

# Содержание

1	Базовые определения	2
2	Вторая теорема о $\pi$ - и $\lambda$ -системах. Следствия из неё.	4
3	Независимость событий и систем событий	5
4	Функция распределения вероятностной меры	6
5	Классификация вероятностных мер	8
6	Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$	10
7	Случайные элементы, случайные величины и векторы на вероятностном пространстве	12
8	Характеристики случайной величины и случайного вектора	14
9	Независимости произвольного набора случайных величин	16
10	Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями	18
11	Теорема о замене переменных в интеграле Лебега...	19
12	Прямое произведение вероятностных пространств	21
13	Совместное распределение...	23
14	Дисперсия, ковариация и коэффициент корреляции	24
15	Сходимости случайных величин	26
16	Достаточное условие сходимости с вероятностью...	28
17	Фундаментальность с вероятностью 1	30
18	Леммы Теплица и Кронекера...	32
19	Слабая сходимость и сходимость в основном...	34
20	Характеристические функции...	36
21	Единственность характеристических функций...	39

# 1 Базовые определения

**Определение 1.1.** Система  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  называется алгеброй, если

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2.  $A \in \mathcal{F}$ , то  $\bar{A} := (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$
3.  $A, B \in \mathcal{F}$ , то  $A \cap B \in \mathcal{F}$

**Определение 1.2.** Система  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если

1.  $\mathcal{F}$  – алгебра
2.  $\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

**Определение 1.3.**  $P$  называется вероятностной мерой на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , если  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ , удовлетворяющая свойствам:

1.  $P(\Omega) = 1$
2. Если  $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ , то

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

**Определение 1.4.** Вероятностное пространство – это тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , где

- $\Omega$  – множество элементарных исходов
- $\mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$ , элементы  $\mathcal{F}$  называются событиями
- $P$  – вероятностная мера на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F})$

**Определение 1.5.** Система  $\mathcal{M}$  подмножеств в  $\Omega$  называется  $\pi$ -системой, если из того, что  $A, B \in \mathcal{M}$  следует, что  $A \cap B \in \mathcal{M}$

**Определение 1.6.** Система  $\mathcal{L}$  подмножеств в  $\Omega$  называется  $\lambda$ -системой, если

1.  $\Omega \in \mathcal{L}$
2.  $(A, B \in \mathcal{L}; A \subset B) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}$
3.  $(A_n \uparrow A; \forall n A_n \in \mathcal{L}) \Rightarrow A \in \mathcal{L}$

**Теорема 1.1.** Первая теорема о  $\pi$ - $\lambda$ -системах

Система  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  является  $\sigma$ -алгеброй  $\Leftrightarrow$  она является  $\pi$ -системой и  $\lambda$ -системой.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Свойство  $\pi$ -системы и свойство 1)  $\lambda$ -системы выполняются автоматически.

Рассмотрим  $\forall A_n \uparrow A; \forall n A_n \in \mathcal{L}$ . Тогда  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{L}$ . Следовательно, выполнено свойство 3)  $\lambda$ -системы.

$\forall A, B \in \mathcal{L}; A \subset B : B \setminus A = B \cap \bar{A}$ . Но  $\bar{A} \in \mathcal{L}$ , следовательно  $B \cap \bar{A} \in \mathcal{L}$ . То есть выполнено свойство 2)  $\lambda$ -системы.

$\Leftarrow$  Проверим сначала, что  $\mathcal{F}$  – алгебра. Свойства 1), 3) уже есть. По свойству 2)  $\lambda$ -системы  $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ , если  $A \in \mathcal{F}$ . Значит  $\mathcal{F}$  – алгебра.

Пусть  $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F}$ . Рассмотрим  $B_n : B_1 = A_1, B_i = A_i \setminus (\cup_{k=1}^i A_k)$ . Тогда:  $\forall n B_n \in \mathcal{F}, \forall i \neq j B_i \cap B_j = \emptyset$ . Рассмотрим  $C_n = \sqcup_{m=1}^n B_m \in \mathcal{F}$ . Тогда  $C_n \subset C_{n+1}$  и  $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = \sqcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow$  по 3) свойству  $\lambda$ -системы:  $C_n \uparrow \sqcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$ .  $\square$

**Лемма 1.1.** Пусть  $\mathcal{M}$  – система подмножеств  $\Omega$ . Тогда существует минимальная (по включению)  $\sigma$ -алгебра (алгебра,  $\pi$ -система,  $\lambda$ -система), обозначаемая  $\sigma(\mathcal{M})$  ( $\lambda(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M})$ ), содержащая  $\mathcal{M}$ .

**Пример.** 1. Если  $\Omega = \mathbb{R}$ , то борелевской  $\sigma$ -алгеброй на  $\mathbb{R}$  называется наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая все интервалы

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma((a; b), a < b)$$

2. Если  $\Omega = \mathbb{R}^n, n > 1$ .

Борелевской  $\sigma$ -алгеброй в  $\mathbb{R}^n$  называется минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая множества вида  $B_1 \times \dots \times B_n, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , то есть

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(B_1 \times \dots \times B_n : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

3. Если  $\Omega = \mathbb{R}^{\infty}$ , то есть  $\Omega$  содержит все счётные последовательности вещественных чисел.

Для  $n \in \mathbb{N}$  и  $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  введём цилиндр:

$$F_n(B_n) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{\infty} : (x_1, \dots, x_n) \in B_n\}$$

Тогда минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все цилиндры называется борелевской в  $\mathbb{R}^{\infty}$ , то есть

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty}) = \sigma(F_n(B_n) : n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

## 2 Вторая теорема о $\pi$ - и $\lambda$ -системах. Следствия из неё.

**Теорема 2.1.** *Вторая теорема о  $\pi$ - $\lambda$ -системах.*

*Если  $\mathcal{M}$  – это  $\pi$ -система подмножеств в  $\Omega$ , то  $\sigma(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M})$*

*Доказательство.* Заметим, что  $\sigma(\mathcal{M})$  –  $\lambda$ -система, содержащая  $\mathcal{M} \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) \subset \sigma(\mathcal{M})$ .

Проверим, что  $\lambda(\mathcal{M})$  – это  $\sigma$ -алгебра. Раз  $\lambda(\mathcal{M})$  – это  $\lambda$ -система, то по (1.1) достаточно проверить, что  $\lambda(\mathcal{M})$  – это  $\pi$ -система.

Рассмотрим  $\mathcal{M}_1 = \{B \in \lambda(\mathcal{M}) : \forall A \in \mathcal{M}, A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$ . Заметим, что  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$ . Проверим, что  $\mathcal{M}_1$  – это  $\lambda$ -система:

1.  $\Omega \in \mathcal{M}_1$  – очевидно

2. Пусть  $B, C \in \mathcal{M}_1, C \subset B$ , пусть  $A \in \mathcal{M}$ . Заметим, что  $B \setminus C \in \lambda(\mathcal{M})$  и

$$(B \setminus C) \cap A = \overset{\in \lambda(\mathcal{M})}{(B \cap A)} \setminus \overset{\in \lambda(\mathcal{M})}{(C \cap A)}$$

Значит по второму свойству  $\lambda$ -систем  $(B \setminus C) \cap A \in \lambda(\mathcal{M})$

3. Пусть  $B_n \uparrow B, B_n \in \mathcal{M}_1, A \in \mathcal{M} \Rightarrow$

$$\overset{\in \lambda(\mathcal{M})}{B_n \cap A} \uparrow B \cap A$$

Тогда по третьем свойству  $\lambda$ -систем  $B \cap A \in \lambda(\mathcal{M})$ . Но  $B_n \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow$  по третьему свойству  $\lambda$ -системы получаем, что  $B \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow B \in \mathcal{M}_1$ .

По условию  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \Rightarrow$  в силу минимальности  $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_1$ . По построению  $\mathcal{M}_1 \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_1$ , то есть  $\forall B \in \lambda(\mathcal{M}) \forall A \in \mathcal{M} : A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})$ .

Далее рассмотрим  $\mathcal{M}_2 = \{B \in \lambda(\mathcal{M}) : \forall A \in \lambda(\mathcal{M}) A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$ . В силу доказанного  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_2$ . Совершенно аналогично с  $\mathcal{M}_1$  проверяем, что  $\mathcal{M}_2$  – это  $\lambda$ -система. Тогда  $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_2$ . По построению  $\mathcal{M}_2 \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_2 \Rightarrow \lambda(\mathcal{M})$  – это  $\pi$ -система.  $\square$

**Следствие.** *Пусть  $\mathcal{M}$  – это  $\pi$ -система на  $\Omega$ , и  $\mathcal{L}$  – это  $\lambda$ -система на  $\Omega$  и  $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ . Тогда  $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$*

### 3 Независимость событий и систем событий

**Определение 3.1.** События  $A, B$  независимые, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

**Определение 3.2.** События  $A_1, \dots, A_n$  называются независимыми в совокупности, если

$$\forall k \leq n \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n : P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_k})$$

**Определение 3.3.** Пусть  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$  – системы событий на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Они называются независимыми в совокупности, если

$$\forall A_1 \in \mathcal{M}_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n : A_1, \dots, A_n \text{ — независимы в совокупности}$$

**Лемма 3.1.** Критерий независимости  $\sigma$ -алгебр.

Пусть  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$  – это  $\pi$ -системы событий на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Тогда  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$  – независимы в совокупности  $\Leftrightarrow \sigma(\mathcal{M}_1), \dots, \sigma(\mathcal{M}_n)$  – независимы в совокупности.

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  очевидно.

Докажем только для  $n = 2$ , для  $n > 2$  всё аналогично.

Рассмотрим  $\mathcal{L}_1 = \{A \in \sigma(\mathcal{M}_2) : A \perp \mathcal{M}_1\}$ . Проверим, что  $\mathcal{L}_1$  – это  $\lambda$ -система:

$$1. \forall B \in \mathcal{M}_1 : \Omega \perp B \Rightarrow \Omega \in \mathcal{L}_1$$

$$2. \text{ Пусть } C \in \mathcal{M}_1, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} P((B \setminus A) \cap C) &= P((B \cap C) \setminus (A \cap C)) = P(B \cap C) - P(A \cap C) = \\ &= P(C)(P(B) - P(A)) = P(B \setminus A)P(C) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}_1 \end{aligned}$$

$$3. \text{ Пусть } A_n \uparrow A, A_n \in \mathcal{L}_1. \text{ По определению } \sigma\text{-алгебры замечаем, что } A \in \sigma(\mathcal{M}_2). \text{ Пусть } C \in \mathcal{M}_1. \text{ Рассмотрим}$$

$$P(A \cap C) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n \cap C) = P(C) \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P(C)P(A) \Rightarrow A \in \mathcal{L}_1$$

Раз  $\mathcal{L}_1$  – это  $\lambda$ -система и  $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{L}_1$ , по условию, то по (2.1) получим, что  $\sigma(\mathcal{M}_2) \subset \mathcal{L}_1 \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_2) \perp \mathcal{M}_1$ .

Рассмотрим  $\mathcal{L}_2 = \{A \in \sigma(\mathcal{M}_1) : A \perp \sigma(\mathcal{M}_2)\}$ . Точно так же доказывается, что  $\mathcal{L}_2$  – это  $\lambda$ -система,  $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{L}_2$  по доказанному  $\Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{L}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_1) \perp \sigma(\mathcal{M}_2)$   $\square$

**Определение 3.4.** Пусть  $\{M_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  – набор систем событий. Он называется независимым в совокупности, если независим в совокупности  $\forall$  конечный поднабор.

## 4 Функция распределения вероятностной меры

**Определение 4.1.** Функцией распределения вероятностной меры  $P$  на  $\mathbb{R}$  называется

$$F(x) = P((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}$$

**Лемма 4.1.** Свойства функции распределения.

1.  $F(x)$  не убывает
2.  $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$
3.  $F(x)$  непрерывна справа

*Доказательство.* 1. Пусть  $y > x$ . Тогда

$$(-\infty, x] \subset (-\infty, y] \Rightarrow F(x) = P((-\infty, x]) \leq P((-\infty, y]) = F(y)$$

2. Если  $x_n \uparrow +\infty$ , то  $(-\infty, x_n] \uparrow \mathbb{R}$ . Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\mathbb{R}) = 1$$

Если  $x_n \downarrow -\infty$ , то  $(-\infty, x_n] \downarrow \emptyset$ . Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\emptyset) = 0$$

3. Если  $x_n \downarrow x$ , то  $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$ . Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, x]) = F(x)$$

□

**Определение 4.2.** Эквивалентное определение функции распределения.

Функция, удовлетворяющая свойствам 1 – 3 из предыдущей леммы, называется функцией распределения на  $P$ .

**Теорема 4.1.** О продолжении меры  $(b/\partial)$

Пусть  $\mathcal{A}$  – алгебра подмножеств  $\Omega$ . Пусть  $P_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  с условием,  $P_0(\Omega) = 1$  и  $P_0$  счётно-аддитивна на  $\mathcal{A}$ . Тогда  $\exists!$  продолжение меры  $P_0$  на  $\sigma(\mathcal{A})$

**Теорема 4.2.** О взаимной однозначности функции распределения и вероятностной меры.

Пусть  $F(x), x \in \mathbb{R}$  – функция распределения на  $\mathbb{R}$ . Тогда  $\exists!$  вероятностная мера  $P$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , для которой  $F$  является функцией распределения, то есть

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = P((-\infty, x])$$

*Доказательство.* Рассмотрим на  $\mathbb{R}$  алгебру  $\mathcal{A}$ , состоящую из конечных объединений непесекающихся интервалов:

$$\forall A \in \mathcal{A} : A = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k], \quad -\infty \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_n \leq +\infty$$

Зададим на  $\mathcal{A}$  меру  $P_0$ :

$$\forall A \in \mathcal{A} : P_0(A) = \sum_{k=1}^n (F(b_k) - F(a_k))$$

где  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ .

По построению  $P_0(\mathbb{R}) = 1$  и  $P_0$  будет конечно аддитивна на  $\mathcal{A}$ . Если мы проверим, что  $P_0$  счётно аддитивна на  $\mathcal{A}$ , то по (4.1)  $\exists!$  продолжение  $P$  меры  $P_0$  на  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Это и есть искомая мера  $P$ , причём

$$P((-\infty, x]) = P_0((-\infty, x]) = F(x)$$

По теореме о непрерывности вероятностной меры, достаточно проверить, что  $P_0$  непрерывна в нуле.

Пусть  $A_n \downarrow \emptyset, \forall n : A_n \in \mathcal{A}$ . Хотим проверить, что  $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . В силу 2 – 3 свойств функции распределения:

$$\forall A \in \mathcal{A} \forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathcal{A} : \text{cl } B \subset A, P_0(A \setminus B) \leq \varepsilon$$

Если  $(a, b]$  является частью  $A$ , то для некоторого  $a' > a$  будет выполнено

$$P_0((a, a']) \leq \varepsilon$$

Зафиксировав  $\forall \varepsilon > 0$ , выберем  $B_n \forall n \in \mathbb{N} : B_n \in \mathcal{A}$ , такой что  $\text{cl } B_n \subset A_n$  и  $P_0(A_n \setminus B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$ .

Пусть сначала все  $A_n$  лежат внутри  $[-N, N]$ . Заметим, что раз  $\bigcap_n A_n = \emptyset$ , то  $\bigcap_n \text{cl } B_n = \emptyset$ . В силу компактности  $\exists n_0$ :

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} \text{cl } B_n = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{n_0} B_n = \emptyset$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} P_0(A_{n_0}) &= P_0\left(A_{n_0} \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0} B_n\right) \leq P_0\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} (A_{n_0} \setminus B_n)\right) \leq P_0\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} (A_n \setminus B_n)\right) \leq \\ &\sum_{n=1}^{n_0} P_0(A_n \setminus B_n) \leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon \Rightarrow P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Если  $A$  бесконечно, то возьмём  $N$ , такой что  $P_0(\mathbb{R} \setminus (-N, N]) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Рассмотрим  $A'_n = A_n \cap (-N, N]$ . Тогда по доказанному выше  $P'_0(A'_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow$  с некоторого  $n_0$ :

$$P_0(A_n) \leq P(A'_n) + P_0(\mathbb{R} \setminus (-N, N]) \leq \varepsilon$$

□

## 5 Классификация вероятностных мер

**Определение 5.1.** Пусть  $P$  – вероятностная мера на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Она называется дискретной, если  $\exists$  не более чем счётное множество  $X \subset \mathbb{R}$ , такое, что

$$P(\mathbb{R} \setminus X) = 0, \forall x \in X : P(\{x\}) > 0$$

Говорят, что  $P$  сосредоточена на  $X$ .

Пусть  $X = (x_k, k \in \mathbb{N})$ , обозначим  $p_k = P(\{x_k\})$ . Набор  $(p_1, p_2, \dots)$  образует распределение вероятностей на  $X$ .

Как выглядит функция распределения?

$$F(x) = \sum_{x_k \leq x} P(\{x_k\})$$

Она меняется скачками в точках  $x_k$ , в них значение увеличивается на

$$p_k = P(\{x_k\}) = \Delta F(x_k) = F(x_k) - F(x_k - 0)$$

**Пример.** Дискретные распределения:

1. Константы.

$$X = \{x\}; P(\{x\}) = 1$$

2. Распределение Бернулли,  $\text{Bern}(p)$ ,  $p \in [0, 1]$ :

$$X = \{0, 1\}; p_0 = 1 - p, p_1 = p$$

3. Биномиальное распределение,  $\text{Bin}(n, p)$ ,  $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$ :

$$X = \{0, \dots, n\}; p_k = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}; k = \overline{0, n}$$

4. Пуассоновское распределение,  $\text{Pois}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$

$$X = \mathbb{Z}_+; p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k \in \mathbb{Z}_+$$

**Определение 5.2.** Пусть  $P$  – вероятностная мера на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , а  $F$  – её функция распределения. Она называется абсолютно непрерывной, если  $\exists p(t) \geq 0$ , такая что

$$\int_{\mathbb{R}} p(t) dt = 1; \forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

В этом случае  $p(t)$  называется плотностью функции распределения  $F$  и меры  $P$ .

**Замечание.** Интегралы понимаются, как интегралы Лебега.

**Пример.** 1. Равномерное распределение,  $U(a, b)$ ,  $a < b$

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{I}_{\{x \in [a, b]\}}(x); F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b] \\ 1, x > b \end{cases}$$



2. Нормальное (гауссовское) распределение,  $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; \quad \Phi_{a, \sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

3. Экспоненциальное (показательное) распределение,  $\text{Exp}(\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ .

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} \cdot \mathbb{I}\{x > 0\}; \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0 \end{cases}$$

4. Гамма-распределение,  $\Gamma(\alpha, \lambda)$ ,  $\alpha, \lambda > 0$

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1} \alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{\{x>0\}}(x); \quad \Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx, \lambda > 0$$

5. Распределение Коши,  $K(\sigma)$ ,  $\sigma > 0$

$$p(x) = \frac{\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)}; \quad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{\sigma}$$

**Определение 5.3.** Пусть  $F$  – функция распределения на  $\mathbb{R}$ .

Точка  $x$  является точкой роста  $F$ , если

$$\forall \varepsilon > 0: F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$$

**Определение 5.4.** Функция распределения  $F$  (и соответствующая ей мера  $P$ ) называется сингулярной, если  $F$  непрерывна и множество её точек роста имеет лебегову норму нуль.

**Пример.** Канторова лестница.

Мера  $P$  сосредоточена на канторовом множестве, оно не счётное, но каждый элемент имеет ненулевую меру.

**Теорема 5.1.** *Лебега о разложении.* (б/д)

Пусть  $F$  – функция распределения на  $\mathbb{R}$ . Тогда  $\exists$  разложение вида

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x), \alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

причём  $F_1$  – дискретная функция распределения,  $F_2$  – абсолютно непрерывная,  $F_3$  – сингулярная.

## 6 Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

**Определение 6.1.** Функцией распределения вероятностной меры  $P$  называется  $F(x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$ , где

$$F(x_1, \dots, x_n) = P((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$$

**Замечание.** 1.  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

2.  $\vec{x} \geq \vec{y}$ , если

$$\forall i = \overline{1, n} : x_i \geq y_i$$

3.  $(-\infty, \vec{x}] = (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]$

4.  $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$ , если

$$\forall n \in \mathbb{N} : \vec{x}_{(n)} \geq \vec{x}_{(n+1)} \geq \vec{x}$$

причём  $\lim_n \vec{x}_{(n)} = \vec{x}$

**Лемма 6.1.** Свойства многомерной функции распределения.

Пусть  $F(\vec{x})$  – функция распределения вероятностной меры  $P$  на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . Тогда

1. Если  $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$ , то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(\vec{x}_{(n)}) = F(\vec{x})$$

то есть непрерывна справа по любой координате

2. Если  $x_i \rightarrow +\infty, \forall i = \overline{1, n}$ , то

$$F(\vec{x}) \rightarrow 1$$

Если  $x_i \rightarrow -\infty, \exists i = \overline{1, n}$ , то

$$F(\vec{x}) \rightarrow 0$$

3. Для  $\forall i = \overline{1, n}$  и  $a_i < b_i$  введём оператор  $\Delta_{a_i, b_i}^i$ , который действует следующим образом:

$$\Delta_{a_i, b_i}^i F(\vec{x}) = F(x_1, \dots, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Тогда

$$\forall a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n : \Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \dots \circ \Delta_{a_n, b_n}^n F(\vec{x}) \geq 0$$

**Доказательство.** 1. Если  $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$ , то  $(-\infty, \vec{x}_{(n)}] \downarrow (-\infty, \vec{x}]$ . Тогда по непрерывности меры

$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, \vec{x}]) = F(\vec{x})$$

2. Если  $\vec{x} \uparrow (+\infty, \dots, +\infty)$ , то  $(-\infty, \vec{x}] \uparrow \mathbb{R}^n$ . Тогда по непрерывности меры

$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\mathbb{R}^n) = 1$$

Если  $x_i \downarrow -\infty$ , то  $(-\infty, \vec{x}] \downarrow \emptyset$ . Тогда в силу непрерывности меры

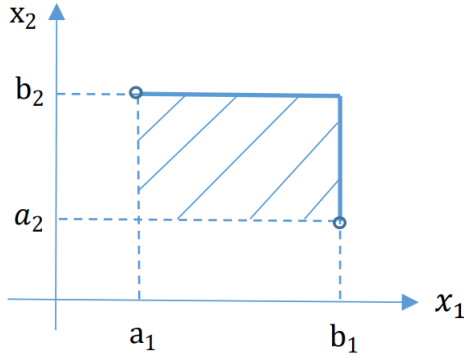
$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\emptyset) = 0$$

3. Проверим, например для  $n = 2$ , что

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \dots \circ \Delta_{a_n, b_n}^n F(\vec{x}) = P((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n])$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \Delta_{a_1, b_1}^1 \circ \Delta_{a_2, b_2}^2 F(x_1, x_2) &= \Delta_{a_1, b_1}^1 (F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2)) = \\ &= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) \geq 0 \end{aligned}$$



В общем случае достаточно заметить, что

$$\Delta_{a_i, b_i}^i P(B_1 \times \dots \times B_{i-1} \times (-\infty, x_i] \times \dots \times B_n) = P(B_1 \times \dots \times (a_i, b_i] \times \dots \times B_n)$$

□

**Теорема 6.1.** О построении вероятностной меры на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  по функции распределения (б/д).

Пусть  $F(\vec{x})$  удовлетворяет всем свойствам из предыдущей леммы. Тогда  $\exists!$  вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , для которой  $F$  является функцией распределения.

**Определение 6.2.** Пусть  $P$  – вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ .

$\forall n \in \mathbb{N}$  рассмотрим

$$P_n(B) = P(F_n(B))$$

где  $F_n(B) = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots) : (x_1, \dots, x_n) \in B\}$  – цилиндр с основанием  $B$ .

Тогда  $P_n$  будет вероятностной мерой в  $\mathbb{R}^n$ . Кроме того,  $\forall n : \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ :

$$P_n(B) = P_{n+1}(B \times \mathbb{R})$$

Это свойство согласованности.

**Теорема 6.2.** Колмогорова о мерах в  $\mathbb{R}^\infty$  (б/д).

Пусть  $P_1, P_2, \dots$  – последовательность вероятностных мер в  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots$ , обладающая свойством согласованности. Тогда  $\exists!$  вероятностная мера  $P$  на  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ , такая что

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : P_n(B) = P(F_n(B))$$

## 7 Случайные элементы, случайные величины и векторы на вероятностном пространстве

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – вероятностное пространство, а  $(E, \xi)$  – измеримое пространство.

**Определение 7.1.** Отображение  $X : \Omega \rightarrow E$  называется случайным элементом, если оно измеримо, то есть

$$\forall B \in \xi : X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

**Определение 7.2.** Если  $(E, \xi) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , то случайный элемент называется случайной величиной.

**Определение 7.3.** Если  $(E, \xi) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , то случайный элемент называется случайным вектором.

**Лемма 7.1.** Критерий измеримости отображения.

Пусть  $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ , так чтобы  $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$ . Тогда  $X : \Omega \rightarrow E$  является случайным элементом  $\Leftrightarrow$

$$\forall B \in \mathcal{M} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  очевидно.

$\Leftarrow$  Рассмотрим

$$\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{E} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$$

Легко видеть, что  $\mathcal{D}$  – это  $\sigma$ -алгебра, так как  $\mathcal{E}$  –  $\sigma$ -алгебра, а прообраз сохраняет теоретико-множественные операции.

По условию  $\mathcal{M} \subset \mathcal{D} \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E} \subset \mathcal{D}$  в силу минимальности.  $\square$

**Следствие.** Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – случайная величина

2.  $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

3.  $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

*Доказательство.* Применяем лемму для  $\mathcal{M} = \{(-\infty, x), x \in \mathbb{R}\}$  или  $\mathcal{M} = \{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$ . В обоих случаях  $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$   $\square$

**Следствие.**  $X := (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  – случайный вектор  $\Leftrightarrow$

$$\forall i = \overline{1, n} : X_i – случайная величина$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Пусть  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Тогда

$$X_i^{-1}(B) = X^{-1}(\mathbb{R} \times \dots \times \overset{i}{B} \times \dots \times \mathbb{R}) \in \mathcal{F}$$

Это верно, так как  $X$  – случайный вектор и

$$\mathbb{R} \times \dots \times \overset{i}{B} \times \dots \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

$\Leftarrow$  Рассмотрим  $\mathcal{M} = \{B_1 \times \cdots \times B_n : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ . Тогда  $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  и проверим условие леммы:

$$X^{-1}(B_1 \times \cdots \times B_n) = X_1^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}$$

так как  $\forall i = \overline{1, n} : X_i$  – случайная величина.

Значит по предыдущей лемме  $\Rightarrow X$  – случайный вектор. □

## 8 Характеристики случайной величины и случайного вектора

**Определение 8.1.** Распределением случайной величины (вектора)  $\xi$  называется вероятностная мера  $P_\xi$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  ( $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ), определённая по правилу:

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) (\mathbb{R}^n)$$

**Определение 8.2.** Функцией распределения случайной величины  $\xi$  называется

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = P_\xi((-\infty, x])$$

**Замечание.**

$$P(\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2) := P(\{\xi_1 \leq x_1\} \cap \{\xi_2 \leq x_2\})$$

**Определение 8.3.** Если  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – случайный вектор, то его функцией распределения называется

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P_\xi((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$$

**Определение 8.4.** Случайная величина является

- Дискретной, если таково её распределение
- Абсолютно-непрерывной, если таково её распределение

В этом случае  $\xi$  имеет плотность  $p_\xi(t) \geq 0$ :

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt$$

- Сингулярной, если таково её распределение

**Определение 8.5.** Случайная величина  $\xi$  называется простой, если она принимает конечное число значений. В этом случае  $\xi$  имеет вид:

$$\xi = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{I}_{A_k}$$

где  $x_1, \dots, x_n$  – различные числа,  $A_1, \dots, A_n$  – разбиение  $\Omega$ .

**Определение 8.6.** Пусть  $\xi$  – случайная величина (вектор) на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Сигма-алгеброй, порождённой  $\xi$ , называется

$$\mathcal{F}_\xi = \{\{\xi \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} (\mathbb{R}^n)$$

Заметим, что  $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}$

**Определение 8.7.** Случайная величина (вектор)  $\eta$  является  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримой, если  $\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$

**Определение 8.8.** Если  $\xi$  – это случайная величина, то положим

$$\xi^+ := \max(\xi, 0); \quad \xi^- := \max(-\xi, 0)$$

Тогда,  $\xi = \xi^+ - \xi^-$

**Определение 8.9.** Функция  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется борелевской, если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : \varphi^{-1}(B) = \{x : \varphi(x) \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

**Лемма 8.1.**  $\eta$  является  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримой  $\Leftrightarrow \exists$  борелевская функция  $\varphi$ , такая что  $\eta = \varphi(\xi)$ .

*Доказательство.*  $\Leftrightarrow$  Пусть  $\eta = \varphi(\xi)$  и  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Тогда

$$\{\eta \in B\} = \{\xi \in \varphi^{-1}(B)\} \in \mathcal{F}_\xi \Rightarrow \mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$$

□

**Теорема 8.1.** О приближении простыми.

1. Пусть  $\xi \geq 0$ . Тогда  $\exists$  последовательность  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримых случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ , такая что

$$0 \leq \xi_n \uparrow \xi$$

2. Если  $\xi$  – произвольная случайная величина, то  $\exists$  последовательность  $\mathcal{F}_\xi$  измеримых простых случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ , такая что

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\xi_n| \leq |\xi|, \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = \xi$$

*Доказательство.* 1. Предъявим  $\xi_n$  в явном виде:

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq \xi < \frac{k}{2^n}\}}$$

Легко видеть, что  $0 \leq \xi_n \leq \xi_{n+1}$  и  $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n$ . Кроме того,  $\forall n : \xi_n$  – борелевская функция от  $\xi \Rightarrow \xi_n$  – по (8.1) это  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримая случайная величина.

2. Приближаем  $\xi^+$  и  $\xi^-$  по предыдущему пункту, затем берём разность

□

## 9 Независимости произвольного набора случайных величин

**Определение 9.1.** Случайные векторы  $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  называются независимыми в совокупности, если независимы в совокупности порождённые ими  $\sigma$ -алгебры.

**Следствие.** Случайные векторы  $\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_i \in \mathbb{R}^{k_i}, i = \overline{1, n}$  независимы в совокупности  $\Leftrightarrow$

$$\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_i}) : P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i \in B_i)$$

**Лемма 9.1.** Критерий независимости в терминах функций распределения  
Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности  $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} : P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i \leq x_i)$$

То есть функция распределения вектора распадается в произведение функций распределения компонент.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  очевидно из следствия выше.

$\Leftarrow$  Проверим  $\mathcal{M}_j = \{\{\xi_j \leq x\} : x \in \mathbb{R}\}$  – подходящая  $\pi$ -система. Очевидно, что  $\mathcal{M}_j$  – это  $\pi$ -система и  $\sigma(\mathcal{M}_j) \subset \mathcal{F}_{\xi_j}$ .

Тогда  $\forall A \in \mathcal{M}_j$  имеет вид

$$A = \{\xi_j \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Тогда введём

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \{\xi_j \in B\} \in \sigma(\mathcal{M}_j)\}$$

Тогда  $\mathcal{D}$  – это тоже  $\sigma$ -алгебра:

1.

$$\{\xi_j \in \mathbb{R}\} = \Omega \in \sigma(\mathcal{M}_j) \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{D}$$

2.

$$\{\xi_j \in B_1 \cap B_2\} = \{\xi_j \in B_1\} \cap \{\xi_j \in B_2\} \in \sigma(\mathcal{M}_j) \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{D}$$

3. Аналогично

$$B \in \mathcal{D} \Rightarrow \overline{B} \in \mathcal{D}$$

4. Аналогично

$$B_i \in \mathcal{D}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{D}$$

По построению все полуинтервалы  $(-\infty, x] \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}$ . Значит,  $\sigma(\mathcal{M}_j) = \mathcal{F}_{\xi_j}$ . Тогда, применяя (3.1), получим требуемое.  $\square$

**Замечание.** То же самое верно и для случайных векторов.

$\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности  $\Leftrightarrow$

$$\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n : P(\xi_1 \leq \vec{x}_1, \dots, \xi_n \leq \vec{x}_n) = \prod_{k=1}^n P(\xi_k \leq \vec{x}_k)$$



**Лемма 9.2.** *О независимости борелевских функций от независимых случайных величин.*

*Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимые случайные векторы,  $\xi_i \in \mathbb{R}^{k_i}, k_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, n}$ . Пусть  $f_i : \mathbb{R}^{k_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}, i = \overline{1, n}$  – борелевские функции. Положим  $\eta_i = f_i(\xi_i)$ . Тогда  $\eta_1, \dots, \eta_n$  – независимые в совокупности.*

*Доказательство.*  $\eta_1, \dots, \eta_n$  независимы в совокупности  $\Leftrightarrow \mathcal{F}_{\eta_1}, \dots, \mathcal{F}_{\eta_n}$  независимы в совокупности.

Но  $\mathcal{F}_{\eta_i} \subset \mathcal{F}_{\xi_i} \Rightarrow \mathcal{F}_{\eta_1}, \dots, \mathcal{F}_{\eta_n}$  независимы как подсистемы в независимых  $\sigma$ -алгебрах.  $\square$

**Следствие.**  $[\xi_1, \dots, \xi_{n_1}], [\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2}], \dots, [\xi_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, \xi_{n_1+\dots+n_k}]$  – независимые блоки случайных величин. Пусть  $f_j : \mathbb{R}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R}, j = \overline{1, k}$  – борелевские функции. Тогда  $f_1(\xi_1, \dots, \xi_{n_1}), f_2(\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2}), \dots, f_k(\xi_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, \xi_{n_1+\dots+n_k})$  – независимые в совокупности случайные величины.

*Доказательство.* Пускай  $\eta_1 := (\xi_1, \dots, \xi_{n_1}), \dots, \eta_k := (\xi_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, \xi_{n_1+\dots+n_k})$ . По предыдущей лемме  $\eta_i, i = \overline{1, k}$  будут независимы в совокупности.  $\square$

## 10 Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями

**Теорема 10.1.** *О математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями.*

Пусть  $\xi, \eta$  – независимые случайные величины,  $E\xi, E\eta$  – конечные. Тогда  $E\xi\eta$  тоже конечно, причём  $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$ .

*Доказательство.* Пусть сначала  $\xi, \eta$  – простые случайные величины, то есть

$$\xi = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{I}\{\xi = x_i\}; \quad \eta = \sum_{j=1}^m y_j \mathbb{I}\{\eta = y_j\}$$

где  $x_1, \dots, x_n$  – значения  $\xi$ , а  $y_1, \dots, y_m$  – значения  $\eta$ . Тогда

$$\xi\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \mathbb{I}\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$$

Берём  $E$  от обеих частей:

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j P(\xi = x_i, \eta = y_j) \stackrel{\perp}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j P(\xi = x_i) P(\eta = y_j) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i P(\xi = x_i) \right) \left( \sum_{j=1}^m y_j P(\eta = y_j) \right) = E\xi \cdot E\eta \end{aligned}$$

Далее, пусть  $\xi, \eta \geq 0$  – неотрицательные случайные величины. Тогда рассмотрим последовательности простых случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \{\eta_m, m \in \mathbb{N}\}$ , такие что

$$0 \leq \xi_n \uparrow \xi; \quad 0 \leq \eta_m \uparrow \eta$$

и  $\forall n \in \mathbb{N} : \xi_n$  является  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримой,  $\eta_n$  –  $\mathcal{F}_\eta$ -измеримой.

Следовательно,  $0 \leq \xi_n \eta_n \uparrow \xi\eta$  и  $\forall n \in \mathbb{N} : \xi_n \perp \eta_n$ . По определению мат. ожидания:

$$E\xi\eta = \lim_{n \rightarrow +\infty} E\xi_n \eta_n \stackrel{\perp}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} E\xi_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} E\eta_n = E\xi \cdot E\eta$$

Теперь пусть  $\xi, \eta$  – произвольные случайные величины. Тогда  $\xi^\pm \perp \eta^\pm$ , как функции от независимых случайных величин. Причём

$$(\xi\eta)^+ = \xi^+ \eta^+ + \xi^- \eta^-; \quad (\xi\eta)^- = \xi^+ \eta^- + \xi^- \eta^+$$

По определению

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= E(\xi\eta)^+ - E(\xi\eta)^- = E\xi^+ \eta^+ + E\xi^- \eta^- - E\xi^+ \eta^- - E\xi^- \eta^+ \stackrel{\perp}{=} \\ &= E\xi^+ \cdot E\eta^+ + E\xi^- \cdot E\eta^- - E\xi^+ \cdot E\eta^- - E\xi^- \cdot E\eta^+ = (E\xi^+ - E\xi^-)(E\eta^+ - E\eta^-) = \\ &= E\xi \cdot E\eta \end{aligned}$$

□

## 11 Теорема о замене переменных в интеграле Лебега...

**Теорема 11.1.** *О замене переменных в интеграле Лебега.*

Пусть  $\xi$  – случайный вектор из  $\mathbb{R}^m$  на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $P_\xi$  – его распределение. Тогда  $\forall g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  – борелевской функции, выполнено

$$Eg(\xi) = \int_{\Omega} g(\xi) dP = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx)$$

*Доказательство.* Пусть сначала  $g(x) = \mathbb{I}_A(x)$ , где  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$Eg(\xi) = E\mathbb{I}\{\xi \in A\} = P(\xi \in A) = P_\xi(A) = \int_A P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{I}_A(x) P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx)$$

В формуле из утверждения теоремы обе части линейны по  $g$ . Равенство верно для индикаторов  $\Rightarrow$  верно для простых функций.

Если  $g \geq 0$ , то рассмотрим последовательность простых функций  $0 \leq g_n \uparrow g$ . Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_n(x) P_\xi(dx) = Eg_n(\xi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Eg(\xi)$$

для неотрицательных доказали.

Если  $g$  – произвольная функция, то раскладываем  $g = g^+ - g^-$  и пользуемся линейностью.

Причём все математические ожидания будут конечны, бесконечны и неопределены одновременно.  $\square$

**Следствие.** 1. Для вычисления  $Eg(\xi)$  достаточно знать распределение  $P_\xi$ .

2. Если распределение  $\xi, \eta$  совпадают, то  $\forall$  борелевской функции  $g(x)$  выполнено

$$Eg(\xi) = Eg(\eta)$$

3. Если  $\xi$  – случайная величина, то

$$E\xi = \int_{\mathbb{R}} x P_\xi(dx)$$

**Замечание.**

$$dF(x) := P(dx)$$

где  $F$  – функция распределения вероятностной меры  $P$ .

**Определение 11.1.** Пусть  $P$  – вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ ,  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная мера на  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ . Мера  $P$  имеет плотность  $p(t) \geq 0$  по мере  $\mu$ , если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : P(B) = \int_B p(t) \mu(dt)$$

**Теорема 11.2.** *О плотности.*

Пусть случайный вектор  $\xi \in \mathbb{R}^m$  имеет распределение  $P_\xi$ , и  $P_\xi$  имеет плотность  $p(t)$  по  $\sigma$ -конечной мере на  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ . Тогда  $\forall$  борелевской функции  $g(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  выполнено

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) p(x) \mu(dx)$$

*Доказательство.* Пусть сначала  $g(x) = \mathbb{I}_A(x)$ , где  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$Eg(\xi) = P(\xi \in A) = P_\xi(A) = \int_A p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{I}_A(x)p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)p(x)\mu(dx)$$

Обе части доказываемого равенства линейны по  $g \Rightarrow$  формула верна для простых функций.

Если  $g \geq 0$ , то рассмотрим последовательность простых функций  $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$ , такую что  $0 \leq g_n(x) \uparrow g(x)$ . Тогда по определению интеграла Лебега:

$$Eg(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Eg_n(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_n(x)p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)p(x)\mu(dx)$$

(по теореме о монотонной сходимости)

Для произвольной  $g$  раскладываем  $g(x) = g^+ - g^-$  и пользуемся линейностью.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $\xi$  – дискретная случайная величина, сосредоточенная на  $X$ . Тогда

$$Eg(\xi) = \sum_{x \in X} g(x)P(\xi = x)$$

*Доказательство.* Мы знаем, что  $p(x) = P_\xi(\{x\}) = P(\xi = x)$ . Тогда

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)\mu(dx) = \sum_{x \in X} g(x)P(\xi = x)$$

$\square$

**Следствие.** Пусть  $\xi$  – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью  $p(x)$ . Тогда

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)dx$$

**Следствие.** Пусть  $\xi$  – случайный вектор из  $\mathbb{R}^m$  с плотностью  $p(x)$ . Тогда

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} g(\vec{x})p(\vec{x})d\vec{x}$$

## 12 Прямое произведение вероятностных пространств

**Определение 12.1.** Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  – два вероятностных пространства. Их прямым произведением называется вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , где

1.  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$
2.  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(B_1 \times B_2 : B_i \in \mathcal{F}_i)$  –  $\sigma$ -алгебра, порождённая прямоугольниками.
3.  $P = P_1 \times P_2$  – вероятностная мера на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , такая, что  $P(B_1 \times B_2) = P_1(B_1)P_2(B_2)$

**Лемма 12.1.** Такая вероятностная мера  $P$  существует и единственна.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\mathcal{A}$  – конечное объединение непересекающихся прямоугольников. Тогда  $\mathcal{A}$  – алгебра и  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$ . Определим  $P$  на  $\mathcal{A}$  по конечной аддитивности. Остаётся проверить, что  $P$  – счётно-аддитивна на  $\mathcal{A}$ .

Пусть  $C = \sqcup_i C_i$ ;  $C_i, C \in \mathcal{A}$ . Надо проверить, что

$$P(C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i)$$

Достаточно проверить для прямоугольников:

$$C = A \times B, C_i = A_i \times B_i$$

Представим в виде индикаторов:

$$\mathbb{I}_{A \times B}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i \times B_i}(\omega_1, \omega_2)$$

или

$$\mathbb{I}_A(\omega_1) \cdot \mathbb{I}_B(\omega_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i}(\omega_1) \mathbb{I}_{B_i}(\omega_2)$$

Зафиксируем  $\omega_1 \in \Omega_1$  и возьмём  $E$  от обеих частей неравенства в  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ :

$$\mathbb{I}_A(\omega_1) P_2(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i}(\omega_1) P_2(B_i)$$

Теперь берём  $E$  в  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ :

$$P_1(A) P_2(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P_1(A_i) P_2(B_i)$$

□

**Теорема 12.1.** Фубини (б/д).

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – это прямое произведение  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ . Пусть случайная величина  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что

$$\int_{\Omega} \xi dP < +\infty$$

Тогда

$$\int_{\Omega_i} \xi(\omega_1, \omega_2) P_i(d\omega_i)$$

конечен почти наверное по мере  $P_{3-i}$ , является  $\mathcal{F}_{3-i}$  измеримой функцией и, кроме того,

$$\int_{\Omega} \xi(\omega_1, \omega_2) P(d\omega_1, d\omega_2) = \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2) \right) P_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) \right) P_2(d\omega_2)$$

## 13 Совместное распределение. . .

**Утверждение 13.1.** Если случайные величины  $\xi, \eta$  – независимые, то

$$P_{(\xi, \eta)} = P_\xi \times P_\eta$$

*Доказательство.*

$$P_{(\xi, \eta)}(B_1 \times B_2) = P((\xi, \eta) \in B_1 \times B_2) = P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) \stackrel{\text{Фубини}}{=} P_\xi(B_1)P_\eta(B_2)$$

□

**Лемма 13.1.** О свёртке распределений.

Пусть  $\xi, \eta$  – это независимые случайные величины с функциями распределения  $F_\xi, F_\eta$ . Тогда  $\xi + \eta$  имеет следующую функцию распределения:

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x) dF_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(z-x) dF_\xi(x)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(z) &= P(\xi + \eta \leq z) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}\{x + y \leq z\} P_{(\xi, \eta)}(dx, dy) \stackrel{\text{Фубини}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}\{x + y \leq z\} P_\xi(dx) \right) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-y) dF_\eta(y) \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Формула свёртки.

Пусть  $\xi \perp \eta$  с плотностями  $p_\xi, p_\eta$ . Тогда  $\xi + \eta$  тоже имеет плотность, причём

$$p_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} p_\xi(z-x) p_\eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}} p_\eta(z-x) p_\xi(x) dx$$

*Доказательство.* По лемме о свёртке:

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(z) &= \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x) dF_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-\infty}^{z-x} p_\xi(y) dy \right) p_\eta(x) dx \stackrel{y' := y+x}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-\infty}^z p_\xi(y'-x) dy' \right) p_\eta(x) dx \stackrel{\text{Фубини}}{=} \int_{-\infty}^z \left( \int_{\mathbb{R}} p_\xi(y'-x) p_\eta(x) dx \right) dy' = \\ &= \int_{-\infty}^z p_{\xi+\eta}(y') dy' \end{aligned}$$

□

## 14 Дисперсия, ковариация и коэффициент корреляции

**Определение 14.1.** Дисперсией случайной величины  $\xi$  называется

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

если  $E\xi$  конечно.

**Определение 14.2.** Ковариацией случайных величин  $\xi, \eta$  называется

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

если  $E\xi, E\eta$  конечны.

**Определение 14.3.**  $\xi$  и  $\eta$  называются некоррелированными, если

$$\text{cov}(\xi, \eta) = 0$$

**Определение 14.4.** Коэффициентом корреляции случайных величин  $\xi, \eta$  называется

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$$

если  $D\xi, D\eta$  положительная и конечная.

**Лемма 14.1.** Свойства дисперсии и ковариации.

1. Ковариация билинейна
2.  $\forall c \in \mathbb{R} : D(c\xi) = c^2 D(\xi), D(\xi + c) = D(\xi)$
3.  $\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$ . В частности  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$
4. Неравенство Коши-Буняковского:

$$|E\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$$

причём равенство достигается  $\Leftrightarrow \xi, \eta$  линейно зависимы.

5.  $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$  и равен 1  $\Leftrightarrow \xi - E\xi, \eta - E\eta$  линейно зависимы почти наверное

*Доказательство.* 1 – 3 следуют из свойств математического ожидания. 4 было доказано на ОВИТМе.

Для последнего свойства рассмотрим

$$\xi' := \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}, \eta' := \frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}} \Rightarrow \rho(\xi, \eta) = E\xi'\eta'$$

По неравенству КБ:

$$|\rho(\xi, \eta)| \leq \sqrt{E(\xi')^2 E(\eta')^2} = 1$$

Равенство достигается  $\Leftrightarrow \xi', \eta'$  линейно зависимы почти наверное. □



**Следствие.** Если  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – попарно некоррелированные случайные величины с конечными дисперсиями, то

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{k=1}^n D\xi_k$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} D(\xi_1 + \dots + \xi_n) &= \text{cov}(\xi_1 + \dots + \xi_n, \xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n D\xi_i \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Если  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимые случайные величины с конечными дисперсиями, то

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{k=1}^n D\xi_k$$

*Доказательство.* Независимые  $\Rightarrow$  некоррелированные

□

**Определение 14.5.** Пусть  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – случайный вектор. Тогда  $E\xi$  называется вектор из математических ожиданий компонент:

$$E\xi = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)$$

**Определение 14.6.** Дисперсией (матрицей ковариаций) вектора  $\xi$  называется матрица:

$$D\xi = (\text{cov}(\xi_i, \xi_j); i, j = \overline{1, n})$$

**Утверждение 14.1.** Матрица ковариаций – симметричная и неотрицательно определённая матрица.

*Доказательство.*  $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \text{cov}(\xi_j, \xi_i)$  по определению ковариации  $\Rightarrow$  симметричная.

Пусть  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , возьмём  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \langle D\xi \cdot \vec{x}, \vec{x} \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(x_i \xi_i, x_j \xi_j) = \\ &= \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i, \sum_{j=1}^n x_j \xi_j\right) = D\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right) \geq 0 \end{aligned}$$

□

## 15 Сходимости случайных величин

**Определение 15.1.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходится к случайной величине  $\xi$ :

1. С вероятностью 1 (почти наверное), если

$$P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = \xi\right) = 1$$

Обозначение:  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$

2. По вероятности, если:

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Обозначение:  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$

3. В среднем порядка  $p > 0$  (в  $L^p$ ), если

$$E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Обозначение:  $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$

4. По распределению, если  $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывных ограниченных функций выполнено

$$Ef(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Ef(\xi)$$

Обозначение:  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

**Теорема 15.1.** Критерий сходимости с вероятностью 1.

Случайные величины  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

*Доказательство.* Рассмотрим

$$A_k^\varepsilon = \bigcup_{k \geq n} \{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} = \left\{ \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon \right\}$$

Тогда

$$\{\xi_n \not\xrightarrow{\text{п.н.}} \xi\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{m}}$$

Значит

$$\begin{aligned} P(\xi_n \not\xrightarrow{\text{п.н.}} \xi) = 0 &\Leftrightarrow P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\forall m \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(A_n^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n^\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

□

**Теорема 15.2.** *О взаимоотношении различных видов сходимостей.*

1.  $\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
2.  $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
3.  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

*Доказательство.* 1.  $\forall \varepsilon > 0$  выполняется:

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq P\left(|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq P\left(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

в силу критерия сходимости с вероятностью 1.

2.  $\forall \varepsilon > 0$  выполняется:

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^p \geq \varepsilon^p) \stackrel{\text{н-во Маркова}}{\leq} \frac{E|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon^p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

3. Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – произвольная ограниченная непрерывная функция. Возьмём  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$ . Пусть  $N > 0$  таково, что  $P(|\xi| > N) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . В силу равномерной непрерывности  $f$  на отрезках выберем  $\delta > 0$ , такое, что

$$\forall x \in [-N, N] \forall y, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$$

Рассмотрим разбиение  $\Omega$ :

$$A_1 = \{|\xi_n - \xi| \leq \delta, |\xi| \leq N\}; \quad A_2 = \{|\xi_n - \xi| \leq \delta, |\xi| > N\}; \quad A_3 = \{|\xi_n - \xi| > \delta\}$$

Значит можем оценить

$$|Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \leq E|f(\xi_n) - f(\xi)| = \sum_{i=1}^3 E(|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot \mathbb{I}_{A_i})$$

На  $A_1$  выполнено  $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow E|f(\xi_n) - f(\xi)|\mathbb{I}_{A_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . На  $A_2, A_3$  выполнено  $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq 2M$ . Тогда

$$\sum_{i=2}^3 E|f(\xi_n) - f(\xi)|\mathbb{I}_{A_i} \leq 2M(P(A_2) + P(A_3)) \leq 2M(P(|\xi| > N) + P(|\xi_n - \xi| > \delta)) \leq \varepsilon$$

в силу сходимости по вероятности.

В итоге получили, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \leq \varepsilon$$

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  получаем, что  $Ef(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Ef(\xi)$

□

## 16 Достаточное условие сходимости с вероятностью...

**Лемма 16.1.** *Достаточное условие сходимости с вероятностью 1.*

Если

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) < +\infty$$

то  $\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi$

*Доказательство.* Рассмотрим

$$\begin{aligned} P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon) &= P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\}\right) \leq \\ &\sum_{k=n}^{\infty} P(|\xi_k - \xi| > \varepsilon) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

В силу стремления остатка сходящегося ряда к нулю.

Тогда по критерию  $\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi$

□

**Следствие.** Если  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ , то  $\exists$  подпоследовательность  $\{\xi_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$ , такая что

$$\xi_{n_k} \xrightarrow{n.n., k \rightarrow +\infty} \xi$$

*Доказательство.* Выберем  $n_k$  так, чтобы  $n_k > n_{k-1}$  и

$$P(|\xi_{n_k} - \xi| \geq \frac{1}{k}) \leq 2^{-k}$$

выбор возможен в силу сходимости по вероятности.

Проверим достаточное условие: пусть  $\varepsilon > 0$ , выберем  $k_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ . Тогда

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} P(|\xi_{n_k} - \xi| \geq \varepsilon) \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} P(|\xi_{n_k} - \xi| \geq \frac{1}{k}) \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k} < +\infty \Rightarrow \xi_{n_k} \xrightarrow{n.n., k \rightarrow +\infty} \xi$$

□

**Теорема 16.1.** *УЗБЧ в форме Кантелли.*

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – это независимые случайные величины, такие, что

$$\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : E(\xi_n - E\xi_n)^4 \leq c$$

Обозначим  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{n.n., n \rightarrow +\infty} 0$$

*Доказательство.* Без ограничения общности считаем, что  $\forall n \in \mathbb{N} : E\xi_n = 0$ , иначе рассмотрим

$$\xi'_n = \xi_n - E\xi_n$$

Хотим проверить достаточное условие. Для  $\varepsilon > 0$ :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\frac{S_n^4}{n^4} \geq \varepsilon^4\right) \stackrel{\text{н-во Маркова}}{\leq} \frac{ES_n^4}{\varepsilon^4 n^4}$$

Но

$$ES_n^4 = \sum_{i,j,k,l=1}^n E\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l = \sum_{i=1}^n ES_i^4 + 6 \sum_{i < j} ES_i^2 ES_j^2$$

По условию  $\forall i \in \mathbb{N} : ES_i^4 \leq c \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} : E\xi_i^2 \leq \sqrt{ES_i^4} \leq \sqrt{c} \Rightarrow$

$$ES_n^4 \leq n \cdot c + 6 \cdot c \cdot c_n^2 = O(n^2) \Rightarrow \frac{ES_n^4}{\varepsilon^4 n^4} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Значит ряд сходится и работает достаточно условие сходимости с вероятностью 1.  $\square$

**Замечание.** Смысл УЗБЧ.

Теоретическое обоснование принципа устойчивых частот. Пусть

$$\xi_i = \mathbb{I}\{A \text{ произошло в } i\text{-ом эксперименте}\}$$

Тогда частота появления  $A$  стремится к:

$$\nu_n(A) = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1 = P(A)$$

## 17 Фундаментальность с вероятностью 1

**Определение 17.1.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  фундаментальна с вероятностью 1, если

$$P(\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}) = 1$$

**Утверждение 17.1.** Последовательность  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходится почти наверное  $\Leftrightarrow$  она фундаментальна с вероятностью 1.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Пусть  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ , тогда

$$P(\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}) \geq P(\xi_n \rightarrow \xi) = 1$$

$\Leftarrow$  Обозначим  $A = \{\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}\}$ . Тогда  $\forall \omega \in A : \{\xi_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$  имеет предел  $\xi(\omega)$ . Положим  $\xi(\omega) = 0, \forall \omega \notin A$ . Тогда

$$\forall \omega \in \Omega : \xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\xi_n(\omega) \mathbb{I}_A(\omega))$$

Причём  $\xi$  – это случайная величина, как предел случайных величин.

Наконец,  $P(\xi_n \rightarrow \xi) \geq P(A) = 1$  □

**Теорема 17.1.** Неравенство Колмогорова.

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимые случайные величины,  $E\xi_k = 0, E\xi_k^2 < +\infty, \forall k = \overline{1, n}$ . Обозначим  $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}$$

*Доказательство.* Введём обозначения

$$A := \{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\}; A_k := \{|S_k| \geq \varepsilon, |S_i| < \varepsilon \forall i = \overline{1, k-1}\}$$

Тогда  $A = \sqcup_{i=1}^n A_i$ . Продолжим рассуждения:

$$\begin{aligned} ES_n^2 &\geq E(S_n^2 \cdot \mathbb{I}_A) = \sum_{k=1}^n E(S_n^2 \mathbb{I}_{A_k}) = \sum_{k=1}^n E((S_k + \xi_{k+1} + \dots + \xi_n)^2 \mathbb{I}_{A_k}) = \\ &\sum_{k=1}^n [ES_k^2 \cdot \mathbb{I}_{A_k} + E((\xi_{k+1} + \dots + \xi_n)^2 \cdot \mathbb{I}_{A_k}) + 2E(S_k \cdot \mathbb{I}_{A_k}(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n))] \end{aligned}$$

Причём последнее слагаемое будет равно нулю, так как  $(S_k \mathbb{I}_{A_k}) \perp (\xi_{k+1} + \dots + \xi_n)$ , как функции от непересекающихся наборов независимых случайных величин, и  $E(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n) = 0$ . Но  $S_k^2 \mathbb{I}_{A_k} \geq \varepsilon^2 \mathbb{I}_{A_k}$ . Тогда получим

$$ES_n^2 \geq \sum_{k=1}^n \varepsilon^2 E \mathbb{I}_{A_k} = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n P(A_k) = \varepsilon^2 P(A)$$

□

**Теорема 17.2.** *Колмогорова-Хинчин о сходимости почти наверное ряда из случайных величин.*

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – независимые случайные величины,  $E\xi_n = 0, D\xi_n < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$ . Если  $\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n < +\infty$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$  сходится почти наверное.

*Доказательство.* Введём  $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Используя критерий сходимости почти наверное, хотим получить

$$\forall \varepsilon > 0 : P \left( \sup_{k \geq n} |S_k - S_n| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Распишем меру этого события более подробно:

$$\begin{aligned} P \left( \sup_{k \geq n} |S_k - S_n| > \varepsilon \right) &= P \left( \bigcup_{k \geq n} \{|S_k - S_n| > \varepsilon\} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P \left( \bigcup_{k=n}^N \{|S_k - S_n| > \varepsilon\} \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} P \left( \max_{1 \leq k \leq N-n} |S_{n+k} - S_n| > \varepsilon \right) \stackrel{\text{н-во Колмогорова}}{\leq} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E|S_N - S_n|^2}{\varepsilon^2} = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{D(\xi_{n+1} + \dots + \xi_N)}{\varepsilon^2} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^N D\xi_k = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} D\xi_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Последний переход обусловлен тем, что остаток сходящегося ряда стремится к нулю.  $\square$

## 18 Леммы Теплица и Кронекера...

**Лемма 18.1.** *Тёплица (б/д)*

Пусть  $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$  – положительные числа,  $X_n \rightarrow X, b_n = \sum_{j=1}^n a_j \uparrow +\infty$ . Тогда

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n a_j x_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$$

**Лемма 18.2.** *Кронекера (б/д)*

Пусть  $b_n > 0$  и  $b_n \uparrow +\infty$ , пусть  $\sum_x x_n$  сходится. Тогда

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n b_j x_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Определение 18.1.** Пусть  $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$  – последовательность событий. Событием  $\{A_n \text{ б.ч.}\}$  называется

$$\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} A_m$$

Это событие состоит в том, что произошло бесконечное число событий  $A_n$ .

**Лемма 18.3.** *Бореля-Кантелли.*

1. Если  $\sum_n P(A_n) < +\infty$ , то  $P(A_n \text{ б.ч.}) = 0$
2. Если  $\sum_n P(A_n) = +\infty$  и события  $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$  независимы в совокупности, то  $P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$

*Доказательство.* 1. Распишем более подробно исследуемую меру:

$$P(A_n \text{ б.ч.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

Так как ряд  $\sum_n P(A_n)$  сходится

2. Мы уже знаем, что

$$P(A_n \text{ б.ч.}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) =$$

$$1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right)$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N P(\overline{A_k}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N (1 - P(A_k)) \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=n}^N e^{-P(A_k)} =$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} e^{-\sum_{k=n}^N P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 0$$

Последний переход верен, так как ряд  $\sum_n P(A_n)$  расходится.  $\Rightarrow P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$

□



**Теорема 18.1.** УЗБЧ в форме Колмогорова

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – независимые одинаково распределённые случайные величины. Пусть  $E\xi_1$  конечно. Обозначим  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1$$

*Доказательство.* Без ограничения общности считаем, что  $E\xi_1 = 0$ . Иначе перейдём к случайным величинам  $\xi_n - E\xi_1$ . Тогда

$$E|\xi_1| < +\infty \Rightarrow \sum_n P(|\xi_1| \geq n) < +\infty \stackrel{\text{один.распр.}}{\Leftrightarrow} \sum_n P(|\xi_n| \geq n) < +\infty$$

По лемме Бареля-Кантелли  $P((A := \{|\xi_m| \geq n\}) \text{ б.ч.}) = 0$ , то есть с вероятностью 1 выполняется:

$$\xi_n = \bar{\xi}_n = \xi_n \mathbb{I}\{|\xi_n| < n\}$$

начиная с некоторого номера  $n_0 = n_0(\omega)$ .

Тем самым  $\forall \omega \notin A$ :

$$\frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{\bar{\xi}_1(\omega) + \dots + \bar{\xi}_n(\omega)}{n} \rightarrow 0$$

Остаётся доказать, что  $\frac{\bar{\xi}_1 + \dots + \bar{\xi}_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ .

Рассмотрим  $E\bar{\xi}_n$ :

$$E\bar{\xi}_n = E\xi_n \mathbb{I}\{|\xi_n| < n\} \stackrel{\text{один.распр.}}{=} E\xi_1 \mathbb{I}\{|\xi_1| < n\} \xrightarrow{\text{т. Лебега}} E\xi_1 = 0$$

По лемме Тёплица  $\frac{E\bar{\xi}_1 + \dots + E\bar{\xi}_n}{n} \rightarrow 0$ . Тогда

$$\frac{\bar{\xi}_1(\omega) + \dots + \bar{\xi}_n(\omega)}{n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{\bar{\xi}_1(\omega) - E\bar{\xi}_1 + \dots + \bar{\xi}_n(\omega) - E\bar{\xi}_n}{n} \rightarrow 0$$

Остаётся проверить, что ряд  $\sum_n \frac{\bar{\xi}_n - E\bar{\xi}_n}{n}$  сходится почти наверное. Почему? Мы применим лемму Кронекера, взяв  $x_n = \frac{\bar{\xi}_n}{n}, b_n = n$ .

А для этого достаточно проверить, что  $\sum_{k=1}^{\infty} D\left(\frac{\bar{\xi}_k}{k}\right) < +\infty$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} D\left(\frac{\bar{\xi}_k}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\bar{\xi}_k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\bar{\xi}_k^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\xi_k^2 \mathbb{I}\{|\xi_k| < k\}}{k^2} \stackrel{\text{один.распр.}}{=} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\xi_1^2 \mathbb{I}\{|\xi_1| < k\}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k E(\xi_1^2 \mathbb{I}\{i-1 \leq |\xi_1| < i\}) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} E(\xi_1^2 \mathbb{I}\{i-1 \leq |\xi_1| < i\}) \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{\xi_1^2}{i} \mathbb{I}\{i-1 \leq |\xi_1| < i\}\right) \leq \\ &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} E(|\xi_1| \mathbb{I}\{i-1 \leq \xi_1 < i\}) \stackrel{\text{т. о мон-й сх-ти}}{=} 2E|\xi_1| < +\infty \end{aligned}$$

□

## 19 Слабая сходимость и сходимость в основном...

**Определение 19.1.** Пусть  $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $F$  – функции распределения на  $\mathbb{R}$ . Последовательность  $\{F_n\}$  слабо сходится к  $F$ , если  $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывной ограниченной функции, выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)$$

Обозначение:  $F_n \xrightarrow{W} F$

**Определение 19.2.** Последовательность  $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$  функций распределения на  $\mathbb{R}$  сходится в основном к функции распределения  $F$ , если

$$\forall x \in \mathbb{C}(F) : F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(x)$$

где  $\mathbb{C}(F)$  – точки непрерывности функции  $F$ .

Обозначение:  $F_n \Rightarrow F$

**Определение 19.3.** Пусть  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $P$  – вероятностные меры на  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ . Тогда последовательность  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходится к  $P$ , если  $\forall f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  – ограниченной непрерывной функции выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x) P_n(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) P(dx)$$

Обозначение:  $P_n \xrightarrow{W} P$

**Определение 19.4.** Последовательность  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходится к  $P$  в основном, если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : P_n(B) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(B)$$

с условием  $P(\partial B) = 0$

**Теорема 19.1.** *Александрова (б/д).*

Пусть  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $P$  – вероятностные меры на  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $P_n \xrightarrow{W} P$
2.  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} P_n(F) \leq P(F), \forall F$  – замкнутых.
3.  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} P_n(G) \geq P(G), \forall G$  – открытых.
4.  $P_n \Rightarrow P$

**Теорема 19.2.** *Об эквивалентности сходимостей.*

Пусть  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $P$  – вероятностные меры на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , а  $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $F$  – соответствующие им функции распределения. Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $P_n \xrightarrow{W} P$
2.  $P_n \Rightarrow P$

$$3. F_n \xrightarrow{W} F$$

$$4. F_n \Rightarrow F$$

*Доказательство.*  $1 \Leftrightarrow 2$  по теореме Александрова.  $1 \Leftrightarrow 3$  по определению.

Для  $2 \Rightarrow 4$  рассмотрим  $B = (-\infty, x]$ . Тогда  $\partial B = \{x\}$ . Если  $x$  – точка непрерывности  $F$ , то  $P(\{x\}) = 0 \Rightarrow P(\partial B) = 0$ . Значит, в силу сходимости в основном плотностей:

$$F_n(x) = P_n((-\infty, x]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P((-\infty, x]) = F(x) \Rightarrow F_n \Rightarrow F$$

Для  $4 \Rightarrow 2$  пусть  $F_n \Rightarrow F$ . По теореме Александрова достаточно проверить, что  $\forall$  открытых  $G$  выполнено

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(G) \geq P(G)$$

Раз  $G \subset \mathbb{R}$ , то  $G$  представимо в виде конечного или счётного числа непересекающихся интервалов:

$$G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$

Зафиксируем  $\forall \varepsilon > 0$ . Для  $\forall k \in \mathbb{N}$  подберём полуинтервал  $(a'_k, b'_k] \subset (a_k, b_k)$ , такой, что

$$P((a_k, b_k)) \leq P((a'_k, b'_k]) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

и  $a'_k, b'_k$  – точки непрерывности  $F$ .

Такой выбор возможен в силу непрерывности вероятностной меры и того факта, что множество точек разрыва  $F$  не более чем счётно. Далее:

$$\begin{aligned} \lim_n P_n(G) &= \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} P_n((a_k, b_k)) \stackrel{\forall N > 0}{\geq} \lim_n \sum_{k=1}^N P_n((a_k, b_k)) \geq \sum_{k=1}^N \lim_n P_n((a_k, b_k)) \geq \\ &\sum_{k=1}^N \lim_n P_n((a'_k, b'_k]) = \sum_{k=1}^N \lim_n (F_n(b'_k) - F_n(a'_k)) \stackrel{F_n \Rightarrow F}{=} \sum_{k=1}^N (F(b'_k) - F(a'_k)) = \sum_{k=1}^N P((a'_k, b'_k]) \geq \\ &\sum_{k=1}^N P((a_k, b_k)) - \varepsilon \end{aligned}$$

Устремляя  $N \rightarrow +\infty$ , получаем

$$\lim_n P_n(G) \geq \sum_{k=1}^{\infty} P((a_k, b_k)) - \varepsilon = P(G) - \varepsilon$$

В силу произвольного  $\varepsilon > 0$ :

$$\lim_n P_n(G) \geq P(G)$$

Благодаря теореме Александрова, всё доказали. □

**Следствие.** Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$  – случайные величины. Тогда

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}(F_\xi) : F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_\xi(x)$$

## 20 Характеристические функции...

**Определение 20.1.** Пусть  $\xi$  – случайная величина. Характеристической функцией случайной величины  $\xi$  называется

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\xi t}, t \in \mathbb{R}$$

**Определение 20.2.** Пусть  $\xi$  – случайный вектор из  $\mathbb{R}^n$ . Характеристической функцией  $\xi$  называется

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\langle \xi, t \rangle}, t \in \mathbb{R}^n$$

**Определение 20.3.** Пусть  $P$  – вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ . Характеристической функцией меры  $P$  называется

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle x, t \rangle} P(dx)$$

**Пример.** Вычисление характеристической функции для стандартного нормального распределения.

Пусть  $\xi \equiv \mathcal{N}(0, 1)$ . Тогда

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Имеем право рассмотреть производную характеристической функции:

$$\varphi'_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)(-x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - t \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Получили диффур вида

$$\varphi'_\xi(t) = (-t) \cdot \varphi_\xi(t)$$

Решая его, получим, что

$$\varphi_\xi(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$$

Из начальных условий,  $C = 1$  (т.к.  $\forall \xi : \varphi_\xi(0) = 1$ ).

Значит  $\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ .

### Свойства характеристических функций случайных величин

1. Если  $\varphi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$ , то

$$\forall t \in \mathbb{R} : |\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$$

*Доказательство.*

$$|\varphi(t)| = |Ee^{i\xi t}| \leq E|e^{i\xi t}| \stackrel{=1}{=} 1 = \varphi(0)$$

□

2. Если  $\varphi_\xi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$ ,  $\eta = a\xi + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , то

$$\varphi_\eta(t) = e^{itb} \varphi_\xi(at)$$

*Доказательство.*

$$\varphi_\eta(t) = Ee^{i\eta t} = Ee^{i(a\xi+b)t} = e^{itb} Ee^{i\xi(at)} = e^{itb} \varphi_\xi(at)$$

□

3. Если  $\varphi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$ , то  $\varphi(t)$  равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = |Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}| = |Ee^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)| \leq E|e^{it\xi}| |e^{ih\xi} - 1| = E|e^{ih\xi} - 1|$$

Заметим, что  $|e^{ih\xi} - 1| \xrightarrow{\forall \omega \in \Omega} 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Также, оценив  $|e^{ih\xi} - 1| \leq 2$  сможем применить теорему Лебега и получить:

$$E|e^{ih\xi} - 1| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

□

4. Пусть  $\varphi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$ . Тогда

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$$

*Доказательство.*

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = E \cos(t\xi) + iE \sin(t\xi) = E \cos(-t\xi) - iE \sin(-t\xi) = \overline{E^{i(-t)\xi}} = \overline{\varphi(-t)}$$

□

5. Единственность (б/д) Пусть  $\xi, \eta$  – случайные величины. Тогда

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) \Leftrightarrow \xi \stackrel{d}{=} \eta \text{ (одинаково распределены)}$$

6. Пусть  $\varphi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$ . Тогда

$$\forall t : \varphi(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \xi \stackrel{d}{=} -\xi$$

то есть распределение  $\xi$  симметрично:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : P(\xi \in B) = P(\xi \in -B)$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ :

$$\varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)} = \varphi_\xi(t) \Rightarrow \xi \stackrel{d}{=} -\xi$$

$\Leftarrow$ :

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)} \Rightarrow \forall t : \varphi_\xi(t) \in \mathbb{R}$$

□

7. Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимые случайные величины. Тогда

$$\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$$

*Доказательство.*

$$\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = E e^{it(\xi_1+\dots+\xi_n)} \stackrel{\text{II}}{=} E \prod_{k=1}^n e^{it\xi_k} = \prod_{k=1}^n E e^{it\xi_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$$

□

## 21 Единственность характеристических функций...

**Теорема 21.1.** *Единственности.*

Пусть  $\xi, \eta$  – случайные величины. Тогда

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) \Leftrightarrow \xi \stackrel{d}{=} \eta$$

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  Очевидно из формулы вычисления матожидания.

$\Rightarrow$  Для  $a < b$  и малого  $\varepsilon > 0$  рассмотрим функцию  $f_\varepsilon(x)$ :

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a] \cup [b + \varepsilon, +\infty) \\ \frac{x-a}{\varepsilon}, & x \in [a, a + \varepsilon] \\ 1, & x \in [a + \varepsilon, b] \\ \frac{b+\varepsilon-x}{\varepsilon}, & x \in [b, b + \varepsilon] \end{cases}$$

Докажем, что  $\forall \varepsilon > 0$  достаточно малого:

$$Ef_\varepsilon(\xi) = Ef_\varepsilon(\eta)$$

Возьмём большое  $n \in \mathbb{N}$ , такое что  $[-n, n] \supset [a, b + \varepsilon]$ . Тогда  $\forall n$  по т. Вейерштрасса  $\exists$  функция  $f_\varepsilon^{(n)}(x)$  на  $[-n, n]$  вида

$$f_\varepsilon^{(n)}(x) = \sum_{k \in K} c_k e^{\frac{i\pi k x}{n}}$$

где  $K \subset \mathbb{Z}$  – конечное множество. Причём

$$\forall x \in [-n, n] : |f_\varepsilon^{(n)}(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{n}$$

Очевидно,  $f_\varepsilon^{(n)}(x)$  периодическая с периодом  $2n$ , продолжим её на  $\mathbb{R}$  той же формулой. Заметим, что

$$\forall x \in [-n, n] : |f_\varepsilon^{(n)}(x)| \leq 2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : |f_\varepsilon^{(n)}(x)| \leq 2$$

Рассмотрим

$$|Ef_\varepsilon(\xi) - Ef_\varepsilon(\eta)| \leq |Ef_\varepsilon(\xi) - Ef_\varepsilon^{(n)}(\xi)| + |Ef_\varepsilon(\eta) - Ef_\varepsilon^{(n)}(\eta)| + |Ef_\varepsilon^{(n)}(\xi) - Ef_\varepsilon^{(n)}(\eta)|$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как  $f_\varepsilon^{(n)}(\xi), f_\varepsilon^{(n)}(\eta)$  – это какие-то линейная комбинация характеристических функций  $\xi, \eta$  с одинаковыми коэффициентами, которые равны по условию.

Далее,

$$|E(f_\varepsilon(\xi) - f_\varepsilon^{(n)}(\xi))| \leq E(|f_\varepsilon(\xi) - f_\varepsilon^{(n)}(\xi)| \cdot \mathbb{I}\{|\xi| \leq n\}) + (|f_\varepsilon(\xi) - f_\varepsilon^{(n)}(\xi)| \cdot \mathbb{I}\{|\xi| > n\}) \leq \frac{1}{n} + 2P(|\xi| > n)$$

В итоге получим, что

$$|Ef_\varepsilon(\xi) - Ef_\varepsilon(\eta)| \leq \frac{2}{n} + 2P(|\xi| > n) + 2P(|\eta| > n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow Ef_\varepsilon(\xi) = Ef_\varepsilon(\eta)$$

Заметим, что

$$\forall \omega \in \Omega : f_\varepsilon(\xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{I}\{\xi \in (a, b]\}, |f_\varepsilon(\xi)| \leq 1 \xrightarrow{\text{т. Лебега}} E f_\varepsilon(\xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E \mathbb{I}\{\xi \in (a, b]\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$

Итоговый результат

$$\forall a < b : F_\xi(b) - F_\xi(a) = F_\eta(b) - F_\eta(a)$$

Устремляя  $a \rightarrow -\infty$ :

$$F_\xi(b) = F_\eta(b) \Rightarrow \xi \stackrel{d}{=} \eta$$

□

**Пример.** Вычисление распределения суммы независимых нормальных случайных величин.

Пусть  $\xi_1, \xi_2$  – независимые случайные величины,  $\xi_i \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ . Требуется найти распределение  $\xi_1 + \xi_2$ .

*Доказательство.* Найдём характеристическую функцию  $\xi_j$ : заметим, что

$$\eta := \frac{\xi_j - a_j}{\sigma_j} \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow \varphi_{\xi_j}(t) = e^{ita_j} \varphi_\eta(\sigma_j t) = e^{ia_j t - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2}}$$

Тогда

$$\varphi_{\xi_1 + \xi_2}(t) \stackrel{=}{=} \varphi_{\xi_1}(t) \varphi_{\xi_2}(t) = e^{it(a_1 + a_2) - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2}} \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

□

**Теорема 21.2.** Формула обращения (б/д).

Пусть  $\varphi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$  с функцией распределения  $F_\xi$

1. Для  $\forall a < b, a, b \in \mathbb{F}_\xi$  выполнено

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{-C}^C \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt$$

2. Если  $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < +\infty$ , то случайная величина  $\xi$  имеет плотность

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt$$