# Содержание

# 1 Базовые определения

**Определение 1.1.** Система $\mathcal{F}$ подмножеств $\Omega$ называется алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} := (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$

**Определение 1.2.** Система $\mathcal{F}$ подмножеств $\Omega$ называется $\sigma$-алгеброй, если

1. $\mathcal{F}$ – алгебра
2. $\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

**Определение 1.3.** $P$ называется вероятностной мерой на $(\Omega, \mathcal{F})$, если $P: \mathcal{F} \to [0,1]$, удовлетворяющая свойствам:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Если $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$, то
$$P\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

**Определение 1.4.** Вероятностное пространство – это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где

- $\Omega$ – множество элементарных исходов
- $\mathcal{F}$ – $\sigma$-алгебра подмножеств $\Omega$, элементы $\mathcal{F}$ называются событиями
- $P$ – вероятностная мера на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$

**Определение 1.5.** Система $\mathcal{M}$ подмножеств в $\Omega$ называется $\pi$-системой, если из того, что $A, B \in \mathcal{M}$ следует, что $A \cap B \in \mathcal{M}$

**Определение 1.6.** Система $\mathcal{L}$ подмножеств в $\Omega$ называется $\lambda$-системой, если

1. $\Omega \in \mathcal{L}$
2. $(A, B \in \mathcal{L};\ A \subset B) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}$
3. $(A_n \uparrow A;\ \forall n\ A_n \in \mathcal{L}) \Rightarrow A \in \mathcal{L}$

**Теорема 1.1.** *Первая теорема о $\pi$-$\lambda$-системах*

*Система $\mathcal{F}$ подмножеств $\Omega$ является $\sigma$-алгеброй $\Leftrightarrow$ она является $\pi$-системой и $\lambda$-системой.*

*Доказательство.* $\Rightarrow$ очевидно.

$\Leftarrow$ Проверим сначала, что $\mathcal{F}$ – алгебра. Свойства $1), 2)$ уже есть. По свойству 2) $\lambda$-системы $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$, если $A \in \mathcal{F}$. Значит $\mathcal{F}$ – алгебра.

Пусть $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}, \forall n\ A_n \in \mathcal{F}, \forall i \neq j\ A_i \cap A_j = \varnothing$. Рассмотрим $B_n = \sqcup_{m=1}^{n} A_m \in \mathcal{F}$. Тогда $B_n \subset B_{n+1}$ и $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \sqcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow$ по 3) свойству $\lambda$-системы: $B_n \uparrow \sqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. $\square$

**Лемма 1.1.** *Пусть $\mathcal{M}$ – система подмножеств $\Omega$. Тогда существует минимальная (по включению) $\sigma$-алгебра (алгебра, $\pi$-система, $\lambda$-система), обозначаемая $\sigma(\mathcal{M})$ $(\lambda(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M}))$, содержащая $\mathcal{M}$.*

**Пример.**

1. Если $\Omega = \mathbb{R}$, то борелевской $\sigma$-алгеброй на $\mathbb{R}$ называется наименьшая $\sigma$-алгебра, содержащая все интервалы

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma((a;\ b), a < b)$$

2. Если $\Omega = \mathbb{R}^n, n > 1$.

   Борелевской $\sigma$-алгеброй в $\mathbb{R}^n$ называется минимальная $\sigma$-алгебра, содержащая множества вида $B_1 \times \cdots \times B_n, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то есть

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(B_1 \times \cdots \times B_n :\ B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

3. Если $\Omega = \mathbb{R}^\infty$, то есть $\Omega$ содержит все счётные последовательности вещественных чисел.

   Для $n \in \mathbb{N}$ и $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ введём циллиндр:

$$F_n(B_n) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^\infty :\ (x_1, \cdots, x_n) \in B_n\}$$

   Тогда минимальная $\sigma$-алгеьра, содержащая все циллиндры называется борелевской в $\mathbb{R}^\infty$, то есть

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) = \sigma(F_n(B_n) :\ n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

# 2 Вторая теорема о $\pi$- и $\lambda$-системах. Следствия из неё.

**Теорема 2.1.** *Вторая теорема о $\pi$-$\lambda$-системах.*
*Если $\mathcal{M}$ – это $\pi$-система подмножеств в $\Omega$, то $\sigma(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M})$*

*Доказательство.* Заметим, что $\sigma(\mathcal{M})$ – $\lambda$-система, содержащая $\mathcal{M} \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) \subset \sigma(\mathcal{M})$.

Проверим, что $\lambda(\mathcal{M})$ – это $\sigma$-алгебра. Раз $\lambda(\mathcal{M})$ – это $\lambda$-система, то по (1.1) достаточно проверить, что $\lambda(\mathcal{M})$ – это $\pi$-система.

Рассмотрим $\mathcal{M}_1 = \{B \in \lambda(\mathcal{M}) :\ \forall A \in \mathcal{M}, A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$. Заметим, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$. Проверим, что $\mathcal{M}_1$ – это $\lambda$-система:

1. $\Omega \in \mathcal{M}_1$ – очевидно

2. Пусть $B, C \in \mathcal{M}_1, C \subset B$, пусть $A \in \mathcal{M}$. Заметим, что $B \setminus C \in \lambda(\mathcal{M})$ и

$$(B \setminus C) \cap A = \overset{\in\lambda(\mathcal{M})}{(B \cap A)} \setminus \overset{\in\lambda(\mathcal{M})}{(C \cap A)}$$

   Значит по второму свойству $\lambda$-систем $(B \setminus C) \cap A \in \lambda(\mathcal{M})$

3. Пусть $B_n \uparrow B, B_n \in \mathcal{M}_1, A \in \mathcal{M} \Rightarrow$

$$\overset{\in\lambda(\mathcal{M})}{B_n \cap A} \uparrow B \cap A$$

   Тогда по третьем свойству $\lambda$-систем $B \cap A \in \lambda(\mathcal{M})$. Но $B_n \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow$ по третьему свойству $\lambda$-системы получаем, что $B \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow B \in \mathcal{M}_1$.

По условию $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \Rightarrow$ в силу минимальности $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_1$. По построению $\mathcal{M}_1 \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_1$, то есть $\forall B \in \lambda(\mathcal{M})\, \forall A \in \mathcal{M} : \ A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})$.

Далее рассмотрим $\mathcal{M}_2 = \{B \in \lambda(\mathcal{M}) : \ \forall A \in \lambda(\mathcal{M})\ A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$. В силу доказанного $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_2$. Совершенно аналогично с $\mathcal{M}_1$ проверяем, что $\mathcal{M}_2$ – это $\lambda$-система. Тогда $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_2$. По построению $\mathcal{M}_2 \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_2 \Rightarrow \lambda(\mathcal{M})$ – это $\pi$-система. $\square$

**Следствие.** *Пусть $\mathcal{M}$ – это $\pi$-система на $\Omega$, и $\mathcal{L}$ – это $\lambda$-система на $\Omega$ и $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$. Тогда $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$*

# 3 Независимость событий и систем событий

**Определение 3.1.** События $A, B$ независимые, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

**Определение 3.2.** События $A_1, \cdots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если

$$\forall k \leqslant n\, \forall 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n : \ P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_k})$$

**Определение 3.3.** Пусть $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n$ – системы событий на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Они называются независимыми в совокупности, если

$$\forall A_1 \in \mathcal{M}_1, \cdots, A_n \in \mathcal{M}_n : \ A_1, \cdots, A_n - \text{ независимы в совокупности}$$

**Лемма 3.1.** *Критерий независимости $\sigma$-алгебр.*

*Пусть $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n$ – это $\pi$-системы событий на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n$ – независимы в совокупности $\Leftrightarrow \sigma(\mathcal{M}_1), \cdots, \sigma(\mathcal{M}_n)$ – независимы в совокупности.*

*Доказательство.* $\Leftarrow$ очевидно.

Докажем только для $n = 2$, для $n > 2$ всё аналогично.

Рассмотрим $\mathcal{L}_1 = \{A \in \sigma(\mathcal{M}_2) : \ A \perp\!\!\!\perp \mathcal{M}_1\}$. Проверим, что $\mathcal{L}_1$ – это $\lambda$-система:

1. $\forall B \in \mathcal{M}_1 : \ \Omega \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow \Omega \in \mathcal{L}_1$

2. Пусть $C \in \mathcal{M}_1$, тогда

$$\begin{aligned} P((B \setminus A) \cap C) = P((B \cap C) \setminus (A \cap C)) = P(B \cap C) - P(A \cap C) = \\ P(C)(P(B) - P(A)) = P(B \setminus A)P(C) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}_1 \end{aligned}$$

3. Пусть $A_n \uparrow A, A_n \in \mathcal{L}_1$. По определению $\sigma$-алгебры замечаем, что $A \in \sigma(\mathcal{M}_2)$. Пусть $C \in \mathcal{M}_1$. Рассмотрим

$$P(A \cap C) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n \cap C) = P(C) \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P(C)P(A) \Rightarrow A \in \mathcal{L}_1$$

Раз $\mathcal{L}_1$ – это $\lambda$-система и $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{L}_1$, по условию, то по (2.1) получим, что $\sigma(\mathcal{M}_2) \subset \mathcal{L}_1 \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_2) \perp\!\!\!\perp \mathcal{M}_1$.

Рассмотрим $\mathcal{L}_2 = \{A \in \sigma(\mathcal{M}_1) : \ A \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{M}_2)\}$. Точно так же доказывается, что $\mathcal{L}_2$ – это $\lambda$-система, $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{L}_2$ по доказанному $\Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{L}_2 \Rightarrow \sigma(M_1) \perp\!\!\!\perp \sigma(M_2)$ $\square$

**Определение 3.4.** Пусть $\{M_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ – набор систем событий. Он называется независимым в совокупности, если независим в совокупности $\forall$ конечный поднабор.

# 4 Функция распределения вероятностной меры

**Определение 4.1.** Функцией распределения вероятностной меры $P$ на $\mathbb{R}$ называется

$$F(x) = P((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}$$

**Лемма 4.1.** *Свойства функции распределения.*

1. *$F(x)$ не убывает*

2. *$F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$*

3. *$F(x)$ непрерывна справа*

*Доказательство.* 1. Пусть $y > x$. Тогда

$$(-\infty, x] \subset (-\infty, y] \Rightarrow F(x) = P((-\infty, x]) \leqslant P((-\infty, y]) = F(y)$$

2. Если $x_n \uparrow +\infty$, то $(-\infty, x_n] \uparrow \mathbb{R}$. Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \overset{n \to +\infty}{\to} P(\mathbb{R}) = 1$$

Если $x_n \downarrow -\infty$, то $(-\infty, x_n] \downarrow \varnothing$. Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \overset{n \to +\infty}{\to} P(\varnothing) = 0$$

3. Если $x_n \downarrow x$, то $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$. Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \overset{n \to +\infty}{\to} P((-\infty, x]) = F(x)$$

□

**Определение 4.2.** Эквивалентное определение функции распределения.

Функция, удовлетворяющая свойствам $1 - 3$ из предыдущей леммы, называется функцией распределения на $P$.

**Теорема 4.1.** *О продолжении меры (б/д)*

*Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра подмножеств $\Omega$. Пусть $P_0 : \mathcal{A} \to [0, 1]$ с условием, $P_0(\Omega) = 1$ и $P_0$ счётно-аддитивна на $\mathcal{A}$. Тогда $\exists!$ продолжение меры $P_0$ на $\sigma(A)$*

**Теорема 4.2.** *О взаимной однозначности функции распределения и вероятностной меры.*

*Пусть $F(x), x \in \mathbb{R}$ – функция распределения на $\mathbb{R}$. Тогда $\exists!$ вероятностная мера $P$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, для которой $F$ является функцией распределения, то есть*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; F(x) = P((-\infty, x])$$

*Доказательство.* Рассмотрим на $\mathbb{R}$ алгебру $\mathcal{A}$, состоящую из конечных объединений непересекающихся интервалов:

$$\forall A \in \mathcal{A}: \ A = \bigsqcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k], \ -\infty \leqslant a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_n \leqslant +\infty$$

Зададим на $\mathcal{A}$ меру $P_0$:

$$\forall A \in \mathcal{A}: \ P_0(A) = \sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a_k))$$

где $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

По построению $P_0(\mathbb{R}) = 1$ и $P_0$ будет конечно аддитивна на $\mathcal{A}$. Если мы проверим, что $P_0$ счётно аддитивна на $\mathcal{A}$, то по (4.1) $\exists!$ продолжение $P$ меры $P_0$ на $\sigma(A) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Это и есть искомая мера $P$, причём

$$P((-\infty, x]) = P_0((-\infty, x]) = F(x)$$

По теореме о непрерывности вероятностной меры, достаточно проверить, что $P_0$ непрерывна в нуле.

Пусть $A_n \downarrow \varnothing, \forall n: \ A_n \in \mathcal{A}$. Хотим проверить, что $P(A_n) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$. В силу $2-3$ свойств функции распределения:

$$\forall A \in \mathcal{A} \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists B \in A: \ \mathrm{cl} \ B \subset A, P_0(A \setminus B) \leqslant \varepsilon$$

Если $(a, b]$ является частью $A$, то для некоторого $a' > a$ будет выполнено

$$P_0((a, a']) \leqslant \varepsilon$$

Зафиксировав $\forall \varepsilon > 0$, выберем $B_n \forall n \in \mathbb{N}: B_n \in A$, такой что $\mathrm{cl} \ B_n \subset A_n$ и $P_0(A_n \backslash B_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Пусть сначала все $A_n$ лежат внутри $[-N, N]$. Заметим, что раз $\cap_n A_n = \varnothing$, то $\cap_n \mathrm{cl} \ B_n = \varnothing$. В силу компактости $\exists n_0$:

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} \mathrm{cl} \ B_n = \varnothing \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{n_0} B_n = \varnothing$$

Рассмотрим

$$P_0(A_{n_0}) = P_0\left(A_{n_0} \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0} B_n\right) \leqslant P_0\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} (A_{n_0} \setminus B_n)\right) \leqslant P_0\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} (A_n \setminus B_n)\right) \leqslant$$
$$\sum_{n=1}^{n_0} P_0(A_n \setminus B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant \varepsilon \Rightarrow P(A_n) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Если $A$ бесконечно, то возьмём $N$, такой что $P_0(\mathbb{R} \setminus (-N, N]) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим $A'_n = A_n \cap (-N, N]$. Тогда по доказанному выше $P'_0(A'_n) \overset{n\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow$ с некоторого $n_0$:

$$P_0(A_n) \leqslant P(A'_n) + P_0(\mathbb{R} \setminus (-N, N]) \leqslant \varepsilon$$

$\square$

# 5 Классификация вероятностных мер

**Определение 5.1.** Пусть $P$ – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Она называется дискретной, если $\exists$ не более чем счётное множество $X \subset \mathbb{R}$, такое, что

$$P(\mathbb{R} \setminus X) = 0, \forall x \in X: \ P(\{x\}) > 0$$

Говорят, что $P$ сосредоточена на $X$.

Пусть $X = (x_k, k \in \mathbb{N})$, обозначим $p_k = P(\{x_k\})$. Набор $(p_1, p_2, \cdots)$ образует распределение вероятностей на $X$.

Как выглядит функция распределения?

$$F(x) = \sum_{x_k \leqslant x} P(\{x_k\})$$

Она меняется скачками в точках $x_k$, в них значение увеличивается на

$$p_k = P(\{x_k\}) = \Delta F(x_k) = F(x_k) - F(x_k - 0)$$

**Пример.** Дискретные распределения:

1. Константы.
$$X = \{x\}; \ P(\{x\}) = 1$$

2. Распределение Бернулли, $\mathrm{Bern}(p)$, $p \in [0, 1]$:
$$X = \{0, 1\}; \ p_0 = 1 - p, p_1 = p$$

3. Биномиальное распределение, $\mathrm{Bin}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$:
$$X = \{0, \cdots, n\}; \ p_k = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}; \ k = \overline{0, n}$$

4. Пуассоновское распределение, $\mathrm{Pois}(\lambda)$, $\lambda > 0$
$$X = \mathbb{Z}_+; \ p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k \in \mathbb{Z}_+$$

**Определение 5.2.** Пусть $P$ – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, а $F$ – её функция распределения. Она называется абсолютно непрерывной, если $\exists p(t) \geqslant 0$, такая что

$$\int_{\mathbb{R}} p(t) dt = 1; \ \forall x \in \mathbb{R}: \ F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t) dt$$

В этом случае $p(t)$ называется плотностью функции распределения $F$ и меры $P$.

**Замечание.** Интегралы понимаются, как интегралы Лебега.

**Пример.** 1. Равномерное распределение, $\mathrm{U}(a, b)$, $a < b$

$$p(x) = \frac{1}{b - a} \cdot \mathbb{I}_{\{x \in [a, b]\}}(x); \ F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x - a}{b - a}, x \in [a, b] \\ 1, x > b \end{cases}$$

2. Нормальное (гауссовское) распределение, $\mathcal{N}(a, \sigma^2), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}};\ \Phi_{a,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

3. Экспоненциальное (показательное) распределение, $\mathrm{Exp}(\alpha)$, $\alpha > 0$.

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} \cdot \mathbb{I}\{x > 0\};\ F(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, x > 0 \end{cases}$$

4. Гамма-распределение, $\Gamma(\alpha, \lambda), \alpha, \lambda > 0$

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{\{x>0\}}(x);\ \Gamma(\lambda) = \int_{0}^{+\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx, \lambda > 0$$

5. Распределение Коши, $K(\sigma), \sigma > 0$

$$p(x) = \frac{\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)};\ F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sigma}$$

**Определение 5.3.** Пусть $F$ – функция распределения на $\mathbb{R}$.

Точка $x$ является точкой роста $F$, если

$$\forall \varepsilon > 0 :\ F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$$

**Определение 5.4.** Функция распределения $F$ (и соответствующая ей мера $P$) называется сингулярной, если $F$ непрерывна и множество её точек роста имеет лебегову норму нуль.

**Пример.** Канторова лестница.

Мера $P$ сосредоточена на канторовом множестве, оно не счётное, но каждый элемент имеет ненулевую меру.

**Теорема 5.1.** *Лебега о разложении. (б/д)*

*Пусть $F$ – функция распределения на $\mathbb{R}$. Тогда $\exists$ разложение вида*

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x), \alpha_i \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

*причём $F_1$ – дискретная функция распределения, $F_2$ – абсолютно непрерывная, $F_3$ – сингулярная.*

# 6 Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

**Определение 6.1.** Функцией распределения вероятностной меры $P$ называется $F(x_1, \cdots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$, где

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n])$$

**Замечание.** 1. $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$

2. $\vec{x} \geqslant \vec{y}$, если

$$\forall i = \overline{1, n} :\ x_i \geqslant y_i$$

3. $(-\infty, \vec{x}] = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$

4. $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$, если
$$\forall n \in \mathbb{N}:\ \vec{x}_{(n)} \geqslant \vec{x}_{(n+1)} \geqslant \vec{x}$$
причём $\lim_n \vec{x}_{(n)} = \vec{x}$

**Лемма 6.1.** *Свойства многомерной функции распределения.*

*Пусть $F(\vec{x})$ – функция распределения вероятностной меры $P$ на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Тогда*

1. *Если $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$, то*
$$\lim_{n \to +\infty} F(\vec{x}_{(n)}) = F(\vec{x})$$
*то есть непрерывна справа по любой координате*

2. *Если $x_i \to +\infty, \forall i = \overline{1, n}$, то*
$$F(\vec{x}) \to 1$$
*Если $x_i \to -\infty, \exists i = \overline{1, n}$, то*
$$F(\vec{x}) \to 0$$

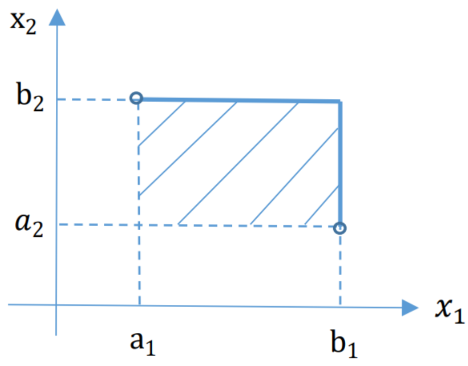
3. *Для $\forall i = \overline{1, n}$ и $a_i < b_i$ введём оператор $\triangle^i_{a_i, b_i}$, который действует следующим образом:*
$$\triangle^i_{a_i, b_i} F(\vec{x}) = F(x_1, \cdots, b_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) - F(x_1, \cdots, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$
*Тогда*
$$\forall a_1 < b_1, \cdots, a_n < b_n:\ \triangle^1_{a_1, b_1} \circ \cdots \circ \triangle^n_{a_n, b_n} F(\vec{x}) \geqslant 0$$

*Доказательство.* 1. Если $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$, то $(-\infty, \vec{x}_{(n)}] \downarrow (-\infty, \vec{x}]$. Тогда по непрерывности меры
$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \overset{n \to +\infty}{\to} P((-\infty, \vec{x}]) = F(\vec{x})$$

2. Если $\vec{x} \uparrow (+\infty, \cdots, +\infty)$, то $(-\infty, \vec{x}] \uparrow \mathbb{R}^n$. Тогда по непрерывности меры
$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \overset{n \to +\infty}{\to} P(\mathbb{R}^n) = 1$$
Если $x_i \downarrow -\infty$, то $(-\infty, \vec{x}] \downarrow \varnothing$. Тогда в силу непрерывности меры
$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \overset{n \to +\infty}{\to} P(\varnothing) = 0$$

3. Проверим, например для $n = 2$, что
$$\triangle^1_{a_1, b_1} \circ \cdots \circ \triangle^n_{a_n, b_n} F(\vec{x}) = P((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n])$$
Действительно:
$$\triangle^1_{a_1, b_1} \circ \triangle^2_{a_2, b_2} F(x_1, x_2) = \triangle^1_{a_1, b_1}(F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2)) =$$
$$F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) \geqslant 0$$

В общем случае достаточно заметить, что
$$\triangle^i_{a_i, b_i} P(B_1 \times \cdots \times B_{i-1} \times (-\infty, x_i] \times \cdots \times B_n) = P(B_1 \times \cdots \times (a_i, b_i] \times \cdots \times B_n)$$
□




**Теорема 6.1.** *О построении вероятностной меры на* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *по функции распределения (б/д).*

*Пусть* $F(\vec{x})$ *удовлетворяет всем свойствам из предыдущей леммы. Тогда* $\exists!$ *вероятностная мера на* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$*, для которой* $F$ *является функцией распределения.*

**Определение 6.2.** Пусть $P$ – вероятностная мера на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ рассмотрим

$$P_n(B) = P(F_n(B))$$

где $F_n(B) = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots) : (x_1 \ \cdots, x_n) \in B\}$ – циллиндр с основанием $B$.

Тогда $P_n$ будет вероятностной мерой в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, $\forall n : \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

$$P_n(B) = P_{n+1}(B \times \mathbb{R})$$

Это свойство согласованности.

**Теорема 6.2.** *Колмогорова о мерах в* $\mathbb{R}^\infty$ *(б/д).*

*Пусть* $P_1, P_2, \cdots$ *– последовательность вероятностных мер в* $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \cdots$*, обладающая свойством согласованности. Тогда* $\exists!$ *вероятностная мера* $P$ *на* $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$*, такая что*

$$\forall n \in \mathbb{N} \, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \ P_n(B) = P(F_n(B))$$

# 7 Случайные элементы, случайные величины и векторы на вероятностном пространстве

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, а $(E, \xi)$ – измеримое пространство.

**Определение 7.1.** Отображение $X : \Omega \to E$ называтся случайным элементом, если оно измеримо, то есть

$$\forall B \in \xi : \ X^{-1}(B) = \{\omega : \ X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

**Определение 7.2.** Если $(E, \xi) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, то случайный элемент называется случайной величиной.

**Определение 7.3.** Если $(E, \xi) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, то случайный элемент называется случайным вектором.

**Лемма 7.1.** *Критерий измеримости отображения.*

*Пусть* $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$*, так чтобы* $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$*. Тогда* $X : \Omega \to E$ *является случайным элементом* $\Leftrightarrow$

$$\forall B \in \mathcal{M} : \ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

*Доказательство.* $\Rightarrow$ очевидно.

$\Leftarrow$ Рассмотрим

$$\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{E} : \ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$$

Легко видеть, что $\mathcal{D}$ – это $\sigma$-алгебра, так как $\mathcal{E}$ – $\sigma$-алгебра, а прообраз сохраняет теоретико-множественные операции.

По условию $\mathcal{M} \subset \mathcal{D} \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ в силу минимальности. □

**Следствие.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *– случайная величина*
2. $\forall x \in \mathbb{R}$*:*
$$\{\omega : \ X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$*:*
$$\{\omega : \ X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{F}$$

*Доказательство.* Применяем лемму для $\mathcal{M} = \{(-\infty, x), x \in \mathbb{R}\}$ или $\mathcal{M} = \{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$. В обоих случаях $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ □

**Следствие.** $X := (X_1, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *– случайный вектор* $\Leftrightarrow$

$$\forall i = \overline{1, n} : \ X_i - - \text{ *случайная величина*}$$

*Доказательство.* $\Rightarrow$ Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда

$$X_i^{-1}(B) = X^{-1}(\mathbb{R} \times \cdots \times \overset{i}{B} \times \cdots \times \mathbb{R}) \in \mathcal{F}$$

Это верно, так как $X$ – случайный вектор и

$$\mathbb{R} \times \cdots \times \overset{i}{B} \times \cdots \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

$\Leftarrow$ Рассмотрим $\mathcal{M} = \{B_1 \times \cdots \times B_n : \ B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Тогда $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и проверим условие леммы:

$$X^{-1}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \overbrace{X_1^{-1}(B_1)}^{\in \mathcal{F}} \cap \cdots \cap \overbrace{X_n^{-1}(B_n)}^{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$$

так как $\forall i = \overline{1, n} : \ X_i$ – случайная величина.

Значит по предыдущей лемме $\Rightarrow X$ – случайный вектор. □

# 8 Характеристики случайной величины и случайного вектора

**Определение 8.1.** Распределением случайной величины (вектора) $\xi$ называется вероятностная мера $P_\xi$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $((\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)))$, определённая по правилу:

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ (\mathbb{R}^n)$$

**Определение 8.2.** Функцией распределения случайной величины $\xi$ называется

$$F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x) = P_\xi((-\infty, x])$$

**Замечание.**

$$P(\xi_1 \leqslant x_1, \xi_2 \leqslant x_2) := P(\{\xi_1 \leqslant x_1\} \cap \{\xi_2 \leqslant x_2\})$$

**Определение 8.3.** Если $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ – случайный вектор, то его функцией распределения называется

$$F_\xi(x_1, \cdots, x_n) = P_\xi((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]) = P(\xi_1 \leqslant x_1, \cdots, \xi_n \leqslant x_n)$$

**Определение 8.4.** Случайная величина является

- Дискретной, если таково её распределение
- Абсолютно-непрерывной, если таково её распределение

  В этом случае $\xi$ имеет плотность $p_\xi(t) \geqslant 0$:

  $$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt$$

- Сингулярной, если таково её распределение

**Определение 8.5.** Случайная величина $\xi$ называется простой, если она принимает конечное число значений. В этом случае $\xi$ имеет вид:

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{I}_{A_k}$$

где $x_1, \cdots, x_n$ – различные числа, $A_1, \cdots, A_n$ – разбиение $\Omega$.

**Определение 8.6.** Пусть $\xi$ – случайная величина (вектор) на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Сигма-алгеброй, порождённой $\xi$, называется

$$\mathcal{F}_\xi = \{\{\xi \in B\} :\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}\ (\mathbb{R}^n)$$

Заметим, что $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}$

**Определение 8.7.** Случайная величина (вектор) $\eta$ является $\mathcal{F}_\xi$-измеримое, если $\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$

**Определение 8.8.** Если $\xi$ – это случайная величина, то положим

$$\xi^+ := \max(\xi, 0); \quad \xi^- := \max(-\xi, 0)$$

Тогда, $\xi = \xi^+ - \xi^-$

**Определение 8.9.** Функция $\varphi:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется борелевской, если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m):\ \varphi^{-1}(B) = \{x:\ \varphi(x) \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

**Лемма 8.1.** *$\eta$ является $\mathcal{F}_\xi$-измеримой $\Leftrightarrow \exists$ борелевская функция $\varphi$, такая что $\eta = \varphi(\xi)$.*

*Доказательство.* $\Leftrightarrow$ Пусть $\eta = \varphi(\xi)$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\{\eta \in B\} = \{\xi \in \overset{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}{\varphi^{-1}(B)}\} \in \mathcal{F}_\xi \Rightarrow \mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$$

□

**Теорема 8.1.** *О приближении простыми.*

1. *Пусть $\xi \geqslant 0$. Тогда $\exists$ последовательность $\mathcal{F}_\xi$-измеримых случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, такая что*
$$0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$$

2. *Если $\xi$ – произвольная случайная величина, то $\exists$ последовательность $\mathcal{F}_\xi$ измеримых простых случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, такая что*
$$\forall n \in \mathbb{N}:\ |\xi_n| \leqslant |\xi|,\ \lim_{n \to +\infty} \xi_n = \xi$$

*Доказательство.* 1. Предъявим $\xi_n$ в явном виде:
$$\xi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}_{\{\frac{k-1}{2^n} \leqslant \xi < \frac{k}{2^n}\}}$$
Легко видеть, что $0 \leqslant \xi_n \leqslant \xi_{n+1}$ и $\xi = \lim\limits_{n \to +\infty} \xi_n$. Кроме того, $\forall n:\ \xi_n$ – борелевская функция от $\xi \Rightarrow \xi_n$ – по (8.1) это $\mathcal{F}_\xi$-измеримая случайная величина.

2. Приближаем $\xi^+$ и $\xi^-$ по предыдущему пункту, затем берём разность

□

# 9 Независимости произвольного набора случайных величин

**Определение 9.1.** Случайные векторы $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называются независимыми в совокупности, если независимы в совокупности порождённые ими $\sigma$-алгебры.

**Следствие.** *Случайные векторы $\xi_1, \cdots, \xi_n, \xi_i \in \mathbb{R}^{k_i}, i = \overline{1,n}$ независимы в совокупности* $\Leftrightarrow$
$$\forall B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_i}):\ P(\xi_1 \in B_1, \cdots, \xi_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i \in B_i)$$

**Лемма 9.1.** *Критерий независимости в терминах функций распределения*

*Случайные величины $\xi_1, \cdots, \xi_n$ независимы в совокупности* $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}: \; P(\xi_1 \leqslant x_1, \cdots, \xi_n \leqslant x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i \leqslant x_i)$$

*То есть функция распределения вектора распадается в произведение функций распределения компонент.*

*Доказательство.* $\Rightarrow$ очевидно из следствия выше.

$\Leftarrow$ Проверим $\mathcal{M}_j = \{\{\xi_j \leqslant x\} : \; x \in \mathbb{R}\}$ – подходящая $\pi$-система. Очевидно, что $\mathcal{M}_j$ – это $\pi$-система и $\sigma(\mathcal{M}_j) \subset \mathcal{F}_{\xi_j}$.

Тогда $\forall A \in \mathcal{M}_j$ имеет вид

$$A = \{\xi_j \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Тогда введём

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \; \{\xi_j \in B\} \in \sigma(\mathcal{M}_j)\}$$

Тогда $\mathcal{D}$ – это тоже $\sigma$-алгебра:

1. $$\{\xi_j \in \mathbb{R}\} = \Omega \in \sigma(\mathcal{M}_j) \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{D}$$

2. $$\{\xi_j \in B_1 \cap B_2\} = \{\xi_j \in B_1\} \cap \{\xi_j \in B_2\} \in \sigma(\mathcal{M}_j) \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{D}$$

3. Аналогично
$$B \in \mathcal{D} \Rightarrow \overline{B} \in \mathcal{D}$$

4. Аналогично
$$B_i \in \mathcal{D}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{D}$$

По построению все полуинтервалы $(-\infty, x] \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}$. Значит, $\sigma(M_j) = \mathcal{F}_{\xi_j}$. Тогда, применяя (3.1), получим требуемое. □

**Замечание.** То же самое верно и для случайных векторов.

$\xi_1, \cdots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$

$$\forall \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n : \; P(\xi_1 \leqslant \vec{x}_1, \cdots, \xi_n \leqslant \vec{x}_n) = \prod_{k=1}^{n} P(\xi_1 \leqslant \vec{x}_1)$$

**Лемма 9.2.** *О независимости борелевских функций от независимых случайных величин.*

*Пусть $\xi_1, \cdots, \xi_n$ – независимые случайные векторы, $\xi_i \in \mathbb{R}^{k_i}, k_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, n}$. Пусть $f_i : \; \mathbb{R}^{k_i} \to \mathbb{R}^{m_i}, i = \overline{1, n}$ – борелевские функции. Положим $\eta_i = f_i(\xi_i)$. Тогда $\eta_1, \cdots, \eta_n$ – независимые в совокупности.*

*Доказательство.* $\eta_1, \cdots, \eta_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow \mathcal{F}_{\eta_1}, \cdots, \mathcal{F}_{\eta_n}$ независимы в совокупности.

Но $\mathcal{F}_{\eta_i} \subset \mathcal{F}_{\xi_i} \Rightarrow \mathcal{F}_{\eta_1}, \cdots, \mathcal{F}_{\eta_n}$ независимы как подсистемы в независимых $\sigma$-алгебрах. □

**Следствие.** $[\xi_1, \cdots, \xi_{n_1}], [\xi_{n_1+1}, \cdots, \xi_{n_1+n_2}], \cdots, [\xi_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}, \cdots, \xi_{n_1+\cdots+n_k}]$ *– независимые блоки случайных величин. Пусть* $f_j : \mathbb{R}^{n_j} \to \mathbb{R}, j = \overline{1,k}$ *– борелевские функции. Тогда* $f_1(\xi_1, \cdots, \xi_{n_1}), f_2(\xi_{n_1+1}, \cdots, \xi_{n_1+n_2}), \cdots, f_k(\xi_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}, \cdots, \xi_{n_1+\cdots+n_k})$ *– независимые в совокупности случайные величины.*

*Доказательство.* Пускай $\eta_1 := (\xi_1, \cdots, \xi_{n_1}), \cdots, \eta_k := (\xi_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}, \cdots, \xi_{n_1+\cdots+n_k})$. По предыдущей лемме $\eta_i, i = \overline{1,k}$ будут независимы в совокупности. □

# 10 Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями

**Теорема 10.1.** *О математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями.*

*Пусть* $\xi, \eta$ *– независимые случайные величины,* $E\xi, E\eta$ *– конечные. Тогда* $E\xi\eta$ *тоже конечно, причём* $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$.

*Доказательство.* Пусть сначала $\xi, \eta$ – простые случайные величины, то есть

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{I}\{\xi = x_i\};\ \eta = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{I}\{\eta = y_j\}$$

где $x_1, \cdots, x_n$ – значения $\xi$, а $y_1, \cdots, y_j$ – значения $\eta$. Тогда

$$\xi\eta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j \mathbb{I}\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$$

Берём $E$ от обеих частей:

$$E\xi\eta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(\xi = x_i, \eta = y_j) \stackrel{\perp\!\!\!\perp}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(\xi = x_i) P(\eta = y_j) =$$
$$\left(\sum_{i=1} x_i P(\xi = x_i)\right) \left(\sum_{j=1}^{m} y_j P(\eta = y_j)\right) = E\xi \cdot E\eta$$

Далее, пусть $\xi, \eta \geqslant 0$ – неотрицательные случайные величины. Тогда рассмотрим последовательности простых случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \{\eta_m, m \in \mathbb{N}\}$, такие что

$$0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi; \quad 0 \leqslant \eta_m \uparrow \eta$$

и $\forall n \in \mathbb{N}:\ \xi_n$ является $\mathcal{F}_\xi$-измеримой, $\eta_n$ – $\mathcal{F}_\eta$-измеримой.

Следовательно, $0 \leqslant \xi_n\eta_n \uparrow \xi\eta$ и $\forall n \in \mathbb{N}:\ \xi_n \perp\!\!\!\perp \eta_n$. По определению мат. ожидания:

$$E\xi\eta = \lim_{n\to+\infty} E\xi_n\eta_n \stackrel{\perp\!\!\!\perp}{=} \lim_{n\to+\infty} E\xi_n \cdot \lim_{n\to+\infty} E\eta_n = E\xi \cdot E\eta$$

Теперь пусть $\xi, \eta$ – произвольные случайные величины. Тогда $\xi^\pm \perp\!\!\!\perp \eta^\pm$, как функции от независимых случайных величин. Причём

$$(\xi\eta)^+ = \xi^+\eta^+ + \xi^-\eta^-; \quad (\xi\eta)^- = \xi^+\eta^- + \xi^-\eta^+$$

По определению

$$E\xi\eta = E(\xi\eta)^+ - E(\xi\eta)^- = E\xi^+\eta^+ + E\xi^-\eta^- - E\xi^+\eta^- - E\xi^-\eta^+ \overset{\perp\!\!\!\perp}{=}$$
$$E\xi^+ \cdot E\eta^+ + E\xi^- \cdot E\eta^- - E\xi^+ \cdot E\eta^- - E\xi^- \cdot E\eta^+ = (E\xi^+ - E\xi^-)(E\eta^+ - E\eta^-) =$$
$$E\xi \cdot E\eta$$

□

# 11 Теорема о замене переменных в интеграле Лебега...

**Теорема 11.1.** *О замене переменных в интеграле Лебега.*

*Пусть $\xi$ – случайный вектор из $\mathbb{R}^m$ на $(\Omega, \mathcal{F}, P), P_\xi$ – его распределение. Тогда $\forall g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – борелевской функции, выполнено*

$$Eg(\xi) = \int_\Omega g(\xi)dP = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)P_\xi(dx)$$

*Доказательство.* Пусть сначала $g(x) = \mathbb{I}_A(x)$, где $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Тогда

$$Eg(\xi) = E\mathbb{I}\{\xi \in A\} = P(\xi \in A) = P_\xi(A) = \int_A P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{I}_A(x)P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)P_\xi(dx)$$

В формуле из утверждения теоремы обе части линейны по $g$. Равенство верно для индикаторов $\Rightarrow$ верно для простых функций.

Если $g \geqslant 0$, то рассмотрим последовательность простых функций $0 \leqslant g_n \uparrow g$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x)P_\xi(dx) \overset{n\to+\infty}{\longleftarrow} \int_{\mathbb{R}^m} g_n(x)P_\xi(dx) = Eg_n(\xi) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Eg(\xi)$$

для неотрицательных доказали.

Если $g$ – произвольная функция, то раскладываем $g = g^+ - g^-$ и пользуемся линейностью.

Причём все математические ожидания будут конечны, бесконечны и неопределены одновременно. □

**Следствие.** 1. *Для вычисления $Eg(\xi)$ достаточно знать распределение $P_\xi$.*

2. *Если распределение $\xi, \eta$ совпадают, то $\forall$ борелевской функции $g(x)$ выполнено*

$$Eg(\xi) = Eg(\eta)$$

3. *Если $\xi$ – случайная величина, то*

$$E\xi = \int_{\mathbb{R}} xP_\xi(dx)$$

**Замечание.**

$$dF(x) := P(dx)$$

где $F$ – функция распределения вероятностной меры $P$.

**Определение 11.1.** Пусть $P$ – вероятностная мера на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, $\mu$ – $\sigma$-конечная мера на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Мера $P$ имеет плотность $p(t) \geqslant 0$ по мере $\mu$, если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : \ P(B) = \int_B p(t)\mu(dt)$$

**Теорема 11.2.** *О плотности.*

*Пусть случайный вектор $\xi \in \mathbb{R}^m$ имеет распределение $P_\xi$, и $P_\xi$ имеет плотность $p(t)$ по $\sigma$-конечной мере на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Тогда $\forall$ борелевской функции $g(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ выполнено*

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)p(x)\mu(dx)$$

*Доказательство.* Пусть сначала $g(x) = \mathbb{I}_A(x)$, где $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Тогда

$$Eg(\xi) = P(\xi \in A) = P_\xi(A) = \int_A p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{I}_A(x)p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)p(x)\mu(dx)$$

Обе части доказываемого равенства линейны по $g \Rightarrow$ формула верна для простых функций.

Если $g \geqslant 0$, то рассмотрим последовательность простых функций $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$, такую что $0 \leqslant g_n(x) \uparrow g(x)$. Тогда по определению интеграла Лебега:

$$Eg(\xi) = \lim_{n\to+\infty} Eg_n(\xi) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_n(x)p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)p(x)\mu(dx)$$

(по теореме о монотонной сходимости)

Для произвольной $g$ раскладываем $g(x) = g^+ - g^-$ и пользуемся линейностью. □

**Следствие.** *Пусть $\xi$ – дискретная случайная величина, сосредоточенная на $X$. Тогда*

$$Eg(\xi) = \sum_{x\in X} g(x)P(\xi = x)$$

*Доказательство.* Мы знаем, что $p(x) = P_\xi(\{x\}) = P(\xi = x)$. Тогда

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)\mu(dx) = \sum_{x\in X} g(x)P(\xi = x)$$

□

**Следствие.** *Пусть $\xi$ – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью $p(x)$. Тогда*

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)dx$$

**Следствие.** *Пусть $\xi$ – случайный вектор из $\mathbb{R}^m$ с плотностью $p(x)$. Тогда*

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} g(\vec{x})p(\vec{x})d\vec{x}$$