ)

$$f(x) \star \delta(x) = f(x).$$

В самом деле, $\forall\, \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\big(f(x) \star \delta(x), \varphi(x)\big) = \Big(f(x), \big(\delta(y), \varphi(x + y)\big)\Big) = \big(f(x), \varphi(x)\big).$$

Когда у обобщённой функции носитель компакт, её можно применять к любой бесконечно гладкой, не обязательно имеющей компактный носитель.

3.2 Дифференция свёртки

Теорема 3.2. *Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$, такие, что существует свёртки $f \star g$. Тогда существуют свёртки $\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g$, $f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$ и при этом*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \star g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \star g = f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Есть такие студенты, которые скажут: вы тут описались, надо было плюс поставить. Нет, не описался.

Обратное, очевидно, неверно: не факт, что если есть свёртки $\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g$, $\star \frac{\partial g}{\partial x_i}$, то существует $f \star g$. Простой пример: функции из L^1_{loc}.

Доказательство. Для начала напишу определение производной. Для любой $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, для любого компактного исчерпания единицы $\eta_k \in D(\mathbb{R}^{2n})$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f \star g), \varphi\right) = -\left(f \star g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right).$$

Это с одной стороны. А теперь другую сторону равенства хотим переписать в таком же виде. Хотим показать, что существует предел

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g, \varphi\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right),$$

причём

$$-\lim_{k\to\infty}\left(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right).$$

Вот для этого разберёмся, в чём разница в выражениях под знаком предела. В самом деле

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right) \stackrel{1.1}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \left(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) =$$
$$-\left(f(x), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) = -\left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right)\right) =$$
$$-\left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial \eta_k(x,y)}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right)\right) - \left(f(x), \left(g(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_i}\right)\right).$$

Покажем, что предел от первого слагаемого есть ноль, то есть

$$\lim_{k\to\infty}\left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial \eta_k(x,y)}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right)\right). \tag{2}$$

Догадаться, чем воспользоваться очень непросто. Обычно начинают какие-то оценки писать, и ничего не получается. Нужно построить новое компактное исчерпание единицы. Положим $\lambda_k(x,y) = \eta_k(x,y) + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}(x,y)$, $k = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что $\lambda_k(x,y)$ также будет компактным исчерпанием единицы. Предел о определении свёртки не зависит от выбора компактного исчерпания единицы

$$\lim_{k\to\infty}\left(f(x), \left(g(y), \lambda_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) = \lim_{\to k}\infty\left(f(x), \left(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right).$$

Однако

$$\left(f(x), \left(g(y), \lambda_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) = \left(f(x), \left(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) + \left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial \eta_k(x,y)}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right)\right).$$

Откуда следует (2).

Ввиду (Я) соотношение (Ы) влечёт за собой (ЯЯ). Соотношение (ЯЯ) в свою очередь означает, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f \star g), \varphi\right) = -\left(f \star g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x+y)\right) =$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g, \varphi\right).$$

Другими словами, свёртка $\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g$ существует и при этом

$$\frac{\partial f \star g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \star g.$$

Последнее ввиду коммутативности свёртки позволяет утверждать, что существует также $f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$, причём $\frac{\partial (f\star g)}{\partial x_i} = f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$. Что и требовалось доказать. ■

3.3 Теорема существования и теорема единственности

Пусть $\mathcal{L} = \sum\limits_{|a|\leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \ldots \partial x^{\alpha_n}}$.

Определение 3.1. *$\mathcal{E}(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$ называется фундаменальным решением оператора $\mathcal{L}$, если $\mathcal{L}\mathcal{E} = \delta(x)$.*

В качестве примера возьмём $\mathcal{L} = \frac{d}{dx}$. Тогда $\mathcal{E}(x) = \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ — фундаментальное решение $\mathcal{L}$. В самом деле, имеем, $\theta'(x) = \delta(x)$.

У нас осталось пять минут. Ровно столько, сколько нужно, чтобы доказать две теоремы.

Теорема 3.3. *Пусть $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$, такая, что существует свёртка $u = f \star \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}(x)$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{L}u = f$.*

Доказательство. Имеем $\mathcal{L}u = \mathcal{L}(f \star \mathcal{E}) = f \star \mathcal{L}\mathcal{E} = f \star \delta = f$. Ведь у свёртки можно дифференцировать только одну компоненту. ■

Теорема 3.4. *Пусть $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ — решение уравнения $\mathcal{L}u = f$, такое, что существует свёртка $u \star \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$. Тогда $u = f \star \mathcal{E}$.*

Доказательство. Имеем $\mathcal{L}(u \star \mathcal{E}) = u \star \mathcal{L}\mathcal{E} = u \star \delta = u$. С другой стороны

$$\mathcal{L}(u \star \mathcal{E}) = \mathcal{L}u \star \mathcal{E} = f \star \mathcal{E} \Rightarrow u = f \star \mathcal{E}.$$

Я на две минуты вас обманул всего. ■

4 Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

В качестве $\mathcal{L}$ возьмём такой дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0. \quad a_s \in \mathbb{C},\ s = 0, 1, \ldots, m-1.$$

А задача Коши формулируется так:

$$\mathcal{L}w = f(x), \quad w(0) = w_0, \ldots, w^{(n-1)}(0) = w_{n-1}, \quad w_s \in \mathbb{C},\ s = 0, 1 \ldots, m-1.$$

Для простоты будем считать, что $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Вы знаете из курса ОДУ, что у этой задачи имеется единственное решение. Коэффициенты не обязательно для этого должны быть постоянными, но для уравнения с постоянными коэффициентами существует единственное глобальное решение, определённое по всём $\mathbb{R}$.

Обозначим

$$\widetilde{w}(x) = \begin{cases} w(x), & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}; \qquad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

И применим к $\widetilde{w}$ оператор $\mathcal{L}$. Если будете считать классическую производную, то поймёте, что в нуле это сделать нельзя. Но вы можете интерпретировать $\widetilde{w}(x)$ как обобщённую функцию, и, значит, её можно дифференцировать.

$$(\mathcal{L}\widetilde{w}, \varphi) = (w, \mathcal{L}^*\varphi),$$

где $\mathcal{L}^*$ — такой вспомогательный оператор. Как он устроен? Если вы берёте одну производную, минус вылезает:

$$\left(\frac{du}{dx}, \varphi\right) = -\left(u, \frac{d\varphi}{dx}\right)$$

Значит, $\mathcal{L}^* = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} + (-1)^{m-1} d_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$. Он называется формально сопряжённым оператором. Слово «формально» появляется, так как мы не задумываемся об области определения оператора, интересуемся лишь символической записью.

Так как $\widetilde{w} \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, то

$$(\widetilde{w}, \mathcal{L}^*\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{w}\mathcal{L}^*\varphi\, dx = \int\limits_{0}^{\infty} w\mathcal{L}^*\varphi\, dx = \sum_{s=1}^{m} (-1)^s a_s \int\limits_{0}^{\infty} w\varphi^{(s)}\, dx. \tag{3}$$

Здесь одна тонкость, s меняется от 0 до m, а старший коэффициент единица. Значит, положим $a_m = 1$.

Дальше я проделаю процедуру, называемую интегрированием по частям (учту ещё, что φ имеет компактный носитель, то есть на ∞ $\varphi = 0$)

$$\int\limits_0^\infty w\varphi^{(s)}\,dx = w\varphi^{s-1}\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty w'\varphi^{(s-1)}\,dx == -w(0)\varphi^{(s-1)}(0) - w'\varphi^{s-2}\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty w''\varphi^{s-2}\,dx =$$
$$= -w(0)\varphi^{(s-1)}(0) + w'(0)\varphi^{(s-2)}(0) + \dots + (-1)^s w^{(s-1)}(0)\varphi(0) + (-1)^s\int\limits_0^\infty s^{(s)}\varphi\,dx.$$

Теперь мы подставим всё в сумму (3) (учтём начальные условия $w^{(p)}(0) = w_p \in \mathbb{C}$)

$$(\widetilde{w}, \mathcal{L}^*\varphi) = \sum_{s=1}^m (-1)^s a_s \sum_{p=0}^{s-1}(-1)^{p+1}w^{(p)}(0)\varphi^{(s-p-1)}(0) + \int\limits_0^\infty \underbrace{\sum_{s=0}^m (-1)^s a_s w^{(s)}}_{\mathcal{L}w=f}\varphi\,dx =$$
$$= \sum_{s=1}^m\sum_{p=0}^{s-1}(-1)^{s+p+1}a_s w_p \underbrace{\varphi^{(s-p-1)}(0)}_{(-1)^{s-p-1}\left(\delta^{(s-p-1)}(x),\varphi(x)\right)} + \underbrace{\int\limits_0^\infty f\varphi\,dx}_{(\widetilde{f},\varphi)} =$$
$$= \left(\sum_{s=1}^m\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) + \widetilde{f}(x), \varphi(x)\right),$$

откуда следует, что

$$\mathcal{L}\widetilde{w} = \sum_{s=1}^m\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) + \widetilde{f}(x). \tag{4}$$

В качестве примера рассмотрим вот такое уравнение $y'' + \omega^2 y = f(x)$ с начальными условиями $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ $(\omega > 0)$. Такое уравнение колебаний с правой частью. Положим

$$\widetilde{y}(x) = \begin{cases} y(x), & x \geqslant 0,\\ 0, & x < 0.\end{cases}$$

Тогда, используя (4), получим $\widetilde{y}'' + \omega^y = \delta(x)y_1 + \delta'(x)y_0 + \widetilde{f}(x)$.

У нас была задача Коши. А мы получили одно уравнение, в которое входит всё.

4.1 Фундаментальные решения обыкновенного оператора $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентами

Теорема 4.1. *Пусть W — решение задачи Коши*

$$\mathcal{L}w = 0, \quad w(0) = 0, \dots, w^{(m-2)}(0) = 0, \ w^{(m-1)}(0) = 1.$$

Тогда $\mathcal{E}(x) = \theta(x)W(x)$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$, то есть $\mathcal{L}\mathcal{E}(x) = \delta(x)$.

Доказательство. Непосредственно следует из формулы (4). ■

В качестве примера возьмём оператор уже рассмотренного сегодня уравнения $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2$, $\omega > 0$. Рассмотрим задачу

$$w'' + \omega^2 w = 0, \quad w(0) = 0, \ w'(0) = 1.$$

Решение, как мы давно знаем, $W(x) = \frac{1}{\omega}\sin\omega x$. Фундаментальное решение

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\theta(x)}{\omega}\sin\omega x.$$

4.2 Свёрточная алгебра

Обозначим $\mathcal{A} == \left\{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{supp} f \subset [0,\infty)\right\}$.

Лемма 4.1. *Множество $\mathcal{A}$ образует коммутативную алгебру с единицей относительно свёртки и операций сложения и умножения на скаляр.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\forall\ f, g \in \mathcal{A}\ \ \exists\ f \star g \in \mathcal{A}$. Пусть η_k — компактное исчерпание единицы. Возьмём такое $\tau \in C^\infty(\mathbb{R})$, что $\tau\big|_{(-\infty,-1]} = 0$, $\tau\big|_{[-1/2,\infty)} = 1$. Положим $\tau_\varepsilon(x) = \tau\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Воспользуемся определениями свёртки и умножения обобщённой функции на бесконечно гладкую: $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\big(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big) = \big(\tau_\varepsilon(x)f(x)\tau_\varepsilon(y)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big) = \big(f(x)g(y), \underbrace{\eta_k(x,y)\tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y)}_{\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}\big) = \ldots$$

Почему просто понять, что у аргумента компактный носитель? Пусть $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$. Тогда $-A \leqslant x + y \leqslant A$. Теперь φ умножается на две функции, у которых носитель луч. А так как η_k — компактное исчерпание единицы и существует предел это выражения (последовательность стабилизируется на компактном носителе произведения $\tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y)$ с какого-то номера k.

$$\cdots = \big(f(x)g(y), \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y)\big)$$

для достаточно больших k.

Таким образом, свёртка $f \star g$ существует, причём

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \forall\ \varepsilon > 0\quad (f \star g, \varphi) = \big(f(x)g(y), \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y)\big).$$

Осталось показать, что $\operatorname{supp} f \star g \subset [0, \infty)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}\big((-\infty, 0)\big)$. Покажем, что $(f \star g, \varphi) = 0$. Для этого надо формулой воспользоваться.

$$\operatorname{supp}\varphi \subset (-\infty, 0) \Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0\colon \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y) \equiv 0.$$

Что является единицей? δ-функкия. Все функции с ней сворачиваются и результат свёртки сама функция. ■

5 17 ноября 2014

Сейчас мы напишем формулу для нахождения решения задачи Коши. В прошлый раз мы взяли решение и обрезали его, оставив только положительные значения времени. Сейчас попробуем воспользоваться теоремой существования.

Как строить фундаментальные решения я уже говорил и даже пример привёл.

Теорема 5.1. *Пусть w — решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = f(x), \\ w(0) = w_0, \\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w^{(m-1)}(0) = w_{m-1}. \end{cases} \tag{5}$$

где

$$\mathcal{L} = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dx} + a_0, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}),\ a_s \in \mathbb{R},\ s = 0, 1, 2 \ldots, m-1, \quad a_n = 1.$$

Тогда

$$w(x) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p W^{(s-p-1)}(x) + \int\limits_0^x W(x-\xi)f(\xi)\,d\xi, \tag{6}$$

где W — решение задачи Коши вот такой

$$\begin{cases} \mathcal{L}W = 0, \\ W(0) = \cdots = W^{(m-2)}(0) = 0, \\ W^{(m-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Вот такой формулой достаточно удобно пользоваться.

Доказательство. Решение существует по теореме существования и единственноси. Пусть w — решение задачи Коши (5). Обозначим $\widetilde{w}(x) = \theta(x)w(x)$, где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

И $\widetilde{f}(x) := \theta(x)f(x)$.

$$\mathcal{L}\widetilde{w} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) + \widetilde{f}(x).$$

Тогда по теореме единственности будем иметь

$$\widetilde{w}(x) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) \star \mathcal{E}(x) + f(x) \star \mathcal{E}(x),$$

где $\mathcal{E}(x) = \theta(x)W(x)$ — фундаментальное решение оператора J.

Мы знаем, что у δ-функции с любой обобщённой свёртка существует и равна

$$\delta^{(s-p-1}(x) \star \mathcal{E}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{s-p-1} \big(\delta(x) \star \mathcal{E}(x)\big) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{s-p-1} \mathcal{E}(x) = \theta(x)W^{(s-p-1)}(x),$$

так как $\mathcal{E}(x), \mathcal{E}(x), \ldots, \mathcal{E}^{(m-2)}(x)$ абсолютно непрерывны. Для чего придуманы абсолютно непрерывные функции: это в точности те функции, для которых верна формула Ньютона—Лейбница.

Мы заметим вот что. Функции $\widetilde{f}$ и $\mathcal{E}(x)$ локально интегрируемы по Лебегу. Значит, свёртку можно считать по классической формуле.

$$\widetilde{f} \star \mathcal{E}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x-\xi)\widetilde{f}(\xi)\, d\xi =$$

Теперь вспоминаем, что такое $\mathcal{E}$:

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x-\xi)W(x-\xi)\theta(\xi)f(\xi)\, d\xi = \theta(x)\int\limits_{x}^{x} W(x-\xi)f(\xi)\, d\xi.$$

$\theta(x)$ для того, чтобы в отрицательных точках точно был ноль.

$$\widetilde{w}(x) = \theta(x)\sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p W^{(s-p-1)}(x) + \theta(x)\int\limits_{0}^{x} W(x-\xi)f(\xi)\, d\xi.$$

Если $x > 0$, то последнее выражение совпадает с (6). А как с отрицательными? Покажем, что (6) имеет место и при $x < 0$. В задаче (5) сделаем замену переменных $x \rightleftharpoons -x$. Получим для $v(x) = (-1)^m w(-x)$ следующую задачу Коши

$$\begin{cases} (-1)^m \mathcal{L}^* v = f(-x), \\ v^{(P)}(0) = (-1)^{p+m} w_p, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \end{cases} \tag{7}$$

где $\widetilde{L}^* = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} + (-1)^{m-1} a_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots - a_1 \frac{d}{dx} + a_0$ — оператор, формально сопряжённый к $\mathcal{L}$. Откуда это берётся? Вот была задача для функции w $\mathcal{L}w = f(x)$. Теперь мы рассмотрели новую функцию $v(x)$. Что можно написать: $w(x) = (-1)^m v(-x)$, подставляем в задачу, что получем (надо дифференцировать функцию v, а когда мы дифференцируем сложную функцию, возникает (-1) в той же степени, что и производная, а если применять оператор, формально сопряжённый, то все эти (-1) сокращаются)

$$(-1)^m \mathcal{L}^* v(x) = \cancel{(-1)^m} \sum_{s=1}^{m} (-1)^s a_s \frac{d^s}{dx^s} \cancel{(-1)^m} w(-x) =$$

Я должен s раз профифференцировать функцию $\frac{d^s w(-x)}{dx^s} = (-1)^s \frac{d^s w(y)}{dy^s}\Big|_{y=-x}$

$$= \sum_{s=0}^{m} a_s \frac{d^s w(y)}{dy^s}\bigg|_{y=-x} = f(-x).$$

Вот и получили уравнение. А как найти условие? Это ещё проще.

$$v^{(p)}(0) = (-1)^m \frac{d^p}{dx^p} w(-x)\bigg|_{x=0} = (-1)^{m+p} w_p.$$

Собственно говоря, вот (7) и вытекает.

Очевидно, что функция $V(x) = (-1)^{m-1}W(-x)$ (это W из (6)) будет решением задачи Коши

$$\begin{cases} (-1)^m \mathcal{L}^* V = 0, \\ v(0) = \dots = v^{m-2}(0) = 0, \\ v^{m-1}(0) = 1. \end{cases}$$

Таким образом, функция $\theta(x)V(x)$ является фундаментальным решением оператора $(-1)^m\mathcal{L}^*$. Повторяя предыдущие рассуждения с заменой функции $\widetilde{w}(x)$ на $\widetilde{v}(x) = \theta(x)v(x)$ получим

$$\widetilde{v}(x) = \theta(x)\sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1}(-1)^{s+p}a_s w_p V^{(s-p-1)}(x) + \theta(x)\int\limits_0^x V(x-\xi)f(-\xi)\,d\xi.$$

При $x > 0$ из последнего выражения находим

$$(-1)^m w(-x) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1}(-1)^{s+p}a_s w_p V^{s-p-1}(x) + \int\limits_0^x (x-\xi)f(-\xi)\,d\xi.$$

Теперь надо перейти к W. Под интегралом сделаем замену $\zeta = -\xi$ и получим (6) для отрицательных аргументов функции w. ■

5.1 Фундаментальное решение оператора Лапласа

Теорема 5.2. *Пусть $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, где Ω — ограниченная область с кусочно гладкой границей. Тогда*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} f\cos(\boldsymbol{v}, x_i)\,ds,$$

где $\boldsymbol{v}$ — вектор единичной нормали к $\partial\Omega$, внешней по отношению к Ω.

Эта формула называется формулой Грина.

Доказательство. В общей формуле Стокса (см. Диф. геом.)

$$\int\limits_{\partial\Omega} \omega = \int\limits_\Omega d\omega$$

положим $\omega = (-1)^{i-1}f(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^m$. ■ Здесь происходит состыковка строгой математики и нестрогой. Если нужно что-то посчитать, нагляднее пользоваться косинусами. Если же надо что-то доказывать, то пользуемся дифференциальной геометрией.

Из этой теоемы есть замечательное следствие, а именно формула Грина интегрирования по частям

Теорема 5.3. *Пусть $f, g \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, Ω — ограниченная область с кусочно гладкой границей. Тогда*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} fg\cos(\boldsymbol{\nu} x_i)\,ds - \int\limits_\Omega f\frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx,$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — вектор единичной нормали к $\partial\Omega$, внешней по отношению к области Ω.

Доказательство. Берём в предыдущей теореме $u = fg$, получаем

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx + \int\limits_\Omega f\frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} fg\cos(\boldsymbol{\nu}, x_i)\,ds.$$

■