

Projekt-uppgifter

Version Aug. 2012,
Kurser i Numeriska metoder

Innehåll

1	: Varpan	2
2	* : Metallröret	3
3	: Motordrivna inversa pendeln	5
4	* : Rymdskeppet Futten illa ute	6
5	* : Strömkretsen	7
6	** : Partikeln i fältet	9
7	* : Pilbågen	10
8	: Nalle-Maja gungar	12
9	* : Naturen — växter, möss och ormar	13
10	: Ljudvågor under vattnet	15
11	* : Vindkastet	17
12	* : Flödespaketet — partikelflöde förbi en cylinder	18
13	* : Glödtråden	19
14	: Struthatten	20
15	* : Kometens stoftsvans	21
16	** : Vattenraketen i provbänk	23
17	** : Vattenraketen i provflygning	25

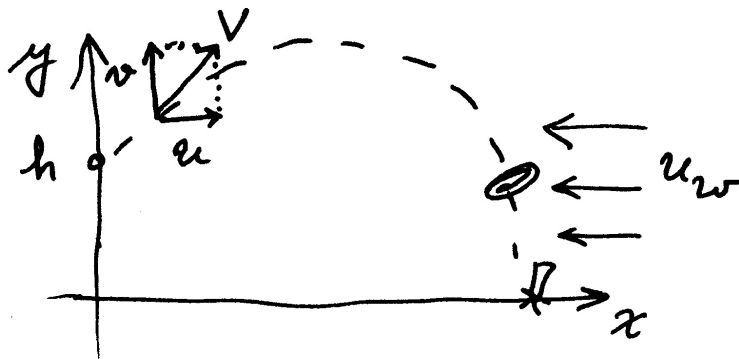
Tvåstjärnig uppgift klassas som svår och utförs av den som strävar efter högre betyg. Uppgift med en stjärna klassas som svår eller lätt beroende på om man gör utvidgningen eller avstår från den.

1 : Varpan

I varpaspel kastar man en flat sten och det gäller att träffa en målsticka som är nedsatt i marken tjugo meter bort. Kaströrelsen beskrivs av differentialekvationerna

$$\dot{u} = -k_x \cdot uV, \dot{v} = -9.81 - k_y \cdot vV$$

där $V = \sqrt{u^2 + v^2}$, $u = \dot{x}$, $v = \dot{y}$ och varpastenens luftmotståndskonstant i x - resp y -led är $k_x = 0.020$, $k_y = 0.065$. Stenen kastas med hastigheten $V(0) = 19.0 \text{ m/s}$ från 1.50 meters höjd.



Varpans nedslagspunkt beror av kastvinkeln α . Ett kast simuleras genom att man anger en kastvinkel och löser differentialekvationerna med Runge-Kuttas metod tills varpan tar mark (t o m hamnar nedanför marknivån $y = 0$). Interpolera fram tidpunkt och x -koordinat för nedslagspunkten.

Problemet att bestämma vilken kastvinkel som ger vinnande varpakast med nedslag inom 1 cm från målstickan utgör ett ekvationslösningsproblem. Skriv en effektiv algoritm som beräknar kastvinkeln och rita upp kastbanan. Tänk på att två lösningar finns till varpaproblemet — en hög och en låg bana.

Diskutera (med hjälp av numeriska experiment) hur de numeriska metoderna och andra eventuella osäkerheter påverkar tillförlitligheten i vinkelresultatet.

Interpolera sedan i de ovan erhållna och lagrade kastbanevärdena (vektorer för t , x , y , \dot{x} , \dot{y}) för att åstadkomma en tabell där kashöjden skrivs ut för varje meter i x -led. För att beräkna tidpunkten då x antar ett visst värde duger linjär interpolation (om det inte är alltför glest mellan värdena). För beräkning av y vid denna tidpunkt är hermiteinterpolation särskilt lämplig eftersom \dot{y} -värden finns tillgängliga. Rita upp detta resultat också med markering av varpans höjdläge vid varje meter.

Kast i motvind

Om man kastar i hård motvind u_w i x -led är det stenens hastighet relativt luften som bestämmer luftmotståndet:

$$\dot{u} = -k_x \cdot (u - u_w)V, \dot{v} = -9.81 - k_y \cdot vV$$

$V = \sqrt{(u - u_w)^2 + v^2}$, $u = \dot{x}$, $v = \dot{y}$. Samtidigt krävs en högre hastighet vid utkastet för att varpan ska ha möjlighet att nå tjugo meter. Gör egen numerisk simulering med några olika $u_w = 2, 10, 20$ och visa bankurvor över vinnande kast i motvind med de data som du valt.

2 * : Metallröret

Genom ett tjockvägigt cylindriskt metallrör strömmar en het vätska med den konstanta temperaturen $T_i = 450^\circ \text{ C}$. Cylinderväggen har innerradien 1.0 cm och ytterradien 2.0 cm. Temperaturfördelningen $u(r)$ i metallen bestäms av differentialekvationen

$$r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0 \quad \text{med} \quad u = T_i \quad \text{vid} \quad r = 1 \quad (\text{längdenhet cm}).$$

Omgivande temperatur är 20° C . Vid $r = 2$ är temperaturgradienten du/dr proportionell mot temperaturdifferensen, d v s där gäller $du/dr = -K \cdot (u - T_e)$ där yttemperaturen T_e kan sättas till 20° C .

K är en materialkonstant, som beror av värmeöverföringstalet mellan metall och luft α (W/K/m²) och metallens värme-konduktivitet k (W/m/K) enligt $K = \frac{\alpha}{k}$. Låt i testfallet $K = 1$.

Gör enligt finitadifferensmetoden en diskretisering av intervallet $1 \leq r \leq 2$ indelat i N delintervall. Diskretisera randvillkoret på enklaste sätt - med första ordningens differens-approximation. I Utvidgningen ska noggrannare metod användas. Visa hur randvärdesproblemet kan approximeras av ett matrisproblem. Lös detta först för $N = 25$, fortsätt med successiva fördubblingar av N tills önskad precision erhålls — t ex fyra korrekta siffror i temperaturvärdet vid cylinderns ytterradie. Rita upp temperaturfördelningen i metallen.

Man tillåter inte att metalldrörens utsida får bli varmare än 100° . Beräkna vilket som är det kritiska K -värdet K_{100} för att detta ska uppnås, på följande sätt:

Gör en tabell över $u(2)$ som funktion av K och interpolera i den.

Undersök även hur känsligt detta kritiska K -värde är för temperaturvariationer i vätskan, dvs. beräkna $\frac{\partial K_{100}}{\partial T_i}$. Det inträffar nämligen att T_i råkar stiga till 460° C i stället för att hålla det givna temperaturvärdet 450° C .

(Problemet kan lösas analytiskt, gör gärna det för kontroll.)

Det visar sig att det tjockväggiga röret är tillverkat av ett inhomogent material — värmediffusiviteten i röret har ett radiellt beroende. Temperaturfördelningen $u(r)$ bestäms nu av

$$r \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(1 + \frac{r D'(r)}{D(r)} \right) \frac{du}{dr} = 0, \quad 1 \leq r \leq 2.$$

$D(r)$ är ett tredjegradspolynom med derivatan noll vid inner- och ytterradien, alltså vid $r = 1$ och $r = 2$, dessutom gäller $D(2) = 2D(1)$.

Begynnelsevillkor och randvillkor är samma som tidigare. Lös samma uppgifter som ovan.

Utvidgning

1. Använd en andra ordningens noggrann diskretisering av randvillkoret, t ex vid $r_N = 2$:

$$\left(\frac{du}{dr} \right)_{r_N} = 1/(2h) \cdot (3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}) + O(h^2)$$

Visa först att formeln är rätt! Kör med $N = 10, 20, \dots$ och visa i en tabell att felet nu är $O(N^{-2})$

2. Bestämning av kritiskt K -värde så att $u(2) = 100$ kan ske på flera sätt. När $u(2) = 100$ multipliceras ju den obekanta K med en känd koefficient, så om man inför K som obekant och lägger till ekvationen $u_N = 100$ blir det ett

linjärt ekvationssystem för $u_i, i = 1, \dots, N$ och K . Gör på det viset också och jämför med dina tidigare räkningar.

3. Nu byter vi varm vätska inuti mot kall som ska kyla den varma utanför. Ytterytan värms också genom grå-kropps-strålning från omgivningen. Då blir modellen icke-linjär:

$$\begin{aligned} r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} &= 0, \\ u(1) &= 100, \\ -k \frac{du}{dr} \Big|_{r=2} &= \alpha(u(2) - T_e) + \sigma_B \epsilon (u(2)^4 - T_e^4) \end{aligned}$$

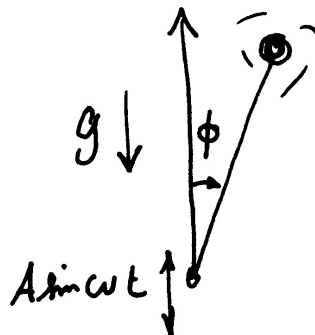
Diskretisera som ovan och använd Newtons metod för ekvationslösningen. Jacobianmatrisen kan du beräkna med differensapproximation, eller analytiskt: Bara rad N skiljer från den matris du använt för det linjära problemet. Använd data för rostfritt stål, $k = 20 \text{ W/K/m}$, $\sigma_B = 5.67 \cdot 10^{-8}$, $T_e = 300, 400, 500 \dots K$, $\epsilon = 0.3$ och $\alpha = 100 \text{ W/K/m}^2$.

Vid vilken yttemperatur blir strålningen den dominanta energiöverföringen?

3 : Motordrivna inversa pendeln

Modifierad version av uppgift P8-13 i Kahaner-Moler-Nash.

A famous problem of nonlinear mechanics is known as the inverted pendulum. The pendulum is a light stiff bar of length L with a point mass at the end, supported at the other end by a frictionless pin. The support pin is given a rapid up-and-down



motion $s(t) = A \sin \omega t$ by an electric motor.

An application of Newton's second law of motion yields (after neglecting a small term) the equation of motion

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{L} (g - A\omega^2 \sin \omega t) \sin \phi$$

where ϕ is the angular position of the bar ($\phi = 0$ when the bar is directly above the pin) and $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ is the acceleration due to gravity.

For $A = 0$ it is the pendulum equation $\ddot{\phi} = \frac{g}{L} \sin \phi$. Even this equation is not solvable in terms of elementary functions. But it is known that when $A = 0$ and the pendulum is released from rest, i.e. $\dot{\phi}(0) = 0$, the period T of the pendulum is given by

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}} K\left(\frac{\phi(0)}{2}\right) \quad \text{where} \quad K(u) = \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1 - \cos^2 u \sin^2 x}}$$

Use the Runge-Kutta method to compute the motion $\phi(t)$ and to find the period (some interpolation may be needed) when $A = 0$, $L = 0.4$, $\phi(0) = \pi/4$ and $\dot{\phi}(0) = 0$ (this is an ordinary pendulum).

Compare the period computed by your Runge-Kutta program with the value of T above computed by an efficient numerical integration method.

The inverted pendulum

The most interesting aspect of the pendulum problem when $A \neq 0$ is that for some A and ω -values an inverted pendulum stays pointing upwards and this has been observed experimentally. Make computer simulations for a stick of length 400 mm ($L = 0.4$) which is initially released from rest at the angle 5° ($\phi(0) = 5\pi/180$).

Use the RK4-method to compute the motion $\phi(t)$ for different values of amplitude: $A = 0.18, 0.20, 0.22, 0.24$, and a number of ω -values: $\omega = 14, 16, 24, 34, 44, 54$. Let $T_s = 2\pi/\omega$. Try the following time-step: $dt = T_s/m$ with $m = 50$ and $m = 100$ and solve for $0 \leq t \leq 30T_s$. You may also stop when the value of ϕ is less than $-\pi$ or greater than π , why?

Plot ϕ and $\dot{\phi}$ as functions of t , and also $\dot{\phi}$ against ϕ (the phase plane). But the most interesting plot shows the whole stick at every instant (see `rkpendel.m`). Also make a plot that shows the trace of the free end of the stick.

Investigate the exciting behaviour at $A = 0.20$ further for ω -values in the interval $30 < \omega < 55$.

4 * : Rymdskeppet Futten illa ute

Trots att raketmotorn går för fullt förblir Futten hängande orörlig på höjden H över jordytan. Goda råd är dyra! Kaptenen låter rymdskeppet vrida sig nittio grader från det tidigare vertikala läget, och i fortsättningen verkar raketmotorn horisontellt med oförminskad kraft. Störtar Futten eller klarar sig rymdskeppet ut i rymden?

Newtons rörelseekvationer uttryckta i polära koordinater lyder:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = G \cos \alpha - g \frac{R^2}{r^2}$$

$$r \frac{d^2 \phi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} = G \sin \alpha$$

där vinkeln α var noll före vridningen men blir 90° efter kaptenens manöver (vid tiden $t = 0$). R är jordradien, g är tyngdaccelerationen vid jordytan och G är tyngdaccelerationen på höjden H där Futten blev hängande: $G = gR^2/(R + H)^2$.

Med för vårt problem lämpliga enheter — längdenhet jordradie och tidsenhet timme — gäller att $g = 20.0$ jordradier/tim². De nödvändiga startvärdena ges av det faktum att Futten var helt stilla då kaptenen ändrade banriktning.

Skriv ett program som med Runge-Kuttas metod eller `ODE45` löser differentialekvationerna under så lång tid att det står klart om Futten störtar eller försvinner ut i rymden. Futten befinner sig på några jordradiers höjd då kaptenen gör manövern. Undersök först vad som händer om starthöjden H är två jordradier, pröva sedan hur Futtens bana blir vid några andra val av starthöjder. Experimentera dig fram till lagom sluttid och lämpligt tidssteg / lämplig tolerans. Fundera ut en bra algoritm som med god noggrannhet och lämplig interpolation bestämmer tidpunkt och positionsangivelse (t_p, ϕ_p, r_p) för banans allra lägsta punkt.

Uppgiften är nu att med en effektiv algoritm räkna fram gränsfallets H -värde, dvs Futtens starthöjd H_* som leder till en bana utan att katastrofen blir ett faktum. Bestäm hastigheten som Futten sveper förbi jordytan med i detta fall. Rita bankurvan från begynnelseläget till platsen där raketen just passerar grantopparna. Beräkna bankurvans längd, alltså Futtens tillryggalagda sträcka. Gör tillförlitlighetsbedömning av de erhållna resultaten! Undersök bidragen till felen i resultatet från de olika källorna: lösning av begynnelsevärdesproblem, interpolation, etc.

Bankurvan har parabelliknande form, eller hur? Bestäm och rita upp den parabel som i minstakvadratmetodens mening bäst anpassar sig till Futtens bana. Beräkna parabelbågens längd och jämför med Futtensträckan ovan.

Utvidgning

Om kaptenen vid sin manöver inte lyckas vrida Futten 90° , hur mycket påverkar det raketbanan? Gör simuleringar med vridningsvinklarna $\alpha = 70, 80, 90, \dots, 130^\circ$ och studera hur det kritiska H_* -värdet ändras, likaså hastigheten vid jordpassagen. Rita bankurvorna. För vilken vridningsvinkel kommer Futten att få maximal hastighet vid jordytan och vad är maxvärdet? Använd en effektiv algoritm för att bestämma detta.

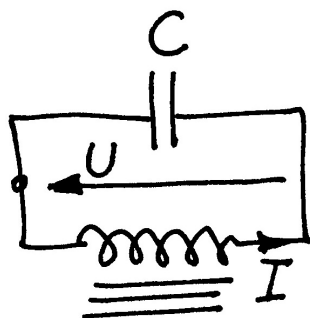
5 * : Strömkretsen

En enkel strömkrets består av en kondensator och en spole. Kondensatorn är uppladdad till spänningen U_0 . Spolen innehåller järn och har strömberoende induktans: $L = L_0 / (1 + I^2)$.

Vid tiden $t = 0$ sluts kretsen och strömmen bestäms sedan av två samband:

$$\text{Spänningen över induktansen:} \quad U = L \frac{dI}{dt} \quad (1)$$

$$\text{Strömmen genom kondensatorn:} \quad I = -C \frac{dU}{dt} \quad (2)$$



Visa att följande differentialekvation kan härledas ur uttrycken ovan (efter derivering av första uttrycket):

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{2I}{1 + I^2} \left(\frac{dI}{dt} \right)^2 - \frac{I(1 + I^2)}{L_0 C}$$

Vid tiden $t = 0$ gäller $I = 0$ och $dI/dt = U_0/L_0$. Lösningen $I(t)$ till differentialekvationen är en periodisk funktion som är mer eller mindre sinusliknande beroende av hur U_0 -värdet väljs. Visa, t ex genom att derivera uttrycket E , att för lösningen till begynnelsevärdesproblemet gäller, att $E(t) = U(t)^2 + \log(1 + I(t)^2) = \text{const}$.

Gällande data är $L_0 = 1$ H, $C = 1 \mu\text{F}$. Några olika värden på U_0 ska provas, dels spänningen 240 V då järnkärnans inflytande är nästan försumbart, dels två höga spänningsvärden 1200 V och 2400 V då strömkurvan inte blir särskilt sinuslik längre.

Före den numeriska behandlingen kan det vara bra att bedöma storleksordningen på svängningstiden. Det är lätt att räkna ut frekvensen och svängningstiden för en krets med konstant C och konstant $L = L_0$.

Använd `ode45` för att beräkna och rita strömkurvorna (standardtoleransen i `ode45` duger inte, en relativ tolerans som är flera tiopotenser mindre kan vara nödvändig). Som jämförelse ska du även utnyttja en egen RK4 för strömkurveberäkningarna.

Fundera ut en bra algoritm för att bestämma strömmens toppvärde I_{\max} och för att med mycket god precision beräkna svängningstiden T . Tillförlitlighetsbedömning av I_{\max} och T krävs.

Fourieranalys – anpassning med trigonometriskt polynom

Programmet ska göra en fourieranalys av strömkurvan, det vill säga beräkna koefficienterna a_k i fourierutvecklingen av $I(t)$:

$$I(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + a_3 \sin 3\omega t + \dots, \quad \text{där } \omega = 2\pi/T$$

Att det inte blir några cosinustermer i utvecklingen följer av att funktionen $I(t)$ är udda.

För koefficienterna i formeln gäller:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) \sin k\omega t dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Vid valet av numerisk integrationsmetod bör du tänka på att integranden är en periodisk funktion. Beräkna de 14 första fourierkoefficienterna. Om strömmen är nästan sinusformad bör alla koefficienter utom den första vara mycket små, stämmer det? Det symmetriska utseendet hos strömkurvan gör att vissa fourierkoefficienter är noll (teoretiskt i alla fall). Vilka är det och hur väl stämmer teori och praktik?

Rita i samma figur upp strömkurvan samt resultatet av fourierutvecklingen, dels då bara de tre första termerna tas med, dels då alla fjorton finns med.

Utvidgning

1. Det kommer ett krav att strömmen i kretsen inte får överstiga 10 A. Beräkna med en effektiv lösningsmetod det spänningsvärde $U_0 = U_0^*$ som ger $I_{max} = 10$ A. Man har möjlighet att variera spolens L_0 -värde och vill därför för en krets som uppfyller kravet $I_{max} = 10$ undersöka beroendet mellan U_0^* och L_0 . Beräkna och markera i ett diagram U_0^* för $L_0 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 2.0H$.
2. Sambanden $U = L \frac{dI}{dt}$, $L = L_0/(1 + I^2)$, $I = -C \frac{dU}{dt}$ bildar direkt ett system av två första ordningens ODE för strömmen $I(t)$ och spänningen $U(t)$. Det leder till en alternativ beräkningsmetod för att rita upp ström- och spänningskurvorna och för att bestämma I_{max} och svängningstiden T . Genomför detta för vår svängningskrets. Fourieranalysen och utvidgning 1 behöver inte vara med här.

6 **: Partikeln i fältet

Laddade partiklar rör sig med hög hastighet in i ett område där det finns två elektromagnetiska kraftfält. Vid passagen inuti de båda kraftfälten kröks partikelbanorna. Utanför kraftfälten är banorna rätlinjiga.

Fälten finns inom två cirkulära cylindrar båda med radien R och med axlarna parallella med z -axeln, mittpunkter vid $x = a_1, y = b_1$ respektive $x = a_2, y = b_2$. Det elektriska fältet i cylindrarna är $\mathbf{E} = E(1, 0, 0)$ respektive $\mathbf{E} = E(-1, 0, 0)$ med konstant fältstyrka E . Det magnetiska fältet är riktat i z -led och är starkast i mitten. I första cylindern gäller $\mathbf{B} = B(0, 0, 1 - w(\frac{r_1}{R})^2)$ med $r_1 = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2}$ och i den andra: $\mathbf{B} = B(0, 0, -(1 - w(\frac{r_2}{R})^2))$. r_2 d:o. w är en vikt faktor med ett värde mellan 0 och 0.5.

Om partikelns position vid tiden t beskrivs med vektorn $\mathbf{r}(t)$ så gäller följande differentialekvation för partikelrörelsen: $m\ddot{\mathbf{r}} = Q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$, där m är partikelns massa och Q dess laddning.

Betrakta först rörelsen för en partikel. Den har hastigheten v_0 när den kommer farande längs negativa x -axeln i positiv riktning. Vi börjar studera rörelsen när den passerar origo. Om partikelns hastighetskomponent i z -led är noll utanför fälten så förblir den noll inuti de ovan beskrivna fälten; partikelbanan blir plan och kan beskrivas med enbart x - och y -koordinater. I detta fall erhålls differentialekvationerna

$$\ddot{x} = \frac{Q}{m} \left(E + \left(1 - w \frac{r_1}{R} \right) B \dot{y} \right), \quad \ddot{y} = -\frac{Q}{m} \left(1 - w \frac{r_1}{R} \right) B \dot{x}$$

om partikeln befinner sig i första kraftfältet. Härled dessa uttryck ur kryssproduktformeln ovan. På motsvarande sätt erhålls uttrycken inom andra kraftfältet. Utanför cirkelarna (som cylindrarna nu reducerats till) gäller $m\ddot{\mathbf{r}} = 0$, d v s partikelrörelsen blir rätlinjig.

Vår studie gäller elektroner med massan $m = 9.1091 \cdot 10^{-31}$ kg och negativ laddning $Q = -1.6021 \cdot 10^{-19}$ C. Hastigheten är $v_0 = 455 \cdot 10^3$ m/s. Övriga data: $E = 20.0$ V/m, $B = 0.92 \cdot 10^{-4}$ Wb/m², $R = 0.012$ m, $a_1 = 0.015$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0.030$, $b_2 = 0.034$. Vikt faktor $w = 0.2$.

Beräkna elektronens bana från $x = 0$ tills den med god marginal lämnat den andra cylinderns kraftfält. Utnyttja kunskapen om rätlinjig rörelse utanför kraftfälten med ekvationslösning för skärning mellan rät linje och cirkel. Använd en egen RK4-metod för lösning av ode-systemet inuti kraftfälten och utför lämplig interpolation för att erhålla elektronens position precis vid utgången av varje fält. Prova dig fram till lagom tidssteg som ger acceptabel noggrannhet och motivera det valda steget!

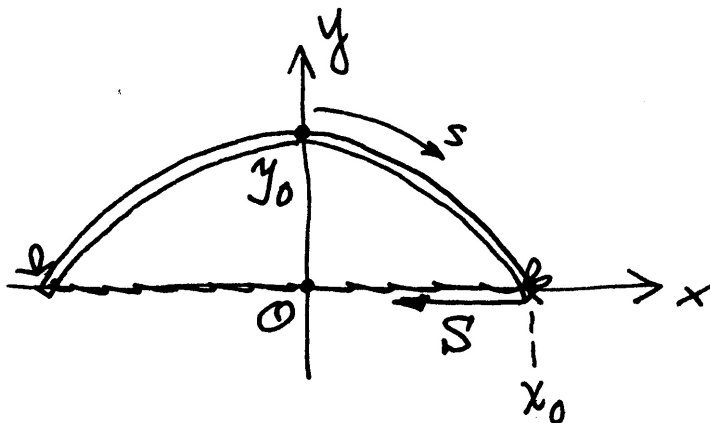
Låt nu tre elektroner alla med hastigheten v_0 i x -riktningen komma in i parallella banor; startpositioner vid $t = 0$ är $x = 0$ och $y = -0.002, 0, 0.002$. Beräkna och rita de tre elektronbanorna med samma vikt faktor $w = 0.2$ som ovan. Efter passagen genom kraftfälten är banorna inte parallella längre. Genom att förflytta det andra fältet i y -led (alltså ändra b_2 -värdet) kan man åstadkomma att banorna för elektron nr 1 och 3 blir parallella igen. Använd någon effektiv algoritm för att bestämma cylinderplaceringen.

Alternativ metod

Enklare programmering blir det om man i en funktion definierar kraftfältet för varje (x, y) med lämpliga tester om punkten är inom första cirkeln, eller andra, eller utanför. Jämför banan för en partikel beräknad på det sättet med `ode45` som använder automatisk steglängdsreglering med din smartare algoritm ovan. Gör diagram över storleken på `ode45`'s tidssteg. Tips: `diff(tout)` Var blir steget litet? Varför? Hur noggrant blir det?

7 * : Pilbågen

Busiga Bertil upptäcker att skolsalens enmeterslinjal är så böjlig att den borde duga till pilbåge. Han spänner ett snöre mellan linjaländarna — det råkar finnas små hål just vid nollstrecket och vid enmetersmarkeringen — och drar åt snöret så att bågen buktar 30 cm vid mittpunkten.



Uppgiften är att bestämma formen på pilbågen. Den blir symmetrisk kring mittpunkten så det räcker att behandla högra halvan av intervallet $-a \leq x \leq a$. För utböjningen $y(x)$ gäller följande differentialekvation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + q y \cdot \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} = 0$$

där storheten q beror av linjalens materialegenskaper som elasticitetsmodul och tröghetsmoment.

Randvillkoren är: $y(0) = 0.3$, $y'(0) = 0$, $y(a) = 0$. Dessutom finns villkoret att pilbågens längd är exakt en halv meter från $x = 0$ till $x = a$.

Det blir fråga om ett icke-linjärt randvärdesproblem med två okända konstanter a och q , ganska komplicerat! Goda startvärden behövs för att de iterativt ska kunna bestämmas.

Börja därför med att lösa det förenklade problemet då y' -termen försummas, för att sedan kunna utnyttja resultatet som startgissning till det icke-linjära problemet. Förenklingen ger differentialekvationen $y'' + q y = 0$ med randvillkoren ovan.

- Visa att lösningen kan skrivas $y(x) = 0.3 \cos \sqrt{q} x$ och ange sambandet mellan a och q .

Värdet på a bestäms ur villkoret om pilbågens längd. Det blir ett kombinerat integral- och ekvationslösningsproblem där båglängdsintegralen $\int \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$ ingår. Då a är bestämd känner vi också q , och därmed hela pilbågsformen $y(x)$.

Nu kan den ursprungliga differentialekvationen betraktas igen.

Algoritm

1. För ett givet värde på q , använd de två villkoren vid $x = 0$ att lösa begynnelsevärdesproblemet,
2. a -värdet erhålls vid kurvans skärningspunkt med x -axeln. Bestäm denna punkt med stor noggrannhet - interpolation behövs!

3. Kontrollera därefter hur väl båglängdsvillkoret är uppfyllt. Om för dåligt, välj ett nytt q -värde och gå till 1.)

Automatisera sökandet (tips - sekantmetoden) till en effektiv algoritm för att lösa ekvationen $båglängd(q, a(q)) = 0.5$, så att pilbågens rätta form erhålls.

- Rita upp pilbågen!
- Hur stor blir kraften S i bågsträngen?

Tips: I bågen verkar snittmomentet

$$M(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} = -qy(x)$$

Jämvikt omkring bågens mittpunkt $P=(0,0.3)$ kräver att $S \times$ momentarm för S omkring $P = M(0)$.

Utvidgning

Ekvationen ovan säger att pilbågens *krökning* $= -qy$. Det är lättare att formulera differentialekvationen med båglängd s som oberoende variabel ($\frac{d}{ds} = \cdot$)

$$\ddot{y} + qy\dot{x} = 0, \dot{x} = \sqrt{1 - \dot{y}^2}$$

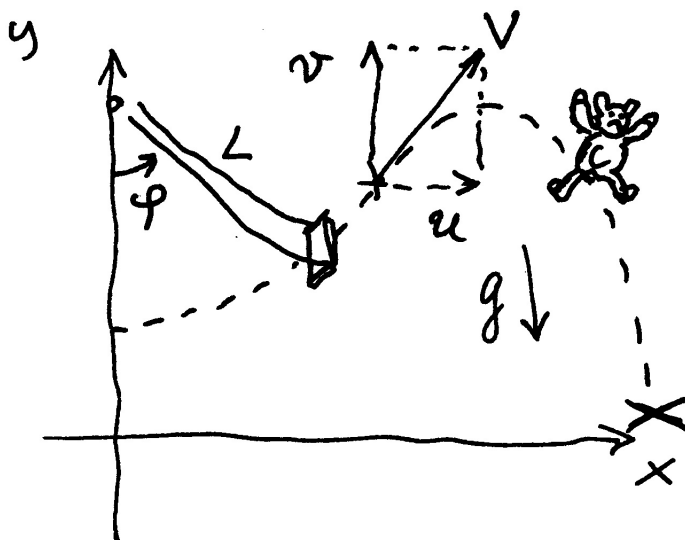
Härled villkoren vid $s = 0$ och $s = 0.5$. Hur många obekanta är det nu? Lös problemet med inskjutningsmetoden från $s = 0$.

8 : Nalle-Maja gungar

Bamse har satt upp en gunga i en trädgren. Nalle-Maja kan sätta sig på gungan alldeles själv och hon lyckas då få gungan att bilda 25 graders vinkel med lodlinjen. I början kan inte Nalle-Maja ge fart själv, utan det blir en dämpad svängningsrörelse där utslagsvinkeln u beskrivs av differentialekvationen

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{du}{dt} + \frac{g}{L} \sin u = 0.$$

$k = 1.20$ är en dämpande konstant beroende på luftmotstånd och trädgrensfriktion. Nalle-Maja väger tillsammans med gungan $m = 17$ kg, replängden L är 2.0 meter, trädgrenen finns 2.5 meter ovanför marken och g är 9.81 m/s^2 .



När Nalle-Maja har gungat fram och tillbaka några gånger inser hon att hon kan öka farten själv genom att luta sig rätt vid vändlägena. På det sättet åstadkoms en plötslig förändring i vinkelhastigheten vid varje u_{\max} och u_{\min} . Vid tillräckligt stor sådan hastighetsknyck kan hon gunga högre och högre. Inför lagom stor diskontinuitet i vinkelhastigheten vid gungans vändlägen! Du behöver nog också hjälpa Bamse att sätta en gräns för hur högt hon tillåts gunga!

Nu börjar Nalle-Maja pröva hur långt hon kan hoppa. Hon gungar om och om igen och hoppar av i farten vid olika vinklar. Hur ska hon göra för att komma längst? Under luftfärden gäller differentialekvationerna

$$\dot{u} = -\kappa \cdot uV, \dot{v} = -g - \kappa \cdot vV$$

där $\dot{x} = u, \dot{y} = v, V = \sqrt{u^2 + v^2}$ och $\kappa = 0.15$ är hennes luftmotståndskoefficient. Hur får man begynnelsevillkoren till detta differentialekvationssystem?

Simulera hela förloppet alltifrån starten med den dämpade svängningen tills Nalle-Maja måste gå hem efter att ha lyckats gunga och åstadkomma det allra längsta hoppet. I algoritmen gäller det att tänka på att nedslaget sker på marknivån $y = 0$, det kan krävas lämplig form av interpolation för att bestämma nedslagsplatsen med god precision.

Rita upp Nalle-Majas gungning och hoppbanan från gungan dels i ett testfall då Bamse bara tillåter att Nalle-Maja gungar till en maximal utslagsvinkel på 60° , dels i ett fall där du och Bamse vågar låta henne vara ännu djärvare.

9 * : Naturen — växter, möss och ormar

Vid början av år noll planteras 100 exemplar av en nyttoväxt på en bördig ö. Beståndet utvecklar sig snabbt med tiden enligt

$$dV/dt = a_1V - a_2V^2,$$

där $V(t)$ är antalet växter vid tiden t (tidsenheten är år). Konstanterna är $a_1 = 16$ och $a_2 = 1.8 \cdot 10^{-5}$. Differentialekvationen är analytiskt lösbar (separabel) men kan förstås också lösas numeriskt. Man finner att då t ökar så närmar sig $V(t)$ ett konstant slutvärde, vilket?

Låt tidpunkten vara T_1 då antalet växter stigit till 95% av slutvärdet. Ange hur många dagar efter inplanteringen som detta uppnås. Använd RK4 med tidssteget en dag, alltså $dt = 1/365$, för att finna dagen. Men prova dessutom om RK4 med tidssteget en vecka (och viss interpolation) leder till samma dag.

Just den dagen anländer två växtätande djur - de klassificera som skadedjur S - till ön (man kan väl tänka sig ett par möss). Samspelet mellan växterna och djuren kan beskrivas med följande differentialekvationer, där $S(t)$ betecknar antalet skadedjur:

$$\begin{aligned}dV/dt &= a_1V - a_2V^2 - a_3VS \\dS/dt &= -b_1S^{1.4} + b_2V^{0.6}S^{0.8}\end{aligned}$$

I växtekvationen tillkommer termen $-a_3VS$ som effekt av att skadedjuren dykt upp, konstanten $a_3 = 0.011$. Djuren har svårigheter att öka ju fler de är, därav den negativa första termen i dS/dt , konstanten är $b_1 = 2.0$, Djurantalet ökar däremot när de har möjlighet att utnyttja födan; i den positiva andra termen gäller $b_2 = 0.085$.

Lösningen till detta differentialekvationssystem går, då $t \rightarrow +\infty$, mot en konstant som inte beror på begynnelsevillkoren. Sätt derivatorna lika med noll och lös det ickekinjära system som ger slutvärdena för V och S .

Lös differentialekvationerna numeriskt med lämplig metod fram till tidpunkten $T_2 = 1.5$ (d v s ett och ett halvt år efter växtplanteringen). Har antalet växter och skadedjur hunnit stabilisera sig? Hur många procent (eller promille) avviker deras värden från slutvärdena?

Vid denna tid införs rovdjur R (ett ormpar) på ön för att hålla de växtätande mössens antal nere och därmed öka mängden av växter. Man får ett differentialekvationssystem där växtekvationen är oförändrad (ormarna äter inte växterna). Skadedjurs- och Rovdjurs-ekvationerna blir nu

$$\begin{aligned}dS/dt &= -b_1S^{1.4} + b_2V^{0.6}S^{0.8} - b_3SR \\dR/dt &= -c_1R + c_2S\sqrt{R}.\end{aligned}$$

Med lämpligt valda värden på konstanterna i modellen gäller även här att V , S och R för stora t -värden närmar sig en konstant stabil lösning. Låt $b_3 = 1.5$, $c_1 = 2.0$ och $c_2 = 0.025$. Beräkna som ovan slutvärdena för V , S och R .

Lös differentialekvationssystemet tills tre år gått sedan växterna planterades, $T_3 = 3$. Hur nära sina slutvärden har de inblandade parterna nått?

Hjälper besprutning?

Öborna som utnyttjar växterna och vill skörda frukterna är ändå inte nöjda — man tycker att skadedjuren äter för mycket. Vid tidpunkten T_3 beslutar man sig för en årlig besprutningskampanj, som är så anpassad att 70 procent av skadedjuren dödas vid varje års besprutning som sker alldeles i slutet av året. Effekten är tyvärr sådan att även rovdjursstammen drabbas, 20 procent av rovdjuren dödas samtidigt varje år av giftet.

Lös alltså differentialekvationssystemet med besprutning varje år införd. Efter någon tid har bestånden stabiliserats till nya värden (en periodisk lösning uppstår). Har öborna gjort rätt? Studera växtbeståndet under ett år före och efter besprutningskampanjen.

Hur känslig är denna ekologiska modell för störningar i koefficienterna? Gör några numeriska experiment med små (eller kanske stora) förändringar i någon eller några koefficienter och undersök hur resultatet blir! För vilken koefficient är V känsligast? Experimentera också med andra besprutningsmedel som påverkar skadedjurs- och rovdjursbestånden annorlunda än det först prövade giftet.

Utvidgning

Man kan hitta den periodiska lösningen genom att köra flera (många?) år. Men man kan också hitta den genom att leta reda på de startvärden $S(0), R(0)$ som ger $S(1) = S(0), R(1) = R(0)$ där besprutningen räknats med vid $t = 1-$. Man skördar vid slutet av året alla växter utom 100, så $V(0) = 100$. Det är ett ekvationssystem med två obekanta som man kan lösa med Newtons metod och differens-approximation till Jacobian-matrisen. Gör det!

10 : Ljudvågor under vattnet

Modifierad version av uppgift P8-15 i Kahaner-Moler-Nash.

The speed of sound in ocean water depends on pressure, temperature and salinity, all of which vary with depth in fairly complicated ways. Let z denote depth in feet under the ocean surface (so that the positive z axis points down) and let $c(z)$ denote the speed of sound at depth z . We shall ignore the changes in sound speed observed in horizontal directions. It is possible to measure $c(z)$ at discrete values of z ; typical results can be found in the table. We need $c(z)$ and also $c'(z)$ between data points. Fit the data in a least-squares sense with the non-linear model function

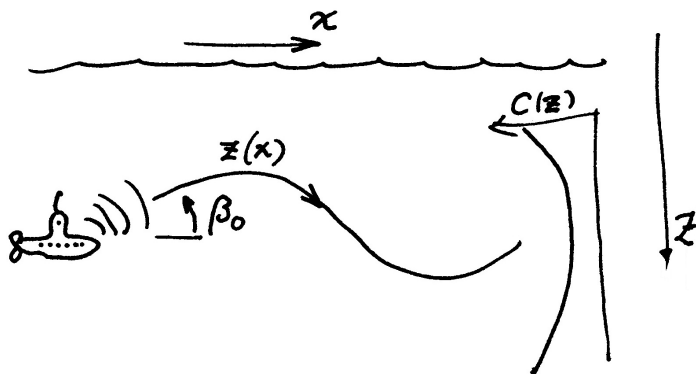
$$c(z) = 4800 + p_1 + p_2 \frac{z}{1000} + p_3 e^{-p_4 z/1000}$$

To obtain startguesses, solve the linear approximation problem with $p_4 = 1$. Make a plot over the data points and the received model curve $c(z)$. Since the sound speed varies with depth, sound rays will travel in curved paths. A fixed underwater point emits rays in all directions. Given a particular point and initial direction we would like to follow the ray path. Thus letting x be the horizontal coordinate we know the initial values: $x = 0$, $z = z_0$, $dz/dx = \tan \beta_0$, where β_0 denotes the angle between the horizontal line $z = z_0$ and the ray in the start point.

The ray path $z(x)$ is described by the following second order differential equation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -q_0 \frac{c'(z)}{c(z)^3}$$

where $q_0 = (c(z_0)/\cos \beta_0)^2$. Use the Runge-Kutta method (or `ode45`) to trace the ray beginning at $z_0 = 2000$ feet and $\beta_0 = 7.8$ degrees.



Follow the ray for 25 nautical miles (1 nautical mile is 6076 feet). Plot the curve $z(x)$. You should find that the depth at $x_f = 25$ nautical miles is close to 2500 feet.

Now suppose that a sound source at a depth of 2000 feet transmits to a receiver 25 miles away at a depth of 2500 feet. The above calculation shows that one of the rays from the source to the receiver leaves the source at an angle close to 7.8 degrees. Because of the nonlinearity of the equation there may be other rays leaving at different angles that reach the same receiver. Run your program for β_0 in the range from -10 up to 14 degrees, plot the ray paths and print a table of the values $z(x_f)$.

z	$c(z)$
0	5050
500	4980
1000	4930
1500	4890
2000	4870
2500	4865
3000	4860
3500	4860
4000	4865
5000	4875
6000	4885
7000	4905
8000	4920
9000	4935
10000	4950
11000	4970
12000	4990

We are interested in finding values of β_0 for which $z(x_f) = 2500$. Use an efficient algorithm to determine the rays which pass through the receiver. Discuss the accuracy of your results.

11 * : Vindkastet

En aprildag med varma sydvindar tränar Pelle bollkast på sportplanen. Han kastar i väg bollen österut med utkastvinkeln (i vertikalplanet) 30° , hastigheten 25 m/s och höjden 1.4 m. Pelle har fötterna i origo i ett koordinatsystem med horisontella x - och y -axlar, x åt öster, y åt norr (i vindens riktning). Differentialekvationerna för bollbanan blir

$$\ddot{x} = -q \dot{x}, \quad \ddot{y} = -q(\dot{y} - a(z)), \quad \ddot{z} = -9.81 - q \dot{z}, \quad \text{där } q = c \sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y} - a(z))^2 + \dot{z}^2}.$$

Luftmotståndskoefficienten c beror av bollradien och massan och är för Pelles boll $c = 0.070$. Vindstyrkan är 7 m/s vid marken och ökar den här aprildagen med höjden enligt: $a(z) = 7 + 0.35z$.

Visa hur differentialekvationerna kan skrivas om på vektorform till ett system av första ordningens differentialekvationer och ange startvektorns komponenter.

Använd en effektiv algoritm som bestämmer kastbanan tills bollen nått mark och beräknar nedslagsplatsen noggrant. Någon form av interpolation kan behövas eftersom räkningarna inte ska utföras med ett onödigt kort tidssteg. Bedöm noggrannheten i resultatet.

Rita kastbanan — plotkommandot för att rita en kurva i 3D är `plot3(x,y,z)` där x , y och z är vektorer som innehåller kurvpunkternas koordinater.

Pelle vill att bollen trots vinden ska slå ned rakt österut, alltså på x -axeln. Hur ska han vända sig i kastögonblicket för att åstadkomma det? Hans utkastvinkel i vertikalplanet är fortfarande 30° . Utvidga programmet med en effektiv algoritm för detta.

Pelles boll studsar faktiskt när den slår ner på marken. Bollens hastighetskomponenter blir vid studsens samma i x - och y -led som de var just vid nedslaget, medan hastigheten i z -led byter tecken.

Lägg på en lagom dämpning, till exempel en dämpningsfaktor på 0.80 vid varje studs. Visa en bild över bankurvan för den studsande bollens fem första studsar, när Pelle kastar i väg bollen så att första nedslaget hamnar på x -axeln.

Utvidgning

Nu vill Pelle prova bollträff mot en liten grej på toppen av en 3.5 meter hög stolpe, 6 m österut och 2 m åt norr, alltså vid $x_{pryl} = 6.0$, $y_{pryl} = 2.0$, $z_{pryl} = 3.5$. Differentialekvationerna är oförändrade, samma boll och samma blåst). Pelle har samma position som förut men han är lite försiktigare, utkasthastigheten är 15 m/s. Pelles första försök görs med utkastvinkeln 60° i vertikalplanet och vridning 15° medurs så att näsan pekar ungefär ostsydost. Skriv en algoritm som beräknar bollbanan och med god precision (viss interpolation behövs!) anger y - och z -koordinaterna när bollen finns vid $x = x_{pryl}$. Tänk ut en smart algoritm för att hjälpa Pelle att med så få försök som möjligt träffa grejen på stolpen. Det är två villkor att uppfylla vid $x = x_{pryl}$: rätt värden på y och z och två obekanta vinklar att bestämma. Det leder till ett icke-linjärt ekvationssystem att ställa upp och lösa. Gör det! Rita upp stolpen och Pelles lyckade bollkast som slår ned grejen från stolpen.

12 * : Flödespaketet — partikelflöde förbi en cylinder

En långsträckt cylinder med radien $R = 2$ befinner sig i en inkompressibel vätska som strömmar i positiv x -riktning. Cylinderns axel är vinkelrät mot flödesriktningen. Det hela kan betraktas som ett tvådimensionellt problem i rummet. Läget $(x(t), y(t))$ för en flödespartikel vid tiden t bestäms av partikelns startposition $(x(0), y(0))$ och av differentialekvationssystemet

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{R^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2xyR^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Vid $t = 0$ befinner sig fyra flödespartiklar vid $x = -4$ med y -positionerna 0.2, 0.6, 1.0 och 1.4. Beräkna och rita deras strömningskurvor fram till tiden $t = 12$. Notera läget för de fyra partiklarna vid denna tidpunkt. Den understa partikeln har hamnat på efterkälken. Beräkna med en effektiv algoritm hur lång tid som krävs för att den ska nå fram till samma x -position som den översta har vid $t = 12$.

Vi vill nu studera hur ett paket av flödespartiklar deformeras när det strömmar förbi cylindern. Det gäller att lösa differentialekvationssystemet en tidsperiod i taget och rita en ögonblicksbild av partikelpositionerna. Låt startformationen för partikelpaketet vara en regelbunden tjugohörning med centrum i $(-4, 1)$ och radiellt avstånd till hörnen 0.6.

Beräkna arean av varje deformationad polygon. För en sluten polygon finns följande trapetsregelliknande areaformel:

$$A = (x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \cdots + x_ny_1 - x_1y_n)/2.$$

Gör om beräkningarna för en fjrtiohörning. Genomför även en richardsonextrapolation på areavärdena med antagandet att areaformeln har samma noggrannhetsordning som trapetsregeln. Fortsätt eventuellt med en fördubbling av antalet hörn. Vilken slutsats kan dras om partikelpaketets area under strömningen förbi cylindern?

Utför även egna experiment med annan startform på partikelpaketet och andra startpositioner i y -led.

Utvidgning

Partikelflöde förbi en sfär (3D-problem)

Cylindern i den strömmande vätskan byts ut mot en sfär med centrum i origo och radien $R = 2$. I sfären finns en dipolskälla riktad i positiv x -led med en styrka sådan att flödespartikelns läge $(x(t), y(t), z(t))$ bestäms av följande differentialekvationer där $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$dx/dt = 1 - R^3(2x^2 - y^2 - z^2)/2s^5, \quad dy/dt = -R^3xy/2s^5, \quad dz/dt = -3R^3xz/2s^5$$

Börja med att beräkna och rita strömningskurvor fram till tiden $t = 15$ för några partiklar som alla startar vid $x = -6$. Värden på $y(0)$ och $z(0)$ väljer du själv. Skapa sedan ett partikelpaket i form av en polyeder med hjälp av

```
np=8; [X,Y,Z]=sphere(np); w=0.6; X=-6+w*X; Y=y0+w*Y; Z=z0+w*Z;
```

Använd egna värden på y_0 och z_0 och utför beräkningar för att studera hur polyedern av partiklar deformeras när den strömmar förbi sfären. Räkna också på en polyeder med $np=16$. Hur är det med partikelpaketets volym under färden? Hur räknar man ut volymen för en deformationad polyeder? Fundera på det! Efter lite grubblande kan du få tillgång till en funktion som beräknar volymen genom summation av många små pyramidvolymmer.

13 * : Glödtråden

Betrakta randvärdesproblemet

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \alpha u^4 - \beta I^2 \sigma(u), \quad u(0) = 10, \quad u'(L/2) = 0.$$

Problemet är att finna temperaturfördelningen $u(x)$ i en strömförande metalltråd med längden $L = 0.40$ m, då trådändarna hålls vid den mycket låga temperaturen 10 K. På grund av symmetrin räcker det att betrakta halva trådens längd med randvillkoren ovan.

Låt tråden vara wolfram med radie 0.1 mm och emissivitet 0.3. Dess resistivitet är temperaturberoende: $\sigma(u) = 10^{-8}(1 + u/32.5)\Omega m$, strålningskonstanten är $\alpha = 0.01$ och $\beta = 1 \cdot 10^{13}$.

1. För att få en ide om vilka temperaturer det blir kan man försumma värmeledningen, så att all värme strålas bort. Då bestäms temperaturen av $0 = \alpha u^4 - \beta I^2 \sigma(u)$.

Lös ekvationen med t ex Newtons metod för $I = 0.1, 0.2, \dots, 10$ A. och rita $u(I)$. Motivera varför temperaturen inte kan bli högre i den riktiga modellen.

2. Använd finitadifferensmetoden och gör diskretisering i N intervall. Visa hur randvärdesproblemet kan approximeras av ett icke-linjärt ekvationssystem. Lös systemet dels för $N = 40$ dels för $N = 80$. Försätt att fördubbla om du tycker att noggrannheten är otillräcklig. Rita upp temperaturfördelningen i tråden för $I = 0.1, 0.2, \dots$. Vi vill finna temperaturfördelningen i tråden då strömstyrkan är upp till 20 A. När strömmen är så stark blir tråden glödhet på mitten men är fortfarande ytterst kall i ändarna. Det kan vara knepigt att hitta fungerande startgissningar.

Fundera ut en lämplig algoritm som successivt löser mellanliggande temperaturfördelningsproblem — först för strömstyrkor strax över 0.1 A och därefter lagom strömhöjning. Algoritmen bör därmed klara av att beräkna de knepiga temperaturfördelningskurvorna som höga strömstyrkor ger upphov till.

3. Utvidgning

En annan tänkbar algoritm för randvärdesproblem är inskjutningsmetoden. Gör nu en jämförande studie genom att också pröva denna metod på glödtrådsproblemet först vid den låga strömstyrkan 0.1 A, därefter vid allt högre strömstyrkor.

14 : Struthatten

Stjärngossestrut och kräfthatt — två utvecklingsbara ytor

En trevlig struthatt får man av en sned kon med spetsen i punkten $(a, 0, b)$ och med cirkelformad bas, $x = R \cos u$, $y = R \sin u$, $z = 0$, $0 \leq u \leq 2\pi$.

Med $R = 7.8$, $a = 5.5$ och $b = 11$ blir hatten lagom stor för kräftskivan. Med värdena $R = 8.8$, $a = 12$ och $b = 36$ får vi en stjärngossestrut.

Koner har den goda egenskapen att de kan åstadkommas genom rullning av plant material som t ex papper eller plåt. En rymdyta av detta slag kallas *utvecklingsbar* (med ett finare ord *developabel*) och har stor betydelse i tillverkningsindustrin. Det gäller att kunna räkna fram konturen till rymdytans plana mall.

Med hjälp av differentialgeometri och egenskaper hos rymdytan (i vårt fall den sneda konen) kan man härleda följande tre differentialekvationer som beskriver klipparkets buktiga mönsterkurva:

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{R - a \cos u}{\sqrt{b^2 + (R - a \cos u)^2}}$$
$$\frac{d\xi}{du} = R \cos \alpha, \quad \frac{d\eta}{du} = R \sin \alpha$$

där ξ och η är kurvans x - och y -värden då parametern u löper från 0 till 2π , och α är lutningsvinkeln för kurvan i punkten (ξ, η) .

Startvärden i punkten A : $u = 0$, $\alpha = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 0$. Kurvan slutar i punkten B där parametern u har nått 2π .

1. Lös differentialekvationssystemet med Runge-Kuttas metod och rita kurvan från A till B . Fyrtio steg kan vara lämpligt för att få snygg kontur. Konens spets kommer på klipparket att vara belägen i punkten $P = (0, \sqrt{b^2 + (R - a)^2})$, motivera det!
2. Om man nöjer sig med bara åtta eller tio delintervall i RK4 får man faktiskt tillräcklig noggrannhet (cirka fyra korrekta siffror) i de beräknade värdena på α , ξ och η (kolla det experimentellt!), men kruxet är då att få kurvan att bukta snyggt mellan punkterna. Hermite-Interpolation av ξ och η som funktioner av u i varje intervall ger prydlig lösning och är enkelt eftersom nödvändiga derivator kommer ur diff-ekvationerna. Jämför den interpolerade kurvan med en framräknad med RK4 och mycket litet steg.
3. Om slutvinkeln $\alpha(2\pi)$ i mallen är π eller $\pi/2$ blir tillskärningen av strutmallarna enklare och det blir mindre materialspill. Låt $R = 7.8$ och $a = 5.5$ och beräkna vilken höjd b som kräfthatten kommer att få vid tillverkningskravet $\alpha(2\pi) = \pi$. För lussestruten: behåll $R = 8.8$, $a = 12$ och beräkna höjden b så att $\alpha(2\pi) = \pi/2$. Bestäm måtten hos det minsta rektangulära klippark som innehåller strutmallen för denna kräfthatt respektive lussestrut. Beräkna med numerisk integration hur stort materialspillet blir. Ange också hur många procent av arket som är spill.
4. (Frivillig) Som kontroll bör man förstås tillverka en hatt av papper och se om den verkligen ser ut som den ska när bottenkonturen passar med cirkeln. Det är faktiskt möjligt att visa det i rapporten, om du har tillgång till digitalkamera eller kan flytta mobiltelefonens bild till datorn i lämpligt format.

Visa mallar och strutar!

15 * : Kometens stoftsvans

En komet rör sig i en elliptisk bana runt solen. I polära koordinater med solen i origo gäller uttrycket: $r(\phi) = R/(1 + E \cos \phi)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

R är ellipsens medelradie och E är excentriciteten som uppfyller $0 \leq E < 1$.

För en cirkel gäller $E = 0$; en mycket långsmal ellips har ett E -värde nära ett.

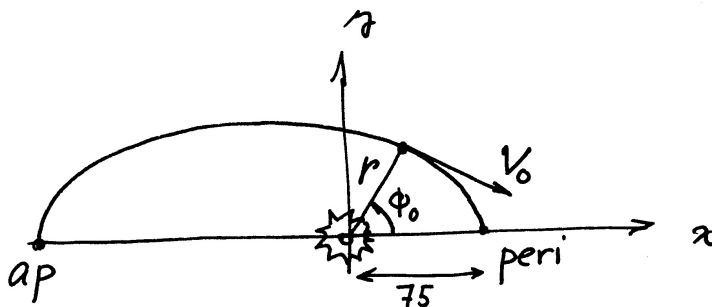
Vår kometbana har excentriciteten $E = 0.4$ och medelradien $R = 105$ i en lämplig astronomisk längdskala. Kortaste avståndet från solen till kometen är $105/1.4 = 75$ längdenheter. Rita upp ellipsen.

Kometen betraktas vid positionen då den är närmast solen och precis korsar positiva x -axeln, alltså vid $(75, 0)$. Man kan då observera två kometsvansar: en jonsvans riktad rakt ut från solen (den ska vi inte räkna på) och en stoftsvans som består av stoftpartiklar (kometdamm) som kastats ut från kometen. Partiklarna följer inte kometbanan eftersom de förutom av gravitationen från solen också påverkas av strålningstrycket från solljuset.

Halliday, Resnick, Walker, *Fundamentals of Physics*, Sample Problem 34-2 (s813 i sjätte upplagan) visar en fin illustration på kometsvansfenomenet och innehåller lite teori om strålningstryck.

För att kunna beräkna stoftsvansen måste vi känna till kometens position och hastighet vid ett antal tidpunkter före observationspunkten. Newtons gravitationslag ger differentialekvationerna

$$\ddot{u} = -C \frac{x}{s^3}, \quad \ddot{v} = -C \frac{y}{s^3} \quad \text{där } s = \sqrt{x^2 + y^2}, u = \dot{x}, v = \dot{y}$$



Konstanten C beror av kometens massa, solens massa och gravitationskonstanten och med väl valda enheter kan vi sätta $C = 1$. Vi vill nyttja kometdata från positionen P där $\phi_0 = 2\pi/3$ medurs till observationspunkten. Kometens riktning vid P är $\mathbf{k} = (r'(\phi_0) \cos \phi_0 - r(\phi_0) \sin \phi_0, r'(\phi_0) \sin \phi_0 + r(\phi_0) \cos \phi_0)$ (Visa det!).

Den normerade rörelseriktningen är $\mathbf{k}_0 = -\mathbf{k}/\|\mathbf{k}\|_2$ och hastighetsvektorn kan då skrivas $V_0 \mathbf{k}_0$. Om vi startar klockan i P gäller alltså att $x(0)$ och $y(0)$ är kända och $u(0), v(0)$ kan bestämmas om V_0 är känd. Det okända hastighetsvärdet V_0 bestäms ur randvillkoret att kometens x -koordinat vid x -axelpassagen ska vara 75 men vi vet inte vid vilken tid det inträffar.

Stoftpartiklarna kastas iväg från kometen i samma riktning och med samma hastighet som kometen har. De trycks iväg av strålningstrycket som verkar rakt ut från solen och är omvänt proportionellt mot solavståndets kvadrat och deras banor följer således samma diff-ekvation som kometen men med andra C -värden. Det är partikelstorleken som avgör om banan blir rätlinjig "kritisk storlek" med $C = 0$, utåtkrökt (små stoftkorn), $C < 0$, eller inåtkrökt (stoftkorn, större än de kritiska, $0 < C < 1$). Beräkna och rita stoftsvanskurvan som dessa partiklar bildar.

Startvärdena i utkastpunkten bestäms av kometdata just där. Släpp iväg några tiotal stoftkorn med C -värden mellan -1 och 1 vid P och se hur svärmen ser ut i observationsögonblicket.

Utvidgning

1. Ovan bestämde vi komethastigheten genom att lösa ett randvärdesproblem numeriskt. Nu ska vi göra det analytiskt genom att använda kända satser från den celesta mekaniken. Vektorn från centralkroppen (solen) till massan brukar kallas radius vector med längd $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Då gäller att totala energin är konstant, med $V = \sqrt{u^2 + v^2}$,

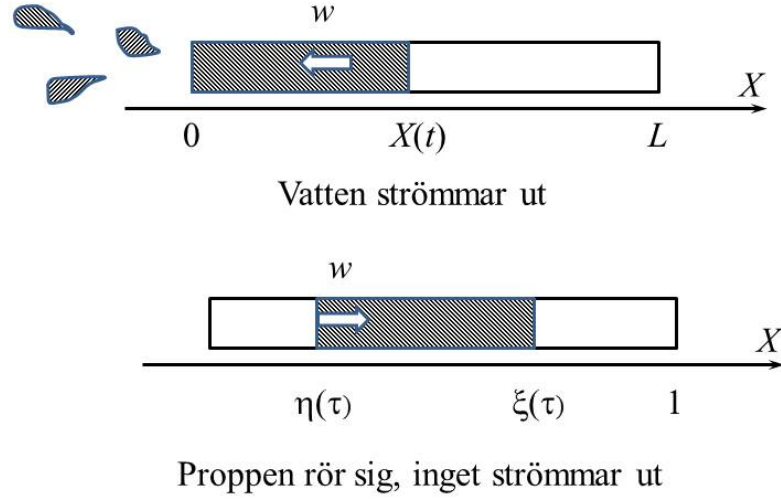
$$1/2V^2 - C/r = E_T$$

och (som Kepler upptäckte genom observationer) att radius vector sveper lika ytor under lika tider, dvs.

$$r^2 \dot{\phi} = M$$

Använd de två punkterna perihelion (närmast solen) och aphelion (längst bort) till att bestämma bankonstanterna E_T och M . Beräkna sedan V_0 och jämför med ditt numeriska resultat.

2. Prova sedan att släppa stoftkorn vid tidpunkter $t_0 + k\Delta t, k = 1, 2, \dots, N$ och hitta lämpligt Δt och lämpliga C-värden så att det blir en prydlig dammplym.



16 **: Vattenraketen i provbänk

En vattenraket kan göras av en PET-flaska som halvfylls med vatten varefter man pumpar in luft till så högt tryck man vågar, säg N atmosfärer. Man får anta, att luft uppför sig som en ideal gas med $\gamma = Cp/Cv = 7/5$ (*exakt*). Vid tiden $t = 0$ öppnar man sedan ventilen i flaskhalsen och vattnet sprutar ut och om flaskan inte satts fast så flyger den iväg. Men nu sitter den i en provbänk. Vi ska göra en matematisk modell av raketen och använda den till att optimera fyllningsgraden så att den totala impuls böljir störst. För enkelhets skull antar vi att flaskan inte har någon hals, dvs. är ett rör. Röret må vara L m långt, och vattenytans position i ett koordinatsystem med origo i röröppningen är $X(t)$. Om atmosfärstrycket mätt i vattenpelare är H_a m, tyngdaccelerationen g m/s² och friktion, tröghet hos luften liksom värmeledning och tyngdkraft på vattnet försummas gäller så länge det finns vatten kvar ($X > 0$ och $dX/dt = w < 0$)

$$Xdw/dt = gH_a \left(1 - N \left(\frac{L - X_0}{L - X} \right)^\gamma \right) \quad (3)$$

$$dX/dt = w \quad (4)$$

$$X(0) = X_0; w(0) = 0 \quad (5)$$

Vattenytans position kan anges dimensionslöst med $\xi = X/L$. Om vi inför en dimensionslös tid $\tau = t\sqrt{gH_a/L^2}$ blir modellen, med $d\xi/d\tau = \dot{\xi}$,

$$\xi\dot{w} = 1 - N \left(\frac{1 - \xi_0}{1 - \xi} \right)^\gamma \quad (6)$$

$$\dot{\xi} = w \quad (7)$$

$$\xi(0) = \xi_0; w(0) = 0 \quad (8)$$

En svårighet är att ξ kan bli noll och då blir $d^2\xi/d\tau^2$ oändlig. Men $d\xi/d\tau$ och därmed energierna förblir ändliga och det betyder bara att allt vatten verkligen åker ut på ändlig tid och att det därefter är slut.

För mycket vatten ger dålig fjutt

Om man fyller för mycket orkar trycket inte pressa ut allt vatten, utan trycket blir så lågt att det vänder, säg vid τ_1 med $\xi = \xi_1 > 0$. Då sugs luft in istället för vatten och det blir en propp med längd ξ_1 som åker tillbaka:

$$\xi_1 \dot{w} = 1 - N \left(\frac{1 - \xi_0}{1 - \xi} \right)^\gamma \quad (9)$$

$$\dot{\xi} = w \quad (10)$$

$$\xi(\tau_1) = \xi_1; w(\tau_1) = 0 \quad (11)$$

Småningom vänder det igen. Kommer det ut mera vatten då? Hur ser sådana lösningar ut? Plotta dels ξ som funktion av τ och dels w som funktion av ξ , dvs. lösningen i fasrummet.

Lagom vatten ger bäst fjutt

Om man vill få fart på raketen ska allt vatten ut. Troligen får trycket inte sjunka under 1 atm i flaskan, för då bromsas ju det utströmmande vattnet. Det ger ett villkor på ξ_0 . Vilket? Framdriften upphör när vattnet tar slut, dvs. när ξ blir 0. Det inträffar vid obekant tidpunkt, $\tau = \tau^*$. Vi vill att den totala impulsen ska bli maximal. Uppgiften är nu att välja ξ_0 så att

$$I(\xi_0) = \int_0^{\tau^*} \dot{\xi}^2 d\tau$$

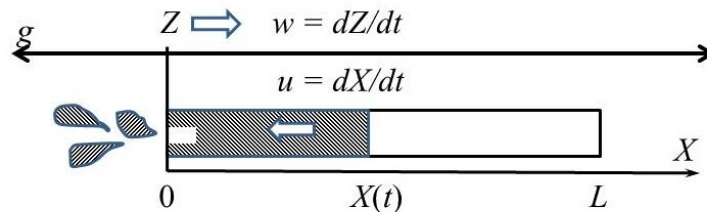
blir så stor som möjligt.

Lösningsmetoder

Lägg till lämplig differentialekvation som beräknar I tillsammans med ekv. 8 och 11. ξ blir aldrig noll så det blir ingen division med noll att undvika. Det handlar om att byta diffekvation när det vänder. Det kan göras på flera sätt:

- Använd 8 och beräkna ξ_1, τ_1 genom lämplig interpolation i en med `ode45` eller RK4 eller annan metod framräknad tabell över lösningen. Kör sedan 11. Kan du motivera varför inget mer vatten rinner ut?
- Inför i 8 ytterligare en ny variabel η som ska betyda vattenproppens undre koordinat. Då gäller $d\eta/d\tau = w$, utom när $\eta \leq 0$ och $w < 0$ då $d\eta/d\tau = 0$, för η kan ju aldrig passera röröppningen. Utöka ODE-systemet med denna ekvation och lämpligt initialvärde.

När ξ är nära 0 går det väldigt fort och $\xi = 0$ ger division med noll. Modifiera systemet så, att när $w < 0$ med mycket litet $\xi > 0$ så sätts alla tidsderivator till noll - processen är slut.



Vatten strömmar ut

17 ** : Vattenraketen i provflygning

En vattenraket kan göras av en PET-flaska som halvfylls med vatten varefter man pumpar in luft till så högt tryck man vågar, säg $N = 10$ atmosfärer. Man får anta, att luft uppför sig som en ideal gas med $\gamma = C_p/C_v$ konstant $= 7/5$ (exakt). Vid tiden $t = 0$ öppnar man sedan ventilen i flaskhalsen, vattnet sprutar ut och flaskan far iväg rakt uppåt. Vi ska göra en matematisk modell av raketen och använda den till att optimera fyllningsgraden. Röret må vara L m långt med radie $R = 5$ cm, och vattenytans position i ett koordinatsystem som följer med raketen är $X(t)$, raketens höjd över marken $Z(t)$, $dZ/dt = w$. Flaskhalsens tvärsnitt är $1/\alpha$ av flaskkroppens. Raketens luftmotstånd modelleras med en motståndskoefficient C_{DR} ([-]), inre friktion i vattnet i flaskan med en friktionskoefficient C_f ($[m^{-1}]$), och förlusten i själva utströmningen med C_D ([-]) Så länge det finns vatten kvar ($X > 0$) gäller

$$f = \frac{p_A}{\rho} \left(N \left(\frac{L - X(0)}{L - X} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (12)$$

$$X\dot{u} + (X + L0)\dot{w} = (\alpha - 1)u^2 - g(L0 + X) - C_{DR}w|w| \quad (13)$$

$$X\dot{u} + X\dot{w} = -f - gX - C_f Xu|u| + C_D \cdot u^2(\alpha^2 - 1) \quad (14)$$

$$\dot{X} = u \quad (15)$$

$$\dot{Z} = w \quad (16)$$

där $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ är vattnets densitet, p_A lufttrycket (100 KPa), g tyngdaccelerationen 9.81 m/s^2 och $L0$ är en längd som motsvarar tomflaskans vikt (se nedan). När vattnet tagit slut gäller

$$\dot{u} = 0 \quad (17)$$

$$\dot{w} = -g - C_{DR}w|w| \quad (18)$$

$$\dot{X} = 0 \quad (19)$$

$$\dot{Z} = w \quad (20)$$

Det handlar om att byta differkvation när vattnet tar slut. När X är nära 0 går det väldigt fort och vid $X = 0$ blir d^2X/dt^2 oändlig. Men dX/dt och därmed energierna förblir ändliga och det betyder bara att allt vatten verkligen åker ut på ändlig tid och att det därefter är slut. Modifiera systemet så, att när $X > d$ används ekv.16 och när $X < d$ används ekv.20, med mycket litet $d > 0$

Nu gäller det att välja α och fyllnadsgraden $X(0)/L$ så att raketen flyger så högt som möjligt. Följande gäller för den valda flaskan:

$$L = 0.5m; L0 = 0.006m; C_f = 0.001 \text{ (m}^{-1}\text{)}, C_D = 1.2, C_{DR} = 0.01$$

och $m_{tomflaska} = L0 \cdot \rho \pi R^2$ blir då ca. 50 g.

Utströmningshålets storlek α och fyllnadsgraden $X(0)/L$ kan varieras. Om man fyller för mycket orkar tryckluften inte pressa ut allt vatten, och om man fyller för lite är trycket fortfarande högt när vattnet tar slut. Med stort α tar det längre tid att tömma flaskan, drivkraften verkar längre men det blir mindre fart på vattnet. En svårighet är att X kan bli noll. Observera att man måste lösa ut du/dt och dw/dt ur Eq. 16 ovan för att kunna använda RK4 eller ODE23 eller „,. Den som har erfarenhet vet att vattnet far ut på bråkdelar av sekund och flaskan kan flyga högt flera sekunder. I den numeriska lösningen behövs därför mycket korta tidssteg i början men på slutet kan stegen ökas. I en sådan körning observerades en variation över fem dekader; konstant steglängd är MYCKET oekonomisk.