Aplicaciones de las derivadas

Ejercicio

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales y sea f la función definida en $\mathbb{R}$ dada por el criterio

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - x)^2$$

Demuestre que el único punto mínimo de f ocurre cuando

$$x = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

Demostración

La función $f(x)$ está definida como:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - x)^2.$$

$$\implies f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2a_i x + x^2$$

Resolviendo la fórmula notable:

$$\implies f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2a_i x + x^2$$

$$\implies f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2x \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} x^2$$

Ahora note que

$$\sum_{i=1}^{n} x^2 = nx^2$$

Así tenemos que:

$$\implies f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2x \sum_{i=1}^{n} a_i + nx^2$$

Derivamos $f(x)$:

$$\implies f'(x) = -2 \sum_{i=1}^{n} a_i + 2xn$$

Ahora buscamos los puntos críticos $f'(x) = 0$

$$\implies -2\sum_{i=1}^{n} a_i + 2xn = 0$$

$$\implies +2xn = 2\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\implies x = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

Ahora por el criterio de la segunda derivada

$$\implies f''(x) = 2n$$

Note que

$$\implies f''(x) > 0$$

Por lo que la función $f(x)$ tiene concavidad hacia arriba en este punto. Como además $f'(x) = 0$, concluimos que x es un mínimo local de $f(x)$.

Así queda demostrado que el único punto mínimo de f ocurre cuando

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

Ejercicio

Se desea construir un recipiente reforzado para almacenar una sustancia tóxica con forma de cilindro circular recto de volumen $900\pi cm^3$. Se sabe que el precio de construir la tapa y el fondo del cilindro es de 250 colones por cada cm^2; mientras que la parte lateral cuesta 150 por cada cm^2. Determine la medida de la altura h del cilindro, de manera que el costo de construirlo sea mínimo.

Solución

Sea V el vólumen del cilindro $\implies V = \pi r^2 h$, note que el vólumen del cilindro es 900π. $\implies 900\pi = \pi r^2 h \implies h = \dfrac{900}{r^2}$

Ahora note que el costo de construir la tapa y el fondo del cilindro es 250 colones, por cada cm^2, mientras que la parte lateral cuesta 150 colones.
Ahora, recuerde que la tapa del cilindro y el fondo son dos circunferencias de misma área así $At = 2\pi r^2$ y recuerde que el costo es de 250 colones, mientras que la parte lateral es $Pl = 2\pi rh$, y el costo de fabricación es 150 colones.

Por ende la ecuación del costo es:

$$C = At \cdot 250 + Pl \cdot 150$$
$$\implies C = 2\pi r^2 \cdot 250 + 2\pi rh \cdot 150$$

Recuerde que $h = \dfrac{900}{r^2}$

$$\implies C = 2\pi r^2 \cdot 250 + 2\pi r\left(\frac{900}{r^2}\right) \cdot 150$$
$$\implies C = 500\pi r^2 + 300\pi\left(\frac{900}{r}\right)$$

$$\implies C = 2\pi r^2 \cdot 250 + 2\pi r\left(\frac{900}{r^2}\right) \cdot 150$$
$$\implies C = 500\pi r^2 + 300\pi\left(\frac{900}{r}\right)$$
$$\implies C(r) = 500\pi r^2 + \left(\frac{270000\pi}{r}\right)$$

Ahora, calculamos la primera derivada

$$C(r) = 500\pi r^2 + \left(\frac{270000\pi}{r}\right)$$

$$\implies C'(r) = 1000\pi r - \frac{270000\pi}{r^2}$$

Ahora igualamos $C'(r) = 0$

$$\implies 1000\pi r - \frac{270000\pi}{r^2} = 0$$

$$\implies \frac{1000\pi r^3 - 270000\pi}{r^2} = 0$$

$$\implies 1000\pi r^3 - 270000\pi = 0$$

$$\implies r^3 = \frac{270000\pi}{1000\pi}$$

$$\implies r = 3\sqrt[3]{10}$$

Ahora por el criterio de la segunda derivada

$$\implies C'(r) = 1000\pi r - \frac{270000\pi}{r^2}$$

$$\implies C''(r) = (1000\pi r)' - \left(\frac{270000\pi}{r^2}\right)'$$

$$\implies C''(r) = 1000\pi + 270000\pi \cdot \frac{2}{r^3}$$

$$\implies C''(r) = 1000\pi + \frac{540000\pi}{r^3}$$

Así tenemos que

$$C''(3\sqrt[3]{10}) > 0$$

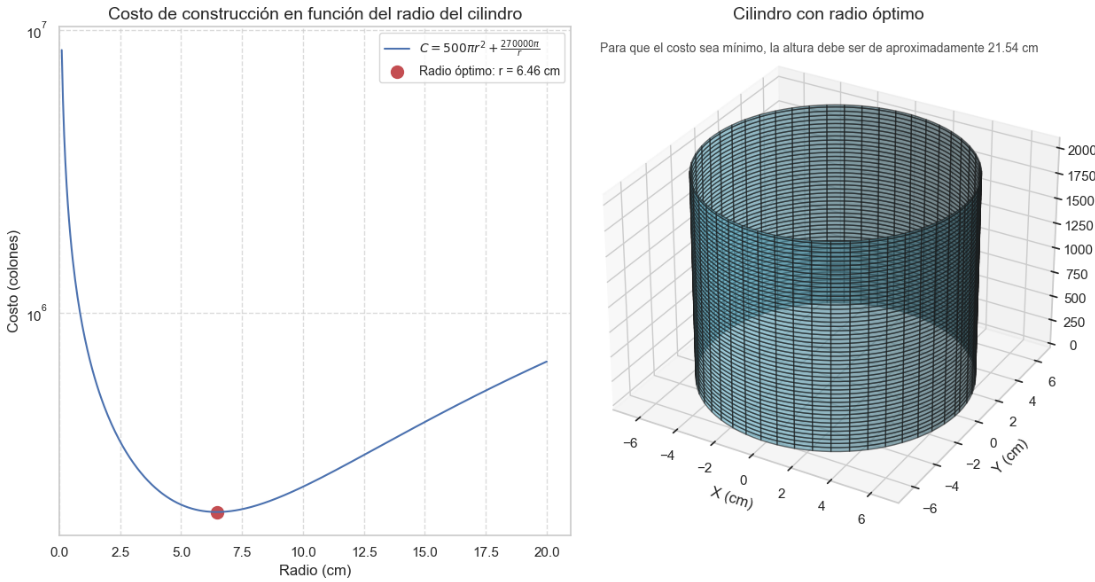
Por el criterio de la segunda derivada, si $r = 3\sqrt[3]{10}$, entonces el costo es mínimo.

Ahora recuerde que

$$h = \frac{900}{(3\sqrt[3]{10})^2} \approx 21,54$$

Para que el costo sea mínimo la altura debe ser de aproximadamente $21,54cm$

En la siguiente página se presenta el modelado matemático de la solución al problema de optimización planteado. El modelo incluye la representación de la función en escala logarítmica, destacando el punto donde se alcanza el mínimo, además, se muestra el cilindro con la altura óptima que minimiza su costo.



Ejercicio

Un recipiente con forma de cono circular recto invertido tiene altura 10 m y radio de la base 4 m. Se introduce agua en el recipiente a una velocidad constante de 5 m^3/min, ¿Con qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando la profundidad del agua es de 5 m?

Datos:	$\frac{dV}{dt} = 5\,\text{m}^3/\text{min}$
Momento:	$h = 5\,\text{m}$
Buscar:	$\frac{dh}{dt} = ?$

Solución

Ecuación del volumen

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Note que

$$\frac{4}{10} = \frac{r}{h}$$

$$\implies r = \frac{4h}{10}$$

Sustituyendo en la ecuación del volumen:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$\implies V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{4h}{10}\right)^2 h$$

$$\implies V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{16h^2}{100} \cdot h$$

$$\implies V = \frac{\pi}{300} \cdot 16h^3$$

Derivando con respecto al tiempo t

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{300} \cdot 3 \cdot 16h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\implies 5 = \frac{\pi}{300} \cdot 48h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\implies \frac{dh}{dt} = \frac{5}{\frac{\pi}{300} \cdot 48h^2}$$

$$\implies \frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi h^2}$$

El nivel del agua se eleva a una velocidad de $\frac{5}{4\pi}$ m/s cuando la profundidad es de 5 m.

La siguiente imagen representa el modelado matemático de la solución al problema planteado. El modelo incluye la representación de un cono invertido, con la base ubicada en la parte superior, y se destaca el nivel del agua a una profundidad de 5 m.