# Вопросы к экзамену по курсу “Теория вероятностей”

лектор — профессор Д. А. Шабанов

весна 2023

1. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Системы событий: алгебры, $\sigma$-алгебры, $\pi$- и $\lambda$-системы. Первая теорема о $\pi$- и $\lambda$-системах. Лемма о существовании наименьшей алгебры ($\sigma$-алгебры, $\pi$- или $\lambda$-системы), порожденной произвольной системой подмножеств. Борелевские $\sigma$-алгебры в $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\infty$.

2. Вторая теорема о $\pi$- и $\lambda$-системах. Следствие из нее.

3. Независимость событий и систем событий на вероятностном пространстве. Критерий независимости для конечного набора $\sigma$-алгебр. Независимость бесконечного набора систем событий.

4. Функция распределения вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, ее основные свойства. Теорема о взаимно-однозначном соответствии функций распределения и вероятностных мер на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

5. Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой. Примеры дискретных распределений: равномерное, биномиальное, пуассоновское. Примеры абсолютно непрерывных распределений: равномерное, нормальное, экспоненциальное, гамма. Пример сингулярного распределения: “канторова лестница”. Теорема Лебега о разложении произвольной функции распределения(б/д).

6. Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Многомерная функция распределения, ее основные свойства. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ по функции распределения (б/д). Примеры многомерных функций распределения, плотность многомерного распределения. Теорема Колмогорова о продолжении меры на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ (б/д).

7. Случайные элементы, случайные величины и векторы на вероятностном пространстве. Критерий измеримости отображения. Следствие: эквивалентные определения случайных величин и векторов.

8. Характеристики случайной величины и случайного вектора: распределение вероятностей, функция распределения, порожденная $\sigma$-алгебра. Классы случайных величин: простые, дискретные, абсолютно непрерывные и сингулярные. Теорема о приближении случайной величины $\xi$ простыми $\mathcal{F}_\xi$-измеримыми случайными величинами.

9. Независимость произвольного набора случайных величин. Критерий независимости в терминах совместной функции распределения, его обобщение для случайных векторов. Теорема о независимости борелевских функций от независимых случайных векторов. Независимость функций от непересекающихся наборов независимых с.в.

10. Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями (“свойство 10”).

11. Теорема о замене переменных в интеграле Лебега, следствия из нее. Понятие обобщенной плотности вероятностной меры. Теорема о вычисление интеграла Лебега по вероятностной мере с помощью плотности. Формулы для вычисления математических ожиданий функций от случайной величины (вектора) в дискретном и абсолютно непрерывном случаях.

12. Прямое произведение вероятностных пространств, лемма о существовании. Теорема Фубини (б/д).

13. Совместное распределение независимых случайных величин как прямое произведение. Лемма о свертке распределений. Формула свертки для вычисления плотности суммы независимых случайных величин.

14. Дисперсия, ковариация и коэффициент корреляции, их основные свойства. Следствие для дисперсии суммы независимых случайных величин. Матрица ковариаций случайного вектора, ее неотрицательная определенность.

15. Виды сходимостей случайных величин: с вероятностью 1 (почти наверное), по вероятности, в среднем порядка $p > 0$, по распределению. Критерий сходимости с вероятностью 1. Теорема о взаимоотношении различных видов сходимостей.

16. Достаточное условие сходимости с вероятностью 1. Лемма о наличии подпоследовательности, сходящейся п.н., если вся последовательность сходится по вероятности. Усиленный закон больших чисел в форме Кантелли. Смысл усиленного закона больших чисел.

17. Фундаментальность с вероятностью 1 последовательности случайных величин. Критерий Коши для сходимости с вероятностью 1. Неравенство Колмогорова. Теорема Колмогорова–Хинчина о сходимости почти наверное ряда из случайных величин.

18. Леммы Теплица и Кронекера (б/д). Лемма Бореля – Кантелли. Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова для независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным математическим ожиданием.

19. Слабая сходимость и сходимость в основном вероятностных мер и функций распределения. Теорема Александрова (б/д). Теорема об эквивалентности слабой сходимости и сходимости в основном для вероятностных мер и соответствующих им функций распределения. Следствие для сходимости по распределению случайных величин.

20. Характеристические функции случайных величин, векторов и вероятностных мер. Вычисление характеристической функции для стандартного нормального распределения. Основные свойства характеристических функций случайных величин (единственность — б/д).

21. Теорема единственности для характеристических функций распределений на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Вычисление распределения суммы независимых нормальных случайных величин. Формула обращения для характеристических функций (б/д).

22. Теорема о производных характеристических функций. Разложение характеристической функции в ряд в окрестности нуля. Критерий независимость компонент случайного вектора в терминах характеристических функций. Неотрицательная определенность комплекснозначных функций на прямой. Теорема Бохнера – Хинчина (только док-во необходимости).

23. Плотность и относительная компактность семейств вероятностных мер. Теорема Прохорова (док-во только для $\mathbb{R}$).

24. Три леммы о свойствах плотных последовательностей вероятностных мер на прямой. Теорема непрерывности для характеристических функций.

25. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин, следствия из нее. Смысл ЦПТ. Теорема Берри–Эссеена об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме (б/д).

26. Виды сходимостей случайных векторов, связь с одномерными сходимостями. Теорема о наследовании сходимости. Усиленный закон больших чисел для случайных векторов. Многомерная центральная предельная теорема (б/д).

27. Лемма Слуцкого. Пример применения: построение асимптотического доверительного интервала для параметра в схеме Бернулли.

28. Гауссовские случайные векторы (многомерное нормальное распределение). Теорема о трех эквивалентных определениях. Следствия из нее: основные свойства гауссовских случайных векторов.

29. Условное математическое ожидание случайной величины относительно $\sigma$-алгебры. Теорема о существовании (б/д). Явный вид условного математического ожидания в случае, если $\sigma$-алгебра порождена счетным разбиением.

30. Основные свойства условного математического ожидания (10 штук).

31. Условное математическое ожидание $\mathsf{E}\,(\xi|\eta = y)$, существование и основные свойства (б/д). Связь с $\mathsf{E}(\xi|\eta)$. Условное распределение и условная плотность одной случайной величины относительно другой. Теорема о вычислении условного математического ожидания с помощью условной плотности. Теорема о достаточном условии существования условной плотности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. Н., *Вероятность*. В 2-х кн. — 6-е изд. — М.: МЦНМО, 2017.

2. Гнеденко Б. В., *Курс теории вероятностей.* — 12-е изд. — М.: УРСС, 2019.

3. Боровков А. А., *Теория вероятностей.* — 4-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2003.

4. Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер.* — М.: Наука, 1977.