# 组合数学笔记

Mobyw
Created by ElegantLaTeX

版本:1.0
更新:2022 年 11 月 28 日

# 1 第一章排列、组合及二项式定理

## 1.1 基础

加法规则、乘法规则

排列、组合

集合: $A = \{a, b, c, d\}$ .

重集: $B = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot b_2, \cdots, k_n \cdot b_n\}$ .

## 1.2 排列问题

### 1.2.1 线排列

将一些元素排成一条直线.

$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ .

$r$ 是整数,从这 $n$ 个不同的元素中取出 $r$ 个按照一定次序排列起来 $(r \leq n)$ ,称为集合 $A$ 的 $r$-排列,记为 $P(n, r)$ .

$A$ 的 $r$-排列为 $A$ 的 $r$-有序子集.

**定理1.1** 对于正整数 $n, r(r \leq n)$ , 有 $P(n, r) = n!/(n-r)!$ .

推论*1*: 当 $2 \leq r \leq n$ 时,有 $P(n, r) = nP(n-1, r-1)$ .

公式证明直接展开即可，组合分析证明：首先第一个位置上可以从 $n$ 个元素中选择一个放置，然后剩下的在 $n-1$ 个元素中再挑选 $r-1$ 个元素.

推论2：当 $2 \leq r \leq n$ 时，有 $P(n,r) = rP(n-1,r-1) + P(n-1,r)$ .

公式证明可以利用 *推论1* 得到，组合分析证明大致思路：将 $r$ 分为两类，一类是必须要包含其中一个元素的情况，另一种情况是一定不包含这个元素的情况. 第一种情况下我们首先在 $A\backslash\{a_1\}$ 的情况下选取 $r-1$ 个元素进行排列，对于上述的所有排列都可以将 $a_1$ 放入从而得到所有一定包含 $a_1$ 的情况，也就是 $r \cdot P(n-1,r-1)$ . 第二种情况就是一定不包含 $a_1$ 的情况，直接在 $n-1$ 个元素中进行 $r$-排列即可：$P(n-1,r)$ .

**例题**：9 个字母单词 FRANGMENTS 进行排列，要求字母 A 总是紧跟在 R 的右边，则共有多少排法？

一种简单的思路是将 A,R 看作一个元素，则可以得到：$P(8,8)$ .

另外一种思路：假设不考虑 A,R 的约束，可以得到 $P(9,9)$ ，而考虑这个约束，需要去掉 $8 * P(8,8)$ .

### 1.2.2 圆排列

一些元素排成一个圆圈的排列

从集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的 $n$ 个元素中取出 $r$ 个元素按照某一种顺序排成一个圆圈，称这样的排列为圆排列（循环排列）.

注意：将一个圆排列旋转得到的另一个圆排列视为相同的圆排列.

圆排列的个数为：$P(n,r)/r = n!/(r(n-r)!)$

**例题**：8 个人围成圆桌就餐，一共有多少种就坐方式？如果有两个人不愿意坐在一起又存在多少种就坐方式？

第一个问题是一个简单的圆排列：$P(8,8)/8$ .

第二个问题两种思路：

第一种先将无关的 6 个人和另外 2 个人中的一个人拿出来，这 7 个人可以无约束的直接进行圆排列 $P(7,7)/7$ ，然后我们就需要考虑，还有一个人，他在坐的时候选择的空间要去掉其中一个人的左右两边的位置，因此对于那个人来说每一次都只有5个位置供他选择，所以写为：$P(7,7)/7 * 5$ .

第二种思路为先不考虑约束，然后去掉不满足约束的情况：去掉不满足约束的情况可以考虑为先将那两个人绑定（2 种排列），去掉那部分情况即可：$P(8,8)/8 - 2 * P(7,7)/7$

.

**例题：** 四男四女圆桌交替就坐方式？

思路：首先明确是一个圆排列问题，其次考虑先将男生安排了，也就是 $P(4,4)/4$ ，然后如何将女生插入到其他位置上，第一个女生插入圆桌位置是有4个选择，第二个则有3个选择依次类推，最终得到：$P(4,4)/4*4*3*2*1$ .

### 1.2.3 重排列

前面的线排列和圆排列都是在一个集合 $A$ 中选出 $r$ 个元素进行排列，在每一种排列中每一个元素至多出现一次. 现在考虑元素允许出现重复的情况，即考虑重集的情况下：$B=\{k_1\cdot a_1,k_2\cdot a_2,\cdots k_n\cdot a_n\}$ 中选择 $r$ 个元素进行排列.

重集 $B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\cdots,\infty\cdot b_n\}$ 的 $r$ 排列的个数为 $n^r$ .

**例题：** 由 1,2,3,4,5,6 这六个数字能够组成多少个五位数？又能组成多少个大于 34500 的五位数？

简单思考组成多少个五位数的问题：$6^5$

第二个问题带约束的情况：第一种正向的思路：最高位要大于3，选法只有3种，其他位次随便选：$3*6^4$ ；最高位等于3，次高位大于4的情况：$2*6^3$ ；最高位等于3，次高位等于4，次次高位大于5的情况：$1*6^2$ ；最后一种情况，高位的前三位分别为3，4，5，之后的两位随便选 $6^2$ . 然后根据加法规则求和. 第二种思路，使用减的方法，无约束条件下的总数为 $6^5$ ，不满足约束的情况有：最高位小于3；最高位等于3，次高位小于4；最高位等于3，次高位等于4，次次高位小于5的情况. 同样可以得到结果.

**定理：** 重集 $B=\{n_1\cdot b_1,n_2\cdot b_2,\cdots,n_k\cdot b_k\}$ 的全排列个数为：$n!/(n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!)$ .

*Proof.* 首先将重集中的 $n_i$ 个 $b_i$ 分别赋予上标 $1,2,\cdots,n_i$ ，即 $b_i^1,b_i^2,\cdots,b_i^{n_i}(i=1,2,\cdots,k)$ . 将重集 $B$ 改写为集合 $A$ ，其中元素个数为 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$ . 显然集合 $A$ 的全排列为 $n!$ . 而对于任意一个 $b_i$ ，其内部又会有 $n_i!$ 种排列，类似地可以得到所有的情况. 证毕.

**例题：** 使用字母 $A,B,C$ 组成五个字母的符号，要求在每一个符号中，$A$ 至多出现 2 次，$B$ 至多出现 1 次，$C$ 至多出现 3 次，求此类符号的个数.

分析这个问题也是一个重排列问题，思考首先在符号中可能出现的情况，$\{2\cdot A,1\cdot B,2\cdot C\}$ ；$\{2\cdot A,0\cdot B,3\cdot C\}$ ；$\{1\cdot A,1\cdot B,3\cdot C\}$ . 可能出现的情况只有这三种，分别计算之后使用加法规则即可.

## 1.3 组合

**定义**：假设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是具有 $n$ 个元素的集合，$r$ 是一个非负整数，从这 $n$ 个不同的元素中取 $r$ 个不考虑次序组合起来 $r\leq n$，称为集合 $A$ 的 $r$ 组合，记为 $C(n,r)$.

$A$ 的 $r$-组合是 $A$ 的 $r$-无序子集.

**定理**：对于 $r\leq n$ 有 $C(n,r)=P(n,r)/r!=n!/(n-r)!r!$.

一个 $r$-组合是 $r!$ 个 $r$-排列；$C(n,r)$ 个 $r$-组合就是 $r!C(n,r)$ 个 $r$-排序.

**推论1**：$C(n,r)=C(n,n-r)$.

**推论2**：$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$. 这也是 Pascal 公式.

对比排列问题下的公式 $P(n,r)=P(n-1,r)+r\cdot P(n-1,r-1)$

公式推导的方式可以进行直接推导，不多赘述；思考组合分析的方法，这个证明的方法与在证明排列的推论2的情况是类似的，考虑固定一个集合A中的元素，情况变为 $r$ 个元素中包含 $a_1$，另一种情况一定不包含 $a_1$.

**推论3**：$C(n,r)=C(n-1,r-1)+C(n-2,r-1)+\cdots+C(r-1,r-1)$.

推论3可以通过反复使用推论2得到.

**例题**：请问数字 510510 可以被多少不同的奇数整除？

首先 $510510=2*3*5*7*11*13*17$，除 2 之外共计有 6 个奇数，因此需要整除 510510 一定是除 2 之外的奇素数的积，且每一个积中一个奇数至多出现一次. 那么我们可以得到：$C(6,1)+C(6,2)+C(6,3)+C(6,4)+C(6,5)+C(6,6)+1=2^6$.

**例题**：从 1,2,...,1000 中选出三个整数，有多少种选法使得所选的三个整数的和能够被 3 整除？

因为是找的三个数字的和能够被 3 整除，因此要通过考虑余数的情况来考虑存在的所有可能的情况. 因此将所有的数分为三类，$A=\{1,4,7,\cdots,1000\}$，共有 334 个元素；$B=\{2,5,8,\cdots,998\}$，共有 333 个元素；$C=\{3,6,9,\cdots,999\}$，共有 333 个元素. 这三类分别是余数为 1,2,0 的数字的分类. 要使得找三个数能够被 3 整除那么可能的情况就是

（1）三个数来自于同一个集合；（2）三个数分别来自三个集合.

第一种选法：$C(334,3)+2\cdot C(333,3)$；第二种选法：$C(334,1)\cdot C(333,1)\cdot C(333,1)$，然后根据加法公式得到结果.

### 1.3.1 重复组合问题

从重集 $B=\{k_1\cdot b_1,k_2\cdot b_2,\cdots,k_n\cdot b_n\}$ 中选取 $r$ 个元素不考虑次序组合起来，称为从B中取出 $r$ 个元素的重复组合. 我们记为 $F(n,r)$ .

**定理**：$B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\cdots,\infty\cdot b_n\}$ 的r-组合数为 $F(n,r)=C(n+r-1,r)$ .

*Proof.* 假设 $n$ 个元素 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 和自然数 $1,2,\cdots,n$ 之间是1-1对应的. 于是考虑的任何组合都可以看为一个r个数的组合 $\{c_1,c_2,\cdots,c_r\}$ . 我们可以认为各个 $c_i$ 是按照大小次序排列的，相同的 $c_i$ 连续地排在一起：$c_1\le\cdots\le c_r$ 排列. 令 $d_i=c_i+i-1,(i=1,2,\cdots,r)$ ，即：$d_1=c_1,d_2=c_2+1,\cdots,d_r=c_r+r-1$ . 而我们又知道 $c_i$ 可以取得的最大值为 $n$ ，因此 $d_i$ 可以取得的最大值为 $n+r-1$ ，这样就可以得到集合 $\{1,2,\cdots,n+r-1\}$ 的一个r-组合：$d_1d_2\cdots d_r,(d_1<d_2<\cdots<d_r)$ ，显然我们会发现对于一种 $\{c_1,c_2,\cdots,c_r\}$ 的取法便对应一种 $\{d_1,d_2,\cdots,d_r\}$ 的取法且一定是1-1对应的. 这样看来我们就会发现，对于允许重复地从 $n$ 个不同元素中取 $r$ 个元素的组合数和不允许重复地从 $(n+r-1)$ 个不同元素中取 $r$ 个元素的组合数是相同的.

$$F(n,r)=C(n+r-1,r)$$

**例题**：某一个餐厅有7种不同的菜，为了招待朋友一个顾客需要买14个菜，请问共有多少种买法？

简单分析这就是一个重复组合问题，$F(7,14)=C(20,14)$ 种买菜的方法. 注意不要想象为排列问题，对于买菜这个事情是没有顺序的说法的.

**例题**：求 $n$ 个无区别的球放入 $r$ 个有标志的盒子中 $(n\ge r)$ 而无一空盒的放法.

首先考虑不能为空的问题，因此每个盒子中必须首先放入一个球，下面我们考虑还有剩余的 $n-r$ 个球应该如何放置的问题. 这时候需要进行分析，因为我们知道因为每一个盒子中再去放入多少个球是没有限制的，因此我们就应该考虑为盒子的集合为重集，球数量为取的元素的数量，也就是 $F(r,n-r)$ .

**例题**：在由数字0,1,2,...,9组成的 $r$ 位整数所组成的集合中，如果将一个整数重新排列得到另一个整数，则称这两个整数是等价的. 请问：

(1) 有多少个不等价的整数.

(2) 如果数字0,9最多只能出现一次，那么有多少个不等价的整数.

首先第一个问题很简单，$F(10,r)$ .

第二个问题从两个角度来思考：首先是考虑0和9都不出现的情况，因此重集变为 $\{\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\cdots,\infty\cdot 8\}$ ，就是8个数的重集的重复组合问题，结果可以写为：$F(8,r)$ ；第二种情况是0出现一次或者9出现一次的情况，这两种情况可以看作是等价的，先在9个数的重

集中重复组合 $r-1$ 个值，然后将0或者9添加进去，结果都表示为：$F(9,r-1)$ . 最后还有一种情况就是0和9均出现了一次，也就是 $F(8,r-2)$ ，然后将0，9添加进去，最终使用加法规则可以得到结果为：$F(8,r)+2\cdot F(9,r-1)+F(8,r-2)$ . 另外还存在一种思路是，无约束的条件下减去不满足条件的情况，也就是：$F(10,r)$ ，不满足条件的情况分为0大于2次，9大于2次，但是这种情况下我们需要加上一部分，即两个都大于等于2的情况，因为这个情况被剔除了两次，因此我们需要加回来一次，从而最后我们可以计算得到结果为：$F(10,r)-F(10,r-2)-F(10,r-2)+F(10,r-4)$ .

**例题**：求方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 的非负整数解的个数. 其中 $r,n$ 均为正整数.

这个问题相当于是一个重集的r-组合问题，考虑假设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为 $n$ 个不同的元素，那么重集 $B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\cdots,\infty\cdot b_n\}$ 的任何一个r-组合都具有 $\{x_1\cdot b_1,x_2\cdot b_2,\cdots,\cdots,x_n\cdot b_n\}$ ，其中 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是非负整数且满足方程：$x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ . 所以对于这个问题来说，满足上述方程的非负整数解就相当于在这个重集 $B$ 中进行了一次r-组合的过程，结果也就是 $F(n,r)$ .

## 1.4 二项式定理

**定理**：二项式定理：当 $n$ 是一个正整数时，对于任意 $x$ 和 $y$ 都有：

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

*Proof.* 组合分析法：对于这个问题，$(x+y)^n$ 表示n个 $(x+y)$ 的连乘，相当于在 $n$ 个因子中选择 $k$ 个，这 $k$ 个只选择 $x$ 变量，同时还有 $n-k$ 个只选择 $y$ 变量，这样构成了 $x^k y^{n-k}$ . 此时还要乘上构成这个组合的选法为 $\binom{n}{k}$ . 第二种证明方法是数学归纳法这里不做详述.

二项式展开式有非常多的变种，下面给出一些：

**推论1**：当 $n$ 为正整数时，对于任意的 $x,y$ 都会有：

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k y^{n-k}$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k} y^{k}$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^{n-k} y^{k}$$

**推论2**：在实际情况下常会出现 $y=1$ ，因此当 $n$ 为正整数时，对于所有的 $x$ 都会有：

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k$$

**推论3：** 当 $x, y = 1$ 的情况下：

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

**推论4：** 当 $x = -1, y = 1$ 的情况下：

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

牛顿在1676年推广了二项式定理，得到了 $(x+y)^\alpha$ 的展开式，其中 $\alpha$ 为任意的实数. 首先引入记号 $\binom{\alpha}{k}$ .

**定义：** 对于任意的实数 $\alpha$ 和整数 $k$ ，定义：

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

为广义的**二项式系数**.

**定理：** 假设 $\alpha$ 是任意一个实数，则对于满足 $|\frac{x}{y}| < 1$ 的所有 $x$ 和 $y$ 有：

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k}$$

上面的式子也称为牛顿二项式定理. 同样的基于牛顿二项式定理，我们再引入一些推论：

**推论1：** 对于 $|x| < 1$ 的任何 $x$ ，有：

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

**推论2：** 若令 $\alpha = -n$（ $n$ 为正整数），对于 $|x| < 1$ 的任意 $x$ 有：

$$(1+x)^{-n} = \frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k$$

**推论3：** 当 $|x| < 1$ 时，同时令 $n = 1$ ，我们可以得到：

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

**推论4：**当 $|x| < 1$ 时，同时令 $x = -x$，我们可以得到：

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

**推论5：**使用 $-rx$ 替代 $x$（$r$ 为非零常数），当 $|rx| < 1$ 时有：

$$(1-rx)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} r^k x^k$$

**推论6：**令 $\alpha = 1/2$，当 $|x| < 1$ 时有：

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}k} \binom{2k-2}{k-1} x^k$$

## 1.5 组合恒等式

**恒等式1：**对于正整数 $n$ 和 $k$，有：

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

*Proof.* 当 $k > n$ 时，$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ .

当 $1 \le k \le n$ 时，有：

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \\ &= \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} \\ &= \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

**恒等式2：**对于正整数 $n$，有：

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = 2^{n-1}n$$

*Proof.*

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\
&= 2^{n-1}n
\end{aligned}
$$

*Another Proof.* 使用微分法：

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

两边同时对 $x$ 做微分得到：

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

令 $x = 1$ 得：

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

**恒等式3：**对于正整数 $n$ ，有：

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k\binom{n}{k} = 0$$

*Proof.*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

两边同时对 $x$ 做微分可以得到：

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

在上式中，令 $x = -1$ ，则有：

$$n \cdot 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k \cdot (-1)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(-1)^k$$

**恒等式4：**对于正整数 $n$ ，有：



$$\sum^{n} k^2\binom{n}{k} = 2^{n-2}n(n+1)$$

而右边式子中 $x^p$ 的项为：$\binom{m+n}{p}x^p$ . 而前面的式子中所有的能够得到 $x^p$ 的项的式子为：$\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}x^p$ .

从而最终我们可以根据系数相等的原则：

$$\binom{m+n}{p}=\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$$

*Another Proof.* 第二种方法使用组合分析法：

假设集合 $A$ 有 $m$ 个元素，$B$ 有 $n$ 个元素，定义 $A\cup B$ 为集合 $C$ ，我们假设 $A\cap B=$ ，那么集合 $C$ 中就应该有 $m+n$ 个元素，从这 $(m+n)$ 个元素中寻找一个p-组合，我们可以得到 $\binom{m+n}{p}$ . 换一种思路，这个问题就可以变为，我从 $A$ 中取 $k$ 个元素，再从 $B$ 中取 $p-k$ 个元素的问题，根据乘法规则可以得到：$\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$ ，同时这种组合的方式根据加法规则，一共有：$\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$ . 同样可以证明恒等式7.

**恒等式8：**对于正整数 $m,n$ 有：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{k}=\binom{m+n}{m}$$

**恒等式9：**对于任意的正整数 $n$ 有：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

**恒等式10：**对于非负整数 $p,q,n$ , 有：

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}=\binom{n}{p}\binom{n}{q}$$

**恒等式11：**对于非负整数 $p,q,n$ , 有：

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+p+q-k}{p+q}=\binom{n+p}{p}\binom{n+q}{q}$$

**恒等式12：**对于非负整数 $n$ 和 $k$ , 有：

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

可以使用数学归纳法证明.

**恒等式13：**对于所有实数 $\alpha$ 和非负整数 $k$ , 有：

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{\alpha+j}{j}=\binom{\alpha+k+1}{k}$$

使用推广到广义二项式系数的Pascal公式，反复替换可以得到这个恒等式，证明过程略.

### 1.5.1 证明组合恒等式的常见方法

1. 数学归纳法 2. 利用二项式系数公式，特别是Pascal公式 3. 比较级数展开式中的系数（包括二项式定理和母函数法）4. 积分微分法 5. 组合分析法

# 2 离散时间信号与系统

## 2.1 离散时间信号——序列

### 2.1.1 离散时间信号——序列