组合数学笔记

Mobyw
Created by ElegantLaTeX

版本：1.0
更新：2022 年 11 月 30 日

1 第一章排列、组合及二项式定理

1.1 基础

加法规则、乘法规则

排列、组合

集合：$A = \{a, b, c, d\}$.

重集：$B = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot b_2, \cdots, k_n \cdot b_n\}$.

1.2 排列问题

1.2.1 线排列

将一些元素排成一条直线.

$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

r 是整数，从这 n 个不同的元素中取出 r 个按照一定次序排列起来 $(r \leq n)$ ，称为集合 A 的 r-排列，记为 $P(n, r)$.

A 的 r-排列为 A 的 r-有序子集.

定理1.1 对于正整数 $n, r(r \leq n)$ ，有 $P(n, r) = n!/(n-r)!$.

推论1：当 $2 \leq r \leq n$ 时，有 $P(n, r) = nP(n-1, r-1)$.

公式证明直接展开即可，组合分析证明：首先第一个位置上可以从 n 个元素中选择一个放置，然后剩下的在 $n-1$ 个元素中再挑选 $r-1$ 个元素.

推论2：当 $2 \le r \le n$ 时，有 $P(n,r) = rP(n-1,r-1) + P(n-1,r)$.

公式证明可以利用 *推论1* 得到，组合分析证明大致思路：将 r 分为两类，一类是必须要包含其中一个元素的情况，另一种情况是一定不包含这个元素的情况. 第一种情况下我们首先在 $A\backslash\{a_1\}$ 的情况下选取 $r-1$ 个元素进行排列，对于上述的所有排列都可以将 a_1 放入从而得到所有一定包含 a_1 的情况，也就是 $r \cdot P(n-1,r-1)$. 第二种情况就是一定不包含 a_1 的情况，直接在 $n-1$ 个元素中进行 r-排列即可：$P(n-1,r)$.

例题：9 个字母单词 FRANGMENTS 进行排列，要求字母 A 总是紧跟在 R 的右边，则共有多少排法？

一种简单的思路是将 A,R 看作一个元素，则可以得到：$P(8,8)$.

另外一种思路：假设不考虑 A,R 的约束，可以得到 $P(9,9)$ ，而考虑这个约束，需要去掉 $8 * P(8,8)$.

1.2.2 圆排列

一些元素排成一个圆圈的排列

从集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的 n 个元素中取出 r 个元素按照某一种顺序排成一个圆圈，称这样的排列为圆排列（循环排列）.

注意：将一个圆排列旋转得到的另一个圆排列视为相同的圆排列.

圆排列的个数为：$P(n,r)/r = n!/(r(n-r)!)$

例题：8 个人围成圆桌就餐，一共有多少种就坐方式？如果有两个人不愿意坐在一起又存在多少种就坐方式？

第一个问题是一个简单的圆排列：$P(8,8)/8$.

第二个问题两种思路：

第一种先将无关的 6 个人和另外 2 个人中的一个人拿出来，这 7 个人可以无约束的直接进行圆排列 $P(7,7)/7$ ，然后我们就需要考虑，还有一个人，他在坐的时候选择的空间要去掉其中一个人的左右两边的位置，因此对于那个人来说每一次都只有5个位置供他选择，所以写为：$P(7,7)/7 * 5$.

第二种思路为先不考虑约束，然后去掉不满足约束的情况：去掉不满足约束的情况可以考虑为先将那两个人绑定（2 种排列），去掉那部分情况即可：$P(8,8)/8 - 2 * P(7,7)/7$

.

例题：四男四女圆桌交替就坐方式？

思路：首先明确是一个圆排列问题，其次考虑先将男生安排了，也就是 $P(4,4)/4$ ，然后如何将女生插入到其他位置上，第一个女生插入圆桌位置是有4个选择，第二个则有3个选择依次类推，最终得到：$P(4,4)/4*4*3*2*1$.

1.2.3 重排列

前面的线排列和圆排列都是在一个集合 A 中选出 r 个元素进行排列，在每一种排列中每一个元素至多出现一次. 现在考虑元素允许出现重复的情况，即考虑重集的情况下：$B=\{k_1\cdot a_1,k_2\cdot a_2,\cdots k_n\cdot a_n\}$ 中选择 r 个元素进行排列.

重集 $B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\cdots,\infty\cdot b_n\}$ 的 r 排列的个数为 n^r .

例题：由 1,2,3,4,5,6 这六个数字能够组成多少个五位数？又能组成多少个大于 34500 的五位数？

简单思考组成多少个五位数的问题：6^5

第二个问题带约束的情况：第一种正向的思路：最高位要大于3，选法只有3种，其他位次随便选：$3*6^4$ ；最高位等于3，次高位大于4的情况：$2*6^3$ ；最高位等于3，次高位等于4，次次高位大于5的情况：$1*6^2$ ；最后一种情况，高位的前三位分别为3，4，5，之后的两位随便选 6^2 . 然后根据加法规则求和. 第二种思路，使用减的方法，无约束条件下的总数为 6^5 ，不满足约束的情况有：最高位小于3；最高位等于3，次高位小于4；最高位等于3，次高位等于4，次次高位小于5的情况. 同样可以得到结果.

定理：重集 $B=\{n_1\cdot b_1,n_2\cdot b_2,\cdots,n_k\cdot b_k\}$ 的全排列个数为：$n!/(n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!)$.

Proof. 首先将重集中的 n_i 个 b_i 分别赋予上标 $1,2,\cdots,n_i$ ，即 $b_i^1,b_i^2,\cdots,b_i^{n_i}(i=1,2,\cdots,k)$. 将重集 B 改写为集合 A ，其中元素个数为 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$. 显然集合 A 的全排列为 $n!$. 而对于任意一个 b_i ，其内部又会有 $n_i!$ 种排列，类似地可以得到所有的情况. 证毕.

例题：使用字母 A,B,C 组成五个字母的符号，要求在每一个符号中，A 至多出现 2 次，B 至多出现 1 次，C 至多出现 3 次，求此类符号的个数.

分析这个问题也是一个重排列问题，思考首先在符号中可能出现的情况，$\{2\cdot A,1\cdot B,2\cdot C\}$ ；$\{2\cdot A,0\cdot B,3\cdot C\}$ ；$\{1\cdot A,1\cdot B,3\cdot C\}$. 可能出现的情况只有这三种，分别计算之后使用加法规则即可.

1.3 组合

定义：假设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是具有 n 个元素的集合，r 是一个非负整数，从这 n 个不同的元素中取 r 个不考虑次序组合起来 $r \le n$, 称为集合 A 的 r 组合，记为 $C(n,r)$.

A 的 r-组合是 A 的 r-无序子集.

定理：对于 $r \le n$ 有 $C(n,r) = P(n,r)/r! = n!/(n-r)!r!$.

一个 r-组合是 $r!$ 个 r-排列；$C(n,r)$ 个 r-组合就是 $r!C(n,r)$ 个 r-排序.

推论1：$C(n,r) = C(n,n-r)$.

推论2：$C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$. 这也是 Pascal 公式.

对比排列问题下的公式 $P(n,r) = P(n-1,r) + r \cdot P(n-1,r-1)$

公式推导的方式可以进行直接推导，不多赘述；思考组合分析的方法，这个证明的方法与在证明排列的推论2的情况是类似的，考虑固定一个集合A中的元素，情况变为 r 个元素中包含 a_1 ，另一种情况一定不包含 a_1 .

推论3：$C(n,r) = C(n-1,r-1) + C(n-2,r-1) + \cdots + C(r-1,r-1)$.

推论3可以通过反复使用推论2得到.

例题：请问数字 510510 可以被多少不同的奇数整除？

首先 $510510 = 2 * 3 * 5 * 7 * 11 * 13 * 17$ ，除 2 之外共计有 6 个奇数，因此需要整除 510510 一定是除 2 之外的奇素数的积，且每一个积中一个奇数至多出现一次. 那么我们可以得到：$C(6,1) + C(6,2) + C(6,3) + C(6,4) + C(6,5) + C(6,6) + 1 = 2^6$.

例题：从 1,2,...,1000 中选出三个整数，有多少种选法使得所选的三个整数的和能够被 3 整除？

因为是找的三个数字的和能够被 3 整除，因此要通过考虑余数的情况来考虑存在的所有可能的情况. 因此将所有的数分为三类，$A = \{1, 4, 7, \cdots, 1000\}$, 共有 334 个元素；$B = \{2, 5, 8, \cdots, 998\}$ ，共有 333 个元素；$C = \{3, 6, 9, \cdots, 999\}$ ，共有 333 个元素. 这三类分别是余数为 1,2,0 的数字的分类. 要使得找三个数能够被 3 整除那么可能的情况就是

(1)三个数来自于同一个集合；(2)三个数分别来自三个集合.

第一种选法：$C(334,3) + 2 \cdot C(333,3)$ ；第二种选法：$C(334,1) \cdot C(333,1) \cdot C(333,1)$ ，然后根据加法公式得到结果.

1.3.1 重复组合问题

从重集 $B = \{k_1 \cdot b_1, k_2 \cdot b_2, \cdots, k_n \cdot b_n\}$ 中选取 r 个元素不考虑次序组合起来，称为从B中取出 r 个元素的重复组合. 我们记为 $F(n,r)$.

定理：$B = \{\infty \cdot b_1, \infty \cdot b_2, \cdots, \infty \cdot b_n\}$ 的r-组合数为 $F(n,r) = C(n+r-1,r)$.

Proof. 假设 n 个元素 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 和自然数 $1, 2, \cdots, n$ 之间是1-1对应的. 于是考虑的任何组合都可以看为一个r个数的组合 $\{c_1, c_2, \cdots, c_r\}$. 我们可以认为各个 c_i 是按照大小次序排列的，相同的 c_i 连续地排在一起：$c_1 \le \cdots \le c_r$ 排列. 令 $d_i = c_i + i - 1, (i = 1, 2, \cdots, r)$ ，即：$d_1 = c_1, d_2 = c_2 + 1, \cdots, d_r = c_r + r - 1$. 而我们又知道 c_i 可以取得的最大值为 n ，因此 d_i 可以取得的最大值为 $n + r - 1$ ，这样就可以得到集合 $\{1, 2, \cdots, n + r - 1\}$ 的一个r-组合：$d_1 d_2 \cdots d_r, (d_1 < d_2 < \cdots < d_r)$ ，显然我们会发现对于一种 $\{c_1, c_2, \cdots, c_r\}$ 的取法便对应一种 $\{d_1, d_2, \cdots, d_r\}$ 的取法且一定是1-1对应的. 这样看来我们就会发现，对于允许重复地从 n 个不同元素中取 r 个元素的组合数和不允许重复地从 $(n+r-1)$ 个不同元素中取 r 个元素的组合数是相同的.

$$F(n,r) = C(n+r-1,r)$$

例题：某一个餐厅有7种不同的菜，为了招待朋友一个顾客需要买14个菜，请问共有多少种买法？

简单分析这就是一个重复组合问题，$F(7,14) = C(20,14)$ 种买菜的方法. 注意不要想象为排列问题，对于买菜这个事情是没有顺序的说法的.

例题：求 n 个无区别的球放入 r 个有标志的盒子中 $(n \ge r)$ 而无一空盒的放法.

首先考虑不能为空的问题，因此每个盒子中必须首先放入一个球，下面我们考虑还有剩余的 $n-r$ 个球应该如何放置的问题. 这时候需要进行分析，因为我们知道因为每一个盒子中再去放入多少个球是没有限制的，因此我们就应该考虑为盒子的集合为重集，球数量为取的元素的数量，也就是 $F(r, n-r)$.

例题：在由数字0,1,2,...,9组成的 r 位整数所组成的集合中，如果将一个整数重新排列得到另一个整数，则称这两个整数是等价的. 请问：

(1) 有多少个不等价的整数.

(2) 如果数字0,9最多只能出现一次，那么有多少个不等价的整数.

首先第一个问题很简单，$F(10,r)$.

第二个问题从两个角度来思考：首先是考虑0和9都不出现的情况，因此重集变为 $\{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \cdots, \infty \cdot 8\}$ ，就是8个数的重集的重复组合问题，结果可以写为：$F(8,r)$ ；第二种情况是0出现一次或者9出现一次的情况，这两种情况可以看作是等价的，先在9个数的重

集中重复组合 $r-1$ 个值，然后将0或者9添加进去，结果都表示为：$F(9,r-1)$. 最后还有一种情况就是0和9均出现了一次，也就是 $F(8,r-2)$ ，然后将0，9添加进去，最终使用加法规则可以得到结果为：$F(8,r)+2\cdot F(9,r-1)+F(8,r-2)$. 另外还存在一种思路是，无约束的条件下减去不满足条件的情况，也就是：$F(10,r)$ ，不满足条件的情况分为0大于2次，9大于2次，但是这种情况下我们需要加上一部分，即两个都大于等于2的情况，因为这个情况被剔除了两次，因此我们需要加回来一次，从而最后我们可以计算得到结果为：$F(10,r)-F(10,r-2)-F(10,r-2)+F(10,r-4)$.

例题：求方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 的非负整数解的个数. 其中 r,n 均为正整数.

这个问题相当于是一个重集的r-组合问题，考虑假设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为 n 个不同的元素，那么重集 $B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\cdots,\infty\cdot b_n\}$ 的任何一个r-组合都具有 $\{x_1\cdot b_1,x_2\cdot b_2,\cdots,\cdots,x_n\cdot b_n\}$ ，其中 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是非负整数且满足方程：$x_1+x_2+\cdots+x_n=r$. 所以对于这个问题来说，满足上述方程的非负整数解就相当于在这个重集 B 中进行了一次r-组合的过程，结果也就是 $F(n,r)$.

1.4 二项式定理

定理：二项式定理：当 n 是一个正整数时，对于任意 x 和 y 都有：

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

Proof. 组合分析法：对于这个问题，$(x+y)^n$ 表示n个 $(x+y)$ 的连乘，相当于在 n 个因子中选择 k 个，这 k 个只选择 x 变量，同时还有 $n-k$ 个只选择 y 变量，这样构成了 x^ky^{n-k} . 此时还要乘上构成这个组合的选法为 $\binom{n}{k}$. 第二种证明方法是数学归纳法这里不做详述.

二项式展开式有非常多的变种，下面给出一些：

推论1：当 n 为正整数时，对于任意的 x,y 都会有：

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^ky^{n-k}$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^{n-k}y^k$$

推论2：在实际情况下常会出现 $y=1$ ，因此当 n 为正整数时，对于所有的 x 都会有：

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k$$

推论3：当 $x, y = 1$ 的情况下：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

推论4：当 $x = -1, y = 1$ 的情况下：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0$$

牛顿在1676年推广了二项式定理，得到了 $(x+y)^\alpha$ 的展开式，其中 α 为任意的实数. 首先引入记号 $\binom{\alpha}{k}$.

定义：对于任意的实数 α 和整数 k ，定义：

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

为广义的**二项式系数**.

定理：假设 α 是任意一个实数，则对于满足 $|\frac{x}{y}| < 1$ 的所有 x 和 y 有：

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k y^{\alpha-k}$$

上面的式子也称为牛顿二项式定理. 同样的基于牛顿二项式定理，我们再引入一些推论：

推论1：对于 $|x| < 1$ 的任何 x ，有：

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

推论2：若令 $\alpha = -n$（ n 为正整数），对于 $|x| < 1$ 的任意 x 有：

$$(1+x)^{-n} = \frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k$$

推论3：当 $|x| < 1$ 时，同时令 $n = 1$ ，我们可以得到：

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$$

推论4：当 $|x| < 1$ 时，同时令 $x = -x$ ，我们可以得到：

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

推论5：使用 $-rx$ 替代 x（ r 为非零常数），当 $|rx| < 1$ 时有：

$$(1-rx)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} r^k x^k$$

推论6：令 $\alpha = 1/2$ ，当 $|x| < 1$ 时有：

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}k} \binom{2k-2}{k-1} x^k$$

1.5 组合恒等式

恒等式1：对于正整数 n 和 k ，有：

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Proof. 当 $k > n$ 时，$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

当 $1 \leq k \leq n$ 时，有：

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \\ &= \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} \\ &= \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

恒等式2：对于正整数 n ，有：

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = 2^{n-1}n$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} \\
&= 2^{n-1}n
\end{aligned}
$$

Another Proof. 使用微分法：

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

两边同时对 x 做微分得到：

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

令 $x = 1$ 得：

$$n\cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

恒等式3：对于正整数 n ，有：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = 0$$

Proof.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

两边同时对 x 做微分可以得到：

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$$

在上式中，令 $x = -1$ ，则有：

$$n\cdot 0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k\cdot(-1)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(-1)^k$$

恒等式4：对于正整数 n ，有：

$$\sum^{n} k^2\binom{n}{k} = 2^{n-2}n(n+1)$$

而右边式子中 x^p 的项为：$\binom{m+n}{p}x^p$. 而前面的式子中所有的能够得到 x^p 的项的式子为：$\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}x^p$.

从而最终我们可以根据系数相等的原则：

$$\binom{m+n}{p}=\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$$

Another Proof. 第二种方法使用组合分析法：

假设集合 A 有 m 个元素，B 有 n 个元素，定义 $A\cup B$ 为集合 C ，我们假设 $A\cap B=$ ，那么集合 C 中就应该有 $m+n$ 个元素，从这 $(m+n)$ 个元素中寻找一个p-组合，我们可以得到 $\binom{m+n}{p}$. 换一种思路，这个问题就可以变为，我从 A 中取 k 个元素，再从 B 中取 $p-k$ 个元素的问题，根据乘法规则可以得到：$\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$ ，同时这种组合的方式根据加法规则，一共有：$\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$. 同样可以证明恒等式7.

恒等式8：对于正整数 m,n 有：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{k}=\binom{m+n}{m}$$

恒等式9：对于任意的正整数 n 有：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

恒等式10：对于非负整数 p,q,n , 有：

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}=\binom{n}{p}\binom{n}{q}$$

恒等式11：对于非负整数 p,q,n , 有：

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+p+q-k}{p+q}=\binom{n+p}{p}\binom{n+q}{q}$$

恒等式12：对于非负整数 n 和 k , 有：

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

可以使用数学归纳法证明.

恒等式13：对于所有实数 α 和非负整数 k , 有：

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{\alpha+j}{j}=\binom{\alpha+k+1}{k}$$

使用推广到广义二项式系数的Pascal公式，反复替换可以得到这个恒等式，证明过程略.

1.5.1 证明组合恒等式的常见方法

1. 数学归纳法 2. 利用二项式系数公式，特别是Pascal公式 3. 比较级数展开式中的系数（包括二项式定理和母函数法）4. 积分微分法 5. 组合分析法