Содержание

1 Базовые определения

Определение 1.1. Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} := (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$

Определение 1.2. Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется σ-алгеброй, если

1. $\mathcal{F}$ – алгебра
2. $\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Определение 1.3. P называется вероятностной мерой на $(\Omega, \mathcal{F})$, если $P: \mathcal{F} \to [0,1]$, удовлетворяющая свойствам:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Если $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$, то
$$P\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Определение 1.4. Вероятностное пространство – это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где

- Ω – множество элементарных исходов
- $\mathcal{F}$ – σ-алгебра подмножеств Ω, элементы $\mathcal{F}$ называются событиями
- P – вероятностная мера на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$

Определение 1.5. Система $\mathcal{M}$ подмножеств в Ω называется π-системой, если из того, что $A, B \in \mathcal{M}$ следует, что $A \cap B \in \mathcal{M}$

Определение 1.6. Система $\mathcal{L}$ подмножеств в Ω называется λ-системой, если

1. $\Omega \in \mathcal{L}$
2. $(A, B \in \mathcal{L};\ A \subset B) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}$
3. $(A_n \uparrow A;\ \forall n\ A_n \in \mathcal{L}) \Rightarrow A \in \mathcal{L}$

Теорема 1.1. *Первая теорема о π-λ-системах*

Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω является σ-алгеброй $\Leftrightarrow$ она является π-системой и λ-системой.

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно.

$\Leftarrow$ Проверим сначала, что $\mathcal{F}$ – алгебра. Свойства $1), 2)$ уже есть. По свойству 2) λ-системы $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$, если $A \in \mathcal{F}$. Значит $\mathcal{F}$ – алгебра.

Пусть $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}, \forall n\ A_n \in \mathcal{F}, \forall i \neq j\ A_i \cap A_j = \varnothing$. Рассмотрим $B_n = \sqcup_{m=1}^{n} A_m \in \mathcal{F}$. Тогда $B_n \subset B_{n+1}$ и $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \sqcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow$ по 3) свойству λ-системы: $B_n \uparrow \sqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. $\square$

Лемма 1.1. *Пусть $\mathcal{M}$ – система подмножеств Ω. Тогда существует минимальная (по включению) σ-алгебра (алгебра, π-система, λ-система), обозначаемая $\sigma(\mathcal{M})$ $(\lambda(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M}))$, содержащая $\mathcal{M}$.*

Пример.

1. Если $\Omega = \mathbb{R}$, то борелевской σ-алгеброй на $\mathbb{R}$ называется наименьшая σ-алгебра, содержащая все интервалы
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma((a;\ b), a < b)$$

2. Если $\Omega = \mathbb{R}^n, n > 1$.

   Борелевской σ-алгеброй в $\mathbb{R}^n$ называется минимальная σ-алгебра, содержащая множества вида $B_1 \times \cdots \times B_n, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то есть
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(B_1 \times \cdots \times B_n :\ B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

3. Если $\Omega = \mathbb{R}^\infty$, то есть Ω содержит все счётные последовательности вещественных чисел.

   Для $n \in \mathbb{N}$ и $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ введём циллиндр:
$$F_n(B_n) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^\infty :\ (x_1, \cdots, x_n) \in B_n\}$$

   Тогда минимальная σ-алгеьра, содержащая все циллиндры называется борелевской в $\mathbb{R}^\infty$, то есть
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) = \sigma(F_n(B_n) :\ n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

2 Вторая теорема о π- и λ-системах. Следствия из неё.

Теорема 2.1. *Вторая теорема о π-λ-системах.*
Если $\mathcal{M}$ – это π-система подмножеств в Ω, то $\sigma(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M})$

Доказательство. Заметим, что $\sigma(\mathcal{M})$ – λ-система, содержащая $\mathcal{M} \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) \subset \sigma(\mathcal{M})$.

Проверим, что $\lambda(\mathcal{M})$ – это σ-алгебра. Раз $\lambda(\mathcal{M})$ – это λ-система, то по (1.1) достаточно проверить, что $\lambda(\mathcal{M})$ – это π-система.

Рассмотрим $\mathcal{M}_1 = \{B \in \lambda(\mathcal{M}) :\ \forall A \in \mathcal{M}, A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$. Заметим, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$. Проверим, что $\mathcal{M}_1$ – это λ-система:

1. $\Omega \in \mathcal{M}_1$ – очевидно

2. Пусть $B, C \in \mathcal{M}_1, C \subset B$, пусть $A \in \mathcal{M}$. Заметим, что $B \setminus C \in \lambda(\mathcal{M})$ и
$$(B \setminus C) \cap A = \overset{\in\lambda(\mathcal{M})}{(B \cap A)} \setminus \overset{\in\lambda(\mathcal{M})}{(C \cap A)}$$

   Значит по второму свойству λ-систем $(B \setminus C) \cap A \in \lambda(\mathcal{M})$

3. Пусть $B_n \uparrow B, B_n \in \mathcal{M}_1, A \in \mathcal{M} \Rightarrow$
$$\overset{\in\lambda(\mathcal{M})}{B_n \cap A} \uparrow B \cap A$$

   Тогда по третьем свойству λ-систем $B \cap A \in \lambda(\mathcal{M})$. Но $B_n \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow$ по третьему свойству λ-системы получаем, что $B \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow B \in \mathcal{M}_1$.

По условию $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \Rightarrow$ в силу минимальности $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_1$. По построению $\mathcal{M}_1 \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_1$, то есть $\forall B \in \lambda(\mathcal{M})\, \forall A \in \mathcal{M} :\ A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})$.

Далее рассмотрим $\mathcal{M}_2 = \{B \in \lambda(\mathcal{M}) :\ \forall A \in \lambda(\mathcal{M})\ A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$. В силу доказанного $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_2$. Совершенно аналогично с $\mathcal{M}_1$ проверяем, что $\mathcal{M}_2$ – это λ-система. Тогда $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_2$. По построению $\mathcal{M}_2 \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_2 \Rightarrow \lambda(\mathcal{M})$ – это π-система. □

Следствие. *Пусть $\mathcal{M}$ – это π-система на Ω, и $\mathcal{L}$ – это λ-система на Ω и $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$. Тогда $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$*

3 Независимость событий и систем событий

Определение 3.1. События A, B независимые, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Определение 3.2. События $A_1, \cdots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если

$$\forall k \leqslant n\, \forall 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n :\ P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_k})$$

Определение 3.3. Пусть $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n$ – системы событий на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Они называются независимыми в совокупности, если

$$\forall A_1 \in \mathcal{M}_1, \cdots, A_n \in \mathcal{M}_n :\ A_1, \cdots, A_n - \text{ независимы в совокупности}$$

Лемма 3.1. *Критерий независимости σ-алгебр.*

Пусть $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n$ – это π-системы событий на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n$ – независимы в совокупности $\Leftrightarrow \sigma(\mathcal{M}_1), \cdots, \sigma(\mathcal{M}_n)$ – независимы в совокупности.

Доказательство. $\Leftarrow$ очевидно.

Докажем только для $n = 2$, для $n > 2$ всё аналогично.

Рассмотрим $\mathcal{L}_1 = \{A \in \sigma(\mathcal{M}_2) :\ A \perp\!\!\!\perp \mathcal{M}_1\}$. Проверим, что $\mathcal{L}_1$ – это λ-система:

1. $\forall B \in \mathcal{M}_1 :\ \Omega \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow \Omega \in \mathcal{L}_1$

2. Пусть $C \in \mathcal{M}_1$, тогда

$$\begin{aligned} P((B \setminus A) \cap C) = P((B \cap C) \setminus (A \cap C)) = P(B \cap C) - P(A \cap C) = \\ P(C)(P(B) - P(A)) = P(B \setminus A)P(C) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}_1 \end{aligned}$$

3. Пусть $A_n \uparrow A, A_n \in \mathcal{L}_1$. По определению σ-алгебры замечаем, что $A \in \sigma(\mathcal{M}_2)$. Пусть $C \in \mathcal{M}_1$. Рассмотрим

$$P(A \cap C) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n \cap C) = P(C) \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P(C)P(A) \Rightarrow A \in \mathcal{L}_1$$

Раз $\mathcal{L}_1$ – это λ-система и $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{L}_1$, по условию, то по (2.1) получим, что $\sigma(\mathcal{M}_2) \subset \mathcal{L}_1 \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_2) \perp\!\!\!\perp \mathcal{M}_1$.

Рассмотрим $\mathcal{L}_2 = \{A \in \sigma(\mathcal{M}_1) :\ A \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{M}_2)\}$. Точно так же доказывается, что $\mathcal{L}_2$ – это λ-система, $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{L}_2$ по доказанному $\Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{L}_2 \Rightarrow \sigma(M_1) \perp\!\!\!\perp \sigma(M_2)$ □

Определение 3.4. Пусть $\{M_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ – набор систем событий. Он называется независимым в совокупности, если независим в совокупности $\forall$ конечный поднабор.