形式化方法例题讲解

Mobyw

版本：1.0
更新：2023 年 12 月 5 日

本文档为形式化方法各章节的例题，由于部分答案为个人编撰，难免会出现错误，请保证使用 GitHub仓库 所发布的最新版本. 如遇问题可在 GitHub 上发布 Issue.

1 命题逻辑

本章考点：

1. 将自然语言描述转换为命题逻辑公式.
2. 命题逻辑矢列的有效性判断.
3. 语法分析树的构造与子式的提取.
4. 使用指派法判断矢列的有效性.
5. 使用真值表实现到 CNF 的转换.

Exercise 1

Prove the validity of:

(1) $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$.

(2) $p \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow q$.

(3) $\neg p \rightarrow \neg q \vdash q \rightarrow p$.

Solution 1

(1)

1	$(p \wedge q) \wedge r$	premise
2	$s \wedge t$	premise
3	$p \wedge q$	$\wedge e_1 1$
4	q	$\wedge e_2 3$
5	s	$\wedge e_1 2$
6	$q \wedge s$	$\wedge i 4, 5$

(2)

1	p	premise
2	$p \to q$	assumption
3	q	$\to e 2, 1$
4	$(p \to q) \to q$	$\to i 2-3$

(3)

1	$\neg p \to \neg q$	premise
2	q	assumption
3	$\neg\neg q$	$\neg\neg i 2$
4	$\neg\neg p$	MT 1, 3
5	p	$\neg\neg e 4$
6	$q \to p$	$\to i 2-5$

2 谓词逻辑

本章考点：

1. 将自然语言描述转换为谓词逻辑公式.
2. 谓词逻辑矢列的有效性判断.
3. 语法分析树的构造.
4. 使用指派法判断矢列的有效性.

Exercise 2

利用谓词规范：

1. $B(x, y)$: x 击败 y
2. $F(x)$: x 是一个足球队

3. $Q(x,y)$: x 是 y 的四分卫
4. $L(x,y)$: x 输给 y

和常值符号

1. c: 野猫
2. j: 掠夺者

把下列句子翻译成谓词逻辑语句:

1. 每个球队都有一名四分卫。
2. 若掠夺者队击败野猫队，则掠夺者队没有输给每支足球队。
3. 野猫队击败了一支击败过掠夺者队的球队。

Solution 2

1. $\forall t\ (F(t) \to \exists m\ Q(m,t))$
2. $B(j,c) \to \forall t\ (F(t) \to \neg L(j,t))$
3. $\exists t\ (F(t) \wedge B(t,j) \wedge B(c,t))$

Exercise 3

证明下面的谓词逻辑公式是有效的：$\exists y((\forall x P(x)) \to P(y))$.

Solution 3

使用推理规则来推导：

1. 假设 $\forall x P(x)$ 为真.
2. 根据 1，有 $P(y)$ 为真，其中 y 是存在的.
3. 由于第一步的假设是任意的，因此可以推断 $\forall x P(x) \to P(y)$ 为真.
4. 由于存在一个 y 使得 $\forall x P(x) \to P(y)$ 为真，因此 $\exists y(\forall x P(x) \to P(y))$ 为真.

因此，我们证明了 $\exists y((\forall x P(x)) \to P(y))$ 是有效的。简而言之，这个公式表明“如果对于所有 x，$P(x)$ 都为真，那么存在一个 y 使得 $P(y)$ 也为真”。这是一个显然的真实际情况，因为只需选择任意一个 y，使得 $P(y)$ 为真即可。

Exercise 4

Prove the walidity of $\forall x P(x) \to S \vdash \exists x(P(x) \to S)$.

Solution 4

为了证明 $\forall x P(x) \to S \vdash \exists x(P(x) \to S)$ 的有效性，我们可以采用反证法。

假设 $\forall x P(x) \to S$ 是真的，但 $\exists x(P(x) \to S)$ 是假的。这意味着不存在 x 使得 $P(x) \to S$ 成立。

使用 $\exists x(P(x) \to S)$ 的否定，我们可以写成：

$\forall x \neg(P(x) \to S)$

使用条件语句的逆否命题，我们可以将 $\neg(P(x) \to S)$ 重写为 $P(x) \land \neg S$：

$\forall x(P(x) \land \neg S)$

现在，使用全称实例化规则，我们可以用一个特定的常量替换任何 x，比如 a，得到：

$P(a) \land \neg S$

然而，这与我们的假设 $\forall x P(x) \to S$ 是矛盾的。由于 $\forall x P(x) \to S$ 是真的，因此对于任何常量 a，$P(a) \to S$ 都是成立的。因此，$\exists x(P(x) \to S)$ 必须是真的。

我们已经证明了如果 $\forall x P(x) \to S$ 是真的，那么 $\exists x(P(x) \to S)$ 也必须是真的。因此，原命题 $\forall x P(x) \to S \vdash \exists x(P(x) \to S)$ 是有效的。

3 时态逻辑

本章考点：

1. CTL 公式的语法分析树的构造.
2. 给定模型下，LTL 公式路径的选取.
3. 给定模型下，CTL 公式有效性的判断.

4 模型检测

本章考点：

1. LTL 公式等价性的证明.
2. 合式公式
3. 标记算法

5 程序验证

本章考点：

1. 证明公式的部分正确性.
2. 含有 if 和 while 的代码的部分正确性证明.
3. 证明公式的完全正确性.