

# Содержание

1	Базовые определения	3
2	Вторая теорема о $\pi$ - и $\lambda$ -системах. Следствия из неё.	5
3	Независимость событий и систем событий	6
4	Функция распределения вероятностной меры	7
5	Классификация вероятностных мер	9
6	Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$	11
7	Случайные элементы, случайные величины и векторы на вероятностном пространстве	13
8	Характеристики случайной величины и случайного вектора	15
9	Независимости произвольного набора случайных величин	17
10	Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями	19
11	Теорема о замене переменных в интеграле Лебега...	20
12	Прямое произведение вероятностных пространств	22
13	Совместное распределение...	24
14	Дисперсия, ковариация и коэффициент корреляции	25
15	Сходимости случайных величин	27
16	Достаточное условие сходимости с вероятностью...	29
17	Фундаментальность с вероятностью 1	31
18	Леммы Теплица и Кронекера...	33
19	Слабая сходимость и сходимость в основном...	35
20	Характеристические функции...	37
21	Единственность характеристических функций...	40
22	Теорема о производной х-ф...	42
23	Плотность и относительная компактность семейств вероятностных мер...	45
24	Три леммы, теорема непрерывности...	47

25	Центральная предельная теорема...	49
26	Виды сходимости случайных векторов...	51
27	Лемма Слуцкого...	53
28	Гауссовские случайные векторы...	55
29	Условное математическое ожидание случайной величины...	57
30	Основные свойства условного матожидания	58
31	Условное матожидание при условии другой случайной величины...	61

# 1 Базовые определения

**Определение 1.1.** Система  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  называется алгеброй, если

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2.  $A \in \mathcal{F}$ , то  $\bar{A} := (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$
3.  $A, B \in \mathcal{F}$ , то  $A \cap B \in \mathcal{F}$

**Определение 1.2.** Система  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если

1.  $\mathcal{F}$  – алгебра
2.  $\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

**Определение 1.3.**  $P$  называется вероятностной мерой на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , если  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ , удовлетворяющая свойствам:

1.  $P(\Omega) = 1$
2. Если  $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ , то

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

**Определение 1.4.** Вероятностное пространство – это тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , где

- $\Omega$  – множество элементарных исходов
- $\mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$ , элементы  $\mathcal{F}$  называются событиями
- $P$  – вероятностная мера на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F})$

**Определение 1.5.** Система  $\mathcal{M}$  подмножеств в  $\Omega$  называется  $\pi$ -системой, если из того, что  $A, B \in \mathcal{M}$  следует, что  $A \cap B \in \mathcal{M}$

**Определение 1.6.** Система  $\mathcal{L}$  подмножеств в  $\Omega$  называется  $\lambda$ -системой, если

1.  $\Omega \in \mathcal{L}$
2.  $(A, B \in \mathcal{L}; A \subset B) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}$
3.  $(A_n \uparrow A; \forall n A_n \in \mathcal{L}) \Rightarrow A \in \mathcal{L}$

**Теорема 1.1.** Первая теорема о  $\pi$ - $\lambda$ -системах

Система  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  является  $\sigma$ -алгеброй  $\Leftrightarrow$  она является  $\pi$ -системой и  $\lambda$ -системой.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Свойство  $\pi$ -системы и свойство 1)  $\lambda$ -системы выполняются автоматически.

Рассмотрим  $\forall A_n \uparrow A; \forall n A_n \in \mathcal{L}$ . Тогда  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{L}$ . Следовательно, выполнено свойство 3)  $\lambda$ -системы.

$\forall A, B \in \mathcal{L}; A \subset B : B \setminus A = B \cap \bar{A}$ . Но  $\bar{A} \in \mathcal{L}$ , следовательно  $B \cap \bar{A} \in \mathcal{L}$ . То есть выполнено свойство 2)  $\lambda$ -системы.

$\Leftarrow$  Проверим сначала, что  $\mathcal{F}$  – алгебра. Свойства 1), 3) уже есть. По свойству 2)  $\lambda$ -системы  $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ , если  $A \in \mathcal{F}$ . Значит  $\mathcal{F}$  – алгебра.

Пусть  $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F}$ . Рассмотрим  $B_n : B_1 = A_1, B_i = A_i \setminus (\cup_{k=1}^{i-1} A_k)$ . Тогда:  $\forall n B_n \in \mathcal{F}, \forall i \neq j B_i \cap B_j = \emptyset$ . Рассмотрим  $C_n = \sqcup_{m=1}^n B_m \in \mathcal{F}$ . Тогда  $C_n \subset C_{n+1}$  и  $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = \sqcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow$  по 3) свойству  $\lambda$ -системы:  $C_n \uparrow \sqcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$ .  $\square$

**Лемма 1.1.** Пусть  $\mathcal{M}$  – система подмножеств  $\Omega$ . Тогда существует минимальная (по включению)  $\sigma$ -алгебра (алгебра,  $\pi$ -система,  $\lambda$ -система), обозначаемая  $\sigma(\mathcal{M})$  ( $\alpha(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M})$ ), содержащая  $\mathcal{M}$ .

**Пример.** 1. Если  $\Omega = \mathbb{R}$ , то борелевской  $\sigma$ -алгеброй на  $\mathbb{R}$  называется наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая все интервалы

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma((a; b), a < b)$$

2. Если  $\Omega = \mathbb{R}^n, n > 1$ .

Борелевской  $\sigma$ -алгеброй в  $\mathbb{R}^n$  называется минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая множества вида  $B_1 \times \dots \times B_n, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , то есть

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(B_1 \times \dots \times B_n : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

3. Если  $\Omega = \mathbb{R}^{\infty}$ , то есть  $\Omega$  содержит все счётные последовательности вещественных чисел.

Для  $n \in \mathbb{N}$  и  $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  введём цилиндр:

$$F_n(B_n) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{\infty} : (x_1, \dots, x_n) \in B_n\}$$

Тогда минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все цилиндры, называется борелевской в  $\mathbb{R}^{\infty}$ , то есть

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty}) = \sigma(F_n(B_n) : n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

## 2 Вторая теорема о $\pi$ - и $\lambda$ -системах. Следствия из неё.

**Теорема 2.1.** *Вторая теорема о  $\pi$ - $\lambda$ -системах.*

*Если  $\mathcal{M}$  – это  $\pi$ -система подмножеств в  $\Omega$ , то  $\sigma(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M})$*

*Доказательство.* Заметим, что  $\sigma(\mathcal{M})$  –  $\lambda$ -система, содержащая  $\mathcal{M} \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) \subset \sigma(\mathcal{M})$ .

Проверим, что  $\lambda(\mathcal{M})$  – это  $\sigma$ -алгебра. Раз  $\lambda(\mathcal{M})$  – это  $\lambda$ -система, то по (1.1) достаточно проверить, что  $\lambda(\mathcal{M})$  – это  $\pi$ -система.

Рассмотрим  $\mathcal{M}_1 = \{B \in \lambda(\mathcal{M}) : \forall A \in \mathcal{M}, A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$ . Заметим, что  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$ . Проверим, что  $\mathcal{M}_1$  – это  $\lambda$ -система:

1.  $\Omega \in \mathcal{M}_1$  – очевидно
2. Пусть  $B, C \in \mathcal{M}_1, C \subset B$ , пусть  $A \in \mathcal{M}$ . Заметим, что  $B \setminus C \in \lambda(\mathcal{M})$  и

$$(B \setminus C) \cap A = \overset{\in \lambda(\mathcal{M})}{(B \cap A)} \setminus \overset{\in \lambda(\mathcal{M})}{(C \cap A)}$$

Значит по второму свойству  $\lambda$ -систем  $(B \setminus C) \cap A \in \lambda(\mathcal{M})$

3. Пусть  $B_n \uparrow B, B_n \in \mathcal{M}_1, A \in \mathcal{M} \Rightarrow$

$$\overset{\in \lambda(\mathcal{M})}{B_n \cap A} \uparrow B \cap A$$

Тогда по третьем свойству  $\lambda$ -систем  $B \cap A \in \lambda(\mathcal{M})$ . Но  $B_n \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow$  по третьему свойству  $\lambda$ -системы получаем, что  $B \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow B \in \mathcal{M}_1$ .

По условию  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \Rightarrow$  в силу минимальности  $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_1$ . По построению  $\mathcal{M}_1 \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_1$ , то есть  $\forall B \in \lambda(\mathcal{M}) \forall A \in \mathcal{M} : A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})$ .

Далее рассмотрим  $\mathcal{M}_2 = \{B \in \lambda(\mathcal{M}) : \forall A \in \lambda(\mathcal{M}) A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$ . В силу доказанного  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_2$ . Совершенно аналогично с  $\mathcal{M}_1$  проверяем, что  $\mathcal{M}_2$  – это  $\lambda$ -система. Тогда  $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_2$ . По построению  $\mathcal{M}_2 \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_2 \Rightarrow \lambda(\mathcal{M})$  – это  $\pi$ -система.  $\square$

**Следствие.** *Пусть  $\mathcal{M}$  – это  $\pi$ -система на  $\Omega$ , и  $\mathcal{L}$  – это  $\lambda$ -система на  $\Omega$  и  $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ . Тогда  $\lambda(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$*

### 3 Независимость событий и систем событий

**Определение 3.1.** События  $A, B$  независимые, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

**Определение 3.2.** События  $A_1, \dots, A_n$  называются независимыми в совокупности, если

$$\forall k \leq n \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n : P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_k})$$

**Определение 3.3.** Пусть  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$  – системы событий на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Они называются независимыми в совокупности, если

$$\forall A_1 \in \mathcal{M}_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n : A_1, \dots, A_n \text{ — независимы в совокупности}$$

**Лемма 3.1.** Критерий независимости  $\sigma$ -алгебр.

Пусть  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$  – это  $\pi$ -системы событий на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Тогда  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$  – независимы в совокупности  $\Leftrightarrow \sigma(\mathcal{M}_1), \dots, \sigma(\mathcal{M}_n)$  – независимы в совокупности.

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  очевидно следует из определения независимости систем.

$\Rightarrow$  Докажем только для  $n = 2$ , для  $n > 2$  всё аналогично.

Рассмотрим  $\mathcal{L}_1 = \{A \in \sigma(\mathcal{M}_2) : A \perp \mathcal{M}_1\}$ . Проверим, что  $\mathcal{L}_1$  – это  $\lambda$ -система:

$$1. \forall B \in \mathcal{M}_1 : \Omega \perp B \Rightarrow \Omega \in \mathcal{L}_1$$

$$2. \text{ Пусть } C \in \mathcal{M}_1, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} P((B \setminus A) \cap C) &= P((B \cap C) \setminus (A \cap C)) = P(B \cap C) - P(A \cap C) = \\ &= P(C)(P(B) - P(A)) = P(B \setminus A)P(C) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}_1 \end{aligned}$$

$$3. \text{ Пусть } A_n \uparrow A, A_n \in \mathcal{L}_1. \text{ По определению } \sigma\text{-алгебры замечаем, что } A \in \sigma(\mathcal{M}_2). \text{ Пусть } C \in \mathcal{M}_1. \text{ Рассмотрим}$$

$$P(A \cap C) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n \cap C) = P(C) \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P(C)P(A) \Rightarrow A \in \mathcal{L}_1$$

Раз  $\mathcal{L}_1$  – это  $\lambda$ -система и  $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{L}_1$ , по условию, то по (2.1) получим, что  $\sigma(\mathcal{M}_2) \subset \mathcal{L}_1 \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_2) \perp \mathcal{M}_1$ .

Рассмотрим  $\mathcal{L}_2 = \{A \in \sigma(\mathcal{M}_1) : A \perp \sigma(\mathcal{M}_2)\}$ . Точно так же доказывается, что  $\mathcal{L}_2$  – это  $\lambda$ -система,  $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{L}_2$  по доказанному  $\Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{L}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_1) \perp \sigma(\mathcal{M}_2)$   $\square$

**Определение 3.4.** Пусть  $\{M_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  – набор систем событий. Он называется независимым в совокупности, если независим в совокупности  $\forall$  конечный поднабор.

## 4 Функция распределения вероятностной меры

**Определение 4.1.** Функцией распределения вероятностной меры  $P$  на  $\mathbb{R}$  называется

$$F(x) = P((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}$$

**Лемма 4.1.** Свойства функции распределения.

1.  $F(x)$  не убывает
2.  $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$
3.  $F(x)$  непрерывна справа

*Доказательство.* 1. Пусть  $y > x$ . Тогда

$$(-\infty, x] \subset (-\infty, y] \Rightarrow F(x) = P((-\infty, x]) \leq P((-\infty, y]) = F(y)$$

2. Если  $x_n \uparrow +\infty$ , то  $(-\infty, x_n] \uparrow \mathbb{R}$ . Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\mathbb{R}) = 1$$

Если  $x_n \downarrow -\infty$ , то  $(-\infty, x_n] \downarrow \emptyset$ . Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\emptyset) = 0$$

3. Если  $x_n \downarrow x$ , то  $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$ . Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, x]) = F(x)$$

□

**Определение 4.2.** Эквивалентное определение функции распределения.

Функция, удовлетворяющая свойствам 1 – 3 из предыдущей леммы, называется функцией распределения на  $P$ .

**Теорема 4.1.** О продолжении меры (б/д)

Пусть  $\mathcal{A}$  – алгебра подмножеств  $\Omega$ . Пусть  $P_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  с условием,  $P_0(\Omega) = 1$  и  $P_0$  счётно-аддитивна на  $\mathcal{A}$ . Тогда  $\exists!$  продолжение меры  $P_0$  на  $\sigma(\mathcal{A})$

**Теорема 4.2.** О взаимной однозначности функции распределения и вероятностной меры.

Пусть  $F(x), x \in \mathbb{R}$  – функция распределения на  $\mathbb{R}$ . Тогда  $\exists!$  вероятностная мера  $P$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , для которой  $F$  является функцией распределения, то есть

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = P((-\infty, x])$$

*Доказательство.* Рассмотрим на  $\mathbb{R}$  алгебру  $\mathcal{A}$ , состоящую из конечных объединений непесекающихся интервалов:

$$\forall A \in \mathcal{A} : A = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k], \quad -\infty \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_n \leq +\infty$$

Зададим на  $\mathcal{A}$  меру  $P_0$ :

$$\forall A \in \mathcal{A} : P_0(A) = \sum_{k=1}^n (F(b_k) - F(a_k))$$

где  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ .

По построению  $P_0(\mathbb{R}) = 1$  и  $P_0$  будет конечно аддитивна на  $\mathcal{A}$ . Если мы проверим, что  $P_0$  счётно аддитивна на  $\mathcal{A}$ , то по (4.1)  $\exists!$  продолжение  $P$  меры  $P_0$  на  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Это и есть искомая мера  $P$ , причём

$$P((-\infty, x]) = P_0((-\infty, x]) = F(x)$$

По теореме о непрерывности вероятностной меры, достаточно проверить, что  $P_0$  непрерывна в нуле.

Пусть  $A_n \downarrow \emptyset, \forall n : A_n \in \mathcal{A}$ . Хотим проверить, что  $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . В силу 2 – 3 свойств функции распределения:

$$\forall A \in \mathcal{A} \forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathcal{A} : \text{cl } B \subset A, P_0(A \setminus B) \leq \varepsilon$$

Если  $(a, b]$  является частью  $A$ , то для некоторого  $a' > a$  будет выполнено

$$P_0((a, a']) \leq \varepsilon$$

Зафиксировав  $\forall \varepsilon > 0$ , выберем  $B_n \forall n \in \mathbb{N} : B_n \in \mathcal{A}$ , такой что  $\text{cl } B_n \subset A_n$  и  $P_0(A_n \setminus B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$ .

Пусть сначала все  $A_n$  лежат внутри  $[-N, N]$ . Заметим, что раз  $\bigcap_n A_n = \emptyset$ , то  $\bigcap_n \text{cl } B_n = \emptyset$ . В силу компактности  $\exists n_0$ :

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} \text{cl } B_n = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{n_0} B_n = \emptyset$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} P_0(A_{n_0}) &= P_0\left(A_{n_0} \setminus \bigcap_{n=1}^{n_0} B_n\right) \leq P_0\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} (A_{n_0} \setminus B_n)\right) \leq P_0\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} (A_n \setminus B_n)\right) \leq \\ &\sum_{n=1}^{n_0} P_0(A_n \setminus B_n) \leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon \Rightarrow P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Если  $A$  бесконечно, то возьмём  $N$ , такой что  $P_0(\mathbb{R} \setminus (-N, N]) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Рассмотрим  $A'_n = A_n \cap (-N, N]$ . Тогда по доказанному выше  $P'_0(A'_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow$  с некоторого  $n_0$ :

$$P_0(A_n) \leq P(A'_n) + P_0(\mathbb{R} \setminus (-N, N]) \leq \varepsilon$$

□



## 5 Классификация вероятностных мер

**Определение 5.1.** Пусть  $P$  – вероятностная мера на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Она называется дискретной, если  $\exists$  не более чем счётное множество  $X \subset \mathbb{R}$ , такое, что

$$P(\mathbb{R} \setminus X) = 0, \forall x \in X : P(\{x\}) > 0$$

Говорят, что  $P$  сосредоточена на  $X$ .

Пусть  $X = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ , обозначим  $p_k = P(\{x_k\})$ . Набор  $(p_1, p_2, \dots)$  образует распределение вероятностей на  $X$ .

Как выглядит функция распределения?

$$F(x) = \sum_{x_k \leq x} P(\{x_k\})$$

Она меняется скачками в точках  $x_k$ , в них значение увеличивается на

$$p_k = P(\{x_k\}) = \Delta F(x_k) = F(x_k) - F(x_k - 0)$$

**Пример.** Дискретные распределения:

1. Константы.

$$X = \{x\}; P(\{x\}) = 1$$

2. Распределение Бернулли,  $\text{Bern}(p)$ ,  $p \in [0, 1]$ :

$$X = \{0, 1\}; p_0 = 1 - p, p_1 = p$$

3. Биномиальное распределение,  $\text{Bin}(n, p)$ ,  $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$ :

$$X = \{0, \dots, n\}; p_k = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}; k = \overline{0, n}$$

4. Пуассоновское распределение,  $\text{Pois}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$

$$X = \mathbb{Z}_+; p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k \in \mathbb{Z}_+$$

**Определение 5.2.** Пусть  $P$  – вероятностная мера на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , а  $F$  – её функция распределения. Она называется абсолютно непрерывной, если  $\exists p(t) \geq 0$ , такая что

$$\int_{\mathbb{R}} p(t) dt = 1; \forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

В этом случае  $p(t)$  называется плотностью функции распределения  $F$  и меры  $P$ .

**Замечание.** Интегралы понимаются, как интегралы Лебега.

**Пример.** 1. Равномерное распределение,  $U(a, b)$ ,  $a < b$

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{I}_{\{x \in [a, b]\}}(x); F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x > b \end{cases}$$

2. Нормальное (гауссовское) распределение,  $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; \quad \Phi_{a, \sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

3. Экспоненциальное (показательное) распределение,  $\text{Exp}(\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ .

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} \cdot \mathbb{I}_{\{x>0\}}(x); \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0 \end{cases}$$

4. Гамма-распределение,  $\Gamma(\alpha, \lambda)$ ,  $\alpha, \lambda > 0$

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1} \lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{\{x>0\}}(x); \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \lambda > 0$$

5. Распределение Коши,  $K(\sigma)$ ,  $\sigma > 0$

$$p(x) = \frac{\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)}; \quad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{\sigma}$$

**Определение 5.3.** Пусть  $F$  – функция распределения на  $\mathbb{R}$ .

Точка  $x$  является точкой роста  $F$ , если

$$\forall \varepsilon > 0: F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$$

**Определение 5.4.** Функция распределения  $F$  (и соответствующая ей мера  $P$ ) называется сингулярной, если  $F$  непрерывна и множество её точек роста имеет лебегову норму нуль.

**Пример.** Канторова лестница.

Мера  $P$  сосредоточена на канторовом множестве, оно не счётное, но каждый элемент имеет ненулевую меру.

**Теорема 5.1.** *Лебега о разложении.* (б/д)

Пусть  $F$  – функция распределения на  $\mathbb{R}$ . Тогда  $\exists$  разложение вида

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x), \alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

причём  $F_1$  – дискретная функция распределения,  $F_2$  – абсолютно непрерывная,  $F_3$  – сингулярная.

## 6 Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

**Определение 6.1.** Функцией распределения вероятностной меры  $P$  называется  $F(x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$ , где

$$F(x_1, \dots, x_n) = P((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$$

**Замечание.** 1.  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

2.  $\vec{x} \geq \vec{y}$ , если

$$\forall i = \overline{1, n} : x_i \geq y_i$$

3.  $(-\infty, \vec{x}] = (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]$

4.  $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$ , если

$$\forall n \in \mathbb{N} : \vec{x}_{(n)} \geq \vec{x}_{(n+1)} \geq \vec{x}$$

причём  $\lim_n \vec{x}_{(n)} = \vec{x}$

**Лемма 6.1.** Свойства многомерной функции распределения.

Пусть  $F(\vec{x})$  – функция распределения вероятностной меры  $P$  на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . Тогда

1. Если  $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$ , то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(\vec{x}_{(n)}) = F(\vec{x})$$

то есть непрерывна справа по любой координате

2. Если  $x_i \rightarrow +\infty, \forall i = \overline{1, n}$ , то

$$F(\vec{x}) \rightarrow 1$$

Если  $x_i \rightarrow -\infty, \exists i = \overline{1, n}$ , то

$$F(\vec{x}) \rightarrow 0$$

3. Для  $\forall i = \overline{1, n}$  и  $a_i < b_i$  введём оператор  $\Delta_{a_i, b_i}^i$ , который действует следующим образом:

$$\Delta_{a_i, b_i}^i F(\vec{x}) = F(x_1, \dots, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Тогда

$$\forall a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n : \Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \dots \circ \Delta_{a_n, b_n}^n F(\vec{x}) \geq 0$$

**Доказательство.** 1. Если  $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$ , то  $(-\infty, \vec{x}_{(n)}] \downarrow (-\infty, \vec{x}]$ . Тогда по непрерывности меры

$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, \vec{x}]) = F(\vec{x})$$

2. Если  $\vec{x} \uparrow (+\infty, \dots, +\infty)$ , то  $(-\infty, \vec{x}] \uparrow \mathbb{R}^n$ . Тогда по непрерывности меры

$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\mathbb{R}^n) = 1$$

Если  $x_i \downarrow -\infty$ , то  $(-\infty, \vec{x}] \downarrow \emptyset$ . Тогда в силу непрерывности меры

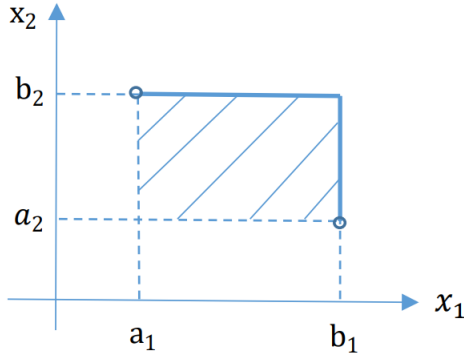
$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\emptyset) = 0$$

3. Проверим, например для  $n = 2$ , что

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \dots \circ \Delta_{a_n, b_n}^n F(\vec{x}) = P((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n])$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \Delta_{a_2, b_2}^2 F(x_1, x_2) &= \Delta_{a_1, b_1}^1 (F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2)) = \\ &= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) \geq 0 \end{aligned}$$



В общем случае достаточно заметить, что

$$\Delta_{a_i, b_i}^i P(B_1 \times \dots \times B_{i-1} \times (-\infty, x_i] \times \dots \times B_n) = P(B_1 \times \dots \times (a_i, b_i] \times \dots \times B_n)$$

□

**Теорема 6.1.** *О построении вероятностной меры на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  по функции распределения (б/д).*

Пусть  $F(\vec{x})$  удовлетворяет всем свойствам из предыдущей леммы. Тогда  $\exists!$  вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , для которой  $F$  является функцией распределения.

**Определение 6.2.** Пусть  $P$  – вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ .

$\forall n \in \mathbb{N}$  рассмотрим

$$P_n(B) = P(F_n(B))$$

где  $F_n(B) = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots) : (x_1, \dots, x_n) \in B\}$  – цилиндр с основанием  $B$ .

Тогда  $P_n$  будет вероятностной мерой в  $\mathbb{R}^n$ . Кроме того,  $\forall n : \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ :

$$P_n(B) = P_{n+1}(B \times \mathbb{R})$$

Это свойство согласованности.

**Теорема 6.2.** *Колмогорова о мерах в  $\mathbb{R}^\infty$  (б/д).*

Пусть  $P_1, P_2, \dots$  – последовательность вероятностных мер в  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots$ , обладающая свойством согласованности. Тогда  $\exists!$  вероятностная мера  $P$  на  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ , такая что

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : P_n(B) = P(F_n(B))$$

## 7 Случайные элементы, случайные величины и векторы на вероятностном пространстве

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – вероятностное пространство, а  $(E, \xi)$  – измеримое пространство.

**Определение 7.1.** Отображение  $X : \Omega \rightarrow E$  называется случайным элементом, если оно измеримо, то есть

$$\forall B \in \xi : X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

**Определение 7.2.** Если  $(E, \xi) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , то случайный элемент называется случайной величиной.

**Определение 7.3.** Если  $(E, \xi) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , то случайный элемент называется случайным вектором.

**Лемма 7.1.** Критерий измеримости отображения.

Пусть  $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ , так чтобы  $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$ . Тогда  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$  является случайным элементом  $\Leftrightarrow$

$$\forall B \in \mathcal{M} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  очевидно.

$\Leftarrow$  Рассмотрим

$$\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{E} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$$

Легко видеть, что  $\mathcal{D}$  – это  $\sigma$ -алгебра, так как  $\mathcal{E}$  –  $\sigma$ -алгебра, а прообраз сохраняет теоретико-множественные операции.

По условию  $\mathcal{M} \subset \mathcal{D} \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E} \subset \mathcal{D}$  в силу минимальности.  $\square$

**Следствие.** Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – случайная величина

2.  $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

3.  $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

*Доказательство.* Применяем лемму для  $\mathcal{M} = \{(-\infty, x), x \in \mathbb{R}\}$  или  $\mathcal{M} = \{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$ . В обоих случаях  $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$   $\square$

**Следствие.**  $X := (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  – случайный вектор  $\Leftrightarrow$

$$\forall i = \overline{1, n} : X_i \text{ – случайная величина}$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Пусть  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Тогда

$$X_i^{-1}(B) = X^{-1}(\mathbb{R} \times \dots \times \overset{i}{B} \times \dots \times \mathbb{R}) \in \mathcal{F}$$

Это верно, так как  $X$  – случайный вектор и

$$\mathbb{R} \times \dots \times \overset{i}{B} \times \dots \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

$\Leftarrow$  Рассмотрим  $\mathcal{M} = \{B_1 \times \cdots \times B_n : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ . Тогда  $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  и проверим условие леммы:

$$X^{-1}(B_1 \times \cdots \times B_n) = X_1^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}$$

так как  $\forall i = \overline{1, n} : X_i$  – случайная величина.

Значит по предыдущей лемме  $\Rightarrow X$  – случайный вектор. □

## 8 Характеристики случайной величины и случайного вектора

**Определение 8.1.** Распределением случайной величины (вектора)  $\xi$  называется вероятностная мера  $P_\xi$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  ( $\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ), определённая по правилу:

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ } (\mathbb{R}^n)$$

**Определение 8.2.** Функцией распределения случайной величины  $\xi$  называется

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = P_\xi((-\infty, x])$$

**Замечание.**

$$P(\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2) := P(\{\xi_1 \leq x_1\} \cap \{\xi_2 \leq x_2\})$$

**Определение 8.3.** Если  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – случайный вектор, то его функцией распределения называется

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P_\xi((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$$

**Определение 8.4.** Случайная величина является

- Дискретной, если таково её распределение
- Абсолютно-непрерывной, если таково её распределение

В этом случае  $\xi$  имеет плотность  $p_\xi(t) \geq 0$ :

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt$$

- Сингулярной, если таково её распределение

**Определение 8.5.** Случайная величина  $\xi$  называется простой, если она принимает конечное число значений. В этом случае  $\xi$  имеет вид:

$$\xi = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{I}_{A_k}$$

где  $x_1, \dots, x_n$  – различные числа,  $A_1, \dots, A_n$  – разбиение  $\Omega$ .

**Определение 8.6.** Пусть  $\xi$  – случайная величина (вектор) на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Сигма-алгеброй, порождённой  $\xi$ , называется

$$\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \text{ } (\mathbb{R}^n)$$

Это — наименьшая сигма-алгебра на пространстве  $\Omega$ , относительно которой случайная величина  $\xi$  всё ещё остаётся измеримой. Заметим, что  $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}$ .

**Определение 8.7.** Случайная величина (вектор)  $\eta$  является  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримое, если  $\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$

**Определение 8.8.** Если  $\xi$  – это случайная величина, то положим

$$\xi^+ := \max(\xi, 0); \quad \xi^- := \max(-\xi, 0)$$

Тогда,  $\xi = \xi^+ - \xi^-$

**Определение 8.9.** Функция  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется борелевской, если прообраз любого борелевского множества есть борелевское множество:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : \varphi^{-1}(B) = \{x : \varphi(x) \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

**Лемма 8.1.**  $\eta$  является  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримой  $\Leftrightarrow \exists$  борелевская функция  $\varphi$ , такая что  $\eta = \varphi(\xi)$ .

*Доказательство.*  $\Leftrightarrow$  Пусть  $\eta = \varphi(\xi)$  и  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Тогда

$$\{\eta \in B\} = \{\xi \in \varphi^{-1}(B)\} \in \mathcal{F}_\xi \Rightarrow \mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$$

□

**Теорема 8.1.** О приближении простыми.

1. Пусть  $\xi \geq 0$ . Тогда  $\exists$  последовательность  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримых случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ , такая что

$$0 \leq \xi_n \uparrow \xi$$

2. Если  $\xi$  – произвольная случайная величина, то  $\exists$  последовательность  $\mathcal{F}_\xi$  измеримых простых случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ , такая что

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\xi_n| \leq |\xi|, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = \xi$$

*Доказательство.* 1. Предъявим  $\xi_n$  в явном виде:

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq \xi < \frac{k}{2^n}\}}$$

Легко видеть, что  $0 \leq \xi_n \leq \xi_{n+1}$  и  $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n$ . Кроме того,  $\forall n : \xi_n$  – борелевская функция от  $\xi \Rightarrow \xi_n$  – по (8.1) это  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримая случайная величина.

2. Приближаем  $\xi^+$  и  $\xi^-$  по предыдущему пункту, затем берём разность

□



## 9 Независимости произвольного набора случайных величин

**Определение 9.1.** Случайные векторы  $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  называются независимыми в совокупности, если независимы в совокупности порождённые ими  $\sigma$ -алгебры.

**Следствие.** Случайные векторы  $\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_i \in \mathbb{R}^{k_i}, i = \overline{1, n}$  независимы в совокупности  $\Leftrightarrow$

$$\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_i}) : P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i \in B_i)$$

**Лемма 9.1.** Критерий независимости в терминах функций распределения  
Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности  $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} : P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i \leq x_i)$$

То есть функция распределения вектора распадается в произведение функций распределения компонент.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  очевидно из следствия выше.

$\Leftarrow$  Проверим  $\mathcal{M}_j = \{\{\xi_j \leq x\} : x \in \mathbb{R}\}$  – подходящая  $\pi$ -система. Очевидно, что  $\mathcal{M}_j$  – это  $\pi$ -система и  $\sigma(\mathcal{M}_j) \subset \mathcal{F}_{\xi_j}$ .

Тогда  $\forall A \in \sigma(\mathcal{M}_j)$  имеет вид

$$A = \{\xi_j \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Тогда введём

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \{\xi_j \in B\} \in \sigma(\mathcal{M}_j)\}$$

Тогда  $\mathcal{D}$  – это тоже  $\sigma$ -алгебра:

1.

$$\{\xi_j \in \mathbb{R}\} = \Omega \in \sigma(\mathcal{M}_j) \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{D}$$

2.

$$\{\xi_j \in B_1 \cap B_2\} = \{\xi_j \in B_1\} \cap \{\xi_j \in B_2\} \in \sigma(\mathcal{M}_j) \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{D}$$

3. Аналогично

$$B \in \mathcal{D} \Rightarrow \overline{B} \in \mathcal{D}$$

4. Аналогично

$$B_i \in \mathcal{D}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{D}$$

По построению все полуинтервалы  $(-\infty, x] \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}$ . Значит,  $\sigma(\mathcal{M}_j) = \mathcal{F}_{\xi_j}$ . Тогда, применяя (3.1), получим требуемое.  $\square$

**Замечание.** То же самое верно и для случайных векторов.

$\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности  $\Leftrightarrow$

$$\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n : P(\xi_1 \leq \vec{x}_1, \dots, \xi_n \leq \vec{x}_n) = \prod_{k=1}^n P(\xi_k \leq \vec{x}_k)$$

**Лемма 9.2.** *О независимости борелевских функций от независимых случайных величин.*

*Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимые случайные векторы,  $\xi_i \in \mathbb{R}^{k_i}, k_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, n}$ . Пусть  $f_i : \mathbb{R}^{k_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}, i = \overline{1, n}$  – борелевские функции. Положим  $\eta_i = f_i(\xi_i)$ . Тогда  $\eta_1, \dots, \eta_n$  – независимые в совокупности.*

*Доказательство.*  $\eta_1, \dots, \eta_n$  независимы в совокупности  $\Leftrightarrow \mathcal{F}_{\eta_1}, \dots, \mathcal{F}_{\eta_n}$  независимы в совокупности.

Но  $\mathcal{F}_{\eta_i} \subset \mathcal{F}_{\xi_i} \Rightarrow \mathcal{F}_{\eta_1}, \dots, \mathcal{F}_{\eta_n}$  независимы как подсистемы в независимых  $\sigma$ -алгебрах.  $\square$

**Следствие.**  $[\xi_1, \dots, \xi_{n_1}], [\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2}], \dots, [\xi_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, \xi_{n_1+\dots+n_k}]$  – независимые блоки случайных величин. Пусть  $f_j : \mathbb{R}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R}, j = \overline{1, k}$  – борелевские функции. Тогда  $f_1(\xi_1, \dots, \xi_{n_1}), f_2(\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2}), \dots, f_k(\xi_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, \xi_{n_1+\dots+n_k})$  – независимые в совокупности случайные величины.

*Доказательство.* Пускай  $\eta_1 := (\xi_1, \dots, \xi_{n_1}), \dots, \eta_k := (\xi_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, \xi_{n_1+\dots+n_k})$ . По предыдущей лемме  $\eta_i, i = \overline{1, k}$  будут независимы в совокупности.  $\square$

## 10 Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями

**Теорема 10.1.** *О математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями.*

Пусть  $\xi, \eta$  – независимые случайные величины,  $E\xi, E\eta$  – конечные. Тогда  $E\xi\eta$  тоже конечно, причём  $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$ .

*Доказательство.* Пусть сначала  $\xi, \eta$  – простые случайные величины, то есть

$$\xi = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{I}\{\xi = x_i\}; \quad \eta = \sum_{j=1}^m y_j \mathbb{I}\{\eta = y_j\}$$

где  $x_1, \dots, x_n$  – значения  $\xi$ , а  $y_1, \dots, y_m$  – значения  $\eta$ . Тогда

$$\xi\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \mathbb{I}\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$$

Берём  $E$  от обеих частей:

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j P(\xi = x_i, \eta = y_j) \stackrel{\perp}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j P(\xi = x_i) P(\eta = y_j) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i P(\xi = x_i) \right) \left( \sum_{j=1}^m y_j P(\eta = y_j) \right) = E\xi \cdot E\eta \end{aligned}$$

Далее, пусть  $\xi, \eta \geq 0$  – неотрицательные случайные величины. Тогда рассмотрим последовательности простых случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \{\eta_m, m \in \mathbb{N}\}$ , такие что

$$0 \leq \xi_n \uparrow \xi; \quad 0 \leq \eta_m \uparrow \eta$$

и  $\forall n \in \mathbb{N} : \xi_n$  является  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримой,  $\eta_n$  –  $\mathcal{F}_\eta$ -измеримой.

Следовательно,  $0 \leq \xi_n \eta_n \uparrow \xi\eta$  и  $\forall n \in \mathbb{N} : \xi_n \perp \eta_n$ . По определению мат. ожидания:

$$E\xi\eta = \lim_{n \rightarrow +\infty} E\xi_n \eta_n \stackrel{\perp}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} E\xi_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} E\eta_n = E\xi \cdot E\eta$$

Теперь пусть  $\xi, \eta$  – произвольные случайные величины. Тогда  $\xi^\pm \perp \eta^\pm$ , как функции от независимых случайных величин. Причём

$$(\xi\eta)^+ = \xi^+ \eta^+ + \xi^- \eta^-; \quad (\xi\eta)^- = \xi^+ \eta^- + \xi^- \eta^+$$

По определению

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= E(\xi\eta)^+ - E(\xi\eta)^- = E\xi^+ \eta^+ + E\xi^- \eta^- - E\xi^+ \eta^- - E\xi^- \eta^+ \stackrel{\perp}{=} \\ &= E\xi^+ \cdot E\eta^+ + E\xi^- \cdot E\eta^- - E\xi^+ \cdot E\eta^- - E\xi^- \cdot E\eta^+ = (E\xi^+ - E\xi^-)(E\eta^+ - E\eta^-) = \\ &= E\xi \cdot E\eta \end{aligned}$$

□

## 11 Теорема о замене переменных в интеграле Лебега...

**Теорема 11.1.** *О замене переменных в интеграле Лебега.*

Пусть  $\xi$  – случайный вектор из  $\mathbb{R}^m$  на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $P_\xi$  – его распределение. Тогда  $\forall g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  – борелевской функции, выполнено

$$Eg(\xi) = \int_{\Omega} g(\xi) dP = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx)$$

*Доказательство.* Пусть сначала  $g(x) = \mathbb{I}_A(x)$ , где  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$Eg(\xi) = E\mathbb{I}\{\xi \in A\} = P(\xi \in A) = P_\xi(A) = \int_A P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{I}_A(x) P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx)$$

В формуле из утверждения теоремы обе части линейны по  $g$ . Равенство верно для индикаторов  $\Rightarrow$  верно для простых функций.

Если  $g \geq 0$ , то рассмотрим последовательность простых функций  $0 \leq g_n \uparrow g$ . Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_n(x) P_\xi(dx) = Eg_n(\xi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Eg(\xi)$$

для неотрицательных доказали.

Если  $g$  – произвольная функция, то раскладываем  $g = g^+ - g^-$  и пользуемся линейностью.

Причём все математические ожидания будут конечны, бесконечны и неопределены одновременно.  $\square$

**Следствие.** 1. Для вычисления  $Eg(\xi)$  достаточно знать распределение  $P_\xi$ .

2. Если распределение  $\xi, \eta$  совпадают, то  $\forall$  борелевской функции  $g(x)$  выполнено

$$Eg(\xi) = Eg(\eta)$$

3. Если  $\xi$  – случайная величина, то

$$E\xi = \int_{\mathbb{R}} x P_\xi(dx)$$

**Замечание.**

$$dF(x) := P(dx)$$

где  $F$  – функция распределения вероятностной меры  $P$ .

**Определение 11.1.** Пусть  $P$  – вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ ,  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная мера на  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ . Мера  $P$  имеет плотность  $p(t) \geq 0$  по мере  $\mu$ , если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : P(B) = \int_B p(t) \mu(dt)$$

**Теорема 11.2.** *О плотности.*

Пусть случайный вектор  $\xi \in \mathbb{R}^m$  имеет распределение  $P_\xi$ , и  $P_\xi$  имеет плотность  $p(t)$  по  $\sigma$ -конечной мере на  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ . Тогда  $\forall$  борелевской функции  $g(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  выполнено

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) p(x) \mu(dx)$$

*Доказательство.* Пусть сначала  $g(x) = \mathbb{I}_A(x)$ , где  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$Eg(\xi) = P(\xi \in A) = P_\xi(A) = \int_A p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{I}_A(x)p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)p(x)\mu(dx)$$

Обе части доказываемого равенства линейны по  $g \Rightarrow$  формула верна для простых функций.

Если  $g \geq 0$ , то рассмотрим последовательность простых функций  $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$ , такую что  $0 \leq g_n(x) \uparrow g(x)$ . Тогда по определению интеграла Лебега:

$$Eg(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Eg_n(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_n(x)p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)p(x)\mu(dx)$$

(по теореме о монотонной сходимости)

Для произвольной  $g$  раскладываем  $g(x) = g^+ - g^-$  и пользуемся линейностью.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $\xi$  – дискретная случайная величина, сосредоточенная на  $X$ . Тогда

$$Eg(\xi) = \sum_{x \in X} g(x)P(\xi = x)$$

*Доказательство.* Мы знаем, что  $p(x) = P_\xi(\{x\}) = P(\xi = x)$ . Тогда

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)\mu(dx) = \sum_{x \in X} g(x)P(\xi = x)$$

$\square$

**Следствие.** Пусть  $\xi$  – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью  $p(x)$ . Тогда

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)dx$$

**Следствие.** Пусть  $\xi$  – случайный вектор из  $\mathbb{R}^m$  с плотностью  $p(x)$ . Тогда

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} g(\vec{x})p(\vec{x})d\vec{x}$$

## 12 Прямое произведение вероятностных пространств

**Определение 12.1.** Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  – два вероятностных пространства. Их прямым произведением называется вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , где

1.  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$
2.  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(B_1 \times B_2 : B_i \in \mathcal{F}_i)$  –  $\sigma$ -алгебра, порождённая прямоугольниками.
3.  $P = P_1 \times P_2$  – вероятностная мера на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , такая, что  $P(B_1 \times B_2) = P_1(B_1)P_2(B_2)$

**Лемма 12.1.** Такая вероятностная мера  $P$  существует и единственна.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\mathcal{A}$  – конечное объединение непересекающихся прямоугольников. Тогда  $\mathcal{A}$  – алгебра и  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$ . Определим  $P$  на  $\mathcal{A}$  по конечной аддитивности. Остаётся проверить, что  $P$  – счётно-аддитивна на  $\mathcal{A}$ .

Пусть  $C = \sqcup_i C_i$ ;  $C_i, C \in \mathcal{A}$ . Надо проверить, что

$$P(C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i)$$

Достаточно проверить для прямоугольников:

$$C = A \times B, C_i = A_i \times B_i$$

Представим в виде индикаторов:

$$\mathbb{I}_{A \times B}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i \times B_i}(\omega_1, \omega_2)$$

или

$$\mathbb{I}_A(\omega_1) \cdot \mathbb{I}_B(\omega_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i}(\omega_1) \mathbb{I}_{B_i}(\omega_2)$$

Зафиксируем  $\omega_1 \in \Omega_1$  и возьмём  $E$  от обеих частей неравенства в  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ :

$$\mathbb{I}_A(\omega_1) P_2(B_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i}(\omega_1) P_2(B_i)$$

Теперь берём  $E$  в  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ :

$$P_1(A) P_2(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P_1(A_i) P_2(B_i)$$

□

**Теорема 12.1.** Фубини (б/д).

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – это прямое произведение  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ . Пусть случайная величина  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что

$$\int_{\Omega} \xi dP < +\infty$$

Тогда

$$\int_{\Omega_i} \xi(\omega_1, \omega_2) P_i(d\omega_i)$$

конечен почти наверное по мере  $P_{3-i}$ , является  $\mathcal{F}_{3-i}$  измеримой функцией и, кроме того,

$$\int_{\Omega} \xi(\omega_1, \omega_2) P(d\omega_1, d\omega_2) = \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2) \right) P_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) \right) P_2(d\omega_2)$$

## 13 Совместное распределение. . .

**Утверждение 13.1.** Если случайные величины  $\xi, \eta$  – независимые, то

$$P_{(\xi, \eta)} = P_\xi \times P_\eta$$

*Доказательство.*

$$P_{(\xi, \eta)}(B_1 \times B_2) = P((\xi, \eta) \in B_1 \times B_2) = P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) \stackrel{\text{Фубини}}{=} P_\xi(B_1)P_\eta(B_2)$$

□

**Лемма 13.1.** О свёртке распределений.

Пусть  $\xi, \eta$  – это независимые случайные величины с функциями распределения  $F_\xi, F_\eta$ . Тогда  $\xi + \eta$  имеет следующую функцию распределения:

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x) dF_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(z-x) dF_\xi(x)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(z) &= P(\xi + \eta \leq z) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}\{x + y \leq z\} P_{(\xi, \eta)}(dx, dy) \stackrel{\text{Фубини}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}\{x + y \leq z\} P_\xi(dx) \right) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-y) dF_\eta(y) \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Формула свёртки.

Пусть  $\xi \perp \eta$  с плотностями  $p_\xi, p_\eta$ . Тогда  $\xi + \eta$  тоже имеет плотность, причём

$$p_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} p_\xi(z-x) p_\eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}} p_\eta(z-x) p_\xi(x) dx$$

*Доказательство.* По лемме о свёртке:

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(z) &= \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x) dF_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-\infty}^{z-x} p_\xi(y) dy \right) p_\eta(x) dx \stackrel{y' := y+x}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-\infty}^z p_\xi(y'-x) dy' \right) p_\eta(x) dx \stackrel{\text{Фубини}}{=} \int_{-\infty}^z \left( \int_{\mathbb{R}} p_\xi(y'-x) p_\eta(x) dx \right) dy' = \\ &= \int_{-\infty}^z p_{\xi+\eta}(y') dy' \end{aligned}$$

□



## 14 Дисперсия, ковариация и коэффициент корреляции

**Определение 14.1.** Дисперсией случайной величины  $\xi$  называется

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

если  $E\xi$  конечно.

**Определение 14.2.** Ковариацией случайных величин  $\xi, \eta$  называется

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

если  $E\xi, E\eta$  конечны.

**Определение 14.3.**  $\xi$  и  $\eta$  называются некоррелированными, если

$$\text{cov}(\xi, \eta) = 0$$

**Определение 14.4.** Коэффициентом корреляции случайных величин  $\xi, \eta$  называется

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$$

если  $D\xi, D\eta$  положительная и конечная.

**Лемма 14.1.** Свойства дисперсии и ковариации.

1. Ковариация билинейна
2.  $\forall c \in \mathbb{R} : D(c\xi) = c^2 D(\xi), D(\xi + c) = D(\xi)$
3.  $\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$ . В частности  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$
4. Неравенство Коши-Буняковского:

$$|E\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$$

причём равенство достигается  $\Leftrightarrow \xi, \eta$  линейно зависимы.

5.  $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$  и равен 1  $\Leftrightarrow \xi - E\xi, \eta - E\eta$  линейно зависимы почти наверное

*Доказательство.* 1 – 3 следуют из свойств математического ожидания. 4 было доказано на ОВИТМе.

Для последнего свойства рассмотрим

$$\xi' := \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}, \eta' := \frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}} \Rightarrow \rho(\xi, \eta) = E\xi'\eta'$$

По неравенству КБ:

$$|\rho(\xi, \eta)| \leq \sqrt{E(\xi')^2 E(\eta')^2} = 1$$

Равенство достигается  $\Leftrightarrow \xi', \eta'$  линейно зависимы почти наверное. □

**Следствие.** Если  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – попарно некоррелированные случайные величины с конечными дисперсиями, то

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{k=1}^n D\xi_k$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} D(\xi_1 + \dots + \xi_n) &= \text{cov}(\xi_1 + \dots + \xi_n, \xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n D\xi_i \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Если  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимые случайные величины с конечными дисперсиями, то

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{k=1}^n D\xi_k$$

*Доказательство.* Независимые  $\Rightarrow$  некоррелированные

□

**Определение 14.5.** Пусть  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – случайный вектор. Тогда  $E\xi$  называется вектор из математических ожиданий компонент:

$$E\xi = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)$$

**Определение 14.6.** Дисперсией (матрицей ковариаций) вектора  $\xi$  называется матрица:

$$D\xi = (\text{cov}(\xi_i, \xi_j); i, j = \overline{1, n})$$

**Утверждение 14.1.** Матрица ковариаций – симметричная и неотрицательно определённая матрица.

*Доказательство.*  $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \text{cov}(\xi_j, \xi_i)$  по определению ковариации  $\Rightarrow$  симметричная.

Пусть  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , возьмём  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \langle D\xi \cdot \vec{x}, \vec{x} \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(x_i \xi_i, x_j \xi_j) = \\ &= \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i, \sum_{j=1}^n x_j \xi_j\right) = D\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right) \geq 0 \end{aligned}$$

□

## 15 Сходимости случайных величин

**Определение 15.1.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходится к случайной величине  $\xi$ :

1. С вероятностью 1 (почти наверное), если

$$P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = \xi\right) = 1$$

Обозначение:  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$

2. По вероятности, если:

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Обозначение:  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$

3. В среднем порядка  $p > 0$  (в  $L^p$ ), если

$$E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Обозначение:  $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$

4. По распределению, если  $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывных ограниченных функций выполнено

$$Ef(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Ef(\xi)$$

Обозначение:  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

**Теорема 15.1.** Критерий сходимости с вероятностью 1.

Случайные величины  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

*Доказательство.* Рассмотрим

$$A_k^\varepsilon = \bigcup_{k \geq n} \{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} = \{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\}$$

Тогда

$$\{\xi_n \not\xrightarrow{\text{п.н.}} \xi\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{m}}$$

Значит

$$\begin{aligned} P(\xi_n \not\xrightarrow{\text{п.н.}} \xi) = 0 &\Leftrightarrow P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\forall m \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(A_n^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n^\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

□

**Теорема 15.2.** *О взаимоотношении различных видов сходимостей.*

1.  $\xi_n \xrightarrow{n.н.} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
2.  $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
3.  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

*Доказательство.* 1.  $\forall \varepsilon > 0$  выполняется:

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq P\left(|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq P\left(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

в силу критерия сходимости с вероятностью 1.

2.  $\forall \varepsilon > 0$  выполняется:

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^p \geq \varepsilon^p) \stackrel{\text{н-во Маркова}}{\leq} \frac{E|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon^p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

3. Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – произвольная ограниченная непрерывная функция. Возьмём  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$ . Пусть  $N > 0$  таково, что  $P(|\xi| > N) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . В силу равномерной непрерывности  $f$  на отрезках выберем  $\delta > 0$ , такое, что

$$\forall x \in [-N, N] \forall y, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$$

Рассмотрим разбиение  $\Omega$ :

$$A_1 = \{|\xi_n - \xi| \leq \delta, |\xi| \leq N\}; \quad A_2 = \{|\xi_n - \xi| \leq \delta, |\xi| > N\}; \quad A_3 = \{|\xi_n - \xi| > \delta\}$$

Значит можем оценить

$$|Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \leq E|f(\xi_n) - f(\xi)| = \sum_{i=1}^3 E(|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot \mathbb{I}_{A_i})$$

На  $A_1$  выполнено  $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow E|f(\xi_n) - f(\xi)| \mathbb{I}_{A_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . На  $A_2, A_3$  выполнено  $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq 2M$ . Тогда

$$\sum_{i=2}^3 E|f(\xi_n) - f(\xi)| \mathbb{I}_{A_i} \leq 2M(P(A_2) + P(A_3)) \leq 2M(P(|\xi| > N) + P(|\xi_n - \xi| > \delta)) \leq \varepsilon$$

в силу сходимости по вероятности.

В итоге получили, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \leq \varepsilon$$

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  получаем, что  $Ef(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Ef(\xi)$

□

## 16 Достаточное условие сходимости с вероятностью...

**Лемма 16.1.** *Достаточное условие сходимости с вероятностью 1.*

Если

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) < +\infty$$

то  $\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi$

*Доказательство.* Рассмотрим

$$\begin{aligned} P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon) &= P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\}\right) \leq \\ &\sum_{k=n}^{\infty} P(|\xi_k - \xi| > \varepsilon) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

В силу стремления остатка сходящегося ряда к нулю.

Тогда по критерию  $\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi$

□

**Следствие.** Если  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ , то  $\exists$  подпоследовательность  $\{\xi_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$ , такая что

$$\xi_{n_k} \xrightarrow{n.n., k \rightarrow +\infty} \xi$$

*Доказательство.* Выберем  $n_k$  так, чтобы  $n_k > n_{k-1}$  и

$$P(|\xi_{n_k} - \xi| \geq \frac{1}{k}) \leq 2^{-k}$$

выбор возможен в силу сходимости по вероятности.

Проверим достаточное условие: пусть  $\varepsilon > 0$ , выберем  $k_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ . Тогда

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} P(|\xi_{n_k} - \xi| \geq \varepsilon) \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} P(|\xi_{n_k} - \xi| \geq \frac{1}{k}) \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k} < +\infty \Rightarrow \xi_{n_k} \xrightarrow{n.n., k \rightarrow +\infty} \xi$$

□

**Теорема 16.1.** *УЗБЧ в форме Кантелли.*

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – это независимые случайные величины, такие, что

$$\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : E(\xi_n - E\xi_n)^4 \leq c$$

Обозначим  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{n.n., n \rightarrow +\infty} 0$$

*Доказательство.* Без ограничения общности считаем, что  $\forall n \in \mathbb{N} : E\xi_n = 0$ , иначе рассмотрим

$$\xi'_n = \xi_n - E\xi_n$$

Хотим проверить достаточное условие. Для  $\varepsilon > 0$ :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\frac{S_n^4}{n^4} \geq \varepsilon^4\right) \stackrel{\text{н-во Маркова}}{\leq} \frac{ES_n^4}{\varepsilon^4 n^4}$$

Но

$$ES_n^4 = \sum_{i,j,k,l=1}^n E\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l = \sum_{i=1}^n ES_i^4 + 6 \sum_{i < j} ES_i^2 ES_j^2$$

По условию  $\forall i \in \mathbb{N} : ES_i^4 \leq c \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} : E\xi_i^2 \leq \sqrt{ES_i^4} \leq \sqrt{c} \Rightarrow$

$$ES_n^4 \leq n \cdot c + 6 \cdot c \cdot C_n^2 = O(n^2) \Rightarrow \frac{ES_n^4}{\varepsilon^4 n^4} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Значит ряд сходится и работает достаточно условие сходимости с вероятностью 1.  $\square$

**Замечание.** Смысл УЗБЧ.

Теоретическое обоснование принципа устойчивых частот. Пусть

$$\xi_i = \mathbb{I}\{A \text{ произошло в } i\text{-ом эксперименте}\}$$

Тогда частота появления  $A$  стремится к:

$$\nu_n(A) = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1 = P(A)$$

## 17 Фундаментальность с вероятностью 1

**Определение 17.1.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  фундаментальна с вероятностью 1, если

$$P(\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}) = 1$$

**Утверждение 17.1.** Последовательность  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходится почти наверное  $\Leftrightarrow$  она фундаментальна с вероятностью 1.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Пусть  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ , тогда

$$P(\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}) \geq P(\xi_n \rightarrow \xi) = 1$$

$\Leftarrow$  Обозначим  $A = \{\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}\}$ . Тогда  $\forall \omega \in A : \{\xi_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$  имеет предел  $\xi(\omega)$ . Положим  $\xi(\omega) = 0, \forall \omega \notin A$ . Тогда

$$\forall \omega \in \Omega : \xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\xi_n(\omega) \mathbb{I}_A(\omega))$$

Причём  $\xi$  – это случайная величина, как предел случайных величин.

Наконец,  $P(\xi_n \rightarrow \xi) \geq P(A) = 1$  □

**Теорема 17.1.** Неравенство Колмогорова.

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимые случайные величины,  $E\xi_k = 0, E\xi_k^2 < +\infty, \forall k = \overline{1, n}$ . Обозначим  $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}$$

*Доказательство.* Введём обозначения

$$A := \{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\}; A_k := \{|S_k| \geq \varepsilon, |S_i| < \varepsilon \forall i = \overline{1, k-1}\}$$

Тогда  $A = \sqcup_{i=1}^n A_i$ . Продолжим рассуждения:

$$\begin{aligned} ES_n^2 &\geq E(S_n^2 \cdot \mathbb{I}_A) = \sum_{k=1}^n E(S_n^2 \mathbb{I}_{A_k}) = \sum_{k=1}^n E((S_k + \xi_{k+1} + \dots + \xi_n)^2 \mathbb{I}_{A_k}) = \\ &\sum_{k=1}^n [ES_k^2 \cdot \mathbb{I}_{A_k} + E((\xi_{k+1} + \dots + \xi_n)^2 \cdot \mathbb{I}_{A_k}) + 2E(S_k \cdot \mathbb{I}_{A_k} (\xi_{k+1} + \dots + \xi_n))] \end{aligned}$$

Причём последнее слагаемое будет равно нулю, так как  $(S_k \mathbb{I}_{A_k}) \perp (\xi_{k+1} + \dots + \xi_n)$ , как функции от непересекающихся наборов независимых случайных величин, и  $E(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n) = 0$ . Второе же слагаемое просто оценим снизу нулём. Но  $S_k^2 \mathbb{I}_{A_k} \geq \varepsilon^2 \mathbb{I}_{A_k}$ . Тогда получим

$$ES_n^2 \geq \sum_{k=1}^n \varepsilon^2 E \mathbb{I}_{A_k} = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n P(A_k) = \varepsilon^2 P(A)$$

□

**Теорема 17.2.** Колмогорова-Хинчин о сходимости почти наверное ряда из случайных величин.

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – независимые случайные величины,  $E\xi_n = 0, D\xi_n < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$ . Если  $\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n < +\infty$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$  сходится почти наверное.

*Доказательство.* Введём  $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Используя критерий сходимости почти наверное, хотим получить

$$\forall \varepsilon > 0 : P \left( \sup_{k \geq n} |S_k - S_n| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Распишем меру этого события более подробно:

$$\begin{aligned} P \left( \sup_{k \geq n} |S_k - S_n| > \varepsilon \right) &= P \left( \bigcup_{k \geq n} \{|S_k - S_n| > \varepsilon\} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P \left( \bigcup_{k=n}^N \{|S_k - S_n| > \varepsilon\} \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} P \left( \max_{1 \leq k \leq N-n} |S_{n+k} - S_n| > \varepsilon \right) \stackrel{\text{н-во Колмогорова}}{\leq} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E|S_N - S_n|^2}{\varepsilon^2} = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{D(\xi_{n+1} + \dots + \xi_N)}{\varepsilon^2} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^N D\xi_k = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} D\xi_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Последний переход обусловлен тем, что остаток сходящегося ряда стремится к нулю.  $\square$



## 18 Леммы Теплица и Кронекера...

**Лемма 18.1.** *Тёплица (б/д)*

Пусть  $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$  – положительные числа,  $x_n \rightarrow x, b_n = \sum_{j=1}^n a_j \uparrow +\infty$ . Тогда

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n a_j x_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$$

**Лемма 18.2.** *Кронекера (б/д)*

Пусть  $b_n > 0$  и  $b_n \uparrow +\infty$ , пусть  $\sum x_n$  сходится. Тогда

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n b_j x_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Определение 18.1.** Пусть  $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$  – последовательность событий. Событием  $\{A_n \text{ б.ч.}\}$  называется

$$\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} A_m$$

Это событие состоит в том, что произошло бесконечное число событий  $A_n$ .

**Лемма 18.3.** *Бореля-Кантелли.*

1. Если  $\sum_n P(A_n) < +\infty$ , то  $P(A_n \text{ б.ч.}) = 0$
2. Если  $\sum_n P(A_n) = +\infty$  и события  $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$  независимы в совокупности, то  $P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$

*Доказательство.* 1. Распишем более подробно исследуемую меру:

$$P(A_n \text{ б.ч.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

Так как ряд  $\sum_n P(A_n)$  сходится

2. Мы уже знаем, что

$$\begin{aligned} P(A_n \text{ б.ч.}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right) \end{aligned}$$

Рассмотрим предел

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N P(\overline{A_k}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N (1 - P(A_k)) \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N e^{-P(A_k)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} e^{-\sum_{k=n}^N P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 0 \end{aligned}$$

Последний переход верен, так как ряд  $\sum_n P(A_n)$  расходится.  $\Rightarrow P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$

□

**Теорема 18.1.** УЗБЧ в форме Колмогорова

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – независимые одинаково распределённые случайные величины. Пусть  $E\xi_1$  конечно. Обозначим  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1$$

*Доказательство.* Без ограничения общности считаем, что  $E\xi_1 = 0$ . Иначе перейдём к случайным величинам  $\xi_n - E\xi_1$ . Тогда

$$E|\xi_1| < +\infty \Rightarrow \sum_n P(|\xi_1| \geq n) < +\infty \stackrel{\text{один.распр.}}{\Leftrightarrow} \sum_n P(|\xi_n| \geq n) < +\infty$$

По лемме Бореля-Кантелли  $P((A := \{|\xi_n| \geq n\}) \text{ б.ч.}) = 0$ , то есть с вероятностью 1 выполняется:

$$\xi_n \stackrel{\text{п.н.}}{=} \bar{\xi}_n := \xi_n \mathbb{I}\{|\xi_n| < n\}$$

начиная с некоторого номера  $n_0 = n_0(\omega)$ .

Тем самым  $\forall \omega \notin A$ :

$$\frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{\bar{\xi}_1(\omega) + \dots + \bar{\xi}_n(\omega)}{n} \rightarrow 0$$

Остаётся доказать, что  $\frac{\bar{\xi}_1 + \dots + \bar{\xi}_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ .

Рассмотрим  $E\bar{\xi}_n$ :

$$E\bar{\xi}_n = E\xi_n \mathbb{I}\{|\xi_n| < n\} \stackrel{\text{один.распр.}}{=} E\xi_1 \mathbb{I}\{|\xi_1| < n\} \xrightarrow{\text{т. Лебега}} E\xi_1 = 0$$

По лемме Тёплица ( $x_n = E\bar{\xi}_n, a_n = 1$ )  $\frac{E\bar{\xi}_1 + \dots + E\bar{\xi}_n}{n} \rightarrow 0$ . Тогда

$$\frac{\bar{\xi}_1(\omega) + \dots + \bar{\xi}_n(\omega)}{n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{\bar{\xi}_1(\omega) - E\bar{\xi}_1 + \dots + \bar{\xi}_n(\omega) - E\bar{\xi}_n}{n} \rightarrow 0$$

Остаётся проверить, что ряд  $\sum_n \frac{\bar{\xi}_n - E\bar{\xi}_n}{n}$  сходится почти наверное. Почему? Мы применим лемму Кронекера, взяв  $x_n = \frac{\bar{\xi}_n}{n}, b_n = n$ , где  $\tilde{\xi}_n := \bar{\xi}_n - E\bar{\xi}_n$ .

А для этого достаточно проверить, что  $\sum_{k=1}^{\infty} D\left(\frac{\tilde{\xi}_k}{k}\right) < +\infty$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} D\left(\frac{\tilde{\xi}_k}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\tilde{\xi}_k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\tilde{\xi}_k^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\xi_k^2 \mathbb{I}\{|\xi_k| < k\}}{k^2} \stackrel{\text{один.распр.}}{=} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\xi_1^2 \mathbb{I}\{|\xi_1| < k\}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k E(\xi_1^2 \mathbb{I}\{i-1 \leq |\xi_1| < i\}) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} E(\xi_1^2 \mathbb{I}\{i-1 \leq |\xi_1| < i\}) \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{\xi_1^2}{i} \mathbb{I}\{i-1 \leq |\xi_1| < i\}\right) \leq \\ &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} E(|\xi_1| \mathbb{I}\{i-1 \leq \xi_1 < i\}) \stackrel{\text{т. о мон-й сн-ти}}{=} 2E|\xi_1| < +\infty \end{aligned}$$

□

## 19 Слабая сходимост и сходимост в основном...

**Определение 19.1.** Пусть  $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $F$  – функции распределения на  $\mathbb{R}$ . Последовательность  $\{F_n\}$  слабо сходится к  $F$ , если  $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывной ограниченной функции, выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)$$

Обозначение:  $F_n \xrightarrow{W} F$

**Определение 19.2.** Последовательность  $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$  функций распределения на  $\mathbb{R}$  сходится в основном к функции распределения  $F$ , если

$$\forall x \in \mathbb{C}(F) : F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(x)$$

где  $\mathbb{C}(F)$  – точки непрерывности функции  $F$ .

Обозначение:  $F_n \Rightarrow F$

**Определение 19.3.** Пусть  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $P$  – вероятностные меры на  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ . Тогда последовательность  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходится к  $P$ , если  $\forall f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  – ограниченной непрерывной функции выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x) P_n(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) P(dx)$$

Обозначение:  $P_n \xrightarrow{W} P$

**Определение 19.4.** Последовательность  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходится к  $P$  в основном, если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : P_n(B) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(B)$$

с условием  $P(\partial B) = 0$

**Теорема 19.1.** *Александрова (б/д).*

Пусть  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $P$  – вероятностные меры на  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $P_n \xrightarrow{W} P$
2.  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} P_n(F) \leq P(F), \forall F$  – замкнутых.
3.  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} P_n(G) \geq P(G), \forall G$  – открытых.
4.  $P_n \Rightarrow P$

**Теорема 19.2.** *Об эквивалентности сходимостей.*

Пусть  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $P$  – вероятностные меры на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , а  $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $F$  – соответствующие им функции распределения. Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $P_n \xrightarrow{W} P$
2.  $P_n \Rightarrow P$

$$3. F_n \xrightarrow{W} F$$

$$4. F_n \Rightarrow F$$

*Доказательство.*  $1 \Leftrightarrow 2$  по теореме Александрова.  $1 \Leftrightarrow 3$  по определению.

Для  $2 \Rightarrow 4$  рассмотрим  $B = (-\infty, x]$ . Тогда  $\partial B = \{x\}$ . Если  $x$  – точка непрерывности  $F$ , то  $P(\{x\}) = 0 \Rightarrow P(\partial B) = 0$ . Значит, в силу сходимости в основном плотностей:

$$F_n(x) = P_n((-\infty, x]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, x]) = F(x) \Rightarrow F_n \Rightarrow F$$

Для  $4 \Rightarrow 2$  пусть  $F_n \Rightarrow F$ . По теореме Александрова достаточно проверить, что  $\forall$  открытых  $G$  выполнено

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(G) \geq P(G)$$

Раз  $G \subset \mathbb{R}$ , то  $G$  представимо в виде конечного или счётного числа непересекающихся интервалов:

$$G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$

Зафиксируем  $\forall \varepsilon > 0$ . Для  $\forall k \in \mathbb{N}$  подберём полуинтервал  $(a'_k, b'_k] \subset (a_k, b_k)$ , такой, что

$$P((a_k, b_k)) \leq P((a'_k, b'_k]) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

и  $a'_k, b'_k$  – точки непрерывности  $F$ .

Такой выбор возможен в силу непрерывности вероятностной меры и того факта, что множество точек разрыва  $F$  не более чем счётно. Далее:

$$\begin{aligned} \lim_n P_n(G) &= \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} P_n((a_k, b_k)) \stackrel{\forall N > 0}{\geq} \lim_n \sum_{k=1}^N P_n((a_k, b_k)) \geq \sum_{k=1}^N \lim_n P_n((a_k, b_k)) \geq \\ &\sum_{k=1}^N \lim_n P_n((a'_k, b'_k]) = \sum_{k=1}^N \lim_n (F_n(b'_k) - F_n(a'_k)) \stackrel{F_n \Rightarrow F}{=} \sum_{k=1}^N (F(b'_k) - F(a'_k)) = \sum_{k=1}^N P((a'_k, b'_k]) \geq \\ &\sum_{k=1}^N P((a_k, b_k)) - \varepsilon \end{aligned}$$

Устремляя  $N \rightarrow +\infty$ , получаем

$$\lim_n P_n(G) \geq \sum_{k=1}^{\infty} P((a_k, b_k)) - \varepsilon = P(G) - \varepsilon$$

В силу произвольного  $\varepsilon > 0$ :

$$\lim_n P_n(G) \geq P(G)$$

Благодаря теореме Александрова, всё доказали. □

**Следствие.** Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\xi$  – случайные величины. Тогда

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}(F_\xi) : F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_\xi(x)$$

## 20 Характеристические функции...

**Определение 20.1.** Пусть  $\xi$  – случайная величина. Характеристической функцией случайной величины  $\xi$  называется

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\xi t}, t \in \mathbb{R}$$

**Определение 20.2.** Пусть  $\xi$  – случайный вектор из  $\mathbb{R}^n$ . Характеристической функцией  $\xi$  называется

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\langle \xi, t \rangle}, t \in \mathbb{R}^n$$

**Определение 20.3.** Пусть  $P$  – вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ . Характеристической функцией меры  $P$  называется

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle x, t \rangle} P(dx)$$

**Пример.** Вычисление характеристической функции для стандартного нормального распределения.

Пусть  $\xi \equiv \mathcal{N}(0, 1)$ . Тогда

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Имеем право рассмотреть производную характеристической функции:

$$\varphi'_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)(-x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - t \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Получили диффур вида

$$\varphi'_\xi(t) = (-t) \cdot \varphi_\xi(t)$$

Решая его, получим, что

$$\varphi_\xi(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$$

Из начальных условий,  $C = 1$  (т.к.  $\forall \xi : \varphi_\xi(0) = 1$ ).

Значит  $\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ .

### Свойства характеристических функций случайных величин

1. Если  $\varphi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$ , то

$$\forall t \in \mathbb{R} : |\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$$

*Доказательство.*

$$|\varphi(t)| = |Ee^{i\xi t}| \leq E|e^{i\xi t}| \stackrel{=1}{=} 1 = \varphi(0)$$

□

2. Если  $\varphi_\xi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$ ,  $\eta = a\xi + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , то

$$\varphi_\eta(t) = e^{itb} \varphi_\xi(at)$$

*Доказательство.*

$$\varphi_\eta(t) = Ee^{i\eta t} = Ee^{i(a\xi+b)t} = e^{itb} Ee^{i\xi(at)} = e^{itb} \varphi_\xi(at)$$

□

3. Если  $\varphi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$ , то  $\varphi(t)$  равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = |Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}| = |Ee^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)| \leq E|e^{it\xi}| |e^{ih\xi} - 1| = E|e^{ih\xi} - 1|$$

Заметим, что  $|e^{ih\xi} - 1| \xrightarrow{\forall \omega \in \Omega} 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Также, оценив  $|e^{ih\xi} - 1| \leq 2$  сможем применить теорему Лебега и получить:

$$E|e^{ih\xi} - 1| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

□

4. Пусть  $\varphi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$ . Тогда

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$$

*Доказательство.*

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = E \cos(t\xi) + iE \sin(t\xi) = E \cos(-t\xi) - iE \sin(-t\xi) = \overline{Ee^{i(-t)\xi}} = \overline{\varphi(-t)}$$

□

5. Единственность (б/д) Пусть  $\xi, \eta$  – случайные величины. Тогда

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) \Leftrightarrow \xi \stackrel{d}{=} \eta \text{ (одинаково распределены)}$$

6. Пусть  $\varphi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$ . Тогда

$$\forall t : \varphi(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \xi \stackrel{d}{=} -\xi$$

то есть распределение  $\xi$  симметрично:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : P(\xi \in B) = P(\xi \in -B)$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ :

$$\varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)} = \varphi_\xi(t) \Rightarrow \xi \stackrel{d}{=} -\xi$$

$\Leftarrow$ :

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)} \Rightarrow \forall t : \varphi_\xi(t) \in \mathbb{R}$$

□

7. Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимые случайные величины. Тогда

$$\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$$

*Доказательство.*

$$\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = Ee^{it(\xi_1+\dots+\xi_n)} \stackrel{\text{II}}{=} E \prod_{k=1}^n e^{it\xi_k} = \prod_{k=1}^n Ee^{it\xi_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$$

□

## 21 Единственность характеристических функций...

**Теорема 21.1.** *Единственности.*

Пусть  $\xi, \eta$  – случайные величины. Тогда

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) \Leftrightarrow \xi \stackrel{d}{=} \eta$$

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  Очевидно из формулы вычисления матожидания.

$\Rightarrow$  Для  $a < b$  и малого  $\varepsilon > 0$  рассмотрим функцию  $f_\varepsilon(x)$ :

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a] \cup [b + \varepsilon, +\infty) \\ \frac{x-a}{\varepsilon}, & x \in [a, a + \varepsilon] \\ 1, & x \in [a + \varepsilon, b] \\ \frac{b+\varepsilon-x}{\varepsilon}, & x \in [b, b + \varepsilon] \end{cases}$$

Докажем, что  $\forall \varepsilon > 0$  достаточно малого:

$$Ef_\varepsilon(\xi) = Ef_\varepsilon(\eta)$$

Возьмём большое  $n \in \mathbb{N}$ , такое что  $[-n, n] \supset [a, b + \varepsilon]$ . Тогда  $\forall n$  по т. Вейерштрасса  $\exists$  функция  $f_\varepsilon^{(n)}(x)$  на  $[-n, n]$  вида

$$f_\varepsilon^{(n)}(x) = \sum_{k \in K} c_k e^{\frac{i\pi k x}{n}}$$

где  $K \subset \mathbb{Z}$  – конечное множество. Причём

$$\forall x \in [-n, n] : |f_\varepsilon^{(n)}(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{n}$$

Очевидно,  $f_\varepsilon^{(n)}(x)$  периодическая с периодом  $2n$ , продолжим её на  $\mathbb{R}$  той же формулой. Заметим, что

$$\forall x \in [-n, n] : |f_\varepsilon^{(n)}(x)| \leq 2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : |f_\varepsilon^{(n)}(x)| \leq 2$$

Рассмотрим

$$|Ef_\varepsilon(\xi) - Ef_\varepsilon(\eta)| \leq |Ef_\varepsilon(\xi) - Ef_\varepsilon^{(n)}(\xi)| + |Ef_\varepsilon(\eta) - Ef_\varepsilon^{(n)}(\eta)| + |Ef_\varepsilon^{(n)}(\xi) - Ef_\varepsilon^{(n)}(\eta)|$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как  $f_\varepsilon^{(n)}(\xi), f_\varepsilon^{(n)}(\eta)$  – это какие-то линейная комбинация характеристических функций  $\xi, \eta$  с одинаковыми коэффициентами, которые равны по условию.

Далее,

$$|E(f_\varepsilon(\xi) - f_\varepsilon^{(n)}(\xi))| \leq E(|f_\varepsilon(\xi) - f_\varepsilon^{(n)}(\xi)| \cdot \mathbb{I}\{|\xi| \leq n\}) + (|f_\varepsilon(\xi) - f_\varepsilon^{(n)}(\xi)| \cdot \mathbb{I}\{|\xi| > n\}) \leq \frac{1}{n} + 2P(|\xi| > n)$$

В итоге получим, что

$$|Ef_\varepsilon(\xi) - Ef_\varepsilon(\eta)| \leq \frac{2}{n} + 2P(|\xi| > n) + 2P(|\eta| > n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow Ef_\varepsilon(\xi) = Ef_\varepsilon(\eta)$$



Заметим, что

$$\forall \omega \in \Omega : f_\varepsilon(\xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{I}\{\xi \in (a, b]\}, |f_\varepsilon(\xi)| \leq 1 \xrightarrow{\text{т. Лебега}} E f_\varepsilon(\xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E \mathbb{I}\{\xi \in (a, b]\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$

Итоговый результат

$$\forall a < b : F_\xi(b) - F_\xi(a) = F_\eta(b) - F_\eta(a)$$

Устремляя  $a \rightarrow -\infty$ :

$$F_\xi(b) = F_\eta(b) \Rightarrow \xi \stackrel{d}{=} \eta$$

□

**Пример.** Вычисление распределения суммы независимых нормальных случайных величин.

Пусть  $\xi_1, \xi_2$  – независимые случайные величины,  $\xi_i \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ . Требуется найти распределение  $\xi_1 + \xi_2$ .

*Доказательство.* Найдём характеристическую функцию  $\xi_j$ : заметим, что

$$\eta := \frac{\xi_j - a_j}{\sigma_j} \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow \varphi_{\xi_j}(t) = e^{ita_j} \varphi_\eta(\sigma_j t) = e^{ia_j t - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2}}$$

Тогда

$$\varphi_{\xi_1 + \xi_2}(t) \stackrel{=}{=} \varphi_{\xi_1}(t) \varphi_{\xi_2}(t) = e^{it(a_1 + a_2) - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2}} \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

□

**Теорема 21.2.** Формула обращения (б/д).

Пусть  $\varphi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$  с функцией распределения  $F_\xi$

1. Для  $\forall a < b, a, b \in \mathbb{F}_\xi$  выполнено

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{-C}^C \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt$$

2. Если  $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < +\infty$ , то случайная величина  $\xi$  имеет плотность

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

## 22 Теорема о производной х-ф. . .

**Теорема 22.1.** *О производных характеристических функций.*

Пусть  $E|\xi|^n < +\infty$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\forall s \leq n$ :

1.  $\varphi_\xi^{(s)}(t) = E((i\xi)^s e^{it\xi})$
2.  $E\xi^s = \frac{\varphi_\xi^{(s)}(0)}{i^s}$
3.  $\varphi_\xi(t)$  разлагается в виде:

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t)$$

$$\text{где } |\varepsilon_n(t)| \leq 3E|\xi|^n \text{ и } \varepsilon_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

*Доказательство.* 1. Рассмотрим  $s = 1$ :

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \frac{1}{h}(Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}) = E\left[e^{it\xi} \left(\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right)\right]$$

Заметим, что

$$\forall \omega \in \Omega : e^{it\xi} \left(\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} (i\xi)e^{it\xi}$$

Кроме того,

$$|e^{ih\xi} - 1| = |\cos(h\xi) - 1 + i\sin(h\xi)| \leq 2|\xi h| \Rightarrow \left|e^{it\xi} \left(\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right)\right| = \left|\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right| \leq 2|\xi|$$

По теореме Лебега:

$$Ee^{it\xi} \left(\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} E(i\xi)e^{it\xi}$$

Случай  $s \geq 2$  полностью аналогичен и доказывается по индукции.

2. Сразу следует из подстановки  $t = 0$  в предыдущую формулу.
3. Рассмотрим

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iy)^k}{k!} + \frac{(iy)^n}{n!}(\cos \theta_1(y) + i \sin \theta_2(y))$$

где  $|\theta_1(y)|, |\theta_2(y)| \leq y$

Подставляем  $y = t\xi$  и берём  $E$ :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} E\xi^n (\cos \theta_1(t\xi) + i \sin \theta_2(t\xi)) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t)$$

где  $\varepsilon_n(t) = E[\xi^n (\cos \theta_1(t\xi) + i \sin \theta_2(t\xi) - 1)]$ .

Значит  $|\varepsilon_n(t)| \leq 3E|\xi|^n$ . Также

$$\forall \omega \in \Omega : \cos \theta_1(t\xi) + i \sin \theta_2(t\xi) - 1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Кроме того,

$$|\xi^n(\cos \theta_1(t\xi) + i \sin \theta_2(t\xi) - 1)| \leq 3|\xi|^n$$

По теореме Лебега  $\varepsilon_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ .

□

**Следствие.** Если  $\varphi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$  и  $E|\xi|^2 < +\infty$ , то

$$\varphi(t) = 1 + (it)E\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + o(t^2), t \rightarrow 0$$

**Теорема 22.2.** Критерий независимости компонент случайного вектора в терминах характеристических функций.

Случайная величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупность  $\Leftrightarrow$

$$\varphi_\xi(t_1, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k)$$

где  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – случайный вектор.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ :

$$\varphi_\xi(t_1, \dots, t_n) = Ee^{i\langle \xi, t \rangle} = Ee^{i \sum_{k=1}^n t_k \xi_k} = E \left[ \prod_{k=1}^n e^{it_k \xi_k} \right] \stackrel{\text{нз}}{=} \prod_{k=1}^n Ee^{it_k \xi_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k)$$

$\Leftarrow$ : Рассмотрим  $F_1, \dots, F_n$  – функции распределения случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Составим функцию распределения  $G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_i(x_i)$ .

Рассмотрим случайный вектор  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  с функцией распределения  $G$ . Тогда  $\eta_j$  имеет функцию распределения  $F_j$  и  $\eta_1, \dots, \eta_n$  – независимые случайные величины.

$$\varphi_\eta(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\eta_k}(t_k) \stackrel{\eta_k \stackrel{d}{=} \xi_k}{=} \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k) \stackrel{\text{по условию}}{=} \varphi_\xi(t)$$

По теореме о единственности функций распределения  $\xi, \eta$  совпадают  $\Rightarrow$

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n F_{\xi_k}(x_k)$$

Значит  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимы в совокупности.

□

**Определение 22.1.** Функция  $f(t), t \in \mathbb{R}, f(t) \in \mathbb{C}$  называется неотрицательно определённой, если

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} : \sum_{i,j=1}^n f(t_i - t_j) z_i \overline{z_j} \geq 0$$

**Теорема 22.3.** Бохнера-Хинчина. (д-во только необходимости)

Пусть  $\varphi(t), t \in \mathbb{R}$ , такова, что  $\varphi(0) = 1$  и  $\varphi(t)$  непрерывна в нуле. Тогда  $\varphi(t)$  является характеристической функцией распределения  $\Leftrightarrow \varphi(t)$  неотрицательно определена.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Пусть  $\varphi(t)$  – характеристическая функция  $\xi$ . Пусть  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ ;  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k,j=1}^n \varphi_\xi(t_k - t_j) z_k \overline{z_j} &= \sum_{k,j=1}^n E e^{i(t_k - t_j)\xi} z_k \overline{z_j} = E \sum_{k,j=1}^n e^{i(t_k - t_j)\xi} z_k \overline{z_j} = \\ &= E \sum_{k,j=1}^n (z_k e^{it_k \xi}) \overline{(z_j e^{it_j \xi})} = E \left| \sum_{k=1}^n z_k e^{it_k \xi} \right|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

□

## 23 Плотность и относительная компактность семейств вероятностных мер...

Пусть  $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  – семейство распределений на  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ .

**Определение 23.1.** Семейство  $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  называется относительно компактным, если из любой последовательности

$$\{P_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$$

можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

**Определение 23.2.** Семейство  $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  называется плотным, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \subset \mathbb{R}^m - \text{компакт} : \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} P_\alpha(\mathbb{R}^m \setminus K) \leq \varepsilon$$

**Теорема 23.1. Прохорова.** (док-во только для  $\mathbb{R}$ )

*Семейство относительно компактно  $\Leftrightarrow$  оно плотно.*

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  пусть  $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  неплотно. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \forall K \subset \mathbb{R} - \text{компакт} : \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} P_\alpha(\mathbb{R} \setminus K) > \varepsilon$$

Выберем подпоследовательность  $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ , такую, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : P_{\alpha_n}(\mathbb{R} \setminus [-n, n]) > \varepsilon$$

В силу относительной компактности из  $\{P_{\alpha_n}\}$  можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$P_{\alpha_{n_k}} \xrightarrow{W} Q, k \rightarrow +\infty$$

Но тогда по теореме Александрова

$$\varepsilon \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} P_{\alpha_{n_k}}(\mathbb{R} \setminus (-n, n)) \leq Q(\mathbb{R} \setminus (-n, n))$$

верно для  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Но

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(\mathbb{R} \setminus (-n, n)) = 0 \Rightarrow \perp$$

$\Leftarrow$  Пусть  $\{P_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\}$  – подпоследовательность в семействе. Пусть  $F_n$  – функция распределения  $P_{\alpha_n}$ . Занумеруем  $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ .

Тогда последовательность  $\{F_n(q_1), n \in \mathbb{N}\}$  – ограничена  $\Rightarrow \exists$  сходящаяся подпоследовательность  $n^{(1)} = (n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots)$ , такая, что  $\exists \lim_j F_{n_j^{(1)}}(q_1)$ .

Последовательность  $\{F_{n_m^{(1)}}(q_2), m \in \mathbb{N}\}$  – ограничена  $\Rightarrow \exists$  подпоследовательность  $n^{(1)} \supset n^{(2)} = (n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \dots)$ , такая, что  $\exists \lim_m F_{n_m^{(2)}}(q_2)$ . И т.д. строим  $n^{(j)} = (n_1^{(j)}, n_2^{(j)}, \dots)$ , такую, что

$$\exists \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{n_m^{(j)}}(q_i), \forall i = \overline{1, j}$$

Тогда диагональная последовательность  $n^1 = (n_1^{(1)}, n_2^{(2)}, n_3^{(3)}, \dots)$  будет такова, что

$$\exists \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{n_m^1}(q_i), \forall i \in \mathbb{N}$$

Обозначим для  $x \in \mathbb{Q}$ :

$$G(x) := \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{n_m}^{(m)}(x)$$

Заметим, что  $G(x)$  не убывает на  $\mathbb{Q}$  по построению. Положим для  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ :

$$G(x) = \inf_{y > x, y \in \mathbb{Q}} G(y)$$

Из построения сразу следует, что  $G(x)$  не убывает и непрерывность справа. Проверим, что

$$\forall x \in \mathbb{C}(G) : \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{n_m}^{(m)}(x) = G(x)$$

Пусть  $x_0 \in \mathbb{C}(G)$ . Возьмём  $y > x_0, y \in \mathbb{Q}$ . Тогда

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} F_{n_m}^{(m)}(x_0) \leq \overline{\lim}_m F_{n_m}^{(m)}(y) = G(y) \Rightarrow \overline{\lim}_m F_{n_m}^{(m)}(x_0) \leq \inf_{y > x_0, y \in \mathbb{Q}} G(y) = G(x_0)$$

Возьмём  $x_1 < y < x_0, y \in \mathbb{Q}$ . Тогда

$$G(x_1) \leq G(y) = \underline{\lim}_m F_{n_m}^{(m)}(y) \leq \underline{\lim}_m F_{n_m}^{(m)}(x_0)$$

Устремляя  $x_1 \rightarrow x_0 - 0$ . В силу неубывания  $G(x)$  получаем

$$G(x_0 - 0) \leq \underline{\lim}_m F_{n_m}^{(m)}(x_0)$$

Если  $x_0 \in \mathbb{C}(G)$ , то  $G(x_0 - 0) = G(x_0) \Rightarrow$

$$\exists \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{n_m}^{(m)}(x_0) = G(x_0)$$

Остаётся проверить, что  $G(x)$  – настоящая функция распределения. В силу плотности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K = (a, b], a, b \in \mathbb{C}(G) : \forall \alpha \in \mathfrak{A} P_\alpha(K) \geq 1 - \varepsilon$$

Но тогда

$$G(b) - G(a) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (F_{n_m}^{(m)}(b) - F_{n_m}^{(m)}(a)) = \lim_{m \rightarrow +\infty} P_{n_m}^{(m)}((a, b]) \geq 1 - \varepsilon$$

Значит разность  $G(b) - G(a)$  может быть сколь угодно близкой к 1. Тогда устремляя  $b \rightarrow +\infty, a \rightarrow -\infty$  получим, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$$

□

## 24 Три леммы, теорема непрерывности...

**Лемма 24.1.** Пусть  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  – последовательность распределений в  $\mathbb{R}^m$ . Если она плотная и любая слабо сходящаяся подпоследовательность слабо сходится к одной и той же мере  $Q$ , то

$$P_n \xrightarrow{W} Q$$

*Доказательство.* Пусть  $P_n \not\xrightarrow{W} Q$ . Тогда  $\exists f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  – ограниченная непрерывная функция,  $\exists \varepsilon > 0$  и подпоследовательность  $\{P_{n'}\} \subset \{P_n\}$ , такая, что

$$\forall n' : \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(x) P_{n'}(dx) - \int_{\mathbb{R}^m} f(x) Q(dx) \right| \geq \varepsilon$$

Но  $\{P_{n'}\}$  – тоже плотная  $\Rightarrow$  в ней есть слабо сходящаяся последовательность  $\{P_{n''}\} \subset \{P_{n'}\}$ .

Но по условию  $P_{n''} \xrightarrow{W} Q$ .  $\perp$  □

**Лемма 24.2.** Пусть  $\{P_n\}$  – последовательность распределений на  $\mathbb{R}$ ,  $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – соответствующая последовательность характеристических функций. Если  $\{P_n\}$  – плотная, то  $\{P_n\}$  слабо сходится  $\Leftrightarrow$

$$\forall t \in \mathbb{R} : \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t)$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Если  $P_n \xrightarrow{W} Q$ , то в силу того, что  $\sin(tx)$ ,  $\cos(tx)$  – ограниченные функции, получаем

$$\varphi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_n(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} Q(dx) = \varphi(t) - \text{характеристическая функция меры } Q$$

$\Leftarrow$  Пусть  $\varphi(t) = \lim_n \varphi_n(t)$ . Выберем в  $\{P_n\}$  слабо сходящуюся подпоследовательность  $\{P_{n'}\}, P_{n'} \xrightarrow{W} Q$ . В силу рассуждений выше

$$\varphi_{n'}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \psi(t) - \text{хар. функция } Q \Rightarrow \psi(t) = \varphi(t)$$

Значит в силу теоремы единственности для характеристических функций все слабо сходящиеся будут иметь один и тот же предел. По лемме 1  $P_n \xrightarrow{W} Q$ . □

**Лемма 24.3.** Пусть  $\varphi(t)$  – характеристическая функция меры  $P$  на  $\mathbb{R}$ . Тогда

$$\forall a > 0 : P\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]\right) \leq \frac{7}{a} \int_0^a (1 - \Re \varphi(t)) dt$$

*Доказательство.* Рассмотрим интеграл, являющийся оценкой сверху, более подробно

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_0^a (1 - \Re \varphi(t)) dt &= \frac{1}{a} \int_0^a \left( \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(tx)) P(dx) \right) dt \stackrel{\text{Фубини}}{=} \\ &= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^a (1 - \cos(tx)) dt \right) P(dx) = \int_{\mathbb{R}} \left( 1 - \frac{\sin(ax)}{ax} \right) P(dx) \geq \\ &\geq \int_{\mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]} \left( 1 - \frac{\sin(ax)}{ax} \right) P(dx) \geq \inf_{|y| \geq 1} \left( 1 - \frac{\sin y}{y} \right) P\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]\right) \geq \frac{1}{7} P\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]\right) \end{aligned}$$

□

**Теорема 24.1.** Непрерывности для характеристических функций.

Пусть  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  – последовательность распределений на  $\mathbb{R}$ ,  $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – соответствующая последовательность характеристических функций.

1. Если  $P_n \xrightarrow{W} P$ , то

$$\forall t \in \mathbb{R} : \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) - \text{хар. функция меры } P$$

2. Пусть  $\forall t \in \mathbb{R} : \exists \lim_n \varphi_n(t) = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  непрерывна в нуле. Тогда  $\varphi(t)$  является характеристической функцией некоторой меры  $P$  и  $P_n \xrightarrow{W} P$

*Доказательство.* 1. Следует из определения слабой сходимости

2. Проверим, что  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  – плотная. Для  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a > 0$ :

$$P_n \left( \mathbb{R} \setminus \left[ -\frac{1}{a}, \frac{1}{a} \right] \right) \leq \frac{7}{a} \int_0^a (1 - \Re \varphi_n(t)) dt \stackrel{\text{т. Лебега}}{\rightarrow} \frac{7}{a} \int_0^a (1 - \Re \varphi(t)) dt$$

Для  $\forall \varepsilon > 0 \exists a > 0$ , такое, что

$$(1 - \Re \varphi(t)) \leq \frac{\varepsilon}{14} \Rightarrow \frac{7}{a} \int_0^a (1 - \Re \varphi(t)) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Значит

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : \frac{7}{a} \int_0^a (1 - \Re \varphi_n(t)) dt \leq \varepsilon$$

Значит  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  – относительно компактное  $\Leftrightarrow$  плотное. По второй лемме  $\exists$  мера  $P$ , такая, что  $P_n \xrightarrow{W} P$ . По предыдущем пункту получаем, что  $\varphi(t)$  – характеристическая функция меры  $P$ . □



## 25 Центральная предельная теорема...

**Теорема 25.1.** Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределённых случайных величин.

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – независимые одинаково распределённые случайные величины,  $E\xi_1 = a, 0 < D\xi_1 < +\infty$ . Обозначим  $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

*Доказательство.* Обозначим  $T_n := \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$ . По теореме непрерывности достаточно проверить, что характеристическая функция  $T_n$  сходится к  $e^{-\frac{t^2}{2}}$  – характеристической функции  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Обозначим  $\eta_j := \frac{\xi_j - a}{\sigma}$ . Тогда  $\eta_j$  – независимые одинаково распределённые случайные величины, причём  $E\eta_j = 0, D\eta_j = E\eta_j^2 = 1$ . Тогда

$$T_n = \frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n}}$$

Посчитаем хар. функцию  $T_n$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{T_n}(t) &= Ee^{itT_n} = Ee^{i\frac{t}{\sqrt{n}}(\eta_1 + \dots + \eta_n)} \stackrel{\text{т. о производных}}{=} \prod_{k=1}^n \varphi_{\eta_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\eta_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \\ &= \left(1 + i\frac{t}{\sqrt{n}}E\eta_1 - \frac{t^2}{2n}E\eta_1^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

□

**Следствие.** В условиях ЦПТ для  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

*Доказательство.* Согласно ЦПТ:

$$T_n := \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}(\Phi) : F_{T_n}(x) \rightarrow \Phi(x)$$

где  $\Phi$  – функция распределения стандартного нормального распределения, но  $\Phi$  всюду непрерывна, поэтому следствие доказано. □

**Следствие.** В условиях ЦПТ обозначим  $a = E\xi_1, \sigma^2 = D\xi_1$ . Тогда

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

*Доказательство.* Заметим, что если  $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$ , то

$$\forall c \in \mathbb{R} : c\eta_n \xrightarrow{d} c\eta$$

Тогда

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) = \frac{S_n - na}{\sqrt{n}} = \frac{S_n - na}{\sqrt{DS_n}} \cdot \sigma \xrightarrow{d} \sigma \cdot \mathcal{N}(0, 1) = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

□

**Замечание.** Смысл ЦПТ.

Скорость сходимости в УЗБЧ. УЗБЧ утверждает, что

$$\frac{S_n}{n} - a \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

Благодаря ЦПТ можно сказать, что в типичной ситуации ( $\sim 0.99$ ):

$$\left| \frac{S_n}{n} - a \right| = \underline{O} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

*Доказательство.* Выберем  $u > 0$ , такое, что

$$P(|\xi| \leq u) = 0.99, \xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \Rightarrow P \left( \left| \frac{S_n}{n} - a \right| \leq \frac{4}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.99$$

□

**Теорема 25.2.** Теорема Берри-Эссеена об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме (б/д).

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – независимые одинаково распределённые случайные величины, пусть  $E|\xi_1 - E\xi_1|^3 < +\infty$ . Обозначим  $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n, T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$ . Тогда

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{c \cdot E|\xi_1 - E\xi_1|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

где  $c > 0$  – абсолютная константа.

## 26 Виды сходимости случайных векторов...

**Определение 26.1.** Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$  – случайные вектора из  $\mathbb{R}^m$ , на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Последовательность  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходится к  $\xi$ :

1. С вероятностью 1 (почти наверное), если

$$P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = \xi\right) = 1$$

Обозначение:  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$

2. По вероятности, если

$$\forall \varepsilon > 0 : P(\|\xi_n - \xi\|_2 \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

где  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

Обозначение:  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$

3. По распределению, если  $\forall f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  – ограниченной непрерывной функции выполнено

$$Ef(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Ef(\xi)$$

**Лемма 26.1.** О связи многомерных сходимостей с одномерными.

Пусть  $\xi_n = (\xi_n^{(1)}, \dots, \xi_n^{(m)})$ ,  $\xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)})$ . Тогда

1.  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall i = \overline{1, m} : \xi_n^{(i)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi^{(i)}$
2.  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Leftrightarrow \forall i = \overline{1, m} : \xi_n^{(i)} \xrightarrow{P} \xi^{(i)}$
3.  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Rightarrow \forall i = \overline{1, m} : \xi_n^{(i)} \xrightarrow{d} \xi^{(i)}$

**Теорема 26.1.** О наследовании сходимости.

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$  – случайные векторы из  $\mathbb{R}^m$ . Пусть  $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  непрерывна почти всюду относительно распределения случайного вектора  $\xi$  (то есть  $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ , такое, что  $h$  – непрерывна на  $B$  и  $P(\xi \in B) = 1$ ). Тогда

1.  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} h(\xi)$
2.  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{P} h(\xi)$
3.  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{d} h(\xi)$

*Доказательство.* 1.  $P(h(\xi_n) \rightarrow h(\xi)) \geq P(\xi_n \rightarrow \xi, \xi \in B) = 1$

2. Пусть  $h(\xi_n) \not\xrightarrow{P} h(\xi)$ . Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists \{n_k, k \in \mathbb{N}\} : \forall k \in \mathbb{N} P(\|h(\xi_{n_k}) - h(\xi)\|_2 \geq \varepsilon) \geq \delta > 0$$

Но  $\xi_{n_k} \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \exists \{n_{km}, m \in \mathbb{N}\} : \xi_{n_{km}} \xrightarrow{\text{п.н.}, m \rightarrow +\infty} \xi$ . Согласно предыдущему пункту,  $h(\xi_{n_{km}}) \xrightarrow{\text{п.н.}} h(\xi)$ , что есть противоречие.

3. Обозначим  $Q_n$  – распределение  $h(\xi_n)$ ,  $Q$  – распределение  $h(\xi)$ . Хотим доказать, что  $Q_n \xrightarrow{W} Q$ . По теореме Александрова достаточно проверить, что

$$\overline{\lim}_n Q_n(F) \leq Q(F), \forall F \subset \mathbb{R}^k - \text{замкнутого}$$

Проверим это:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_n Q_n(F) &= \overline{\lim}_n P(h(\xi_n) \in F) = \overline{\lim}_n P(\xi_n \in h^{-1}(F)) \leq \\ &\overline{\lim}_n P(\xi_n \in \text{cl}(h^{-1}(F))) \leq P(\xi \in \text{cl}(h^{-1}(F))) \end{aligned}$$

Заметим, что в силу замкнутости  $F$  и непрерывности  $h$  на  $B$ , выполнено

$$\text{cl}(h^{-1}(F)) \subset \overline{B} \cup h^{-1}(F) \Rightarrow P(\xi \in \text{cl}(h^{-1}(F))) = P(\xi \in h^{-1}(F))$$

В итоге получили, что

$$\overline{\lim}_n Q_n(F) \leq P(\xi \in h^{-1}(F)) = Q(F)$$

□

**Теорема 26.2.** Усиленный закон больших чисел для случайных векторов.

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – независимые одинаково распределённые случайные векторы из  $\mathbb{R}^m$ . Пусть  $E\xi_1$  конечно. Тогда

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{n.n., n \rightarrow +\infty} E\xi_1$$

*Доказательство.* Сразу следует из одномерного случая. □

**Теорема 26.3.** Многомерная ЦПТ (б/д).

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – независимые одинаково распределённые случайные векторы из  $\mathbb{R}^m$ ,  $a = E\xi_1$ ,  $\Sigma = D\xi_1$  – конечные. Обозначим  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Тогда

$$\sqrt{n} \left( \frac{S_n}{n} - a \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

## 27 Лемма Слуцкого...

**Теорема 27.1.** *Лемма Слуцкого.*

Пусть  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ,  $\eta_n \xrightarrow{d} C = \text{const}$  – случайная величина. Тогда

$$\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi + C; \quad \xi_n \cdot \eta_n \xrightarrow{d} \xi \cdot C$$

*Доказательство.* Докажем только для суммы. Для произведения аналогично.

Пусть  $x$  – точка непрерывности  $F_{\xi+C} \Rightarrow x$  – точка непрерывности  $F_\xi$ :

$$F_{\xi_n+\eta_n}(x) = P(\xi_n + \eta_n \leq x) = P(\xi_n + \eta_n \leq x, C - \eta_n \geq \varepsilon) + P(\xi_n + \eta_n \leq x, C - \eta_n < \varepsilon) \leq \\ P(|\eta_n - C| \geq \varepsilon) + P(\xi_n + C \leq x + \varepsilon)$$

Выберем  $\varepsilon > 0$  малым и таким, что  $x - C \pm \varepsilon$  – точка непрерывности  $F_\xi$ . Заметим, что  $\eta_n \xrightarrow{d} C \Leftrightarrow \eta_n \xrightarrow{P} C$ . Значит,

$$P(|\eta_n - C| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Из этого следует, что

$$\overline{\lim}_n F_{\xi_n+\eta_n}(x) \leq \overline{\lim}_n P(\xi_n \leq x - C + \varepsilon) = P(\xi \leq x - C + \varepsilon)$$

так как  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ .

Аналогично,

$$1 - F_{\xi_n+\eta_n}(x) = P(\xi_n + \eta_n > x) \leq P(|\eta_n - C| \geq \varepsilon) + P(\xi_n + C > x - \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 + P(\xi > x - C - \varepsilon)$$

Из этого следует, что

$$\overline{\lim}_n (1 - F_{\xi_n+\eta_n}(x)) \leq P(\xi > x - C - \varepsilon) \Rightarrow \underline{\lim}_n F_{\xi_n+\eta_n}(x) \geq P(\xi \leq x - C - \varepsilon)$$

В итоге,

$$F_{\xi+C}(x - \varepsilon) \leq \underline{\lim}_n F_{\xi_n+\eta_n}(x) \leq \overline{\lim}_n F_{\xi_n+\eta_n}(x) \leq F_{\xi+C}(x + \varepsilon)$$

В силу того, что  $\varepsilon$  произвольно и мало, а  $x$  – точка непрерывности  $F_{\xi+C}$ , получаем, что

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\xi_n+\eta_n}(x) = F_{\xi+C}(x)$$

□

**Пример.** Построение асимптотически доверительного интервала для параметра в схеме Бернулли.

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – независимые одинаково распределённые случайные величины. Причём  $X_i \sim \text{Bin}(1, p)$ .

*Доказательство.* Обозначим  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Согласно ЦПТ

$$\sqrt{n}(\bar{X} - p) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

или же

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Заметим, что по УЗБЧ  $\bar{X} \xrightarrow{\text{п.н.}} p$  и по теореме о наследовании сходимости

$$\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})} \xrightarrow{\text{п.н.}} \sqrt{p(1 - p)}$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{p(1 - p)}} \cdot \frac{\sqrt{p(1 - p)}}{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}} \xrightarrow{\text{л.Слуцкого, } d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Значит

$$P \left( \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}} \right| \leq 2.807 \right) \rightarrow 0.99$$

□

## 28 Гауссовские случайные векторы...

**Определение 28.1.** Случайный вектор  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  называется гауссовским (или нормальным), если его характеристическая функция имеет следующий вид:

$$\varphi(t) = e^{i\langle a, t \rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t \rangle}$$

где  $a \in \mathbb{R}^n, \Sigma \in M_{n \times n}$  – симметричная и неотрицательно определённая.

Обозначение:  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$

**Теорема 28.1.** О трёх эквивалентных определениях.

Следующие определения эквивалентны:

1.  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – гауссовский вектор
2.  $\xi \stackrel{\text{н.н.}}{=} A\eta + a$ , где  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m), \eta_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$  – независимые,  $a \in \mathbb{R}^n, A \in M_{n \times m}$
3. Для  $\forall \tau \in \mathbb{R}^n$  случайная величина  $\langle \tau, \xi \rangle$  имеет одномерное нормальное распределение (или константа).

*Доказательство.*  $1 \Rightarrow 2$ . Пусть  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma), \Sigma$  – симметричная и неотрицательно определённая, тогда  $\exists C$  – ортогональное преобразование, такое, что

$$C\Sigma C^T = D$$

где  $D$  – диагональная матрица

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & d_m & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, d_i > 0, i = \overline{1, m}$$

Рассмотрим вектор  $\xi' = C(\xi - a)$  и найдём его характеристическую функцию:

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi'}(t) &= E e^{i\langle \xi', t \rangle} = E e^{i\langle C\xi, t \rangle} \cdot e^{-i\langle Ca, t \rangle} = E e^{i\langle \xi, C^T t \rangle} = \varphi_{\xi}(C^T t) \cdot e^{-i\langle a, C^T t \rangle} = \\ &= e^{i\langle a, C^T t \rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma C^T t, C^T t \rangle} \cdot e^{-i\langle a, C^T t \rangle} = e^{-\frac{1}{2}\langle C\Sigma C^T t, t \rangle} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n d_k t_k^2} = \prod_{k=1}^n e^{-\frac{1}{2}d_k t_k^2} \end{aligned}$$

Значит компоненты  $\xi'$  независимы в совокупности, причём

$$\xi'_j \sim \mathcal{N}(0, d_j), j = \overline{1, m}; \quad \xi'_j \stackrel{\text{н.н.}}{=} 0, j = \overline{m+1, n}$$

Обозначим  $\eta_j = \frac{\xi'_j}{\sqrt{d_j}}, j = \overline{1, m}$ . Тогда  $\eta_1, \dots, \eta_m$  – независимые с  $\mathcal{N}(0, 1)$  и

$$\xi' = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_m} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \eta =: B\eta \Rightarrow \xi = C^T \xi' + a \stackrel{\text{н.н.}}{=} (C^T B)\eta + a$$

2  $\Rightarrow$  3. Пусть  $\tau \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\langle \tau, \xi \rangle \stackrel{\text{п.н.}}{=} \langle \tau, A\eta + a \rangle = \langle \tau, a \rangle + \langle A^T \tau, \eta \rangle = \langle \tau, a \rangle + \sum_{k=1}^n (A^T \tau)_k \cdot \eta_k$$

Что тоже нормальная случайная величина, как сумма независимых нормальных случайных величин.

3  $\Rightarrow$  1 Любая линейная комбинация компонент  $\xi$  – нормальная случайная величина  $\Rightarrow \xi_1, \dots, \xi_n$  – нормальная случайная величина, то есть у них конечные  $E\xi_i, E\xi_i^2$ .

Пусть  $\tau \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\langle \tau, \xi \rangle \sim \mathcal{N}(a_\tau, \sigma_\tau^2)$$

где  $a_\tau = E\langle \tau, \xi \rangle = \langle \tau, E\xi \rangle$ , а

$$\begin{aligned} \sigma_\tau^2 = D\langle \tau, \xi \rangle &= E(\langle \tau, \xi \rangle - \langle \tau, E\xi \rangle)^2 = E(\langle \tau, \xi - E\xi \rangle)^2 = E \sum_{i,j=1}^n \tau_i \tau_j (\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) \tau_i \tau_j = \langle D\xi \cdot \tau, \tau \rangle \end{aligned}$$

Обозначим  $\Sigma = D\xi$ . Тогда

$$\varphi_\xi(\tau) = Ee^{i\langle \xi, \tau \rangle} = \varphi_{\langle \xi, \tau \rangle}(1) = e^{ia_\tau - \frac{1}{2}\sigma_\tau^2} = e^{i\langle a, \tau \rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma \tau, \tau \rangle}$$

, где  $\Sigma$  – симметрическая, неотрицательно определённая. □

**Следствие.** Если  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$ , то

$$a = E\xi; \quad \Sigma = D\xi$$

**Следствие.** Линейной (аффинное) преобразование гауссовского вектора – тоже гауссовский вектор.

*Доказательство.* Пусть  $\xi$  – гауссовский вектор,  $\zeta = B\xi + b$  – его линейное преобразование. Тогда согласно второму определению

$$\xi \stackrel{\text{п.н.}}{=} A\eta + a$$

где  $\eta_1, \dots, \eta_m \sim \mathcal{N}(0, 1)$  – независимые.  $\Rightarrow$

$$\zeta \stackrel{\text{п.н.}}{=} (BA)\eta + (Ba + b)$$

□

**Следствие.** Пусть  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – гауссовский вектор. Тогда  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимы в совокупности  $\Leftrightarrow$  они попарно некоррелированы.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  верно для любых случайных векторов с конечными дисперсиями.

$\Leftarrow$  Если  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – попарно некоррелированы, то  $D\xi$  – диагональная, пусть  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$ :

$$\varphi_\xi(t) = e^{i\langle a, t \rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t \rangle} = \prod_{k=1}^n e^{ia_k t_k - \frac{1}{2}\sigma_{kk} t_k^2} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$$

По критерию независимости для характеристических функций получаем, что  $\xi_1, \dots, \xi_n$  будут независимы в совокупности. □



## 29 Условное математическое ожидание случайной величины. . .

**Определение 29.1.** Пусть  $\xi$  – случайная величина на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , пусть  $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$  – под- $\sigma$ -алгебра. Условным математическим ожиданием  $\xi$  относительно  $\mathcal{C}$  называется случайная величина  $E(\xi|\mathcal{C})$ , удовлетворяющая двум свойствам:

1. Свойство измеримости.

$E(\xi|\mathcal{C})$  является  $\mathcal{C}$ -измеримой

2. Интегральное свойство.

Для  $\forall A \in \mathcal{C}$  выполнено:

$$E(\xi \mathbb{I}_A) = E(E(\xi|\mathcal{C}) \mathbb{I}_A)$$

**Теорема 29.1.** *О существовании. (б/д).*

Если  $E|\xi| < +\infty$ , то для  $\forall \mathcal{C} \subset \mathcal{F} : E(\xi|\mathcal{C})$  существует и единственна с точностью до равенства почти всюду.

**Лемма 29.1.** *Явный вид условного математического ожидания в случае, если  $\sigma$ -алгебра порождена счётным разбиением.*

Пусть  $\mathcal{C}$  порождена разбиением  $\{D_n, n \in \mathbb{N}\}$  множества  $\Omega$ . Пусть  $\forall n \in \mathbb{N} : P(D_n) > 0$ . Пусть  $E|\xi| < +\infty$ . Тогда

$$E(\xi|\mathcal{C}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\xi \cdot \mathbb{I}_{D_n})}{P(D_n)} \mathbb{I}_{D_n}$$

*Доказательство.* Обозначим  $\eta := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\xi \cdot \mathbb{I}_{D_n})}{P(D_n)} \mathbb{I}_{D_n}$  – сумма несовместных  $\mathcal{C}$ -измеримых индикаторов  $\Rightarrow \eta$  – тоже  $\mathcal{C}$ -измеримая случайная величина.

Проверим интегральное свойство. Если  $A \in \mathcal{C}$ , то  $A$  – объединение не более чем счётного числа  $D_n \Rightarrow$  достаточно проверить только при  $A = D_k, k \in \mathbb{N}$ :

$$E(\eta \mathbb{I}_{D_k}) = E\left(\frac{E\xi \mathbb{I}_{D_k}}{P(D_k)} \mathbb{I}_{D_k}\right) = \frac{E(\xi \mathbb{I}_{D_k})}{P(D_k)} P(D_k) = E(\xi \mathbb{I}_{D_k})$$

□

## 30 Основные свойства условного матожидания

1. Если  $\xi$  –  $\mathcal{C}$ -измерима, то

$$E(\xi|\mathcal{C}) = \xi$$

*Доказательство.* Следует из определения,  $\xi$  удовлетворяет обоим свойствам □

2. Линейность.

$$E(a\xi + b\eta|\mathcal{C}) = aE(\xi|\mathcal{C}) + bE(\eta|\mathcal{C})$$

*Доказательство.* Правая часть –  $\mathcal{C}$ -измеримая случайная величина. Проверим интегральное свойство:  $A \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} E((a\xi + b\eta)\mathbb{I}_A) &= aE(\xi\mathbb{I}_A) + bE(\eta\mathbb{I}_A) = \\ &= aE(E(\xi|\mathcal{C})\mathbb{I}_A) + bE(E(\eta|\mathcal{C})\mathbb{I}_A) = E((aE(\xi|\mathcal{C}) + bE(\eta|\mathcal{C}))\mathbb{I}_A) \end{aligned}$$

□

3. Формула полной вероятности.

$$E(E(\xi|\mathcal{C})) = E\xi$$

*Доказательство.* По интегральному свойству  $\forall A \in \mathcal{C}$ :

$$E(\xi\mathbb{I}_A) = E(E(\xi|\mathcal{C})\mathbb{I}_A)$$

Возьмём  $A = \Omega$ , получим

$$E(E(\xi|\mathcal{C})) = E\xi$$

□

4. Если  $\xi$  независима с  $\mathcal{C}$  ( $\mathcal{F}_\xi \perp \mathcal{C}$ ), то  $E(\xi|\mathcal{C}) = E\xi$

*Доказательство.*  $E\xi$  является  $\mathcal{C}$ -измеримой случайной величиной. Проверяем интегральное свойство  $\forall A \in \mathcal{C}$ :

$$E(\xi \cdot \mathbb{I}_A) = E\xi E\mathbb{I}_A = E(E\xi \cdot \mathbb{I}_A)$$

□

5. Сохранение относительности порядка.

Если  $\xi \leq \eta$ , то  $E(\xi|\mathcal{C}) \stackrel{\text{п.н.}}{\leq} E(\eta|\mathcal{C})$

*Доказательство.* Рассмотрим

$$\forall A \in \mathcal{C} : \xi\mathbb{I}_A \leq \eta\mathbb{I}_A \Rightarrow E(E(\xi|\mathcal{C})\mathbb{I}_A) = E(\xi\mathbb{I}_A) \leq E(\eta\mathbb{I}_A) = E(E(\eta|\mathcal{C})\mathbb{I}_A)$$

□

Раз  $E(\xi|\mathcal{C})$  и  $E(\eta|\mathcal{C})$  являются  $\mathcal{C}$ -измеримыми, то по свойству обычного матожидания

$$E(\xi|\mathcal{C}) \stackrel{\text{п.н.}}{\leq} E(\eta|\mathcal{C})$$

$$6. |E(\xi|\mathcal{C})| \stackrel{\text{п.н.}}{\leq} E(|\xi||\mathcal{C})$$

*Доказательство.* Следует из свойств линейности и сохранения относительного порядка.  $\square$

7. Телескопическое свойство.

Если  $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{F}$ , то

$$(a) E(E(\xi|\mathcal{C}_1)|\mathcal{C}_2) = E(\xi|\mathcal{C}_1)$$

$$(b) E(E(\xi|\mathcal{C}_2)|\mathcal{C}_1) = E(\xi|\mathcal{C}_1)$$

*Доказательство.* (a) Следует из первого свойства, так как  $E(\xi|\mathcal{C}_\infty)$  является  $\mathcal{C}_2$ -измеримой.

(b)  $E(\xi|\mathcal{C}_1)$  является  $\mathcal{C}_1$ -измеримой.

Проверим интегральное свойство  $\forall A \in \mathcal{C}_1$ :

$$E(E(\xi|\mathcal{C}_2)\mathbb{I}_A) \stackrel{A \in \mathcal{C}_2}{=} E(\xi\mathbb{I}_A) \stackrel{A \in \mathcal{C}_1}{=} E(E(\xi|\mathcal{C}_1)\mathbb{I}_A)$$

$\square$

8. Предельный переход.

(a) Если  $0 \leq \xi_n \uparrow \xi$ , то

$$E(\xi_n|\mathcal{C}) \stackrel{\text{п.н.}}{\uparrow} E(\xi|\mathcal{C})$$

(b) Если  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$  и  $\forall n \in \mathbb{N} : |\xi_n| \leq \eta$ , где  $E\eta < +\infty$ , то

$$E(\xi_n|\mathcal{C}) \xrightarrow{\text{п.н.}} E(\xi|\mathcal{C})$$

*Доказательство.* (a) По свойству о сохранении относительного порядка:

$$0 \leq E(\xi_n|\mathcal{C}) \leq E(\xi_{n+1}|\mathcal{C})$$

Обозначим  $\eta = \lim_n E(\xi_n|\mathcal{C})$ . Проверим, что  $\eta$  –  $\mathcal{C}$ -измеримая случайная величина, как предел  $\mathcal{C}$ -измеримых.

Проверим интегральное свойство,  $\forall A \in \mathcal{C}$ :

$$0 \leq \xi_n \mathbb{I}_A \uparrow \xi \mathbb{I}_A, 0 \leq E(\xi_n|\mathcal{C})\mathbb{I}_A \uparrow \eta \mathbb{I}_A$$

Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$E(\xi\mathbb{I}_A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(\xi_n\mathbb{I}_A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(E(\xi_n|\mathcal{C})\mathbb{I}_A) = E(\eta\mathbb{I}_A)$$

(b) Рассмотрим  $\eta_n = \sup_{m \geq n} |\xi_m - \xi|$ . Тогда  $\eta_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ ,  $|\eta_n| \leq 2\eta$ :

$$|E(\xi_n|\mathcal{C}) - E(\xi|\mathcal{C})| \leq E(|\xi_n - \xi||\mathcal{C}) \leq E(\eta_n|\mathcal{C})$$

По предыдущему свойству  $E(\eta_n|\mathcal{C}) \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$

□

9. Если  $\eta$  –  $\mathcal{C}$ -измеримая случайная величина, то

$$E(\xi\eta|\mathcal{C}) = \eta E(\xi|\mathcal{C})$$

*Доказательство.* Правая часть  $\mathcal{C}$ -измерима. Проверим интегральное свойство. Для  $\forall A \in \mathcal{C}$ . Пусть сначала  $\eta = \mathbb{I}_B$ ,  $B \in \mathcal{C}$ . Тогда интегральное свойство выглядит, как

$$E(\xi \mathbb{I}_B \mathbb{I}_A) = E(\xi \mathbb{I}_{A \cap B}) = E(E(\xi|\mathcal{C}) \mathbb{I}_{A \cap B}) = E(\mathbb{I}_B E(\xi|\mathcal{C}) \mathbb{I}_A)$$

Это равенство линейно по  $\eta \Rightarrow$  оно верно для простых случайных величин.

Если  $\eta$  – произвольная, то приближаем простыми и пользуемся предельным переходом. □

10. Неравенство Йенсена

Если  $\varphi(x)$  – выпуклая снизу функция, то

$$E(\varphi(\xi)|\mathcal{C}) \geq \varphi(E(\xi|\mathcal{C}))$$

*Доказательство.* Для  $\forall x \in \mathbb{R} \exists \lambda(x)$ , такая, что

$$\forall y \in \mathbb{R} : \varphi(y) \geq \varphi(x) + \lambda(x)(y - x)$$

Подставляем  $y = \xi$ ;  $x = E(\xi|\mathcal{C})$  и берём УМО относительно  $\mathcal{C}$  от обеих частей:

$$E(\varphi(\xi)|\mathcal{C}) \geq E(\varphi(E(\xi|\mathcal{C}))|\mathcal{C}) + E(\lambda(E(\xi|\mathcal{C})) \cdot (\xi - E(\xi|\mathcal{C}))|\mathcal{C}) = \varphi(E(\xi|\mathcal{C}))$$

□

## 31 Условное матожидание при условии другой случайной величины. . .

**Определение 31.1.** Пусть  $\xi, \eta$  – случайные величины. Тогда

$$E(\xi|\eta) := E(\xi|\mathcal{F}_\eta)$$

условное матожидание  $\xi$  относительно  $\eta$ .

**Определение 31.2.** Условным математическим ожиданием  $E(\xi|\eta = y)$  называется такая борелевская функция  $\varphi(y)$ , удовлетворяющая свойству:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : E(\xi \mathbb{I}\{\eta \in B\}) = \int_B \varphi(y) P_\eta(dy)$$

**Теорема 31.1.** *Существование условного матожидания (б/д).*

*Если  $E|\xi| < +\infty$ , то  $E(\xi|\eta = y)$  существует и единственно  $P_\eta$  – почти наверное.*

**Лемма 31.1.** *Свойства  $E(\xi|\eta = y)$  (б/д):*

1. *Линейность*
2. *Сохранение относительного порядка*
3. *Предельный переход*

**Утверждение 31.1.** *Связь с  $E(\xi|\eta)$ .*

$$E(\xi|\eta = y) = \varphi(y) \Leftrightarrow E(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$$

*Доказательство.*

$$E(E(\xi|\eta) \mathbb{I}\{\eta \in B\}) = E(\xi \mathbb{I}\{\eta \in B\}) = \int_B \varphi(y) P_\eta(dy) = E(\varphi(\eta) \mathbb{I}\{\eta \in B\}) \Leftrightarrow E(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$$

□

**Определение 31.3.** Условным распределением случайной величины  $\xi$  относительно случайной величины  $\eta$  называется функция  $P(B, y)$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , которая удовлетворяет свойствам:

1.  $P(\cdot, y)$  является борелевской функцией от  $y$ .
2.  $P(B, \cdot)$  является вероятностной мерой на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
3. Для  $\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ :

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = \int_A P(B, y) P_\eta(dy)$$

**Определение 31.4.** Функция  $f_{\xi|\eta}(x|y)$  называется условной плотностью случайной величины  $\xi$  относительно случайной величины  $\eta$  (по мере  $\mu$ ), если  $f \geq 0$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ :

$$P(\xi \in B|\eta = y) = \int_B f_{\xi|\eta}(x|y) \mu(dx)$$

**Теорема 31.2.** *О вычислении УМО.*

Если  $\exists$  условная плотность  $f_{\xi|\eta}(x|y)$ , то для  $\forall$  борелевской функции  $g(x)$ :

$$E(g(\xi)|\eta = y) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y) \mu(dx)$$

*Доказательство.* Пусть сначала  $g(x) = \mathbb{I}\{x \in B\}$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Тогда

$$E(g(\xi)|\eta = y) = P(g(\xi) \in B|\eta = y) = \int_B f_{\xi|\eta}(x|y) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y) \mu(dx)$$

Доказываемое равенство линейно по функции  $g \Rightarrow$  она верна для простых функций. Для произвольных  $g(x)$  используем предельный переход.  $\square$

**Теорема 31.3.** *О достаточном условии существования условной плотности.*

Пусть  $(\xi, \eta)$  такова, что  $\exists$  совместная плотность  $f_{\xi, \eta}(x, y)$  по мере  $\mu \times \lambda$  на  $\mathbb{R}^2$ . Тогда функция

$$f_{\xi|\eta}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}, & f_{\eta}(y) > 0 \\ 0, & else \end{cases}$$

является условной плотностью  $\xi$  относительно  $\eta$  (по мере  $\mu$ ). Здесь  $f_{\eta}(y)$  – плотность  $\eta$  по мере  $\lambda$ .

*Доказательство.* Надо проверить, что

$$Q(B, y) = \int_B f_{\xi|\eta}(x|y) \mu(dx)$$

есть условное распределение  $\xi$  относительно  $\eta$ . Первые два свойства выполнены из свойств интеграла Лебега.

Проверим третье свойство:

$$\begin{aligned} P(\xi \in B, \eta \in A) &= \iint_{B \times A} f_{\xi, \eta}(x, y) \mu(dx) \lambda(dy) \stackrel{\text{Фубини}}{=} \int_A \left( \int_B f_{\xi, \eta}(x, y) \mu(dx) \right) \lambda(dy) = \\ &= \int_A \left( \int_B f_{\xi|\eta}(x|y) \mu(dx) \right) f_{\eta}(y) \lambda(dy) = \int_A Q(B, y) P_{\eta}(dy) \end{aligned}$$

$\square$