浙大城市学院
ZHEJIANG UNIVERSITY CITY COLLEGE

A-star 算法

——(N^2-1)数码的 python 实现

课程名称：人工智能导论

小组编号：G03

小组成员：刘书宇 31801323

小组成员：童峻涛 31801341

专业班级：软件工程 1802

所在学院：计算机与计算科学学院

报告日期：2020 年 11 月 04 日

一、 实验目的

熟悉和掌握启发式搜索的定义、估价函数和算法过程，并利用 A-star 算法求解 N 数码难题，理解求解流程和搜索顺序。

以 8 数码问题和 15 数码问题为例实现 A-star 算法的求解程序（python 为例），设计两种不同的估价函数（不在位数字的个数、曼哈顿距离）。

二、 问题简介

1. 问题背景

八数码问题也称作九宫问题，拼图问题。在 3*3 的棋盘上，摆出八个棋子，每个棋子标有 1~8 中的某个数字，不同棋子上的数字不同，用 0 代替空格。棋盘上存在一个空格，与空格相邻的棋子可以移动到空格中。给出一个初始的棋子摆放状态，要求找出一种移动棋子步数最少的最优解，达到目的的棋子摆放状态。

十五数码问题来源于美国的科学魔术大师萨姆·洛伊德，洛伊德的发明其实只是将重排九宫（即 8 数码问题）中的 3 阶方阵扩大到 4 阶方阵罢了。由于这个细微的变化，十五数码问题的规模远远大于 8 数码问题，8 数码问题的规模较小，总的状态数与 15 数码的状态数相差了 8 个数量级。

2. 解的存在性

在判断 8 数码和 15 数码是否存在解的判定中，采取逆序数之和奇偶性判断。结论可以简单表示为：

a. 将一个状态表示为一维的形式，求出除 0 之外所有数字的逆序数之和，也就是每个数字前面比它大的数字的个数的和，称为这个状态的逆序。

b. 若两个状态的逆序奇偶性相同，则可互相到达，否则不可相互到达。

三、 算法简介

1. 算法描述

A*算法是一种求解最短路径最有效的直接搜索算法，也是目前最有影响的常用启发式算法。

定义 H*(n) 为状态 n 到目的状态的最优路径的代价，则当 A 搜索算法

的启发函数 H(n) 小于等于 H*(n)，即满足：

$$h（n） <= h^*(n)，对所有结点n$$

A*算法的启发函数为 F(n) = G(n) + H(n)，其中 F(n) 是从初始状态经由状态 n 到目标状态总代价的估计值，G(n) 是衡量某一状态在图中的深度（通俗的说就是当前已经走的步数），H(n)是从状态 n 到目标状态的最佳路径的估计代价。（在这里特别说明的是未带 * 为评估代价但并不一定是最优代价）

则可以定义最优估价函数：

$$f^*(n) = g^*(n) + h^*(n)$$

其中 h 是需要自己定义的，如果我们采用曼哈顿距离算法，具体公式为：

$$l = |x\,1\ - x\,2\,| + |y\,1\ - y\,2\,|$$

如果采用不在位数字的个数，则具体公式为：

$$Sum（Point（start）\quad NOT\quad IN\quad Point(target)）$$

2. 算法伪代码

```
open=[Stat]
closed=[]
while open 不为空{
    从 open 中取出估价值 f 最小的节点 n
    if n == Target
        return 从 Stat 到 n 的路径   //找到了！！！
    else{
        for n 的每个子节点 x{
            if x in open{
                计算新的 f(x)
                比较 open 表中的旧 f(x)和新 f(x)
                if 新 f(x) < 旧 f(x){
                    删掉 open 表里的旧 x，加入新 x
                }
            }
            else if x in closed{
                计算新的 f(x)
                比较 closed 表中的旧 f(x)和新 f(x)
                if 新 f(x) < 旧 f(x){
                    remove x from closed
                    add x to open
```

```
                }
            }
            else {
                计算 f(x) add x to open
            }
        }
        add n to closed
    }
}
```

四、 样例解析

以八数码（曼哈顿距离为估价函数）为例

初始状态：

2	8	3
1	6	4
7		5

目标状态：

1	2	3
8		4
7	6	5

搜索树的估价函数为：

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

$d(n)$是当前状态处于搜索树的深度

$h(n)$是从状态n到目标状态的估计代价

1. 初始化

初始状态为 S(4)，其中 g(n) 等于当前状态位于搜索树的深度 0，h(n) 等于当前状态到达目标状态的估计代价 4，所以 0 + 4 = 4；

2. 第一次循环

a) 从 Open 表中取出第一个代价最小的状态 S(4)，如果该状态是目的状态，则搜索结束并返回 Closed 表；如果没有，则继续循环；

b) 空白区域可以由上左下右四个方向的数字填补，通过上述的计算方法可以得到 A(5)、B(7)、C(7)、D(7) 四个状态；

c) 将 A(5)、B(7)、C(7)、D(7) 四个状态归入 Open 表中按照每个状态的总代价升序排列，并将上一步状态 S(4) 归入 Closed 表中；

3. 第二次循环

a) 从 Open 表中取出第一个代价最小的状态 A(5)，如果该状态是目的状态，则搜索结束并返回 Closed 表；如果没有，则继续循环；

b) 空白区域可以由左右四个方向的数字填补，因为从下数字补填的状态已经出现在了 Open 表或 Closed 表中，通过上述的计算方法可以得到 E(6)、F(7) 两个状态；

c) 将 E(6)、F(8) 两个状态归入 Open 表中按照每个状态的总代价升序排列，并将上一步状态 A(5) 归入 Closed 表中；

4. 第三次循环

a) 从 Open 表中取出第一个代价最小的状态 E(6)，如果该状态是目的状态，则搜索结束并返回 Closed 表；如果没有，则继续循环；

b) 空白区域只可以由下方的数字填补，因为从右边数字补填的状态已经出现在了 Open 表或 Closed 表中，通过上述的计算方法可以得到 G(5) 这个状态；

c) 将 G(5) 状态归入 Open 表中按照每个状态的总代价升序排列，并将上一步状态 E(6) 归入 Closed 表中；

5. 第四次循环

a) 从 Open 表中取出第一个代价最小的状态 G(5)，如果该状态是目的状态，则搜索结束并返回 Closed 表；如果没有，则继续循环；

b) 空白区域只可以由下方和右边的数字填补，因为从上边数字补填的状态已经出现在了 Open 表中或 Closed 表中，通过上述的计算方法可以得到 H(4)、I(8) 两个状态；

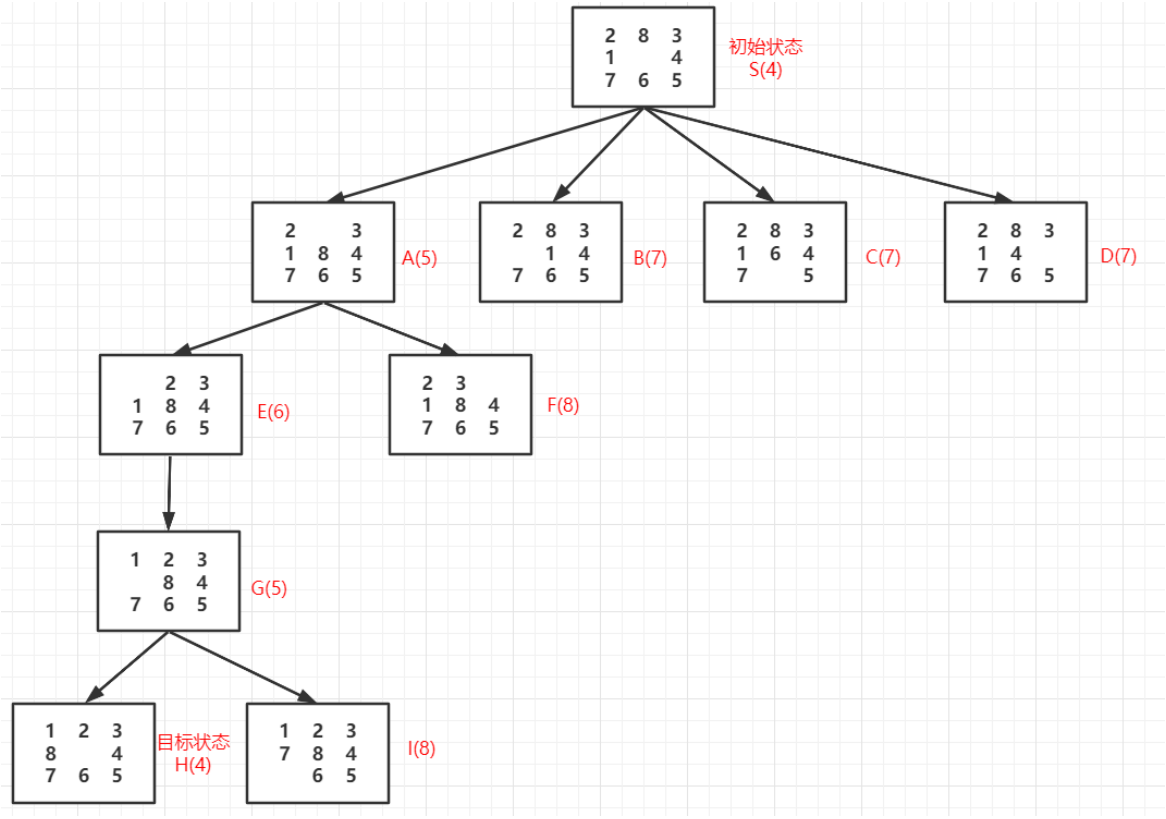
c) 将 H(4)、I(8) 状态归入 Open 表中按照每个状态的总代价升序排列，并将上一步状态 G(5) 归入 Closed 表中；

6. 第五次循环

从 Open 表中取出第一个代价最小的状态 H(4)，该状态就是目的状态，停止搜索并返回 Closed 表。

Open 表	Closed 表
初始化：(S(4))	( )
一次循环后：(A(5), B(7), C(7), D(7))	(S(4))
二次循环后：(E(6), B(7), C(7), D(7), F(8))	(S(4), A(5))
三次循环后：(G(5), B(7), C(7), D(7), F(8))	(S(4), A(5), E(6))
四次循环后：(H(4), B(7), C(7), D(7), F(8), I(8))	(S(4), A(5), E(6), G(5))
五次循环后：H 为目的状态，搜索成功	(S(4), A(5), E(6), G(5), H(4))

状态搜索树如下：



运行结果如下：

输出部分：

```
(n^2-1)puzzle
D:\PyProject\venv\Scripts\python.exe D:\PyProject\(n^2-1)puzzle.py
请输入数码的级数：    （可选项：3、4）
3
请输入初始状态，以 3 * 3 的形式，数字以空格相隔，行末以回车结尾
2 8 3
1 6 4
7 0 5
起始状态存储为：
[2, 8, 3]
[1, 6, 4]
[7, 0, 5]

请输入目标状态，以 3 * 3 的形式，数字以空格相隔，行末以回车结尾
1 2 3
8 0 4
7 6 5
目标状态存储为：
[1, 2, 3]
[8, 0, 4]
[7, 6, 5]
```

运行部分：

(n^2-1)puzzle

```
------以下为运行过程------
已经找到最优解!
搜索的次数： 11 移动总步数： 5

移动第 0 步时的状态如下:
[2, 8, 3]
[1, 6, 4]
[7, 0, 5]
总代价F为 6 当前深度G为 0 估计代价H为 6

移动第 1 步时的状态如下:
[2, 8, 3]
[1, 0, 4]
[7, 6, 5]
总代价F为 5 当前深度G为 1 估计代价H为 4

移动第 2 步时的状态如下:
[2, 0, 3]
[1, 8, 4]
[7, 6, 5]
总代价F为 6 当前深度G为 2 估计代价H为 4

移动第 3 步时的状态如下:
[0, 2, 3]
[1, 8, 4]
[7, 6, 5]
总代价F为 7 当前深度G为 3 估计代价H为 4

移动第 4 步时的状态如下:
[1, 2, 3]
[0, 8, 4]
[7, 6, 5]
总代价F为 6 当前深度G为 4 估计代价H为 2

移动第 5 步时的状态如下:
[1, 2, 3]
[8, 0, 4]
[7, 6, 5]
总代价F为 5 当前深度G为 5 估计代价H为 0

运行花费的时间： 1164 微秒(μs)
```

五、 实验总结

表 1　不同启发函数 h（n）求解 8 数码问题的结果比较

	启发函数 h（n）	
	不在位数	曼哈顿距离
初始状态	**2 8 3** **1 4** **7 6 5**	**2 8 3** **1 4** **7 6 5**
目标状态	**1 2 3** **8 4** **7 6 5**	**1 2 3** **8 4** **7 6 5**
生成节点数	11	9
运行时间（微秒）	1236us	954us

表 2　不同启发函数 h（n）求解 15 数码问题的结果比较

	启发函数 h（n）	
	不在位数	曼哈顿距离
初始状态	5 1 2 4 9 6 3 8 13 15 10 11 14 7 12	5 1 2 4 9 6 3 8 13 15 10 11 14 7 12
目标状态	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
生成节点数	132	136
运行时间（微秒）	15658us	16011us

通过设置相同的初始状态和目标函数，针对不同的估价函数，求解问题的解，比较这些参数对搜索算法性能的影响，可以得出曼哈顿距离优于不在位数的估价函数，可见估价函数的选取对于算法的运行存在很大的影响，这种影响在小型数据测试中不宜显现，而在大型数据的测试下会更加明显。此外，由于复杂度的原因十五数码的运算时间高于八数码。

由此我们还得出 A*启发式算法的特点，概括如下：

1. 完备性：肯定能找到最优解（除非不存在解）
2. 最优性：找到的解花费最小
3. 速度快：扩展更少的节点（取决于估价函数的选择）

六、 实验代码

```
import copy
import time
#初始状态
print("请输入数码的级数：    (可选项：3、4）")
n = int(input())
print("请输入初始状态，以",n,"*",n,"的形式，数字以空格相隔，行末以回车结尾")
stat = [[0]*n]*n
for i in range(n):
    stat[i] = input().split(" ")
    stat[i] = [int(j) for j in stat[i]]
print("起始状态存储为：")
for i in range(n):
    print(stat[i])
print()
print("请输入目标状态，以",n,"*",n,"的形式，数字以空格相隔，行末以回车结尾")
target = [[0]*n]*n
for i in range(n):
    target[i] = input().split(" ")
    target[i] = [int(j) for j in target[i]]
print("目标状态存储为：")
for i in range(n):
    print(target[i])
print()
print("------以下为运行过程------")
#棋盘的类，实现移动和扩展状态
class puzzle:
```

```
27.     def __init__(self,stat,target):
28.         self.pre=None
29.         #目标状态
30.         self.target=target
31.         #stat 是一个二维列表
32.         self.stat=stat
33.         self.find0()
34.         self.update()
35.     #更新启发函数的相关信息
36.     def update(self):
37.         self.fH()
38.         self.fG()
39.         self.fF()
40.
41.     #G 是深度，也就是走的步数
42.     def fG(self):
43.         if(self.pre!=None):
44.             self.G=self.pre.G+1
45.         else:
46.             self.G=0
47.
48.     #H 是和目标状态距离之和 曼哈顿距离 或者为不在位数
49.     def fH(self):
50.         self.H=0
51.         # 曼哈顿距离之和
52.         for i in range(n):
53.             for j in range(n):
54.                 targetX=self.target[i][j]
55.                 nowP=self.findx(targetX)
56.
57.                 self.H+=abs(nowP[0]-i)+abs(nowP[1]-j)
58.
59.         # 不在位数
60.         # for i in range(n):
61.         #     for j in range(n):
62.         #         targetX=self.target[i][j]
63.         #         nowP=self.findx(targetX)
64.         #         if(abs(nowP[0]-i)+abs(nowP[1]-j)>0):
65.         #             self.H  = self.H+1
66.
67.
68.     #F 是启发函数，F=G+H
69.     def fF(self):
70.         self.F=self.G+self.H
```

```
71.
72.     #以四行四列的形式输出当前状态
73.     def see(self):
74.         for i in range(n):
75.             print(self.stat[i])
76.         print("总代价 F 为",self.F,"当前深度 G 为",self.G,"估计代价 H
    为",self.H)
77.         print()
78.     #查看找到的解是如何从头移动的
79.     def seeAns(self):
80.         ans=[]
81.         ans.append(self)
82.         p=self.pre
83.         while(p):
84.             ans.append(p)
85.             p=p.pre
86.         ans.reverse()
87.         time = 0;
88.         for i in ans:
89.             print("移动第",time,"步时的状态如下：")
90.             time = time +1
91.             i.see()
92.
93.     #找到数字 x 的位置
94.     def findx(self,x):
95.         for i in range(n):
96.             if(x in self.stat[i]):
97.                 j=self.stat[i].index(x)
98.                 return [i,j]
99.
100.     #找到 0，也就是空白格的位置
101.     def find0(self):
102.             self.zero=self.findx(0)
103.
104.     #扩展当前状态，也就是上下左右移动。返回的是一个状态列表，也就是包
    含 stat 的列表
105.     def expand(self):
106.         i=self.zero[0]  #x 坐标
107.         j=self.zero[1]  #y 坐标
108.         gridList=[]
109.         #空白格纵坐标显示中右，默认向左
110.         if(n==3):
111.             if (j == 2 or j == 1 ):
112.                 gridList.append(self.left())
```

```
            if (i == 2 or i == 1 ):
                gridList.append(self.up())
            if (i == 0 or i == 1 ):
                gridList.append(self.down())
            if (j == 0 or j == 1 ):
                gridList.append(self.right())
            return gridList
        if(n==4):
            if (j == 2 or j == 1 or j == 3):
                gridList.append(self.left())
            if (i == 2 or i == 1 or i == 3):
                gridList.append(self.up())
            if (i == 0 or i == 1 or i == 2):
                gridList.append(self.down())
            if (j == 0 or j == 1 or j == 2):
                gridList.append(self.right())
            return gridList



    #deepcopy 多维列表的复制，防止指针赋值将原列表改变
    #move 只能移动行或列，即 row 和 col 必有一个为 0
    #向某个方向移动
    def move(self,row,col):
        newStat=copy.deepcopy(self.stat)
        tmp=self.stat[self.zero[0]+row][self.zero[1]+col]
        newStat[self.zero[0]][self.zero[1]]=tmp
        newStat[self.zero[0]+row][self.zero[1]+col]=0
        return newStat

    def up(self):
        return self.move(-1,0)

    def down(self):
        return self.move(1,0)

    def left(self):
        return self.move(0,-1)

    def right(self):
        return self.move(0,1)

#判断状态 g 是否在状态集合中，g 是对象，gList 是对象列表
```

```
#返回的结果是一个列表，第一个值是真假，如果是真则第二个值是 g 在 gList 中的位置索引
def isin(g,gList):
    gstat=g.stat
    statList=[]
    for i in gList:
        statList.append(i.stat)
    if(gstat in statList):
        res=[True,statList.index(gstat)]
    else:
        res=[False,0]
    return res

#计算逆序数之和
def N(nums):
    N=0
    nums = sum(nums, [])
    for i in range(len(nums)):
        if(nums[i]!=0):
            for j in range(i):
                if(nums[j]>nums[i]):
                    N+=1
    return N

#根据逆序数之和判断所给八数码是否可解
def judge(src,target):
    N1=N(src)
    N2=N(target)
    if(N1%2==N2%2):
        return True
    else:
        return False

#Astar 算法的函数
def Astar(startStat):
    #open 和 closed 存的是 grid 对象
    open=[]
    closed=[]
    #初始化状态
    g=puzzle(startStat,target)
    #检查是否有解
    if(judge(startStat,g.target)!=True):
        print("所给样例无解，请检查输入")
        exit(1)
```

```
199.
200.     open.append(g)
201.     #time 变量用于记录遍历次数
202.     time=0
203.     #当 open 表非空时进行遍历
204.     while(open):
205.         #根据启发函数值对 open 按照 F 进行排序，默认升序
206.         open.sort(key=lambda G:G.F)
207.         #找出启发函数值最小的进行扩展
208.         minFStat=open[0]
209.         #检查是否找到解，如果找到则从头输出移动步骤
210.         if(minFStat.H==0):
211.             print("已经找到最优解！")
212.             print("搜索的次数：",time,"移动总步数：",minFStat.G)
213.             print()
214.             minFStat.seeAns()
215.             break
216.
217.         #走到这里证明还没有找到解，对启发函数值最小的进行扩展
218.         open.pop(0)
219.         closed.append(minFStat)
220.         expandStats=minFStat.expand()
221.         #遍历扩展出来的状态
222.         for stat in expandStats:
223.             #将扩展出来的状态（二维列表）实例化为 grid 对象
224.             tmpG=puzzle(stat,target)
225.             #指针指向父节点
226.             tmpG.pre=minFStat
227.             #初始化时没有 pre，所以 G 初始化时都是 0
228.             #在设置 pre 之后应该更新 G 和 F
229.             tmpG.update()
230.             #查看扩展出的状态是否已经存在与 open 或 closed 中
231.             findstat=isin(tmpG,open)
232.             findstat2=isin(tmpG,closed)
233.             #在 closed 中,判断是否更新
234.             if(findstat2[0]==True and tmpG.F<closed[findstat2[1]
    ].F):
235.                 closed[findstat2[1]]=tmpG
236.                 open.append(tmpG)
237.                 time+=1
238.             #在 open 中，判断是否更新
239.             if(findstat[0]==True and tmpG.F<open[findstat[1]].F)
    :
240.                 open[findstat[1]]=tmpG
```

```
                time+=1
            #tmpG 状态不在 open 中，也不在 closed 中
            if(findstat[0]==False and findstat2[0]==False):
                open.append(tmpG)
                time+=1

start = time.perf_counter()
#long running
Astar(stat)

elapsed = (time.perf_counter() - start)
print("运行花费的时间: ",(int)(elapsed*1000*1000)," 微秒(μs)")
```

七、 附录

八数码测试数据：
3
2 8 3
1 0 4
7 6 5
1 2 3
8 0 4
7 6 5

十五数码测试数据：
4
5 1 2 4
9 6 3 8
13 15 10 11
14 0 7 12
1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15 0