组合数学例题讲解

Mobyw

版本:1.0
更新:2022 年 11 月 30 日

本文为组合数学各章节的例题,由于部分答案为个人编撰,难免会出现错误,请保证使用 GitHub仓库 所发布的最新版本. 如遇问题可在 GitHub 上发布 Issue.

1 排列、组合及二项式定理

2 容斥原理

Exercise 1

求方程:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13 \\ 3 \le x_1 \le 6, 2 \le x_2 \le 6, x_3 \le 2 \end{cases}$$

正整数解的个数.

Solution 1

首先进行变量代换:

$$x_1' = x_1 - 3, x_2' = x_2 - 2, x_3' = x_3 - 1, x_4' = x_4 - 1$$

则方程变为:

$$\begin{cases} x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 6 \\ 0 \le x_1' \le 3, 0 \le x_2' \le 4, 0 \le x_3' \le 1, x_4' \ge 0 \end{cases}$$

等价为求集合 S_0 的 6-组合数,其中 S_0 为:

$$S_0 = \left\{3 \cdot x_1', 4 \cdot x_2', 1 \cdot x_3', \infty \cdot x_4'\right\}$$

用 A_1 表示 S 中至少含有 4 个 x_1'; A_2 表示 S 中至少含有 5 个 x_2'; A_3 表示 S 中至少含有 2 个 x_3'. 其中 S 为:

$$S = \{\infty \cdot x_1', \infty \cdot x_2', \infty \cdot x_3', \infty \cdot x_4'\}$$

根据容斥原理,所求的 6-组合数为:

$$\begin{aligned}
&\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| \\
=&|S| - \sum_{i=1}^{3} |A_i| + \sum_{i \neq j} \left|A_i \cap A_j\right| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
=&F(4,6) - (F(4,2) + F(4,1) + F(4,4)) + F(4,0) - 0 \\
=&84 - (10 + 4 + 35) + 1 \\
=&36
\end{aligned}$$

故原方程的正整数解个数为 36.

Exercise 2

奔赴抗疫,全国 4 个片区共有 68 个医疗队,其中西南片区有 10 个,中部片区有 18 个,北方片区有 18 个,东部片区有 22 个. 假定同一片区的各个医疗队不加以区别,现在要从中选取 27 个医疗队入围. 考虑到不同片区的特殊情况,要求西南片区至少入围 4 个医疗队,北方片区至少入围 7 个医疗队,其他片区至少各入围 2 个医疗队,问理论上有多少种不同的选取方案?

Solution 2

用 x_1, x_2, x_3, x_4 表示四个片区的选取数目,则有:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ 4 \le x_1 \le 10, 2 \le x_2 \le 18, 7 \le x_3 \le 18, 2 \le x_4 \le 22 \end{cases}$$

3 鸽笼原理与 Ramsey 定理

Exercise 3

证明 11 个人中必定有 4 个人彼此相认或 3 个人彼此不相识.

Solution 3

在这 11 个人中任意挑选一个人 p，则剩下的 10 个人可以分成两个集合 F 和 S，其中 F 表示与 p 相识的人的集合；S 表示与 p 不相识的人的集合.

如果 S 中有 4 个及以上人，则这些人可能彼此相识或者至少有两个人彼此不相识. 第一种情况中有 4 个人彼此相识，命题成立；第二种情况中有两人彼此不相识，则这两个人也与 p 不相识，于是有 3 个人彼此不相识，命题成立.

如果在 S 中最多有 3 个人，则 F 中至少有 7 个人.

在 F 的 7 个人中任意挑选一个人 q，则剩下的 6 个人可以分成两个集合 G 和 T，其中 G 表示与 q 相识的人的集合；T 表示与 q 不相识的人的集合. 由鸽笼原理知，G 和 T 至少有一个有 3 个及以上人.

如果 T 中有 3 个及以上人，则这些人可能彼此相识或者至少有两个人彼此不相识. 第一种情况中有 3 个人彼此相识，同时也与 p 相识，于是有 4 个人彼此相识，命题成立；第二种情况中有两人彼此不相识，则这两个人也与 q 不相识，于是有 3 个人彼此不相识，命题成立.

如果 G 中有 3 个及以上人，则这些人可能彼此不相识或者至少有两个人彼此相识. 第一种情况中有 3 个人彼此不相识，命题成立；第二种情况中有两人彼此相识，则这两个人也与 q 和 p 相识，于是有 4 个人彼此相识，命题成立.

Exercise 4

证明 $R(3,3) < 7$.

Solution 4

根据公式：

$$R(a,b) \leq R(a-1,b) + R(a,b-1)$$
$$R(a,b) = R(b,a)$$
$$R(a,2) = a$$

可得：

$$R(3,3) \leq R(2,3) + R(3,2) = 2R(3,2) = 2 \cdot 3 = 6$$
$$R(3,3) \leq 6$$
$$R(3,3) < 7$$

4 母函数

Exercise 5

求方程：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 160 \\ 3 \le x_2 \le 10, x_3 \le 3 \end{cases}$$

正整数解的个数.

Solution 5

首先进行变量代换：

$$x_1' = x_1 - 1, x_2' = x_2 - 3, x_3' = x_3 - 1, x_4' = x_4 - 1$$

则方程变为：

$$\begin{cases} x_1' + 3x_2' + x_3' + x_4' = 148 \\ x_1' \ge 0, 0 \le x_2' \le 7, 0 \le x_3' \le 2, x_4' \ge 0 \end{cases}$$

其母函数为：

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)^2 (1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{21})(1 + x + x^2) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1-x^{24}}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^3}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{24}}{(1-x)^3} \\ &= \left(1 - x^{24}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k}{2} x^k \end{aligned}$$

其中 x 系数是 148 的对应 $k = 148$ 和 $k = 148 - 24 = 124$ 两种取值：

$$\begin{aligned} a_{148} &= \binom{2+148}{2} - \binom{2+124}{2} \\ &= 3300 \end{aligned}$$

故原方程的正整数解个数为 3300.

Exercise 6

求方程：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 160 \\ 2 \le x_3 \le 10, x_4 \le 3 \end{cases}$$

正整数解的个数.

Exercise 7

正偶数 $k_1, k_2, ..., k_n$ 满足 $k_i \neq k_j, i \neq j$. 写出求将正整数 r 分解为 $k_1, k_2, ..., k_n$ 的和的方法数的算法，要求 k_i 最多可被选中三次.

Solution 7

Solution.

Exercise 8

求不包含 3, 5, 7，出现偶数次 1, 2，至少出现两次 4, 8 的 r 位十进制数的个数.

Solution 8

Solution.

5 递归关系

Exercise 9

求解递归关系：

$$\begin{cases} a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 2 \cdot 3^n \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

Solution 9

对应的齐次关系的特征方程为：

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

齐次方程的根为：

$$p_1 = -1, p_2 = 3$$

故通解为：

$$a_n^* = c_1 p_1^n + c_2 p_2^n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 3^n$$

又有 $f(n) = 3^n$，且 3 是递归关系式的特征根，故设特解为：

$$\overline{a}_n = An \cdot 3^n$$

带入原递归关系得：

$$An \cdot 3^n - 2A(n-1) \cdot 3^{n-1} - 3A(n-2) \cdot 3^{n-2} = 2 \cdot 3^n$$
$$A = \frac{3}{2}$$

故通解为：

$$a_n = a_n^* + \overline{a}_n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 3^n + \frac{3}{2} n \cdot 3^n$$

由初始条件得：

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 0 = 1 \\ -c_1 + 3c_2 + \frac{9}{2} = 2 \end{cases}$$

解得：

$$c_1 = \frac{11}{8}, c_2 = -\frac{3}{8}$$

故原递归关系的解为：

$$a_n = \frac{11}{8} \cdot (-1)^n + \left(\frac{3}{2} n - \frac{3}{8}\right) \cdot 3^n$$

Exercise 10

求解递归关系：

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2 \cdot 4^n \\ a_0 = 1, a_1 = 1 \end{cases}$$

Exercise 11

证明 $S_2(n, n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Solution 11

$S2(n, n-1)$ 表示 n 个不同的球放入 $n-1$ 个相同的盒子且盒子不空的方式数.

等价于首先从 n 个球中取出 2 个球出来放入某个盒子中,有 $\binom{n}{2}$ 种取法,然后把剩下的 $n-2$ 个球放入 $n-2$ 个盒子中,每个盒子中放一个球,有 1 种放法.

由乘法原理得:

$$S_2(n, n-1) = \binom{n}{2} \cdot 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$