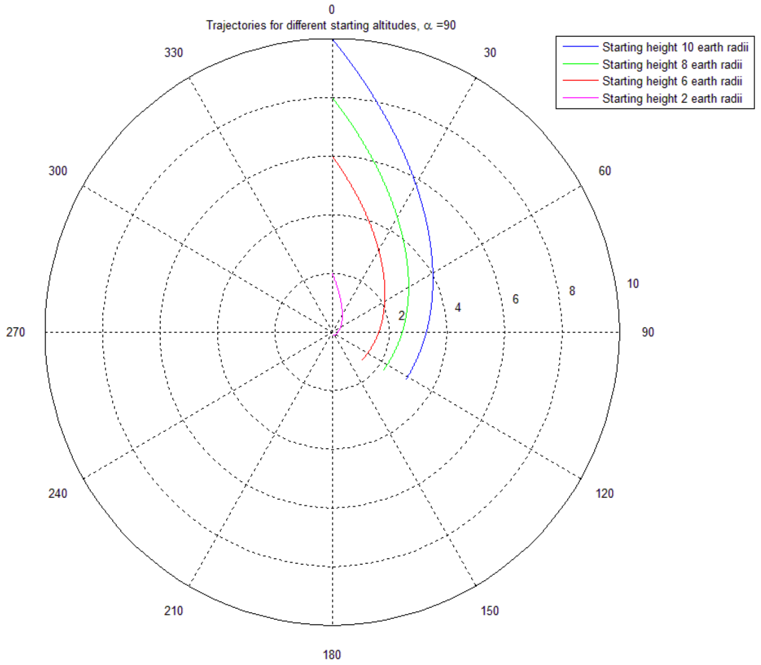
# Rymdskeppet Futten




Slutprojekt i

DN1212 Grundkurs i numeriska metoder

Kontakt: Erik Dalsryd

(Kvällskurs)


Henrik Hvitfeldt 920130-2552 Tel: 073-079 48 56 Mail: hhv@kth.se

Andreas Fröderberg 880730-7577 Tel: 072-728 48 36 Mail: andfro@kth.se

# Förord/sammanfattning

Vi har hört att det tar ca 5 år att doktorera inom ett ämne. Med den logiken är vi nu mycket nära en doktorshatt och en trevlig middag på statens bekostnad. Vi vill se denna rapport som något av vår doktorsavhandling. Vi vill tacka Erik Dalsryd för visad förståelse och ett oändligt tålamod med två elever som, trots ett stort intresse av numeriska metoder, inte vill höra mer om Futtar och Runke-Kuttor inom en översiktlig framtid.

Detta projekt har utförts i kursen Numeriska metoder DN1212 på KTH i Stockholm. Projektet handlar om att numerisk beräkna bankurvor för rymdskeppet Futten utifrån givna differentialekvationer för rörelser i polära koordinater. Metoder som användes ingår alla i kursen för numeriska metoder och programmeringen har utförts i programmet MATLAB som tillhandahålls av KTH. Projektets resulterade i ett program med rimliga värden (för det mesta), kontrollerad och accepterad konvergens och med felskattning för aktuella metoder. Vidare har projektet även resulterat i en djupare förståelse området, även om argument finns för att denna förståelse erhölls en aning för lång stund efter kursens slutdatum.

# Innehåll

# Introduktion

Rymdskeppet Futten försöker lämna atmosfären men har inte tillräckligt med motorkraft. För att rädda situationen kan kaptenen välja att vända skeppet och försöka slunga sig själv runt jorden och på så vis skjuta sig ut i rymden. Denna rapport beskriver hur fysikaliska samband används för att räkna ut den optimala vridningsvinkeln vid olika starthöjder för att inte krascha ned i jorden.

## Problembeskrivning

Rymdskeppet startar på höjden H jordradier över jordens yta. Eftersom rymdskeppet fastnat med motorerna riktade rakt mot jordens yta kommer motorernas kraft på grund av jämviktsamband att vara lika stor som tyngdkraften på rymdskeppet vid denna höjd. Skeppet vrids sedan av vinkeln $\alpha$ från lodlinjen utgående från jordytan, med positivt $\alpha$ i medurs riktning. När skeppet åker runt jorden antas motorkraften fortsatt vara riktad vinkeln $\alpha$ från jordytan i alla punkter. Rymdskeppets position i förhållande till jorden beskrivs med polära koordinater där $r$ är avståndet från jordens mitt och $\theta$ är vinkeln från startpositionen. Skeppets rörelse kan beskrivas i de polära koordinaterna med Newtons rörelseekvationer,

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= G\cos\alpha - g\frac{R^2}{r^2} \\ r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} &= G\sin\alpha \end{aligned} \tag{1}$$

där tyngdaccelerationen ges av

$$G = \frac{gR^2}{(\mathrm{R}+\mathrm{H})^2} \quad . \tag{2}$$

$R$ är här jordradien (som givetvis är 1 jordradie stor) och g är gravitationskonstanten, 20 jordradier/tim$^2$.

## Uppgifter

För alla uppgifter ska rörelseekvationerna lösas till det står klart om Futten passerar jorden eller inte. Till en början ska undersökas vad som händer när skeppet vrids av 90 grader vid

starthöjden 2 jordradier. Sedan testas utfallet för ett antal andra starthöjder. Banans allra lägsta punkt ska interpoleras fram med en lämplig algoritm, där man hittar tid, vinkel och höjd.
Den kritiska höjden vid vilken jorden precis passeras vid avstegsvinkeln 90 grader ska tas fram och hastigheten vid passage ska hittas. Banan för Futten ska interpoleras med minstakvadratmetoden till ett andragradspolynom och banlängden ska med hjälp av detta tas fram.
Slutligen ska den kritiska höjden vid olika vridnings-vinklar tas fram och hastigheten vid passagerna ska även här presenteras. Den vinkel som ger maximal passeringshastighet ska beräknas.

# Metod

För att beräkna banan för Futten har ett antal numeriska metoder använts. Motivationen till valen av metoder, deras användning och hur man uppskattar felen presenteras under följande rubriker. För att beräkna det samlade felet i en metod som använder flera beräkningssteg summeras alla individuella fel för att få fram det totala felet.

## Runge-Kuttas metoder

Runge-Kutta är ett samlingsnamn för lösningsmetoder av första ordningens differentialekvationer med begynnelsevillkor. Metoden går ut på att beräkna värdet av *f(x, y)* i intervallet $(x_i, x_i+h)$ i flera punkter, för att sedan vikta och kombinera detta på ett sätt som minimerar trunkationsfelet när beräkningen av $f(y_{i+1}, x_{i+1})$ görs. I denna analys används Runge-Kuttas metod av 4e ordningen (förkortad RK4). Förfarandet ser ut som följande:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(\mathrm{x}_1, \mathrm{u}_1) \\
k_2 &= h \cdot f(\mathrm{x}_1 + h/2, \mathrm{u}_1 + k_2) \\
k_3 &= h \cdot f(\mathrm{x}_1 + h/2, \mathrm{u}_1 + k_3) \\
k_4 &= h \cdot f(\mathrm{x}_1 + h, \mathrm{u}_1 + k_3) \\
u_2 &= \mathrm{u}_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
x_2 &= x_1 + h
\end{aligned} \tag{3}$$

Där *h* är steglängden, *u* är värdet på funktionen och *x* är oberoende variabeln. Värt att notera är att *x* och *u* kan vara vektorvärda. I denna uppgift ska en andra ordningens differentialekvation behandlas, varför omskrivningar måste göras. Låt

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Ekvation (1) kan då skrivas

$$\dot{u} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 u_4^{\,2} + G\cos(\alpha) - g\dfrac{R^2}{u_1^{\,2}} \\ u_4 \\ \dfrac{G\sin(\alpha) - 2u_2 u_4}{u_1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

RK4 kan nu tillämpas.

Runge-Kuttas metod av ordning 4 har just konvergensordning 4 (Pohl, 2005). Det betyder att trunkationsfelet $e_{trunk}$ kan uppskattas som

$$|e_{trunk}| = y(\mathrm{t}; h) - y(\mathrm{t}) \approx ch^4 . \tag{6}$$

Ett lämpligt test för att testa konvergensen för metoden är att beräkna funktionsvärdet för ett fixerat tidsspann med tre olika steglängder, vardera med längd ökad med en faktor 2. Om steglängden som felskattning ska göras vid benämns $h$ erhålls alltså

$$\begin{aligned} &y(t;h) \\ &y(t;2h) \ . \\ &y(\mathrm{t};4\,\mathrm{h}) \end{aligned} \tag{7}$$

Om metoden konvergerar kommer värdena att öka med ökande steglängd. Differenserna mellan varje ändring i beräknas enligt

$$\Delta_h = |y(t;2\,\mathrm{h}) - \mathrm{y(t;h)}| \tag{8}$$

och kvoterna tas enligt

$$\mathrm{P} = \frac{\Delta_{2h}}{\Delta_h} \ . \tag{9}$$

Enligt (Pohl, 2005) kan felskattningen

$$|e_{trunk}| = y(\mathrm{t}; 2h) - y(\mathrm{t;h}) \tag{10}$$

Anses vara rimlig om (9) är nära 16, vilket kommer av ekvation (6) för en steglängd som dubblas. För att ha en generell felskattning kommer i denna analys ett relativt fel beräknas utifrån kurvan för $H^*$. Relativt fel avser den andel som resultatet skiljer från det sanna svaret och anges alltså i procent eller fraktioner. Detta relativa fel avrundas uppåt och tillämpas på alla resultat för RK4 i arbetet. Resonemanget för rimligheten i detta antagande behandlas närmare i avsnittet Diskussion.

## Hermite

Hermite-metoden är kubisk interpolationsmetod som används för att skapa lösningskurvor utan "hack", som vid exempelvis Linjära interpoleringsmetoder. Hermite-interpolering använder vetskap om derivatan i varje interpolationspunkt användas för att skapa styckvis interpolering med kontinuerlig derivata. Detta resulterar i ett krav på fyra villkor vid interpolationen mellan två punkter, nämligen respektive punkts koordinater och dess derivator. Metodens förfarande ser ut som följer:

$$
\begin{aligned}
&c_1 = y_1 \\
&c_2 = (y_2 - y_1)/\mathrm{h} \\
&c_3 = (\mathrm{k}_2 - c_2)/\mathrm{h}^2 \\
&c_4 = (\mathrm{k}_1 - c_2)/\mathrm{h}^2 \\
&y = c_1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)^2(x - x_2) + c_4(x - x_1)(x - x_2)^2
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Där $x_1$ och $y_1$ respektive $x_2$ och $y_2$ är första punkten och andra punkten i intervallet. $k_1$ respektive $k_2$ är derivatan i dessa punkter och x är x-värdet som skall interpoleras.
Hermite används i detta projekt för att lösa ut vid vilken vinkel och vilken radie som Jorden passeras av skeppet Futten. Här används information om banans derivata och banans koordinater från RK4 i de två sista punkterna för att via interpolation mellan dessa beräkna den lägsta punkten.

Det finns ett flertal sätt att göra feluppskattningar för Hermite-interpolering. I denna analys tas Hermiteinterpolationen fram för två kurvor, en interpolerad över hälften så många punkter som den andra. Det antas att en interpolation mellan två punkter blir mer exakt ju tätare punkterna ligger. Hermitefelet sägs vara den största differensen mellan de båda kurvorna. Även för Hermite kommer ett relativt fel beräknas och tillämpas på alla metoder som använder metoden.

## Sekantmetoden

Sekantmetoden används när möjlighet till en analytisk derivering inte finns vilket förhindrar möjligheterna att använda Newton-Raphsons metod när målet är att hitta en rot till en kurva.
Den är mycket likt Newton-Raphson både praktiskt och formellt.
För att starta sekantmetoden behöver man två startvärden, $(x_{n-1}, f(x_{n-1})), (x_n, f(x_n))$, som antas vara goda gissningar för roten. Roten till linjen mellan dessa punkter ($x_{n+1}$) används som en ny punkt, och en ny linje dras mellan $x_n$ och $x_{n-1}$ och förfarandet repeteras. Metoden används tills skillnaden $x_{n+1}$-$x_n$<$\delta$, där $\delta$ är önskad noggrannhet. Förfarandet ser ut som

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(\mathrm{x_n}) - \mathrm{f}(\mathrm{x_n} - 1)} f(\mathrm{x_n}) \tag{12}$$

Där $x_{n-1}$är första gissningen och $x_n$ andra gissningen.
I detta projekt används metoden för att beräkna höjden *H**, alltså den starthöjd för givet α vid vilken Futten precis passerar jorden.

Sekantmetoden är en iterativ metod som upprepas till noggrannheten uppnått önskad grad. Felskattning definieras därför av en i förväg definierad differens.

## Linjär interpolering

Linjär interpolering används för att finna ett värde mellan två punkter. Här görs antagandet att f(x) är kontinuerlig och linjär mellan punkterna. Linjär interpolering beräknas genom

$$y = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{13}$$

Denna metod används här för att finna tiden *t* där derivatan för Futtens höjd är lika med noll och där skeppet således börjar vända. Antagandet att linjärinterpolering är en adekvat lösning på problemet görs genom att studera kurvan grafiskt och se huruvida kurvan kan anses vara linjär mellan de två punkterna.

Som med många interpolationsmetoder kan noggrannheten på interpolationen antas bero på avståndet mellan punkterna, kortare avstånd ger mindre fel. För att felskatta interpolationen kan man stänga in felet genom att ta fram det interpolerade värdet $\tau$ för en önskad punkt $(x_n, y_n)$ med två steglängder, alltså

$$e_{interpolation} = \left|\tau(x_{n-1}, y_{n-1}) - \tau(x_{n-2}, y_{n-2})\right| . \tag{14}$$

## Minsta Kvadratmetoden (MK)

Denna metod används för att lösa överbestämda ekvationssystem. I allmänhet finns det inte i överbestämt system en funktion som går exakt genom alla punkter utan målet måste vara att minimera det fel som uppstår vid en approximation av lösningen. I en MK-uppskattning minskar man det kvadratiska felet för skattningen, alltså

$$\sum_{i=1}^{N}(\hat{x}_i - x_i)^2 \quad . \tag{15}$$

Här motsvarar $\hat{x}_i$ det uppskattade värdet för punkten för punkt *i* med sant värde $x_i$ och uppskattningen har gjorts på *N* stycken punkter. Metodiken för att lösa ekvationssystemet blir följande:

$$\begin{aligned} &A \cdot b = y \\ &A^T A \cdot b = A^T \cdot y \\ &b = A^T \cdot y \cdot (A^T A)^{-1} \end{aligned} \tag{16}$$

Där *A* är det överbestämda ekvationssystemet på matrisform, *b* är vektorn med de koefficienter som söks och *y* är vektorn är lösningarna till ekvationerna.

I detta projekt används MK-metoden för att beräkna längden på kurvan som skeppet Futten färdas och jämför sedan med den beräknade längden från punkterna som erhålls genom att lösa differentialekvationerna med hjälp av RK4. Utifrån dessa erhålls en uppsättning punkter i det polära planet. Dessa kan sedan interpoleras till en parabel där färdens längd *s* beräknas analytiskt via

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx \quad . \tag{17}$$

Detta går sedan att jämföra med längden på kurvan från differentialekvationerna som beräknas med summan

$$s = \sum_{n=1}^{k} \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (\mathrm{y}_n - \mathrm{y}_{n-1})^2} \tag{18}$$

där *k* är antal punkter i banan.

Felskattning av (18) görs genom en uppskattning mellan varannan punkt, alltså med dubbel steglängd.

# Resultat

I detta avsnitt presenteras resultaten av simuleringen av Futtens färd. Felskattningarna ges först för att sedan behäftas med resultaten.

## RK4

För att uppskatta felet i lösningen av differentialekvationerna testas slutvärdet vid sluttiden 2 timmar. Valet av sluttid är den tid som är närmast passeringstiden vid den kritiska höjden, avrundad uppåt. Steg längden *h* är 0.01 timmar, och har valts då den ger en god balans av noggrannhet och antalet steg som behövs innan en lösning uppnås. I Tabell 1 visas resultaten av konvergensanalysen.

*Tabell 1 Konvergens för RK4, räknad för starthöjden H* (kritisk höjd för 90 grader).*

| | r | rdot | theta | thetadot |
|---|---|---|---|---|
| y(2;h) | 2.046525 | 4.805822 | 3.343906 | 1.999219 |
| y(2;2h) | 2.046528 | 4.805833 | 3.343903 | 1.999217 |
| y(2;4h) | 2.046562 | 4.806031 | 3.34386 | 1.999193 |
| Diff(h;2h) [e-6] | 2.050501 | 10.84839 | 3.0299 | 1.639829 |
| Diff(2h;4h)[e-6] | 34.94126 | 198.0312 | 43.1098 | 24.26901 |
| *P* | 17.04036 | 18.25443 | 14.22812 | 14.79972 |
| Relativt fel | 1.002E-06 | 2.26E-06 | 9.06E-07 | 8.2E-07 |

Utifrån dessa resultat erhålls feluppskattningarna för RK4, presenterade som relativa fel i Tabell 2

*Tabell 2 Relativa felskattningar från RK4, avrundade uppåt.*

| | |
|---|---|
| $r$ | 1.002e-6 |
| $\theta$ | 9.1e-7 |
| $\dot{\theta}$ | 8.3e-7 |

## Hermite

För felskattninen av Hermiteinterpolationen  kurvan upp. Vid närmare undersökning följer linjerna varandra bra. Hermitefelet bedöms vara det relativa felet.

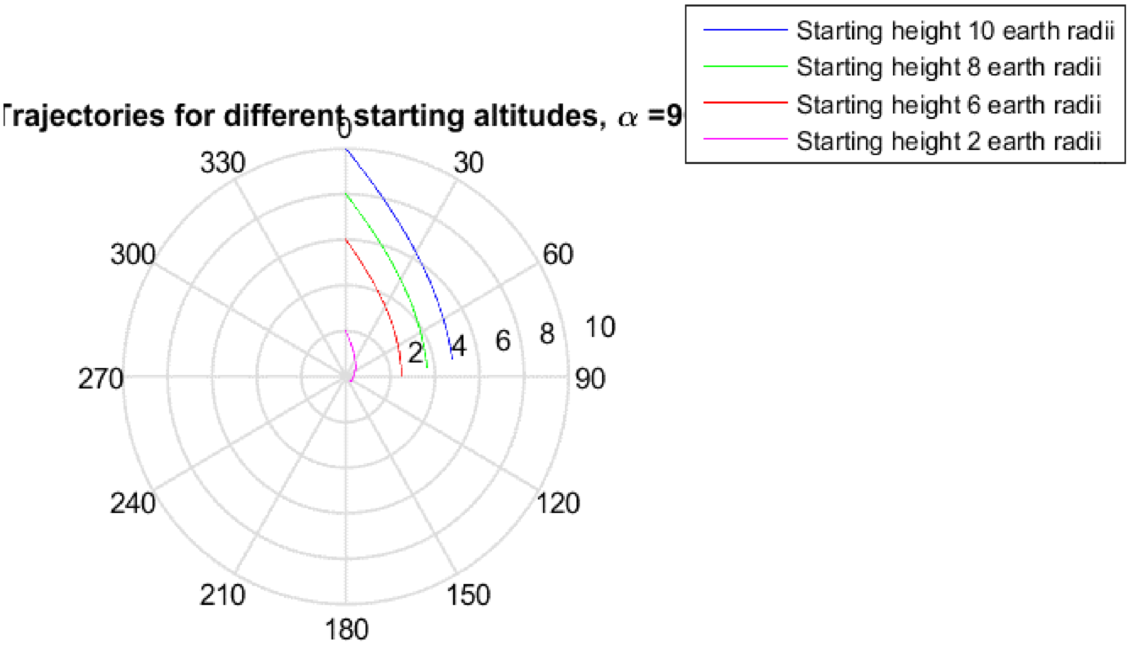
## Uppgift 1

I Tabell 3 visas passeringshöjden för olika starthöjder. RK4 har använts för lösning av ODE, linjär interpolering för att ta fram tiden för passering och Hermite-interpolation har använts för r och θ vid passering.

*Tabell 3Resultat för passeringsvariabler för Futten för olika H*

| H | t_pass | t_err | r_pass | r_err | theta_pass | theta_err |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **10** | 7,926384 | 0,005 | 4,843193 | 0,002911 | 1,414822 | 0,00085 |
| **8** | 5,740189 | 0,005 | 3,664348 | 0,002202 | 1,471488 | 0,000884 |
| **6** | 3,79117 | 0,005 | 2,489206 | 0,001496 | 1,569032 | 0,000943 |
| **2** | 0,748031 | 0,005 | 0,299701 | 0,00018 | 2,387785 | 0,001435 |

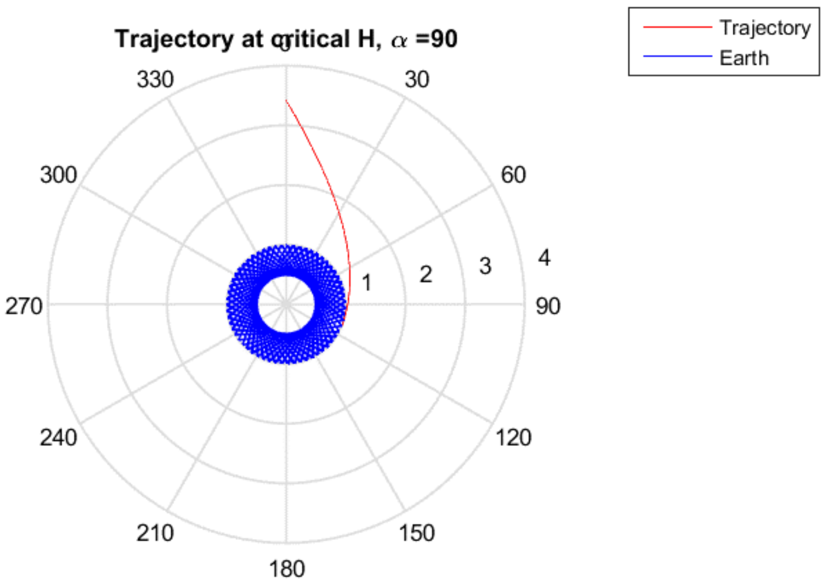
För starthöjden 2 jordradier passerar Futten på höjden 0.3 jordradier alltså betyder att Futten kraschar, vilket också syns i figur (1).




*Figur 1 Banor för olika starthöjder H plottade fram tills det att rymdskeppet börjar vända utåt från jorden igen.*

## Uppgift 2

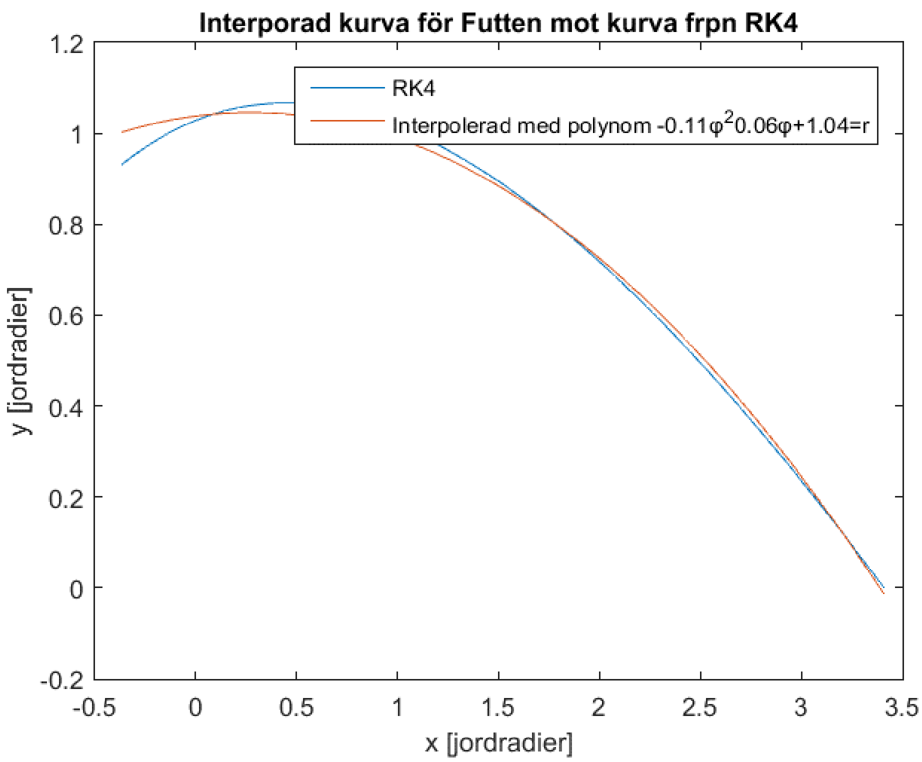
Den kritiska höjden *H** finns vara *3,410±0,000100* jordradier. Raketen passerar då med hastigheten *6,784±0,017868* jordradier, vilket ungefär motsvarar ca *44 000* km/h. Banan för den kritiska höjden återfinns i figur (2). Förutom de metoder som används i uppgift 1 används även sekantmetoden för att hitta *H**.




*Figur 2 Kritisk bana för när rymdskeppet precis passerar trädtopparna. Jorden ses här som en blå planet.*

## Uppgift 3

Den minstakvadratanpassade polynomet samt plottad derivata som används vid beräkning av båglängden. Den interpolerade kurvan visas i Figur 3. Båglängden i detta fall är 4,0049 jordradier. För värdet på den beräknade banlängden utifrån RK4 är banlängden 4,016±0,000103 Jordradier.




*Figur 3 Minstakvadratanpassad bana*

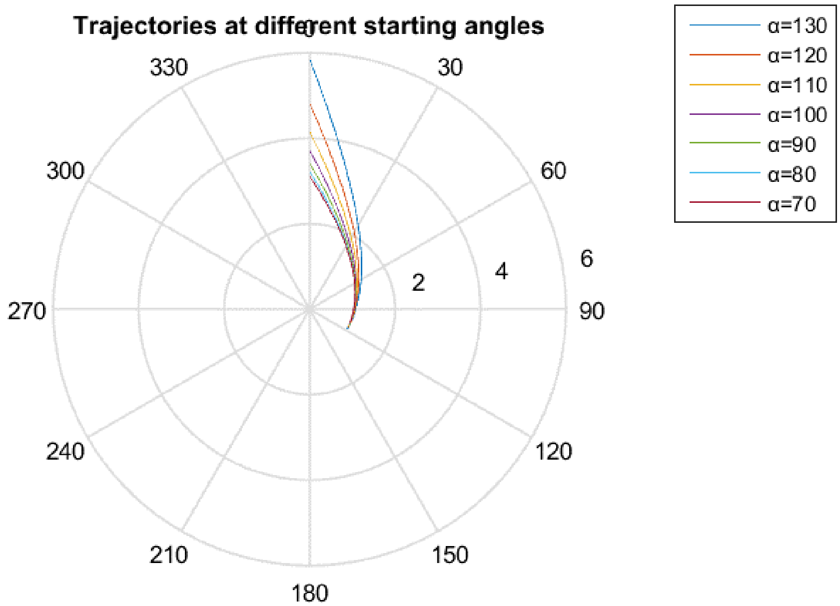
## Utvidgning

I Tabell 4 visas resultatet från utvidgningen med olika höjder H för varierande vinklar α.

*Tabell 4 Olika H och hastigheter med olika vridningsvinklar.*

| **alphas** | **H_star_alpha** | **H_err** | **pass_speed** | **v_err** |
|---|---|---|---|---|
| **150** | 10.98349 | 1.3E-06 | 7.766613 | 0.013991 |
| **140** | 7.598205 | 1.3E-06 | 7.658175 | 0.004845 |
| **130** | 5.851377 | 1.3E-06 | 7.520562 | 0.048619 |
| **120** | 4.817007 | 1.3E-06 | 7.358166 | 0.040595 |
| **110** | 4.153561 | 1.3E-06 | 7.177332 | 0.021332 |
| **100** | 3.709516 | 1.3E-06 | 6.984971 | 0.017112 |
| **90** | 3.409729 | 1.3E-06 | 6.783635 | 0.003704 |
| **80** | 3.215172 | 1.3E-06 | 6.571567 | 0.032412 |
| **70** | 3.107034 | 1.3E-06 | 6.349761 | 0.006587 |
| **60** | 3.080952 | 1.3E-06 | 6.125893 | 0.009327 |
| **50** | 3.147623 | 1.3E-06 | 5.900802 | 0.016133 |

I Figur 4 plottas de olika banorna för olika vinklar med passeringsradien 1.




*Figur 4 olika beräknade starthöjder för olika alpha när futten precis passerar Jorden*

Vidare ska tas fram vilken vridningsvinkel som ger högst passeringshastighet. I Tabell 4 kan ses att hastigheten ökar med ökad vridningsvinkel. RK4 hittar ingen lösning för vinklar över 150 grader varför den högsta hastigheten anses uppnås vid maximal avvridning. Den är då 7.77±0.014 jordradier/h. Samma metoder som i uppgift 2 har använts för att lösa uppgiften.

# Diskussion

I detta avsnitt diskuteras trovärdigheten hos resultaten och metoder som använts motiveras där det är brukligt.

För RK4 används ett relativt fel för en starthöjd och detta fel används sedan för alla beräkningar av banan, oavsett starthöjd. Ett antagande görs alltså att alla banor har ungefär samma relativa fel. Detta anses vara rimligt då alla banor sker under liknande förhållanden och RK4 är en stabil metod.

Resultaten anses vara rimliga. Futtens passeringshastighet förbi jorden är 44 000 km/h vilket bara är ca 10% högre än hastigheten som krävs för att tvinga ett objekt in i en bana runt jorden.

Den MK-skattade kurvan har en förhållandevis god passning till banan från differentialekvationen och bedöms således rimlig. Den ger även en skattning av banlängden som är nära den från RK4.

I utvidningen kan resultaten anses vara rimliga, sett till starthöjden $H$. Däremot verkar det vara orimligt att passeringshastigheten bara ökar ju större vridningsvinkel Futten har. Samma sak sker även när alla vridningsvinklar testas från samma starthöjd. Eftersom Futten hela tiden har vinkeln $\alpha$ mot lodlinjen hos jorden kommer skeppet för stora vridningsvinklar hela tiden att ha sin motorkraft riktat in mot jorden. Man kan därför anta att ett maximum borde uppnås någonstans vid en vinkel lite större än 90 grader då Futten har med sig mycket kraft från motor i rätt riktning. Metoderna som använts för att ta fram banorna och starthöjderna är dock samma som använts tidigare i uppgiften och de har då gett resultat som framstår troliga. Resultaten presenteras därför ändå med hopp om att intuitionen är fel.