Содержание

1 Базовые определения

Определение 1.1. Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} := (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$

Определение 1.2. Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется σ-алгеброй, если

1. $\mathcal{F}$ – алгебра
2. $\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Определение 1.3. P называется вероятностной мерой на $(\Omega, \mathcal{F})$, если $P : \mathcal{F} \to [0,1]$, удовлетворяющая свойствам:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Если $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$, то
$$P\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Определение 1.4. Вероятностное пространство – это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где

- Ω – множество элементарных исходов
- $\mathcal{F}$ – σ-алгебра подмножеств Ω, элементы $\mathcal{F}$ называются событиями
- P – вероятностная мера на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$

Определение 1.5. Система $\mathcal{M}$ подмножеств в Ω называется π-системой, если из того, что $A, B \in \mathcal{M}$ следует, что $A \cap B \in \mathcal{M}$

Определение 1.6. Система $\mathcal{L}$ подмножеств в Ω называется λ-системой, если

1. $\Omega \in \mathcal{L}$
2. $(A, B \in \mathcal{L};\ A \subset B) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}$
3. $(A_n \uparrow A;\ \forall n\ A_n \in \mathcal{L}) \Rightarrow A \in \mathcal{L}$

Теорема 1.1. *Первая теорема о π-λ-системах*

Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω является σ-алгеброй $\Leftrightarrow$ она является π-системой и λ-системой.

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно.

$\Leftarrow$ Проверим сначала, что $\mathcal{F}$ – алгебра. Свойства $1), 2)$ уже есть. По свойству 2) λ-системы $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$, если $A \in \mathcal{F}$. Значит $\mathcal{F}$ – алгебра.

Пусть $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}, \forall n\ A_n \in \mathcal{F}, \forall i \neq j\ A_i \cap A_j = \varnothing$. Рассмотрим $B_n = \sqcup_{m=1}^{n} A_m \in \mathcal{F}$. Тогда $B_n \subset B_{n+1}$ и $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \sqcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow$ по 3) свойству λ-системы: $B_n \uparrow \sqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. $\square$

Лемма 1.1. *Пусть $\mathcal{M}$ – система подмножеств Ω. Тогда существует минимальная (по включению) σ-алгебра (алгебра, π-система, λ-система), обозначаемая $\sigma(\mathcal{M})$ $(\lambda(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M}))$, содержащая $\mathcal{M}$.*

Пример. 1. Если $\Omega = \mathbb{R}$, то борелевской σ-алгеброй на $\mathbb{R}$ называется наименьшая σ-алгебра, содержащая все интервалы

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma((a;\ b), a < b)$$

2. Если $\Omega = \mathbb{R}^n, n > 1$.

   Борелевской σ-алгеброй в $\mathbb{R}^n$ называется минимальная σ-алгебра, содержащая множества вида $B_1 \times \cdots \times B_n, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то есть

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(B_1 \times \cdots \times B_n :\ B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

3. Если $\Omega = \mathbb{R}^\infty$, то есть Ω содержит все счётные последовательности вещественных чисел.

   Для $n \in \mathbb{N}$ и $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ введём циллиндр:

$$F_n(B_n) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^\infty :\ (x_1, \cdots, x_n) \in B_n\}$$

   Тогда минимальная σ-алгеьра, содержащая все циллиндры называется борелевской в $\mathbb{R}^\infty$, то есть

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) = \sigma(F_n(B_n) :\ n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

2 Вторая теорема о π- и λ-системах. Следствия из неё.

Теорема 2.1. *Вторая теорема о π-λ-системах.*
Если $\mathcal{M}$ – это π-система подмножеств в Ω, то $\sigma(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M})$

Доказательство. Заметим, что $\sigma(\mathcal{M})$ – λ-система, содержащая $\mathcal{M} \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) \subset \sigma(\mathcal{M})$.

Проверим, что $\lambda(\mathcal{M})$ – это σ-алгебра. Раз $\lambda(\mathcal{M})$ – это λ-система, то по (1.1) достаточно проверить, что $\lambda(\mathcal{M})$ – это π-система.

Рассмотрим $\mathcal{M}_1 = \{B \in \lambda(\mathcal{M}) :\ \forall A \in \mathcal{M}, A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$. Заметим, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$. Проверим, что $\mathcal{M}_1$ – это λ-система:

1. $\Omega \in \mathcal{M}_1$ – очевидно

2. Пусть $B, C \in \mathcal{M}_1, C \subset B$, пусть $A \in \mathcal{M}$. Заметим, что $B \setminus C \in \lambda(\mathcal{M})$ и

$$(B \setminus C) \cap A = \overset{\in\lambda(\mathcal{M})}{(B \cap A)} \setminus \overset{\in\lambda(\mathcal{M})}{(C \cap A)}$$

   Значит по второму свойству λ-систем $(B \setminus C) \cap A \in \lambda(\mathcal{M})$

3. Пусть $B_n \uparrow B, B_n \in \mathcal{M}_1, A \in \mathcal{M} \Rightarrow$

$$\overset{\in\lambda(\mathcal{M})}{B_n \cap A} \uparrow B \cap A$$

   Тогда по третьем свойству λ-систем $B \cap A \in \lambda(\mathcal{M})$. Но $B_n \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow$ по третьему свойству λ-системы получаем, что $B \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow B \in \mathcal{M}_1$.

По условию $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \Rightarrow$ в силу минимальности $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_1$. По построению $\mathcal{M}_1 \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_1$, то есть $\forall B \in \lambda(\mathcal{M})\, \forall A \in \mathcal{M} :\ A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})$.

Далее рассмотрим $\mathcal{M}_2 = \{B \in \lambda(\mathcal{M}) :\ \forall A \in \lambda(\mathcal{M})\ A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$. В силу доказанного $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_2$. Совершенно аналогично с $\mathcal{M}_1$ проверяем, что $\mathcal{M}_2$ – это λ-система. Тогда $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_2$. По построению $\mathcal{M}_2 \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_2 \Rightarrow \lambda(\mathcal{M})$ – это π-система. □

Следствие. *Пусть $\mathcal{M}$ – это π-система на Ω, и $\mathcal{L}$ – это λ-система на Ω и $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$. Тогда $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$*

3 Независимость событий и систем событий

Определение 3.1. События A, B независимые, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Определение 3.2. События $A_1, \cdots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если

$$\forall k \leqslant n\, \forall 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n :\ P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_k})$$

Определение 3.3. Пусть $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n$ – системы событий на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Они называются независимыми в совокупности, если

$$\forall A_1 \in \mathcal{M}_1, \cdots, A_n \in \mathcal{M}_n :\ A_1, \cdots, A_n - \text{ независимы в совокупности}$$

Лемма 3.1. *Критерий независимости σ-алгебр.*

Пусть $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n$ – это π-системы событий на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n$ – независимы в совокупности $\Leftrightarrow \sigma(\mathcal{M}_1), \cdots, \sigma(\mathcal{M}_n)$ – независимы в совокупности.

Доказательство. $\Leftarrow$ очевидно.

Докажем только для $n = 2$, для $n > 2$ всё аналогично.

Рассмотрим $\mathcal{L}_1 = \{A \in \sigma(\mathcal{M}_2) :\ A \perp\!\!\!\perp \mathcal{M}_1\}$. Проверим, что $\mathcal{L}_1$ – это λ-система:

1. $\forall B \in \mathcal{M}_1 :\ \Omega \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow \Omega \in \mathcal{L}_1$
2. Пусть $C \in \mathcal{M}_1$, тогда
$$P((B \setminus A) \cap C) = P((B \cap C) \setminus (A \cap C)) = P(B \cap C) - P(A \cap C) = \\ P(C)(P(B) - P(A)) = P(B \setminus A)P(C) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}_1$$
3. Пусть $A_n \uparrow A, A_n \in \mathcal{L}_1$. По определению σ-алгебры замечаем, что $A \in \sigma(\mathcal{M}_2)$. Пусть $C \in \mathcal{M}_1$. Рассмотрим
$$P(A \cap C) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n \cap C) = P(C) \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P(C)P(A) \Rightarrow A \in \mathcal{L}_1$$

Раз $\mathcal{L}_1$ – это λ-система и $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{L}_1$, по условию, то по (2.1) получим, что $\sigma(\mathcal{M}_2) \subset \mathcal{L}_1 \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_2) \perp\!\!\!\perp \mathcal{M}_1$.

Рассмотрим $\mathcal{L}_2 = \{A \in \sigma(\mathcal{M}_1) :\ A \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{M}_2)\}$. Точно так же доказывается, что $\mathcal{L}_2$ – это λ-система, $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{L}_2$ по доказанному $\Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{L}_2 \Rightarrow \sigma(M_1) \perp\!\!\!\perp \sigma(M_2)$ □

Определение 3.4. Пусть $\{M_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ – набор систем событий. Он называется независимым в совокупности, если независим в совокупности $\forall$ конечный поднабор.

4 Функция распределения вероятностной меры

Определение 4.1. Функцией распределения вероятностной меры P на $\mathbb{R}$ называется

$$F(x) = P((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}$$

Лемма 4.1. *Свойства функции распределения.*

1. $F(x)$ *не убывает*
2. $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$
3. $F(x)$ *непрерывна справа*

Доказательство. 1. Пусть $y > x$. Тогда

$$(-\infty, x] \subset (-\infty, y] \Rightarrow F(x) = P((-\infty, x]) \leqslant P((-\infty, y]) = F(y)$$

2. Если $x_n \uparrow +\infty$, то $(-\infty, x_n] \uparrow \mathbb{R}$. Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \overset{n\to+\infty}{\to} P(\mathbb{R}) = 1$$

Если $x_n \downarrow -\infty$, то $(-\infty, x_n] \downarrow \varnothing$. Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \overset{n\to+\infty}{\to} P(\varnothing) = 0$$

3. Если $x_n \downarrow x$, то $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$. Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \overset{n\to+\infty}{\to} P((-\infty, x]) = F(x)$$

□

Определение 4.2. Эквивалентное определение функции распределения.

Функция, удовлетворяющая свойствам $1-3$ из предыдущей леммы, называется функцией распределения на P.

Теорема 4.1. *О продолжении меры (б/д)*

Пусть $\mathcal{A}$ *– алгебра подмножеств* Ω. *Пусть* $P_0 : \mathcal{A} \to [0, 1]$ *с условием,* $P_0(\Omega) = 1$ *и* P_0 *счётно-аддитивна на* $\mathcal{A}$. *Тогда* $\exists!$ *продолжение меры* P_0 *на* $\sigma(A)$

Теорема 4.2. *О взаимной однозначности функции распределения и вероятностной меры.*

Пусть $F(x), x \in \mathbb{R}$ *– функция распределения на* $\mathbb{R}$. *Тогда* $\exists!$ *вероятностная мера* P *на* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *для которой* F *является функцией распределения, то есть*

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ F(x) = P((-\infty, x])$$

Доказательство. Рассмотрим на $\mathbb{R}$ алгебру $\mathcal{A}$, состоящую из конечных объединений непересекающихся интервалов:

$$\forall A \in \mathcal{A}:\ A = \bigsqcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k],\ -\infty \leqslant a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_n \leqslant +\infty$$

Зададим на $\mathcal{A}$ меру P_0:

$$\forall A \in \mathcal{A}:\ P_0(A) = \sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a_k))$$

где $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

По построению $P_0(\mathbb{R}) = 1$ и P_0 будет конечно аддитивна на $\mathcal{A}$. Если мы проверим, что P_0 счётно аддитивна на $\mathcal{A}$, то по (4.1) $\exists!$ продолжение P меры P_0 на $\sigma(A) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Это и есть искомая мера P, причём

$$P((-\infty, x]) = P_0((-\infty, x]) = F(x)$$

По теореме о непрерывности вероятностной меры, достаточно проверить, что P_0 непрерывна в нуле.

Пусть $A_n \downarrow \varnothing, \forall n:\ A_n \in \mathcal{A}$. Хотим проверить, что $P(A_n) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$. В силу $2-3$ свойств функции распределения:

$$\forall A \in \mathcal{A}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists B \in A:\ \mathrm{cl}\ B \subset A, P_0(A \setminus B) \leqslant \varepsilon$$

Если $(a, b]$ является частью A, то для некоторого $a' > a$ будет выполнено

$$P_0((a, a']) \leqslant \varepsilon$$

Зафиксировав $\forall \varepsilon > 0$, выберем $B_n \forall n \in \mathbb{N}: B_n \in A$, такой что $\mathrm{cl}\ B_n \subset A_n$ и $P_0(A_n \backslash B_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Пусть сначала все A_n лежат внутри $[-N, N]$. Заметим, что раз $\cap_n A_n = \varnothing$, то $\cap_n \mathrm{cl}\ B_n = \varnothing$. В силу компактости $\exists n_0$:

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} \mathrm{cl}\ B_n = \varnothing \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{n_0} B_n = \varnothing$$

Рассмотрим

$$P_0(A_{n_0}) = P_0\left(A_{n_0} \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0} B_n\right) \leqslant P_0\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} (A_{n_0} \setminus B_n)\right) \leqslant P_0\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} (A_n \setminus B_n)\right) \leqslant$$
$$\sum_{n=1}^{n_0} P_0(A_n \setminus B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant \varepsilon \Rightarrow P(A_n) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Если A бесконечно, то возьмём N, такой что $P_0(\mathbb{R} \setminus (-N, N]) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим $A'_n = A_n \cap (-N, N]$. Тогда по доказанному выше $P'_0(A'_n) \overset{n\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow$ с некоторого n_0:

$$P_0(A_n) \leqslant P(A'_n) + P_0(\mathbb{R} \setminus (-N, N]) \leqslant \varepsilon$$

$\square$

5 Классификация вероятностных мер

Определение 5.1. Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Она называется дискретной, если $\exists$ не более чем счётное множество $X \subset \mathbb{R}$, такое, что

$$P(\mathbb{R} \setminus X) = 0, \forall x \in X: \ P(\{x\}) > 0$$

Говорят, что P сосредоточена на X.

Пусть $X = (x_k, k \in \mathbb{N})$, обозначим $p_k = P(\{x_k\})$. Набор $(p_1, p_2, \cdots)$ образует распределение вероятностей на X.

Как выглядит функция распределения?

$$F(x) = \sum_{x_k \leqslant x} P(\{x_k\})$$

Она меняется скачками в точках x_k, в них значение увеличивается на

$$p_k = P(\{x_k\}) = \Delta F(x_k) = F(x_k) - F(x_k - 0)$$

Пример. Дискретные распределения:

1. Константы.
$$X = \{x\}; \ P(\{x\}) = 1$$

2. Распределение Бернулли, $\mathrm{Bern}(p)$, $p \in [0, 1]$:
$$X = \{0, 1\}; \ p_0 = 1 - p, p_1 = p$$

3. Биномиальное распределение, $\mathrm{Bin}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$:
$$X = \{0, \cdots, n\}; \ p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}; \ k = \overline{0, n}$$

4. Пуассоновское распределение, $\mathrm{Pois}(\lambda)$, $\lambda > 0$
$$X = \mathbb{Z}_+; \ p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k \in \mathbb{Z}_+$$

Определение 5.2. Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, а F – её функция распределения. Она называется абсолютно непрерывной, если $\exists p(t) \geqslant 0$, такая что

$$\int_{\mathbb{R}} p(t) dt = 1; \ \forall x \in \mathbb{R}: \ F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t) dt$$

В этом случае $p(t)$ называется плотностью функции распределения F и меры P.

Замечание. Интегралы понимаются, как интегралы Лебега.

Пример. 1. Равномерное распределение, $\mathrm{U}(a, b)$, $a < b$

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{I}_{\{x \in [a,b]\}}(x); \ F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b] \\ 1, x > b \end{cases}$$

2. Нормальное (гауссовское) распределение, $\mathcal{N}(a, \sigma^2), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}};\ \Phi_{a,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

3. Экспоненциальное (показательное) распределение, $\mathrm{Exp}(\alpha)$, $\alpha > 0$.

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} \cdot \mathbb{I}\{x > 0\};\ F(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, x > 0 \end{cases}$$

4. Гамма-распределение, $\Gamma(\alpha, \lambda), \alpha, \lambda > 0$

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{\{x>0\}}(x);\ \Gamma(\lambda) = \int_{0}^{+\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx, \lambda > 0$$

5. Распределение Коши, $K(\sigma), \sigma > 0$

$$p(x) = \frac{\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)};\ F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sigma}$$

Определение 5.3. Пусть F – функция распределения на $\mathbb{R}$.

Точка x является точкой роста F, если

$$\forall \varepsilon > 0:\ F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$$

Определение 5.4. Функция распределения F (и соответствующая ей мера P) называется сингулярной, если F непрерывна и множество её точек роста имеет лебегову норму нуль.

Пример. Канторова лестница.

Мера P сосредоточена на канторовом множестве, оно не счётное, но каждый элемент имеет ненулевую меру.

Теорема 5.1. *Лебега о разложении. (б/д)*

Пусть F – функция распределения на $\mathbb{R}$. Тогда $\exists$ разложение вида

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x), \alpha_i \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

причём F_1 – дискретная функция распределения, F_2 – абсолютно непрерывная, F_3 – сингулярная.

6 Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

Определение 6.1. Функцией распределения вероятностной меры P называется $F(x_1, \cdots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$, где

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n])$$

Замечание. 1. $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$

2. $\vec{x} \geqslant \vec{y}$, если

$$\forall i = \overline{1, n}:\ x_i \geqslant y_i$$

3. $(-\infty, \vec{x}] = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$

4. $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$, если
$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \vec{x}_{(n)} \geqslant \vec{x}_{(n+1)} \geqslant \vec{x}$$
причём $\lim_n \vec{x}_{(n)} = \vec{x}$

Лемма 6.1. *Свойства многомерной функции распределения.*

Пусть $F(\vec{x})$ – функция распределения вероятностной меры P на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Тогда

1. *Если $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$, то*
$$\lim_{n\to+\infty} F(\vec{x}_{(n)}) = F(\vec{x})$$
то есть непрерывна справа по любой координате

2. *Если $x_i \to +\infty, \forall i = \overline{1,n}$, то*
$$F(\vec{x}) \to 1$$
Если $x_i \to -\infty, \exists i = \overline{1,n}$, то
$$F(\vec{x}) \to 0$$

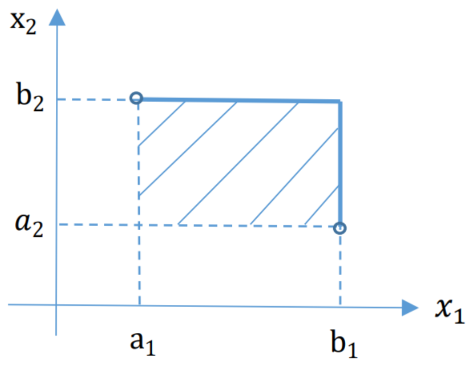
3. *Для $\forall i = \overline{1,n}$ и $a_i < b_i$ введём оператор $\triangle^i_{a_i,b_i}$, который действует следующим образом:*
$$\triangle^i_{a_i,b_i} F(\vec{x}) = F(x_1, \cdots, b_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) - F(x_1, \cdots, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$
Тогда
$$\forall a_1 < b_1, \cdots, a_n < b_n: \ \triangle^1_{a_1,b_1} \circ \cdots \circ \triangle^n_{a_n,b_n} F(\vec{x}) \geqslant 0$$

Доказательство. 1. Если $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$, то $(-\infty, \vec{x}_{(n)}] \downarrow (-\infty, \vec{x}]$. Тогда по непрерывности меры
$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \overset{n\to+\infty}{\to} P((-\infty, \vec{x}]) = F(\vec{x})$$

2. Если $\vec{x} \uparrow (+\infty, \cdots, +\infty)$, то $(-\infty, \vec{x}] \uparrow \mathbb{R}^n$. Тогда по непрерывности меры
$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \overset{n\to+\infty}{\to} P(\mathbb{R}^n) = 1$$
Если $x_i \downarrow -\infty$, то $(-\infty, \vec{x}] \downarrow \varnothing$. Тогда в силу непрерывности меры
$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \overset{n\to+\infty}{\to} P(\varnothing) = 0$$

3. Проверим, например для $n = 2$, что
$$\triangle^1_{a_1,b_1} \circ \cdots \circ \triangle^n_{a_n,b_n} F(\vec{x}) = P((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n])$$
Действительно:
$$\triangle^1_{a_1,b_1} \circ \triangle^2_{a_2,b_2} F(x_1, x_2) = \triangle^1_{a_1,b_1}(F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2)) =$$
$$F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) \geqslant 0$$

В общем случае достаточно заметить, что
$$\triangle^i_{a_i,b_i} P(B_1 \times \cdots \times B_{i-1} \times (-\infty, x_i] \times \cdots \times B_n) = P(B_1 \times \cdots \times (a_i, b_i] \times \cdots \times B_n)$$
$\square$



Теорема 6.1. *О построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ по функции распределения (б/д).*

Пусть $F(\vec{x})$ удовлетворяет всем свойствам из предыдущей леммы. Тогда $\exists!$ вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, для которой F является функцией распределения.

Определение 6.2. Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ рассмотрим

$$P_n(B) = P(F_n(B))$$

где $F_n(B) = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots) : (x_1 \ \cdots, x_n) \in B\}$ – циллиндр с основанием B.

Тогда P_n будет вероятностной мерой в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, $\forall n : \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

$$P_n(B) = P_{n+1}(B \times \mathbb{R})$$

Это свойство согласованности.

Теорема 6.2. *Колмогорова о мерах в $\mathbb{R}^\infty$ (б/д).*

Пусть $P_1, P_2, \cdots$ – последовательность вероятностных мер в $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \cdots$, обладающая свойством согласованности. Тогда $\exists!$ вероятностная мера P на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$, такая что

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \ P_n(B) = P(F_n(B))$$

7 Случайные элементы, случайные величины и векторы на вероятностном пространстве

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, а (E, ξ) – измеримое пространство.

Определение 7.1. Отображение $X : \Omega \to E$ называтся случайным элементом, если оно измеримо, то есть

$$\forall B \in \xi : \ X^{-1}(B) = \{\omega : \ X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Определение 7.2. Если $(E, \xi) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, то случайный элемент называется случайной величиной.

Определение 7.3. Если $(E, \xi) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, то случайный элемент называется случайным вектором.

Лемма 7.1. *Критерий измеримости отображения.*

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$, так чтобы $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$. Тогда $X : \Omega \to E$ является случайным элементом $\Leftrightarrow$

$$\forall B \in \mathcal{M} : \; X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно.

$\Leftarrow$ Рассмотрим

$$\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{E} : \; X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$$

Легко видеть, что $\mathcal{D}$ – это σ-алгебра, так как $\mathcal{E}$ – σ-алгебра, а прообраз сохраняет теоретико-множественные операции.

По условию $\mathcal{M} \subset \mathcal{D} \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ в силу минимальности. □

Следствие. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ – *случайная величина*
2. $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$\{\omega : \; X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$\{\omega : \; X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{F}$$

Доказательство. Применяем лемму для $\mathcal{M} = \{(-\infty, x), x \in \mathbb{R}\}$ или $\mathcal{M} = \{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$. В обоих случаях $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ □

Следствие. $X := (X_1, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – *случайный вектор* $\Leftrightarrow$

$$\forall i = \overline{1, n} : \; X_i - - \text{ случайная величина}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда

$$X_i^{-1}(B) = X^{-1}(\mathbb{R} \times \cdots \times \overset{i}{B} \times \cdots \times \mathbb{R}) \in \mathcal{F}$$

Это верно, так как X – случайный вектор и

$$\mathbb{R} \times \cdots \times \overset{i}{B} \times \cdots \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

$\Leftarrow$ Рассмотрим $\mathcal{M} = \{B_1 \times \cdots \times B_n : \; B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Тогда $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и проверим условие леммы:

$$X^{-1}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \overset{\in \mathcal{F}}{X_1^{-1}(B_1)} \cap \cdots \cap \overset{\in \mathcal{F}}{X_n^{-1}(B_n)} \in \mathcal{F}$$

так как $\forall i = \overline{1, n} : \; X_i$ – случайная величина.

Значит по предыдущей лемме $\Rightarrow X$ – случайный вектор. □