GeekBrains

Вебинар №1 Элементарная алгебра

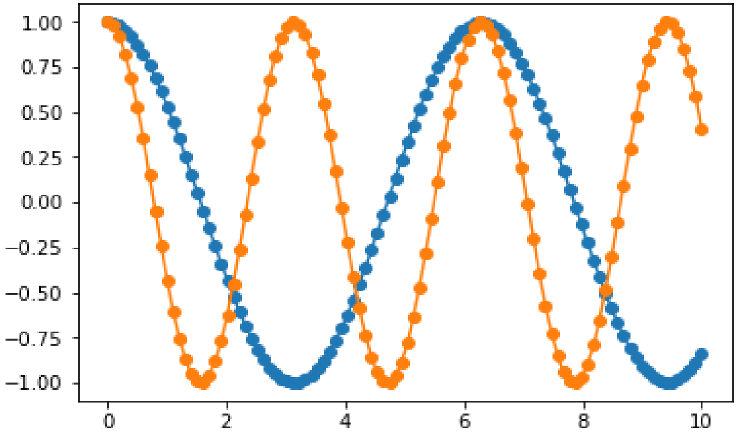
Курс “Введение в высшую математику”

```
In [13]: %matplotlib inline
         import numpy as np
         import matplotlib.pyplot as plt
```

4. Задание (в программе):

Постройте на одном графике две кривые y(x) для функции двух переменной y(k,x)=cos(k·x), взяв для одной кривой значение k=1, а для другой – любое другое k, не равное 1.

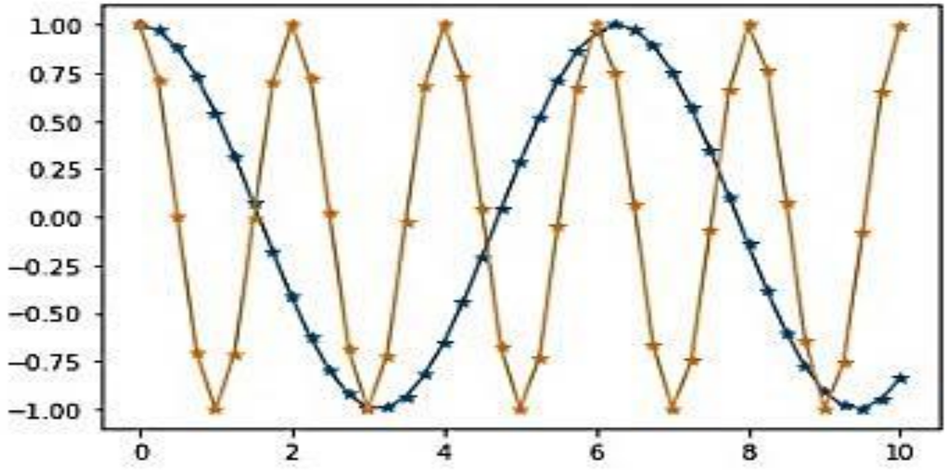
```
In [14]: x = np.linspace(0, 10, 100)
         plt.plot(x, np.cos(x), marker="o")
         plt.plot(x, np.cos(2*x), marker="o")

Out[14]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x2cfd018b048>]
```



С ростом k период функции уменьшается.

```
In [23]: x = np.linspace(0, 10, 41)
         for k in (1,random.randint(2, 99)):
             plt.plot(x, np.cos(k*x), marker="*")
         print(x)
```

```
[ 0.    0.25  0.5   0.75  1.    1.25  1.5   1.75  2.    2.25  2.5   2.75
  3.    3.25  3.5   3.75  4.    4.25  4.5   4.75  5.    5.25  5.5   5.75
  6.    6.25  6.5   6.75  7.    7.25  7.5   7.75  8.    8.25  8.5   8.75
  9.    9.25  9.5   9.75 10.  ]
```



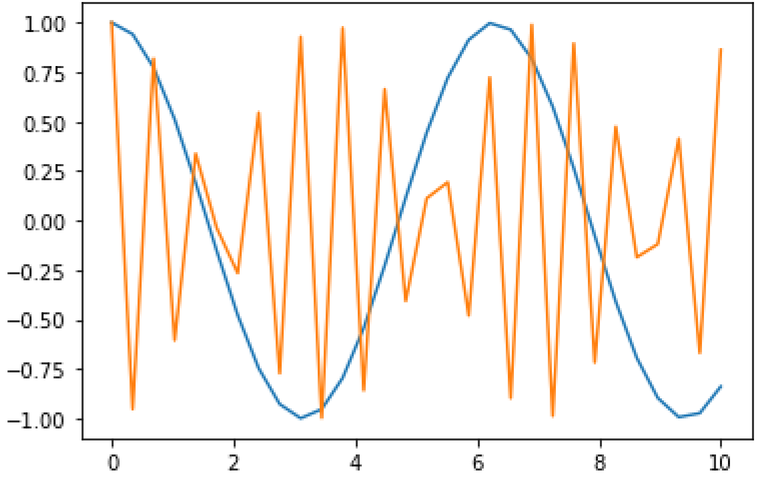
jupyter
nbviewer

In [ ]:

```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.linspace(0, 10, 30)
k1=1
k2=10

plt.plot(x, np.cos(k1*x))
plt.plot(x, np.cos(k2*x))
```

Out[ ]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f2bba8415d0>]
```



Что будет на уроке

1. Уравнения
2. Системы уравнений
3. Текстовые задачи
4. Логарифмы

Решение уравнений и систем уравнений

Задача 1
Дробно-рациональное уравнение

$$\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{x(3-x)}$$

Область допустимых значений (ОДЗ)

$$\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{x(3-x)}$$

1. ОДЗ:

$$\begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Общий знаменатель и как от него избавиться

$$\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{x(3-x)}$$

2. Общий знаменатель: 2x(3-x).

Принцип: домножить каждое слагаемое на то, чего не хватает до общего знаменателя.

$$\frac{2\cdot 2x}{2x(3-x)}+\frac{x(3-x)}{2x(3-x)}=\frac{6\cdot 2}{2x(3-x)}$$

$$4x+3x-x^2=12$$
$$x^2-7x+12=0$$

Решение квадратного уравнения

$$\boldsymbol{x^2 - 7x + 12 = 0}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$D = b^2 - 4ac$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-7) + 1}{2} = 4$$

Учёт ОДЗ

$$x_2 = \frac{-(-7) - 1}{2} = 3$$

$$\begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 0 \end{cases} \boldsymbol{=> x = 4}$$

Задача 2
Дробно-рациональное уравнение поинтереснее

$$\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+6}{x+3}+\frac{x+10}{x+5}=6$$

Здесь можно поставить видео на паузу и поразмышлять, как можно улучшить жизнь в данной ситуации

Хитрый ход!

$$\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+6}{x+3}+\frac{x+10}{x+5}=6$$

Можно выделить целую часть у выражений, содержащих переменную.

$$\frac{(x+1)+1}{x+1}+\frac{(x+3)+3}{x+3}+\frac{(x+5)+5}{x+5}=6$$

$$\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{x+3}{x+3}+\frac{3}{x+3}+\frac{x+5}{x+5}+\frac{5}{x+5}=6$$

$$1\ +\frac{1}{x+1}+1+\frac{3}{x+3}+1+\frac{5}{x+5}=6$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x+3}+\frac{5}{x+5}=3$$

Общий знаменатель: $(x+1)(x+3)(x+5)$

$$\frac{(x+3)(x+5)+3(x+1)(x+5)+5(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x+5)}=\frac{3(x+1)(x+3)(x+5)}{(x+1)(x+3)(x+5)}$$

Правую и левую части равенства можно умножить на знаменатель.

Получится:

$$(x+3)(x+5)+3(x+1)(x+5)+5(x+1)(x+3)=3(x+1)(x+3)(x+5)$$

$$x^2+5x+3x+15+3(x^2+5x+x+5)+5(x^2+3x+x+3)=$$
$$=3(x^2+3x+x+3)(x+5)$$

$$x^2+8x+15+3(x^2+6x+5)+5(x^2+4x+3)=3(x^2+4x+3)(x+5)$$

$$x^2+8x+15+3x^2+18x+15+5x^2+20x+15=3\ (x+5)\ (x^2+4x+3)$$

Продолжаем преобразовывать:

$$9x^2 + 46x + 45 = 3\,(x^3 + 4x^2 + 3x + 5x^2 + 20x + 15)$$

$$9x^2 + 46x + 45 = 3\,(x^3 + 9x^2 + 23x + 15)$$

$$9x^2 + 46x + 45 = 3\,(x^3 + 9x^2 + 23x + 15)$$

$$3x^3 + 18x^2 + 23x = 0$$

$$x(3x^2 + 18x + 23) = 0$$

Произведение равно 0, значит, один из множителей равен 0:

$$x = 0$$

$$3x^2 + 18x + 23 = 0$$

$$x = -3 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Все три корня принадлежат ОДЗ

Ответ: $-3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}; -3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}; 0.$

Задача 3
Система уравнений

$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5 \\ x^{-2} + y^{-2} = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5 \\ x^{-2} + y^{-2} = 13 \end{cases}$$

$$x^{-k} = \frac{1}{x^k}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases}$$

Замена переменной:

$$\left\{\frac{1}{x} = u;\ \frac{1}{y} = v\right\}$$

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^2 + v^2 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 5 - v & (1) \\ (5 - v)^2 + v^2 = 13 & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение (2):

$$(5-v)^2+v^2=13$$

$$25-10v+v^2+v^2=13$$

$$2v^2-10v+12=0$$

$$v^2-5v+6=0$$

$$\begin{cases} v_1=2 \\ u_1=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_2=3 \\ u_2=2 \end{cases}$$

Вернёмся к *(x;y)*

$$\left\{\frac{1}{x} = u;\ \frac{1}{y} = v\right\}$$

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_2 = 3 \\ u_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y_1} = 2 \\ \dfrac{1}{x_1} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{y_2} = 3 \\ \dfrac{1}{x_2} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ y_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2} \\ y_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$

Задача 3

$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5 \\ x^{-2} + y^{-2} = 13 \end{cases}$$

Выводы:

- ОДЗ (всегда!)
- Замена переменной
- Симметрия

Текстовые задачи

логика;
составление уравнений;
дроби и проценты.

Задача 4

В ящике лежат 100 синих, 100 красных, 100 зелёных и 100 фиолетовых карандашей. Сколько карандашей необходимо достать, не заглядывая в ящик, чтобы среди них обязательно нашлись по крайней мере 1 красный и 1 фиолетовый.

Задача 4

В ящике лежат 100 синих, 100 красных, 100 зелёных и 100 фиолетовых карандашей. Сколько карандашей необходимо достать, не заглядывая в ящик, чтобы среди них обязательно нашлись по крайней мере 1 красный и 1 фиолетовый.

301

Задача 5

Молодой человек согласился работать с условием, что в конце года он получит автомобиль и 2600. Но по истечении 8 месяцев уволился и при расчёте получил автомобиль и 1000. Сколько стоил автомобиль?

- Пусть x – цена машины.

- Тогда:

$$\frac{8}{12}(x+2600)=x+1000$$

$$\frac{1}{3}x=\frac{2\cdot 2600}{3}-1000$$

$$x=5200-3000=2200$$

Задача 6

Из данных четырёх чисел первые три соотносятся между собой как 1/5:1/3:1/20, а четвёртое составляет 15% второго. Найти эти числа, если известно, что второе число на 8 больше суммы остальных.

1 $\frac{1}{5}x$

2 $\frac{1}{3}x$

3 $\frac{1}{20}x$

4 15% от (2): $0.15 \cdot \frac{1}{3}x = \frac{15}{100} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{20}x$

(2) на 8 > (1)+(3)+(4)

$$\frac{1}{3}x = \frac{1}{5}x + \frac{1}{20}x + \frac{1}{20}x + 8$$

$$\frac{1}{3}x = \frac{1}{5}x + \frac{1}{10}x + 8$$

$$\frac{10}{30}x = \frac{6}{30}x + \frac{3}{30}x + 8$$

$$\frac{1}{30}x = 8$$

$$x = 240$$

1 $\frac{1}{5}x = \frac{1}{5} \cdot 240 = 48$

2 $\frac{1}{3}x = \frac{1}{3} \cdot 240 = 80$

3 $\frac{1}{20}x = \frac{1}{20} \cdot 240 = 12$

4 $\frac{1}{20}x = \frac{1}{20} \cdot 240 = 12$

Проверка:

80=48+12+12+8

Да

Логарифмы (кратко)

уравнения;
неравенства.

Логарифмы: формулы

Определение логарифма: $\log_a b = c \underset{a>0,\ a\neq 1}{\Leftrightarrow} a^c = b$

b>0

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$$

$$\log_a x^n = n \log_a |x|$$

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_{|a|} x$$

$$\log_{a^n} x^n = \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$1)\ \log_2 64$ $\qquad$ $2)\ \log_4 16$

$3)\ \log_{\frac{1}{3}} 3$ $\qquad$ $4)\ \log_5 \frac{1}{25}$

$5)\ \log_6 36$ $\qquad$ $6)\ \log_{25} 5$

$7)\ \log_{\sqrt{2}} 2$ $\qquad$ $8)\ \log_3 \sqrt{27}$

$9)\ \log_2 64 + \log_4 16$

$10)\ \log_2 12 - \log_2 3$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$$

$$\log_a x^n = n\log_a|x|$$

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_{|a|} x$$

$$\log_{a^n} x^n = \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Решение

1) $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 \cdot \log_2 2 = 6$

2) $\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$

3) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_{3^{-1}} 3 = -1 \cdot \log_3 3 = -1$

4) $\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$

5) $\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

6) $\log_{25} 5 = \log_{5^2} 5 = \frac{1}{2} \log_5 5 = \frac{1}{2}$

7) $\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{2^{1/2}} 2 = 1 : \frac{1}{2} = 2$

8) $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 (27)^{\frac{1}{2}} = \log_3 (3^3)^{\frac{1}{2}} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$.

9) $\log_2 64 + \log_4 16 = \overset{(1)}{6} + \overset{(2)}{2} = 8$

10) $\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$

Задача 7

$$2^x = 3$$

По определению логарифма:

$$x = \log_2 3$$

Задача 8

$$\log_2(x-7)=5$$

ОДЗ: x-7>0 ⇔ x>7

$$\log_2(x-7)=\log_2 2^5$$

$$\log_2(x-7)=\log_2 32$$

$$x-7=32$$

$$x=39$$

Задача 9

$$\log_2(x-7) < 5$$

$$\log_2(x-7) < \log_2 32$$

$$\begin{cases} x-7 < 32 \\ x-7 > 0 \end{cases}$$ (ОДЗ)

$$\begin{cases} x < 39 \\ x > 7 \end{cases}$$

Ответ: (7;39)

Задача 10

$$\log_{1/2}(x-7) < 5$$

½ < 1
При переходе от сравнения логарифмов к сравнению подлогарифменных выражений знак меняется на противоположный, **если основание логарифмов меньше 1.**

$$\log_{1/2}(x-7) < \log_{1/2}(\frac{1}{2})^5$$

$$\begin{cases} x-7 > \frac{1}{32} \\ x-7 > 0 \end{cases} \qquad x > 7\frac{1}{32}$$

Задача 11

$$x^{log_3 x-2} = 27.$$

Решение

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Прологарифмируем обе части по основанию 3:

$log_3 x^{log_3 x - 2} = log_3 27;$

$(log_3 x - 2) \cdot log_3 x = 3$, т. к. $log_a b^r = r \cdot log_a b$.

Пусть $log_3 x = t$;

$(t - 2) \cdot t = 3;$

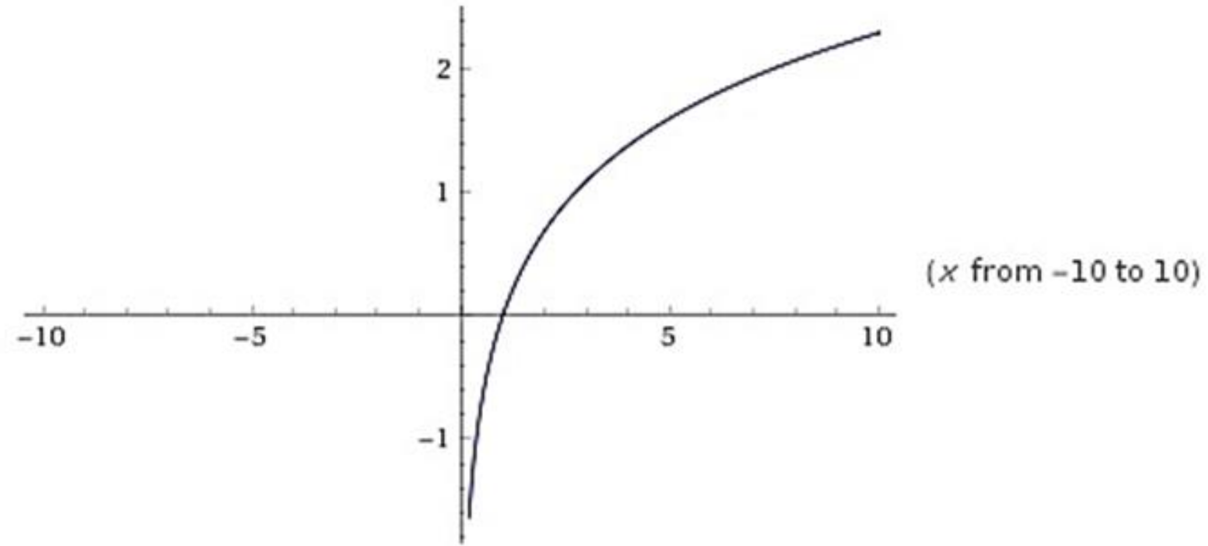
$t^2 - 2t - 3 = 0.$

График **y=ln(x)**,

по которому видно, что логарифм может быть меньше или равен нулю.

Область значений логарифма не ограничена.

Plot:



$$t^2 - 2t - 3 = 0.$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 \cdot t_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = -1 \end{array} \right. .$$

Вернёмся к обозначенному:

$log_3 x = 3;$ $\quad$ $log_3 x = -1;$

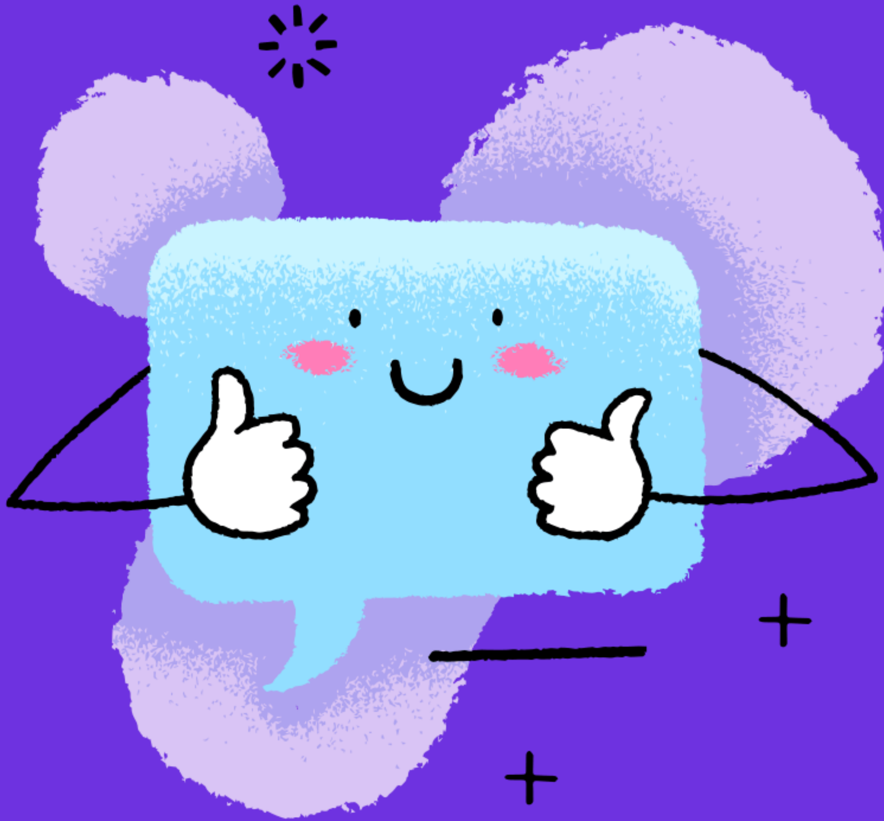
$x_1 = 3^3 = 27.$ $\quad$ $x_2 = 3^{-1} = \frac{1}{3}.$

Оба значения принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\frac{1}{3}; 27.$

Спасибо!

Каждый день вы становитесь лучше :)



GeekBrains