



浙大城市学院
ZHEJIANG UNIVERSITY CITY COLLEGE

A-star 算法

—— (N^2-1) 数码的 python 实现

课程名称：人工智能导论

小组编号：G03

小组成员：刘书宇 31801323

小组成员：童峻涛 31801341

专业班级：软件工程 1802

所在学院：计算机与计算科学学院

报告日期：2020 年 11 月 04 日

一、 实验目的

熟悉和掌握启发式搜索的定义、估价函数和算法过程，并利用 A-star 算法求解 N 数码难题，理解求解流程和搜索顺序。

以 8 数码问题和 15 数码问题为例实现 A-star 算法的求解程序(python 为例)，设计两种不同的估价函数（不在位数字的个数、曼哈顿距离）。

二、 问题简介

1. 问题背景

八数码问题也称作九宫问题，拼图问题。在 3×3 的棋盘上，摆出八个棋子，每个棋子标有 1~8 中的某个数字，不同棋子上的数字不同，用 0 代替空格。棋盘上存在一个空格，与空格相邻的棋子可以移动到空格中。给出一个初始的棋子摆放状态，要求找出一种移动棋子步数最少的最优解，达到目的棋子摆放状态。

十五数码问题来源于美国的科学魔术大师萨姆·洛伊德，洛伊德的发明其实只是将重排九宫（即 8 数码问题）中的 3 阶方阵扩大到 4 阶方阵罢了。由于这个细微的变化，十五数码问题的规模远远大于 8 数码问题，8 数码问题的规模较小，总的状态数与 15 数码的状态数相差了 8 个数量级。

2. 解的存在性

在判断 8 数码和 15 数码是否存在解的判定中，采取逆序数之和奇偶性判断。结论可以简单表示为：

- a. 将一个状态表示为一维的形式，求出除 0 之外所有数字的逆序数之和，也就是每个数字前面比它大的数字的个数的和，称为这个状态的逆序。
- b. 若两个状态的逆序奇偶性相同，则可互相到达，否则不可相互到达。

三、 算法简介

1. 算法描述

A*算法是一种求解最短路径最有效的直接搜索算法，也是目前最有影响的常用启发式算法。

定义 $H^*(n)$ 为状态 n 到目的状态的最优路径的代价，则当 A 搜索算法

的启发函数 $H(n)$ 小于等于 $H^*(n)$ ，即满足：

$$h(n) \leq h^*(n), \text{ 对所有结点 } n$$

A*算法的启发函数为 $F(n) = G(n) + H(n)$ ，其中 $F(n)$ 是从初始状态经由状态 n 到目标状态总代价的估计值， $G(n)$ 是衡量某一状态在图中的深度（通俗的说就是当前已经走的步数）， $H(n)$ 是从状态 n 到目标状态的最佳路径的估计代价。（在这里特别说明的是未带 * 为评估代价但并不一定是最优代价）则可以定义最优估价函数：

$$f^*(n) = g^*(n) + h^*(n)$$

其中 h 是需要自己定义的，如果我们采用曼哈顿距离算法，具体公式为：

$$l = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

如果采用不在位数字的个数，则具体公式为：

$$Sum(Point(start) \text{ NOT IN } Point(target))$$

2. 算法伪代码

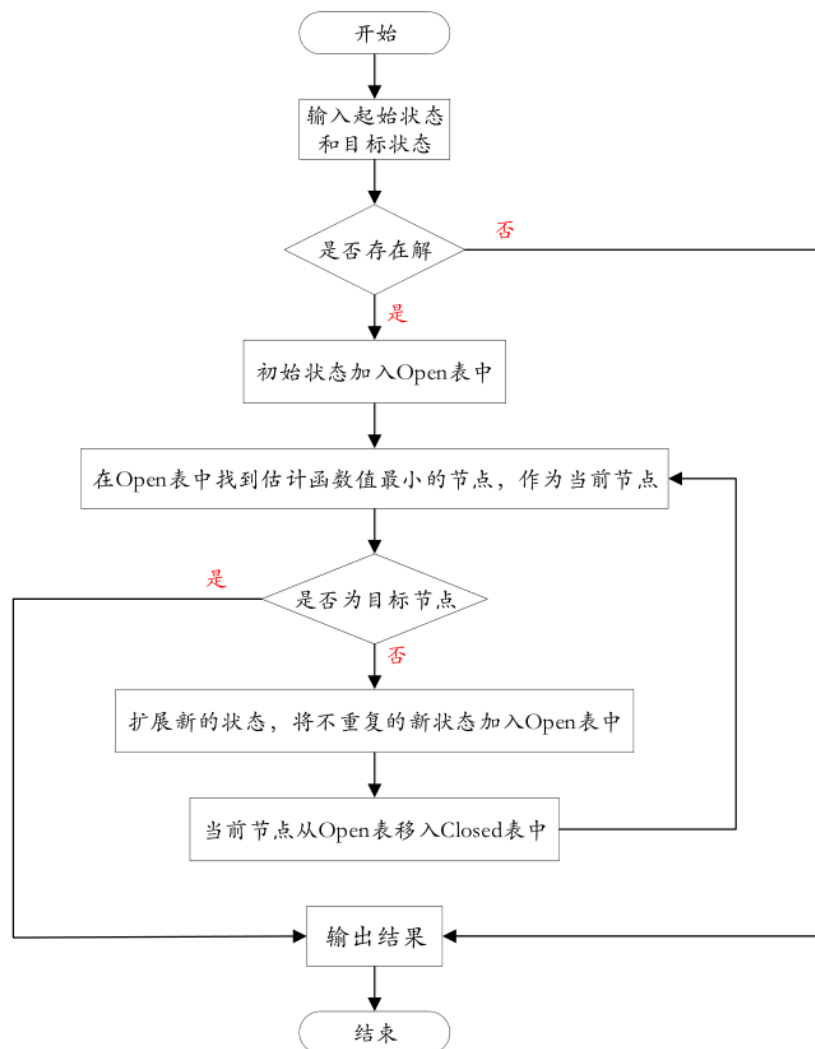
```
1. open=[Stat]
2. closed=[]
3. while open 不为空{
4.     从 open 中取出估价值 f 最小的节点 n
5.     if n == Target
6.         return 从 Stat 到 n 的路径 //找到了!!!
7.     else{
8.         for n 的每个子节点 x{
9.             if x in open{
10.                计算新的 f(x)
11.                比较 open 表中的旧 f(x)和新 f(x)
12.                if 新 f(x) < 旧 f(x){
13.                    删掉 open 表里的旧 x，加入新 x
14.                }
15.            }
16.            else if x in closed{
17.                计算新的 f(x)
18.                比较 closed 表中的旧 f(x)和新 f(x)
19.                if 新 f(x) < 旧 f(x){
20.                    remove x from closed
21.                    add x to open
```

```

22.         }
23.     }
24.     else {
25.         计算  $f(x)$  add x to open
26.     }
27. }
28. add n to closed
29. }
30. }

```

3. 算法过程



四、 样例解析

以八数码（曼哈顿距离为估价函数）为例

初始状态：

2	8	3
1		4
7	6	5

目标状态：

1	2	3
8		4
7	6	5

搜索树的估价函数为：

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

$d(n)$ 是当前状态处于搜索树的深度

$h(n)$ 是从状态 n 到目标状态的估计代价

1. 初始化

初始状态为 $S(4)$ ，其中 $g(n)$ 等于当前状态位于搜索树的深度 0， $h(n)$ 等于当前状态到达目标状态的估计代价 4，所以 $0 + 4 = 4$ ；

2. 第一次循环

- 从 Open 表中取出第一个代价最小的状态 $S(4)$ ，如果该状态是目的状态，则搜索结束并返回 Closed 表；如果没有，则继续循环；
- 空白区域可以由上左下右四个方向的数字填补，通过上述的计算方法可以得到 $A(5)$ 、 $B(7)$ 、 $C(7)$ 、 $D(7)$ 四个状态；
- 将 $A(5)$ 、 $B(7)$ 、 $C(7)$ 、 $D(7)$ 四个状态归入 Open 表中按照每个状态的总代价升序排列，并将上一步状态 $S(4)$ 归入 Closed 表中；

3. 第二次循环

- 从 Open 表中取出第一个代价最小的状态 $A(5)$ ，如果该状态是目的状态，则搜索结束并返回 Closed 表；如果没有，则继续循环；
- 空白区域可以由左右四个方向的数字填补，因为从下数字补填的状态已经出现在了 Open 表或 Closed 表中，通过上述的计算方法可以得到 $E(6)$ 、 $F(7)$ 两个状态；

- c) 将 E(6)、F(8) 两个状态归入 Open 表中按照每个状态的总代价升序排列，并将上一步状态 A(5) 归入 Closed 表中；

4. 第三次循环

- a) 从 Open 表中取出第一个代价最小的状态 E(6)，如果该状态是目的状态，则搜索结束并返回 Closed 表；如果没有，则继续循环；
- b) 空白区域只可以由下方的数字填补，因为从右边数字补填的状态已经出现在了 Open 表或 Closed 表中，通过上述的计算方法可以得到 G(5) 这个状态；
- c) 将 G(5) 状态归入 Open 表中按照每个状态的总代价升序排列，并将上一步状态 E(6) 归入 Closed 表中；

5. 第四次循环

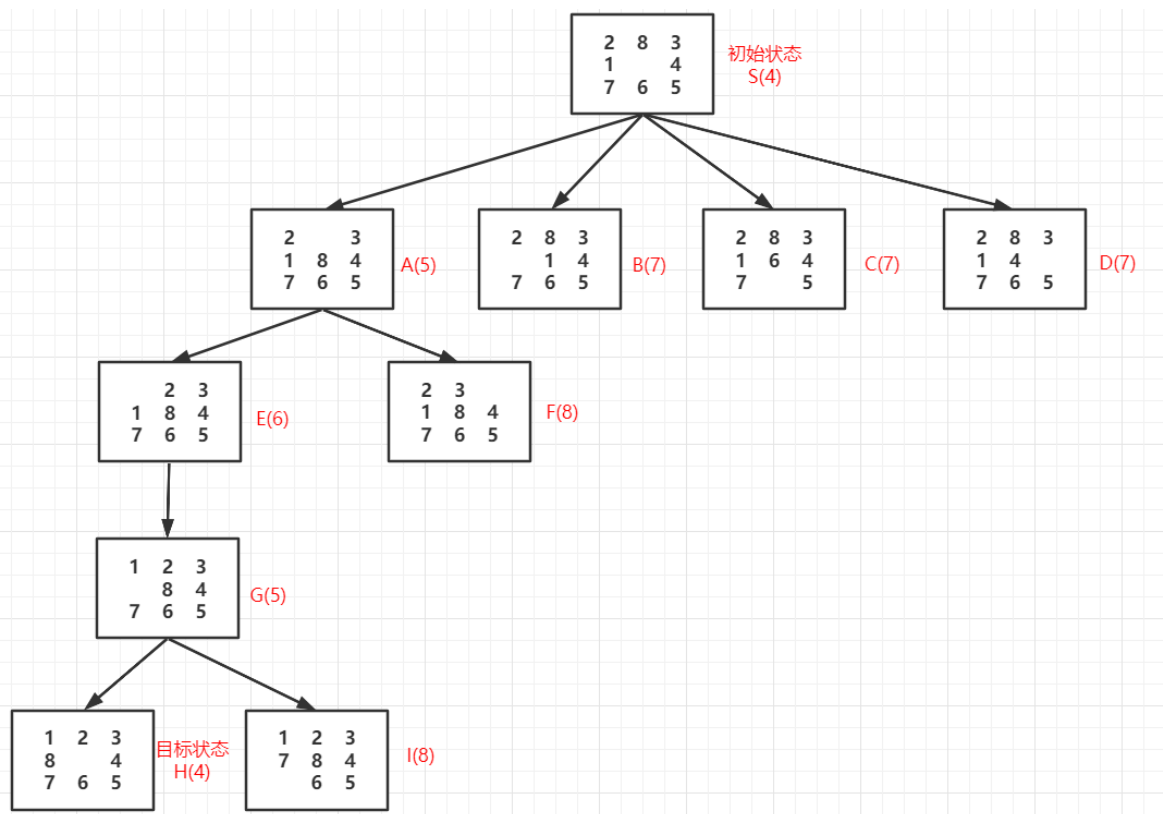
- a) 从 Open 表中取出第一个代价最小的状态 G(5)，如果该状态是目的状态，则搜索结束并返回 Closed 表；如果没有，则继续循环；
- b) 空白区域只可以由下方和右边的数字填补，因为从上边数字补填的状态已经出现在了 Open 表中或 Closed 表中，通过上述的计算方法可以得到 H(4)、I(8) 两个状态；
- c) 将 H(4)、I(8) 状态归入 Open 表中按照每个状态的总代价升序排列，并将上一步状态 G(5) 归入 Closed 表中；

6. 第五次循环

从 Open 表中取出第一个代价最小的状态 H(4)，该状态就是目的状态，停止搜索并返回 Closed 表。

Open 表	Closed 表
初始化: (S(4))	()
一次循环后: (A(5), B(7), C(7), D(7))	(S(4))
二次循环后: (E(6), B(7), C(7), D(7), F(8))	(S(4), A(5))
三次循环后: (G(5), B(7), C(7), D(7), F(8))	(S(4), A(5), E(6))
四次循环后: (H(4), B(7), C(7), D(7), F(8), I(8))	(S(4), A(5), E(6), G(5))
五次循环后: H 为目的状态，搜索成功	(S(4), A(5), E(6), G(5), H(4))

状态搜索树如下：



运行结果如下：

输出部分：

D:\PyProject\venv\Scripts\python.exe D:/PyProject/(n^2-1)puzzle.py

请输入数码的级数： (可选项：3、4)

3

请输入初始状态，以 3 * 3 的形式，数字以空格相隔，行末以回车结尾

2 8 3

1 0 4

7 6 5

起始状态存储为：

[2, 8, 3]

[1, 0, 4]

[7, 6, 5]

请输入目标状态，以 3 * 3 的形式，数字以空格相隔，行末以回车结尾

1 2 3

8 0 4

7 6 5

目标状态存储为：

[1, 2, 3]

[8, 0, 4]

[7, 6, 5]

运行部分：

-----以下为运行过程-----

已经找到最优解！

搜索的次数： 9 移动总步数： 4

移动第 0 步时的状态如下：

[2, 8, 3]

[1, 0, 4]

[7, 6, 5]

总代价F为 4 当前深度G为 0 估计代价H为 4

移动第 1 步时的状态如下：

[2, 0, 3]

[1, 8, 4]

[7, 6, 5]

总代价F为 5 当前深度G为 1 估计代价H为 4

移动第 2 步时的状态如下：

[0, 2, 3]

[1, 8, 4]

[7, 6, 5]

总代价F为 6 当前深度G为 2 估计代价H为 4

移动第 3 步时的状态如下：

[1, 2, 3]

[0, 8, 4]

[7, 6, 5]

总代价F为 5 当前深度G为 3 估计代价H为 2

移动第 4 步时的状态如下：

[1, 2, 3]

[8, 0, 4]

[7, 6, 5]

总代价F为 4 当前深度G为 4 估计代价H为 0

运行花费的时间： 948 微秒(μ s)

五、 实验总结

表 1 不同启发函数 h (n) 求解 8 数码问题的结果比较

	启发函数 h (n)																							
	不在位数			曼哈顿距离																				
初始状态	<table><tr><td>2</td><td>8</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>			2	8	3	1		4	7	6	5	<table><tr><td>2</td><td>8</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>			2	8	3	1		4	7	6	5
2	8	3																						
1		4																						
7	6	5																						
2	8	3																						
1		4																						
7	6	5																						
目标状态	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>8</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>			1	2	3	8		4	7	6	5	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>8</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>			1	2	3	8		4	7	6	5
1	2	3																						
8		4																						
7	6	5																						
1	2	3																						
8		4																						
7	6	5																						
生成节点数	11			9																				
运行时间（微秒）	1236us			954us																				

表 2 不同启发函数 h (n) 求解 15 数码问题的结果比较

	启发函数 h (n)																																							
	不在位数				曼哈顿距离																																			
初始状态	<table><tr><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>9</td><td>6</td><td>3</td><td>8</td></tr><tr><td>13</td><td>15</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>14</td><td></td><td>7</td><td>12</td></tr></table>				5	1	2	4	9	6	3	8	13	15	10	11	14		7	12	<table><tr><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>9</td><td>6</td><td>3</td><td>8</td></tr><tr><td>13</td><td>15</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>14</td><td></td><td>7</td><td>12</td></tr></table>				5	1	2	4	9	6	3	8	13	15	10	11	14		7	12
5	1	2	4																																					
9	6	3	8																																					
13	15	10	11																																					
14		7	12																																					
5	1	2	4																																					
9	6	3	8																																					
13	15	10	11																																					
14		7	12																																					
目标状态	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td></td></tr></table>				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td></td></tr></table>				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	2	3	4																																					
5	6	7	8																																					
9	10	11	12																																					
13	14	15																																						
1	2	3	4																																					
5	6	7	8																																					
9	10	11	12																																					
13	14	15																																						
生成节点数	132				136																																			
运行时间（微秒）	15658us				16011us																																			

通过设置相同的初始状态和目标函数，针对不同的估价函数，求解问题的解，比较这些参数对搜索算法性能的影响，可以得出曼哈顿距离优于不在位数的估价函数，可见估价函数的选取对于算法的运行存在很大的影响，这种影响在小型数据测试中不宜显现，而在大型数据的测试下会更加明显。此外，由于复杂度的原因十五数码的运算时间高于八数码。

由此我们还得出 A* 启发式算法的特点，概括如下：

1. 完备性：肯定能找到最优解（除非不存在解）
2. 最优性：找到的解花费最小
3. 速度快：扩展更少的节点（取决于估价函数的选择）

六、 参考资料

文献：

- [1] 付宏杰,王雪莹,周健,周孙静,朱珠,张俊余.八数码问题解法效率比较及改进研究[J].软件导刊,2016,15(09):41-45.
- [2] 温安国,李松年.N 数码问题直接解及优化研究[J].计算机应用与软件,2010,27(05):266-268+277.
- [3] 靳海亮,王赢乐,袁鸣,陈梦龙.改进 A*的高层建筑逃生路径规划算法研究[J].测绘通报,2019(11):17-21+25.
- [4] 卜奎昊, 宋杰, 李国斌. 基于 A*算法的八数码问题的优化实现[J]. 计算机与现代化, 2008(1):29-31.

博客：

- [1] Ta_Ex_ (2018-12-02) : 十五数码 A* 算法 [https://blog.csdn.net/Ta_Ex_/article/details/84726264].
- [2] small_bright_ (2020-04-10) : 八数码问题的 A* 搜索算法 [https://blog.csdn.net/small_bright_/article/details/105437321].
- [3] Ajinkya Sonawane (2018-09-16) : Solving 8-Puzzle using A* Algorithm.[https://blog.goodaudience.com/solving-8-puzzle-using-a-algorithm-7b509c331288].

七、 实验代码

```
1. import copy
2. import time
3. #初始状态
4. print("请输入数码的级数： (可选项： 3、4 ) ")
5. n = int(input())
```

```

6. print("请输入初始状态，以",n,"*",n,"的形式，数字以空格相隔，行末以回车
   结尾")
7. stat = [[0]*n]*n
8. for i in range(n):
9.     stat[i] = input().split(" ")
10.    stat[i] = [int(j) for j in stat[i]]
11. print("起始状态存储为： ")
12. for i in range(n):
13.     print(stat[i])
14. print()
15. print("请输入目标状态，以",n,"*",n,"的形式，数字以空格相隔，行末以回车
   结尾")
16. target = [[0]*n]*n
17. for i in range(n):
18.     target[i] = input().split(" ")
19.     target[i] = [int(j) for j in target[i]]
20. print("目标状态存储为： ")
21. for i in range(n):
22.     print(target[i])
23. print()
24. print("-----以下为运行过程-----")
25. #棋盘的类，实现移动和扩展状态
26. class puzzle:
27.     def __init__(self,stat,target):
28.         self.pre=None
29.         #目标状态
30.         self.target=target
31.         #stat 是一个二维列表
32.         self.stat=stat
33.         self.find0()
34.         self.update()
35.         #更新启发函数的相关信息
36.         def update(self):
37.             self.fH()
38.             self.fG()
39.             self.fF()
40.
41.         #G 是深度，也就是走的步数
42.         def fG(self):
43.             if(self.pre!=None):
44.                 self.G=self.pre.G+1
45.             else:
46.                 self.G=0
47.

```

```

48.     #H 是和目标状态距离之和 曼哈顿距离 或者为不在位数
49.     def fH(self):
50.         self.H=0
51.         # 曼哈顿距离之和
52.         for i in range(n):
53.             for j in range(n):
54.                 targetX=self.target[i][j]
55.                 nowP=self.findx(targetX)
56.
57.                 self.H+=abs(nowP[0]-i)+abs(nowP[1]-j)
58.
59.         # 不在位数
60.         # for i in range(n):
61.         #     for j in range(n):
62.         #         targetX=self.target[i][j]
63.         #         nowP=self.findx(targetX)
64.         #         if(abs(nowP[0]-i)+abs(nowP[1]-j)>0):
65.         #             self.H = self.H+1
66.
67.
68.     #F 是启发函数, F=G+H
69.     def fF(self):
70.         self.F=self.G+self.H
71.
72.     #以四行四列的形式输出当前状态
73.     def see(self):
74.         for i in range(n):
75.             print(self.stat[i])
76.         print("总代价 F 为",self.F,"当前深度 G 为",self.G,"估计代价 H
    为",self.H)
77.         print()
78.     #查看找到的解是如何从头移动的
79.     def seeAns(self):
80.         ans=[]
81.         ans.append(self)
82.         p=self.pre
83.         while(p):
84.             ans.append(p)
85.             p=p.pre
86.         ans.reverse()
87.         time = 0;
88.         for i in ans:
89.             print("移动第",time,"步时的状态如下: ")
90.             time = time +1

```

```

91.         i.see()
92.
93.     #找到数字 x 的位置
94.     def findx(self,x):
95.         for i in range(n):
96.             if(x in self.stat[i]):
97.                 j=self.stat[i].index(x)
98.                 return [i,j]
99.
100.    #找到 0，也就是空白格的位置
101.    def find0(self):
102.        self.zero=self.findx(0)
103.
104.    #扩展当前状态，也就是上下左右移动。返回的是一个状态列表，也就是包含 stat 的列表
105.    def expand(self):
106.        i=self.zero[0]    #x 坐标
107.        j=self.zero[1]    #y 坐标
108.        gridList=[]
109.        #空白格纵坐标显示中右，默认向左
110.        if(n==3):
111.            if (j == 2 or j == 1 ):
112.                gridList.append(self.left())
113.            if (i == 2 or i == 1 ):
114.                gridList.append(self.up())
115.            if (i == 0 or i == 1 ):
116.                gridList.append(self.down())
117.            if (j == 0 or j == 1 ):
118.                gridList.append(self.right())
119.            return gridList
120.        if(n==4):
121.            if (j == 2 or j == 1 or j == 3):
122.                gridList.append(self.left())
123.            if (i == 2 or i == 1 or i == 3):
124.                gridList.append(self.up())
125.            if (i == 0 or i == 1 or i == 2):
126.                gridList.append(self.down())
127.            if (j == 0 or j == 1 or j == 2):
128.                gridList.append(self.right())
129.            return gridList
130.
131.
132.
133.    #deepcopy 多维列表的复制，防止指针赋值将原列表改变

```

```

134.     #move 只能移动行或列，即 row 和 col 必有一个为 0
135.     #向某个方向移动
136.     def move(self,row,col):
137.         newStat=copy.deepcopy(self.stat)
138.         tmp=self.stat[self.zero[0]+row][self.zero[1]+col]
139.         newStat[self.zero[0]][self.zero[1]]=tmp
140.         newStat[self.zero[0]+row][self.zero[1]+col]=0
141.         return newStat
142.
143.     def up(self):
144.         return self.move(-1,0)
145.
146.     def down(self):
147.         return self.move(1,0)
148.
149.     def left(self):
150.         return self.move(0,-1)
151.
152.     def right(self):
153.         return self.move(0,1)
154.
155. #判断状态 g 是否在状态集合中，g 是对象，gList 是对象列表
156. #返回的结果是一个列表，第一个值是真假，如果是真则第二个值是 g 在 gList
    中的位置索引
157. def isin(g,gList):
158.     gstat=g.stat
159.     statList=[]
160.     for i in gList:
161.         statList.append(i.stat)
162.     if(gstat in statList):
163.         res=[True,statList.index(gstat)]
164.     else:
165.         res=[False,0]
166.     return res
167.
168. #计算逆序数之和
169. def N(nums):
170.     N=0
171.     nums = sum(nums, [])
172.     for i in range(len(nums)):
173.         if(nums[i]!=0):
174.             for j in range(i):
175.                 if(nums[j]>nums[i]):
176.                     N+=1

```

```

177.     return N
178.
179. #根据逆序数之和判断所给八数码是否可解
180. def judge(src,target):
181.     N1=N(src)
182.     N2=N(target)
183.     if(N1%2==N2%2):
184.         return True
185.     else:
186.         return False
187.
188. #Astar 算法的函数
189. def Astar(startStat):
190.     #open 和 closed 存的是 grid 对象
191.     open=[]
192.     closed=[]
193.     #初始化状态
194.     g=puzzle(startStat,target)
195.     #检查是否有解
196.     if(judge(startStat,g.target)!=True):
197.         print("所给样例无解, 请检查输入")
198.         exit(1)
199.
200.     open.append(g)
201.     #time 变量用于记录遍历次数
202.     time=0
203.     #当 open 表非空时进行遍历
204.     while(open):
205.         #根据启发函数值对 open 按照 F 进行排序, 默认升序
206.         open.sort(key=lambda G:G.F)
207.         #找出启发函数值最小的进行扩展
208.         minFStat=open[0]
209.         #检查是否找到解, 如果找到则从头输出移动步骤
210.         if(minFStat.H==0):
211.             print("已经找到最优解! ")
212.             print("搜索的次数: ",time,"移动总步数: ",minFStat.G)
213.             print()
214.             minFStat.seeAns()
215.             break
216.
217.         #走到这里证明还没有找到解, 对启发函数值最小的进行扩展
218.         open.pop(0)
219.         closed.append(minFStat)
220.         expandStats=minFStat.expand()

```

```

221.         #遍历扩展出来的状态
222.         for stat in expandStats:
223.             #将扩展出来的状态（二维列表）实例化为 grid 对象
224.             tmpG=puzzle(stat,target)
225.             #指针指向父节点
226.             tmpG.pre=minFStat
227.             #初始化时没有 pre，所以 G 初始化时都是 0
228.             #在设置 pre 之后应该更新 G 和 F
229.             tmpG.update()
230.             #查看扩展出的状态是否已经存在与 open 或 closed 中
231.             findstat=isin(tmpG,open)
232.             findstat2=isin(tmpG,closed)
233.             #在 closed 中,判断是否更新
234.             if(findstat2[0]==True and tmpG.F<closed[findstat2[1]
                ].F):
235.                 closed[findstat2[1]]=tmpG
236.                 open.append(tmpG)
237.                 time+=1
238.             #在 open 中,判断是否更新
239.             if(findstat[0]==True and tmpG.F<open[findstat[1]].F)
                :
240.                 open[findstat[1]]=tmpG
241.                 time+=1
242.             #tmpG 状态不在 open 中, 也不在 closed 中
243.             if(findstat[0]==False and findstat2[0]==False):
244.                 open.append(tmpG)
245.                 time+=1
246.
247.start = time.perf_counter()
248.#long running
249.Astar(stat)
250.
251.elapsed = (time.perf_counter() - start)
252.print("运行花费的时间: ",(int)(elapsed*1000*1000)," 微秒(μs)")

```

八、 附录

八数码测试数据:

3

2 8 3

1 0 4

7 6 5

1 2 3

8 0 4

7 6 5

十五数码测试数据:

4

5 1 2 4

9 6 3 8

13 15 10 11

14 0 7 12

1 2 3 4

5 6 7 8

9 10 11 12

13 14 15 0