Teorema de Cantor - Schröder - Bernstein

Si A y B son dos conjuntos tales que existe una función inyectiva $f : A \to B$ y una función inyectiva $g : B \to B$ entonces existe una biyección entre A y B.

Demostración

Para la demostración de este teorema primero vamos a demostrar el siguiente lema:

Lema

Si A y B son dos conjuntos tales que $B \subseteq A$ y existe f inyectiva tal que $f : A \to B$ entonces existe una biyección $g : A \to B$.

Prueba Sea

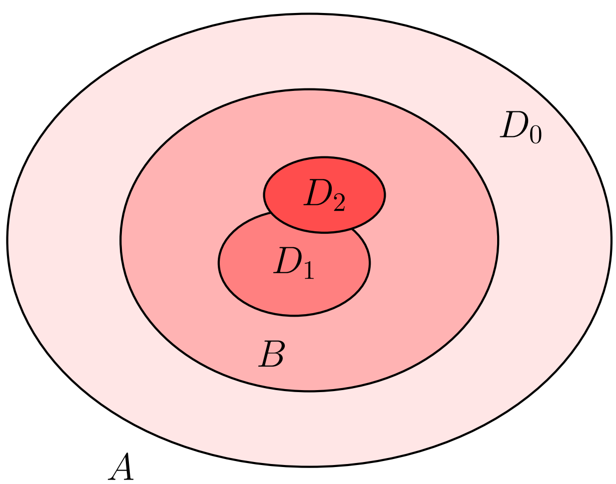
$$D_0 = (A \setminus B)^c$$

$$D_1 = f(D_0),\ D_1 \in B \text{ pero } B \subseteq A \implies D_1 \subseteq A$$

$$D_2 = f(D_1),\ D_2 \in B \text{ pero } B \subseteq A \implies D_2 \subseteq A$$

$$\vdots$$

$$D_{n+1} = f(D_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$$



Definimos la función:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_n \\ x & \text{si } x \notin D_n \end{cases}$$

Note que como el rango de f es B así el rango de g es B

Si $x \notin D_n$ para ningún n, la imagen de x por medio de $g(x) = x$, así $x \in B$ y como la imagen de $x = x$ así el rango de g es B lo que implica que $g(x)$ es biyectiva.

Procedemos con la demostración:

- g inyectiva $\implies g(x) = g(y)$,
- Si $x, y \in D_n \implies f(x) = f(y)$, recuerde que f es inyectiva así $x = y$.
- Si $y \notin D_n$ $x = y$ pues así está definida g (asignando elementos asimismas) $\implies x = y$.
- Si $x \in D_n$ y por ser un elemento de D_n y si $xy \notin D_n$ y y un elemento que no está en D_n entonces $f(x) = y$
- Dado que $D_n = f(D_n)$ tenemos que $y \in D_{n+1}$, recuerde que $y \notin D_n$ pero $y \in D_{n+1} \implies \impliedby$

Por lo que se cumple que la inyectividad.

Para probar que g es sobreyectiva, consideremos $b \in B$, hay que probar que es imagen de algún $a \in A$

- Si $b \notin D_n \implies g(b) = b, \quad b \in A$
- Si $b \in D_n$ para $n \geq 1 \implies \exists b' \in D_{n-1}$, tal que $f(b') = b$

Ya que $b' \in A$ entonces $b' = f(b')$, así b' satisface que $g(b') = b$

Si $b \in D_0$, recuerde que $D_o = (A \setminus B)^c$ entonces $b \notin B$, pero $b \in B \implies \impliedby$ Así se cumple que g es sobreyectiva, por lo tanto g es biyectiva.

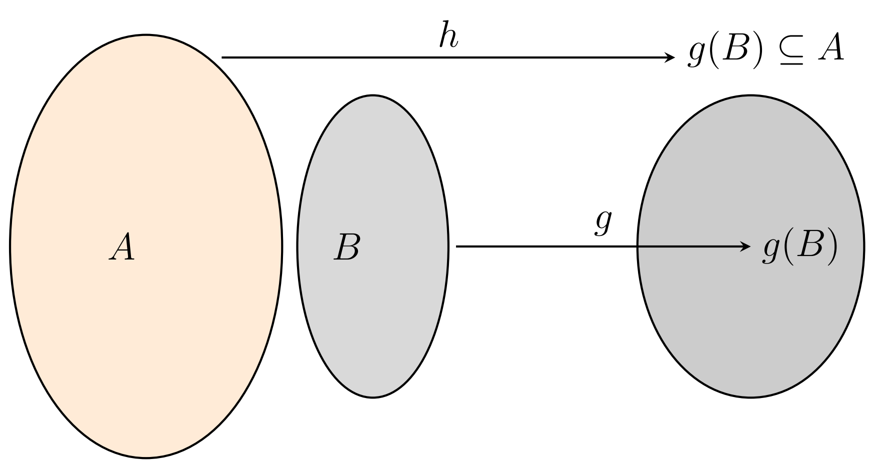
Probemos cuando $B \nsubseteq A$

Sea $(g \circ f) : A \to g(B)$, dado que f y g son inyectivas entonces $(g \circ f)$ es inyectiva.

- Si $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \implies g(f(x)) = g(f(y))$, recordemos que g es inyectiva, entonces:

$$\implies f(x) = f(y), \quad \text{como } f \text{ es inyectiva} \implies x = y$$

Por lo tanto $(g \circ f)$ es inyectiva.



Ahora note que $(g \circ f) : A \to g(B) \subseteq A$, se cumplen las hipótesis del lema anterior.

Sea $h = (g \circ f)(x) \implies h$ es biyectiva entre A y $g(B) \subseteq A$

- g era una función inyectiva $B \to g(B)$, así g además de inyectiva es sobreyectiva
  $\implies \exists g^{-1} : \quad g(B) \to B$, es biyectiva.
- Si componemos $(h \circ g^{-1}(x)) : A \to B$, y es composición de funciones biyectivas, entonces es biyectiva (Es lo que queríamos demostrar).

Vamos a comprobar explicitamete que la composición de dos funciones sobreyectivas, es sobreyectiva.

Queremos demostrar que $\forall b \in B, \exists a \in A$ tal que $(g^{-1} \circ h)(a) = b$

- Sabemos que g^{-1} es sobreyectiva $\implies \exists c \in g(B)$ tal que $g^{-1}(c) = b$
- Ahora, también sabemos que h es sobreyectiva $\implies \exists a \in A$ tal que $h(a) = c$

Ahora vamos a demostrar que este elemento era el que buscábamos $(g^{-1} \circ h)(a) = g^{-1}(c) = b$

Así queda demostrado el teorema.