

组合数学例题讲解

Mobyw

版本:1.0

更新:2022 年 11 月 28 日

本文为组合数学各章节的例题,由于部分答案为个人编撰,难免会出现错误,请保证使用 [GitHub仓库](#) 所发布的最新版本. 如遇问题可在 [GitHub](#) 上发布 Issue.

1 排列、组合及二项式定理

Exercise 1

奔赴抗疫,全国 4 个片区共有 68 个医疗队,其中西南片区有 10 个,中部片区有 18 个,北方片区有 18 个,东部片区有 22 个. 假定同一片区的各个医疗队不加以区别,现在要从中选取 27 个医疗队入围. 考虑到不同片区的特殊情况,要求西南片区至少入围 4 个医疗队,北方片区至少入围 7 个医疗队,其他片区至少各入围 2 个医疗队,问理论上有多少种不同的选取方案?

Solution 1

Solution.

2 容斥原理

Exercise 2

求方程:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 160 \\ 2 \leq x_3 \leq 10, x_4 \leq 3 \end{cases}$$

正整数解的个数.

Solution 2

Solution.

Exercise 3

求方程:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 160 \\ 3 \leq x_2 \leq 10, x_3 \leq 3 \end{cases}$$

正整数解的个数.

Solution 3

Solution.

3 鸽笼原理与 Ramsey 定理

Exercise 4

证明 11 个人中必定有 4 个人彼此相认或 3 个人彼此不相识.

Solution 4

Solution.

Exercise 5

证明 $R(3, 3) < 7$.

Solution 5

Solution.

Exercise 6

证明 $S_2(n, n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Solution 6

Solution.

4 母函数

Exercise 7

正偶数 k_1, k_2, \dots, k_n 满足 $k_i \neq k_j, i \neq j$. 写出求将正整数 r 分解为 k_1, k_2, \dots, k_n 的和的方法数的算法, 要求 k_i 最多可被选中三次.

Solution 7

Solution.

Exercise 8

求不包含 3, 5, 7, 出现偶数次 1, 2, 至少出现两次 4, 8 的 r 位十进制数的个数.

Solution 8

Solution.

5 递归关系

Exercise 9

求解递归关系：

$$\begin{cases} a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 2 \cdot 3^n \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

Solution 9

Solution.

Exercise 10

求解递归关系：

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2 \cdot 4^n \\ a_0 = 1, a_1 = 1 \end{cases}$$

Solution 10

Solution.