1 Лекция от 16.10

We know that something shows the motion of the string; В прошлый раз мы выяснили, что волновое уравнение описывает поперечное колебание струны и продольное движение твёрдого тела, фактически распространение звуковых колебаний.

В прошлый раз рассматривали движение бегущей волны. Сегодня посмотрим на стоячую волну.

We will start with method of variable separation.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;$$

Let's consider the next task.

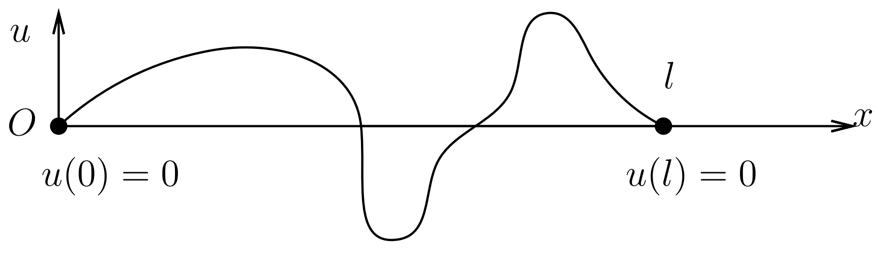

Рис. 1. Волна

Let's make some tricks

$$\begin{aligned} u &= Y(x) \cdot \theta(t); \\ Y \cdot \theta'' - c^2 \theta Y'' &= 0 \Big| \frac{1}{Y\theta}; \\ \frac{1}{\theta}\theta'' = c^2 \frac{1}{Y}'' &= -\omega^2. \end{aligned}$$

Итак, это раздеение переменный. Поделили подставили в волновое уравнение в виде произведения функций от одной переменной. Знак ω^2 выбирается из физических соображение, с ним получается реализуемое физическое решение.

Получаются два уравнения

$$\begin{aligned} \theta'' + \omega^2 \theta &= 0; \\ Y'' + \frac{\omega^2}{c^2} Y &= 0. \end{aligned}$$

Теперь мы имеем два обыкновенных дифференциальных уравнениея.

Let begin with the second equation. We will find the solution such as (выбор решение таков, чтобы сразу первое граничное условие выполнлось)

$$Y = A \sin kx, \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

The solution has to satisfy the boundary condition. To satisfy the right boundary condition with should have a numbers $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, so this condition:

$$u(l) = 0 \Rightarrow l = n\frac{\pi}{k} = n\frac{\lambda}{2}.$$

Можем написать $k_n = \frac{n\pi}{l}$.

Мы можем заметить также, что благодаря соотношению $k = \frac{\omega}{c}$, мы имеем, что

$$\omega_n = ck_n = n\frac{c\pi}{l}.$$

Таким образом, мы получаем некий дискретный спектр колебаний, который возможен при наших начальных условиях. Наличие граничных условий приводит к тому, что в решение появляется дискретный спектр. Итого решение будет представлять собой комбинацию решений найденного типа с k из этого набора. Финальное решение

$$u = \sum A_i \sin(k_i x) \sin(\omega_i t).$$

Если у нас будет только одна гармоника, то мы как раз увидим стоячую волну. Примерно такая картинка будет, как на гитаре

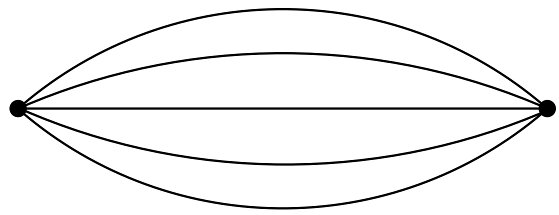

Рис. 2. Стоячая волна, одна гармоника

Вторую гармонику на гитаре вызвать сложно. Не всегда по явлению видно, как это записать математически.

1.1 Пример поперечны волн в некоем трёрдом стержне

Let us consider a beam

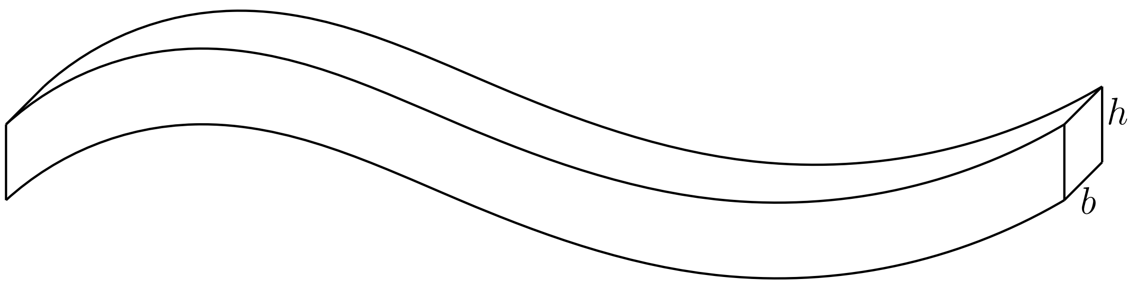

Рис. 3. Beam

Let us consider a piece.

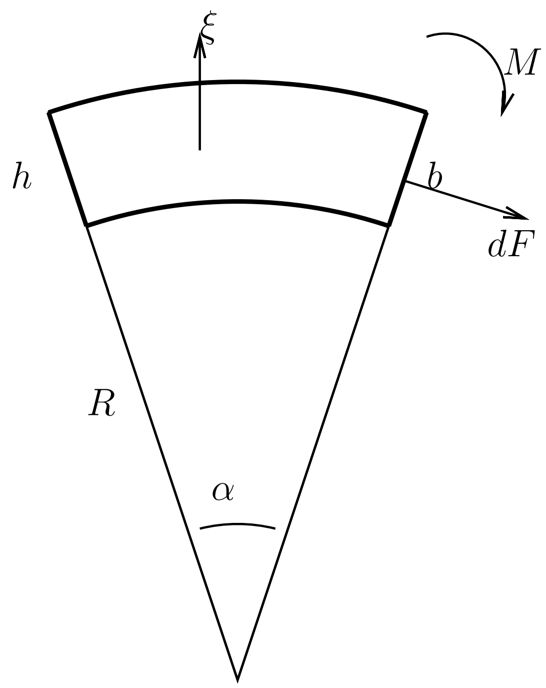

Рис. 4. Piece

Считаем, что плоские кусочки остаются плоскими и деформация выглядит как сектор радиуса R.

$$dF(\xi) = \frac{\Delta l}{l} bEd\xi.$$

Здесь E — модуль Юнга.

Чем дальше от средней линии, силы будут возрастать

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\xi\alpha}{l_0}.$$

Очевидно, что зависимость длины от ξ

$$l(\xi) = (R+\xi)\alpha = \frac{\xi}{R}.$$

И тогда

$$F(\xi) = \frac{Eb}{R}\xi d\xi$$

Чтобы получить момент, нужно проинтегрировать эту силу

$$M = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \xi \cdot dF(\xi) = \frac{Eb}{R}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \xi^2\, d\xi = \frac{2}{3}\frac{Eb}{R}\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}\frac{Eb}{R}h^3.$$

Есть некоторое специальное обозначение для момента инерции относительно средней линии

$$I = \frac{1}{12}bh^3.$$

Мы связали момент с неким радиусом кривизны R. Если мы рассматриваем некий участок кривой линии.

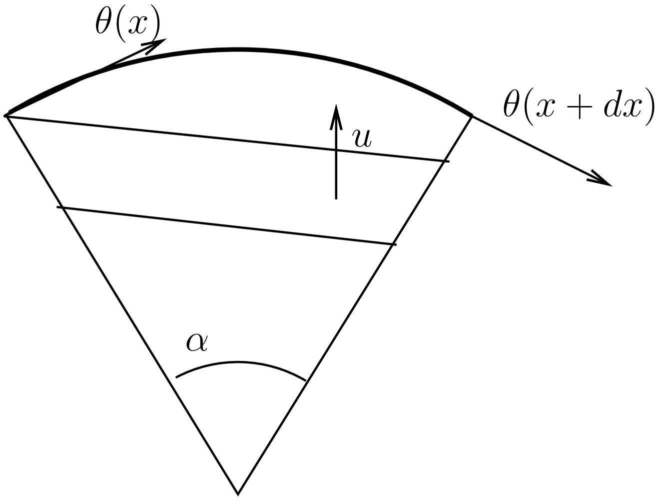

Рис. 5. Theta

Имеем,

$$\alpha = \theta(x) - \theta(x+dx) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx.$$

При этом

$$dx = R\alpha = -R\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx.$$

А стало быть мы получаем, что

$$R = \frac{1}{u_{xx}}.$$

Итак получаем, что момент

$$M = -IEu_{xx}.$$

Но и этого недостаточно, чтобы написать уравнение движения.

Мы считаем, что для малых колебаний интересны только перемещения вдоль u. А какие вертикальные силы у нас действуют.

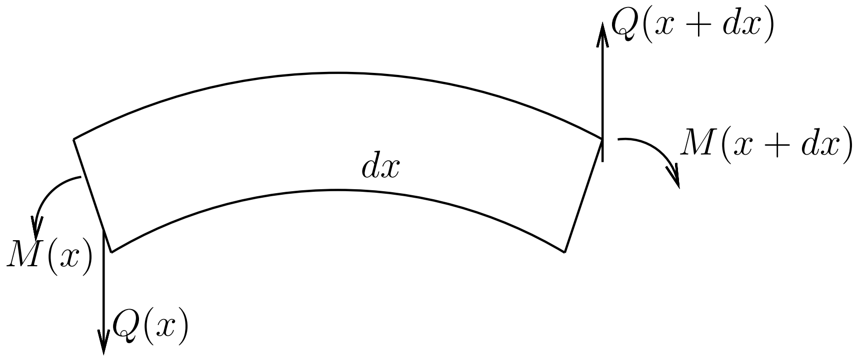

Рис. 6. Mom

Нужно брать разные знаки в x и в $x + dx$, записывая правую часть.

$$Q(x+dx) \cdot \frac{dx}{2} + Q(x) \cdot \frac{dx}{2} - M(x+dx) + M(x) = 0.$$

Можем переписать эти уравнения, учитывая только первое приближение по dx.

$$Q\,dx = \frac{\partial M}{\partial x}\,dx; \quad Q = \frac{\partial M}{\partial x}$$

На самом деле эти уравнения не очень точный. Может ещё быть ненулевой момент инерции. Но так как кусочек маленький, движение очень маленькое, мы пренебрегаем моментом инерции.

Теперь мы имеем выражение для Q. Можем написать закон Ньютона для нашего кусочка в проекции на ось u. Объём кусочка $bh\,dx$.

$$\rho \cdot bh\,dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Q(x+dx) - Q(x) = \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx.$$

Далее мы заменяем момент полученным недавно выражением

$$\rho bh \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}.$$

Теперь у нас есть выражение для собственно момента M через u. Наконец, имеем

$$\rho bh \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -IE \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

И совсем уже наконец, мы имеем уравнение следующего вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{IE}{\rho bh} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Это уравнения описывает движение гибкой палки.

В результате пришли к уравнению Эйлера для твёрдого стержня. Оно похоже немножко на волновое уравнение, но на самом деле принципиально отличается. Простая достаточно кухня, но требует аккуратности. Она нам нужна для того, чтобы последовательно записать уравнение этого маленького кусочка под действием поперечных сил. Сначала выразили как момент выражется через радиус кривизны (соответственно через вторую производную поперечного сечения). Затем из уравнения равновесия этого кусочка нашли как зависит сила в сечении Q от перемещения. И дальше записали второй закон Ньютона уже имея, что на этот кусочек действуют две силы именно в этом поперечном направлении. Единственное, что тут требует основания, это уравнение равновесия. ПО идее вместо него должен был быть закон Ньютона, но мы считаем, что момент инерции этого кусочка мал и им пренебрегаем, остаётся просто равновесие под действием сил. У нас тут dx стремится у нулю, но и высота h тоже должна быть невелика. Это натяжка в нашем уравнение, но зато получается красивое уравнение.

1.2 Для чего

Теперь мы посмотрим, что же нам даёт вот это уравнение, какие здесь возникают решения. Прежде всего будем искать решение в виде бегущей волны.

Ищем u как

$$u = A \sin(kx - \omega t).$$

Обычно вводят ещё переменную $\xi = kx - \omega t$. Всё хозяйство обозначим через c^2

$$c^2 = \frac{IE}{\rho bh}.$$

Если такое решение подставить просто на прямую в наше уравнение, при дифференцировании по t даст нам дважды ω и $-$. В результате первый член даст нам

$$-A\omega^2 \sin(\xi) + c^2 k^4 A \sin(\xi) = 0;$$

Соответственно (видно, что есть общий множитель), получаем соотношение

$$\omega^2 = c^2 k^4 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = ck^2.$$

Если мы зафиксируем $\xi = \text{const}$ (завиксировали фазу, как обычно, коггда работаем с бегущими волнами), фазовая скорость имеем $v_\text{ф} = \frac{\omega}{k} = ck$.

Напоминаю, что чем больше k, тем меньше длина волны. Волновое число.

Можем записать $v_\text{ф} = c\frac{2\pi}{\lambda}$. Чем больше длина волны, тем меньше фазовая скорость. Для волнового уравнения скорость была постоянна для любых частот. Когда скорость зависит от длины волны, это называется дисперсия. Говорят, что в нашем случае дисперсия отрицательная, потому что скорость фазовая падает с увеличением длины волны. Пример положительной дисперсии: волны на поверхности океана. Более длинные волны приходят быстрее на берег, потом подтягиваются меньшие.

В стержне мелкие волны распространяются быстрее, чем длинные. Когда приближается поезд, то сначала вы слышите высокочастотные звуки, можете обратить внимание вблизи железнодорожного переезда.

И ещё один момент, который надо с вами обсудить сегодня. Это скорость распространения волны. Вот есть фазовая скорость. Возьмём реальный объект, например, металлическая линейка

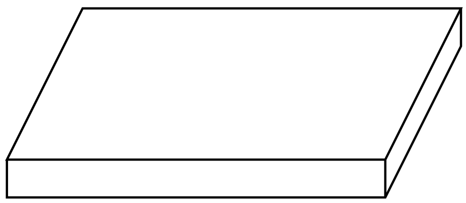

Рис. 7. line

Параметры линейки $h = 0.5\text{мм} = 5 \cdot 10^{-4}\text{м}$. При том $E = 2 \cdot 10^{11}\text{Па}$, $b = 20\text{мм} = 2 \cdot 10^{-2}\text{м}$, $\rho = 8 \cdot 10^2\text{кг/м}^3$. Получаем $I = \frac{bh^3}{12}$, $c^2 = \frac{Eh^2}{12\rho}$. В итоге

$$c^2 = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 25 \cdot 10^{-8}}{12 \cdot 8 \cdot 10^3} = \frac{50}{96} \approx 0.5.$$

Получается, что $v_\text{ф} \sim 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Сравним с продольными волнами, которые мы получали ранее. Там у нас

$$c^2 = \frac{E}{\rho} = \frac{2 \cdot 10^{11}\text{м}^2}{8 \cdot 10^3\text{с}^2} = 2.5 \cdot 10^7 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

В итоге $c = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Такая скорость распространения звука в металле. Если ударить рельсу кувалдой, пойдёт две волны. Звуковая волна пойдёт быстро, а деформация пойдёт гораздо медленнее.

2 Лекция 23.10

В прошлый раз мы получили уравнения гибкой палки, рассматривали бегущую волну. Сегодня у нас будет стоячая волна. Эта задача обычно предполагает, что у нас есть некоторые граничные условия и в этом случае мы можем найти решение в виде стоячей волны методом разделения переменных.

Итак у нас есть уравнение Эйлера гибкой палки (см рис. 3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,$$

где $c^2 = \frac{EI}{S\rho} = \frac{1}{12}\frac{E}{\rho}h^2$, $I = \frac{bh^3}{12}$

Параметр b не входит в уравнение вообще. Вы можете представить две палки рядом, они будут осцилировать как одна, так как b направлено перпендикулярно доске, а все колебания происходят в плоскости доски.

В прошлый раз мы обсуждали бегущую волну. Теперь мы обсуждаем стоячую. Предположим, у нас есть некоторые краевые условия, а именно

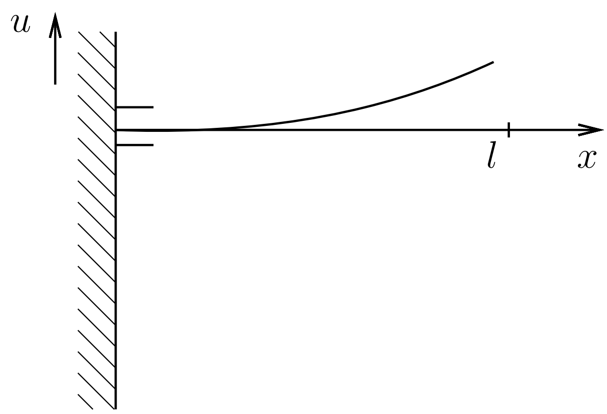

Рис. 8. boundary

Наши граничные условия:

$$u(0,t)=0; \quad u'(0,t)=0; \quad u''(l,t)=0; \quad u'''(l,t)=0.$$

Слева жёсткая заделка, там всё понятно. На правом конце интереснее. Мы считаем, что нет никаких внешних моментов, отсюда и третье условие (кривизна на свободном конце равна нулю, иначе было бы некое напряжение, которое не понятно чем компенсировать). На счёт четвёртого условия как-то мутно сказано (продифференцируем мол вторую производную и получим).

Четвёртого порядка уравнение с четырьмя граничными условиями.

Будем искать решение в виде произведения

$$u=\varphi(x)\theta(t);$$

Подставляя такую замену, получим

$$\varphi\theta''+c^2\tau\varphi^{(4)}=0.$$

Как обычно, поделим это уравнение на произведение $\varphi\theta$. Получим, окончатльно

$$\frac{1}{\theta}\theta''=-c^2\frac{1}{\varphi}\varphi^{(4)}=-\omega^2.$$

Абсолютно такие же действия мы делали для колебаний струны. Получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения, так как два выражения, зависящие от разных переменных, оказываются равны, а значит, они равны некоторой константе. Из физических соображений констана отрицательная (без физических соображения при попытке использовать неотрицательную константу можно получить только решения, которые не могут удовлетворить краевым условиям). Итак, система уравнения

$$\begin{cases}\theta''=\omega^2\theta=0;\\ \varphi^{(4)}-k^2\varphi=0, \quad k^2=\frac{\omega^2}{c^2}.\end{cases}$$

Для уравнения на φ у нас есть начальные и конечные условия. Можем найти характеристическое уравнение, его корни.

$$\lambda^4-k^2=0; \quad \Rightarrow \quad \lambda^2=\pm k.$$

Мы можем обозначить $k=\alpha^2$. Тогда четыре корня имеют вид

$$\lambda_1,\lambda_2=\pm\alpha; \quad \lambda_3,\lambda_4=\pm i\alpha.$$

На графике эти корни выглядят следующим образом

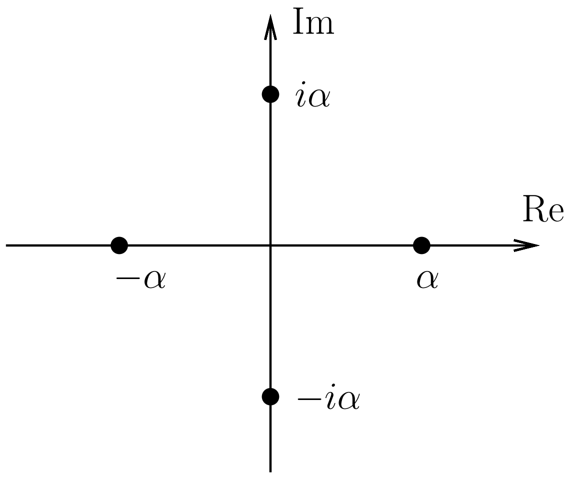

Рис. 9. roots

Можем написать общее решение в комплексной форме

$$\varphi = a_1 e^{\alpha x} + a_2 e^{-\alpha x} + a_3 e^{i\alpha x} + a_4 e^{-i\alpha x}.$$

Но мы также можем найти вещественные решения

$$\varphi = c_1 \operatorname{sh} \alpha x + c_2 \operatorname{ch} \alpha x + c_3 \sin \alpha x + c_4 \cos \alpha x.$$

Начинаем подставлять начальные и конечные условия. Из условия $\varphi(0) = 0$ вытекает, что

$$c_2 + c_4 = 0;$$

Из того, что $\varphi'(0)$, мы получим

$$c_1 + c_3 = 0.$$

Исходя из $\varphi''(l) = 0$ мы получаем (при дифференцировании каждого слагаемого вылезет множитель $\pm\alpha^2$, мы его можем сразу сократить, но знаки не забудем).

$$c_1(\operatorname{sh} \alpha l + \sin \alpha l) + c_2(\operatorname{ch} \alpha l + \cos \alpha l) = 0.$$

Из последнего условия получаем

$$c_1(\operatorname{ch} \alpha l + \cos \alpha l) + c_2(\operatorname{sh} \alpha l - \sin \alpha l) = 0.$$

Имеем два уравнения на две неизвестных. Каково условие существования нетривиального решения: нулевой определитель системы

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sh} \alpha l + \sin \alpha l & \operatorname{ch} \alpha l + \cos \alpha l \\ \operatorname{ch} \alpha l + \cos \alpha l & \operatorname{sh} \alpha l - \sin \alpha l \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{sh}^2 \alpha l - \sin^2 \alpha l - \operatorname{ch}^2 \alpha l - 2 \operatorname{ch} \alpha l \cos \alpha l - \cos^2 \alpha l = -2 - 2 \operatorname{ch} \alpha l \cos \alpha l.$$

Что нам это даёт. Мы можем показать это графически. Я буду рисовать произведение, которое должно быть равным -1.

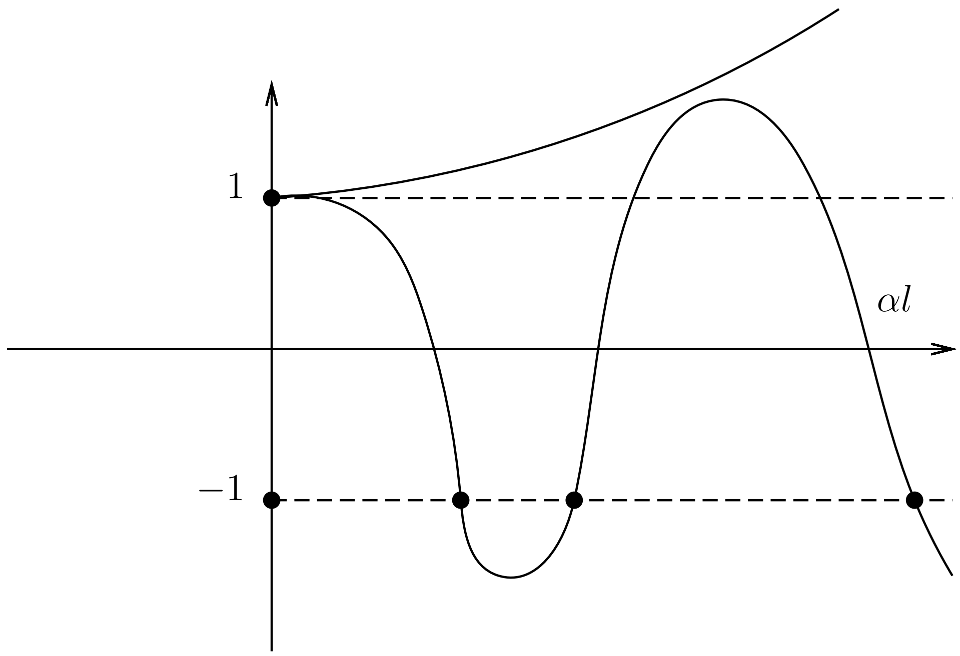

Рис. 10. alphal

Итак нас интересует некое семейство $\alpha_n l \to \frac{\pi}{2} n$ при $n \to \infty$. Примеры значений $\alpha_1 l = 1.85$, $\alpha_2 l = 4.69$, $\alpha_3 l = 7.85$.

Картинки примерно такие

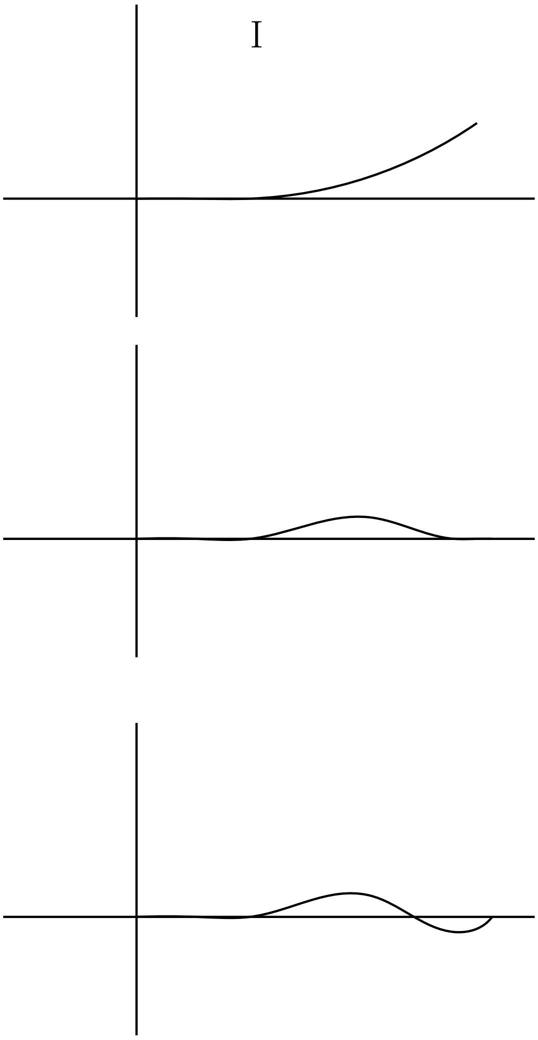

Рис. 11. modes

На практике каринка как правило первая. Но если систему сделать хорошо и соответствующим образом возбудив можно получить не первую моду.

3 30.10

Сегодня мы рассмотрим вынужденные колебания балки. В прошлом мы рассматривали свободные колебания, то есть без внешних сил. Сегодня на систему будет действовать периодическая сила.

Как и в дискретных системах, у нас будет несколько типов колебаний. Для математического маятника у нас есть свободные, вынужденные, параметрические и авто-колебания.

Теперь вопрос: кто может обхяснить по-русски. Свободные: линейку за хвостик и отпустили. Вынужденные: прилагаем периодическую силу или момент к маятнику. Параметрические: когда меняется в системе какой-то параметр. Для маятника это точка подвеса перемещается периодически вертикально. Автоколебания: на систему не действуют периодические силы. Но система самовозбуждается. Это например, грузик на ленте транспортёра. Грузик с пружинкой. То транспортёр грузик увлекает, топружина тащит обратно.

В распределённых системах примеров ещё больше. Стоит лес, дует ветер, деревья качаются. Это не периодическая сила, это автоколебания. Второй пример скрипка: гладкий смычок по гладкой струне.

3.1 Дискретная система

Рассмотрим маятник

$$\ddot{z} + z = \mu \sin \omega t;$$

Если $\mu = 0$, у нас свободные колебания. Иначе вынужденные.

Ищем решение в виде

$$z = A \sin(\omega t + \alpha);$$

Подставляем его в уравнение

$$(1-\omega^2)A\sin(\omega t+\alpha)=\mu\sin\omega t.$$

У нас тут некая фаза α, не знаем какая. Будем пытаться оценить. У нас здесь две независимых функции $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$. Можем написать уравнения на коэффициенты при этих функциях.

$$\begin{aligned}\sin(\omega t):&\qquad (1-\omega^2)A\sin\alpha=0;\\ \cos(\omega t):&\qquad (1-\omega^2)A\cos\alpha=\mu.\end{aligned}$$

Видим, что если $\sin\alpha\neq 0$, то $\omega^2=1$. Это означает, что второе уравнение не удовлетворяется, что нехорошо.

Стало быть у нас $\sin\alpha=0$, а значит, $\cos\alpha=\pm 1$. Следовательно, $A=\pm\frac{\mu}{1-\omega^2}$. Движение происходит либо в фазе, либо в противофазе.

У нас есть особая точка $\omega=1$, где амплитуда бесконечна, эта ситуация называется резонансом.

Зависимость амплитуды от частоты имеет следующий вид

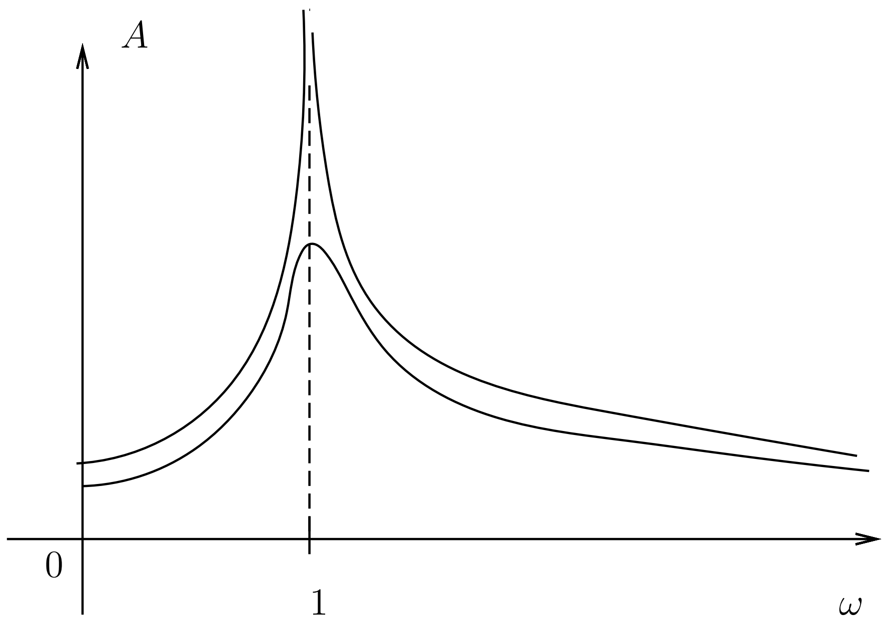

Рис. 12. $A(\omega)$

Две ветки. Слева движение в противофазе, справа — в фазе. Есть точка, где амплитуда бесконечна. Если добавить вязкое трение, амплитуда станет ограниченной (это вторая линия на рисунке).

3.2 Распределённая система: балка

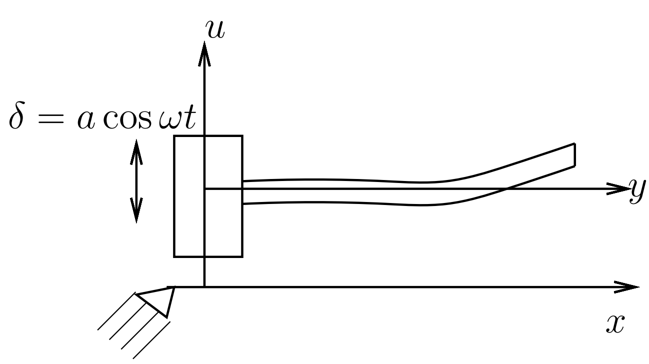

Рис. 13. forced Beam

У нас есть две системы координат. Одна (x,u) неподвижна, (y,u) подвижная, связанная с точкой крепления балки.

Как правило такие задачи проще решать в подвижной системе координат. Для состовления уравнений движения придётся вводить силы инерции. Пара слов о силах инерции. Периодически возникали споры:

существуют они или нет. Одна из таких дискуссий была между академиками Мышлинским и Седовым. Это была борьба местами выходящая за рамки принятых правил. Моя точка зрения: в данном случае это чисто математический приём, силы инерции являются результатом наших математических преобразованием.

Если мы рассмотрим некоторый кусочек длины Δ нашей балки, можем написать второй закон для системы без внешней силы.

$$\Delta S\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\Delta EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0;$$

Если мы переходим в подвижную систему, нужно справа добавить $-m\ddot{\delta}$.

$$\Delta S\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\Delta EI\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=(\omega^2 a\sin\omega t)\Delta S\rho.$$

Далее мы приводим уравнение к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=\mu\sin\omega t,\quad \mu=a\omega^2.$$

Дальше везде дальше будем писать x вместо y.

Мы видим, что уравнение выглядит похоже на дискретное. Мы можем найти некоторое похожее решение. Будем искать решение в виде

$$u=\varphi(x)\cdot\sin(\omega t+\alpha).$$

Подставляем в уравнение

$$\big[-\omega^2\varphi+c^2\varphi''''\big]\big(\sin\omega t\cos\alpha+\cos\omega t\cos\alpha\big)=\mu\sin\omega t.$$

Приравняем коээфициенты при независимых по функций по аргументу t

$$\begin{aligned}\cos\omega t\colon&\qquad \big(c^2\varphi''''-\omega^2\varphi\big)\sin\alpha=0;\\ \sin\omega t\colon&\qquad \big(c^2\varphi''''-\omega^2\varphi\big)\cos\alpha=\mu.\end{aligned}$$

Получили уравнения, похожие на те, что мы получили в дискретном случае.

Снова работает рассуждение: если $\sin\alpha\neq 0$, то второе уравнение не выполняется. Значит, $\sin\alpha=0$ и $\cos\alpha=\pm 1$.

Давайте не будем писать $\pm$, зато будем подразумевать, что μ может иметь разные знаки.

Осталось решить уравнение

$$c^2\varphi''''-\omega^2\varphi=\mu.$$

Решением будет сумма общего однородного и частного неоднородного. Не будем писать характеристическое уравнения, находить корни, мы это уже делали в прошлый раз.

$$\varphi=\varphi_h+\varphi_p.$$

Обозначения h — homogenous, p — partial.

Легко найти частное решение

$$\varphi_p=-\frac{\mu}{\omega^2}=-a.$$

Общее решение с прошлого раза

$$\varphi_h=c_1\operatorname{sh}\alpha x+c_2\operatorname{ch}\alpha x+c_3\sin\alpha x+c_4\cos\alpha x,\quad \alpha=\sqrt{\frac{\omega}{c}}.$$

Итого

$$\varphi=c_1\operatorname{sh}\alpha x+c_2\operatorname{ch}\alpha x+c_3\sin\alpha x+c_4\cos\alpha x-a.$$

Поставим задачу на граничные условия. Слева конец жёстко закреплён

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=0,$$

справа конец свободен, на него не действуют моменты

$$\varphi''(l)=\varphi'''(l)=0.$$

Если в прошлый раз, мы могли сразу получить простые соотношения вида $c_1=-c_3$, потому что у нас есть ненулевое частное решение. В данном случае перед нами полная система линейных уравнений четвёртого порядка со следующей матрицей (здесь вместо $\sin \alpha l$ будем писать sin, аналогично остальных тригонометрических функций).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} & \operatorname{ch} & -\sin & -\cos \\ \operatorname{ch} & \operatorname{sh} & -\cos & \sin \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если взять определитель этой матрицы, то

$$\det = 2(1 + \operatorname{ch} \alpha l \cos \alpha l).$$

В прошлый раз ненулевое решение существовало если ровно такая же конструкция была равна нулю.

При нулевом определителе у нас некоторые c_j могут принять бесконечное значение. Получаем похожую картинку.

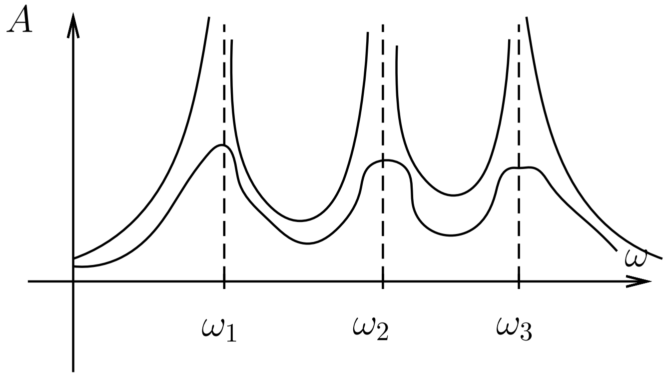

Рис. 14. forced omegas

Здесь $\omega_k = c^2\alpha_k^2$, где $\alpha_k \approx (2k-1)\frac{\pi}{2}$.

Снова если добавить вязкое трение, можно получить вторую линию амлитуд. Любая реальная система имеет некоторую диссипацию, и реальная картинка похожа на нижнюю линию.

4 13.11

Сегодня параметрический резонанс. Возникает как в конечномерных, так и в распределённых системах.

Типичный представитель в дискретных системах: уравнение Матье.

$$\ddot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon \sin 2t)x = 0;$$

Если $\varepsilon = 0$, то это уравнение превращается в уравнение гармонического осциллятора. Если исследовать уравнение Матье, можно получить, что при $\omega \in \mathbb{N}$, то уравнение имеет резонанс.

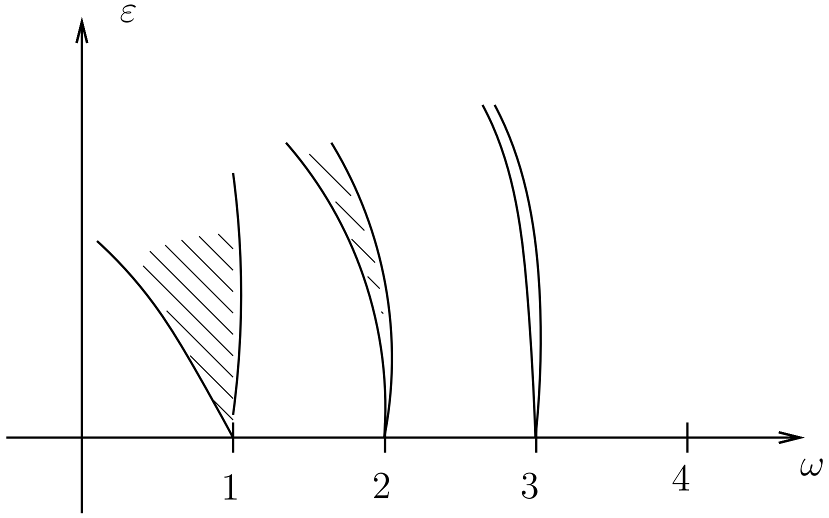

Рис. 15. Matie

Перейдём к рассмотрению параметрического резонанса в струне. Мы знаем, что частота струны зависит от силы натяжения на концах T.

Рис. 16. parametrical

Переда нами обычная струна, то есть её уравнение это обычное уравнение струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Предполагаем, что $T = T_0(1 + \gamma \cos \theta t)$.

Будем искать решение в виде $u = \varphi(x) q(t)$. Подставляя в уравнение, получаем

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{q} \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -k^2.$$

Пишем на каждую неизвестную независимое уравнение

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k^2 \varphi = 0; \qquad \frac{d^2 q}{dt^2} + c^2 k^2 q = 0.$$

Итак, два уравнения выглядят, как осцилляторы, но во втором уравнении мы имеем параметр c, который зависит от T. Уравнение аналогично уравнению Матье.

Первое уравнение вообще уравнение осциллятора и не зависит от времени. Тут у нас есть граничные условия, а именно $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Чтобы этому удовлетворить,

$$\varphi = A_n \sin k_n x, \quad k_n = \frac{n\pi}{l}.$$

Второе уравнение переписываем как

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \Omega_n^2 (1 + \varepsilon \cos \theta t) q = 0.$$

Здесь $\Omega_n^2 = c^2 k_n^2 = \frac{T}{\rho} k_n^2$.

Для каждого n у нас есть уравнение Матье. Напишем результат, аналогичный результату исследования уравнени Матье.

$$\frac{\Omega_n}{\theta_j} = \frac{j}{2}$$

является резонансным случаем (уравнение на нахождение резонансной частоты θ_j).

Это источник многих неприятностей в технике. Дёргаем струну, а у нас возникают поперечные колебания, да ещё и с другими частотами.

4.1 Как связаны разные виды колебаний

Пусть есть уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Если мы ищем решение в виде $u = \varphi(kx - \omega t) = \varphi(\xi)$, то подставив, получим

$$\omega^2 \varphi'' - c^2 k^2 \varphi'' = 0.$$

Такое возможно, если $\omega = \pm ck$. Тогда

$$\varphi = A \sin(x - ct) + A \sin(x + ct).$$

В результате тригонометрических преобразований можно получить

$$\varphi = 2A \sin x \cos ct.$$

Эта форма совпала с тем же видом решения, которое мы бы получили методом разделения переменных.

В данном случае метод поиска стоячей волны годится для поиска бегущей волны. Стоячая волна — это две бегущих.