# Уравнения в частных производных

# 1 6 октября 2014

## 1.1 Прямое произведение двух обобщённых функций

В прошлый раз раз мы с вами обсуждали теорему о конечном порядке сингулярности.

Нам понадобится ещё одно понятие: прямое произведение двух функций. Ещё иногда его называют тензорным произведением. Вот тут мы не про тензоры говорим, а про функции — это такой вырожденный тензор. В чём смысл прямого произведения: берёте функцию $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, другую $\mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, перемножаете, получаете функцию $m+n$ переменных.

Пусть $f \in \mathbb{C}^\infty(F)$, $g \in C^\infty(G)$, где $F \subset \mathbb{R}^n$ — открытое непустое множество, $G \subset \mathbb{R}^m$ — открытое непустое множество. Тогда просто построим вот такую вот функцию:

$$(x_1, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{m+n}) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_{n+m}).$$

Называем её прямым произведением $f$ и $g$. Как мы её обозначаем, чтобы показать, что это всё-таки что-то новое: $fg$, $f \cdot g$ или $f \otimes g$. Это $F \times G \to \mathbb{C}$.

Мы знаем, что $C^\infty$ вкладывается в $D'$. Так что ничего нового не должно происходить. Будем понимать $f \in C^\infty(F)$ и $g \in C^\infty(G)$ как обобщённые функции из $D'(F)$ и $D'(G)$. Что это означает? Возьмём прямое произведение $fg \in C^\infty(F \times G)$ и применим к $\varphi \in D(F \times G)$.

$$\big(f(x)g(y), \varphi(x,y)\big) = \int\limits_{F \times G} f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_F \int\limits_G f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dy\,dx = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big).$$

Это на самом деле уже готовая формула для определения прямого произведения.

**Определение 1.1.** *Прямым произведением обобщённых функций $f(x) \in D'(F)$ и $g(y) \in D'(G)$ называется обобщённая функция $f(x)g(y)$ (сохраняем символ аргумента, хотя понимаем, что это не бесконечно гладкие функции), такая, что*

$$\forall\ \varphi(x,y) \in D(F \times G) \quad \big(f(x)g(y), \varphi(x,y)\big) = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big).$$

При каждом $x$ сначала получаем $\big(g(y), \varphi(x,y)\big)$. Понятно, что это бесконечно гладкая функция, понятно, что у неё гладкий носитель; по теореме из конца прошлой лекции знаем, что $\big(g(y), \varphi(x,y)\big) \in D(F)$. Непонятно, почему при этом получится непрерывная в севенциальном смысле функция; линейность действительна, нет сомнений. Нужно же показать, что если $\varphi_k \to \varphi$, то всё вот это $\big(f(x)g(y), \varphi_k(x,y)\big) \to \big(f(x)g(y), \varphi(x,y)\big)$. Не знаю, насколько для вас это очевидно, поэтому давайте на этом остановимся.

Итак, очевидно, что $f(x)g(y)$ — линейная функция. Покажем, что $f(x)g(y)$ непрерывный в $D(F \times G)$ функционал. В самом деле, пусть $\varphi_k(x,y) \to \varphi(x,y)$ в $D(F \times G)$ при $k \to \infty$, то есть

(1) Существует компакт $H \subset F \times G\colon \forall\ k \in \mathbb{N} \quad \operatorname{supp} \varphi_k \subset H$;

(2) $\forall\ m \quad \|\varphi_k - \varphi\|_{C^m(F \times G)} \to 0$ при $k \to \infty$.

Тогда $\big(g(y), \varphi_k(\cdot, y)\big) \to \big(g(y), \varphi(\cdot, y)\big)$ в норме $C^m(F)$ при $k \to \infty$ для всех $m \geqslant 0$.

Другими словами, для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (я уже могу дифференцировать по параметру)

$$\partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi_k(x,y)\big) \to \partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi(x,y)\big)$$

равномерно по $x \in F$.

Вот теперь можем дифференцировать по параметру. Имеем,

$$\partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi_k(x,y)\big) = \big(g(y), \partial_x^\alpha \varphi_k(x,y)\big), \qquad \partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi(x,y)\big) = \big(g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\big).$$

Ну а теперь возьмём разность.

$$\Big|\partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi_k(x,y)\big) - \partial_x^\alpha \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big| = \Big|\big(g(y), \partial_x^\alpha \varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\big)\Big|.$$

Дальше мы знаем, что носитель разности $\partial_x^\alpha \varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha \varphi(x,y)$ лежит в некотором компакте. Поэтому я могу записать, что всё это равно

$$\bigg|\Big(g(y), \eta(y)\big(\partial_x^\alpha \varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\big)\Big)\bigg|,$$

где $\eta \in D(G)$ и при этом $\eta \equiv 1$ в окрестности проекции $H$ на $G$. Ничего не изменилось от такого домножения, но мне это даёт возможность написать следующее. Таким образом,

$$\Big|\partial_x^\alpha\big(g(y), \varphi_k(x,y)\big) - \partial_x^\alpha\big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big| = \Big|\big(g(y)\eta(y), \partial_x^\alpha\varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha\varphi(x,y)\big)\Big|,$$

где $g(y)\eta(y)$ — обобщённая функция с компактным носителем. А раз так, то я могу написать, что всё это не превосходит

$$\leqslant A\big\|\partial_x^\alpha\varphi_k(x,\cdot) - \partial_x^\alpha\varphi(x,\cdot)\big\|_{C^N(G)} \leqslant A\|\varphi_k - \varphi\|_{C^{N+|\alpha|}(F\times G)} \to 0. \quad (k \to \infty.)$$

Дальше я должен показать, что есть компакт, где лежат все носители. Очевидно, что $\operatorname{supp}\big(g(y), \varphi_k(\cdot, y)\big)$ есть подмножество проекции $H$ на $F$.

Тем самым, $\big(g(y), \varphi_k(\cdot,y)\big) \to \big(g(y), \varphi(\cdot,y)\big)$ в $D(F)$ при $k \to \infty$, поэтому ввиду непрерывности $f(x)$ будем иметь

$$\Big(f(x), \big(g(y), \varphi_k(x,y)\big)\Big) \to \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big),$$

то есть $f(x)g(y)$ непрерывный функционал на $D(F \times G)$.

Всё очень просто. Надо только воспользоваться неравенством из компактности носителя.

## 1.2 Коммутативность прямого произведения обобщённых функций

Когда писали прямое произведение двух бесконечно гладких функций, воспользовались теоремой Фубини. Могли бы интегрировать в другом порядке и результат интегрирования не изменился. А для обобщённых функций порядок важен?

**Теорема 1.1.** *Пусть $f(x) \in D'(F)$, $g(y) \in D'(G)$, а $\varphi \in D(F \times G)$. Тогда*

$$\Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x,y)\big)\Big) = \Big(g(x), \big(f(y), \varphi(x,y)\big)\Big).$$

Вообще прямое произведение не коммутативно по своей природе. А у нас получилось коммутативное — частный случай. У нас в определении прямого произведения обобщённых функций есть некоторый произвол — вот о чём теорема.

**Доказательство.** Если бы $\varphi(x,y) = \psi_1(x)\cdot\psi_2(y)$, всё очевидно. А как в общем случае сделать? Любую функцию $\varphi$ разложим, так сказать, в ряд. Любую функцию $\varphi \in D(F \times G)$ можно разложить в ряд

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\varphi_k(y),$$

где $\varphi_k \in D(F)$, $\varphi_k \in D(G)$, $k = 1, 2, \dots$

Так всегда можно сделать. Надо только понять как. Мне приходит в голову разложить в ряд фурье, по каким-то экспонентам разложить. Коэффициенты очень быстро сходится к нулю у бесконечно гладких функций. Мне нужна сходимость $C^N(F \times G)$. Коэффициенты убывают быстрее любой степени, получу всё как надо. Идея понятна, а сейчас я это напишу.

1. Разложим $\varphi(x,y)$ в ряд Фурье
$$\varphi(x,y) = \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp}e^{isx}e^{ipy}.$$

   Мы можем выбрать достаточно большой куб размерности $m+n$, которому будет принадлежать $F \times G$. Разнесём этот куб по $\mathbb{R}^{m+n}$, доопределив $\varphi$ до периодической. Нам хочется, чтобы ребро куба было $2\pi$. Поэтому делаем такую приписку. Считаем без ограничения общности $F \times G \subset (-\pi, \pi)^{n+m}$.

   Ввиду того, что $\varphi$ бесконечно гладкая функция, будем иметь
$$\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} |c_{sp}|(1+|s|+|p|)^N < +\infty \quad \forall\ N \in \mathbb{N}.$$

2. Возьмём $\eta \in D(F)$[1], $\lambda \in D(G)$, такие, что $\eta \equiv 1$ на проекции $\operatorname{supp}\varphi$ на $F$, $\lambda \equiv 1$ на проекции $\operatorname{supp}\varphi$ на $G$. Тогда, очевидно, получим
$$\eta(x)\lambda(y)\varphi(x,y) \equiv \varphi(x,y).$$

[1] $D$ и $C_0^\infty$, кстати, одно и то же.

При этом весь ряд можно написать вот так вот, смотрите (слева и справа умножили на бесконечно гладкую функцию)

$$\varphi(x,y)=\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp}e^{isx}\eta(x)e^{ipy}\lambda(y).$$

Заметим, что ряд $\sum\limits_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp}e^{isx}e^{ipy}$ сходится к функции $\varphi(x,y)$ в пространстве $C^N(F\times G)$ для любого $N$ ввиду бесконечной гладкости $\varphi$. Таким образом, $\sum\limits_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp}e^{isx}\eta(x)e^{ipy}\lambda(y)$ сходится к $\varphi\equiv\eta(x)\lambda(y)\varphi$ в пространстве $C^N(F\times G)$ для любого $N$. Ну и всё, сходимость у нас есть, какая нужно.

Тем самым вот этот вот ряд $\sum\limits_{\substack{s\in\mathbb{Z}^n\\ p\in\mathbb{Z}^m}} c_{sp}e^{isx}\eta(x)e^{ipy}\lambda(y)$ сходится к $\varphi(x,y)$ в пространстве $D(F\times G)$ (частичные суммы ряда образуют сходящуюся последовательность). Перенумеруем члены этого ряда. Получим

$$\varphi(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\varphi_k(y),\quad \varphi_k(x)\rightleftharpoons e^{isx}\eta(x)c_{sp},\quad \psi_k(y)\rightleftharpoons e^{ipy}\lambda(y).$$

Имеем

$$\Big(f(x),\big(g(y),\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\psi_k\big)\Big)=\sum_{k=1}^{N}\big(f(x),\varphi_k(x)\big)\big(g(y),\psi_k(y)\big).$$

Аналогично

$$\Big(g(y),\big(f(x),\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\psi_k\big)\Big)=\sum_{k=1}^{N}\big(g(y),\psi_k(y)\big)\big(f(x),\varphi_k(x)\big).$$

То есть для всех $k$

$$\Big(f(x),\big(g(y),\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\psi_k\big)\Big)=\Big(g(y),\big(f(x),\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\psi_k\big)\Big).$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$ получим

$$\Big(f(x),\big(g(y),\varphi(x,y)\big)\Big)=\Big(g(x),\big(f(y),\varphi(x,y)\big)\Big).$$

■

**Упражнение 1.1.** *Почему предел существует? (Из непрерывности прямого произведения.)*

# 2 13 октября 2014

На чём мы остановились. Доказали теорему о конечном порядке сингулярности обобщённой функции с компактном носителем. Доказали коммутативность прямого произведения.

## 2.1 Свёртка обобщённой функции

Я напомню, что такое свёртка двух функций в пространстве $L_1(\in\mathbb{R}^n)$. Пусть $f,g\in L_1(\mathbb{R}^n)$ (пока просто считайте, что это функции, интегрируемые по Риману). Что называется свёрткой?

$$f\star g(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\underbrace{x-y}_{\xi})g(\underbrace{y}_{x-\xi})\,dy=\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Я всегда забываю $x-y$ или $y-x$, но вот есть способ себя проверить: $f\star g=f\star y$.

Что замечательно в пространстве $L_1$? Это свёрточная алгебра. Там естественно есть структура линейного пространства.

Давайте попробуем посчитать (есть такая теорема, называется Фубини)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}=\big|f\star g(x)\big|\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}dx\bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)\,dy\bigg|\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}dx\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big|f(x-y)\big|\big|g(y)\big|\,dy.$$

Как работают с интегралом Лебега. Рассматривают фундаментальные последовательности ступенчатых функций. Они сходятся к измеримым функциям. Норма определяется так: берёте интеграл Лебега от модуля функции. Существует предел интегралов ступенчатых функций, этот предел называют интегралом Лебега. Что я хочу сказать: если функция интегрируема по Лебегу, то её модуль интегрируем, поэтому наш интеграл слева существует. И есть такая теорема, что модуль интеграла не превосходит интеграла модуля.

А что такое теорема Фубини: есть функция двух векторных переменных, тогда можно кратный интеграл считать как повторный. Что у нас получается:

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} dy\big|g(y)\big| \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|f(x-y)\big|\,dx}_{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|f(\xi)\right|\,d\xi} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|g(y)\big|, dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|f(\xi)\big|\,d\xi = \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Тем самым мы утверждаем, что

$$\|f \star g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

И интеграл от свёртки поэтому существует. Мы сразу двух зайцев убили: из теоремы Фубини показали и что свёртка существует и что она суммируема.

Как поступать с обобщёнными функциями? Мы знаем, что $L_1(\mathbb{R}^n)$ вкладывается в $D'(\mathbb{R}^n)$. Будем понимать $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ как обобщённые функции из $D'(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{cases} f\colon \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\varphi\,dx, & \varphi \in D(\mathbb{R}^n); \\ g\colon \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} g\varphi\,dx, & \varphi \in D(\mathbb{R}^n); \end{cases}$$

При этом

$$f \star g\colon \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \star g\varphi\,dx, \qquad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Что бы нам сделать, чтобы угадать определение для обобщённой функции? Делать какие-то замены.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f \star g(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\varphi(x)\,dy\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)g(y)\varphi(\xi+y)\,dy\,d\xi.$$

Последнее похоже на действите прямого произведение на функцию, но это не так. Всё же $\varphi(\xi+y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, но не имеет компактного носителя. Действительно $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$, значит, $-A \leqslant \xi + y \leqslant A$ — диагональная полоса, это не компактное множество.

Как нам, собственно говоря, выйти из положения? Введём понятие.

**Определение 2.1.** *Компактным исчерпанием единицы в $\mathbb{R}^m$ называется последовательность функций*

$$\eta_k \in D(\mathbb{R}^m),\ k = 1, 2, \ldots,$$

*таких, что выполнены два свойства:*

*(1) Для любого компакта $H \subset \mathbb{R}^m$ $\ \exists\, k_0\colon \forall\ k > k_0 \ \ \eta_k\big|_H = 1$;*

*(2) $\forall\ s\ \ \exists A\colon \forall\ k\ \ \|\eta_k\|_{C^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant A$.*

Еcтвественный вопрос: существует ли хоть одна такая последовательность? Оказывается существует. Пусть $\eta \in D(B_1)$, такая, что $\eta\big|_{B_{\frac{1}{2}}} = 1$. Положим

$$\eta_k(x) = \eta\left(\frac{x}{k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Первое свойство, очевидно, выполнено. Второе:

$$\partial_x^\alpha \eta_k(x) = \frac{1}{k^{|\alpha|}}\partial_\xi^\alpha \eta(x)\big|_{\xi=\frac{x}{k}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

А теперь мы готовы написать определение свёртки обобщённой функции.

**Определение 2.2.** *Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$. Говорим, что существует свёртка $f \star g$, если $\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $\forall$ компактного исчерпания единицы $\nu_k \in D(\mathbb{R}^{2n})$ существует предел*

$$(f \star g, \varphi) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big).$$

Почему это хорошо? Почему, если $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то получим то же самое? Какое выражение получится:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)g(y)\eta_k(\xi, y)\varphi(\xi + y)\,dy\,d\xi.$$

На любом компакте к какого-то номера последовательность стабилизируется. Поэтому можем применить теорему об ограниченной сходимости (это вы тоже скоро узнаете: все функции ограничены сверху, почти всюду функции сходятся к некоей, тогда интеграл последовательности будет сходиться к интегралу предела). Получится, что в пределе нужный интеграл и будет.

Так мы видим, что определение подходит. Оно не даёт ничего нового для $L_1$.

Есть вопросы к самому определению. Зависит ли предел от выбора компактного исчерпания?

**Упражнение 2.1.** *Покажите, что предел не зависит от компактного исчерпания.*

Это утверждение тривиально. По сути оно содержит в себе корректность определение свёртки. Сделаю вам одну подсказку. Есть два компактных исчерпания единицы $\eta_k, \lambda_k$. Перемешаю: $\eta_1, \lambda_1, \eta_2, \lambda_2, \ldots$

Есть вопрос ещё вот какой: почему в результате получится обобщённая функция? Предел есть, функция получается линейная относительно $\varphi$. Вопрос с непрерывностью. Если последовательность обобщённой функции сходится слабо, то предел — обобщённая функция. Мы это сейчас сформулируем без доказательства (можно прочитать у Шилова, оно громоздкое).

**Определение 2.3.** *Говорят, что последовательность обобщённых функций $f_k \in D'(\Omega)$ слабо сходится к $f\colon D(\Omega) \to \mathbb{C}$, если*

$$\forall\ \varphi \in D(\Omega)\quad (f_k, \varphi) \to (f, \varphi).$$

Можно придумать и другие сходимости, но естественной является именно слабая.

**Теорема 2.1** (о полноте $D(\Omega)$ относительно слабой сходимости)**.** *Пусть $f_k \in D'(\Omega)$ слабо сходится к $f\colon F(\Omega) \to \mathbb{C}$ при $k \to \infty$. Тогда $f \in D'(\Omega)$.*

Доказывать не будем. Доказательво, к сожалению, достаточно громозкое. В Шилове доказательство, обратите вниманиме, страницах наверное на пяти. Меня извиняет, что Владимиров тоже так делает: даёт эту теорему без доказательства.

**Упражнение 2.2.** *Покажите, что $\varphi \mapsto \big(f(x)g(y), \nu_k(x, y)\varphi(x + y)\big)$ является линейным непрерывным функционалом в $D(\mathbb{R}^n)$.*

Решение писать не буду, потому что оно тривиально. Хотя первое тоже было тривиально.

Прямое произведение всегда существует, а вот свёртка существует на для всех пар функций. Можно даже пару из $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ (суммируемые на каждом компакте) взять. Единицу с единицей мы не свернём.

Какие свойства есть у классической свёртки? Коммутативность. Это действительно так. Мы это сформулируем в виде теоремы небольшой.

**Теорема 2.2** (коммутативность свёртки)**.** *Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$: существует свёртка $f \star g$. Тогда $\exists$ свёртка $g \star f = f \star g$.*

**Доказательство.** Пусть $\eta_k \in D(\mathbb{R}^{2n})$ — некоторое компактное исчерпание. Имеем

$$\big(f(x)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big) = \Big(f(x), \big(g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big)\Big) = \Big(g(y), \big(f(x), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\big)\Big).$$

■

# 3 20 октября 2014

## 3.1 Свёртка с обобщённой функцией, имеющей компактный носитель

Теперь такое утверждение будет. Что у нас получится, если одна из компонент свёртки имеет компактный носитель.

**Теорема 3.1.** *Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$, причём $\operatorname{supp} f$ — компакт. Тогда всёртка $f \star g$ существует, причём*

$$\forall\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\quad (f \star g, \varphi) = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x + y)\big)\Big) = \Big(g(y), \big(f(x), \varphi(x + y)\big)\Big). \tag{1}$$

Обратите внимание, что самая правая часть формулы устроена каким образом: функцию $f$ применяете к $\varphi(x + y)$. Если $y$ фиксирована, то $\varphi$ уже имеет компактный носитель, тут всё понятно. А то, что получается, является бесконечно гладкой функцией, но почему это будет с компактным носителем — вот в чём вопрос. Дальше $g(y)$ применяем к бесконечно гладкой функции, а должны применять к функции с компактным носителем.

Как обобщённую функцию с компакным носителем доопределить на всё $\mathbb{R}^n$? Находим $\sigma \in D(\mathbb{R}^n)$: $\sigma = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} f$, и $\forall\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\quad (f, \psi) := (f, \sigma\psi)$. Тогда мы распространили $f\colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. Корректно ли? Проверим

$$\forall\ \psi \in D(\mathbb{R}^n)\quad (f, \psi) = (f\sigma, \psi) = (f, \sigma\psi).$$

Если есть две такие $\sigma_1, \sigma_2$, то $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ в окрестности носителя $f$. Значит, от выбора $\sigma$ выражение не зависит.

Тогда почему в (1) проблем нет? Потому что у $f$ компактный носитель и $g(y)$ применяется к функции с компактным носителем.

**Доказательство.** Рассмотрим компактное исчерпание единицы $\eta_k(x,y) \in D(\mathbb{R}^{2n})$, $k = 1, 2, \ldots$ Имеем

$$\big(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big).$$

Вот если у неё предел есть, то свёртка существует. Предела нет — не существует. Напишем вот в таком силе

$$= \Big(f(x), \big(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big)\Big)$$

Вспомним, что $f$ с компактным носителем, а $\sigma$ равна единице в окрестности носителя $f$

$$= \Big(f(x)\sigma(x), \big(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big)\Big) =$$

По определению умножения обобщённой функции на бесконечно гладкую

$$= \Big(f(x), \sigma(x)\big(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big)\Big) =$$

А дальше по линейности функционала $g(y)$.

$$= \Big(f(x), \Big(g(y)\eta_k(x,y)\underbrace{\sigma(x)\varphi(x+y)}_{\in D(\mathbb{R}^{2n})}\Big)\Big)$$

Если $x$ большое, то $\sigma$ обнулится, если $y$ большое, но $x$ небольшое, то $x+y$ большое, тогда $\varphi$ обнулится. И всё это равняется вот такому вот выражению

$$= \Big(f(x), \big(g(y), \sigma(x)\varphi(x+y)\big)\Big),$$

если $k$ такое, что $\eta_k\big|_{\operatorname{supp}\sigma(x)\varphi(x+y)} = 1$. Ввиду того, что $\eta_k$ — компактное исчерпание единицы, для любого компакта нужное $k$ найдётся. Предел существует просто потому, что стабилизировалась последовательность.

Таким образом,

$$\exists\, k_0 \colon \forall\, k \geqslant k_0 \quad \big(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big) = \Big(f(x), \big(g(y), \sigma(x)\varphi(x+y)\big)\Big) = \\ = \Big(\underbrace{f(x)\sigma(x)}_{f(x)}, \big(g(y), \varphi(x+y)\big)\Big) = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x+y)\big)\Big),$$

поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \big(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big) = \Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x+y)\big)\Big)$.

А теперь надо показать, что второе равенство тоже имеет местро. Ну понятно почему: очевидно, что

$$\Big(f(x), \big(g(y), \varphi(x+y)\big)\Big) = \Big(f(x)\sigma(x), \big(g(y), \varphi(x+y)\big)\Big) = \Big(f(x), \big(g(y), \sigma(x)\varphi(x+y)\big)\Big) \overset{1.1}{=} \\ = \Big(g(y), \big(f(x)\sigma(x), \varphi(x+y)\big)\Big) = \Big(g(y), \big(f(x), \varphi(x+y)\big)\Big).$$

■

В качестве примера мы возьмём $\delta$-функцию. У неё компактный носитель множество из одной точки. Пусть $f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Тогда (напишем сперва ответ)

$$f(x) \star \delta(x) = f(x).$$

В самом деле, $\forall\, \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\big(f(x) \star \delta(x), \varphi(x)\big) = \Big(f(x), \big(\delta(y), \varphi(x+y)\big)\Big) = \big(f(x), \varphi(x)\big).$$

Когда у обобщённой функции носитель компакт, её можно применять к любой бесконечно гладкой, не обязательно имеющей компактный носитель.

## 3.2 Дифференция свёртки

**Теорема 3.2.** *Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$, такие, что существует свёртки $f \star g$. Тогда существуют свёртки $\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g$, $f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$ и при этом*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \star g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \star g = f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Есть такие студенты, которые скажут: вы тут описались, надо было плюс поставить. Нет, не описался.

Обратное, очевидно, неверно: не факт, что если есть свёртки $\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g$, $\star \frac{\partial g}{\partial x_i}$, то существует $f \star g$. Простой пример: функции из $L^1_{loc}$.

**Доказательство.** Для начала напишу определение производной. Для любой $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, для любого компактного исчерпания единицы $\eta_k \in D(\mathbb{R}^{2n})$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f \star g), \varphi\right) = -\left(f \star g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right).$$

Это с одной стороны. А теперь другую сторону равенства хотим переписать в таком же виде. Хотим показать, что существует предел

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g, \varphi\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right),$$

причём

$$-\lim_{k\to\infty}\left(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right).$$

Вот для этого разберёмся, в чём разница в выражениях под знаком предела. В самом деле

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right) \overset{1.1}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \left(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) =$$

$$-\left(f(x), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) = -\left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right)\right) =$$

$$-\left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial \eta_k(x,y)}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right)\right) - \left(f(x), \left(g(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_i}\right)\right).$$

Покажем, что предел от первого слагаемого есть ноль, то есть

$$\lim_{k\to\infty}\left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial \eta_k(x,y)}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right)\right). \tag{2}$$

Догадаться, чем воспользоваться очень непросто. Обычно начинают какие-то оценки писать, и ничего не получается. Нужно построить новое компактное исчерпание единицы. Положим $\lambda_k(x,y) = \eta_k(x,y) + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}(x,y)$, $k = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что $\lambda_k(x,y)$ также будет компактным исчерпанием единицы. Предел о определении свёртки не зависит от выбора компактного исчерпания единицы

$$\lim_{k\to\infty}\left(f(x), \left(g(y), \lambda_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) = \lim_{\to k}\infty\left(f(x), \left(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right).$$

Однако

$$\left(f(x), \left(g(y), \lambda_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) = \left(f(x), \left(g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right)\right) + \left(f(x), \left(g(y), \frac{\partial \eta_k(x,y)}{\partial x_i}\varphi(x+y)\right)\right).$$

Откуда следует (2).

Ввиду (Я) соотношение (Ы) влечёт за собой (ЯЯ). Соотношение (ЯЯ) в свою очередь означает, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f \star g), \varphi\right) = -\left(f \star g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x+y)\right) =$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g, \varphi\right).$$

Другими словами, свёртка $\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g$ существует и при этом

$$\frac{\partial f \star g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \star g.$$

Последнее ввиду коммутативности свёртки позволяет утверждать, что существует также $f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$, причём $\frac{\partial (f\star g)}{\partial x_i} = f \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$. Что и требовалось доказать. ■

### 3.3 Теорема существования и теорема единственности

Пусть $\mathcal{L} = \sum\limits_{|a|\leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1}\ldots \partial x^{\alpha_n}}$.

**Определение 3.1.** *$\mathcal{E}(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$ называется фундаменальным решением оператора $\mathcal{L}$, если $\mathcal{L}\mathcal{E} = \delta(x)$.*

В качестве примера возьмём $\mathcal{L} = \frac{d}{dx}$. Тогда $\mathcal{E}(x) = \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ — фундаментальное решение $\mathcal{L}$. В самом деле, имеем, $\theta'(x) = \delta(x)$.

У нас осталось пять минут. Ровно столько, сколько нужно, чтобы доказать две теоремы.

**Теорема 3.3.** *Пусть $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$, такая, что существует свёртка $u = f \star \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}(x)$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{L}u = f$.*

**Доказательство.** Имеем $\mathcal{L}u = \mathcal{L}(f \star \mathcal{E}) = f \star \mathcal{L}\mathcal{E} = f \star \delta = f$. Ведь у свёртки можно дифференцировать только одну компоненту. ■

**Теорема 3.4.** *Пусть $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ — решение уравнения $\mathcal{L}u = f$, такое, что существует свёртка $u \star \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$. Тогда $u = f \star \mathcal{E}$.*

**Доказательство.** Имеем $\mathcal{L}(u \star \mathcal{E}) = u \star \mathcal{L}\mathcal{E} = u \star \delta = u$. С другой стороны

$$\mathcal{L}(u \star \mathcal{E}) = \mathcal{L}u \star \mathcal{E} = f \star \mathcal{E} \Rightarrow u = f \star \mathcal{E}.$$

Я на две минуты вас обманул всего. ■

## 4 Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

В качестве $\mathcal{L}$ возьмём такой дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0. \quad a_s \in \mathbb{C},\ s = 0, 1, \ldots, m-1.$$

А задача Коши формулируется так:

$$\mathcal{L}w = f(x), \quad w(0) = w_0, \ldots, w^{(n-1)}(0) = w_{n-1}, \quad w_s \in \mathbb{C},\ s = 0, 1 \ldots, m-1.$$

Для простоты будем считать, что $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Вы знаете из курса ОДУ, что у этой задачи имеется единственное решение. Коэффициенты не обязательно для этого должны быть постоянными, но для уравнения с постоянными коэффициентами существует единственное глобальное решение, определённое по всём $\mathbb{R}$.

Обозначим

$$\widetilde{w}(x) = \begin{cases} w(x), & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}; \qquad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

И применим к $\widetilde{w}$ оператор $\mathcal{L}$. Если будете считать классическую производную, то поймёте, что в нуле это сделать нельзя. Но вы можете интерпретировать $\widetilde{w}(x)$ как обобщённую функцию, и, значит, её можно дифференцировать.

$$(\mathcal{L}\widetilde{w}, \varphi) = (w, \mathcal{L}^*\varphi),$$

где $\mathcal{L}^*$ — такой вспомогательный оператор. Как он устроен? Если вы берёте одну производную, минус вылезает:

$$\left(\frac{du}{dx}, \varphi\right) = -\left(u, \frac{d\varphi}{dx}\right)$$

Значит, $\mathcal{L}^* = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} + (-1)^{m-1} d_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$. Он называется формально сопряжённым оператором. Слово «формально» появляется, так как мы не задумываемся об области определения оператора, интересуемся лишь символической записью.

Так как $\widetilde{w} \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, то

$$(\widetilde{w}, \mathcal{L}^*\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{w}\mathcal{L}^*\varphi\, dx = \int\limits_0^\infty w\mathcal{L}^*\varphi\, dx = \sum_{s=1}^m (-1)^s a_s \int\limits_0^\infty w\varphi^{(s)}\, dx. \tag{3}$$

Здесь одна тонкость, $s$ меняется от 0 до $m$, а старший коэффициент единица. Значит, положим $a_m = 1$.

Дальше я проделаю процедуру, называемую интегрированием по частям (учту ещё, что $\varphi$ имеет компактный носитель, то есть на $\infty$ $\varphi = 0$)

$$\int_0^\infty w\varphi^{(s)}\,dx = w\varphi^{s-1}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty w'\varphi^{(s-1)}\,dx == -w(0)\varphi^{(s-1)}(0) - w'\varphi^{s-2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty w''\varphi^{s-2}\,dx =$$

$$= -w(0)\varphi^{(s-1)}(0) + w'(0)\varphi^{(s-2)}(0) + \dots + (-1)^s w^{(s-1)}(0)\varphi(0) + (-1)^s \int_0^\infty s^{(s)}\varphi\,dx.$$

Теперь мы подставим всё в сумму (3) (учтём начальные условия $w^{(p)}(0) = w_p \in \mathbb{C}$)

$$(\widetilde{w}, \mathcal{L}^*\varphi) = \sum_{s=1}^{m}(-1)^s a_s \sum_{p=0}^{s-1}(-1)^{p+1} w^{(p)}(0)\varphi^{(s-p-1)}(0) + \int_0^\infty \underbrace{\sum_{s=0}^{m}(-1)^s a_s w^{(s)}}_{\mathcal{L}w=f}\varphi\,dx =$$

$$= \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1}(-1)^{s+p+1}a_s w_p \underbrace{\varphi^{(s-p-1)}(0)}_{(-1)^{s-p-1}\left(\delta^{(s-p-1)}(x),\varphi(x)\right)} + \underbrace{\int_0^\infty f\varphi\,dx}_{(\widetilde{f},\varphi)} =$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) + \widetilde{f}(x), \varphi(x)\right),$$

откуда следует, что

$$\mathcal{L}\widetilde{w} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) + \widetilde{f}(x). \tag{4}$$

В качестве примера рассмотрим вот такое уравнение $y'' + \omega^2 y = f(x)$ с начальными условиями $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ $(\omega > 0)$. Такое уравнение колебаний с правой частью. Положим

$$\widetilde{y}(x) = \begin{cases} y(x), & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда, используя (4), получим $\widetilde{y}'' + \omega^y = \delta(x)y_1 + \delta'(x)y_0 + \widetilde{f}(x)$.

У нас была задача Коши. А мы получили одно уравнение, в которое входит всё.

## 4.1 Фундаментальные решения обыкновенного оператора $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентами

**Теорема 4.1.** *Пусть $W$ — решение задачи Коши*

$$\mathcal{L}w = 0, \quad w(0) = 0, \dots, w^{(m-2)}(0) = 0, \ w^{(m-1)}(0) = 1.$$

*Тогда $\mathcal{E}(x) = \theta(x)W(x)$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$, то есть $\mathcal{L}\mathcal{E}(x) = \delta(x)$.*

**Доказательство.** Непосредственно следует из формулы (4). ■

В качестве примера возьмём оператор уже рассмотренного сегодня уравнения $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2$, $\omega > 0$. Рассмотрим задачу

$$w'' + \omega^2 w = 0, \quad w(0) = 0, \ w'(0) = 1.$$

Решение, как мы давно знаем, $W(x) = \frac{1}{\omega}\sin\omega x$. Фундаментальное решение

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\theta(x)}{\omega}\sin\omega x.$$

## 4.2 Свёрточная алгебра

Обозначим $\mathcal{A} == \left\{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})\colon \operatorname{supp} f \subset [0,\infty)\right\}$.

**Лемма 4.1.** *Множество $\mathcal{A}$ образует коммутативную алгебру с единицей относительно свёртки и операций сложения и умножения на скаляр.*

**Доказательство.** Достаточно доказать, что $\forall\ f, g \in \mathcal{A}\ \ \exists\ f \star g \in \mathcal{A}$. Пусть $\eta_k$ — компактное исчерпание единицы. Возьмём такое $\tau \in C^\infty(\mathbb{R})$, что $\tau\big|_{(-\infty,-1]} = 0$, $\tau\big|_{[-1/2,\infty)} = 1$. Положим $\tau_\varepsilon(x) = \tau\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Воспользуемся определениями свёртки и умножения обобщённой функции на бесконечно гладкую: $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\big(f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big) = \big(\tau_\varepsilon(x)f(x)\tau_\varepsilon(y)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big) = \big(f(x)g(y), \underbrace{\eta_k(x,y)\tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y)}_{\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}\big) = \ldots$$

Почему просто понять, что у аргумента компактный носитель? Пусть $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$. Тогда $-A \leqslant x+y \leqslant A$. Теперь $\varphi$ умножается на две функции, у которых носитель луч. А так как $\eta_k$ — компактное исчерпание единицы и существует предел это выражения (последовательность стабилизируется на компактном носителе произведения $\tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y)$ с какого-то номера $k$.

$$\cdots = \big(f(x)g(y), \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y)\big)$$

для достаточно больших $k$.

Таким образом, свёртка $f \star g$ существует, причём

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \forall\ \varepsilon > 0\quad (f \star g, \varphi) = \big(f(x)g(y), \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y)\big).$$

Осталось показать, что $\operatorname{supp} f \star g \subset [0, \infty)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}\big((-\infty, 0)\big)$. Покажем, что $(f \star g, \varphi) = 0$. Для этого надо формулой воспользоваться.

$$\operatorname{supp}\varphi \subset (-\infty, 0)\ \Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0\colon \tau_\varepsilon(x)\tau_\varepsilon(y)\varphi(x+y) \equiv 0.$$

Что является единицей? $\delta$-функкия. Все функции с ней сворачиваются и результат свёртки сама функция. ∎

## 5 17 ноября 2014

Сейчас мы напишем формулу для нахождения решения задачи Коши. В прошлый раз мы взяли решение и обрезали его, оставив только положительные значения времени. Сейчас попробуем воспользоваться теоремой существования.

Как строить фундаментальные решения я уже говорил и даже пример привёл.

**Теорема 5.1.** *Пусть $w$ — решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = f(x), \\ w(0) = w_0, \\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w^{(m-1)}(0) = w_{m-1}. \end{cases} \tag{5}$$

*где*

$$\mathcal{L} = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dx} + a_0, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}),\ a_s \in \mathbb{R},\ s = 0, 1, 2\ldots, m-1, \quad a_n = 1.$$

*Тогда*

$$w(x) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p W^{(s-p-1)}(x) + \int\limits_0^x W(x-\xi)f(\xi)\,d\xi, \tag{6}$$

*где $W$ — решение задачи Коши вот такой*

$$\begin{cases} \mathcal{L}W = 0, \\ W(0) = \cdots = W^{(m-2)}(0) = 0, \\ W^{(m-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Вот такой формулой достаточно удобно пользоваться.

**Доказательство.** Решение существует по теореме существования и единственноси. Пусть $w$ — решение задачи Коши (5). Обозначим $\widetilde{w}(x) = \theta(x)w(x)$, где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

И $\widetilde{f}(x) := \theta(x)f(x)$.

$$\mathcal{L}\widetilde{w} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) + \widetilde{f}(x).$$

Тогда по теореме единственности будем иметь

$$\widetilde{w}(x) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p \delta^{(s-p-1)}(x) \star \mathcal{E}(x) + f(x) \star \mathcal{E}(x),$$

где $\mathcal{E}(x) = \theta(x)W(x)$ — фундаментальное решение оператора $J$.

Мы знаем, что у $\delta$-функции с любой обобщённой свёртка существует и равна

$$\delta^{(s-p-1}(x) \star \mathcal{E}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{s-p-1}\big(\delta(x) \star \mathcal{E}(x)\big) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{s-p-1}\mathcal{E}(x) = \theta(x)W^{(s-p-1)}(x),$$

так как $\mathcal{E}(x), \mathcal{E}(x), \ldots, \mathcal{E}^{(m-2)}(x)$ абсолютно непрерывны. Для чего придуманы абсолютно непрерывные функции: это в точности те функции, для которых верна формула Ньютона—Лейбница.

Мы заметим вот что. Функции $\widetilde{f}$ и $\mathcal{E}(x)$ локально интегрируемы по Лебегу. Значит, свёртку можно считать по классической формуле.

$$\widetilde{f} \star \mathcal{E}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x-\xi)\widetilde{f}(\xi)\,d\xi =$$

Теперь вспоминаем, что такое $\mathcal{E}$:

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x-\xi)W(x-\xi)\theta(\xi)f(\xi)\,d\xi = \theta(x)\int\limits_{x}^{x} W(x-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

$\theta(x)$ для того, чтобы в отрицательных точках точно был ноль.

$$\widetilde{w}(x) = \theta(x)\sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1} a_s w_p W^{(s-p-1)}(x) + \theta(x)\int\limits_{0}^{x} W(x-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Если $x > 0$, то последнее выражение совпадает с (6). А как с отрицательными? Покажем, что (6) имеет место и при $x < 0$. В задаче (5) сделаем замену переменных $x \rightleftharpoons -x$. Получим для $v(x) = (-1)^m w(-x)$ следующую задачу Коши

$$\begin{cases} (-1)^m \mathcal{L}^* v = f(-x), \\ v^{(P)}(0) = (-1)^{p+m} w_p, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \end{cases} \tag{7}$$

где $\widetilde{L}^* = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} + (-1)^{m-1} a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots - a_1\frac{d}{dx} + a_0$ — оператор, формально сопряжённый к $\mathcal{L}$. Откуда это берётся? Вот была задача для функции $w$ $\mathcal{L}w = f(x)$. Теперь мы рассмотрели новую функцию $v(x)$. Что можно написать: $w(x) = (-1)^m v(-x)$, подставляем в задачу, что получем (надо дифференцировать функцию $v$, а когда мы дифференцируем сложную функцию, возникает $(-1)$ в той же степени, что и производная, а если применять оператор, формально сопряжённый, то все эти $(-1)$ сокращаются)

$$(-1)^m \mathcal{L}^* v(x) = \cancel{(-1)^m}\sum_{s=1}^{m}(-1)^s a_s \frac{d^s}{dx^s}\cancel{(-1)^m} w(-x) =$$

Я должен $s$ раз профифференцировать функцию $\frac{d^s w(-x)}{dx^s} = (-1)^s \frac{d^s w(y)}{dy^s}\Big|_{y=-x}$

$$= \sum_{s=0}^{m} a_s \frac{d^s w(y)}{dy^s}\bigg|_{y=-x} = f(-x).$$

Вот и получили уравнение. А как найти условие? Это ещё проще.

$$v^{(p)}(0) = (-1)^m \frac{d^p}{dx^p} w(-x)\bigg|_{x=0} = (-1)^{m+p} w_p.$$

Собственно говоря, вот (7) и вытекает.

Очевидно, что функция $V(x) = (-1)^{m-1}W(-x)$ (это $W$ из (6)) будет решением задачи Коши

$$\begin{cases} (-1)^m \mathcal{L}^* V = 0, \\ v(0) = \dots = v^{m-2}(0) = 0, \\ v^{m-1}(0) = 1. \end{cases}$$

Таким образом, функция $\theta(x)V(x)$ является фундаментальным решением оператора $(-1)^m\mathcal{L}^*$. Повторяя предыдущие рассуждения с заменой функции $\widetilde{w}(x)$ на $\widetilde{v}(x) = \theta(x)v(x)$ получим

$$\widetilde{v}(x) = \theta(x)\sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1}(-1)^{s+p}a_s w_p V^{(s-p-1)}(x) + \theta(x)\int\limits_0^x V(x-\xi)f(-\xi)\,d\xi.$$

При $x > 0$ из последнего выражения находим

$$(-1)^m w(-x) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=0}^{s-1}(-1)^{s+p}a_s w_p V^{s-p-1}(x) + \int\limits_0^x (x-\xi)f(-\xi)\,d\xi.$$

Теперь надо перейти к $W$. Под интегралом сделаем замену $\zeta = -\xi$ и получим (6) для отрицательных аргументов функции $w$. ■

### 5.1 Фундаментальное решение оператора Лапласа

**Теорема 5.2.** *Пусть $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, где $\Omega$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей. Тогда*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} f\cos(\boldsymbol{v}, x_i)\,ds,$$

*где $\boldsymbol{v}$ — вектор единичной нормали к $\partial\Omega$, внешней по отношению к $\Omega$.*

Эта формула называется формулой Грина.

**Доказательство.** В общей формуле Стокса (см. Диф. геом.)

$$\int\limits_{\partial\Omega} \omega = \int\limits_\Omega d\omega$$

положим $\omega = (-1)^{i-1}f(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^m$. ■ Здесь происходит состыковка строгой математики и нестрогой. Если нужно что-то посчитать, нагляднее пользоваться косинусами. Если же надо что-то доказывать, то пользуемся дифференциальной геометрией.

Из этой теоемы есть замечательное следствие, а именно формула Грина интегрирования по частям

**Теорема 5.3.** *Пусть $f, g \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $\Omega$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей. Тогда*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} fg\cos(\boldsymbol{\nu} x_i)\,ds - \int\limits_\Omega f\frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx,$$

*где $\boldsymbol{\mu}$ — вектор единичной нормали к $\partial\Omega$, внешней по отношению к области $\Omega$.*

**Доказательство.** Берём в предыдущей теореме $u = fg$, получаем

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx + \int\limits_\Omega f\frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} fg\cos(\boldsymbol{\nu}, x_i)\,ds.$$

■

## 6 24 ноября 2014

### 6.1 Фундаментальное решение оператора Лапласа

Доказали две вспомогательные леммы в прошлый раз, а теперь сформулируем теорему.

**Теорема 6.1.** *Пусть*

$$\mathcal{E}_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)|S_1|}\cdot\frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geqslant 3; \\ \frac{1}{2\pi}\ln|x|, & n = 2. \end{cases}$$

*Тогда* $\Delta\mathcal{E}_n(x)=\delta(x)$, *то есть* $\mathcal{E}_n(x)$ *является фундаментальным решением оператора Лапласа (оператора* $\Delta=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$*).*

Оператор хорошо известен и в математике и в приложениях.

**Доказательство.** Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда оператор Лапласа, применённый

$$\big(\Delta\mathcal{E}_n(x),\varphi(x)\big)=\big(\mathcal{E}_n(x),\Delta\varphi(x)\big)=$$

В случае $n=2$ особенность $\ln|x|$ в нуле суммируема. Получаем там $x\ln|x|$, что в нуле стремится к нулю. В случае $n\geqslant 3$ тоже получается величина, которая при $x\to 0$ стремится к нулю. А значит, последнее выражение можно записать в виде интеграла

$$=\int\limits_{\mathbb{R}_n}\mathcal{E}_n(x)\Delta\varphi(x)\,dx=$$

А дальше хочется оператор Лапласа перебрасывать обратно только уже в классическом смысле. Для этого мы доказали теорему 5.3. Самое сложное в теореме — это условие $C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$. $\varphi(x)$ — хорошая функция, бесконечно гладкая, а $\mathcal{E}_n(x)$ — плохая, у неё особенность в нуле. И более того, область $\mathbb{R}^n$ не является ограниченной, а в теореме требуется именно ограниченная. Поэтому мы поступим так.

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{B_R\setminus\overline{B}_\varepsilon}\mathcal{E}_n(x)\Delta\varphi(x)\,dx.$$

Здесь $R>0$ — некоторое вещественное число, такое, что $\operatorname{supp}\varphi\subset B_R$. Интеграл у нас хороший. Имеем

$$\int\limits_{B_R\setminus\overline{B}_\varepsilon}\mathcal{E}_n(x)\Delta\varphi(x)\,dx=\int\limits_{B_R\setminus\overline{B}_\varepsilon}\mathcal{E}_n(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\mathcal{E}_n(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}(x)\,dx=$$

Дальше применим ту теорему 5.3

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)}\mathcal{E}_n(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\cos(\boldsymbol{\nu},x_i)\,dS-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}_n(x)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,dx=$$

И ещё раз применяем теорему, а заодно делаем полезное преобразование в первом интеграле $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\cos(\boldsymbol{\nu},x_i)=\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}$.

$$=\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)}\mathcal{E}_n(x)\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\cos(\boldsymbol{\nu},x_i)}_{\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}}\,dS-\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\cos(\boldsymbol{\nu},x_i)}_{\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}}\varphi\,dS+\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\Delta\mathcal{E}_n(x)\varphi(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)}\mathcal{E}_n(x)\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,ds-\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)}\frac{\partial\mathcal{E}_n(x)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\varphi\,ds+\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\Delta\mathcal{E}_n(x)\varphi(x)\,dx.$$

Утверждается, что последнее слагаемое равно нулю. Покажем, что $\Delta\mathcal{E}_n(x)=0$ для всех $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. В самом деле, в многомерных полярных координатах оператор Лапласа имеет вида

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}+\frac{1}{r^2}\Delta_{S_1},$$

где $\Delta_{S_1}$ — оператор Лапласа—Бельтрами на единичной сфере (например, $\Delta_{S_1}=\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$, если $n=2$), который зависит только от угловых переменных.

Таким образом,

$$\Delta\mathcal{E}_n(x)=\begin{cases}\frac{(2-n)(1-n)}{(n-2)|S_1|}r^{-n}-\frac{(2-n)(n-1)}{(n-2)|S_1|}r^{-n}=0, & n\geqslant 3;\\ -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^2}+\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^2}=0, & n=2.\end{cases}$$

Отсюда что следует? От всей формулы остаётся два слагаемых. Это позволяет утверждать, что

$$\big(\Delta\mathcal{E}_n(x),\varphi(x)\big)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)}\mathcal{E}_n\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,dS-\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)}\frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\boldsymbol{\nu}}\varphi\,dS\Bigg).$$

Несложно увидеть, что $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R$, то есть $\varphi = 0$ в окрестности $S_R$. А $\partial(B_R \setminus B_\varepsilon) = S_R \cup S_\varepsilon$.

$$\left| \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \mathcal{E}_n \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,dS \right| \leqslant \int\limits_{S_\varepsilon} |\mathcal{E}_n| \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right| dS \leqslant |\mathcal{E}_n|\big|_{S_\varepsilon} \sup_{S_\varepsilon} |\nabla\varphi||S_\varepsilon|, \tag{8}$$

где $|S_\varepsilon|$ — $(n-1)$-мерный объём сферы $S_\varepsilon$.

$$|S_\varepsilon| \cdot |\mathcal{E}_n|\big|_{S_\varepsilon} = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)|S_1|}\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \cdot |S_1|\varepsilon^{n-1}, & n \geqslant 3; \\ \frac{1}{2\pi}|\ln\varepsilon|\varepsilon \cdot 2\pi\varepsilon, & n = 2. \end{cases}$$

Поэтому $|S_\varepsilon| \cdot |\mathcal{E}_n|\big|_{S_\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. И мы будем иметь

$$\left| \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \mathcal{E}_n(x)\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x)\,dS \right| \to 0 \quad \varepsilon \to 0.$$

На что надо обратить было внимание: $\sup\limits_{S_\varepsilon} |\nabla\varphi| \leqslant \|\varphi\|_{C^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Ну и всё, устремляем правую часть неравенства (8) к нулю.

Посмотрим, как ведёт себя другой интеграл. Нам нужно сосчитать такую производную на сфере радиуса $\varepsilon$ (нормаль направлена внутрь сферы, чтобы быть внешней по отношению к области). Нормаль коллинеарная радиусу, но производная по радиусу имеет другой знак. (Обратим внимание, что $|S_1| = 2\pi$ для $n = 2$.)

$$\frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\boldsymbol{\nu}}\bigg|_{S_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r}\begin{cases} \frac{1}{(n-2)|S_1|}\frac{1}{r^{n-2}}\bigg|_{r=\varepsilon}, & n \geqslant 3; \\ \frac{1}{2\pi}\ln r\bigg|_{r=\varepsilon}, & n = 2 \end{cases} = \frac{1}{|S_1|\varepsilon^{n-1}}$$

Там самым, аналогичное выражение для второго слагаемого

$$\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\boldsymbol{\nu}}\varphi\,dS = \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial\boldsymbol{\nu}}\varphi\,dS = \frac{1}{|S_\varepsilon|}\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi\,dS$$

К чему стремится последнее? Несложно увидеть, что к $\varphi(0)$, но как это строго доказать? В самом деле, напишем

$$\frac{1}{|S_\varepsilon|}\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi\,dS - \varphi(0) = \frac{1}{|S_\varepsilon|}\int\limits_{S_\varepsilon}\big(\varphi(x) - \varphi(0)\big)\,dS.$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{|S_\varepsilon|}\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi\,dx - \varphi(0)\right| \leqslant \frac{1}{|S_\varepsilon|}\int\limits_{S_\varepsilon}\big|\varphi(x) - \varphi(0)\big|\,dS \leqslant \sup_{x\in S_\varepsilon}\big|\varphi(x) - \varphi(0)\big|.$$

Все наши умозаключения позволяют прийти вот к такому вот выводу.

$$\big(\Delta\mathcal{E}_n(x), \varphi(x)\big) = \varphi(0)$$

или, иными словами, что и требовалось доказать. ∎

## 6.2 Фундаментальное решение оператора теплопроводности

Громоздкие формулы запоминать не надо.

Есть некие методы получать фундаментальные решения. Методы достаточно громоздкие и требуется предварительная теория преобразований Фурье для обобщённой функции. Мы поэтому будем лишь смотреть на результаты.

**Теорема 6.2.** *Пусть*

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}},$$

*где*

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

*Тогда*
$$\mathcal{E}_t - a^2\Delta\mathcal{E} = \delta(x,t),$$
*то есть $\mathcal{E}(x,t)$ является фундаментальным решением оператора теплопроводности $\partial_t - a^2\Delta$.*

Очень трудно угадать, что фундаментальное решение будет именно такое. Есть некая непростая процедура, которую кто-то когда-то проделал, например, лесница Ферма. Если её проделать для оператора теплопроводности, это займёт больше одного целого дня. Зная же результат, мы можем просто доказать.

**Доказательство.** Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ (есть ещё переменная $t$). Имеем
$$(\mathcal{E}_t - a^2\Delta\mathcal{E}, \varphi) = (\mathcal{E}, -\varphi_t - a^2\Delta\varphi) =$$
У нас $\mathcal{E}$ локально суммируемая функция. Единственная проблема при $t=0$. Знаменатель стремится к нулю, а в числителе стоит экспонента, которая тоже стремится к нулю и причём быстрее. Отсюда следует вот что, что наше выражение есть ничто иное, как интеграл
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{E}(-\varphi_t - a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt = -\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}(\varphi_t - a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt =$$
При перебрасывании производной по $t$ возникает проблема в нуле, там особенность. Поэтому будем переходить к пределу по $t$, а по $x$ будем брать интеграл по достаточно большому шару $B_R$.
$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^\infty\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}(\varphi_t - a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt,$$
где $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R\times\mathbb{R}$. У нас тут два интеграла написано. Первый
$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^\infty\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi_t\,dx\,dt = \int\limits_{B_R}\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi_t\,dt\,dx = \int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi\Big|_{t=\varepsilon}^\infty dx - \int\limits_{B_R}\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\right)\varphi\,dt\,dx.$$
В этом выражении меня пока интересует первое слагаемое. Сосчитаем его
$$\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi\Big|_{t=\varepsilon}^\infty dx = -\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\varepsilon}}}{(2a\sqrt{\pi\varepsilon})^n}\varphi(x,\varepsilon)\,dx$$
Попробуем выяснить, к чему это стремится, когда $\varepsilon\to 0$. Это мы сегодня уже не успеем.

Пок что для второго слагаемого напишем следующее выражение
$$\int\limits_\varepsilon^\infty\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\Delta\varphi\,dx\,dt =$$
При каждом фиксированном $t$ $\varphi = 0$ в окрестности $B_R$, поэтому
$$= \int\limits_\varepsilon^\infty \Delta\left(\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi\right)\varphi\,dx\,dt.$$
Таким образом,
$$\int\limits_\varepsilon^\infty\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}(\varphi_t + a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt = -\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\varepsilon}}}{(2a\sqrt{\pi\varepsilon})^n}\varphi(x,\varepsilon)\,dx + \int\limits_0^\varepsilon\int\limits_{B_R}(\partial_t - a^2\Delta)\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi\,dx\,dt.$$
В следующий раз перейдём к пределу и всё покажем. ∎

# 7 Фундаментальное решение оператора теплопроводности

Мы доказывали, что вот такая вот формула
$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{\frac{-|x|^2}{4a^2t}}$$

является фундаментальным решением оператора теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$. Что мы с вами получили:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}(\varphi_t + a^2\Delta\varphi)\,dx\,dt = -\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\varepsilon}}}{(2a\sqrt{\pi\varepsilon})^n}\varphi(x,\varepsilon)\,dx + \int\limits_{0}^{\varepsilon}\int\limits_{B_R}(\partial_t - a^2\Delta)\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi\,dx\,dt.$$

Теперь надо посчитать, во что это всё превратится, когда мы $\varepsilon$ устремим к нулю. Первое, что хочу заметить: последнее слагаемое при $t > 0$

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon}\int\limits_{B_R}(\partial_t - a^2\Delta)\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\varphi\,dx\,dt = 0.$$

Непосредственным дифференцированием в этом можно убедиться. Если угодно, это будет упражнение на дом. Уж очень громозкого выражения вы не получите.

В то же время под интегралом

$$\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\varepsilon}}}{(2a\sqrt{\pi\varepsilon})^n}\varphi(x,\varepsilon)\,dx$$

сделаю вот такую замену: $y = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$, $dx = (2a\sqrt{t})^n\,dy$. Как при этом преобразуется интеграл?

$$\int\limits_{B_R} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\varepsilon}}}{(2a\sqrt{\pi\varepsilon})^n}\varphi(x,\varepsilon)\,dx = \frac{1}{\pi^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2}\varphi\big((2a\sqrt{\varepsilon})^n y,\varepsilon\big)\,dy$$

Что можно сказать про функцию $\varphi$? Это функция из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$. Значения $\varphi\big((2a\sqrt{\varepsilon})^n y,\varepsilon\big) \to \varphi(0)$ при $\varepsilon \to 0$. А вот к чему стремится по теореме Лебега об ограниченной сходимости всё выражение (есть мажоранта, ведь у $\varphi$ на компакте есть наибольшее значение)

$$\frac{1}{\pi^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2}\varphi\big((2a\sqrt{\varepsilon})^n y,\varepsilon\big)\,dy \to \frac{1}{\pi^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2}\varphi(0)\,dy = \frac{\varphi(0)}{\pi^{n/2}}\int\limits_{\mathcal{E}^n} e^{-|y|^2}\,dy = \varphi(0).$$

Таким образом (вспомним, с чего начиналось наше рассуждение)

$$(\Delta\mathcal{E},\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\int\limits_{B_R} \frac{e^{\frac{-|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}(\varphi_t + a^2\Delta\varphi) = \varphi(0)$$

или, другими словами $\Delta\mathcal{E} = \delta(x)$.

# 8 Волновой оператор

Разберёмся сначала с одномерным случаем.

**Теорема 8.1.** *Пусть* $\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|)$, *где* $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ *— тэта-функция Хевисайда,* $a > 0$. *Тогда*

$$(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)\mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t),$$

*то есть* $\varepsilon(x,t)$ *— фундаментальное решение одномерного волнового оператора* $\Box_a = (\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)$.

**Доказательство.** Сделаем так, как вы привыкли делать на семинаре. Разложим на множители.

$$\Box_a = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2 = (\partial_t - a\partial_x)(\partial_t + a\partial_x).$$

Для тех, кому это в новинку, всегда можно рассмотреть алгебру, порождённую данными операторами $\partial_t^2$ и $\partial_x^2$ и тождественным (всевозможные линейные комбинации и композиции) и рассматривать умножение операторов, как композицию. Алгебра получается коммутативной.

Теперь хотим сделать линейную замену переменных, такую, что $\partial_\xi = \partial_t + a\partial_x$, $\partial_\eta = \partial_t - a\partial_x$. Ищем $x = x(\xi,\eta)$ и $t = t(\xi,\eta$, такие, что

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \underbrace{\frac{\partial t}{\partial\xi}}_{1}\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial\xi}}_{a}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial\eta} = \underbrace{\frac{\partial t}{\partial\eta}}_{1}\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial\eta}}_{-a}\frac{\partial}{\partial x}$$

Здесь сомнений нет: $x = a\xi - a_\eta$, $t = \xi + \eta$. Обратные выражения к ним

$$\xi = \frac{x+at}{2a}; \quad \eta = \frac{-x+at}{2a}; \quad \left\| \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,t)} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Во что превратится уравнения после такой замены?

$$\partial_\eta \partial_\xi \mathcal{E}\big(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)\big) = \delta\big(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)\big).$$

Уравнения достаточно простое получилось, я лишь хочу понять, что из себя представляет вот эта $\delta$. Согласно формуле замены переменных у обобщённой функции получим следующее

$$\Big(\delta\big(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)\big), \psi(\xi,\eta)\Big) = \left(\delta(x,t), \psi\big(\xi(x,t), \eta(x,t)\big)\left| \det \left\| \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,t)} \right\| \right| \right) = \frac{1}{2a}\varphi(0),$$

то есть $\delta\big(\xi(x,t), \eta(x,t)\big) = \frac{1}{2a}\delta(\xi,\eta) = \frac{1}{2a}\delta(\xi)\delta(\eta)$. Тем самым будем иметь

$$\partial_\eta \partial_\xi \mathcal{E}\big(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)\big) = \frac{1}{2a}\delta(\xi)\delta(\eta).$$

Несложно увидеть, что функция

$$\mathcal{E}\big(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)\big) = \frac{1}{2a}\theta(\xi)\theta(\eta)$$

является решением последнего уравнения (разумно искать решение в виде прямого произведения, подставляем убеждаемся).

Осталось сделать обратную замену.

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{2a}\theta\left(\frac{x+at}{2a}\right)\theta\left(\frac{-x+at}{2a}\right) =$$

должно быть $x + at > 0$ и $-x + at > 0$. Это имеет место тогда и только тогда, когда $|x| < at$. Тогда имеем

$$= \frac{1}{2a}\theta(at - |x|)$$

Что и требовалось доказать. ■

Далее получим результат для трёхмерного случая, а из него уже получим для двумерного. Для двумерного вычисления очень громоздкие.

**Теорема 8.2.** *Пусть* $\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x)$, $\quad x = (x_1, x_2, x_3)$, *где*

$$(\delta_{S_r}, \varphi) = \int\limits_{S_r} \varphi\, dS, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^3).$$

*Тогда* $\Box_a \mathcal{E}(x,t) = (\partial_t^2 - a^2\Delta)\mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t)$, *то есть* $\mathcal{E}(x,t)$ *есть фундаментальное решение трёхмерного волнового оператора.*

**Доказательство.** Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и честно её продифференцируем согласно определению. При перебрасывании производной чётного порядка знак не выносится.

$$\big(\Box_a \mathcal{E}(x,t), \varphi\big) = \big(\mathcal{E}(x,t), \Box_a \varphi\big) = \int\limits_0^\infty \frac{dt}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}} \Box_a \varphi\, dS =$$

Получили уже что-то похожее на цель, но не совсем. Обозначим $r = at$, $dt = dr/a$. Я хочу воспользоваться формулой интегрирования с сферических координатах.

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^\infty \frac{dr}{r}\int\limits_{S_r} \Box_a \varphi\, dS = \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^\infty \frac{dr}{r}\int\limits_{S_r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dS - \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dr}{r}\int\limits_{S_r} \Delta\varphi\, dS =$$

Теперь сделаем замену $t$ на $r$ в функции $\varphi$. Имеем $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}a^2$. Под интегралом по сфере всюду $|x| = r$,

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dr}{r}\int\limits_{S_r} \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\, dS - \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dr}{r}\int\limits_{S_r} \Delta\varphi\, dS = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi_{rr}(x, r/a)}{|x|}\Bigg|_{r=|x|} dx - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta_x \varphi(x, r/a)}{|x|}\Bigg|_{r=|x|} dx$$

Дальше мы должны будем избавляться от $r$. ■

## 9 8 декабря 2014

Мы исследуем выражение $\mathcal{E}_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \quad x=(x_1,x_2,x_3)$. Мы остановились на выражении

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta_x \varphi(x,r/a)}{|x|}\bigg|_{r=|x|} dx. \tag{9}$$

Мы используем формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} u\cos(\nu, x_i)\, dx,$$

где $\nu$ — вектор единичной нормали; из этой формулы Грина в своё время получалась формула интегрирования по частям.

$$\int\limits_{\Omega} f\frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} fg\cos(\nu,x_i)\, dS - \int\limits_{\Omega} f\frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx.$$

Вот это (9) то же самое или нет? У нас не выполнены условия, будем применять формулу Грина в нашем случае для $u = fg$ и доказывать интегрирование по частям для нашего случая отдельно.

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta_x \varphi(x,r/a)}{|x|}\bigg|_{r=|x|} dx = \frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \frac{\Delta_x\varphi\left(x,\frac{r}{a}\right)}{|x|}\bigg|_{r=|x|} dx,$$

где $R>0$ настолько велико, чтобы $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R\times\mathbb{R}$. Такие $R>0$, очевидно, существуют, так как $\operatorname{supp}\varphi$ — компакт. Дальше мы вот что с вами сделаем.

$$\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \frac{\Delta_x\varphi\left(x,\frac{r}{a}\right)}{|x|}\bigg|_{r=|x|} dx = \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\varphi\left(x,\frac{r}{a}\right)\bigg|_{r=|x|} dx =$$

дальше выделим полную производную. Что вы при этом получите. Дифференцируете по $x_i$ и дифференцируете по $r$, как сложную функцию

$$= \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x,r/a)\Big|_{r=|x|}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x,r/a)\big|_{r=|x|}\frac{\partial|x|}{\partial x_i}\right) dx =$$

Дальше я напишу короче. Идея простая: продифференцировали, подставили, продифференцировали, подставили.

$$= \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x,r/a)\big|_{r=|x|}\right) dx - \frac{1}{a}\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_i}(x,r/a)\big|_{r=|x|} =$$

$$= \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x,r/a)\big|_{r=|x|}\cos(\nu,x_i)\, dS -$$

$$- \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi(x,r/a)}{\partial x_i}\Big|_{r=|x|}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x|}\, dx - \frac{1}{a}\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_i}(x,r/a)\frac{\partial|x|}{\partial x_i}\, dx =$$

Давайте запись подсократим. Ясно, что вместо сумм можно писать градиенты. Вектор нормали записывается по направляющим косинусам: $\nu = \big(\cos(\nu,x_1),\cos(\nu,x_2),\cos(\nu,x_3)\big)$.

$$= \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi(x,r/a)}{\partial\nu_x}\bigg|_{r=|x|} dS - \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\nabla_x\varphi(x,r/|x|)\nabla\frac{1}{|x|} - \frac{1}{a}\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\, dx -$$

$$- \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{|x|}\nabla_x\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\nabla|x|\, dx =$$

Сделали то же, что и при интегрировании по частям делаем. Дальше нужно окончательно избавиться от производных $\varphi$

$$= \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi(x,r/a)}{\partial\nu_x}\bigg|_{r=|x|} - \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \varphi(x,r/a)\big|_{r=|x|}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|x|}\,dS +$$
$$+ \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\nabla|x|\nabla\frac{1}{|x|}\,dx + \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \varphi(x,r/a)\Delta\frac{1}{|x|}\,dx -$$
$$- \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \frac{1}{|x|}\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\frac{\partial|x|}{\partial\nu}\,dS + \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \frac{1}{|x|}\varphi_{rr}(x,r/a)\big|_{r=|x|}\nabla|x|\cdot\nabla|x|\,dx +$$
$$+ \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\nabla\frac{1}{|x|}\cdot\nabla|x|\,dx + \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \frac{1}{|x|}\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\Delta|x|\,dx.$$

Всё, что написано, результат, который легко получить, проделав элементарную процедуру выделения полной производной под интегралом (как интегрирование по частям). Дорога прямая, она вас обязательно приведёт к ответу.

Я теперь должен досчитать все пределы до границы. Первое слагаемое, ясно, что стремится к нулю. Ещё один интеграл по поверхности тоже легко оценивается. Чтобы интеграл не пошёл в ноль, нужно подынтегральное выражение больше нуля. $\frac{\partial|x|}{\partial\nu}$ однородный степени один. В другом слагаемом $\Delta\frac{1}{|x|} = 0$. Кроме того, $\nabla|x|\cdot\nabla|x| = 1$. Я это всё сосчитаю. Посмотрим слагаемые с интегралами по шаровому слою, содержащие в подынтегральном выражении первую производную

$$\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\nabla|x|\nabla\frac{1}{|x|}\,dx + \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\nabla\frac{1}{|x|}\cdot\nabla|x|\,dx + \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \frac{1}{|x|}\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\Delta|x|\,dx.$$

Что и них подынтегральное выражение

$$\nabla|x|\nabla\frac{1}{|x|} + \nabla\frac{1}{|x|}\nabla|x| + \frac{\Delta|x|}{|x|}.$$

Я хочу показать, что это будет ноль. Попробуем убедиться, что это действительно так. Что такое модуль $|x| = (\Sigma x_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Значит,

$$\frac{\partial|x|}{\partial x_i} = \frac{1}{2}2x_i\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x_i}{|x|}.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x|} = -\frac{1}{|x|^2}\frac{\partial|x|}{\partial x_i} = -\frac{1}{|x|^2}\frac{x_i}{|x|} = -\frac{x_i}{|x|^3}.$$

Удивительные вещи. Значит, $\nabla|x|\nabla\frac{1}{|x|} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2}{|x|^4} = -\frac{1}{|x|^2}$. Второе слагаемое, аналогично, $\nabla\frac{1}{|x|}\nabla|x| = \frac{\Delta|x|}{|\Delta}$. Можно было проще поступит и посчитать в полярных координатах.

$$\Delta|x| = \left(\frac{\partial^2}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) r\bigg|_{r=|x|} = \frac{2}{r}\big|_{r=|x|} = 2\frac{|}{x}|$$

В тогда конечном итоге мы получим $\frac{\Delta|x|}{|x|} = \frac{2}{|x|}^2$. Таким образом

$$\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \frac{\Delta_x\varphi(x,r/a)}{|x|}\bigg|_{r=|x|} = \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi(x,r/a)}{\partial\nu_x}\big|_{r=|x|} -$$
$$- \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \varphi(x,r/a)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|x|}\,dS - \int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \frac{1}{|x|}\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\frac{\partial|x|}{\partial\nu}\,dS + \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \frac{1}{|x|}\varphi_{rr}(x,r/a)\big|_{r=|x|}\,dx$$

Мне надо $\varepsilon$ устремить к нулю.Несложно увидеть, что

$$\Bigg|\int\limits_{(\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi(x,r/a)}{\partial\nu_x}\Big|_{r=|x|}\,dS\Bigg| = \Bigg|\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S_\varepsilon}\underbrace{\Bigg|\frac{\partial\varphi,r/a)}{\partial\ni_x}\Bigg|_{r=|x|}}_{\leqslant\|\varphi\|_{C^1(\mathbb{R}^4)}}\Bigg|\,dS \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon}\|\varphi\|_{c^1(\mathbb{R}^4)} \to 0 \quad (\varepsilon\to 0).$$

Аналогично,

$$\Bigg|\int\limits_{(\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \frac{1}{|x|}\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|}\frac{\partial|x|}{\partial\nu}\,dS\Bigg| \quad = \quad \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S_\varepsilon}\big|\varphi_r(x,r/a)\big|_{r=|x|} \quad \cdot \quad \Bigg|\frac{\partial|x|}{\partial\nu}\Bigg|\,dS \quad \leqslant \quad \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon}\|\varphi\|_{C^1}(\mathbb{R}^4)$$

В то же время $\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|x|} = \frac{d}{dr}\frac{1}{r}\big|_{r=|x|} = \frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$, если $x\in S_3$.

$$\int\limits_{\partial(B_R\setminus B_\varepsilon)} \varphi(x,r/a)\big|_{r=|x|}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|x|}\,dS = \int\limits_{S_\varepsilon}\varphi(x,\varepsilon/a)\frac{1}{\varepsilon^2}\,dS =$$

$$= 4\pi\varphi(0) + \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{S_\varepsilon}\big(\varphi(x,\varepsilon/a)-\varphi(0)\big)\,dS \to 4\pi\varphi(0)$$

при $\varepsilon\to 0+$, так как

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{S_\varepsilon}\big|\varphi(x,\varepsilon/a)-\varphi(0)\big|\,dS \leqslant \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\sup_{x\in S_\varepsilon}\big|\varphi(x,\varepsilon/a)-\varphi(0)\big| \to 0$$

при $\varepsilon\to 0$ ввиду непрерывности $\varphi$.

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{B_R\setminus B_D}\frac{\Delta_x\varphi(x,r/a)}{|x|}\Bigg|_{r=|x|}dx = -4\pi\varphi(0) + \int\limits_{B_r}\frac{1}{|}x|\varphi_{rr}(x,r/a)\big|_{\varepsilon=|x|}\,dx.$$

И мы будем иметь

$$\big(\Box_a\mathcal{E}_3(x,t),\varphi(x,t)\big) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi_{rr}(x,r/a)}{|x|}\Bigg|_{r=|x|}x - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\Delta_x\varphi(x,r/a)}{|x|}\Bigg|_{r=|x|}dx = \varphi(0).$$

То есть $\Box_a\mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t)$, что и требовалось доказать.

## 10 15 декабря

Есть такое свойство у обобщённой функции, определённой на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, которая на самом деле зависит только от первых $n$ переменных, то есть зависимость от $x_{n+1}$ чисто формальная.

**Определение 10.1.** *Говорим, что $f(x)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ допускает продолжение $f_0(x')\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ на функции $\varphi(x')\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $x=(x',x_{n+1})$, если для любого компактного исчерпания единицы $\eta_k\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $k=1,2,\ldots$ имеет место соотношение*

$$\big(f_0(x'),\varphi(x')\big) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x),\varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big). \tag{10}$$

<++>

Сразу возникает вопрос о корректности определения. Вот возьмём мы другое компактное исчерпание единицы, вдруг получится другой предел. Требуется, понять, почему предел не зависит от компактного исчерпания единицы. Это будет в качестве упражнения.

**Упражнение 10.1.** *Пусть для любого компактного исчерпания едницы существует предел в правой части (10). Докажите, что этот предел не зависит от выбора $\eta_k$, $k=1,2,\ldots$*

Приведу готовое решение в силу важности упражнения. Пусть $\eta_l\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и $\lambda_k\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $k=1,2,\ldots$ — два компактных исчерпания единицы. Тогда $\eta_1,\lambda_1,\eta_2,\lambda_2,\eta_3,\lambda_3,\ldots$ — тоже компактное исчерпания единицы.

**Теорема 10.1.** *Пусть* $\mathcal{L} = \sum\limits_{q=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}^q}\mathcal{L}_q + \mathcal{L}_0$, *где дифференциальный оператор*

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{|\alpha'|\leqslant m_0} a_{\alpha'}\partial^{\alpha'}, \quad \alpha' = (\alpha_1,\dots,\alpha_n), \quad \partial^{\alpha'} = \frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{|\alpha_n|}}, \quad |\alpha'| = \alpha_1+\dots+\alpha_n,$$

*и оператор*

$$\mathcal{L}_q = \sum_{|\alpha|\leqslant m_q} a_q\partial^{\alpha}, \quad \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}), \quad \partial^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_{n+1}^{|\alpha_{n+1}|}}, \quad |\alpha| = \alpha_1+\dots+\alpha_{n+1},$$

*все числа* $a_{\alpha'}, a_\alpha \in \mathbb{C}$.

*Предположим, что* $\mathcal{L}u = f(x')\delta(x_{n+1})$ *и при этом* $u(x)$ *допускает продолжение* $u_0(x')$ *на пространстве основных функций* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, *то есть*

$$\big(u_0(x'),\varphi(x')\big) = \lim_{k\to\infty}\big(u(x),\varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big)$$

*для любого компактного исчерпания единицы* $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $k = 1,\dots,n$.

*Тогда* $\mathcal{L}_0 u_o(x') = f(x')$.

**Доказательство.** Пусть $\varphi(x') \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\eta_k(x_{n+1}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $k = 1,2,\dots$ — компактное исчерпание единицы. Имеем

$$\big(\mathcal{L}u,\varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big) = \big(f(x')\delta(x_{n+1}),\varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big).$$

Несложно заметить, что такой вот предел

$$\lim_{k\to\infty}\big(f(x')\delta(x_{n+1}),\varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x'),\varphi(x')\big)\big(\delta(x_{n+1}),\eta_k(x_{n+1})\big) = \\ = \big(f(x'),\varphi(x')\big)\lim_{k\to\infty}\eta_k(0) = \big(f(x'),\varphi(x')\big).$$

С другой стороны посчитаем предел

$$\big(\mathcal{L}u,\varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big) = \Big(u(x),\mathcal{L}^*\big(\varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big)\Big),$$

где $\mathcal{L}^* = \sum\limits_{q=1}^{N}(-1)^q\frac{\partial}{\partial x_n^q}\mathcal{L}_q^* + \mathcal{L}_0^*$ — формально сопряжённый оператор к $\mathcal{L}$, где

$$\mathcal{L}_q^* = \sum_{|\alpha|\leqslant m_q}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha\partial^\alpha,\ q = 1,\dots,N, \quad \mathcal{L}_0^* = \sum_{|\alpha'|\leqslant m_q}(-1)^{|\alpha'|}a_{\alpha'}\partial^{\alpha'}.$$

Теперь мы можем продолжить формулу (что там за $l_q$ и $M$ нам совершенно не важно)

$$\big(\mathcal{L}u,\varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big) = \Big(u(x),\mathcal{L}^*\big(\varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big)\Big) = \eta_k(x_{n+1})\mathcal{L}_o^*\varphi(x') + \sum_{q=1}^{M}\frac{d^q\eta_k(x_{n+1})}{dx_n^q}\sum_{|\alpha'|\leqslant l_q} b_{\alpha'}\partial^{\alpha'}\varphi(x')$$

Здесь $b_{\alpha'} \in \mathbb{C}$, какие — совершенно не важно. Для удобства обозначим $\varphi_q(x') = \sum\limits_{|\alpha'|\leqslant l_q} b_{\alpha'}\partial^{\alpha'}\varphi(x')$. Таким образом, получим

$$\big(\mathcal{L}u(x),\varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big) = \big(u(x),\eta_k(x_{n+1})\mathcal{L}_0^*\varphi(x')\big) + \sum_{q=1}^{M}\bigg(u(x),\frac{d^q\eta_k(x_{n+1})}{dx_n^q}\varphi_q(x')\bigg).$$

При этом, очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty}\big(u(x),\eta_k(x_{n+1})\mathcal{L}_0^*(x')\big) = \big(u_0(x'),\mathcal{L}_0^*\varphi(x')\big) = \big(\mathcal{L}_0 u(x'),\varphi(x')\big),$$

равняется тому, чему нужно для нашего уравнения. В то же время для любого $q = 1,2,\dots,M$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}\bigg(u(x),\frac{d^q\eta_k(x_{n+1})}{dx_n^q}\varphi_q(x')\bigg) = 0.$$

Почему? Это в каком-то смысле у вас рассуждение уже встречалось, когда выписывали правило дифференцирования свёртки. Там для похожего предела надо было доказать, что предел равен нулю. В самом деле, обозначим

$$\lambda_k(x_{n+1}) = \eta_k(x_{n+1}) + \frac{d^q \eta_k(x_{n+1})}{dx_n^q}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Эти $\lambda_k$ дадут компактное исчерпание единицы. Тем самым пределы от выражения на $\eta_k$ и выражения на $\lambda_k$ должны равняться одному и тому же.

$$\big(u_o(x'), \varphi(x')\big) = \lim_{k\to\infty} \big(u(x), \eta_k(x_{n+1})\varphi_q(x')\big) = \lim_{k\to\infty} \big(u(x), \lambda_k(x_{n+1})\varphi_q(x')\big).$$

Из этого равенства следует, что

$$\cancel{\lim_{k\to\infty} \big(u(x), \eta_k(x_{n+1})\varphi_q(x')\big)} = \cancel{\lim_{k\to\infty} \big(u(x), \eta_k(x_{n+1})\varphi(x'\big)} + \lim_{k\to\infty} \left(u(x), \frac{d^q \eta_k(x_{n+1})}{dx_{n+1}^q}(x')\right).$$

Откуда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \left(u(x), \frac{d^q \eta_k(x_{n+1})}{dx_n^q}\varphi_q(x')\right) = 0.$$

Последнее влечёт за собой

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{q=1}^{M} \left(u(x), \frac{d^q \eta_k(x_{n+1})}{dx_{n+1}^q}\varphi_q(x')\right) = 0.$$

Поэтому будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} \big(\mathcal{L}u, \varphi(x')\eta_k(x_{n+1})\big) = \big(\mathcal{L}_0 u_0(x'), \varphi(x')\big).$$

Таким образом, получим

$$\big(\mathcal{L}_0 u_0(x'), \varphi(x')\big) = \big(f(x'), \varphi(x')\big)$$

или, другими словами, $\mathcal{L}u_0(x') = f(x')$, что и требовалось доказать. ∎

Попробуем в качестве следствия получить фундаментельное решение оператора для $n = 2$.

## 10.1 Фундаментальное решение двумерного волнового оператора

**Теорема 10.2.** *Пусть* $\mathcal{E}_2(x,t) = \frac{\varnothing(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}$, *где* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. *Тогда*

$$\Box_a \mathcal{E}_2(x,t) = \delta(x,t), \quad \Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

*Другими словами,* $\mathcal{E}_2(x,t)$ *является фундаментальным решением двумерного волнового оператора.*

Мы с вами знаем фундаментальное решение трёхмерного.

**Доказательство.** Мы знаем, что обобщённая функция

$$\mathcal{E}_3(x,t) = \frac{\varnothing(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

является фундаментальным решением трёхмерного волнового оператора, то есть

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_3}{\partial t^2} + a^2\left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_3}{\partial x_3^2}\right) = \underbrace{\delta(t)\delta(x')\delta(x_3)}_{\delta(x,t)}, \quad x' = (x_1, x_2).$$

Покажем, что $\mathcal{E}_3(x,t)$ допускает продолжение на пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, причём это продолжение как раз есть функция $\mathcal{E}_2(x',t)$, то есть вот такое соотношение нужно доказать

$$\lim_{k\to\infty} \big(\mathcal{E}_3(x,t), \eta_k(x_3)\varphi(x',t)\big) = \big(\mathcal{E}_2(x',t), \varphi(x',t)\big).$$

Действительно

$$\big(\mathcal{E}_3(x,t), \eta_k(x_3)\varphi(x',t)\big) = \left(\frac{\varnothing(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \eta_k(x_3)\varphi(x')\right) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty \frac{dt}{t} \int\limits_{|x|=at} \eta_k(x_3)\varphi(x',t)\, dS.$$

У нас $t$ фиксировано, значит, $\varphi$ зависит только от $x'$. Поэтому интеграл можно так устроить. Есть элемент поверхности сферы. Его ожно спроецировать на сечение. Как будут связаны площади $dS$ и $dS'$ на $x$ и $x'$ соответственно? $dx' = dS' = dS\cos(\nu, x_3)$, где $\nu$ — внешняя нормаль. Теперь надо сосчитать этот самый $\cos(\nu, x_3)$.

Нужно взять радиус $at$ и $\cos(\nu, x_3) = \frac{\sqrt{a^2t^2-|x'|^2}}{at}$. И теперь я могу написать, чему равно $dS$

$$dS = \frac{at\,dS'}{\sqrt{a^2t^2-|x'|^2}}.$$

Интегралы по верхней половинке сферы и по нижней одинаковы. Сосчитаем один и удвоим.

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{t}\int\limits_{|x|=at}\eta_k(x_3)\varphi(x',t)\,dS = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^\infty dt\int\limits_{|x'|\leqslant at}\frac{\eta_k(x_3)\varphi(x',t)}{\sqrt{a^2t^2-|x'|^2}}\,dx' \to$$
$$\to \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^\infty dt\int\limits_{|x'|\leqslant at}\frac{\varphi(x',t)}{\sqrt{a^2t^2-|x'|^2}}\,dx' = \big(\mathcal{E}_2(x',t),\varphi(x',t)\big).$$

по теореме Лебега об ограниченной сходимости. Доказательство завершается применением предыдущей теоремы. ■

# 11 Задача Коши для уравнения теплопроводности

Задача Коши для уравнения теплопроводности имеет вид

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + f(x,t), & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0, a=\text{const}>0;\\ u(x,0)=u_0(x). \end{cases} \tag{11}$$

Мы будем понимать обобщённую задачу Коши, как в учебнике Владимирова, то есть решение из класса $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Но всё началось с классической задачи.

**Определение 11.1.** *Обозначим за $\mathfrak{M}$ множество измеримых функций $f$, таких, что во-первых,*

$$\forall\, T>0 \quad f\in\mathcal{L}_\infty\big(\mathbb{R}^N\times[0,T]\big),$$

*и при этом $f=0$ почти всюду на промежутке $\mathbb{R}^n\times(-\infty,0)$*

То есть множеством определения является $\mathbb{R}^{n+1}$, они существенно ограничены на любом ограниченном промежутке справа от нуля и эквивалентны нулевой функции на отрицательной полуоси по последнему аргументу.

Сколько нужно гладкостей для решения? Нужно диффферецировать по иксам, по $t$, и нужно выполнение равенства $u(x,0)=u_0(x)$. Вроде бы этого достаточно. Но тут есть такая деталь. В тридцатые годы академик Тихонов заметил, что если рассмотреть задачу $u_t=\Delta u$ и $u(x,0)=0$, то ноль очевидно решение. Но ведь есть и ещё решения нетривиальные. Физически эта ситуация абсурдна, ведь такая задача описывает нагревания бесконечно длинного стержня. Получается, что и без источника тепла стержень может нагреться. Тихонов обратил на это внимание. Как преодолеть эту ситуацию? Мы не будем ловить точность. Мы будем использовать класс $\mathfrak{M}$, его достаточно. Ещё, мы потребуем немножно уже класс дифференцирования.

**Определение 11.2.** *Классическим решением задачи Коши 11 называется функция*[1]

$$u\in M\cap C^2\big(\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\big)\cap C\big(\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\big),$$

*такая что выполнено*[2] (11).

Мы хотим доказывать существование и единственность решения. Это удобнее делать для обобщённых решений. Мы сначала всё для них сделаем, а потом покажем, как это связано с классическими решениями.

Пусть в (11) $u\in C^{2,1}\big(\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\big)\cap C\big(\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\big)$ (два раза дифференцируема по $x$, один раз по $t$), $f\in C\big(\mathbb{R}^n\cap(0,\infty)\big)$, $u_0\in C(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$\widetilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & x\in\mathbb{R}^n,\ t\geqslant 0\\ 0 & ,x\in\mathbb{R}^n, t<0. \end{cases}$$

[1] По $t$ избыточное требование на дифференцируемость. Но мы будем пользоваться такой устоявшейся подстановкой. Здесь следует обратить внимание, что дифференцируемость требудется на открытом множестве.

[2] В классическом смысле дифференцирования, как вас учили на первом курсе.

И подставим $\widetilde{u}$ в уравнение, производя обобщённое дифференцирование. Для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ имеем

$$(\widetilde{u}_t - a^2\Delta\widetilde{u}, \varphi) = (\widetilde{u}, -\varphi_t - a^2\Delta\varphi) = -\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \widetilde{u}\,\varphi_t\,dx\,dt - a^2 \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \widetilde{u}\Delta\varphi\,dx\,dt =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^\infty u\,\varphi_t\,dt\,dx - a^2\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n} u\,\Delta\varphi\,dx\,dt = \text{Формула у нас такая} \int\limits_a^b h'\,g\,dt = fg\big|_a^b - \int\limits_a^b f\,g'\,dt$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(u(x,0)\,\varphi(x,0) + \int\limits_0^\infty u_t\,\varphi\,dt\right)dx - a^2\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta u\,\varphi\,dx\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx + \int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n}\underbrace{(u_t - a^2\Delta u)}_{=f}\varphi\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx + \int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\,\varphi(x,t)\,dx\,dt =$$

запишем это через прямое произведение обощённых функций $u_0(x), \delta(t)$.

$$= \big(u_0(x)\delta(t), \varphi(x,t)\big) + +\big(\widetilde{f}(x,t), \varphi(x,t)\big)$$

где $\widetilde{f}$ — локально суммируемая функция, определённая формулой

$$\widetilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n,\ t \geqslant 0; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t < 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\widetilde{u}_t - a^2\Delta\widetilde{u} = \widetilde{f}(x,t) + u_0(x)\,\delta(t). \tag{12}$$

Вот, что получается из классического решения. Теперь всё готово для того, чтобы дать определение обобщённого решения.

**Определение 11.3.** *Обобщённым решением задачи Коши (11) называется функция $\widetilde{u} \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющая соотношению (12). При этом мы предполагаем, что $\widetilde{f} \in \mathfrak{M}$ и $u_0 \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Найти решение уравнения (12) нам проще, чем решить задачу Коши. Там надо было искать определённый класс гладкости, смотреть, что выполнено начальное условие, ещё были другие требования. Здесь у нас только одно уравнение. Оказывается, что в таком классе решения, если существуют, то единственные. Спрашивается, при каких условиях? Вот при тех, которые мы написали

- $\widetilde{u} \in \mathfrak{M}$;
- $\widetilde{f} \in \mathfrak{M}$;
- $u_0 \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Как показать это? У нас метод один: взять фундаментальное решение, доказать, что существует свёртка. Сформулируем результат в виде теоремы.

**Теорема 11.1.** *Пусть*

- $\widetilde{f} \in \mathfrak{M}$;
- $u_0 \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

*Тогда обобщённая задача Коши имеет, причём единственное, решение $\widetilde{u} \in \mathfrak{M}$. Более того, мы можем написать даже формулу, которая позволяет сосчитать обобщённое решение: формула Пуассона*

$$\widetilde{u}(x,t) = \theta(t)\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\xi,\tau)}{2\,a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\,a^2(t-\tau)}}\,d\xi\,d\tau + \frac{\theta(t)}{(2\,a\sqrt{\pi}t)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi)\,e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\,a^2 t}}\,d\xi. \tag{13}$$

*Обратите внимание, что все интегралы здесь корректно определены. В любой конечной полосе по $t$ функции $f$ ограничены, значит, первый интеграл сходится.*

**Доказательство.** Покажем, что существует свёртка $\widetilde{u}$

$$\mathcal{E}(x,t) \star \big(\widetilde{f}(x,t) + u_0(x)\,\delta(t)\big),$$

где

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2\,a\sqrt{\pi\,t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4\,a^2\,t}}$$

есть фундаментальное решение уравнения (или, можно сказать, оператора) теплопроводности.

В самом деле, пусть $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+2})$, $k = 1, 2, \ldots$ — компактное исчерпание единицы. Имеем $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\lim_{k\to\infty} \Big(\mathcal{E}(x,t)\big(\widetilde{f}(\xi,\tau) + \widetilde{u}_0(\xi)\,\delta(\tau)\big), \varphi(x+\xi, t+\tau)\,\eta_k(x,t,\xi,\tau)\Big) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \big(\mathcal{E}(x,t)\widetilde{f}(\xi,\tau), \varphi(x+\xi,t+\tau)\eta_k(x,t,\xi,\tau)\big) + \lim_{k\to\infty} \big(\mathcal{E}(x,t)\,\widetilde{u}_0(\xi)\,\delta(\tau), \varphi(x+\xi,t+\tau)\eta_k(x,t,\xi,\tau)\big).$$

Заметим, что $\widetilde{f}$ локально суммируемая функция. Значит, следующую скобку можем заменить на интеграл.

$$\big(\mathcal{E}(x,t)\widetilde{f}(\xi\tau), \varphi(x+\xi,t+\tau)\eta_k(x,t,\xi,\tau)\big) =$$
$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x,t)\widetilde{f}(\xi,\tau)\varphi(\underbrace{x+\xi}_{y}, \underbrace{t+\tau}_{s})\eta_k(x,t,\xi,\tau)\,dx\,\xi\,dt\,d\tau =$$

$x = y - \xi$, $t = s - \tau$ — простейшая линейная замена. Каждый модуль якобиана единица.

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \mathcal{E}(y-\xi, s-\tau)\widetilde{f}(\xi,\tau)\varphi(y,s)\eta_k(y-\xi,s-\tau,\xi,\tau)\,ds\,d\tau\,dy\,d\xi =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{\theta(s-\tau)e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4\,a^2(s-\tau)}}}{(2\,a\sqrt{\pi(s-\tau)})^n}\widetilde{f}(\xi,\tau)\varphi(y,s)\eta_k(y-\xi,s-\tau,\xi,\tau)\,ds\,d\tau\,dy\,d\xi =$$

Может ли $s > \tau$? там мы интегрируем ноль, $\theta = 0$ при отрицательных аргументах

$$= \int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y,s)\,dy\,ds \int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta(s-\tau)e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4\,a^2(s-\tau)}}}{(2\,a\sqrt{\pi(s-\tau)})^n}\widetilde{f}(\xi,\tau)\eta_k(y-\xi,s-\tau,\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi =$$

интегрирование по $\tau$ могу проводить не до $\infty$, а до $s$, но не совсем

Перепишем интеграл отдельно

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta(s-\tau)e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4\,a^2(s-\tau)}}}{(2\,a\sqrt{\pi(s-\tau)})^n}\widetilde{f}(\xi,\tau)\eta_k(y-\xi,s-\tau,\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi =$$
$$\theta(s)\int\limits_0^s \frac{e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4\,a^2(s-\tau)}}}{(2\,a\sqrt{\pi(s-\tau)})^n} f(\xi,\tau)\,\eta_k(y-\xi,s-\tau,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \to$$
$$\to \theta(s)\int\limits_0^s \frac{e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4\,a^2(s-\tau)}}}{(2\,a\sqrt{\pi(s-\tau)})^n}\widetilde{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

по теореме Лебега об ограниченной сходимости. ($\theta(s)$ появилась чисто формально, чтобы при $s < 0$ точно получился ноль, ведь $\int\limits_0^s$ при отрицательных $s$ определён и не обязан быть нулём.)

Давайте покажем, что теорема об ограниченной сходимости здесь действительно применима, то есть укажем мажоранту.

$$\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4\,a^2(s-\tau)}}}{(2\,a\sqrt{\pi(s-\tau)})^n} \underbrace{\big|\widetilde{f}(\xi,\tau)\big|}_{\widetilde{f}\in\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n\times(0,s))} \big|\eta_k(y-\xi,s-\tau,\xi,\tau)\big|\,d\xi\,d\tau \leqslant \mathrm{const}\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4\,a^2(s-\tau)}}}{(2\,a\sqrt{\pi(s-\tau)})^n}\,d\xi\,d\tau =$$

$$\left\{\begin{aligned} \zeta &= \tfrac{y-\xi}{2\,a\sqrt{s-\tau}} \\ \xi &= -2a\sqrt{s-\tau}\,\zeta + y \\ d\zeta &= 2\,a\big(2\,a\sqrt{s-\tau}\big)^n\,d\zeta \end{aligned}\right\} = \text{это всё векторные выражения, якобиан считаем}$$

$$= \frac{1}{\pi^{n/2}}\int\limits_0^s \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\zeta|^2}\,d\zeta}_{<\infty}\,d\tau.$$

Теперь я могу написать то, чего и хотел

$$= \left(\theta(s) \int\limits_0^s \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4\,a^2(s-\tau)}}}{(2\,a\,\sqrt{\pi(s-\tau)})^n} f(\xi,\tau)\,\eta_k(y-\xi, s-\tau, \xi, \tau)\,d\xi\,d\tau, \varphi(y,s)\right)$$

Мы получили с точностью до обозначений первое слагаемое формулы Пуассона. Всё остальное будет точно так же.

Сейчас второе слагаемое получим. Со вторым слагаемым связано более озорное выражение, там есть некая функция, которая не является локально суммируемой.

Слово Россия было впервые написано греческим

$$\rho\omega\sigma\iota\alpha\zeta$$

А русские первые князья говорили на староскандинавском. И вот эти греческие договоры написаны на старостандинавском и на греческом. Происхождение слова «собака» до сих пор гадают.

$$\Big(\mathcal{E}(x,t) \star \big(u_0(x)\delta(t)\big), \varphi(x,t)\Big) = \lim_{k\to\infty} \big(\mathcal{E}(x,t)\,u_0(\xi)\delta(\tau), \eta_k(x,t,\xi,\tau)\,\varphi(x+\xi,t+\tau)\big).$$

Надо доказать, что предел существует для любого компактного исчерпания единицы. Нужно просто вспомнить определение прямого произведения. Нужно избавиться от $\delta$-функции. Умножения идут справа налево.

$$\Big(\mathcal{E}(x,t) \star \big(u_0(x)\delta(t)\big), \varphi(x,t)\Big) = \lim_{k\to\infty} \big(\mathcal{E}(x,t)\,u_0(\xi)\delta(\tau), \eta_k(x,t,\xi,\tau)\,\varphi(x+\xi,t+\tau)\big) =$$

$$= \bigg(\mathcal{E}(x,t), \Big(u_0(\xi), \big(\delta(\tau), \eta_k(x,t,\xi,\tau)\varphi(x+\xi,t+\tau)\big)\Big)\bigg) =$$

$$= \Big(\mathcal{E}(x,t), \big(u_0(\xi), \eta_k(x,t,\xi,0)\varphi(x+\xi,t)\big)\Big) = \left(\mathcal{E}(x,t), \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi)\,\eta_k(x,t,\xi,0)\varphi(x+\xi,t)\,d\xi\right) =$$

вспоминаем, что такое $\mathcal{E}(x,t)$. Ещё один интеграл будет, где вместо $\theta$ интегрируем от 0 до $+\infty$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4\,a^2\,t}}}{(2\,a\,\sqrt{\pi\,t})^n}\,dx\,dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi)\,\eta_k(x,t,\xi,0)\varphi(x+\xi,t)\,d\xi =$$

Моё искуство состоит только в том, как правильно расставить интегралы

$$\begin{Bmatrix} y = x+\xi \\ dx = dy \\ x = y-\xi \end{Bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4\,a^2\,t}}}{(2\,a\,\sqrt{\pi\,t})^n} u_0(\xi)\eta_k(y-\xi,t,\xi,0)\varphi(y,t)\,d\xi\,dy\,dt \to \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y,t)\,dy\,dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4\,a^2\,t}}}{(2\,a\,\sqrt{\pi\,t})^n} u_0(\xi)\,d\xi =$$

Я снова хочу применить (применил) теорему Лебега об ограниченной сходимости. В чём отличие от предыдущего случая? Один интеграл берётся по $t$, один по $y$, один по $\xi$. По $y$ и $t$ интегрируем по компактам-проекциям носителей на области изменения переменной интегрирования. Нужно при фиксированном $y$ и $t$ оценить интеграл по $\xi$. Сделаем ещё один шаг в цепочки равенств, а потом я дам ещё один комментарий по поводу применения теоремы об ограниченной сходимости.

$$\left(\frac{\theta(t)}{(2\,a\,\sqrt{\pi\,t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4\,a^2\,t}}\,u_0(\xi)\,d\xi, \varphi(y,t)\right)$$

Это есть ни что иное, как второе слагаемое в формуле Пуассона.

А теперь покажем, как предельный переход осуществили, применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости. Мы должны взять всё подынтегральное выражение и построить для него мажоранту. То, что вот это всё сходится почти всюду вот к тому, что у вас получается, когда $\eta_k$ выбросите, значит, нет никаких сомнений. Это просто следует из того, что $\eta_k$ — это компактное исчерпание единицы. Давайте построим мажоранту, то есть функцию, которая от $k$ не зависит.

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4\,a^2\,t}}}{(2\,a\,\sqrt{\pi\,t})^n} \underbrace{\big|u_0(\xi)\big|}_{\in\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n)} \underbrace{\big|\varphi(y,t)\big|}_{\in\mathcal{D}^{n+1}} \underbrace{\big|\eta_k(y-\xi,t,\xi,0)\big|}_{\text{комп. исч. ед.}} \,d\xi\,dy\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi} dy\,dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4\,a^2\,t}}}{(2\,a\,\sqrt{\pi\,t})^n}\,d\xi =$$

$$\left\{\begin{matrix} \zeta = \frac{y-\xi}{2\,a\,\sqrt{t}} \\ \xi = y - 2\,a\,\sqrt{t}\,\zeta \\ d\xi = (2\,a\,\sqrt{t})^n\,d\zeta \end{matrix}\right\} \leqslant$$

$$\text{const} \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi} dy\,dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\zeta|^2}\,\zeta < \infty.$$

Таким образом, в качестве мажоранты в теореме Лебега об ограниченной сходимости возьмём

$$F(y,\xi,t) = \text{const}\,\chi_{\operatorname{supp}\varphi}(y,t)\frac{e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4\,a^2\,t}}}{(2\,a\,\sqrt{\pi\,t})^n}.$$

Тем самым получили мы формулу Пуассона.

Надо показать, что функция, определяемая формулой Пуассона, лежит в классе $\mathfrak{M}$. Очевидно

$$u(x,t) = \theta(t)\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi,\tau)}{(2\,a\,\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\,a^2(t-\tau)}}\,d\xi\,d\tau + \frac{\theta(t)}{(2\,a\,\sqrt{\pi\,t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|}{4\,a^2\,t}}\,d\xi \in \mathfrak{M}.$$

Это останется в качестве упражнения. Делается с помощью той же заменой, что и оценки для теореме об ограниченной сходимости, но здесь нужно доказать, что $u \in \mathcal{L}_\infty\big(\mathbb{R}^n \times (0,T)\big)$ для любого $0 < T < \infty$. Воспользуйтесь заменой

$$\zeta = \frac{x-\xi}{2\,a\,\sqrt{t-\tau}}; \qquad \zeta = \frac{x-\xi}{4\,a\,\sqrt{t}}.$$

■

## 12 2 Марта

Чтобы обобщённое решение стало классическим требуется некоторое дополнительное условие.

**Теорема 12.1.** *Пусть $g \in C^2\big(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\big)$, все производные $\partial^\alpha f \in \mathfrak{M}$, $|\alpha| \leqslant 2$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})$ — мультииндекс, $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда задача Коши*

$$\begin{cases} u_t = a^2\,\Delta u + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{14}$$

*имеет, причём единственное, решение $u \in C^2\big(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)\big) \cap \big(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\big)$ (так называемое классическое решение). Это решение выражается формулой Пуассона (мы уже писали, но сейчас будет некоторый нюанс)*

$$u(x,t) = \underbrace{\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi,\tau)}{\Big(2\,a\,\sqrt{\pi(t-\tau)}\Big)^n}\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\,a^2\,(t-\tau)}}\,d\xi\,d\tau}_{I_1(x,t)} + \underbrace{\frac{1}{\big(2\,a\,\sqrt{\pi\,t}\big)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\,a^2\,t}}\,d\xi}_{I_2(x,t)}\,. \tag{15}$$

**Доказательство.** Согласно предыдущей теореме, задача Коши (14) имеет единственное обобщённое решение, которое выражается формулой Пуассона для обобщённого решения, совпадающей с (15) при $t > 0$. Нужно доказать, что получаемое решение имеет нужный класс гладкости.

Пусть $\widetilde{u}$ — обобщённое решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. При этом $\widetilde{u}$ задаётся формулой

$$\widetilde{u}(x,t) = \theta(t)\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi,\tau)}{\Big(2\,a\,\sqrt{\pi(t-\tau)}\Big)^n}\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\,a^2\,(t-\tau)}}\,d\xi\,d\tau + \frac{1}{\big(2\,a\,\sqrt{\pi\,t}\big)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\,a^2\,t}}\,d\xi.$$

Если все нужные производные обобщённого решение можно посчитать в классическом смысле, то это всё равно что классическое решение обобщённого решение можно посчитать в классическом смысле, то это всё равно что классическое решение. Функция $\widetilde{u}$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{u}_t = a^2\,\Delta\widetilde{u} + \widetilde{f}(x,t) + u_0(x)\,\delta(t).$$

Покажем, что правая часть (15) принадлежит классу $C^2\big(\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\big)\cap C\big(\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\big)$. Покажем сначала, что $I_1\in C\big(\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\big)$. Пусть $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$. Покажем что $I_1$ непрерывно в точке $(x,t)$. Имеем

$$\big|I_1(x,t)-I_1(x_0,t_0)\big| = \Bigg|\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\xi,\tau)}{\Big(2\,a\,\sqrt{\pi(t-\tau)}\Big)^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\,a^2\,(t-\tau)}}\,d\xi\,d\tau - \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\xi,\tau)}{\Big(2\,a\,\sqrt{\pi(t-\tau)}\Big)^n}e^{-\frac{|x_0-\xi|^2}{4\,a^2\,(t_0-\tau)}}\,d\xi\,d\tau.$$

Имеем

$$I_1(x,t) = \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\xi,\tau)}{\Big(2\,a\,\sqrt{\pi(t-\tau)}\Big)^n}\,e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\,a^2\,(t-\tau)}}\,d\xi\,d\tau = \left\{\begin{matrix} y=\frac{x-\xi}{2\,a\,\sqrt{t-\tau}} \\ \xi = x-2\,a\sqrt{t-\tau}\,y \\ d\xi = \big(2\,a\sqrt{t-\tau}\big)^n\,dy\end{matrix}\right\} =$$
$$= \frac{1}{\pi^{n/1}}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-2\,a\,sqrtt-\tau y,\tau)e^{-|y|^2}\,dy\,\tau = \left\{\begin{matrix} z=t-\tau \\ d\tau=-dz\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi^{n/2}}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-2\,a\sqrt{z}\,y,t-z)e^{-|y|^2}\,dy\,dz.$$

Вернёмся к оценке разности

$$\big|I_1(x,t)-I_1(x_0,t_0)\big| = \frac{1}{\pi^{n/2}}\Bigg|\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-2\,a\sqrt{z}\,y,t-z)e^{-|y|^2}\,dy\,dz - \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-2\,a\sqrt{z}\,y,t_0-z)e^{-|y|^2}\,dy\,dz.$$

Есть загвоздка, мы интегрируем по $\mathbb{R}^n$, надо посмотреть на экспоненту. Ещё один момент, у нас функция класса $\mathfrak{M}$. Разобьём интеграл на два. Сначала будет интегрировать по замкнутому шару, а потом до дополнению (последний интеграл будет маленький, а на компакте мы воспользуемся равномерной непрерывностью).

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-2a\sqrt{z}\,y,t-z)e^{-|y|^2}\,dy\,dz - \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_0-2a\sqrt{z}\,y,t_0-z)e^{-|y|^2}\,dy\,dz =$$
$$= \int\limits_{t_0}^t\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-2a\sqrt{z}\,y,t-z)e^{-|y|^2}\,dy\,dz + \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big(f(x-2a\sqrt{z}\,y,t-z)-f(x_0-2a\sqrt{z}\,y,t_0-z)\big)e^{-|y|^2}\,dy\,dz.$$

Оценим для некоторого $\varepsilon\in(0,1)$ и $|t-t_0|<\varepsilon$

$$\Bigg|\int\limits_{t_0}^t\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-2a\sqrt{z}y,t-z)e^{-|y|^2}\,dy\,dz\Bigg| \leqslant \underbrace{|t-t_0|}_{<\varepsilon}\,\|f\|_{\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n\times[0,t_0+1])}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-|y|^2}\,dy < \infty$$

Тогда

$$\int\limits_0^{t_0}\big|\underbrace{f(x-2a\sqrt{z}y,t-z)-f(x_0-2a\sqrt{z}y,t_0-z)}_{g(x,x_0,t,t_0,y,z)}\big|e^{-|y|^2}\,dy\,dz =$$
$$= \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{B_r}\big|g(x,x_0,t,t_0,y,z)\big|e^{-|y|^2}\,dy\,dz + \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}\big|g(x,x_0,t,t_0,y,z)\big|e^{-|y|^2}\,dy\,dz$$

Первый интеграл по равномерной непрерывности, а второй так же, как первое слагаемое, ведь $f$ из $\mathfrak{M}$

$$\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}\big|g(x,x_0,t,t_0,y,z)\big|e^{-|y|^2}\,dy\,dz \leqslant 2\,t_0\,\|f\|_{\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n\times[0,t_0])}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_r}e^{-|y|^2}\,dy$$

А другой интеграл

$$\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{B_r}\left|g(x,x_0,t,t_0,y,z)\right|e^{-|y|^2}\,dy\,dz\leqslant t_0\sup_{\substack{|x-x_0|<\varepsilon\\|t-t_0|<\varepsilon\\y\in\overline{B}_r\\z\in[0,t_0]}}\left|g(x,x_0,t,t_0,y,z)\right|$$

Зафиксировав $r$ выбираем $\varepsilon$. А потом $r\to\infty$. ■