

Уравнения в частных производных

1 6 октября 2014

1.1 Прямое произведение двух обобщённых функций

В прошлый раз мы с вами обсуждали теорему о конечном порядке сингулярности.

Нам понадобится ещё одно понятие: прямое произведение двух функций. Ещё иногда его называют тензорным произведением. Вот тут мы не про тензоры говорим, а про функции — это такой вырожденный тензор. В чём смысл прямого произведения: берёте функцию $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, другую $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$, перемножаете, получаете функцию $m+n$ переменных.

Пусть $f \in C^\infty(F)$, $g \in C^\infty(G)$, где $F \subset \mathbb{R}^n$ — открытое непустое множество, $G \subset \mathbb{R}^m$ — открытое непустое множество. Тогда просто построим вот такую вот функцию:

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}).$$

Называем её прямым произведением f и g . Как мы её обозначаем, чтобы показать, что это всё-таки что-то новое: fg , $f \cdot g$ или $f \otimes g$. Это $F \times G \rightarrow \mathbb{C}$.

Мы знаем, что C^∞ вкладывается в D' . Так что ничего нового не должно происходить. Будем понимать $f \in C^\infty(F)$ и $g \in C^\infty(G)$ как обобщённые функции из $D'(F)$ и $D'(G)$. Что это означает? Возьмём прямое произведение $fg \in C^\infty(F \times G)$ и применим к $\varphi \in D(F \times G)$.

$$(f(x)g(y), \varphi(x, y)) = \int_{F \times G} f(x)g(y)\varphi(x, y) dx dy = \int_F \int_G f(x)g(y)\varphi(x, y) dy dx = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))).$$

Это на самом деле уже готовая формула для определения прямого произведения.

Определение 1.1. *Прямым произведением обобщённых функций $f(x) \in D'(F)$ и $g(y) \in D'(G)$ называется обобщённая функция $f(x)g(y)$ (сохраняем символ аргумента, хотя понимаем, что это не бесконечно гладкие функции), такая, что*

$$\forall \varphi(x, y) \in D(F \times G) \quad (f(x)g(y), \varphi(x, y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))).$$

При каждом x сначала получаем $(g(y), \varphi(x, y))$. Понятно, что это бесконечно гладкая функция, понятно, что у неё гладкий носитель; по теореме из конца прошлой лекции знаем, что $(g(y), \varphi(x, y)) \in D(F)$. Непонятно, почему при этом получится непрерывная в сенсориальном смысле функция; линейность действительна, нет сомнений. Нужно же показать, что если $\varphi_k \rightarrow \varphi$, то всё вот это $(f(x)g(y), \varphi_k(x, y)) \rightarrow (f(x)g(y), \varphi(x, y))$. Не знаю, насколько для вас это очевидно, поэтому давайте на этом остановимся.

Итак, очевидно, что $f(x)g(y)$ — линейная функция. Покажем, что $f(x)g(y)$ непрерывный в $D(F \times G)$ функционал. В самом деле, пусть $\varphi_k(x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$ в $D(F \times G)$ при $k \rightarrow \infty$, то есть

$$(1) \quad \text{Существует компакт } H \subset F \times G: \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{supp } \varphi_k \subset H;$$

$$(2) \quad \forall m \quad \|\varphi_k - \varphi\|_{C^m(F \times G)} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Тогда $(g(y), \varphi_k(\cdot, y)) \rightarrow (g(y), \varphi(\cdot, y))$ в норме $C^m(F)$ при $k \rightarrow \infty$ для всех $m \geq 0$.

Другими словами, для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (я уже могу дифференцировать по параметру)

$$\partial_x^\alpha (g(y), \varphi_k(x, y)) \rightarrow \partial_x^\alpha (g(y), \varphi(x, y))$$

равномерно по $x \in F$.

Вот теперь можем дифференцировать по параметру. Имеем,

$$\partial_x^\alpha (g(y), \varphi_k(x, y)) = (g(y), \partial_x^\alpha \varphi_k(x, y)), \quad \partial_x^\alpha (g(y), \varphi(x, y)) = (g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x, y)).$$

Ну а теперь возьмём разность.

$$\left| \partial_x^\alpha (g(y), \varphi_k(x, y)) - \partial_x^\alpha (g(y), \varphi(x, y)) \right| = \left| (g(y), \partial_x^\alpha \varphi_k(x, y) - \partial_x^\alpha \varphi(x, y)) \right|.$$

Дальше мы знаем, что носитель разности $\partial_x^\alpha \varphi_k(x, y) - \partial_x^\alpha \varphi(x, y)$ лежит в некотором компакте. Поэтому я могу записать, что всё это равно

$$\left| (g(y), \eta(y) (\partial_x^\alpha \varphi_k(x, y) - \partial_x^\alpha \varphi(x, y))) \right|,$$

где $\eta \in D(G)$ и при этом $\eta \equiv 1$ в окрестности проекции H на G . Ничего не изменилось от такого домножения, но мне это даёт возможность написать следующее. Таким образом,

$$\left| \partial_x^\alpha (g(y), \varphi_k(x, y)) - \partial_x^\alpha (g(y), \varphi(x, y)) \right| = \left| (g(y)\eta(y), \partial_x^\alpha \varphi_k(x, y) - \partial_x^\alpha \varphi(x, y)) \right|,$$

где $g(y)\eta(y)$ — обобщённая функция с компактным носителем. А раз так, то я могу написать, что всё это не превосходит

$$\leq A \|\partial_x^\alpha \varphi_k(x, \cdot) - \partial_x^\alpha \varphi(x, \cdot)\|_{C^N(G)} \leq A \|\varphi_k - \varphi\|_{C^{N+|\alpha|}(F \times G)} \rightarrow 0. \quad (k \rightarrow \infty.)$$

Дальше я должен показать, что есть компакт, где лежат все носители. Очевидно, что $\text{supp}(g(y), \varphi_k(\cdot, y))$ есть подмножество проекции H на F .

Тем самым, $(g(y), \varphi_k(\cdot, y)) \rightarrow (g(y), \varphi(\cdot, y))$ в $D(F)$ при $k \rightarrow \infty$, поэтому ввиду непрерывности $f(x)$ будем иметь

$$(f(x), (g(y), \varphi_k(x, y))) \rightarrow (f(x), (g(y), \varphi(x, y))),$$

то есть $f(x)g(y)$ непрерывный функционал на $D(F \times G)$.

Всё очень просто. Надо только воспользоваться неравенством из компактности носителя.

1.2 Коммутативность прямого произведения обобщённых функций

Когда писали прямое произведение двух бесконечно гладких функций, воспользовались теоремой Фубини. Могли бы интегрировать в другом порядке и результат интегрирования не изменился. А для обобщённых функций порядок важен?

Теорема 1.1. Пусть $f(x) \in D'(F)$, $g(y) \in D'(G)$, а $\varphi \in D(F \times G)$. Тогда

$$(f(x), (g(y), \varphi(x, y))) = (g(y), (f(x), \varphi(x, y))).$$

Вообще прямое произведение не коммутативно по своей природе. А у нас получилось коммутативное — частный случай. У нас в определении прямого произведения обобщённых функций есть некоторый произвол — вот о чём теорема.

Доказательство. Если бы $\varphi(x, y) = \psi_1(x) \cdot \psi_2(y)$, всё очевидно. А как в общем случае сделать? Любую функцию φ разложим, так сказать, в ряд. Любую функцию $\varphi \in D(F \times G)$ можно разложить в ряд

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \varphi_k(y),$$

где $\varphi_k \in D(F)$, $\varphi_k \in D(G)$, $k = 1, 2, \dots$

Так всегда можно сделать. Надо только понять как. Мне приходит в голову разложить в ряд Фурье, по каким-то экспонентам разложить. Коэффициенты очень быстро сходятся к нулю у бесконечно гладких функций. Мне нужна сходимости $C^N(F \times G)$. Коэффициенты убывают быстрее любой степени, получу всё как надо. Идея понятна, а сейчас я это напишу.

1. Разложим $\varphi(x, y)$ в ряд Фурье

$$\varphi(x, y) = \sum_{\substack{s \in \mathbb{Z}^n \\ p \in \mathbb{Z}^m}} c_{sp} e^{isx} e^{ipy}.$$

Мы можем выбрать достаточно большой куб размерности $m + n$, которому будет принадлежать $F \times G$. Разнесём этот куб по \mathbb{R}^{m+n} , доопределив φ до периодической. Нам хочется, чтобы ребро куба было 2π . Поэтому делаем такую приписку. Считаем без ограничения общности $F \times G \subset (-\pi, \pi)^{n+m}$.

Ввиду того, что φ бесконечно гладкая функция, будем иметь

$$\sum_{\substack{s \in \mathbb{Z}^n \\ p \in \mathbb{Z}^m}} |c_{sp}| (1 + |s| + |p|)^N < +\infty \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

2. Возьмём $\eta \in D(F)$ ¹, $\lambda \in D(G)$, такие, что $\eta \equiv 1$ на проекции $\text{supp } \varphi$ на F , $\lambda \equiv 1$ на проекции $\text{supp } \varphi$ на G . Тогда, очевидно, получим

$$\eta(x) \lambda(y) \varphi(x, y) \equiv \varphi(x, y).$$

¹ D и C_0^∞ , кстати, одно и то же.

При этом весь ряд можно написать вот так вот, смотрите (слева и справа умножили на бесконечно гладкую функцию)

$$\varphi(x, y) = \sum_{\substack{s \in \mathbb{Z}^n \\ p \in \mathbb{Z}^m}} c_{sp} e^{isx} \eta(x) e^{ipy} \lambda(y).$$

Заметим, что ряд $\sum_{\substack{s \in \mathbb{Z}^n \\ p \in \mathbb{Z}^m}} c_{sp} e^{isx} e^{ipy}$ сходится к функции $\varphi(x, y)$ в пространстве $C^N(F \times G)$ для любого

N ввиду бесконечной гладкости φ . Таким образом, $\sum_{\substack{s \in \mathbb{Z}^n \\ p \in \mathbb{Z}^m}} c_{sp} e^{isx} \eta(x) e^{ipy} \lambda(y)$ сходится к $\varphi \equiv \eta(x) \lambda(y) \varphi$ в

пространстве $C^N(F \times G)$ для любого N . Ну и всё, сходимости у нас есть, какая нужна.

Тем самым вот этот вот ряд $\sum_{\substack{s \in \mathbb{Z}^n \\ p \in \mathbb{Z}^m}} c_{sp} e^{isx} \eta(x) e^{ipy} \lambda(y)$ сходится к $\varphi(x, y)$ в пространстве $D(F \times G)$ (частичные суммы ряда образуют сходящуюся последовательность). Перенумеруем члены этого ряда. Получим

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \varphi_k(y), \quad \varphi_k(x) \equiv e^{isx} \eta(x) c_{sp}, \quad \psi_k(y) \equiv e^{ipy} \lambda(y).$$

Имеем

$$\left(f(x), \left(g(y), \sum_{k=1}^N \varphi_k \psi_k \right) \right) = \sum_{k=1}^N \left(f(x), \varphi_k(x) \right) \left(g(y), \psi_k(y) \right).$$

Аналогично

$$\left(g(y), \left(f(x), \sum_{k=1}^N \varphi_k \psi_k \right) \right) = \sum_{k=1}^N \left(g(y), \psi_k(y) \right) \left(f(x), \varphi_k(x) \right).$$

То есть для всех k

$$\left(f(x), \left(g(y), \sum_{k=1}^N \varphi_k \psi_k \right) \right) = \left(g(y), \left(f(x), \sum_{k=1}^N \varphi_k \psi_k \right) \right).$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ получим

$$\left(f(x), \left(g(y), \varphi(x, y) \right) \right) = \left(g(y), \left(f(x), \varphi(x, y) \right) \right).$$

■

Упражнение 1.1. Почему предел существует? (Из непрерывности прямого произведения.)

2 13 октября 2014

На чём мы остановились. Доказали теорему о конечном порядке сингулярности обобщённой функции с компактным носителем. Доказали коммутативность прямого произведения.

2.1 Свёртка обобщённой функции

Я напомним, что такое свёртка двух функций в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)$. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ (пока просто считайте, что это функции, интегрируемые по Риману). Что называется свёрткой?

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(x-y)}_{\xi} \underbrace{g(y)}_{x-\xi} dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-\xi) f(\xi) d\xi.$$

Я всегда забываю $x-y$ или $y-x$, но вот есть способ себя проверить: $f \star g = g \star f$.

Что замечательно в пространстве L_1 ? Это свёрточная алгебра. Там естественно есть структура линейного пространства.

Давайте попробуем посчитать (есть такая теорема, называется Фубини)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f \star g(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} dx \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy.$$

Как работают с интегралом Лебега. Рассматривают фундаментальные последовательности ступенчатых функций. Они сходятся к измеримым функциям. Норма определяется так: берёте интеграл Лебега от модуля

функции. Существует предел интегралов ступенчатых функций, этот предел называют интегралом Лебега. Что я хочу сказать: если функция интегрируема по Лебегу, то её модуль интегрируем, поэтому наш интеграл слева существует. И есть такая теорема, что модуль интеграла не превосходит интеграла модуля.

А что такое теорема Фубини: есть функция двух векторных переменных, тогда можно кратный интеграл считать как повторный. Что у нас получается:

$$= \int_{\mathbb{R}^n} dy |g(y)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx}_{\int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)| d\xi} = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)| d\xi = \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Тем самым мы утверждаем, что

$$\|f \star g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

И интеграл от свёртки поэтому существует. Мы сразу двух зайцев убили: из теоремы Фубини показали и что свёртка существует и что она суммируема.

Как поступать с обобщёнными функциями? Мы знаем, что $L_1(\mathbb{R}^n)$ вкладывается в $D'(\mathbb{R}^n)$. Будем понимать $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ как обобщённые функции из $D'(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{cases} f: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx, & \varphi \in D(\mathbb{R}^n); \\ g: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} g \varphi dx, & \varphi \in D(\mathbb{R}^n); \end{cases}$$

При этом

$$f \star g: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f \star g \varphi dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Что бы нам сделать, чтобы угадать определение для обобщённой функции? Делать какие-то замены.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \star g(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \varphi(x) dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) g(y) \varphi(\xi+y) dy d\xi.$$

Последнее похоже на действие прямого произведения на функцию, но это не так. Всё же $\varphi(\xi+y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, но не имеет компактного носителя. Действительно $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$, значит, $-A \leq \xi+y \leq A$ — диагональная полоса, это не компактное множество.

Как нам, собственно говоря, выйти из положения? Введём понятие.

Определение 2.1. Компактным исчерпанием единицы в \mathbb{R}^m называется последовательность функций

$$\eta_k \in D(\mathbb{R}^m), \quad k = 1, 2, \dots,$$

таких, что выполнены два свойства:

$$(1) \text{ Для любого компакта } H \subset \mathbb{R}^m \quad \exists k_0: \forall k > k_0 \quad \eta_k|_H = 1;$$

$$(2) \forall s \quad \exists A: \forall k \quad \|\eta_k\|_{C^s(\mathbb{R}^n)} \leq A.$$

Естественный вопрос: существует ли хоть одна такая последовательность? Оказывается существует. Пусть $\eta \in D(B_1)$, такая, что $\eta|_{B_{\frac{1}{2}}} = 1$. Положим

$$\eta_k(x) = \eta\left(\frac{x}{k}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Первое свойство, очевидно, выполнено. Второе:

$$\partial_x^\alpha \eta_k(x) = \frac{1}{k^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha \eta(x) \Big|_{\xi=\frac{x}{k}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

А теперь мы готовы написать определение свёртки обобщённой функции.

Определение 2.2. Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$. Говорим, что существует свёртка $f \star g$, если $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \forall$ компактного исчерпания единицы $\nu_k \in D(\mathbb{R}^{2n})$ существует предел

$$(f \star g, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x+y)).$$

Почему это хорошо? Почему, если $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то получим то же самое? Какое выражение получится:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) g(y) \eta_k(\xi, y) \varphi(\xi + y) dy d\xi.$$

На любом компакте к какому-то номеру последовательность стабилизируется. Поэтому можем применить теорему об ограниченной сходимости (это вы тоже скоро узнаете: все функции ограничены сверху, почти всюду функции сходятся к некоей, тогда интеграл последовательности будет сходиться к интегралу предела). Получится, что в пределе нужный интеграл и будет.

Так мы видим, что определение подходит. Оно не даёт ничего нового для L_1 .

Есть вопросы к самому определению. Зависит ли предел от выбора компактного исчерпания?

Упражнение 2.1. *Покажите, что предел не зависит от компактного исчерпания.*

Это утверждение тривиально. По сути оно содержит в себе корректность определения свёртки. Сделаю вам одну подсказку. Есть два компактных исчерпания единицы η_k, λ_k . Перемешаю: $\eta_1, \lambda_1, \eta_2, \lambda_2, \dots$

Есть вопрос ещё вот какой: почему в результате получится обобщённая функция? Предел есть, функция получается линейная относительно φ . Вопрос с непрерывностью. Если последовательность обобщённой функции сходится слабо, то предел — обобщённая функция. Мы это сейчас сформулируем без доказательства (можно прочитать у Шилова, оно громоздкое).

Определение 2.3. *Говорят, что последовательность обобщённых функций $f_k \in D'(\Omega)$ слабо сходится к $f: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$, если*

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \quad (f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi).$$

Можно придумать и другие сходимости, но естественной является именно слабая.

Теорема 2.1 (о полноте $D(\Omega)$ относительно слабой сходимости). *Пусть $f_k \in D'(\Omega)$ слабо сходится к $f: F(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда $f \in D'(\Omega)$.*

Доказывать не будем. Доказательство, к сожалению, достаточно громоздкое. В Шилове доказательство, обратите внимание, страницах наверное на пяти. Меня извиняет, что Владимиров тоже так делает: даёт эту теорему без доказательства.

Упражнение 2.2. *Покажите, что $\varphi \mapsto (f(x)g(y), \nu_k(x, y)\varphi(x + y))$ является линейным непрерывным функционалом в $D(\mathbb{R}^n)$.*

Решение писать не буду, потому что оно тривиально. Хотя первое тоже было тривиально.

Прямое произведение всегда существует, а вот свёртка существует не для всех пар функций. Можно даже пару из $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ (суммируемые на каждом компакте) взять. Единицу с единицей мы не свернём.

Какие свойства есть у классической свёртки? Коммутативность. Это действительно так. Мы это сформулируем в виде теоремы небольшой.

Теорема 2.2 (коммутативность свёртки). *Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$: существует свёртка $f \star g$. Тогда \exists свёртка $g \star f = f \star g$.*

Доказательство. Пусть $\eta_k \in D(\mathbb{R}^{2n})$ — некоторое компактное исчерпание. Имеем

$$(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = (f(x), (g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y))) = (g(y), (f(x), \eta_k(x, y)\varphi(x + y))).$$

■

3 20 октября 2014

3.1 Свёртка с обобщённой функцией, имеющей компактный носитель

Теперь такое утверждение будет. Что у нас получится, если одна из компонент свёртки имеет компактный носитель.

Теорема 3.1. *Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$, причём $\text{supp } f$ — компакт. Тогда свёртка $f \star g$ существует, причём*

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (f \star g, \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x + y))) = (g(y), (f(x), \varphi(x + y))). \quad (1)$$

Обратите внимание, что самая правая часть формулы устроена каким образом: функцию f применяете к $\varphi(x + y)$. Если y фиксирована, то φ уже имеет компактный носитель, тут всё понятно. А то, что получается, является бесконечно гладкой функцией, но почему это будет с компактным носителем — вот в чём вопрос. Дальше $g(y)$ применяем к бесконечно гладкой функции, а должны применять к функции с компактным носителем.

Как обобщённую функцию с компактным носителем доопределить на всё \mathbb{R}^n ? Находим $\sigma \in D(\mathbb{R}^n)$: $\sigma = 1$ в окрестности $\text{supp } f$, и $\forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (f, \psi) := (f, \sigma\psi)$. Тогда мы распространили $f: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. Корректно ли? Проверим

$$\forall \psi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (f, \psi) = (f\sigma, \psi) = (f, \sigma\psi).$$

Если есть две такие σ_1, σ_2 , то $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ в окрестности носителя f . Значит, от выбора σ выражение не зависит.

Тогда почему в (1) проблем нет? Потому что у f компактный носитель и $g(y)$ применяется к функции с компактным носителем.

Доказательство. Рассмотрим компактное исчерпание единицы $\eta_k(x, y) \in D(\mathbb{R}^{2n})$, $k = 1, 2, \dots$ Имеем

$$(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)).$$

Вот если у неё предел есть, то свёртка существует. Предела нет — не существует. Напишем вот в таком виде

$$= (f(x), (g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)))$$

Вспомним, что f с компактным носителем, а σ равна единице в окрестности носителя f

$$= (f(x)\sigma(x), (g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y))) =$$

По определению умножения обобщённой функции на бесконечно гладкую

$$= (f(x), \sigma(x)(g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y))) =$$

А дальше по линейности функционала $g(y)$.

$$= (f(x), (g(y)\eta_k(x, y) \underbrace{\sigma(x)\varphi(x + y)}_{\in D(\mathbb{R}^{2n})}))$$

Если x большое, то σ обнулится, если y большое, но x небольшое, то $x + y$ большое, тогда φ обнулится. И всё это равняется вот такому вот выражению

$$= (f(x), (g(y), \sigma(x)\varphi(x + y))),$$

если k такое, что $\eta_k|_{\text{supp } \sigma(x)\varphi(x+y)} = 1$. Ввиду того, что η_k — компактное исчерпание единицы, для любого компакта нужное k найдётся. Предел существует просто потому, что стабилизировалась последовательность.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \exists k_0: \forall k \geq k_0 \quad (f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) &= (f(x), (g(y), \sigma(x)\varphi(x + y))) = \\ &= (f(x)\sigma(x), (g(y), \varphi(x + y))) = (f(x), (g(y), \varphi(x + y))), \end{aligned}$$

$$\text{поэтому } \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x + y))).$$

А теперь надо показать, что второе равенство тоже имеет место. Ну понятно почему: очевидно, что

$$\begin{aligned} (f(x), (g(y), \varphi(x + y))) &= (f(x)\sigma(x), (g(y), \varphi(x + y))) = (f(x), (g(y), \sigma(x)\varphi(x + y))) \stackrel{1.1}{=} \\ &= (g(y), (f(x)\sigma(x), \varphi(x + y))) = (g(y), (f(x), \varphi(x + y))). \end{aligned}$$

■

В качестве примера мы возьмём δ -функцию. У неё компактный носитель множество из одной точки. Пусть $f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Тогда (напишем сперва ответ)

$$f(x) \star \delta(x) = f(x).$$

В самом деле, $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$(f(x) \star \delta(x), \varphi(x)) = (f(x), (\delta(x), \varphi(x + y))) = (f(x), \varphi(x)).$$

Когда у обобщённой функции носитель компакт, её можно применять к любой бесконечно гладкой, не обязательно имеющей компактный носитель.

3.2 Дифференция свёртки

Теорема 3.2. Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$, такие, что существует свёртки $f \star g$. Тогда существуют свёртки $\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g$, $f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$ и при этом

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \star g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \star g = f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Есть такие студенты, которые скажут: вы тут описались, надо было плюс поставить. Нет, не описался.

Обратное, очевидно, неверно: не факт, что если есть свёртки $\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g$, $f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$, то существует $f \star g$. Простой пример: функции из L^1_{loc} .

Доказательство. Для начала напишу определение производной. Для любой $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, для любого компактного исчерпания единицы $\eta_k \in D(\mathbb{R}^{2n})$, $k = 1, 2, \dots$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f \star g), \varphi \right) = - \left(f \star g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(x)g(y), \eta_k(x, y) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x + y) \right).$$

Это с одной стороны. А теперь другую сторону равенства хотим переписать в таком же виде. Хотим показать, что существует предел

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g, \varphi \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x + y) \right),$$

причём

$$- \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(x)g(y), \eta_k(x, y) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x + y) \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x + y) \right).$$

Вот для этого разберёмся, в чём разница в выражениях под знаком предела. В самом деле

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x + y) \right) &\stackrel{1.1}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), (g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x + y)) \right) = \\ &- \left(f(x), \frac{\partial}{\partial x_i} (g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x + y)) \right) = - \left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta_k(x, y) \varphi(x + y)) \right) \right) = \\ &- \left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial \eta_k(x, y)}{\partial x_i} \varphi(x + y) \right) \right) - \left(f(x), \left(g(y), \eta_k(x, y) \frac{\partial \varphi(x + y)}{\partial x_i} \right) \right). \end{aligned}$$

Покажем, что предел от первого слагаемого есть ноль, то есть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial \eta_k(x, y)}{\partial x_i} \varphi(x + y) \right) \right). \quad (2)$$

Догадаться, чем воспользоваться очень непросто. Обычно начинают какие-то оценки писать, и ничего не получается. Нужно построить новое компактное исчерпание единицы. Положим $\lambda_k(x, y) = \eta_k(x, y) + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}(x, y)$, $k = 1, 2, \dots$. Очевидно, что $\lambda_k(x, y)$ также будет компактным исчерпанием единицы. Предел о определении свёртки не зависит от выбора компактного исчерпание единицы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(x), (g(y), \lambda_k(x, y) \varphi(x + y)) \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(x), (g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x + y)) \right).$$

Однако

$$\left(f(x), (g(y), \lambda_k(x, y) \varphi(x + y)) \right) = \left(f(x), (g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x + y)) \right) + \left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial \eta_k(x, y)}{\partial x_i} \varphi(x + y) \right) \right).$$

Откуда следует (2).

Ввиду (Я) соотношение (Ы) влечёт за собой (ЯЯ). Соотношение (ЯЯ) в свою очередь означает, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f \star g), \varphi \right) &= - \left(f \star g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(x)g(y), \eta_k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x + y) \right) = \\ &\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x, y) \varphi(x + y) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g, \varphi \right). \end{aligned}$$

Другими словами, свёртка $\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g$ существует и при этом

$$\frac{\partial f \star g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \star g.$$

Последнее ввиду коммутативности свёртки позволяет утверждать, что существует также $f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$, причём $\frac{\partial(f \star g)}{\partial x_i} = f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$. Что и требовалось доказать. ■

3.3 Теорема существования и теорема единственности

Пусть $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_n}}$.

Определение 3.1. $\mathcal{E}(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$ называется фундаментальным решением оператора \mathcal{L} , если $\mathcal{L}\mathcal{E} = \delta(x)$.

В качестве примера возьмём $\mathcal{L} = \frac{d}{dx}$. Тогда $\mathcal{E}(x) = \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ — фундаментальное решение \mathcal{L} . В самом деле, имеем, $\theta'(x) = \delta(x)$.

У нас осталось пять минут. Ровно столько, сколько нужно, чтобы доказать две теоремы.

Теорема 3.3. Пусть $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$, такая, что существует свёртка $u = f \star \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}(x)$ — фундаментальное решение оператора \mathcal{L} . Тогда $\mathcal{L}u = f$.

Доказательство. Имеем $\mathcal{L}u = \mathcal{L}(f \star \mathcal{E}) = f \star \mathcal{L}\mathcal{E} = f \star \delta = f$. Ведь у свёртки можно дифференцировать только одну компоненту. ■

Теорема 3.4. Пусть $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ — решение уравнения $\mathcal{L}u = f$, такое, что существует свёртка $u \star \mathcal{E}$, где \mathcal{E} — фундаментальное решение оператора \mathcal{L} . Тогда $u = f \star \mathcal{E}$.

Доказательство. Имеем $\mathcal{L}(u \star \mathcal{E}) = u \star \mathcal{L}\mathcal{E} = u \star \delta = u$. С другой стороны

$$\mathcal{L}(u \star \mathcal{E}) = \mathcal{L}u \star \mathcal{E} = f \star \mathcal{E} \Rightarrow u = f \star \mathcal{E}.$$

Я на две минуты вас обманул всего. ■

4 Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

В качестве \mathcal{L} возьмём такой дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0. \quad a_s \in \mathbb{C}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1.$$

А задача Коши формулируется так:

$$\mathcal{L}w = f(x), \quad w(0) = w_0, \dots, w^{(n-1)}(0) = w_{n-1}, \quad w_s \in \mathbb{C}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1.$$

Для простоты будем считать, что $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Вы знаете из курса ОДУ, что у этой задачи имеется единственное решение. Коэффициенты не обязательно для этого должны быть постоянными, но для уравнения с постоянными коэффициентами существует единственное глобальное решение, определённое по всем \mathbb{R} .

Обозначим

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} w(x), & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}; \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

И применим к \tilde{w} оператор \mathcal{L} . Если будете считать классическую производную, то поймёте, что в нуле это сделать нельзя. Но вы можете интерпретировать $\tilde{w}(x)$ как обобщённую функцию, и, значит, её можно дифференцировать.

$$(\mathcal{L}\tilde{w}, \varphi) = (w, \mathcal{L}^* \varphi),$$

где \mathcal{L}^* — такой вспомогательный оператор. Как он устроен? Если вы берёте одну производную, минус вылезает:

$$\left(\frac{du}{dx}, \varphi \right) = - \left(u, \frac{d\varphi}{dx} \right)$$

Значит, $\mathcal{L}^* = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} + (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$. Он называется формально сопряжённым оператором. Слово «формально» появляется, так как мы не задумываемся об области определения оператора, интересуемся лишь символической записью.

Так как $\tilde{w} \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, то

$$(\tilde{w}, \mathcal{L}^* \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w} \mathcal{L}^* \varphi \, dx = \int_0^{\infty} w \mathcal{L}^* \varphi \, dx = \sum_{s=1}^m (-1)^s a_s \int_0^{\infty} w \varphi^{(s)} \, dx. \quad (3)$$

Здесь одна тонкость, s меняется от 0 до m , а старший коэффициент единица. Значит, положим $a_m = 1$.

Дальше я проделаю процедуру, называемую интегрированием по частям (учту ещё, что φ имеет компактный носитель, то есть на ∞ $\varphi = 0$)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty w \varphi^{(s)} dx &= w \varphi^{s-1} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty w' \varphi^{(s-1)} dx = -w(0) \varphi^{(s-1)}(0) - w' \varphi^{s-2} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty w'' \varphi^{s-2} dx = \\ &= -w(0) \varphi^{(s-1)}(0) + w'(0) \varphi^{(s-2)}(0) + \dots + (-1)^s w^{(s-1)}(0) \varphi(0) + (-1)^s \int_0^\infty s^{(s)} \varphi dx. \end{aligned}$$

Теперь мы подставим всё в сумму (3) (учтём начальные условия $w^{(p)}(0) = w_p \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} (\tilde{w}, \mathcal{L}^* \varphi) &= \sum_{s=1}^m (-1)^s a_s \sum_{p=0}^{s-1} (-1)^{p+1} w^{(p)}(0) \varphi^{(s-p-1)}(0) + \underbrace{\int_0^\infty \sum_{s=0}^m (-1)^s a_s w^{(s)} \varphi dx}_{\mathcal{L}w=f} = \\ &= \sum_{s=1}^m \sum_{p=0}^{s-1} (-1)^{s+p+1} a_s w_p \underbrace{\varphi^{(s-p-1)}(0)}_{(-1)^{s-p-1}(\delta^{(s-p-1)}(x), \varphi(x))} + \underbrace{\int_0^\infty f \varphi dx}_{(\tilde{f}, \varphi)} = \\ &= \left(\sum_{s=1}^m \sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) + \tilde{f}(x), \varphi(x) \right), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\mathcal{L}\tilde{w} = \sum_{s=1}^m \sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) + \tilde{f}(x). \quad (4)$$

В качестве примера рассмотрим вот такое уравнение $y'' + \omega^2 y = f(x)$ с начальными условиями $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ ($\omega > 0$). Такое уравнение колебаний с правой частью. Положим

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} y(x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда, используя (4), получим $\tilde{y}'' + \omega^2 \tilde{y} = \delta(x)y_1 + \delta'(x)y_0 + \tilde{f}(x)$.

У нас была задача Коши. А мы получили одно уравнение, в которое входит всё.

4.1 Фундаментальные решения обыкновенного оператора \mathcal{L} с постоянными коэффициентами

Теорема 4.1. Пусть W — решение задачи Коши

$$\mathcal{L}w = 0, \quad w(0) = 0, \dots, w^{(m-2)}(0) = 0, \quad w^{(m-1)}(0) = 1.$$

Тогда $\mathcal{E}(x) = \theta(x)W(x)$ — фундаментальное решение оператора \mathcal{L} , то есть $\mathcal{L}\mathcal{E}(x) = \delta(x)$.

Доказательство. Непосредственно следует из формулы (4). ■

В качестве примера возьмём оператор уже рассмотренного сегодня уравнения $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2$, $\omega > 0$. Рассмотрим задачу

$$w'' + \omega^2 w = 0, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 1.$$

Решение, как мы давно знаем, $W(x) = \frac{1}{\omega} \sin \omega x$. Фундаментальное решение

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\theta(x)}{\omega} \sin \omega x.$$

4.2 Свёрточная алгебра

Обозначим $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : \text{supp } f \subset [0, \infty)\}$.

Лемма 4.1. Множество \mathcal{A} образует коммутативную алгебру с единицей относительно свёртки и операций сложения и умножения на скаляр.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\forall f, g \in \mathcal{A} \exists f \star g \in \mathcal{A}$. Пусть η_k — компактное исчерпание единицы. Возьмём такое $\tau \in C^\infty(\mathbb{R})$, что $\tau|_{(-\infty, -1]} = 0$, $\tau|_{[-1/2, \infty)} = 1$. Положим $\tau_\varepsilon(x) = \tau\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Воспользуемся определениями свёртки и умножения обобщённой функции на бесконечно гладкую: $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = (\tau_\varepsilon(x)f(x)\tau_\varepsilon(y)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = (f(x)g(y), \underbrace{\eta_k(x, y)\tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x + y)}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}) = \dots$$

Почему просто понять, что у аргумента компактный носитель? Пусть $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$. Тогда $-A \leq x + y \leq A$. Теперь φ умножается на две функции, у которых носитель луч. А так как η_k — компактное исчерпание единицы и существует предел это выражения (последовательность стабилизируется на компактном носителе произведения $\tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x + y)$ с какого-то номера k).

$$\dots = (f(x)g(y), \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x + y))$$

для достаточно больших k .

Таким образом, свёртка $f \star g$ существует, причём

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0 \quad (f \star g, \varphi) = (f(x)g(y), \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x + y)).$$

Осталось показать, что $\text{supp } f \star g \subset [0, \infty)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}((-\infty, 0))$. Покажем, что $(f \star g, \varphi) = 0$. Для этого надо формулой воспользоваться.

$$\text{supp } \varphi \subset (-\infty, 0) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x + y) \equiv 0.$$

Что является единицей? δ -функция. Все функции с ней сворачиваются и результат свёртки сама функция. ■