1. 二项式定理推论

① $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k$

当 $x=1$ 时 $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

当 $x=-1$ 时 $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

② $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} = (1-x+x^2-x^3+\cdots)$

③ $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = (1+x+x^2+x^3+\cdots)$ $(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}\cdots) = \frac{1}{1-x^k}$

等比数列求和公式: $\frac{a_1-a_nq}{1-q}$

④ $\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^k$$

⑤ 广义二项式定理: 当 $|-rz|<1$ 时有 $(1-rz)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} r^k z^k$

⑥ $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

2. 普通母函数解决组合问题

给定一个无穷序列 $(a_0,a_1,\cdots a_n)$ 称 $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ 为序列 $(a_0,a_1\cdots a_n,\cdots)$ 的普通母函数

求重集 $B=\{\infty\cdot a, 3\cdot b, 5\cdot c, 7\cdot d,\}$ 的 10–组合数.

解: 设重集 B 的 n 组合数为 a_n 则 $\{a_n\}$ 的普通母函数为

$$f(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+\cdots x^5)(1+x+\cdots x^7)$$

$$= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x}\cdot\frac{1-x^6}{1-x}\cdot\frac{1-x^8}{1-x}$$

$$= (1-x^4-x^6-x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14}-x^{18})\cdot\frac{1}{(1-x)^4}$$

$$= (1-x^4-x^6-x^8+x^{0}+x^{2}+x^{14}-x^{18})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k}{k}x^k$$

$$a_{10} = \binom{3+10}{10} - \binom{3+6}{6} - \binom{3+4}{4} - \binom{3+2}{2} + 1 = 158$$

例 证明 从n个不同物体中允许重复选取r个物体的方式数量$F(n,r)$

证明: 设a_k为所求的k组合数 则$\{a_k\}$的母函数为

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots)^n$$
$$=\frac{1}{1-x}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

可得x^r的系数为 $a_r=\binom{n+r-1}{r}=F(n,r)$

例 求从n个不同物体中允许重复选取，但每个物体出现奇数次的方式

解: 设a_r为所求的r组合数 则$\{a_r\}$的母函数是

$$f(x)=(x+x^3+x^5+\cdots)^n$$
$$=x^n(1+x^2+x^4+\cdots)$$
$$=x^n\left(\frac{1}{2}(1+x+x^2+\cdots+1-x+x^2)\right)^2$$
$$=x^n\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)\right)=\frac{x^n}{(1-x^2)^n}$$

由广义二项式定理可得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^{2k+n}$$

令 $k=\frac{r-n}{2}$ 可得

$$f(x)=\sum_{r=n}^{\infty}\binom{n+\frac{r-n}{2}-1}{\frac{r-n}{2}}x^r$$

$$a_r=\binom{n+\frac{r-n}{2}-1}{\frac{r-n}{2}}=F\left(n,\frac{r-n}{2}\right)$$

4.8 求从n个不同的物体中允许重复的取r个物体，但每个物体至少出现 3 次的方式数.

解: 设a_r为所求的r组合数则$\{a_r\}$的母函数为

$$f(x)=(x^3+x^4+x^5+\cdots)^n$$
$$=x^{3n}(1+x+x^2+\cdots)^n$$
$$=\frac{x^{3n}}{(1-x)^n}=x^{3n}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^{3n+k}$$

令 $k=r-3n$ 可得

$$f(x)=\sum_{r=3n}^{\infty}\binom{n+(r-3n)-1}{r-3n}x^r$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F(n, r-3n)\, x^r$$

$$a_r = F(n, r-3n)$$

4.10 有两颗骰子，每个骰子六个面上刻有 1，2，3，4，5，6 个点．问掷骰子后，点数之和为 r，两颗骰子的点数有多少种搭配方式？

解：$f(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^6)^2$

x^r的系数 a_r 即为搭配方式

4.11 设有重量分别为 1 克、2 克、3 克、5 克和 7 克的砝码（砝码的数量不限）去称重量为 r 克的物体的方式数为 a_r，求序列$(a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots)$的普通母函数．

解：该问题可转换为求

$B=\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \infty\cdot 3, \infty\cdot 5, \infty 7\}$ 的 r组合数

$$f(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)(1+x^7+x^{14}+\cdots)$$

重量体现在指数上

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)}$$

3. 指数母函数解决排列问题

给定一个无穷序列 $(a_0, a_1, \cdots)$ 那么

$$f_e(x) = a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + \cdots a_n\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{x^n}{n!}$$

4.15 设 a_r 表示重集 $B=\{4\cdot A, 1\cdot B, 2\cdot C, 1\cdot D, 2\cdot E,\}$ 的 r–排列的个数，求序列$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots)$的指数母函数．

解：$f_e(x) = \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)^2$

4.16 求在重集 $B=\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \infty\cdot 3\}$ 中，0 出现偶数次的长为 r 的字的个数．

解：$f_e(x) = \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3$

x^r的系数 a_r 即为所求的排列数

4.14 求由数字 2，3，4，5，6，7 组成的 r 位数中，3 和 5 都出现偶数次，2 和 4 至少出现一次的 r 位数的个数．

解：$f_e(x) = \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^2$

$$= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\cdot(e^x-1)^2\, e^{2x}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}+2)(e^{2x}-2e^{x}+1)\cdot e^{2x}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{4x}-2e^{3x}+e^{2x}+1-2e^{-x}+e^{-2x}+2e^{2x}-4e^{x}+2)e^{2x}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{6x}-2e^{5x}+e^{4x}+e^{2x}-2e^{x}+1+2e^{4x}-4e^{3x}+2e^{2x})$$

$$= \frac{1}{4}(e^{6x}-2e^{5x}+3e^{4x}-4e^{3x}+3e^{2x}-2e^{x}+1)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(6^r-2\cdot5^r+3\cdot4^r-4\cdot3^r+3\cdot2^r-2)\frac{x^r}{r!}+1$$

可得 $a_k=\begin{cases}0, & k=0\\ \frac{1}{4}(6^r-2\cdot5^r+3\cdot4^r-4\cdot3^r+3\cdot2^r-2), & k>0\end{cases}$

求不包含 3,5,7,出现偶数次 1,2,至少出现一次 4,8 的 r 位十进制数的个数.

解: 设 a_r 为所求 r 排列数

$\{a_r\}$ 的指数母函数为

$$f_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3$$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2(e^x-1)^2\,e^{3x}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{7x}-2e^{6x}+3e^{5x}-4e^{4x}+3e^{3x}-e^{2x}+e^{x})$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{4}(7^r-2\cdot6^r+3\cdot5^r-4\cdot4^r+3\cdot3^r-2^r+1)\frac{x^r}{r!}$$

可得 $a_r=\frac{1}{4}(7^r-2\cdot6^r+3\cdot5^r-4\cdot4^r+3\cdot3^r-2^r+1)$

首位取0的 r 位序列个数为 a_{r-1} 故所求 r 位十进制数为

$$a_r-a_{r-1}=\begin{cases}\frac{1}{4}(6\cdot7^{r-1}-10\cdot6^{r-1}+12\cdot5^{r-1}-12\cdot4^{r-1}+6\cdot3^{r-1}-2\cdot2^{r-1}, & r>0\\ 0, & r=0\end{cases}$$

4. 用母函数证明组合恒等式