

Содержание

1	Базовые определения	3
2	Вторая теорема о π - и λ -системах. Следствия из неё.	5
3	Независимость событий и систем событий	6
4	Функция распределения вероятностной меры	7
5	Классификация вероятностных мер	9
6	Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$	11
7	Случайные элементы, случайные величины и векторы на вероятностном пространстве	13
8	Характеристики случайной величины и случайного вектора	15
9	Независимости произвольного набора случайных величин	17
10	Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями	19
11	Теорема о замене переменных в интеграле Лебега...	20
12	Прямое произведение вероятностных пространств	22
13	Совместное распределение...	24
14	Дисперсия, ковариация и коэффициент корреляции	25
15	Сходимости случайных величин	27
16	Достаточное условие сходимости с вероятностью...	29
17	Фундаментальность с вероятностью 1	31
18	Леммы Теплица и Кронекера...	33
19	Слабая сходимость и сходимость в основном...	35
20	Характеристические функции...	37
21	Единственность характеристических функций...	40
22	Теорема о производной х-ф...	42
23	Плотность и относительная компактность семейств вероятностных мер...	45
24	Три леммы, теорема непрерывности...	47

25 Центральная предельная теорема...	49
26 Виды сходимости случайных векторов...	51
27 Лемма Слуцкого...	53

1 Базовые определения

Определение 1.1. Система \mathcal{F} подмножеств Ω называется алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}$, то $\bar{A} := (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$

Определение 1.2. Система \mathcal{F} подмножеств Ω называется σ -алгеброй, если

1. \mathcal{F} – алгебра
2. $\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Определение 1.3. P называется вероятностной мерой на (Ω, \mathcal{F}) , если $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющая свойствам:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Если $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$, то

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Определение 1.4. Вероятностное пространство – это тройка (Ω, \mathcal{F}, P) , где

- Ω – множество элементарных исходов
- \mathcal{F} – σ -алгебра подмножеств Ω , элементы \mathcal{F} называются событиями
- P – вероятностная мера на измеримом пространстве (Ω, \mathcal{F})

Определение 1.5. Система \mathcal{M} подмножеств в Ω называется π -системой, если из того, что $A, B \in \mathcal{M}$ следует, что $A \cap B \in \mathcal{M}$

Определение 1.6. Система \mathcal{L} подмножеств в Ω называется λ -системой, если

1. $\Omega \in \mathcal{L}$
2. $(A, B \in \mathcal{L}; A \subset B) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}$
3. $(A_n \uparrow A; \forall n A_n \in \mathcal{L}) \Rightarrow A \in \mathcal{L}$

Теорема 1.1. Первая теорема о π - λ -системах

Система \mathcal{F} подмножеств Ω является σ -алгеброй \Leftrightarrow она является π -системой и λ -системой.

Доказательство. \Rightarrow Свойство π -системы и свойство 1) λ -системы выполняются автоматически.

Рассмотрим $\forall A_n \uparrow A; \forall n A_n \in \mathcal{L}$. Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{L}$. Следовательно, выполнено свойство 3) λ -системы.

$\forall A, B \in \mathcal{L}; A \subset B : B \setminus A = B \cap \bar{A}$. Но $\bar{A} \in \mathcal{L}$, следовательно $B \cap \bar{A} \in \mathcal{L}$. То есть выполнено свойство 2) λ -системы.

\Leftarrow Проверим сначала, что \mathcal{F} – алгебра. Свойства 1), 3) уже есть. По свойству 2) λ -системы $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$, если $A \in \mathcal{F}$. Значит \mathcal{F} – алгебра.

Пусть $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F}$. Рассмотрим $B_n : B_1 = A_1, B_i = A_i \setminus (\cup_{k=1}^i A_k)$. Тогда: $\forall n B_n \in \mathcal{F}, \forall i \neq j B_i \cap B_j = \emptyset$. Рассмотрим $C_n = \sqcup_{m=1}^n B_m \in \mathcal{F}$. Тогда $C_n \subset C_{n+1}$ и $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = \sqcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow$ по 3) свойству λ -системы: $C_n \uparrow \sqcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$. \square

Лемма 1.1. Пусть \mathcal{M} – система подмножеств Ω . Тогда существует минимальная (по включению) σ -алгебра (алгебра, π -система, λ -система), обозначаемая $\sigma(\mathcal{M})$ ($\lambda(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M})$), содержащая \mathcal{M} .

Пример. 1. Если $\Omega = \mathbb{R}$, то борелевской σ -алгеброй на \mathbb{R} называется наименьшая σ -алгебра, содержащая все интервалы

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma((a; b), a < b)$$

2. Если $\Omega = \mathbb{R}^n, n > 1$.

Борелевской σ -алгеброй в \mathbb{R}^n называется минимальная σ -алгебра, содержащая множества вида $B_1 \times \dots \times B_n, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то есть

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(B_1 \times \dots \times B_n : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

3. Если $\Omega = \mathbb{R}^{\infty}$, то есть Ω содержит все счётные последовательности вещественных чисел.

Для $n \in \mathbb{N}$ и $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ введём цилиндр:

$$F_n(B_n) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{\infty} : (x_1, \dots, x_n) \in B_n\}$$

Тогда минимальная σ -алгебра, содержащая все цилиндры называется борелевской в \mathbb{R}^{∞} , то есть

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty}) = \sigma(F_n(B_n) : n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

2 Вторая теорема о π - и λ -системах. Следствия из неё.

Теорема 2.1. *Вторая теорема о π - λ -системах.*

Если \mathcal{M} – это π -система подмножеств в Ω , то $\sigma(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M})$

Доказательство. Заметим, что $\sigma(\mathcal{M})$ – λ -система, содержащая $\mathcal{M} \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) \subset \sigma(\mathcal{M})$.

Проверим, что $\lambda(\mathcal{M})$ – это σ -алгебра. Раз $\lambda(\mathcal{M})$ – это λ -система, то по (1.1) достаточно проверить, что $\lambda(\mathcal{M})$ – это π -система.

Рассмотрим $\mathcal{M}_1 = \{B \in \lambda(\mathcal{M}) : \forall A \in \mathcal{M}, A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$. Заметим, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$. Проверим, что \mathcal{M}_1 – это λ -система:

1. $\Omega \in \mathcal{M}_1$ – очевидно

2. Пусть $B, C \in \mathcal{M}_1, C \subset B$, пусть $A \in \mathcal{M}$. Заметим, что $B \setminus C \in \lambda(\mathcal{M})$ и

$$(B \setminus C) \cap A = \overset{\in \lambda(\mathcal{M})}{(B \cap A)} \setminus \overset{\in \lambda(\mathcal{M})}{(C \cap A)}$$

Значит по второму свойству λ -систем $(B \setminus C) \cap A \in \lambda(\mathcal{M})$

3. Пусть $B_n \uparrow B, B_n \in \mathcal{M}_1, A \in \mathcal{M} \Rightarrow$

$$\overset{\in \lambda(\mathcal{M})}{B_n \cap A} \uparrow B \cap A$$

Тогда по третьем свойству λ -систем $B \cap A \in \lambda(\mathcal{M})$. Но $B_n \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow$ по третьему свойству λ -системы получаем, что $B \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow B \in \mathcal{M}_1$.

По условию $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \Rightarrow$ в силу минимальности $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_1$. По построению $\mathcal{M}_1 \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_1$, то есть $\forall B \in \lambda(\mathcal{M}) \forall A \in \mathcal{M} : A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})$.

Далее рассмотрим $\mathcal{M}_2 = \{B \in \lambda(\mathcal{M}) : \forall A \in \lambda(\mathcal{M}) A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$. В силу доказанного $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_2$. Совершенно аналогично с \mathcal{M}_1 проверяем, что \mathcal{M}_2 – это λ -система. Тогда $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_2$. По построению $\mathcal{M}_2 \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_2 \Rightarrow \lambda(\mathcal{M})$ – это π -система. \square

Следствие. *Пусть \mathcal{M} – это π -система на Ω , и \mathcal{L} – это λ -система на Ω и $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$. Тогда $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$*

3 Независимость событий и систем событий

Определение 3.1. События A, B независимые, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Определение 3.2. События A_1, \dots, A_n называются независимыми в совокупности, если

$$\forall k \leq n \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n : P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_k})$$

Определение 3.3. Пусть $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$ – системы событий на (Ω, \mathcal{F}, P) . Они называются независимыми в совокупности, если

$$\forall A_1 \in \mathcal{M}_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n : A_1, \dots, A_n \text{ — независимы в совокупности}$$

Лемма 3.1. Критерий независимости σ -алгебр.

Пусть $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$ – это π -системы событий на (Ω, \mathcal{F}, P) . Тогда $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$ – независимы в совокупности $\Leftrightarrow \sigma(\mathcal{M}_1), \dots, \sigma(\mathcal{M}_n)$ – независимы в совокупности.

Доказательство. \Leftarrow очевидно.

Докажем только для $n = 2$, для $n > 2$ всё аналогично.

Рассмотрим $\mathcal{L}_1 = \{A \in \sigma(\mathcal{M}_2) : A \perp \mathcal{M}_1\}$. Проверим, что \mathcal{L}_1 – это λ -система:

$$1. \forall B \in \mathcal{M}_1 : \Omega \perp B \Rightarrow \Omega \in \mathcal{L}_1$$

$$2. \text{ Пусть } C \in \mathcal{M}_1, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} P((B \setminus A) \cap C) &= P((B \cap C) \setminus (A \cap C)) = P(B \cap C) - P(A \cap C) = \\ &= P(C)(P(B) - P(A)) = P(B \setminus A)P(C) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}_1 \end{aligned}$$

$$3. \text{ Пусть } A_n \uparrow A, A_n \in \mathcal{L}_1. \text{ По определению } \sigma\text{-алгебры замечаем, что } A \in \sigma(\mathcal{M}_2). \text{ Пусть } C \in \mathcal{M}_1. \text{ Рассмотрим}$$

$$P(A \cap C) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n \cap C) = P(C) \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P(C)P(A) \Rightarrow A \in \mathcal{L}_1$$

Раз \mathcal{L}_1 – это λ -система и $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{L}_1$, по условию, то по (2.1) получим, что $\sigma(\mathcal{M}_2) \subset \mathcal{L}_1 \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_2) \perp \mathcal{M}_1$.

Рассмотрим $\mathcal{L}_2 = \{A \in \sigma(\mathcal{M}_1) : A \perp \sigma(\mathcal{M}_2)\}$. Точно так же доказывается, что \mathcal{L}_2 – это λ -система, $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{L}_2$ по доказанному $\Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{L}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_1) \perp \sigma(\mathcal{M}_2)$ \square

Определение 3.4. Пусть $\{M_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ – набор систем событий. Он называется независимым в совокупности, если независим в совокупности \forall конечный поднабор.

4 Функция распределения вероятностной меры

Определение 4.1. Функцией распределения вероятностной меры P на \mathbb{R} называется

$$F(x) = P((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}$$

Лемма 4.1. Свойства функции распределения.

1. $F(x)$ не убывает
2. $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$
3. $F(x)$ непрерывна справа

Доказательство. 1. Пусть $y > x$. Тогда

$$(-\infty, x] \subset (-\infty, y] \Rightarrow F(x) = P((-\infty, x]) \leq P((-\infty, y]) = F(y)$$

2. Если $x_n \uparrow +\infty$, то $(-\infty, x_n] \uparrow \mathbb{R}$. Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\mathbb{R}) = 1$$

Если $x_n \downarrow -\infty$, то $(-\infty, x_n] \downarrow \emptyset$. Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\emptyset) = 0$$

3. Если $x_n \downarrow x$, то $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$. Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, x]) = F(x)$$

□

Определение 4.2. Эквивалентное определение функции распределения.

Функция, удовлетворяющая свойствам 1 – 3 из предыдущей леммы, называется функцией распределения на P .

Теорема 4.1. О продолжении меры (б/д)

Пусть \mathcal{A} – алгебра подмножеств Ω . Пусть $P_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ с условием, $P_0(\Omega) = 1$ и P_0 счётно-аддитивна на \mathcal{A} . Тогда $\exists!$ продолжение меры P_0 на $\sigma(\mathcal{A})$

Теорема 4.2. О взаимной однозначности функции распределения и вероятностной меры.

Пусть $F(x), x \in \mathbb{R}$ – функция распределения на \mathbb{R} . Тогда $\exists!$ вероятностная мера P на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, для которой F является функцией распределения, то есть

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = P((-\infty, x])$$

Доказательство. Рассмотрим на \mathbb{R} алгебру \mathcal{A} , состоящую из конечных объединений непесекающихся интервалов:

$$\forall A \in \mathcal{A} : A = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k], \quad -\infty \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_n \leq +\infty$$

Зададим на \mathcal{A} меру P_0 :

$$\forall A \in \mathcal{A} : P_0(A) = \sum_{k=1}^n (F(b_k) - F(a_k))$$

где $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

По построению $P_0(\mathbb{R}) = 1$ и P_0 будет конечно аддитивна на \mathcal{A} . Если мы проверим, что P_0 счётно аддитивна на \mathcal{A} , то по (4.1) $\exists!$ продолжение P меры P_0 на $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Это и есть искомая мера P , причём

$$P((-\infty, x]) = P_0((-\infty, x]) = F(x)$$

По теореме о непрерывности вероятностной меры, достаточно проверить, что P_0 непрерывна в нуле.

Пусть $A_n \downarrow \emptyset, \forall n : A_n \in \mathcal{A}$. Хотим проверить, что $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. В силу 2 – 3 свойств функции распределения:

$$\forall A \in \mathcal{A} \forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathcal{A} : \text{cl } B \subset A, P_0(A \setminus B) \leq \varepsilon$$

Если $(a, b]$ является частью A , то для некоторого $a' > a$ будет выполнено

$$P_0((a, a']) \leq \varepsilon$$

Зафиксировав $\forall \varepsilon > 0$, выберем $B_n \forall n \in \mathbb{N} : B_n \in \mathcal{A}$, такой что $\text{cl } B_n \subset A_n$ и $P_0(A_n \setminus B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Пусть сначала все A_n лежат внутри $[-N, N]$. Заметим, что раз $\bigcap_n A_n = \emptyset$, то $\bigcap_n \text{cl } B_n = \emptyset$. В силу компактности $\exists n_0$:

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} \text{cl } B_n = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{n_0} B_n = \emptyset$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} P_0(A_{n_0}) &= P_0\left(A_{n_0} \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0} B_n\right) \leq P_0\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} (A_{n_0} \setminus B_n)\right) \leq P_0\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} (A_n \setminus B_n)\right) \leq \\ &\sum_{n=1}^{n_0} P_0(A_n \setminus B_n) \leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon \Rightarrow P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Если A бесконечно, то возьмём N , такой что $P_0(\mathbb{R} \setminus (-N, N]) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим $A'_n = A_n \cap (-N, N]$. Тогда по доказанному выше $P'_0(A'_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow$ с некоторого n_0 :

$$P_0(A_n) \leq P(A'_n) + P_0(\mathbb{R} \setminus (-N, N]) \leq \varepsilon$$

□

5 Классификация вероятностных мер

Определение 5.1. Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Она называется дискретной, если \exists не более чем счётное множество $X \subset \mathbb{R}$, такое, что

$$P(\mathbb{R} \setminus X) = 0, \forall x \in X : P(\{x\}) > 0$$

Говорят, что P сосредоточена на X .

Пусть $X = (x_k, k \in \mathbb{N})$, обозначим $p_k = P(\{x_k\})$. Набор (p_1, p_2, \dots) образует распределение вероятностей на X .

Как выглядит функция распределения?

$$F(x) = \sum_{x_k \leq x} P(\{x_k\})$$

Она меняется скачками в точках x_k , в них значение увеличивается на

$$p_k = P(\{x_k\}) = \Delta F(x_k) = F(x_k) - F(x_k - 0)$$

Пример. Дискретные распределения:

1. Константы.

$$X = \{x\}; P(\{x\}) = 1$$

2. Распределение Бернулли, $\text{Bern}(p)$, $p \in [0, 1]$:

$$X = \{0, 1\}; p_0 = 1 - p, p_1 = p$$

3. Биномиальное распределение, $\text{Bin}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$:

$$X = \{0, \dots, n\}; p_k = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}; k = \overline{0, n}$$

4. Пуассоновское распределение, $\text{Pois}(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$X = \mathbb{Z}_+; p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k \in \mathbb{Z}_+$$

Определение 5.2. Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, а F – её функция распределения. Она называется абсолютно непрерывной, если $\exists p(t) \geq 0$, такая что

$$\int_{\mathbb{R}} p(t) dt = 1; \forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

В этом случае $p(t)$ называется плотностью функции распределения F и меры P .

Замечание. Интегралы понимаются, как интегралы Лебега.

Пример. 1. Равномерное распределение, $U(a, b)$, $a < b$

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{I}_{\{x \in [a, b]\}}(x); F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b] \\ 1, x > b \end{cases}$$

2. Нормальное (гауссовское) распределение, $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; \quad \Phi_{a, \sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

3. Экспоненциальное (показательное) распределение, $\text{Exp}(\alpha)$, $\alpha > 0$.

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} \cdot \mathbb{I}\{x > 0\}; \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0 \end{cases}$$

4. Гамма-распределение, $\Gamma(\alpha, \lambda)$, $\alpha, \lambda > 0$

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1} \alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{\{x>0\}}(x); \quad \Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx, \lambda > 0$$

5. Распределение Коши, $K(\sigma)$, $\sigma > 0$

$$p(x) = \frac{\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)}; \quad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{\sigma}$$

Определение 5.3. Пусть F – функция распределения на \mathbb{R} .

Точка x является точкой роста F , если

$$\forall \varepsilon > 0 : F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$$

Определение 5.4. Функция распределения F (и соответствующая ей мера P) называется сингулярной, если F непрерывна и множество её точек роста имеет лебегову норму нуль.

Пример. Канторова лестница.

Мера P сосредоточена на канторовом множестве, оно не счётное, но каждый элемент имеет ненулевую меру.

Теорема 5.1. *Лебега о разложении.* (б/д)

Пусть F – функция распределения на \mathbb{R} . Тогда \exists разложение вида

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x), \alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

причём F_1 – дискретная функция распределения, F_2 – абсолютно непрерывная, F_3 – сингулярная.

6 Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

Определение 6.1. Функцией распределения вероятностной меры P называется $F(x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$, где

$$F(x_1, \dots, x_n) = P((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$$

Замечание. 1. $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

2. $\vec{x} \geq \vec{y}$, если

$$\forall i = \overline{1, n} : x_i \geq y_i$$

3. $(-\infty, \vec{x}] = (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]$

4. $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$, если

$$\forall n \in \mathbb{N} : \vec{x}_{(n)} \geq \vec{x}_{(n+1)} \geq \vec{x}$$

причём $\lim_n \vec{x}_{(n)} = \vec{x}$

Лемма 6.1. Свойства многомерной функции распределения.

Пусть $F(\vec{x})$ – функция распределения вероятностной меры P на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Тогда

1. Если $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(\vec{x}_{(n)}) = F(\vec{x})$$

то есть непрерывна справа по любой координате

2. Если $x_i \rightarrow +\infty, \forall i = \overline{1, n}$, то

$$F(\vec{x}) \rightarrow 1$$

Если $x_i \rightarrow -\infty, \exists i = \overline{1, n}$, то

$$F(\vec{x}) \rightarrow 0$$

3. Для $\forall i = \overline{1, n}$ и $a_i < b_i$ введём оператор Δ_{a_i, b_i}^i , который действует следующим образом:

$$\Delta_{a_i, b_i}^i F(\vec{x}) = F(x_1, \dots, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Тогда

$$\forall a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n : \Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \dots \circ \Delta_{a_n, b_n}^n F(\vec{x}) \geq 0$$

Доказательство. 1. Если $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$, то $(-\infty, \vec{x}_{(n)}] \downarrow (-\infty, \vec{x}]$. Тогда по непрерывности меры

$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, \vec{x}]) = F(\vec{x})$$

2. Если $\vec{x} \uparrow (+\infty, \dots, +\infty)$, то $(-\infty, \vec{x}] \uparrow \mathbb{R}^n$. Тогда по непрерывности меры

$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\mathbb{R}^n) = 1$$

Если $x_i \downarrow -\infty$, то $(-\infty, \vec{x}] \downarrow \emptyset$. Тогда в силу непрерывности меры

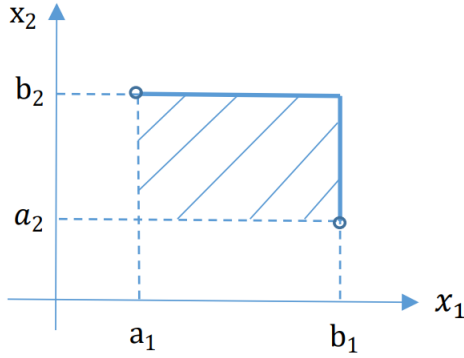
$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\emptyset) = 0$$

3. Проверим, например для $n = 2$, что

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \dots \circ \Delta_{a_n, b_n}^n F(\vec{x}) = P((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n])$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \Delta_{a_2, b_2}^2 F(x_1, x_2) &= \Delta_{a_1, b_1}^1 (F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2)) = \\ &= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) \geq 0 \end{aligned}$$



В общем случае достаточно заметить, что

$$\Delta_{a_i, b_i}^i P(B_1 \times \dots \times B_{i-1} \times (-\infty, x_i] \times \dots \times B_n) = P(B_1 \times \dots \times (a_i, b_i] \times \dots \times B_n)$$

□

Теорема 6.1. *О построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ по функции распределения (б/д).*

Пусть $F(\vec{x})$ удовлетворяет всем свойствам из предыдущей леммы. Тогда $\exists!$ вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, для которой F является функцией распределения.

Определение 6.2. Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ рассмотрим

$$P_n(B) = P(F_n(B))$$

где $F_n(B) = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots) : (x_1, \dots, x_n) \in B\}$ – цилиндр с основанием B .

Тогда P_n будет вероятностной мерой в \mathbb{R}^n . Кроме того, $\forall n : \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

$$P_n(B) = P_{n+1}(B \times \mathbb{R})$$

Это свойство согласованности.

Теорема 6.2. *Колмогорова о мерах в \mathbb{R}^∞ (б/д).*

Пусть P_1, P_2, \dots – последовательность вероятностных мер в $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots$, обладающая свойством согласованности. Тогда $\exists!$ вероятностная мера P на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$, такая что

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : P_n(B) = P(F_n(B))$$

7 Случайные элементы, случайные величины и векторы на вероятностном пространстве

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) – вероятностное пространство, а (E, ξ) – измеримое пространство.

Определение 7.1. Отображение $X : \Omega \rightarrow E$ называется случайным элементом, если оно измеримо, то есть

$$\forall B \in \xi : X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Определение 7.2. Если $(E, \xi) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, то случайный элемент называется случайной величиной.

Определение 7.3. Если $(E, \xi) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, то случайный элемент называется случайным вектором.

Лемма 7.1. Критерий измеримости отображения.

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$, так чтобы $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$. Тогда $X : \Omega \rightarrow E$ является случайным элементом \Leftrightarrow

$$\forall B \in \mathcal{M} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

Доказательство. \Rightarrow очевидно.

\Leftarrow Рассмотрим

$$\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{E} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$$

Легко видеть, что \mathcal{D} – это σ -алгебра, так как \mathcal{E} – σ -алгебра, а прообраз сохраняет теоретико-множественные операции.

По условию $\mathcal{M} \subset \mathcal{D} \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ в силу минимальности. \square

Следствие. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – случайная величина

2. $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

3. $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

Доказательство. Применяем лемму для $\mathcal{M} = \{(-\infty, x), x \in \mathbb{R}\}$ или $\mathcal{M} = \{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$. В обоих случаях $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ \square

Следствие. $X := (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ – случайный вектор \Leftrightarrow

$$\forall i = \overline{1, n} : X_i – случайная величина$$

Доказательство. \Rightarrow Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда

$$X_i^{-1}(B) = X^{-1}(\mathbb{R} \times \dots \times \overset{i}{B} \times \dots \times \mathbb{R}) \in \mathcal{F}$$

Это верно, так как X – случайный вектор и

$$\mathbb{R} \times \dots \times \overset{i}{B} \times \dots \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

\Leftarrow Рассмотрим $\mathcal{M} = \{B_1 \times \cdots \times B_n : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Тогда $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и проверим условие леммы:

$$X^{-1}(B_1 \times \cdots \times B_n) = X_1^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}$$

так как $\forall i = \overline{1, n} : X_i$ – случайная величина.

Значит по предыдущей лемме $\Rightarrow X$ – случайный вектор. □

8 Характеристики случайной величины и случайного вектора

Определение 8.1. Распределением случайной величины (вектора) ξ называется вероятностная мера P_ξ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ($(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$), определённая по правилу:

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ } (\mathbb{R}^n)$$

Определение 8.2. Функцией распределения случайной величины ξ называется

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = P_\xi((-\infty, x])$$

Замечание.

$$P(\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2) := P(\{\xi_1 \leq x_1\} \cap \{\xi_2 \leq x_2\})$$

Определение 8.3. Если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор, то его функцией распределения называется

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P_\xi((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$$

Определение 8.4. Случайная величина является

- Дискретной, если таково её распределение
- Абсолютно-непрерывной, если таково её распределение

В этом случае ξ имеет плотность $p_\xi(t) \geq 0$:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt$$

- Сингулярной, если таково её распределение

Определение 8.5. Случайная величина ξ называется простой, если она принимает конечное число значений. В этом случае ξ имеет вид:

$$\xi = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{I}_{A_k}$$

где x_1, \dots, x_n – различные числа, A_1, \dots, A_n – разбиение Ω .

Определение 8.6. Пусть ξ – случайная величина (вектор) на (Ω, \mathcal{F}, P) . Сигма-алгеброй, порождённой ξ , называется

$$\mathcal{F}_\xi = \{\{\xi \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \text{ } (\mathbb{R}^n)$$

Заметим, что $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}$

Определение 8.7. Случайная величина (вектор) η является \mathcal{F}_ξ -измеримой, если $\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$

Определение 8.8. Если ξ – это случайная величина, то положим

$$\xi^+ := \max(\xi, 0); \quad \xi^- := \max(-\xi, 0)$$

Тогда, $\xi = \xi^+ - \xi^-$

Определение 8.9. Функция $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется борелевской, если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : \varphi^{-1}(B) = \{x : \varphi(x) \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Лемма 8.1. η является \mathcal{F}_ξ -измеримой $\Leftrightarrow \exists$ борелевская функция φ , такая что $\eta = \varphi(\xi)$.

Доказательство. \Leftrightarrow Пусть $\eta = \varphi(\xi)$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\{\eta \in B\} = \{\xi \in \varphi^{-1}(B)\} \in \mathcal{F}_\xi \Rightarrow \mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$$

□

Теорема 8.1. О приближении простыми.

1. Пусть $\xi \geq 0$. Тогда \exists последовательность \mathcal{F}_ξ -измеримых случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, такая что

$$0 \leq \xi_n \uparrow \xi$$

2. Если ξ – произвольная случайная величина, то \exists последовательность \mathcal{F}_ξ измеримых простых случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, такая что

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\xi_n| \leq |\xi|, \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = \xi$$

Доказательство. 1. Предъявим ξ_n в явном виде:

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq \xi < \frac{k}{2^n}\}}$$

Легко видеть, что $0 \leq \xi_n \leq \xi_{n+1}$ и $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n$. Кроме того, $\forall n : \xi_n$ – борелевская функция от $\xi \Rightarrow \xi_n$ – по (8.1) это \mathcal{F}_ξ -измеримая случайная величина.

2. Приближаем ξ^+ и ξ^- по предыдущему пункту, затем берём разность

□

9 Независимости произвольного набора случайных величин

Определение 9.1. Случайные векторы $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называются независимыми в совокупности, если независимы в совокупности порождённые ими σ -алгебры.

Следствие. Случайные векторы $\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_i \in \mathbb{R}^{k_i}, i = \overline{1, n}$ независимы в совокупности \Leftrightarrow

$$\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_i}) : P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i \in B_i)$$

Лемма 9.1. Критерий независимости в терминах функций распределения
Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы в совокупности \Leftrightarrow

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} : P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i \leq x_i)$$

То есть функция распределения вектора распадается в произведение функций распределения компонент.

Доказательство. \Rightarrow очевидно из следствия выше.

\Leftarrow Проверим $\mathcal{M}_j = \{\{\xi_j \leq x\} : x \in \mathbb{R}\}$ – подходящая π -система. Очевидно, что \mathcal{M}_j – это π -система и $\sigma(\mathcal{M}_j) \subset \mathcal{F}_{\xi_j}$.

Тогда $\forall A \in \mathcal{M}_j$ имеет вид

$$A = \{\xi_j \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Тогда введём

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \{\xi_j \in B\} \in \sigma(\mathcal{M}_j)\}$$

Тогда \mathcal{D} – это тоже σ -алгебра:

1.

$$\{\xi_j \in \mathbb{R}\} = \Omega \in \sigma(\mathcal{M}_j) \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{D}$$

2.

$$\{\xi_j \in B_1 \cap B_2\} = \{\xi_j \in B_1\} \cap \{\xi_j \in B_2\} \in \sigma(\mathcal{M}_j) \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{D}$$

3. Аналогично

$$B \in \mathcal{D} \Rightarrow \overline{B} \in \mathcal{D}$$

4. Аналогично

$$B_i \in \mathcal{D}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{D}$$

По построению все полуинтервалы $(-\infty, x] \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}$. Значит, $\sigma(\mathcal{M}_j) = \mathcal{F}_{\xi_j}$. Тогда, применяя (3.1), получим требуемое. \square

Замечание. То же самое верно и для случайных векторов.

ξ_1, \dots, ξ_n независимы в совокупности \Leftrightarrow

$$\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n : P(\xi_1 \leq \vec{x}_1, \dots, \xi_n \leq \vec{x}_n) = \prod_{k=1}^n P(\xi_k \leq \vec{x}_k)$$

Лемма 9.2. *О независимости борелевских функций от независимых случайных величин.*

Пусть ξ_1, \dots, ξ_n – независимые случайные векторы, $\xi_i \in \mathbb{R}^{k_i}, k_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, n}$. Пусть $f_i : \mathbb{R}^{k_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}, i = \overline{1, n}$ – борелевские функции. Положим $\eta_i = f_i(\xi_i)$. Тогда η_1, \dots, η_n – независимые в совокупности.

Доказательство. η_1, \dots, η_n независимы в совокупности $\Leftrightarrow \mathcal{F}_{\eta_1}, \dots, \mathcal{F}_{\eta_n}$ независимы в совокупности.

Но $\mathcal{F}_{\eta_i} \subset \mathcal{F}_{\xi_i} \Rightarrow \mathcal{F}_{\eta_1}, \dots, \mathcal{F}_{\eta_n}$ независимы как подсистемы в независимых σ -алгебрах. \square

Следствие. $[\xi_1, \dots, \xi_{n_1}], [\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2}], \dots, [\xi_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, \xi_{n_1+\dots+n_k}]$ – независимые блоки случайных величин. Пусть $f_j : \mathbb{R}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R}, j = \overline{1, k}$ – борелевские функции. Тогда $f_1(\xi_1, \dots, \xi_{n_1}), f_2(\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2}), \dots, f_k(\xi_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, \xi_{n_1+\dots+n_k})$ – независимые в совокупности случайные величины.

Доказательство. Пускай $\eta_1 := (\xi_1, \dots, \xi_{n_1}), \dots, \eta_k := (\xi_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, \xi_{n_1+\dots+n_k})$. По предыдущей лемме $\eta_i, i = \overline{1, k}$ будут независимы в совокупности. \square

10 Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями

Теорема 10.1. *О математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями.*

Пусть ξ, η – независимые случайные величины, $E\xi, E\eta$ – конечные. Тогда $E\xi\eta$ тоже конечно, причём $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$.

Доказательство. Пусть сначала ξ, η – простые случайные величины, то есть

$$\xi = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{I}\{\xi = x_i\}; \quad \eta = \sum_{j=1}^m y_j \mathbb{I}\{\eta = y_j\}$$

где x_1, \dots, x_n – значения ξ , а y_1, \dots, y_m – значения η . Тогда

$$\xi\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \mathbb{I}\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$$

Берём E от обеих частей:

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j P(\xi = x_i, \eta = y_j) \stackrel{\perp}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j P(\xi = x_i) P(\eta = y_j) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i P(\xi = x_i) \right) \left(\sum_{j=1}^m y_j P(\eta = y_j) \right) = E\xi \cdot E\eta \end{aligned}$$

Далее, пусть $\xi, \eta \geq 0$ – неотрицательные случайные величины. Тогда рассмотрим последовательности простых случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \{\eta_m, m \in \mathbb{N}\}$, такие что

$$0 \leq \xi_n \uparrow \xi; \quad 0 \leq \eta_m \uparrow \eta$$

и $\forall n \in \mathbb{N} : \xi_n$ является \mathcal{F}_ξ -измеримой, η_n – \mathcal{F}_η -измеримой.

Следовательно, $0 \leq \xi_n \eta_n \uparrow \xi\eta$ и $\forall n \in \mathbb{N} : \xi_n \perp \eta_n$. По определению мат. ожидания:

$$E\xi\eta = \lim_{n \rightarrow +\infty} E\xi_n \eta_n \stackrel{\perp}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} E\xi_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} E\eta_n = E\xi \cdot E\eta$$

Теперь пусть ξ, η – произвольные случайные величины. Тогда $\xi^\pm \perp \eta^\pm$, как функции от независимых случайных величин. Причём

$$(\xi\eta)^+ = \xi^+ \eta^+ + \xi^- \eta^-; \quad (\xi\eta)^- = \xi^+ \eta^- + \xi^- \eta^+$$

По определению

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= E(\xi\eta)^+ - E(\xi\eta)^- = E\xi^+ \eta^+ + E\xi^- \eta^- - E\xi^+ \eta^- - E\xi^- \eta^+ \stackrel{\perp}{=} \\ &= E\xi^+ \cdot E\eta^+ + E\xi^- \cdot E\eta^- - E\xi^+ \cdot E\eta^- - E\xi^- \cdot E\eta^+ = (E\xi^+ - E\xi^-)(E\eta^+ - E\eta^-) = \\ &= E\xi \cdot E\eta \end{aligned}$$

□

11 Теорема о замене переменных в интеграле Лебега...

Теорема 11.1. *О замене переменных в интеграле Лебега.*

Пусть ξ – случайный вектор из \mathbb{R}^m на (Ω, \mathcal{F}, P) , P_ξ – его распределение. Тогда $\forall g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – борелевской функции, выполнено

$$Eg(\xi) = \int_{\Omega} g(\xi) dP = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx)$$

Доказательство. Пусть сначала $g(x) = \mathbb{I}_A(x)$, где $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Тогда

$$Eg(\xi) = E\mathbb{I}\{\xi \in A\} = P(\xi \in A) = P_\xi(A) = \int_A P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{I}_A(x) P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx)$$

В формуле из утверждения теоремы обе части линейны по g . Равенство верно для индикаторов \Rightarrow верно для простых функций.

Если $g \geq 0$, то рассмотрим последовательность простых функций $0 \leq g_n \uparrow g$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_n(x) P_\xi(dx) = Eg_n(\xi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Eg(\xi)$$

для неотрицательных доказали.

Если g – произвольная функция, то раскладываем $g = g^+ - g^-$ и пользуемся линейностью.

Причём все математические ожидания будут конечны, бесконечны и неопределены одновременно. \square

Следствие. 1. Для вычисления $Eg(\xi)$ достаточно знать распределение P_ξ .

2. Если распределение ξ, η совпадают, то \forall борелевской функции $g(x)$ выполнено

$$Eg(\xi) = Eg(\eta)$$

3. Если ξ – случайная величина, то

$$E\xi = \int_{\mathbb{R}} x P_\xi(dx)$$

Замечание.

$$dF(x) := P(dx)$$

где F – функция распределения вероятностной меры P .

Определение 11.1. Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, μ – σ -конечная мера на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Мера P имеет плотность $p(t) \geq 0$ по мере μ , если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : P(B) = \int_B p(t) \mu(dt)$$

Теорема 11.2. *О плотности.*

Пусть случайный вектор $\xi \in \mathbb{R}^m$ имеет распределение P_ξ , и P_ξ имеет плотность $p(t)$ по σ -конечной мере на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Тогда \forall борелевской функции $g(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) p(x) \mu(dx)$$

Доказательство. Пусть сначала $g(x) = \mathbb{I}_A(x)$, где $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Тогда

$$Eg(\xi) = P(\xi \in A) = P_\xi(A) = \int_A p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{I}_A(x)p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)p(x)\mu(dx)$$

Обе части доказываемого равенства линейны по $g \Rightarrow$ формула верна для простых функций.

Если $g \geq 0$, то рассмотрим последовательность простых функций $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$, такую что $0 \leq g_n(x) \uparrow g(x)$. Тогда по определению интеграла Лебега:

$$Eg(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Eg_n(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_n(x)p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)p(x)\mu(dx)$$

(по теореме о монотонной сходимости)

Для произвольной g раскладываем $g(x) = g^+ - g^-$ и пользуемся линейностью. \square

Следствие. Пусть ξ – дискретная случайная величина, сосредоточенная на X . Тогда

$$Eg(\xi) = \sum_{x \in X} g(x)P(\xi = x)$$

Доказательство. Мы знаем, что $p(x) = P_\xi(\{x\}) = P(\xi = x)$. Тогда

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)\mu(dx) = \sum_{x \in X} g(x)P(\xi = x)$$

\square

Следствие. Пусть ξ – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью $p(x)$. Тогда

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)dx$$

Следствие. Пусть ξ – случайный вектор из \mathbb{R}^m с плотностью $p(x)$. Тогда

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} g(\vec{x})p(\vec{x})d\vec{x}$$

12 Прямое произведение вероятностных пространств

Определение 12.1. Пусть $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ – два вероятностных пространства. Их прямым произведением называется вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) , где

1. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$
2. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(B_1 \times B_2 : B_i \in \mathcal{F}_i)$ – σ -алгебра, порождённая прямоугольниками.
3. $P = P_1 \times P_2$ – вероятностная мера на (Ω, \mathcal{F}) , такая, что $P(B_1 \times B_2) = P_1(B_1)P_2(B_2)$

Лемма 12.1. Такая вероятностная мера P существует и единственна.

Доказательство. Рассмотрим \mathcal{A} – конечное объединение непересекающихся прямоугольников. Тогда \mathcal{A} – алгебра и $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$. Определим P на \mathcal{A} по конечной аддитивности. Остаётся проверить, что P – счётно-аддитивна на \mathcal{A} .

Пусть $C = \sqcup_i C_i$; $C_i, C \in \mathcal{A}$. Надо проверить, что

$$P(C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i)$$

Достаточно проверить для прямоугольников:

$$C = A \times B, C_i = A_i \times B_i$$

Представим в виде индикаторов:

$$\mathbb{I}_{A \times B}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i \times B_i}(\omega_1, \omega_2)$$

или

$$\mathbb{I}_A(\omega_1) \cdot \mathbb{I}_B(\omega_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i}(\omega_1) \mathbb{I}_{B_i}(\omega_2)$$

Зафиксируем $\omega_1 \in \Omega_1$ и возьмём E от обеих частей неравенства в $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$:

$$\mathbb{I}_A(\omega_1) P_2(B_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i}(\omega_1) P_2(B_i)$$

Теперь берём E в $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$:

$$P_1(A) P_2(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P_1(A_i) P_2(B_i)$$

□

Теорема 12.1. Фубини (б/д).

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) – это прямое произведение $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$. Пусть случайная величина $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что

$$\int_{\Omega} \xi dP < +\infty$$

Тогда

$$\int_{\Omega_i} \xi(\omega_1, \omega_2) P_i(d\omega_i)$$

конечен почти наверное по мере P_{3-i} , является \mathcal{F}_{3-i} измеримой функцией и, кроме того,

$$\int_{\Omega} \xi(\omega_1, \omega_2) P(d\omega_1, d\omega_2) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2) \right) P_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) \right) P_2(d\omega_2)$$

13 Совместное распределение. . .

Утверждение 13.1. Если случайные величины ξ, η – независимые, то

$$P_{(\xi, \eta)} = P_\xi \times P_\eta$$

Доказательство.

$$P_{(\xi, \eta)}(B_1 \times B_2) = P((\xi, \eta) \in B_1 \times B_2) = P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) \stackrel{\text{Фубини}}{=} P_\xi(B_1)P_\eta(B_2)$$

□

Лемма 13.1. О свёртке распределений.

Пусть ξ, η – это независимые случайные величины с функциями распределения F_ξ, F_η . Тогда $\xi + \eta$ имеет следующую функцию распределения:

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x) dF_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(z-x) dF_\xi(x)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(z) &= P(\xi + \eta \leq z) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}\{x + y \leq z\} P_{(\xi, \eta)}(dx, dy) \stackrel{\text{Фубини}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}\{x + y \leq z\} P_\xi(dx) \right) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-y) dF_\eta(y) \end{aligned}$$

□

Следствие. Формула свёртки.

Пусть $\xi \perp \eta$ с плотностями p_ξ, p_η . Тогда $\xi + \eta$ тоже имеет плотность, причём

$$p_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} p_\xi(z-x) p_\eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}} p_\eta(z-x) p_\xi(x) dx$$

Доказательство. По лемме о свёртке:

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(z) &= \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x) dF_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{z-x} p_\xi(y) dy \right) p_\eta(x) dx \stackrel{y' := y+x}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^z p_\xi(y'-x) dy' \right) p_\eta(x) dx \stackrel{\text{Фубини}}{=} \int_{-\infty}^z \left(\int_{\mathbb{R}} p_\xi(y'-x) p_\eta(x) dx \right) dy' = \\ &= \int_{-\infty}^z p_{\xi+\eta}(y') dy' \end{aligned}$$

□

14 Дисперсия, ковариация и коэффициент корреляции

Определение 14.1. Дисперсией случайной величины ξ называется

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

если $E\xi$ конечно.

Определение 14.2. Ковариацией случайных величин ξ, η называется

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

если $E\xi, E\eta$ конечны.

Определение 14.3. ξ и η называются некоррелированными, если

$$\text{cov}(\xi, \eta) = 0$$

Определение 14.4. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ, η называется

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$$

если $D\xi, D\eta$ положительная и конечная.

Лемма 14.1. Свойства дисперсии и ковариации.

1. Ковариация билинейна
2. $\forall c \in \mathbb{R} : D(c\xi) = c^2 D(\xi), D(\xi + c) = D(\xi)$
3. $\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$. В частности $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$
4. Неравенство Коши-Буняковского:

$$|E\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$$

причём равенство достигается $\Leftrightarrow \xi, \eta$ линейно зависимы.

5. $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$ и равен 1 $\Leftrightarrow \xi - E\xi, \eta - E\eta$ линейно зависимы почти наверное

Доказательство. 1 – 3 следуют из свойств математического ожидания. 4 было доказано на ОВИТМе.

Для последнего свойства рассмотрим

$$\xi' := \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}, \eta' := \frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}} \Rightarrow \rho(\xi, \eta) = E\xi'\eta'$$

По неравенству КБ:

$$|\rho(\xi, \eta)| \leq \sqrt{E(\xi')^2 E(\eta')^2} = 1$$

Равенство достигается $\Leftrightarrow \xi', \eta'$ линейно зависимы почти наверное. □

Следствие. Если ξ_1, \dots, ξ_n – попарно некоррелированные случайные величины с конечными дисперсиями, то

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{k=1}^n D\xi_k$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} D(\xi_1 + \dots + \xi_n) &= \text{cov}(\xi_1 + \dots + \xi_n, \xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n D\xi_i \end{aligned}$$

□

Следствие. Если ξ_1, \dots, ξ_n – независимые случайные величины с конечными дисперсиями, то

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{k=1}^n D\xi_k$$

Доказательство. Независимые \Rightarrow некоррелированные

□

Определение 14.5. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор. Тогда $E\xi$ называется вектор из математических ожиданий компонент:

$$E\xi = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)$$

Определение 14.6. Дисперсией (матрицей ковариаций) вектора ξ называется матрица:

$$D\xi = (\text{cov}(\xi_i, \xi_j); i, j = \overline{1, n})$$

Утверждение 14.1. Матрица ковариаций – симметричная и неотрицательно определённая матрица.

Доказательство. $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \text{cov}(\xi_j, \xi_i)$ по определению ковариации \Rightarrow симметричная.

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, возьмём $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \langle D\xi \cdot \vec{x}, \vec{x} \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(x_i \xi_i, x_j \xi_j) = \\ &= \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i, \sum_{j=1}^n x_j \xi_j\right) = D\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right) \geq 0 \end{aligned}$$

□

15 Сходимости случайных величин

Определение 15.1. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится к случайной величине ξ :

1. С вероятностью 1 (почти наверное), если

$$P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = \xi\right) = 1$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$

2. По вероятности, если:

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$

3. В среднем порядка $p > 0$ (в L^p), если

$$E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$

4. По распределению, если $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывных ограниченных функций выполнено

$$Ef(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Ef(\xi)$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Теорема 15.1. Критерий сходимости с вероятностью 1.

Случайные величины $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Доказательство. Рассмотрим

$$A_k^\varepsilon = \bigcup_{k \geq n} \{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} = \left\{ \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon \right\}$$

Тогда

$$\{\xi_n \not\xrightarrow{\text{п.н.}} \xi\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{m}}$$

Значит

$$\begin{aligned} P(\xi_n \not\xrightarrow{\text{п.н.}} \xi) = 0 &\Leftrightarrow P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\forall m \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(A_n^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n^\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

□

Теорема 15.2. *О взаимоотношении различных видов сходимостей.*

1. $\xi_n \xrightarrow{n.н.} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
2. $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
3. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0$ выполняется:

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq P\left(|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq P\left(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

в силу критерия сходимости с вероятностью 1.

2. $\forall \varepsilon > 0$ выполняется:

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^p \geq \varepsilon^p) \stackrel{\text{н-во Маркова}}{\leq} \frac{E|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon^p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

3. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная ограниченная непрерывная функция. Возьмём $\varepsilon > 0$. Пусть $|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$. Пусть $N > 0$ таково, что $P(|\xi| > N) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. В силу равномерной непрерывности f на отрезках выберем $\delta > 0$, такое, что

$$\forall x \in [-N, N] \forall y, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$$

Рассмотрим разбиение Ω :

$$A_1 = \{|\xi_n - \xi| \leq \delta, |\xi| \leq N\}; \quad A_2 = \{|\xi_n - \xi| \leq \delta, |\xi| > N\}; \quad A_3 = \{|\xi_n - \xi| > \delta\}$$

Значит можем оценить

$$|Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \leq E|f(\xi_n) - f(\xi)| = \sum_{i=1}^3 E(|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot \mathbb{I}_{A_i})$$

На A_1 выполнено $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow E|f(\xi_n) - f(\xi)|\mathbb{I}_{A_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. На A_2, A_3 выполнено $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq 2M$. Тогда

$$\sum_{i=2}^3 E|f(\xi_n) - f(\xi)|\mathbb{I}_{A_i} \leq 2M(P(A_2) + P(A_3)) \leq 2M(P(|\xi| > N) + P(|\xi_n - \xi| > \delta)) \leq \varepsilon$$

в силу сходимости по вероятности.

В итоге получили, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \leq \varepsilon$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $Ef(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Ef(\xi)$

□

16 Достаточное условие сходимости с вероятностью...

Лемма 16.1. *Достаточное условие сходимости с вероятностью 1.*

Если

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) < +\infty$$

то $\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi$

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned} P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon) &= P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\}\right) \leq \\ &\sum_{k=n}^{\infty} P(|\xi_k - \xi| > \varepsilon) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

В силу стремления остатка сходящегося ряда к нулю.

Тогда по критерию $\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi$

□

Следствие. Если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, то \exists подпоследовательность $\{\xi_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$, такая что

$$\xi_{n_k} \xrightarrow{n.n., k \rightarrow +\infty} \xi$$

Доказательство. Выберем n_k так, чтобы $n_k > n_{k-1}$ и

$$P(|\xi_{n_k} - \xi| \geq \frac{1}{k}) \leq 2^{-k}$$

выбор возможен в силу сходимости по вероятности.

Проверим достаточное условие: пусть $\varepsilon > 0$, выберем $k_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} P(|\xi_{n_k} - \xi| \geq \varepsilon) \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} P(|\xi_{n_k} - \xi| \geq \frac{1}{k}) \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k} < +\infty \Rightarrow \xi_{n_k} \xrightarrow{n.n., k \rightarrow +\infty} \xi$$

□

Теорема 16.1. *УЗБЧ в форме Кантелли.*

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – это независимые случайные величины, такие, что

$$\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : E(\xi_n - E\xi_n)^4 \leq c$$

Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{n.n., n \rightarrow +\infty} 0$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $\forall n \in \mathbb{N} : E\xi_n = 0$, иначе рассмотрим

$$\xi'_n = \xi_n - E\xi_n$$

Хотим проверить достаточное условие. Для $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\frac{S_n^4}{n^4} \geq \varepsilon^4\right) \stackrel{\text{н-во Маркова}}{\leq} \frac{ES_n^4}{\varepsilon^4 n^4}$$

Но

$$ES_n^4 = \sum_{i,j,k,l=1}^n E\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l = \sum_{i=1}^n ES_i^4 + 6 \sum_{i < j} ES_i^2 ES_j^2$$

По условию $\forall i \in \mathbb{N} : ES_i^4 \leq c \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} : E\xi_i^2 \leq \sqrt{ES_i^4} \leq \sqrt{c} \Rightarrow$

$$ES_n^4 \leq n \cdot c + 6 \cdot c \cdot c_n^2 = O(n^2) \Rightarrow \frac{ES_n^4}{\varepsilon^4 n^4} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Значит ряд сходится и работает достаточно условие сходимости с вероятностью 1. \square

Замечание. Смысл УЗБЧ.

Теоретическое обоснование принципа устойчивых частот. Пусть

$$\xi_i = \mathbb{I}\{A \text{ произошло в } i\text{-ом эксперименте}\}$$

Тогда частота появления A стремится к:

$$\nu_n(A) = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1 = P(A)$$

17 Фундаментальность с вероятностью 1

Определение 17.1. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью 1, если

$$P(\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}) = 1$$

Утверждение 17.1. Последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится почти наверное \Leftrightarrow она фундаментальна с вероятностью 1.

Доказательство. \Rightarrow Пусть $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, тогда

$$P(\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}) \geq P(\xi_n \rightarrow \xi) = 1$$

\Leftarrow Обозначим $A = \{\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}\}$. Тогда $\forall \omega \in A : \{\xi_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ имеет предел $\xi(\omega)$. Положим $\xi(\omega) = 0, \forall \omega \notin A$. Тогда

$$\forall \omega \in \Omega : \xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\xi_n(\omega) \mathbb{I}_A(\omega))$$

Причём ξ – это случайная величина, как предел случайных величин.

Наконец, $P(\xi_n \rightarrow \xi) \geq P(A) = 1$ □

Теорема 17.1. Неравенство Колмогорова.

Пусть ξ_1, \dots, ξ_n – независимые случайные величины, $E\xi_k = 0, E\xi_k^2 < +\infty, \forall k = \overline{1, n}$. Обозначим $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}$$

Доказательство. Введём обозначения

$$A := \{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\}; A_k := \{|S_k| \geq \varepsilon, |S_i| < \varepsilon \forall i = \overline{1, k-1}\}$$

Тогда $A = \sqcup_{i=1}^n A_i$. Продолжим рассуждения:

$$\begin{aligned} ES_n^2 &\geq E(S_n^2 \cdot \mathbb{I}_A) = \sum_{k=1}^n E(S_n^2 \mathbb{I}_{A_k}) = \sum_{k=1}^n E((S_k + \xi_{k+1} + \dots + \xi_n)^2 \mathbb{I}_{A_k}) = \\ &\sum_{k=1}^n [ES_k^2 \cdot \mathbb{I}_{A_k} + E((\xi_{k+1} + \dots + \xi_n)^2 \cdot \mathbb{I}_{A_k}) + 2E(S_k \cdot \mathbb{I}_{A_k} (\xi_{k+1} + \dots + \xi_n))] \end{aligned}$$

Причём последнее слагаемое будет равно нулю, так как $(S_k \mathbb{I}_{A_k}) \perp (\xi_{k+1} + \dots + \xi_n)$, как функции от непересекающихся наборов независимых случайных величин, и $E(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n) = 0$. Но $S_k^2 \mathbb{I}_{A_k} \geq \varepsilon^2 \mathbb{I}_{A_k}$. Тогда получим

$$ES_n^2 \geq \sum_{k=1}^n \varepsilon^2 E \mathbb{I}_{A_k} = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n P(A_k) = \varepsilon^2 P(A)$$

□

Теорема 17.2. *Колмогорова-Хинчин о сходимости почти наверное ряда из случайных величин.*

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые случайные величины, $E\xi_n = 0, D\xi_n < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n < +\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится почти наверное.

Доказательство. Введём $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. Используя критерий сходимости почти наверное, хотим получить

$$\forall \varepsilon > 0 : P \left(\sup_{k \geq n} |S_k - S_n| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Распишем меру этого события более подробно:

$$\begin{aligned} P \left(\sup_{k \geq n} |S_k - S_n| > \varepsilon \right) &= P \left(\bigcup_{k \geq n} \{|S_k - S_n| > \varepsilon\} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P \left(\bigcup_{k=n}^N \{|S_k - S_n| > \varepsilon\} \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} P \left(\max_{1 \leq k \leq N-n} |S_{n+k} - S_n| > \varepsilon \right) \stackrel{\text{н-во Колмогорова}}{\leq} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E|S_{n+N} - S_n|^2}{\varepsilon^2} = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{D(\xi_{n+1} + \dots + \xi_N)}{\varepsilon^2} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^N D\xi_k = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} D\xi_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Последний переход обусловлен тем, что остаток сходящегося ряда стремится к нулю. \square

18 Леммы Теплица и Кронекера...

Лемма 18.1. *Тёплица (б/д)*

Пусть $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ – положительные числа, $X_n \rightarrow X, b_n = \sum_{j=1}^n a_j \uparrow +\infty$. Тогда

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n a_j x_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$$

Лемма 18.2. *Кронекера (б/д)*

Пусть $b_n > 0$ и $b_n \uparrow +\infty$, пусть $\sum x_n$ сходится. Тогда

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n b_j x_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Определение 18.1. Пусть $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность событий. Событием $\{A_n \text{ б.ч.}\}$ называется

$$\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} A_m$$

Это событие состоит в том, что произошло бесконечное число событий A_n .

Лемма 18.3. *Бореля-Кантелли.*

1. Если $\sum_n P(A_n) < +\infty$, то $P(A_n \text{ б.ч.}) = 0$
2. Если $\sum_n P(A_n) = +\infty$ и события $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимы в совокупности, то $P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$

Доказательство. 1. Распишем более подробно исследуемую меру:

$$P(A_n \text{ б.ч.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

Так как ряд $\sum_n P(A_n)$ сходится

2. Мы уже знаем, что

$$\begin{aligned} P(A_n \text{ б.ч.}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right) \end{aligned}$$

Рассмотрим предел

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N P(\overline{A_k}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N (1 - P(A_k)) \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N e^{-P(A_k)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} e^{-\sum_{k=n}^N P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 0 \end{aligned}$$

Последний переход верен, так как ряд $\sum_n P(A_n)$ расходится. $\Rightarrow P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$

□

Теорема 18.1. УЗБЧ в форме Колмогорова

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые одинаково распределённые случайные величины. Пусть $E\xi_1$ конечно. Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $E\xi_1 = 0$. Иначе перейдём к случайным величинам $\xi_n - E\xi_1$. Тогда

$$E|\xi_1| < +\infty \Rightarrow \sum_n P(|\xi_1| \geq n) < +\infty \stackrel{\text{один.распр.}}{\Leftrightarrow} \sum_n P(|\xi_n| \geq n) < +\infty$$

По лемме Бареля-Кантелли $P((A := \{|\xi_m| \geq n\}) \text{ б.ч.}) = 0$, то есть с вероятностью 1 выполняется:

$$\xi_n = \bar{\xi}_n = \xi_n \mathbb{I}\{|\xi_n| < n\}$$

начиная с некоторого номера $n_0 = n_0(\omega)$.

Тем самым $\forall \omega \notin A$:

$$\frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{\bar{\xi}_1(\omega) + \dots + \bar{\xi}_n(\omega)}{n} \rightarrow 0$$

Остаётся доказать, что $\frac{\bar{\xi}_1 + \dots + \bar{\xi}_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$.

Рассмотрим $E\bar{\xi}_n$:

$$E\bar{\xi}_n = E\xi_n \mathbb{I}\{|\xi_n| < n\} \stackrel{\text{один.распр.}}{=} E\xi_1 \mathbb{I}\{|\xi_1| < n\} \xrightarrow{\text{т. Лебега}} E\xi_1 = 0$$

По лемме Тёплица $\frac{E\bar{\xi}_1 + \dots + E\bar{\xi}_n}{n} \rightarrow 0$. Тогда

$$\frac{\bar{\xi}_1(\omega) + \dots + \bar{\xi}_n(\omega)}{n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{\bar{\xi}_1(\omega) - E\bar{\xi}_1 + \dots + \bar{\xi}_n(\omega) - E\bar{\xi}_n}{n} \rightarrow 0$$

Остаётся проверить, что ряд $\sum_n \frac{\bar{\xi}_n - E\bar{\xi}_n}{n}$ сходится почти наверное. Почему? Мы применим лемму Кронекера, взяв $x_n = \frac{\bar{\xi}_n}{n}, b_n = n$.

А для этого достаточно проверить, что $\sum_{k=1}^{\infty} D\left(\frac{\bar{\xi}_k}{k}\right) < +\infty$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} D\left(\frac{\bar{\xi}_k}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\bar{\xi}_k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\bar{\xi}_k^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\xi_k^2 \mathbb{I}\{|\xi_k| < k\}}{k^2} \stackrel{\text{один.распр.}}{=} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\xi_1^2 \mathbb{I}\{|\xi_1| < k\}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k E(\xi_1^2 \mathbb{I}\{i-1 \leq |\xi_1| < i\}) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} E(\xi_1^2 \mathbb{I}\{i-1 \leq |\xi_1| < i\}) \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{\xi_1^2}{i} \mathbb{I}\{i-1 \leq |\xi_1| < i\}\right) \leq \\ &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} E(|\xi_1| \mathbb{I}\{i-1 \leq \xi_1 < i\}) \stackrel{\text{т. о мон-й сх-ти}}{=} 2E|\xi_1| < +\infty \end{aligned}$$

□

19 Слабая сходимость и сходимость в основном...

Определение 19.1. Пусть $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$, F – функции распределения на \mathbb{R} . Последовательность $\{F_n\}$ слабо сходится к F , если $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывной ограниченной функции, выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)$$

Обозначение: $F_n \xrightarrow{W} F$

Определение 19.2. Последовательность $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ функций распределения на \mathbb{R} сходится в основном к функции распределения F , если

$$\forall x \in \mathbb{C}(F) : F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(x)$$

где $\mathbb{C}(F)$ – точки непрерывности функции F .

Обозначение: $F_n \Rightarrow F$

Определение 19.3. Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$, P – вероятностные меры на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Тогда последовательность $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится к P , если $\forall f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченной непрерывной функции выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x) P_n(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) P(dx)$$

Обозначение: $P_n \xrightarrow{W} P$

Определение 19.4. Последовательность $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится к P в основном, если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : P_n(B) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(B)$$

с условием $P(\partial B) = 0$

Теорема 19.1. *Александрова (б/д).*

Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$, P – вероятностные меры на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $P_n \xrightarrow{W} P$
2. $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} P_n(F) \leq P(F), \forall F$ – замкнутых.
3. $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} P_n(G) \geq P(G), \forall G$ – открытых.
4. $P_n \Rightarrow P$

Теорема 19.2. *Об эквивалентности сходимостей.*

Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$, P – вероятностные меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, а $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$, F – соответствующие им функции распределения. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $P_n \xrightarrow{W} P$
2. $P_n \Rightarrow P$

$$3. F_n \xrightarrow{W} F$$

$$4. F_n \Rightarrow F$$

Доказательство. $1 \Leftrightarrow 2$ по теореме Александрова. $1 \Leftrightarrow 3$ по определению.

Для $2 \Rightarrow 4$ рассмотрим $B = (-\infty, x]$. Тогда $\partial B = \{x\}$. Если x – точка непрерывности F , то $P(\{x\}) = 0 \Rightarrow P(\partial B) = 0$. Значит, в силу сходимости в основном плотностей:

$$F_n(x) = P_n((-\infty, x]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, x]) = F(x) \Rightarrow F_n \Rightarrow F$$

Для $4 \Rightarrow 2$ пусть $F_n \Rightarrow F$. По теореме Александрова достаточно проверить, что \forall открытых G выполнено

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(G) \geq P(G)$$

Раз $G \subset \mathbb{R}$, то G представимо в виде конечного или счётного числа непересекающихся интервалов:

$$G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$

Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Для $\forall k \in \mathbb{N}$ подберём полуинтервал $(a'_k, b'_k] \subset (a_k, b_k)$, такой, что

$$P((a_k, b_k)) \leq P((a'_k, b'_k]) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

и a'_k, b'_k – точки непрерывности F .

Такой выбор возможен в силу непрерывности вероятностной меры и того факта, что множество точек разрыва F не более чем счётно. Далее:

$$\begin{aligned} \lim_n P_n(G) &= \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} P_n((a_k, b_k)) \stackrel{\forall N > 0}{\geq} \lim_n \sum_{k=1}^N P_n((a_k, b_k)) \geq \sum_{k=1}^N \lim_n P_n((a_k, b_k)) \geq \\ &\sum_{k=1}^N \lim_n P_n((a'_k, b'_k]) = \sum_{k=1}^N \lim_n (F_n(b'_k) - F_n(a'_k)) \stackrel{F_n \Rightarrow F}{=} \sum_{k=1}^N (F(b'_k) - F(a'_k)) = \sum_{k=1}^N P((a'_k, b'_k]) \geq \\ &\sum_{k=1}^N P((a_k, b_k)) - \varepsilon \end{aligned}$$

Устремляя $N \rightarrow +\infty$, получаем

$$\lim_n P_n(G) \geq \sum_{k=1}^{\infty} P((a_k, b_k)) - \varepsilon = P(G) - \varepsilon$$

В силу произвольного $\varepsilon > 0$:

$$\lim_n P_n(G) \geq P(G)$$

Благодаря теореме Александрова, всё доказали. □

Следствие. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ – случайные величины. Тогда

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}(F_\xi) : F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_\xi(x)$$

20 Характеристические функции...

Определение 20.1. Пусть ξ – случайная величина. Характеристической функцией случайной величины ξ называется

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\xi t}, t \in \mathbb{R}$$

Определение 20.2. Пусть ξ – случайный вектор из \mathbb{R}^n . Характеристической функцией ξ называется

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\langle \xi, t \rangle}, t \in \mathbb{R}^n$$

Определение 20.3. Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Характеристической функцией меры P называется

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle x, t \rangle} P(dx)$$

Пример. Вычисление характеристической функции для стандартного нормального распределения.

Пусть $\xi \equiv \mathcal{N}(0, 1)$. Тогда

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Имеем право рассмотреть производную характеристической функции:

$$\varphi'_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)(-x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - t \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Получили диффур вида

$$\varphi'_\xi(t) = (-t) \cdot \varphi_\xi(t)$$

Решая его, получим, что

$$\varphi_\xi(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$$

Из начальных условий, $C = 1$ (т.к. $\forall \xi : \varphi_\xi(0) = 1$).

Значит $\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Свойства характеристических функций случайных величин

1. Если $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ , то

$$\forall t \in \mathbb{R} : |\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$$

Доказательство.

$$|\varphi(t)| = |Ee^{i\xi t}| \leq E|e^{i\xi t}| \stackrel{=1}{=} 1 = \varphi(0)$$

□

2. Если $\varphi_\xi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ , $\eta = a\xi + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, то

$$\varphi_\eta(t) = e^{itb} \varphi_\xi(at)$$

Доказательство.

$$\varphi_\eta(t) = Ee^{i\eta t} = Ee^{i(a\xi+b)t} = e^{itb} Ee^{i\xi(at)} = e^{itb} \varphi_\xi(at)$$

□

3. Если $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ , то $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на \mathbb{R} .

Доказательство. Рассмотрим

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = |Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}| = |Ee^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)| \leq E|e^{it\xi}| |e^{ih\xi} - 1| = E|e^{ih\xi} - 1|$$

Заметим, что $|e^{ih\xi} - 1| \xrightarrow{\forall \omega \in \Omega} 0$ при $h \rightarrow 0$. Также, оценив $|e^{ih\xi} - 1| \leq 2$ сможем применить теорему Лебега и получить:

$$E|e^{ih\xi} - 1| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

□

4. Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ . Тогда

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$$

Доказательство.

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = E \cos(t\xi) + iE \sin(t\xi) = E \cos(-t\xi) - iE \sin(-t\xi) = \overline{Ee^{-it\xi}} = \overline{\varphi(-t)}$$

□

5. Единственность (б/д) Пусть ξ, η – случайные величины. Тогда

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) \Leftrightarrow \xi \stackrel{d}{=} \eta \text{ (одинаково распределены)}$$

6. Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ . Тогда

$$\forall t : \varphi(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \xi \stackrel{d}{=} -\xi$$

то есть распределение ξ симметрично:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : P(\xi \in B) = P(\xi \in -B)$$

Доказательство. \Rightarrow :

$$\varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)} = \varphi_\xi(t) \Rightarrow \xi \stackrel{d}{=} -\xi$$

\Leftarrow :

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)} \Rightarrow \forall t : \varphi_\xi(t) \in \mathbb{R}$$

□

7. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n – независимые случайные величины. Тогда

$$\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$$

Доказательство.

$$\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = Ee^{it(\xi_1+\dots+\xi_n)} \stackrel{\text{II}}{=} E \prod_{k=1}^n e^{it\xi_k} = \prod_{k=1}^n Ee^{it\xi_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$$

□

21 Единственность характеристических функций...

Теорема 21.1. *Единственности.*

Пусть ξ, η – случайные величины. Тогда

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) \Leftrightarrow \xi \stackrel{d}{=} \eta$$

Доказательство. \Leftarrow Очевидно из формулы вычисления матожидания.

\Rightarrow Для $a < b$ и малого $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию $f_\varepsilon(x)$:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a] \cup [b + \varepsilon, +\infty) \\ \frac{x-a}{\varepsilon}, & x \in [a, a + \varepsilon] \\ 1, & x \in [a + \varepsilon, b] \\ \frac{b+\varepsilon-x}{\varepsilon}, & x \in [b, b + \varepsilon] \end{cases}$$

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0$ достаточно малого:

$$Ef_\varepsilon(\xi) = Ef_\varepsilon(\eta)$$

Возьмём большое $n \in \mathbb{N}$, такое что $[-n, n] \supset [a, b + \varepsilon]$. Тогда $\forall n$ по т. Вейерштрасса \exists функция $f_\varepsilon^{(n)}(x)$ на $[-n, n]$ вида

$$f_\varepsilon^{(n)}(x) = \sum_{k \in K} c_k e^{\frac{i\pi k x}{n}}$$

где $K \subset \mathbb{Z}$ – конечное множество. Причём

$$\forall x \in [-n, n] : |f_\varepsilon^{(n)}(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{n}$$

Очевидно, $f_\varepsilon^{(n)}(x)$ периодическая с периодом $2n$, продолжим её на \mathbb{R} той же формулой. Заметим, что

$$\forall x \in [-n, n] : |f_\varepsilon^{(n)}(x)| \leq 2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : |f_\varepsilon^{(n)}(x)| \leq 2$$

Рассмотрим

$$|Ef_\varepsilon(\xi) - Ef_\varepsilon(\eta)| \leq |Ef_\varepsilon(\xi) - Ef_\varepsilon^{(n)}(\xi)| + |Ef_\varepsilon(\eta) - Ef_\varepsilon^{(n)}(\eta)| + |Ef_\varepsilon^{(n)}(\xi) - Ef_\varepsilon^{(n)}(\eta)|$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как $f_\varepsilon^{(n)}(\xi), f_\varepsilon^{(n)}(\eta)$ – это какие-то линейная комбинация характеристических функций ξ, η с одинаковыми коэффициентами, которые равны по условию.

Далее,

$$|E(f_\varepsilon(\xi) - f_\varepsilon^{(n)}(\xi))| \leq E(|f_\varepsilon(\xi) - f_\varepsilon^{(n)}(\xi)| \cdot \mathbb{I}\{|\xi| \leq n\}) + (|f_\varepsilon(\xi) - f_\varepsilon^{(n)}(\xi)| \cdot \mathbb{I}\{|\xi| > n\}) \leq \frac{1}{n} + 2P(|\xi| > n)$$

В итоге получим, что

$$|Ef_\varepsilon(\xi) - Ef_\varepsilon(\eta)| \leq \frac{2}{n} + 2P(|\xi| > n) + 2P(|\eta| > n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow Ef_\varepsilon(\xi) = Ef_\varepsilon(\eta)$$

Заметим, что

$$\forall \omega \in \Omega : f_\varepsilon(\xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{I}\{\xi \in (a, b]\}, |f_\varepsilon(\xi)| \leq 1 \xrightarrow{\text{т. Лебега}} E f_\varepsilon(\xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E \mathbb{I}\{\xi \in (a, b]\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$

Итоговый результат

$$\forall a < b : F_\xi(b) - F_\xi(a) = F_\eta(b) - F_\eta(a)$$

Устремляя $a \rightarrow -\infty$:

$$F_\xi(b) = F_\eta(b) \Rightarrow \xi \stackrel{d}{=} \eta$$

□

Пример. Вычисление распределения суммы независимых нормальных случайных величин.

Пусть ξ_1, ξ_2 – независимые случайные величины, $\xi_i \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$. Требуется найти распределение $\xi_1 + \xi_2$.

Доказательство. Найдём характеристическую функцию ξ_j : заметим, что

$$\eta := \frac{\xi_j - a_j}{\sigma_j} \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow \varphi_{\xi_j}(t) = e^{ita_j} \varphi_\eta(\sigma_j t) = e^{ia_j t - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2}}$$

Тогда

$$\varphi_{\xi_1 + \xi_2}(t) \stackrel{=}{=} \varphi_{\xi_1}(t) \varphi_{\xi_2}(t) = e^{it(a_1 + a_2) - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2}} \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

□

Теорема 21.2. Формула обращения (б/д).

Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ с функцией распределения F_ξ

1. Для $\forall a < b, a, b \in \mathbb{F}_\xi$ выполнено

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{-C}^C \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt$$

2. Если $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < +\infty$, то случайная величина ξ имеет плотность

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

22 Теорема о производной х-ф. . .

Теорема 22.1. *О производных характеристических функций.*

Пусть $E|\xi|^n < +\infty$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall s \leq n$:

1. $\varphi_\xi^{(s)}(t) = E((i\xi)^s e^{it\xi})$
2. $E\xi^s = \frac{\varphi_\xi^{(s)}(0)}{i^s}$
3. $\varphi_\xi(t)$ разлагается в виде:

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t)$$

$$\text{где } |\varepsilon_n(t)| \leq 3E|\xi|^n \text{ и } \varepsilon_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Доказательство. 1. Рассмотрим $s = 1$:

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \frac{1}{h}(Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}) = E\left[e^{it\xi} \left(\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right)\right]$$

Заметим, что

$$\forall \omega \in \Omega : e^{it\xi} \left(\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} (i\xi)e^{it\xi}$$

Кроме того,

$$|e^{ih\xi} - 1| = |\cos(h\xi) - 1 + i\sin(h\xi)| \leq 2|\xi h| \Rightarrow \left|e^{it\xi} \left(\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right)\right| = \left|\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right| \leq 2|\xi|$$

По теореме Лебега:

$$Ee^{it\xi} \left(\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} E(i\xi)e^{it\xi}$$

Случай $s \geq 2$ полностью аналогичен и доказывается по индукции.

2. Сразу следует из подстановки $t = 0$ в предыдущую формулу.
3. Рассмотрим

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iy)^k}{k!} + \frac{(iy)^n}{n!}(\cos \theta_1(y) + i\sin \theta_2(y))$$

где $|\theta_1(y)|, |\theta_2(y)| \leq y$

Подставляем $y = t\xi$ и берём E :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} E\xi^n (\cos \theta_1(t\xi) + i\sin \theta_2(t\xi)) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t)$$

где $\varepsilon_n(t) = E[\xi^n (\cos \theta_1(t\xi) + i\sin \theta_2(t\xi) - 1)]$.

Значит $|\varepsilon_n(t)| \leq 3E|\xi|^n$. Также

$$\forall \omega \in \Omega : \cos \theta_1(t\xi) + i\sin \theta_2(t\xi) - 1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Кроме того,

$$|\xi^n(\cos \theta_1(t\xi) + i \sin \theta_2(t\xi) - 1)| \leq 3|\xi|^n$$

По теореме Лебега $\varepsilon_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

□

Следствие. Если $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ и $E|\xi|^2 < +\infty$, то

$$\varphi(t) = 1 + (it)E\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + o(t^2), t \rightarrow 0$$

Теорема 22.2. Критерий независимости компонент случайного вектора в терминах характеристических функций.

Случайная величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы в совокупность \Leftrightarrow

$$\varphi_\xi(t_1, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k)$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор.

Доказательство. \Rightarrow :

$$\varphi_\xi(t_1, \dots, t_n) = Ee^{i\langle \xi, t \rangle} = Ee^{i \sum_{k=1}^n t_k \xi_k} = E \left[\prod_{k=1}^n e^{it_k \xi_k} \right] \stackrel{\text{независимости}}{=} \prod_{k=1}^n Ee^{it_k \xi_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k)$$

\Leftarrow : Рассмотрим F_1, \dots, F_n – функции распределения случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n . Составим функцию распределения $G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_i(x_i)$.

Рассмотрим случайный вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ с функцией распределения G . Тогда η_j имеет функцию распределения F_j и η_1, \dots, η_n – независимые случайные величины.

$$\varphi_\eta(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\eta_k}(t_k) \stackrel{\eta_k \stackrel{d}{=} \xi_k}{=} \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k) \stackrel{\text{по условию}}{=} \varphi_\xi(t)$$

По теореме о единственности функций распределения ξ, η совпадают \Rightarrow

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n F_k(x_k)$$

Значит ξ_1, \dots, ξ_n – независимы в совокупности.

□

Определение 22.1. Функция $f(t), t \in \mathbb{R}, f(t) \in \mathbb{C}$ называется неотрицательно определённой, если

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} : \sum_{i,j=1}^n f(t_i - t_j) z_i \overline{z_j} \geq 0$$

Теорема 22.3. Бохнера-Хинчина. (до во только необходимости)

Пусть $\varphi(t), t \in \mathbb{R}$, такова, что $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(t)$ непрерывна в нуле. Тогда $\varphi(t)$ является характеристической функцией распределения $\Leftrightarrow \varphi(t)$ неотрицательно определена.

Доказательство. \Rightarrow Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция ξ . Пусть $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$; $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k,j=1}^n \varphi_\xi(t_k - t_j) z_k \overline{z_j} &= \sum_{k,j=1}^n E e^{i(t_k - t_j)\xi} z_k \overline{z_j} = E \sum_{k,j=1}^n e^{i(t_k - t_j)\xi} z_k \overline{z_j} = \\ &= E \sum_{k,j=1}^n (z_k e^{it_k \xi}) \overline{(z_j e^{it_j \xi})} = E \left| \sum_{k=1}^n z_k e^{it_k \xi} \right|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

□

23 Плотность и относительная компактность семейств вероятностных мер...

Пусть $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ – семейство распределений на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$.

Определение 23.1. Семейство $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется относительно компактным, если из любой последовательности

$$\{P_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$$

можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

Определение 23.2. Семейство $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется плотным, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \subset \mathbb{R}^m - \text{компакт} : \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} P_\alpha(\mathbb{R}^m \setminus K) \leq \varepsilon$$

Теорема 23.1. Прохорова. (док-во только для \mathbb{R})

Семейство относительно компактно \Leftrightarrow оно плотно.

Доказательство. \Rightarrow пусть $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ неплотно. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \forall K \subset \mathbb{R} - \text{компакт} : \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} P_\alpha(\mathbb{R} \setminus K) > \varepsilon$$

Выберем подпоследовательность $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$, такую, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : P_{\alpha_n}(\mathbb{R} \setminus [-n, n]) > \varepsilon$$

В силу относительной компактности из $\{P_{\alpha_n}\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$P_{\alpha_{n_k}} \xrightarrow{W} Q, k \rightarrow +\infty$$

Но тогда по теореме Александрова

$$\varepsilon \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} P_{\alpha_{n_k}}(\mathbb{R} \setminus (-n, n)) \leq Q(\mathbb{R} \setminus (-n, n))$$

верно для $\forall n \in \mathbb{N}$. Но

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(\mathbb{R} \setminus (-n, n)) = 0 \Rightarrow \perp$$

\Leftarrow Пусть $\{P_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\}$ – подпоследовательность в семействе. Пусть F_n – функция распределения P_{α_n} . Занумеруем $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$.

Тогда последовательность $\{F_n(q_1), n \in \mathbb{N}\}$ – ограничена $\Rightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность $n^{(1)} = (n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots)$, такая, что $\exists \lim_j F_{n_j^{(1)}}(q_1)$.

Последовательность $\{F_{n_m^{(1)}}(q_2), m \in \mathbb{N}\}$ – ограничена $\Rightarrow \exists$ подпоследовательность $n^{(1)} \supset n^{(2)} = (n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \dots)$, такая, что $\exists \lim_m F_{n_m^{(2)}}(q_2)$. И т.д. строим $n^{(j)} = (n_1^{(j)}, n_2^{(j)}, \dots)$, такую, что

$$\exists \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{n_m^{(j)}}(q_i), \forall i = \overline{1, j}$$

Тогда диагональная последовательность $n^1 = (n_1^{(1)}, n_2^{(2)}, n_3^{(3)}, \dots)$ будет такова, что

$$\exists \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{n_m^1}(q_i), \forall i \in \mathbb{N}$$

Обозначим для $x \in \mathbb{Q}$:

$$G(x) := \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{n_m}^{(m)}(x)$$

Заметим, что $G(x)$ не убывает на \mathbb{Q} по построению. Положим для $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

$$G(x) = \inf_{y > x, y \in \mathbb{Q}} G(y)$$

Из построения сразу следует, что $G(x)$ не убывает и непрерывность справа. Проверим, что

$$\forall x \in \mathbb{C}(G) : \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{n_m}^{(m)}(x) = G(x)$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{C}(G)$. Возьмём $y > x_0, y \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} F_{n_m}^{(m)}(x_0) \leq \overline{\lim}_m F_{n_m}^{(m)}(y) = G(y) \Rightarrow \overline{\lim}_m F_{n_m}^{(m)}(x_0) \leq \inf_{y > x_0, y \in \mathbb{Q}} G(y) = G(x_0)$$

Возьмём $x_1 < y < x_0, y \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$G(x_1) \leq G(y) = \underline{\lim}_m F_{n_m}^{(m)}(y) \leq \underline{\lim}_m F_{n_m}^{(m)}(x_0)$$

Устремляя $x_1 \rightarrow x_0 - 0$. В силу неубывания $G(x)$ получаем

$$G(x_0 - 0) \leq \underline{\lim}_m F_{n_m}^{(m)}(x_0)$$

Если $x_0 \in \mathbb{C}(G)$, то $G(x_0 - 0) = G(x_0) \Rightarrow$

$$\exists \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{n_m}^{(m)}(x_0) = G(x_0)$$

Остаётся проверить, что $G(x)$ – настоящая функция распределения. В силу плотности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K = (a, b], a, b \in \mathbb{C}(G) : \forall \alpha \in \mathfrak{A} P_\alpha(K) \geq 1 - \varepsilon$$

Но тогда

$$G(b) - G(a) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (F_{n_m}^{(m)}(b) - F_{n_m}^{(m)}(a)) = \lim_{m \rightarrow +\infty} P_{n_m}^{(m)}((a, b]) \geq 1 - \varepsilon$$

Значит разность $G(b) - G(a)$ может быть сколь угодно близкой к 1. Тогда устремляя $b \rightarrow +\infty, a \rightarrow -\infty$ получим, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$$

□

24 Три леммы, теорема непрерывности...

Лемма 24.1. Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность распределений в \mathbb{R}^m . Если она плотная и любая слабо сходящаяся подпоследовательность слабо сходится к одной и той же мере Q , то

$$P_n \xrightarrow{W} Q$$

Доказательство. Пусть $P_n \not\xrightarrow{W} Q$. Тогда $\exists f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченная непрерывная функция, $\exists \varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{P_{n'}\} \subset \{P_n\}$, такая, что

$$\forall n' : \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(x) P_{n'}(dx) - \int_{\mathbb{R}^m} f(x) Q(dx) \right| \geq \varepsilon$$

Но $\{P_{n'}\}$ – тоже плотная \Rightarrow в ней есть слабо сходящаяся последовательность $\{P_{n''}\} \subset \{P_{n'}\}$. Но по условию $P_{n''} \xrightarrow{W} Q$. \perp □

Лемма 24.2. Пусть $\{P_n\}$ – последовательность распределений на \mathbb{R} , $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – соответствующая последовательность характеристических функций. Если $\{P_n\}$ – плотная, то $\{P_n\}$ слабо сходится \Leftrightarrow

$$\forall t \in \mathbb{R} : \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t)$$

Доказательство. \Rightarrow Если $P_n \xrightarrow{W} Q$, то в силу того, что $\sin(tx)$, $\cos(tx)$ – ограниченные функции, получаем

$$\varphi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_n(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} Q(dx) = \varphi(t) - \text{характеристическая функция меры } Q$$

\Leftarrow Пусть $\varphi(t) = \lim_n \varphi_n(t)$. Выберем в $\{P_n\}$ слабо сходящуюся подпоследовательность $\{P_{n'}\}$, $P_{n'} \xrightarrow{W} Q$. В силу рассуждений выше

$$\varphi_{n'}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \psi(t) - \text{хар. функция } Q \Rightarrow \psi(t) = \varphi(t)$$

Значит в силу теоремы единственности для характеристических функций все слабо сходящиеся будут иметь один и тот же предел. По лемме 1 $P_n \xrightarrow{W} Q$. □

Лемма 24.3. Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция меры P на \mathbb{R} . Тогда

$$\forall a > 0 : P\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]\right) \leq \frac{7}{a} \int_0^a (1 - \Re \varphi(t)) dt$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл, являющийся оценкой сверху, более подробно

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_0^a (1 - \Re \varphi(t)) dt &= \frac{1}{a} \int_0^a \left(\int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(tx)) P(dx) \right) dt \stackrel{\text{Фубини}}{=} \\ &= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^a (1 - \cos(tx)) dt \right) P(dx) = \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin(ax)}{ax} \right) P(dx) \geq \\ &\geq \int_{\mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]} \left(1 - \frac{\sin(ax)}{ax} \right) P(dx) \leq \inf_{|y| \geq 1} \left(1 - \frac{\sin y}{y} \right) P\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]\right) \geq \frac{1}{7} P\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]\right) \end{aligned}$$

□

Теорема 24.1. Непрерывности для характеристических функций.

Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность распределений на \mathbb{R} , $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – соответствующая последовательность характеристических функций.

1. Если $P_n \xrightarrow{W} P$, то

$$\forall t \in \mathbb{R} : \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) - \text{хар. функция меры } P$$

2. Пусть $\forall t \in \mathbb{R} : \exists \lim_n \varphi_n(t) = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ непрерывна в нуле. Тогда $\varphi(t)$ является характеристической функцией некоторой меры P и $P_n \xrightarrow{W} P$

Доказательство. 1. Следует из определения слабой сходимости

2. Проверим, что $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ – плотная. Для $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a > 0$:

$$P_n \left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a} \right] \right) \leq \frac{7}{a} \int_0^a (1 - \Re \varphi_n(t)) dt \stackrel{\text{т. Лебега}}{\rightarrow} \frac{7}{a} \int_0^a (1 - \Re \varphi(t)) dt$$

Для $\forall \varepsilon > 0 \exists a > 0$, такое, что

$$(1 - \Re \varphi(t)) \leq \frac{\varepsilon}{14} \Rightarrow \frac{7}{a} \int_0^a (1 - \Re \varphi(t)) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Значит

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : \frac{7}{a} \int_0^a (1 - \Re \varphi_n(t)) dt \leq \varepsilon$$

Значит $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ – относительно компактное \Leftrightarrow плотное. По второй лемме \exists мера P , такая, что $P_n \xrightarrow{W} P$. По предыдущем пункту получаем, что $\varphi(t)$ – характеристическая функция меры P . □

25 Центральная предельная теорема...

Теорема 25.1. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределённых случайных величин.

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые одинаково распределённые случайные величины, $E\xi_1 = a, 0 < D\xi_1 < +\infty$. Обозначим $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Доказательство. Обозначим $T_n := \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$. По теореме непрерывности достаточно проверить, что характеристическая функция T_n сходится к $e^{-\frac{t^2}{2}}$ – характеристической функции $\mathcal{N}(0, 1)$.

Обозначим $\eta_j := \frac{\xi_j - a}{\sigma}$. Тогда η_j – независимые одинаково распределённые случайные величины, причём $E\eta_j = 0, D\eta_j = E\eta_j^2 = 1$. Тогда

$$T_n = \frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n}}$$

Посчитаем хар. функцию T_n :

$$\begin{aligned} \varphi_{T_n}(t) &= Ee^{itT_n} = Ee^{i\frac{t}{\sqrt{n}}(\eta_1 + \dots + \eta_n)} \stackrel{\text{т. о. производных}}{=} \prod_{k=1}^n \varphi_{\eta_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\eta_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \\ &= \left(1 + i\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n}E\eta_1^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

□

Следствие. В условиях ЦПТ для $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Доказательство. Согласно ЦПТ:

$$T_n := \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}(\Phi) : F_{T_n}(x) \rightarrow \Phi(x)$$

где Φ – функция распределения стандартного нормального распределения, но Φ всюду непрерывна, поэтому следствие доказано. □

Следствие. В условиях ЦПТ обозначим $a = E\xi_1, \sigma^2 = D\xi_1$. Тогда

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Доказательство. Заметим, что если $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$, то

$$\forall c \in \mathbb{R} : c\eta_n \xrightarrow{d} c\eta$$

Тогда

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) = \frac{S_n - na}{\sqrt{n}} = \frac{S_n - na}{\sqrt{DS_n}} \cdot \sigma \xrightarrow{d} \sigma \cdot \mathcal{N}(0, 1) = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

□

Замечание. Смысл ЦПТ.

Скорость сходимости в УЗБЧ. УЗБЧ утверждает, что

$$\frac{S_n}{n} - a \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

Благодаря ЦПТ можно сказать, что в типичной ситуации (~ 0.99):

$$\left| \frac{S_n}{n} - a \right| = \underline{O} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Доказательство. Выберем $u > 0$, такое, что

$$P(|\xi| \leq u) = 0.99, \xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \Rightarrow P \left(\left| \frac{S_n}{n} - a \right| \leq \frac{4}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.99$$

□

Теорема 25.2. Теорема Берри-Эссеена об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме (б/д).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые одинаково распределённые случайные величины, пусть $E|\xi_1 - E\xi_1|^3 < +\infty$. Обозначим $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n, T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$. Тогда

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{c \cdot E|\xi_1 - E\xi_1|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

где $c > 0$ – абсолютная константа.

26 Виды сходимости случайных векторов...

Определение 26.1. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ – случайные вектора из \mathbb{R}^m , на (Ω, \mathcal{F}, P) . Последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится к ξ :

1. С вероятностью 1 (почти наверное), если

$$P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = \xi\right) = 1$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$

2. По вероятности, если

$$\forall \varepsilon > 0 : P(\|\xi_n - \xi\|_2 \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

где $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$

3. По распределению, если $\forall f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченной непрерывной функции выполнено

$$Ef(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Ef(\xi)$$

Лемма 26.1. О связи многомерных сходимостей с одномерными.

Пусть $\xi_n = (\xi_n^{(1)}, \dots, \xi_n^{(m)})$, $\xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)})$. Тогда

1. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall i = \overline{1, m} : \xi_n^{(i)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi^{(i)}$
2. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Leftrightarrow \forall i = \overline{1, m} : \xi_n^{(i)} \xrightarrow{P} \xi^{(i)}$
3. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Rightarrow \forall i = \overline{1, m} : \xi_n^{(i)} \xrightarrow{d} \xi^{(i)}$

Теорема 26.1. О наследовании сходимости.

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ – случайные векторы из \mathbb{R}^m . Пусть $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрерывна почти всюду относительно распределения случайного вектора ξ (то есть $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, такое, что h – непрерывна на B и $P(\xi \in B) = 1$). Тогда

1. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} h(\xi)$
2. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{P} h(\xi)$
3. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{d} h(\xi)$

Доказательство. 1. $P(h(\xi_n) \rightarrow h(\xi)) \geq P(\xi_n \rightarrow \xi, \xi \in B) = 1$

2. Пусть $h(\xi_n) \not\xrightarrow{P} h(\xi)$. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists \{n_k, k \in \mathbb{N}\} : \forall k \in \mathbb{N} P(\|h(\xi_{n_k}) - h(\xi)\|_2 \geq \varepsilon) \geq \delta > 0$$

Но $\xi_{n_k} \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \exists \{n_{km}, m \in \mathbb{N}\} : \xi_{n_{km}} \xrightarrow{\text{п.н.}, m \rightarrow +\infty} \xi$. Согласно предыдущему пункту, $h(\xi_{n_{km}}) \xrightarrow{\text{п.н.}} h(\xi)$, что есть противоречие.

3. Обозначим Q_n – распределение $h(\xi_n)$, Q – распределение $h(\xi)$. Хотим доказать, что $Q_n \xrightarrow{W} Q$. По теореме Александрова достаточно проверить, что

$$\overline{\lim}_n Q_n(F) \leq Q(F), \forall F \subset \mathbb{R}^k - \text{замкнутого}$$

Проверим это:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_n Q_n(F) &= \overline{\lim}_n P(h(\xi_n) \in F) = \overline{\lim}_n P(\xi_n \in h^{-1}(F)) \leq \\ &\overline{\lim}_n P(\xi_n \in \text{cl}(h^{-1}(F))) \leq P(\xi \in \text{cl}(h^{-1}(F))) \end{aligned}$$

Заметим, что в силу замкнутости F и непрерывности h на B , выполнено

$$\text{cl}(h^{-1}(F)) \subset \overline{B} \cup h^{-1}(F) \Rightarrow P(\xi \in \text{cl}(h^{-1}(F))) = P(\xi \in h^{-1}(F))$$

В итоге получили, что

$$\overline{\lim}_n Q_n(F) \leq P(\xi \in h^{-1}(F)) = Q(F)$$

□

Теорема 26.2. Усиленный закон больших чисел для случайных векторов.

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые одинаково распределённые случайные векторы из \mathbb{R}^m . Пусть $E\xi_1$ конечно. Тогда

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{n.n., n \rightarrow +\infty} E\xi_1$$

Доказательство. Сразу следует из одномерного случая. □

Теорема 26.3. Многомерная ЦПТ (б/д).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые одинаково распределённые случайные векторы из \mathbb{R}^m , $a = E\xi_1$, $\Sigma = D\xi_1$ – конечные. Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - a \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

27 Лемма Слуцкого...

Теорема 27.1. *Лемма Слуцкого.*

Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{d} C = \text{const}$ – случайная величина. Тогда

$$\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi + C; \quad \xi_n \cdot \eta_n \xrightarrow{d} \xi \cdot C$$

Доказательство. Докажем только для суммы. Для произведения аналогично.

Пусть x – точка непрерывности $F_{\xi+C} \Rightarrow x$ – точка непрерывности F_ξ :

$$F_{\xi_n+\eta_n}(x) = P(\xi_n + \eta_n \leq x) = P(\xi_n + \eta_n \leq x, C - \eta_n \geq \varepsilon) + P(\xi_n + \eta_n \leq x, C - \eta_n < \varepsilon) \leq \\ P(|\eta_n - C| \geq \varepsilon) + P(\xi_n + C \leq x + \varepsilon)$$

Выберем $\varepsilon > 0$ малым и таким, что $x - C \pm \varepsilon$ – точка непрерывности F_ξ . Заметим, что $\eta_n \xrightarrow{d} C \Leftrightarrow \eta_n \xrightarrow{P} C$. Значит,

$$P(|\eta_n - C| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Из этого следует, что

$$\overline{\lim}_n F_{\xi_n+\eta_n}(x) \leq \overline{\lim}_n P(\xi_n \leq x - C + \varepsilon) = P(\xi \leq x - C + \varepsilon)$$

так как $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

Аналогично,

$$1 - F_{\xi_n+\eta_n}(x) = P(\xi_n + \eta_n > x) \leq P(|\eta_n - C| \geq \varepsilon) + P(\xi_n + C > x - \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 + P(\xi > x - C - \varepsilon)$$

Из этого следует, что

$$\overline{\lim}_n (1 - F_{\xi_n+\eta_n}(x)) \leq P(\xi > x - C - \varepsilon) \Rightarrow \underline{\lim}_n F_{\xi_n+\eta_n}(x) \geq P(\xi \leq x - C - \varepsilon)$$

В итоге,

$$F_{\xi+C}(x - \varepsilon) \leq \underline{\lim}_n F_{\xi_n+\eta_n}(x) \leq \overline{\lim}_n F_{\xi_n+\eta_n}(x) \leq F_{\xi+C}(x + \varepsilon)$$

В силу того, что ε произвольно и мало, а x – точка непрерывности $F_{\xi+C}$, получаем, что

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\xi_n+\eta_n}(x) = F_{\xi+C}(x)$$

□

Пример. Построение асимптотически доверительного интервала для параметра в схеме Бернулли.

Пусть X_1, \dots, X_n – независимые одинаково распределённые случайные величины. Причём $X_i \sim \text{Bin}(1, p)$.

Доказательство. Обозначим $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Согласно ЦПТ

$$\sqrt{n}(\bar{X} - p) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

или же

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Заметим, что по УЗБЧ $\bar{X} \xrightarrow{\text{п.н.}} p$ и по теореме о наследовании сходимости

$$\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})} \xrightarrow{\text{п.н.}} \sqrt{p(1 - p)}$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{p(1 - p)}} \cdot \frac{\sqrt{p(1 - p)}}{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}} \xrightarrow{\text{л.Слуцкого, } d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Значит

$$P \left(\left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}} \right| \leq 2.807 \right) \rightarrow 0.99$$

□