Lezione 8 - operazioni tra matrici

$\mathbb{K}$ campo fissato, matrice con N righe e M colonne

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,M} \\ a_{2,1} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{N,1} & & & & a_{N,M} \end{pmatrix}}_{M \text{ colonne}} \Big\} N \text{ righe}$$

L'insieme di tutte le matrici con N righe e M colonne

$$M(N, M, \mathbb{K})$$

$M(N, M, \mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

A, B matrici con N righe e M colonne posso fare

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{N1} & \cdots & & a_{NM} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & \cdots & b_{1M} \\ \vdots & & \\ b_{N1} & \cdots & b_{NM} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \oplus b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{1M}+b_{1M} \\ & & \\ a_{N1} \oplus b_{N1} & & a_{NM}+b_{NM} \end{pmatrix}$$

prodotto per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$

$A \in M(n, m, \mathbb{K})$

$$\lambda \cdot A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

TRASPOSTA DI UNA MATRICE

$A \in M(n, m, \mathbb{K})$ la trasposta di A è

una matrice che ha m righe $\rightarrow$ tante righe quante le colonne di A

n colonne $\rightarrow$ tante colonne quante le righe di A

e che si ottiene scambiando righe e colonne

$$ {}^tA \in M(m, n, \mathbb{K}) $$

$$ ({}^tA)_{ij} = A_{ji} $$

esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 2 & -7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 11 \\ 0 & 2 & 90 \end{pmatrix} \longrightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \\ -3 & 11 & 90 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ

(1) $${}^t({}^tA) = A$$

(2) $${}^t(\underbrace{A + B}) = {}^tA + {}^tB$$

sto dando per buono che A e B si possano sommare, cioè $A, B \in M(n, m, \mathbb{K})$

(3) $${}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^tA$$

(4) $A \in M(n, \mathbb{K})$ allora anche ${}^tA \in M(n, \mathbb{K})$

es somma di matrici non quadrate

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -3 \\ 2 & \boxed{1} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{9} & -7 & -6 \\ -1 & \boxed{0} & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{-3} \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \boxed{?}$$

Queste non le posso sommare

Definizione

$$\underbrace{A \in M(n, \mathbb{K})}_{\text{matrice quadrata}} \quad \text{è simmetrica se} \quad A = {}^tA$$

$$A \in M(n, \mathbb{K}) \quad \text{è antisimmetrica se} \quad {}^tA = -A$$

<u>es</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & 5 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

MATRICE SIMMETRICA

<u>es</u> Matrice antisimmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered} \shortparallel \\ -A \end{gathered}$$

Dato che ${}^tA = -A$, vuol dire che $A + {}^tA = \underline{0}$

La matrice con tutti zeri.

RANGO DI UNA MATRICE

prendo $A \in M(n, m, \mathbb{K})$ una matrice.

$A^1, \dots, A^m \longrightarrow$ nomi per le colonne di A

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}2\\1\\-1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}4\\5\\0\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ A^1 & A^2 & & A^4 \end{array}$$

$rk(A)$

Il RANGO di A è un numero naturale che è la dimensione dello spazio $\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^m)$ (lo spazio generato dalle colonne di A)

PROPRIETÀ

(1) $rk(A)$ è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A

(2) potete calcolare il rango anche usando le righe di A

TEO chiamiamo $A_1, \dots, A_n$ le righe di A

$$\dim(\operatorname{span}(A_1, \dots, A_n)) = \dim(\operatorname{span}(A^1, \dots, A^m))$$

(3) $rk(A) = rk({}^tA)$

PRODOTTO TRA MATRICI

parto da un esempio

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 11 & 5 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 13 & -2 \\ -14 & 6 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 1\cdot 7+3\cdot 13+2\cdot(-14) & 1\cdot(-5)+3\cdot(-2)+2\cdot 6 \\ 11\cdot 7+5\cdot 13+0\cdot(-14) & 11\cdot(-5)+5\cdot(-2)+0\cdot 6 \end{pmatrix}$$

B deve avere tante righe quante le colonne di A esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$(3\times 2) \cdot (2\times 4)$$
$$\downarrow$$
$$(3 \times 4)$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1\cdot 1+2\cdot 3} & \boxed{1\cdot 2+2\cdot 0} & 1\cdot 0+2\cdot 3 & 1\cdot 1+2\cdot 0 \\ \boxed{-1\cdot 1+1\cdot 3} & -1\cdot 2+1\cdot 0 & -1\cdot 0+1\cdot 3 & -1\cdot 1+1\cdot 0 \\ 0\cdot 1+3\cdot 3 & 0\cdot 2+3\cdot 0 & 0\cdot 0+3\cdot 3 & 0\cdot 1+3\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underset{\boxed{}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \boxed{?} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \boxed{0} & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 0 \\ 0\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B \neq B\cdot A$$

Definizione del prodotto tra matrici

A è una matrice $m \times n$ (m righe, n colonne)

B è una matrice $n \times p$ (n righe, p colonne)

$$(A \cdot B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj}$$

esplicitamente $\quad A_{i1} \cdot B_{1j} + A_{i2} \cdot B_{2j} + \dots + A_{in} \cdot B_{nj}$

TRACCIA DI UNA MATRICE QUADRATA

La traccia di $A \in M(n, n)$ è la somma degli elementi lungo la diagonale.

$$tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots a_{nn}$$

<u>es</u>

$$tr\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 1 + 4 + 10 = 15$$

posso fare prodotto, traccia, trasposta in tutti esempi

<u>oss</u> $\quad {}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$