组合数学例题讲解

Mobyw

版本：1.0
更新：2022 年 12 月 9 日

本文档为组合数学各章节的例题，由于部分答案为个人编撰，难免会出现错误，请保证使用 GitHub仓库 所发布的最新版本. 如遇问题可在 GitHub 上发布 Issue.

1 容斥原理

Exercise 1

求方程：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13 \\ 3 \le x_1 \le 6, 2 \le x_2 \le 6, x_3 \le 2 \end{cases}$$

正整数解的个数.

Solution 1

首先进行变量代换：

$$x_1' = x_1 - 3, x_2' = x_2 - 2, x_3' = x_3 - 1, x_4' = x_4 - 1$$

则方程变为：

$$\begin{cases} x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 6 \\ 0 \le x_1' \le 3, 0 \le x_2' \le 4, 0 \le x_3' \le 1, x_4' \ge 0 \end{cases}$$

等价为求集合 S_0 的 6-组合数，其中 S_0 为：

$$S_0=\left\{3\cdot x_1',4\cdot x_2',1\cdot x_3',\infty\cdot x_4'\right\}$$

用 A_1 表示 S 中至少含有 4 个 x_1'；A_2 表示 S 中至少含有 5 个 x_2'；A_3 表示 S 中至少含有 2 个 x_3'. 其中 S 为：

$$S=\left\{\infty\cdot x_1',\infty\cdot x_2',\infty\cdot x_3',\infty\cdot x_4'\right\}$$

根据容斥原理，所求的 6-组合数为：

$$\begin{aligned}&\left|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\right|\\=&|S|-\sum_{i=1}^{3}|A_i|+\sum_{i\neq j}\left|A_i\cap A_j\right|-|A_1\cap A_2\cap A_3|\\=&F(4,6)-(F(4,2)+F(4,1)+F(4,4))+F(4,0)-0\\=&84-(10+4+35)+1\\=&36\end{aligned}$$

故原方程的正整数解个数为 36.

Exercise 2

奔赴抗疫，全国 4 个片区共有 68 个医疗队，其中西南片区有 10 个，中部片区有 18 个，北方片区有 18 个，东部片区有 22 个. 假定同一片区的各个医疗队不加以区别，现在要从中选取 27 个医疗队入围. 考虑到不同片区的特殊情况，要求西南片区至少入围 4 个医疗队，北方片区至少入围 7 个医疗队，其他片区至少各入围 2 个医疗队，问理论上有多少种不同的选取方案？

Solution 2

用 x_1,x_2,x_3,x_4 表示四个片区的选取数目，则有：

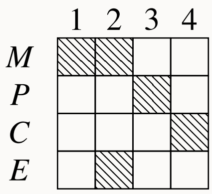
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=27\\4\le x_1\le 10,2\le x_2\le 18,7\le x_3\le 18,2\le x_4\le 22\end{cases}$$

Exercise 3

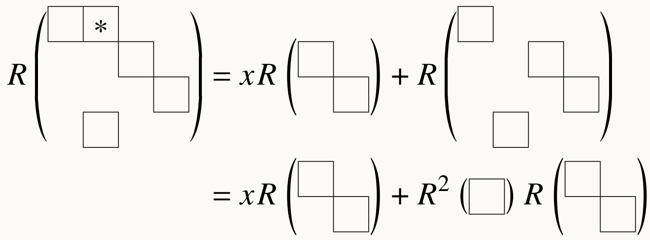
有数学、物理、化学和英语 4 门课程. 现从星期一到星期四安排这四门课程，每门课程安排一天，每天安排一门课程. 要求数学不能安排在星期一和星期二，物理不能安排在星期三，化学不能安排在星期四，英语不能安排在星期二. 问有多少种不同的安排方案？

Solution 3

禁区棋盘：



禁区棋盘计算：



$$
\begin{aligned}
&= x(1+2x+x^2)+(1+x)^2(1+2x+x^2)\\
&= 1+5x+8x^2+5x^3+x^4
\end{aligned}
$$

安排方案数：

$$N = 4! - 5\cdot 3! + 8\cdot 2! - 5 + 1 = 6$$

2　鸽笼原理与 Ramsey 定理

Exercise 4

设 n 是大于 1 的奇数. 证明在 $2^1-1, 2^2-1, \cdots, 2^n-1$ 中总有一个能被 n 整除.

Solution 4

假设集合 $S=\left\{2^1-1, 2^2-1, \cdots, 2^n-1\right\}$ 中不存在能被 n 整除的数，根据鸽笼原理，这 n 个数中至少有两个数除以 n 的余数是相同的.

将两个除以 n 余数相同的数表示为 $2^x-1=a\cdot n+c, 2^y-1=b\cdot n+c$ 且满足 $1\le x<y\le n, b>a$，则有：

$$
\begin{aligned}
(2^y-1)-(2^x-1) &= (b\cdot n+c)-(a\cdot n+c)\\
2^y-2^x &= (b-a)\cdot n\\
2^x(2^{y-x}-1) &= (b-a)\cdot n
\end{aligned}
$$

上式中 $2^x(2^{y-x}-1)$ 可被大于 1 的奇数 n 整除，由于 2^x 是偶数，故 $2^{y-x}-1$ 可被 n 整除，由于 $0<(y-x)<y$，所以 $2^{y-x}-1$ 也在集合 S 中，与假设矛盾.

综上，集合 $2^1-1, 2^2-1, \cdots, 2^n-1$ 总有一个能被大于 1 的奇数 n 整除.

Exercise 5

证明 11 个人中必定有 4 个人彼此相认或 3 个人彼此不相识.

Solution 5

在这 11 个人中任意挑选一个人 p，则剩下的 10 个人可以分成两个集合 F 和 S，其中 F 表示与 p 相识的人的集合；S 表示与 p 不相识的人的集合.

如果 S 中有 4 个及以上人，则这些人可能彼此相识或者至少有两个人彼此不相识. 第一种情况中有 4 个人彼此相识，命题成立；第二种情况中有两人彼此不相识，则这两个人也与 p 不相识，于是有 3 个人彼此不相识，命题成立.

如果在 S 中最多有 3 个人，则 F 中至少有 7 个人.

在 F 的 7 个人中任意挑选一个人 q，则剩下的 6 个人可以分成两个集合 G 和 T，其中 G 表示与 q 相识的人的集合；T 表示与 q 不相识的人的集合. 由鸽笼原理知，G 和 T 至少有一个有 3 个及以上人.

如果 T 中有 3 个及以上人，则这些人可能彼此相识或者至少有两个人彼此不相识. 第一种情况中有 3 个人彼此相识，同时也与 p 相识，于是有 4 个人彼此相识，命题成立；第二种情况中有两人彼此不相识，则这两个人也与 q 不相识，于是有 3 个人彼此不相识，命题成立.

如果 G 中有 3 个及以上人，则这些人可能彼此不相识或者至少有两个人彼此相识. 第一种情况中有 3 个人彼此不相识，命题成立；第二种情况中有两人彼此相识，则这两个人也与 q 和 p 相识，于是有 4 个人彼此相识，命题成立.

Exercise 6

证明 $R(3,3)<7$.

Solution 6

根据公式：

$$R(a,b) \le R(a-1,b) + R(a,b-1)$$
$$R(a,b) = R(b,a)$$
$$R(a,2) = a$$

可得：

$$R(3,3) \le R(2,3) + R(3,2) = 2R(3,2) = 2 \cdot 3 = 6$$
$$R(3,3) \le 6$$
$$R(3,3) < 7$$

3 母函数

Exercise 7

求方程：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 160 \\ 3 \le x_2 \le 10, x_3 \le 3 \end{cases}$$

正整数解的个数.

Solution 7

首先进行变量代换：

$$x_1' = x_1 - 1, x_2' = x_2 - 3, x_3' = x_3 - 1, x_4' = x_4 - 1$$

则方程变为：

$$\begin{cases} x_1' + 3x_2' + x_3' + x_4' = 148 \\ x_1' \ge 0, 0 \le x_2' \le 7, 0 \le x_3' \le 2, x_4' \ge 0 \end{cases}$$

其母函数为：

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)^2 (1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{21})(1 + x + x^2) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1 - x^{24}}{1 - x^3} \cdot \frac{1 - x^3}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^{24}}{(1-x)^3} \\ &= \left(1 - x^{24}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k}{2} x^k \end{aligned}$$

其中 x 系数是 148 的对应 $k=148$ 和 $k=148-24=124$ 两种取值：

$$\begin{aligned}a_{148} &= \binom{2+148}{2} - \binom{2+124}{2} \\ &= 3300\end{aligned}$$

故原方程的正整数解个数为 3300.

Exercise 8

求方程：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 160 \\ 2 \le x_3 \le 10, x_4 \le 3 \end{cases}$$

正整数解的个数.

Exercise 9

n 位序列每一位都由 $0,1,2$ 三个数字组成. 共有多少这样的 n 位序列包含奇数个 0?

Solution 9

设 a_n 是由 $0,1,2$ 组成的有奇数个 0 的序列.

则 a_n 的指数母函数为：

$$\begin{aligned}f_e(x) &= \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2 \\ &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \cdot e^{2x} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{3x} - e^x + 3\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

可知：

$$a_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$$

Exercise 10

求不包含 $3,5,7$，出现偶数次 $1,2$，至少出现一次 $4,8$ 的 r 位十进制数的个数.

Solution 10

设 a_r 是由 $0,1,2,4,6,8,9$ 组成的有偶数个 $1,2$，至少一个 $4,8$，长度为 r 的序列.

则 a_r 的指数母函数为：

$$
\begin{aligned}
f_e(x) &= \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3 \\
&= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\cdot(e^x-1)^2\cdot e^{3x} \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{7x}-2e^{6x}+3e^{5x}-4e^{4x}+3e^{3x}-e^{2x}+e^x\right) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(7^r-2\cdot 6^r+3\cdot 5^r-4\cdot 4^r+3\cdot 3^r-2\cdot 2^r+1\right)\frac{x^r}{r!}
\end{aligned}
$$

可知：

$$
a_r=\frac{1}{4}\left(7^r-2\cdot 6^r+3\cdot 5^r-4\cdot 4^r+3\cdot 3^r-2\cdot 2^r+1\right)
$$

首位取 0 的 r 位序列个数为 a_{r-1}，所以所求的 r 位十进制数个数为：

$$
a_r-a_{r-1}=\begin{cases}\frac{1}{4}\cdot\left(6\cdot 7^{r-1}-10\cdot 6^{r-1}+12\cdot 5^{r-1}-12\cdot 4^{r-1}+6\cdot 3^{r-1}-2\cdot 2^{r-1}\right) & ,r>0 \\ 0 & ,r=0\end{cases}
$$

4 递归关系

Exercise 11

求解递归关系：

$$
\begin{cases} a_n-2a_{n-1}-3a_{n-2}=2\cdot 3^n \\ a_0=1,a_1=2\end{cases}
$$

Solution 11

对应的齐次关系的特征方程为：

$$
x^2-2x-3=0
$$

齐次方程的根为：

$$
p_1=-1,p_2=3
$$

故通解为：

$$a_n^* = c_1 p_1^n + c_2 p_2^n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 3^n$$

又有 $f(n) = 3^n$，且 3 是递归关系式的特征根，故设特解为：

$$\overline{a}_n = An \cdot 3^n$$

带入原递归关系得：

$$An \cdot 3^n - 2A(n-1) \cdot 3^{n-1} - 3A(n-2) \cdot 3^{n-2} = 2 \cdot 3^n$$
$$A = \frac{3}{2}$$

故通解为：

$$a_n = a_n^* + \overline{a}_n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 3^n + \frac{3}{2} n \cdot 3^n$$

由初始条件得：

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 0 = 1 \\ -c_1 + 3c_2 + \frac{9}{2} = 2 \end{cases}$$

解得：

$$c_1 = \frac{11}{8}, c_2 = -\frac{3}{8}$$

故原递归关系的解为：

$$a_n = \frac{11}{8} \cdot (-1)^n + \left(\frac{3}{2} n - \frac{3}{8}\right) \cdot 3^n$$

Exercise 12

求解递归关系：

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2 \cdot 4^n \\ a_0 = 1, a_1 = 1 \end{cases}$$

Exercise 13

证明 $S_2(n, n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Solution 13

$S_2(n,n-1)$ 表示 n 个不同的球放入 $n-1$ 个相同的盒子且盒子不空的方式数.

等价于首先从 n 个球中取出 2 个球出来放入某个盒子中，有 $\binom{n}{2}$ 种取法，然后把剩下的 $n-2$ 个球放入 $n-2$ 个盒子中，每个盒子中放一个球，有 1 种放法.

由乘法原理得：

$$S_2(n,n-1) = \binom{n}{2} \cdot 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Exercise 14

设 m,n 均为正整数且 $m \le n$，证明 $m^n = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \cdot S_2(n,k) \cdot k!$.

Solution 14

$S_2(n,m)$ 表示 n 个不同的球放入 m 个相同的盒子，且盒子不空的方式数.

考虑盒子的全排列问题，根据乘法规则，$S_2(n,m) \cdot m!$ 表示 n 个不同的球放入 m 个不同的盒子，且盒子不空的方式数.

考虑盒子可为空，依次选择 1 个到 m 个箱子，求出对应的非空的放置方式数，再求和即可. 设每次从 m 个箱子中选择 k 个箱子作为非空箱，且 $1 \le k \le m$，则共有 $\binom{m}{k}$ 种选法. $\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \cdot S_2(n,k) \cdot k!$ 表示 n 个不同的球放入 m 个不同的盒子，且盒子可为空的方式数.

n 个不同的球放入 m 个不同的盒子，且盒子可为空的方式数也可以这样计算：每个球可以放入 m 个盒子的任意一个之中，共有 m 种方式，根据乘法规则，n 个球共有 m^n 种放法.

综上，$m^n = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \cdot S_2(n,k) \cdot k!$.

Exercise 15

设 a_n 为出现奇数个 2 的 n 位十进制数的个数，建立 a_n 的递归关系（不用求解）.

Solution 15

求 a_n 递推公式可根据添加的末位数字分为以下两种情况：

当最后一位上添加非 2 的数字时，前 $n-1$ 位需要满足出现奇数个 2，所以共有 $9a_{n-1}$ 个满足要求的数字。

当最后一位上添加 2 时，前 $n-1$ 位需要满足出现偶数个 2，可通过 $n-1$ 位所有的十进制数减去存在偶数个 2 的十进制数得到，所以共有 $9\cdot 10^{n-2}-a_{n-1}$ 个满足要求的数字。

根据加法规则，$a_n=9a_{n-1}+\left(9\cdot 10^{n-2}-a_{n-1}\right)=8a_{n-1}+9\cdot 10^{n-2}$，故 a_n 的递推关系式为：

$$\begin{cases} a_n = 8a_{n-1}+9\cdot 10^{n-2} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

5 放球问题总结

Exercise 16

求以下条件组合下将 n 个球放入 m 个盒子中的放法.

- 球：无区别或有区别
- 盒子：无区别或有区别
- 空盒子：允许或不允许

Solution 16

0b000. 球无区别，盒子无区别，允许空盒子

正整数 n 拆分成最多不超过 m 个正整数的和，等于正整数 n 拆分成最大数不超过 m 的方式数，共有 $P_m(n)$ 种放法.

0b001. 球无区别，盒子无区别，不允许空盒子

在允许空盒子基础上先在每个盒子中放一个球，等价于 $n-m$ 个球放入 m 个盒子且允许空盒子放法，共有 $P_m(n-m)$ 种放法.

0b010. 球无区别，盒子有区别，允许空盒子

对应重集 $B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\cdots,\infty\cdot b_m\}$ 的 n-组合问题，共有 $F(m,n)=\binom{n+m-1}{n}$ 种放法.

把不允许空盒子看作是先在每个盒子中放了一个球，等价于 $n+m$ 个球放入 m 个盒子且不允许空盒子放法，共有 $\binom{n+m-1}{m-1}$ 种放法.

0b011. 球无区别，盒子有区别，不允许空盒子

使用隔板法，在 n 个球序列的 $n-1$ 个缝隙中插入 $m-1$ 个隔板以将序列分为 m 份，共有 $\binom{n-1}{m-1}$ 种放法.

在允许空盒子的基础上先在每个盒子中放一个球，对应重集 $B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\cdots,\infty\cdot b_m\}$ 的 $(n-m)$-组合问题，共有 $F(m,n-m)=\binom{n-1}{n-m}$ 种放法.

0b100. 球有区别，盒子无区别，允许空盒子

求 n 个元素的集合划分成不超过 m 个不相交的非空子集的方式数目，对应于第二类 Stirling 数的求和，共有 $\sum_{i=1}^{m} S_2(n,i)$ 种放法.

0b101. 球有区别，盒子无区别，不允许空盒子

求 n 个元素的集合划分成 m 个不相交的非空子集的方式数目，对应于第二类 Stirling 数，共有 $S_2(n,m)$ 种放法.

0b110. 球有区别，盒子有区别，允许空盒子

每个球在放入盒子时都有 m 种选择，n 个球共有 m^n 种放法.

0b111. 球有区别，盒子有区别，不允许空盒子

在盒子无区别的基础上再考虑盒子的全排列问题，共有 $m!S_2(n,m)$ 种放法.