Demostración de las propiedades de las derivadas

Derivada de la suma

Sea $\alpha(x) = f(x) + g(x)$, se debe demostrar que $\alpha'(x) = f'(x) + g'(x)$, para ello partimos de la defінción de la derivada

$$\alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(x+h) - \alpha(x)}{h}$$

Sustituyendo

$$\alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)]}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] + \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Así se cumple que

$$\alpha'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Derivada de una función compuesta o regla de la cadena

Sea α una función compuesta

$$\alpha = f\left[g(x)\right]$$

Se debe demostrar que

$$\alpha' = f'\left[g(x)\right] \cdot g'(x)$$

Partimos de la definición de la derivada

$$\alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(x+h) - \alpha(x)}{h}$$

Sustituyendo, tenemos

$$\alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left[g(x+h)\right] - f\left[g(x)\right]}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left[g(x+h)\right] - f\left[g(x)\right]}{h} \cdot 1$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f\left[g(x+h)\right] - f\left[g(x)\right]}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)}\right]$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f\left[g(x+h)\right] - f\left[g(x)\right]}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left[g(x+h)\right] - f\left[g(x)\right]}{g(x+h) - g(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Note que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left[g(x+h)\right] - f\left[g(x)\right]}{g(x+h) - g(x)} \cdot g'(x)$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

Si $k = g(x+h) - g(x) \implies g(x+h) = g(x) + k$

Si $h \to 0 \implies k \to 0$

Por lo tanto al sustituir h por k, se tiene

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left[g(x+k)\right] - f\left[g(x)\right]}{k} \cdot g'(x)$$

Así tenemos que

$$f'\left[(gx)\right] = \frac{f\left[g(x+k)\right] - f\left[g(x)\right]}{k}$$

Por lo tanto:

$$\alpha' = f'\left[g(x)\right] \cdot g'(x)$$

Derivada de logaritmo neperiano de x

Sea $\alpha'(x) = \ln(x)$, usando la definión de la derivada, se tiene

$$\alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\ln(x+h) - \ln(x)\right]$$

Aplicando propiedades de los logaritmos

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right]$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right]^{\frac{1}{h}}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right]^{\frac{1}{h}}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]^{\frac{1}{h}}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)\right]^{\frac{1}{x}}$$

Multiplicando por un 1 conveniente en el exponente

$$\Longrightarrow \alpha'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)\right]^{\frac{1}{h}\cdot\frac{x}{x}}$$

$$\Longrightarrow \alpha'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)\right]^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}}$$

Por propiedades de los logaritmos

$$\Longrightarrow \alpha'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\left[\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)\right]^{\frac{x}{h}}$$

Por propiedades de los límites

$$\Longrightarrow \alpha'(x) = \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)\right]^{\frac{x}{h}}$$

El límite ahora es la costante e

$$\Longrightarrow \alpha'(x) = \frac{1}{x}\ln e$$

Y $\ln e = 1$ por lo tanto se tiene

$$\Longrightarrow \alpha'(x) = \frac{1}{x}\cdot 1$$

Así la derivada del Logaritmo Neperiano de X es

$$\Longrightarrow \alpha'(x) = \frac{1}{x}$$

Derivada del producto de dos funciones

Sea $\alpha = f(x)g(x)$, se quiere demostrar que

$$\alpha' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

Partimos de la definición de la derivada:

$$\alpha'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(x+h) - \alpha(x)}{h}$$

Sustituyendo tenemos que

$$\alpha'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Sumando un cero conveniente se tiene

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + 0}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

Factorizamos

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h\to 0} \left[f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$$

Aplicando propiedades de los límites se tiene

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Acomodando los términos se tiene

$$\alpha'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Otras formas en las que se puede demostrar es utilizando la derivada de la regla de la cádena y la derivada del logaritmo neperiano, ambas fueron demostradas anteriormente.

Derivada de una constante

Sea $\alpha = k$, queremos demostrar que $\alpha'(x) = k' = 0$ para ello usamos la definición de a derivada:

$$\alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(x+h) - \alpha(x)}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

No se puede interpretar como una forma indeterminada $(\frac{0}{0})$ porque el númerador es exactamente 0 y el denominador tiende a 0.

Así se tiene que

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Derivada del producto de una constante por una función

Sea $\alpha = kf(x)$, se quiere demostrar que $\alpha'(x) = kf'(x)$, para ellos partimos de la definición de la derivada.

Como anterior mente se demostró la regla de la derivada del producto de dos funciones, se le aplicará esta regla a $\alpha(x)$ para derivarla:

$$\alpha'(x) = k'f(x) + kf'(x)$$

La derivada de una constante es 0, entonces

$$\alpha'(x) = 0 + kf'(x)$$

Así se cumple que

$$\alpha'(x) = kf'(x)$$

Derivada de una potencia

Esta regla se puede demostrar de dos maneras:

1. Con el Binomio de Newton para un $n \in \mathbb{Z}^+$
2. El caso general en el que $n \in \mathbb{R}$

Binomio de Newton

Vamos a proceder la demostración haciendo uso del teorema de Newton, para el cual $n \in \mathbb{Z}^+$ para ello partimos de la definición de derivada

$$\alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(x+h) - \alpha(x)}{h}$$

Sustituyendo

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - (x)^n}{h}$$

Por el Binomio de Newton

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x^n + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1}) - x^n}{h}$$

Simplificando y factorizando h

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1})}{h}$$

Aplicando propiedades de límites

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} nx^{n-1} + \lim_{h \to 0} \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \lim_{h \to 0} h^{n-1}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{h \to 0} nx^{n-1}$$

$$\implies \alpha'(x) = nx^{n-1}$$

Así se cumple que

$$\alpha'(x) = nx^{n-1}$$

Caso general

Vamos a proceder la demostración para el caso general en el que $n \in \mathbb{R}$ para ello aplicamos la regla de la derivada del logaritmo.

Sea

$$\alpha(x) = x^n$$

$$\implies \ln \alpha(x) = \ln x^n$$

$$\implies \ln \alpha(x) = n \ln x$$

Aplicando la derivada del logaritmo

$$\implies \frac{1}{\alpha(x)} \alpha'(x) = n \frac{1}{x}$$

$$\implies \alpha'(x) = \alpha(x) n \frac{1}{x}$$

$$\implies \alpha'(x) = x^n \frac{n}{x}$$

$$\implies \alpha'(x) = x^n \frac{n}{x}$$

$$\implies \alpha'(x) = n x^{n-1}$$

Así se cumple que

$$\alpha'(x) = n x^{n-1}$$

Derivada del cociente de funciones

Esta demostración se puede hacer de las siguientes formas:

1. Partiendo de la definición de derivada
2. Utilizando la regla de la función compuesta o regla de la cadena

Vamos a proceder esta demostración utilizando la defincinión de derivada, sea $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ utilizando la definición de derivada

$$\alpha'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(x+h) - \alpha(x)}{h}$$

Sustituyendo

$$\Longrightarrow \alpha'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$\Longrightarrow \alpha'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)}}{h}$$

$$\Longrightarrow \alpha'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\left[g(x)g(x+h)\right]}$$

Aplicando propiedades de límites

$$\Longrightarrow \alpha'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)} \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}$$

Sumando y restando un 0 conveniente

$$\Longrightarrow \alpha'(x) = \frac{1}{g(x)} \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}$$

Resolviendo

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)} = \frac{1}{g(x)}$$

Factorizando el númerador del límite

$$\implies \alpha'(x) = \frac{1}{g(x)} \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)} \lim_{h\to 0} \left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x)-g(x+h)}{h} \right]$$

$$\implies \alpha'(x) = \frac{1}{g(x)}\frac{1}{g(x)} \lim_{h\to 0} g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x)-g(x+h)}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \frac{1}{g(x)}\frac{1}{g(x)} g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{h}$$

Aplicando la definición de derivada se tiene

$$\implies \alpha'(x) = \frac{1}{g(x)}\frac{1}{g(x)} g(x)f'(x) - f(x)g'(x)$$

$$\implies \alpha'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Así se cumple que

$$\alpha'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Derivada de un logaritmo de cualquier base

Sea $\alpha(x) = \log_a x$, si realizamos el cambio de base

$$\alpha(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \ln x$$

Luego se utiliza la regla de la derivada de una constante por una función

$$\implies \alpha'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\implies \alpha'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Así se tiene que

$$\alpha'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Derivada de la función exponencial de base e

Sea $\alpha(x) = e^x$ aplicando ln a la función tenemos que

$$\implies \ln \alpha(x) = \ln e^x$$

Aplicando propiedades de los logaritmos

$$\implies \ln \alpha(x) = x \ln e$$

Recuerde que el $\ln e = 1$

$$\implies \ln \alpha(x) = x$$

Aplicando la regla de la derivada del logaritmo neperiano

$$\implies \frac{1}{\alpha(x)}\alpha'(x) = 1$$

$$\implies \alpha'(x) = \alpha(x)$$

Recuerde que $\alpha(x) = e^x$, así se tiene que

$$\implies \alpha'(x) = e^x$$

Derivada de la función exponencial a cualquier base

Sea $\alpha(x) = a^x$, aplicando ln, se tiene

$$\implies \ln \alpha(x) = \ln a^x$$

Propiedad de los logaritmos

$$\implies \ln \alpha(x) = x \ln a$$

Derivamos

$$\implies \frac{1}{\alpha(x)}\alpha'(x) = \ln a$$

$$\implies \alpha'(x) = \alpha(x) \ln a$$

Recuerde que $\alpha(x) = a^x$

$$\implies \alpha'(x) = a^x \ln a$$

Así se tiene que

$$\alpha'(x) = a^x \ln a$$

Derivadas trigonométricas

Derivada de $\sin x$

Para esta demostración es necesario recordar la identidad trigonométrica:

$$\sin A - \sin B = 2\cos\left[\frac{A+B}{2}\right]\sin\left[\frac{A-B}{2}\right]$$

Sea $\alpha(x) = \sin x$, partiendo de la definición de derivada, tenemos

$$\alpha'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x+h)-\alpha(x)}{h}$$

Sustituyendo

$$\alpha'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

Aplicando la identidad vista al inicio de la demostración

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{x\to 0}\left[\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\right]$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{x\to 0}\left[\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{2}{h}\sin\left(\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{x\to 0}\left[\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right]$$

Por propiedad de límites

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{x\to 0}\left[\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\right]\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right]$$

Recordando la identidad trigonométrica

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{x \to 0} \left[\cos \left(\frac{2x + h}{2} \right) \right]$$

Resolviendo el límite nos queda

$$\implies \alpha'(x) = \cos \left(\frac{2x}{2} \right)$$

$$\implies \alpha'(x) = \cos (x)$$

Así se cumple que

$$\sin'(x) = cos(x)$$

Derivada de $\cos x$

Para esta demostración es necesario recordar la identidad trigonométrica:

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \left[\frac{A + B}{2} \right] \sin \left[\frac{A - B}{2} \right]$$

Sea $\alpha(x) = \cos x$, partiendo de la definición de derivada, tenemos

$$\alpha'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x + h) - \alpha(x)}{h}$$

Sustituyendo

$$\alpha'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x + h) - \cos(x)}{h}$$

Aplicando la identidad vista al inicio de la demostración

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-2 \sin \left(\frac{x+h+x}{2} \right) \sin \left(\frac{x+h-x}{2} \right)}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{x \to 0} -\frac{\sin \left(\frac{2x+h}{2} \right) \sin \left(\frac{h}{2} \right)}{h}$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{x\to 0}\left[-\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\right]$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{x\to 0}\left[-\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{2}{h}\sin\left(\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{x\to 0}\left[-\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right]$$

Por propiedad de límites

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{x\to 0}\left[-\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\right]\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right]$$

Recordando la identidad trigonométrica

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\implies \alpha'(x) = \lim_{x\to 0}\left[-\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\right]$$

Resolviendo el límite nos queda

$$\implies \alpha'(x) = -\sin\left(\frac{2x}{2}\right)$$

$$\implies \alpha'(x) = -\sin(x)$$

Así se cumple que

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

Derivada de $\tan x$

Sea $\alpha(x) = \tan(x)$, pero $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ por lo que podemos escribir

$$\alpha(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Como ya hemos demostrado la derivada de la función seno y coseno, y la derivada de un cociente, vamos a derivar la función, aplicando primero la derivada del cociente

$$\implies \alpha'(x) = \frac{\sin(x)'\cos(x) - \sin(x)\cos(x)'}{[\cos(x)]^2}$$

$$\implies \alpha'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{[\cos(x)]^2}$$

$$\implies \alpha'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{[\cos(x)]^2}$$

Recordar la identidad pitagórica

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Por la identidad anterior se tiene

$$\implies \alpha'(x) = \frac{1}{[\cos(x)]^2}$$

$$\implies \alpha'(x) = \sec^2(x)$$

Así tenemos que

$$\tan'(x) = \sec^2(x)$$