11- sistemi lineari

un sistema lineare è un insieme di equazioni di primo grado

equazioni (in tutto sono k

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

termini noti

incognite

coefficienti delle incognite

es

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + \frac{3}{4}y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Una soluzione di un sistema lineare è una n-upla di numeri $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$ che, sostituita alle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ del sistema produce delle identità

<u>es</u>

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ x_1 + 2x_1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ 3x_1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 4/3 \\ x_1 = 2/3 \end{cases}$$

La coppia $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ è una soluzione perché sostituendo

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = 0 \\ \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2 = 2 \end{cases}$$

Un sistema lineare si può scrivere usando matrici

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

Dal sistema si ricavano le matrici, dalle matrici si ricava il sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$$

Prendo una matrice che rappresenta un sistema lineare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

Mosse di Gauss

1. Scambiare due righe della matrice
2. Moltiplicare tutti i valori di una riga per $\lambda \neq 0$
3. $R_i + s \cdot R_j$ prendere la riga R_i e sommarci un multiplo di un'altra riga.

PROP Dato un sistema lineare, le mosse di Gauss non cambiano la soluzione.

esempio di come applicare l'algoritmo

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{3}\ R_2 \to R_2 \boxed{-2} R_1}$$

voglio fare in modo che qui ci siano zeri.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2-2\cdot1 & 4-2\cdot1 & -3-2\cdot2 & 1-2\cdot9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ \boxed{0} & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{3}\ R_3 \to R_3-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3-3\cdot1 & 6-3\cdot1 & -5-3\cdot2 & 0-3\cdot9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & \boxed{3} & -11 & -27 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{3}\ R_3 \to R_3 - \boxed{\frac{3}{2}} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 - \frac{3}{2}\cdot 0 & 3 - \frac{3}{2}\cdot 2 & -11 - \frac{3}{2}\cdot(-7) & -27 - \frac{3}{2}(-17) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ -\frac{1}{2} z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$= 0$

si può risolvere facilmente partendo dall'ultima eq e tornando indietro

$$\xrightarrow{R_3 = R_3 \cdot 2} \ \xrightarrow[R_3 \to -R_3]{R_2 \to \frac{1}{2} R_2} \ \xrightarrow{R_1 \to R_1 + \frac{7}{2} R_3} \ \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

- Se prendo una matrice qualsiasi e guardo una sua riga, il primo elemento della riga non nullo (da sinistra a destra) si chiama PIVOT.
- una matrice a scalini è una matrice in cui il pivot di ogni riga è sempre più a destra del pivot della riga precedente.

es

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

→ pivot della prima riga

→ pivot della seconda riga

→ pivot della terza riga

esempio di matrice ridotta a scalini

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \end{pmatrix}$$

- L'algoritmo di Gauss usa le 3 mosse per trasformare una matrice in una matrice ridotta a scalini.

- L'algoritmo di Gauss-Jordan, dopo aver ridotto la matrice a scalini, usa le 3 mosse per mettere zeri anche sopra i pivot. e poi usa le mosse I e II per fare in modo che i pivot siano uguali a 1.

esercizio

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1-1 & 0-(-1) & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{R_2}{2}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ 2y = 2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_2 = R_2/2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 = R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es sapere se $(2, 1)$ e $(1, 3)$ sono dipendenti o indipendenti

$$x_1 \cdot (2,1) + x_2 (1,3) = (0,0)$$

$$(2x_1, x_1) + (x_2, 3x_2) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$