3.6 ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม

บทนิยาม ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0,y_0) จะเรียก $df(x_0,y_0)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ Δx และ Δy และนิยามโดย

$$df(x_0,y_0)(\Delta x,\Delta y)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

เรียกว่าผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมของ $f(x,y)$ ที่จุด (x_0,y_0)

$f(x,y,z)$

$\hookrightarrow df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$

ถ้าพิจารณาที่จุด (x,y) ใดๆ ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมจะเป็น

$$df(x,y)=f_x(x,y)\,dx+f_y(x,y)\,dy$$

หรือ

ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม. ของ $f(x,y)$

$$df = f_x dx + f_y dy$$

Δf df

ตัวอย่างที่ 3.6.1 จงหาส่วนเปลี่ยนแปลงและผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมของฟังก์ชัน $f(x,y)=x^2+3xy-y^2$ ที่ $x=2, y=3$ โดยที่ $\Delta x=0.05$ และ $\Delta y=-0.04$

วิธีทำ ส่วนเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $f(x,y)$ คือ

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)\\ &= f(2.05,2.96)-f(2,3)\\ &= [(2.05)^2+3(2.05)(2.96)-(2.96)^2]-[(2)^2+3(2)(3)-(3)^2]\\ \Delta f &= 0.6449\end{aligned}$$

จากข้อที่ อ.ได้ว่า

$f(2.05,2.96) = f(2,3) + \boxed{\Delta f}$ // df

$= 13 + 0.65$

$= 13.65$

เนื่องจาก $f(x,y)=x^2+3xy-y^2$ จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+3y \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=3x-2y$$

ดังนั้น จะได้

$$\begin{aligned}df &= f_x\,dx + f_y\,dy\\ df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\\ &= (2x+3y)\,dx+(3x-2y)dy\\ &= [2(2)+3(3)]\,(0.05)+[3(2)-2(3)]\,(-0.04)\\ df &= 0.65\end{aligned}$$

$x=2,\ y=3,\ \underset{dx}{\Delta x=0.05},\ \underset{dy}{\Delta y=-0.04}$

จากตัวอย่าง จะเห็นว่า $\Delta f \approx df$

บทนิยาม ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมของฟังก์ชัน $w=f(x,y,z)$ คือ $dw=df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy+\dfrac{\partial f}{\partial z}dz$

และผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมของ $z=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ คือ $dz=df=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$

หมายเหตุ

1. เรียก Δw ว่าความคลาดเคลื่อนของ w
2. เรียก $\dfrac{\Delta w}{w}$ ว่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของ w
3. เรียก $\dfrac{\Delta w}{w}\times 100$ ว่าเปอร์เซนต์ของความคลาดเคลื่อนของ w

ตัวอย่าง ให้ $w=2x^3y\sin z$ จงหา dw

$$\therefore\ dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y\sin z)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(2x^3y\cdot\sin z)\,dy + \frac{\partial}{\partial z}(2x^3y\cdot\sin z)\cdot dz$$

$$\therefore\ dw = (6x^2y\cdot\sin z)\,dx + (2x^3\sin z)\cdot dy + (2x^3y\cdot\cos z)\,dz$$

$= \pm 0.01$ เซนติเมตร

ตัวอย่าง สมมติความคลาดเคลื่อนของการวัดขนาดของกล่องสี่เหลี่ยมเป็น ±0.1 มิลลิเมตร กล่องมีความกว้าง 50 เซนติเมตร ยาว 20 เซนติเมตร และสูง 15 เซนติเมตร จงใช้ผลต่าง ~~จงให้ผลต่าง~~เชิงอนุพันธ์รวมประมาณค่าการเปลี่ยนแปลงของปริมาตร และความคาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของปริมาตร

$\Delta V \approx dV$ $\qquad \dfrac{\Delta V}{V} \approx \dfrac{dV}{V}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ V ปริมาตรกล่องสี่เหลี่ยม.

x, y, z แทน ความกว้าง, ความยาว, ความสูง ของกล่อง ตามลำดับ

$$\therefore\ V = xyz$$

(โจทย์กำหนด $x=50$, $y=20$, $z=15$ เซนติเมตร
$dx = dy = dz = \pm 0.01$ เซนติเมตร)

$$\therefore\ dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$dV = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

$$= (20)(15)(\pm 0.01) + (50)(15)(\pm 0.01) + (50)(20)(\pm 0.01)$$

$$= (2050)(\pm 0.01)$$

$\therefore\ dV = \pm 20.5$ ลูกบาศก์เซนติเมตร.

ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของปริมาตร

$$= \frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{20.5}{(50)(20)(15)} = \frac{20.5}{15000} = 0.00137$$

$f(2.01, 9.02) - f(2,9) = 0.44$ กดเครื่องคิดเลข ≈ 0.441702

ตัวอย่าง จงใช้ผลต่างอนุพันธ์รวมประมาณค่า $(2.01)^2(9.02) - 2^2 \cdot 9$

วิธีทำ ให้ $f(x,y) = x^2y$ เมื่อ $x=2,\ y=9$ และ $\underbrace{\Delta x}_{dx}=0.01,\ \underbrace{\Delta y}_{dy}=0.02$

(หา $f(2.01, 9.02) - f(2,9)$ ซึ่งก็คือการหา df นั่นเอง)

$$\begin{aligned} \therefore\ df &= f_x\,dx + f_y\,dy \\ &= 2xy\,dx + x^2dy \\ &= 2(2)(9)(0.01) + 2^2(0.02) \\ &= 0.36 + 0.08 \\ &= 0.44 \end{aligned}$$

จงหา $(2.01)^2(9.02)$

จาก

$f(2.01, 9.02) - f(2,9) = 0.44$

$\therefore f(2.01, 9.02) = 0.44 + f(2,9)$

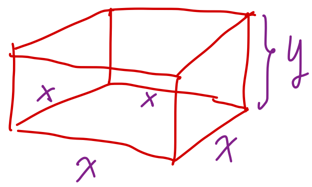
$$\begin{aligned} (2.01)^2(9.02) &= 0.44 + f(2,9) \\ &= 0.44 + 2^2\cdot 9 \\ &= 0.44 + 36 \\ &= 36.44 \ \# \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงใช้ผลต่างอนุพันธ์ประมาณค่าปริมาตรของกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่มีฐานเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีด้านยาวด้านละ 8.005 เซนติเมตร และสูง 9.996 เซนติเมตร

วิธีทำ ให้ V แทน ปริมาตรกล่อง

x – ความยาวด้านฐานกล่อง ซึ่งเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส

y – ความสูงกล่อง



$$\therefore\ V = x^2y$$

โจทย์ต้องการให้เราประมาณค่า $V(8.005, 9.996) \approx V(8,10) + dV$

$x = 8,\quad dx = 0.005$

$y = 10,\quad dy = -0.004$

$$\begin{aligned} dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy &= 2xy\cdot dx + x^2\cdot dy \\ &= 2(8)(10)(0.005) + (8)^2\cdot(-0.004) \\ &= 0.8 - 0.256 \end{aligned}$$

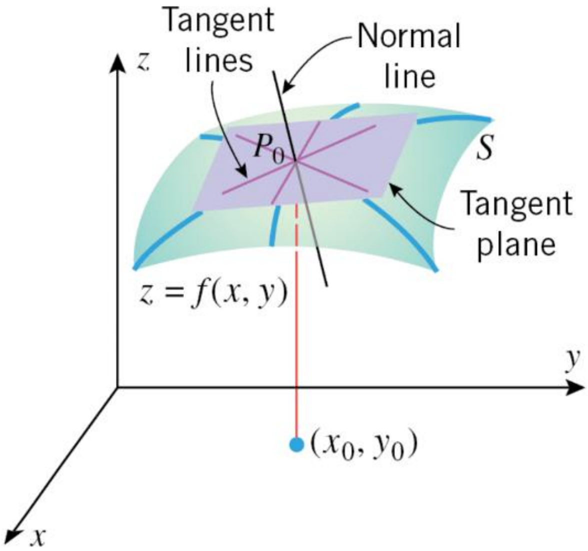
$$\therefore\ dV = 0.544$$

$$\begin{aligned} \therefore\ V(8.005, 9.996) \approx V(8,10) + dV &= 8^2(10) + 0.544 \\ &= 640 + 0.544 \\ &= 640.544 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร.} \end{aligned}$$

3.7 ระนาบสัมผัสและเส้นแนวฉาก

บทนิยาม ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดบนพื้นผิว S

1. ถ้าเส้นโค้งเรียบทุกเส้นบน S ที่ผ่านจุด P_0 มีเส้นสัมผัส ณ จุด P_0 อยู่บนระนาบเดียวกันทั้งหมด และจะเรียกระนาบนั้นว่า **ระนาบสัมผัส (Tangent Plane)** ของพื้นผิว S ที่จุด P_0
2. เรียกเส้นตรงที่ผ่านจุด P_0 และตั้งฉากกับระนาบสัมผัสว่า **เส้นแนวฉาก (Normal Line)** ของพื้นผิว S ที่จุด P_0



ทฤษฎีบท ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดบนพื้นผิว $z = f(x, y)$ ถ้า $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) แล้ว พื้นผิวจะมีระนาบสัมผัสที่จุด P_0 และระนาบสัมผัสจะมีสมการเป็น

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

ยิ่งกว่านั้น เวกเตอร์ $\langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1 \rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากของพื้นผิวที่จุด P_0 และสมการของเส้นแนวฉากของพื้นผิวที่จุด P_0 เป็น

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

$f(x,y)=x^2+y^2$

ตัวอย่าง จงหาสมการของระนาบสัมผัส และสมการของเส้นแนวฉากของพื้นผิว $z=x^2+y^2$ ที่จุด $(1,-2,5)$

วิธีทำ จาก $z=x^2+y^2$ หรือ $f(x,y)=x^2+y^2$

$\therefore f_x=2x$, $f_y=2y$ จะได้ว่า $f_x(1,-2)=2(1)=2$, $f_y(1,-2)=2(-2)=-4$

$\therefore$ สมการระนาบสัมผัส ที่จุด $\overset{x_0}{(1},\overset{y_0}{-2},\overset{z_0}{5)}$: $f_x(1,-2)(x-1)+f_y(1,-2)(y-(-2))-(z-5)=0$

$2(x-1)+(-4)(y+2)-(z-5)=0$

$2x-4y-z-5=0$. #

$\therefore$ สมการเส้นแนวฉาก คือ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-(-2)}{-4}=\frac{z-5}{-1}$ #

ถ้าพื้นผิวในปริภูมิสามมิติ กำหนดโดย $F(x,y,z)=0$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันโดยปริยาย โดยที่ z เป็นฟังก์ชันของ x และ y จะได้

$$f_x=-\frac{F_x}{F_z} \quad \text{และ} \quad f_y=-\frac{F_y}{F_z}$$

เพราะฉะนั้น สมการของระนาบสัมผัสพื้นผิว $F(x,y,z)=0$ ที่จุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ คือ

$$-\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)-\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

หรือ

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

ในทำนองเดียวกัน สมการเส้นแนวฉากของพื้นผิว $F(x,y,z)=0$ ที่จุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ คือ

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

โดยที่เวกเตอร์ $\langle F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากของพื้นผิว $F(x,y,z)=0$ ที่จุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$

พื้นผิวโดยปริยาย $F(x,y,z)=0$

$\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}-3=0$

ตัวอย่าง จงหาสมการของระนาบสัมผัสและสมการของเส้นแนวฉากของพื้นผิวทรงรี $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ ที่จุด $(-2,1,-3)$ (x_0,y_0,z_0)

วิธีทำ ให้ $F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}-3$

$F_x(x,y,z)=\frac{x}{2}$, $F_y(x,y,z)=2y$, $F_z(x,y,z)=\frac{2z}{9}$

$F_x(-2,1,-3)=-\frac{2}{2}=-1$, $F_y(-2,1,-3)=2(1)=2$, $F_z(-2,1,-3)=\frac{2(-3)}{9}=-\frac{2}{3}$

∴ เส้นแนวฉาก คือ

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

$$\frac{x-(-2)}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-(-3)}{-\frac{2}{3}} \quad \#$$

∴ สมการระนาบสัมผัส คือ

$$-\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)-\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

$$-\frac{-1}{-\frac{2}{3}}\left(x-(-2)\right) - \frac{2}{-\frac{2}{3}}(y-1) - \left(z-(-3)\right) = 0$$

$$-\frac{3}{2}(x+2) + 3(y-1) - (z+3) = 0 \quad \#$$