

组合数学例题讲解

Mobyw

版本:1.0

更新:2022 年 12 月 2 日

本文为组合数学各章节的例题,由于部分答案为个人编撰,难免会出现错误,请保证使用 [GitHub仓库](#) 所发布的最新版本. 如遇问题可在 [GitHub](#) 上发布 Issue.

1 容斥原理

Exercise 1

求方程:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13 \\ 3 \leq x_1 \leq 6, 2 \leq x_2 \leq 6, x_3 \leq 2 \end{cases}$$

正整数解的个数.

Solution 1

首先进行变量代换:

$$x'_1 = x_1 - 3, x'_2 = x_2 - 2, x'_3 = x_3 - 1, x'_4 = x_4 - 1$$

则方程变为:

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 6 \\ 0 \leq x'_1 \leq 3, 0 \leq x'_2 \leq 4, 0 \leq x'_3 \leq 1, x'_4 \geq 0 \end{cases}$$

等价于求集合 S_0 的 6-组合数,其中 S_0 为:

$$S_0 = \{3 \cdot x'_1, 4 \cdot x'_2, 1 \cdot x'_3, \infty \cdot x'_4\}$$

用 A_1 表示 S 中至少含有 4 个 x'_1 ; A_2 表示 S 中至少含有 5 个 x'_2 ; A_3 表示 S 中至少含有 2 个 x'_3 . 其中 S 为:

$$S = \{\infty \cdot x'_1, \infty \cdot x'_2, \infty \cdot x'_3, \infty \cdot x'_4\}$$

根据容斥原理, 所求的 6-组合数为:

$$\begin{aligned} & |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| \\ &= |S| - \sum_{i=1}^3 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= F(4, 6) - (F(4, 2) + F(4, 1) + F(4, 4)) + F(4, 0) - 0 \\ &= 84 - (10 + 4 + 35) + 1 \\ &= 36 \end{aligned}$$

故原方程的正整数解个数为 36.

Exercise 2

奔赴抗疫, 全国 4 个片区共有 68 个医疗队, 其中西南片区有 10 个, 中部片区有 18 个, 北方片区有 18 个, 东部片区有 22 个. 假定同一片区的各个医疗队不加以区别, 现在要从中选取 27 个医疗队入围. 考虑到不同片区的特殊情况, 要求西南片区至少入围 4 个医疗队, 北方片区至少入围 7 个医疗队, 其他片区至少各入围 2 个医疗队, 问理论上有多少种不同的选取方案?

Solution 2

用 x_1, x_2, x_3, x_4 表示四个片区的选取数目, 则有:






$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ 4 \leq x_1 \leq 10, 2 \leq x_2 \leq 18, 7 \leq x_3 \leq 18, 2 \leq x_4 \leq 22 \end{cases}$$

Exercise 3

有数学、物理、化学和英语 4 门课程. 现从星期一到星期四安排这四门课程, 每门课程安排一天, 每天安排一门课程. 要求数学不能安排在星期一和星期二, 物理不能安排在星期三, 化学不能安排在星期四, 英语不能安排在星期二. 问有多少种不同的安排方案?

Solution 3

禁区棋盘:

	1	2	3	4
M				
P				
C				
E				

禁区棋盘计算:

$$\begin{aligned}
 R\left(\begin{array}{c} \square * \\ \square \end{array}\right) &= xR\left(\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}\right) \\
 &= xR\left(\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}\right) + R^2(\square)R\left(\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}\right) \\
 &= x(1 + 2x + x^2) + (1 + x)^2(1 + 2x + x^2) \\
 &= 1 + 5x + 8x^2 + 5x^3 + x^4
 \end{aligned}$$

安排方案数:

$$N = 4! - 5 \cdot 3! + 8 \cdot 2! - 5 + 1 = 6$$

2 鸽笼原理与 Ramsey 定理

Exercise 4

设 n 是大于 1 的奇数. 证明在 $2^1 - 1, 2^2 - 1, \dots, 2^n - 1$ 中总有一个能被 n 整除.

Solution 4

假设集合 $S = \{2^1 - 1, 2^2 - 1, \dots, 2^n - 1\}$ 中不存在能被 n 整除的数, 根据鸽笼原理, 这 n 个数中至少有两个数除以 n 的余数是相同的.

将两个除以 n 余数相同的数表示为 $2^x - 1 = a \cdot n + c, 2^y - 1 = b \cdot n + c$ 且满足 $1 \leq x < y \leq n, b > a$, 则有:

$$(2^y - 1) - (2^x - 1) = (b \cdot n + c) - (a \cdot n + c)$$

$$2^y - 2^x = (b - a) \cdot n$$

$$2^x(2^{y-x} - 1) = (b - a) \cdot n$$

上式中 $2^x(2^{y-x} - 1)$ 可被大于 1 的奇数 n 整除, 由于 2^x 是偶数, 故 $2^{y-x} - 1$ 可被 n 整除, 由于 $0 < (y - x) < y$, 所以 $2^{y-x} - 1$ 也在集合 S 中, 与假设矛盾.

综上, 集合 $2^1 - 1, 2^2 - 1, \dots, 2^n - 1$ 总有一个能被大于 1 的奇数 n 整除.

Exercise 5

证明 11 个人中必定有 4 个人彼此相识或 3 个人彼此不相识.

Solution 5

在这 11 个人中任意挑选一个人 p , 则剩下的 10 个人可以分成两个集合 F 和 S , 其中 F 表示与 p 相识的人的集合; S 表示与 p 不相识的人的集合.

如果 S 中有 4 个及以上人, 则这些人可能彼此相识或者至少有两个人彼此不相识. 第一种情况中有 4 个人彼此相识, 命题成立; 第二种情况中有两人彼此不相识, 则这两个人也与 p 不相识, 于是有 3 个人彼此不相识, 命题成立.

如果在 S 中最多有 3 个人, 则 F 中至少有 7 个人.

在 F 的 7 个人中任意挑选一个人 q , 则剩下的 6 个人可以分成两个集合 G 和 T , 其中 G 表示与 q 相识的人的集合; T 表示与 q 不相识的人的集合. 由鸽笼原理知, G 和 T 至少有一个有 3 个及以上人.

如果 T 中有 3 个及以上人, 则这些人可能彼此相识或者至少有两个人彼此不相识. 第一种情况中有 3 个人彼此相识, 同时也与 p 相识, 于是有 4 个人彼此相识, 命题成立; 第二种情况中有两人彼此不相识, 则这两个人也与 q 不相识, 于是有 3 个人彼此不相识, 命题成立.

如果 G 中有 3 个及以上人, 则这些人可能彼此不相识或者至少有两个人彼此相识. 第一种情况中有 3 个人彼此不相识, 命题成立; 第二种情况中有两人彼此相识, 则这两个人也与 q 和 p 相识, 于是有 4 个人彼此相识, 命题成立.

Exercise 6

证明 $R(3, 3) < 7$.

Solution 6

根据公式：

$$R(a, b) \leq R(a-1, b) + R(a, b-1)$$

$$R(a, b) = R(b, a)$$

$$R(a, 2) = a$$

可得：

$$R(3, 3) \leq R(2, 3) + R(3, 2) = 2R(3, 2) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$R(3, 3) \leq 6$$

$$R(3, 3) < 7$$

3 母函数

Exercise 7

求方程：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 160 \\ 3 \leq x_2 \leq 10, x_3 \leq 3 \end{cases}$$

正整数解的个数.

Solution 7

首先进行变量代换：

$$x'_1 = x_1 - 1, x'_2 = x_2 - 3, x'_3 = x_3 - 1, x'_4 = x_4 - 1$$

则方程变为：

$$\begin{cases} x'_1 + 3x'_2 + x'_3 + x'_4 = 148 \\ x'_1 \geq 0, 0 \leq x'_2 \leq 7, 0 \leq x'_3 \leq 2, x'_4 \geq 0 \end{cases}$$

其母函数为:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x+x^2+\cdots)^2(1+x^3+x^6+\cdots+x^{21})(1+x+x^2) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1-x^{24}}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^3}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{24}}{(1-x)^3} \\ &= (1-x^{24}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k}{2} x^k \end{aligned}$$

其中 x 系数是 148 的对应 $k = 148$ 和 $k = 148 - 24 = 124$ 两种取值:

$$\begin{aligned} a_{148} &= \binom{2+148}{2} - \binom{2+124}{2} \\ &= 3300 \end{aligned}$$

故原方程的正整数解个数为 3300.

Exercise 8

求方程:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 160 \\ 2 \leq x_3 \leq 10, x_4 \leq 3 \end{cases}$$

正整数解的个数.

Exercise 9

n 位序列每一位都由 0, 1, 2 三个数字组成. 共有多少这样的 n 位序列包含奇数个 0?

Solution 9

设 a_n 是由 0, 1, 2 组成的有奇数个 0 的序列.

则 a_n 的指数母函数为:

$$\begin{aligned} f_e(x) &= \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right)^2 \\ &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \cdot e^{2x} \\ &= \frac{1}{2} (e^{3x} - e^x + 3) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (3^n - 1) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

可知:

$$a_n = \frac{1}{2} (3^n - 1)$$

Exercise 10

求不包含 3, 5, 7, 出现偶数次 1, 2, 至少出现两次 4, 8 的 r 位十进制数的个数.

Solution 10

设 a_r 是由 0, 1, 2, 4, 6, 8, 9 组成的有偶数个 1, 2, 至少两个 4, 8, 长度为 r 的序列.

则 a_r 的指数母函数为:

$$\begin{aligned} f_e(x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \right)^2 \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \right)^2 \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right)^3 \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 \cdot (e^x - 1)^2 \cdot e^{3x} \\ &= \frac{1}{4} (e^{7x} - 2e^{6x} + 3e^{5x} - 4e^{4x} + 3e^{3x} - e^{2x} + e^x) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{4} (7^r - 2 \cdot 6^r + 3 \cdot 5^r - 4 \cdot 4^r + 3 \cdot 3^r - 2 \cdot 2^r + 1) \frac{x^r}{r!} \end{aligned}$$

可知:

$$a_r = \frac{1}{4} (7^r - 2 \cdot 6^r + 3 \cdot 5^r - 4 \cdot 4^r + 3 \cdot 3^r - 2 \cdot 2^r + 1)$$

首位取 0 的 r 位序列个数为 a_{r-1} , 所以所求的 r 位十进制数个数为:

$$a_r - a_{r-1} = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot (6 \cdot 7^{r-1} - 10 \cdot 6^{r-1} + 12 \cdot 5^{r-1} - 12 \cdot 4^{r-1} + 6 \cdot 3^{r-1} - 2 \cdot 2^{r-1}) & , r > 0 \\ 0 & , r = 0 \end{cases}$$

4 递归关系

Exercise 11

求解递归关系:

$$\begin{cases} a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 2 \cdot 3^n \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

Solution 11

对应的齐次关系的特征方程为:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

齐次方程的根为:

$$p_1 = -1, p_2 = 3$$

故通解为:

$$a_n^* = c_1 p_1^n + c_2 p_2^n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 3^n$$

又有 $f(n) = 3^n$, 且 3 是递归关系式的特征根, 故设特解为:

$$\bar{a}_n = An \cdot 3^n$$

带入原递归关系得:

$$\begin{aligned} An \cdot 3^n - 2A(n-1) \cdot 3^{n-1} - 3A(n-2) \cdot 3^{n-2} &= 2 \cdot 3^n \\ A &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

故通解为:

$$a_n = a_n^* + \bar{a}_n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 3^n + \frac{3}{2}n \cdot 3^n$$

由初始条件得:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 0 = 1 \\ -c_1 + 3c_2 + \frac{9}{2} = 2 \end{cases}$$

解得:

$$c_1 = \frac{11}{8}, c_2 = -\frac{3}{8}$$

故原递归关系的解为:

$$a_n = \frac{11}{8} \cdot (-1)^n + \left(\frac{3}{2}n - \frac{3}{8}\right) \cdot 3^n$$

Exercise 12

求解递归关系:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2 \cdot 4^n \\ a_0 = 1, a_1 = 1 \end{cases}$$

Exercise 13

证明 $S_2(n, n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Solution 13

$S_2(n, n-1)$ 表示 n 个不同的球放入 $n-1$ 个相同的盒子且盒子不空的方式数.

等价于首先从 n 个球中取出 2 个球出来放入某个盒子中, 有 $\binom{n}{2}$ 种取法, 然后把剩下的 $n-2$ 个球放入 $n-2$ 个盒子中, 每个盒子中放一个球, 有 1 种放法.

由乘法原理得:

$$S_2(n, n-1) = \binom{n}{2} \cdot 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Exercise 14

设 m, n 均为正整数且 $m \leq n$, 证明 $m^n = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \cdot S_2(n, k) \cdot k!$.

Solution 14

$S_2(n, m)$ 表示 n 个不同的球放入 m 个相同的盒子, 且盒子不空的方式数.

考虑盒子的全排列问题, 根据乘法规则, $S_2(n, m) \cdot m!$ 表示 n 个不同的球放入 m 个不同的盒子, 且盒子不空的方式数.

考虑盒子可为空, 依次选择 1 个到 m 个箱子, 求出对应的非空的放置方式数, 再求和即可. 设每次从 m 个箱子中选择 k 个箱子作为非空箱, 且 $1 \leq k \leq m$, 则共有 $\binom{m}{k}$ 种选法.

$\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \cdot S_2(n, k) \cdot k!$ 表示 n 个不同的球放入 m 个不同的盒子, 且盒子可为空的方式数.

n 个不同的球放入 m 个不同的盒子, 且盒子可为空的方式数也可以这样计算: 每个球可以放入 m 个盒子的任意一个之中, 共有 m 种方式, 根据乘法规则, n 个球共有 m^n 种放法.

$$\text{综上, } m^n = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \cdot S_2(n, k) \cdot k!.$$

5 放球问题总结

Exercise 15

求以下条件组合下将 n 个球放入 m 个盒子中的放法.

- ◇ 球: 无区别或有区别
- ◇ 盒子: 无区别或有区别
- ◇ 空盒子: 允许或不允许

Solution 15

0b000. 球无区别, 盒子无区别, 允许空盒子

正整数 n 拆分成最多不超过 m 个正整数的和, 等于正整数 n 拆分成最大数不超过 m 的方式数, 共有 $P_m(n)$ 种放法.

0b001. 球无区别, 盒子无区别, 不允许空盒子

在允许空盒子基础上先在每个盒子中放一个球, 等价于 $n - m$ 个球放入 m 个盒子且允许空盒子放法, 共有 $P_m(n - m)$ 种放法.

0b010. 球无区别, 盒子有区别, 允许空盒子

对应重集 $B = \{\infty \cdot b_1, \infty \cdot b_2, \dots, \infty \cdot b_m\}$ 的 n -组合问题, 共有 $F(m, n) = \binom{n+m-1}{n}$ 种放法.

把不允许空盒子看作是先在每个盒子中放了一个球, 等价于 $n + m$ 个球放入 m 个盒子且不允许空盒子放法, 共有 $\binom{n+m-1}{m-1}$ 种放法.

0b011. 球无区别, 盒子有区别, 不允许空盒子

使用隔板法, 在 n 个球序列的 $n - 1$ 个缝隙中插入 $m - 1$ 个隔板以将序列分为 m 份, 共有 $\binom{n-1}{m-1}$ 种放法.

0b100. 球有区别, 盒子无区别, 允许空盒子

求 n 个元素的集合划分成不超过 m 个不相交的非空子集的方式数目, 对应于第二类 Stirling 数的求和, 共有 $\sum_{i=1}^m S_2(n, i)$ 种放法.

0b101. 球有区别, 盒子无区别, 不允许空盒子

求 n 个元素的集合划分成 m 个不相交的非空子集的方式数目, 对应于第二类 Stirling 数, 共有 $S_2(n, m)$ 种放法.

0b110. 球有区别, 盒子有区别, 允许空盒子

每个球在放入盒子时都有 m 种选择, n 个球共有 m^n 种放法.

0b111. 球有区别, 盒子有区别, 不允许空盒子

在盒子无区别的基础上再考虑盒子的全排列问题, 共有 $m!S_2(n, m)$ 种放法.