Содержание

1 Лекция 1

1.1 Расписание и формат обучения

Приём лабораторных:

Среда: 15:40 - 17:15, 237л

17:25 - 19:00 237л

Суббота: 13:50 - 15:25 243л

15:40 - 17:15 243л

Модули:

М1: 5 неделя, минимум 12 баллов, максимум 20 баллов, одна лабораторная

М2: 12 неделя, минимум 12 баллов, максимум 20 баллов, две лабораторные

М3: 17 неделя, минимум 18 баллов, максимум 30 баллов, одна лабораторная

Сдано больше двух лабораторных - автомат на экзамене.

1.2 Комментарии к первой лабораторной работе

$$\begin{cases} u'(x) = x^2 + u^2 u(0) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Результат:

— значения для $x \in [0, x_{max}]$ с заданным шагом h

— приближения Пикара с 1 по 4 порядок

— до второго знака после запятой - точность

— график функции в интервале $[-x_{max}, x_{max}]$

1.3 Погрешности и устойчивость

Погрешности, возникающие при моделировании:

— Погрешность модели

— Погрешность метода

— Погрешность исходных данных

— Погрешность округления

Устойчивость - задача называется устойчивой (корректной), если решение единственно и устойчиво по входным данныхм. Плохо обусловленная задача: $\delta y = C\delta x, C >> 0$

1.4 Модели на основе ОДУ

Все дополнительные условия заданы в одной точке - задача Коши.
Все дополнительные условия заданы в разных точках - краевая задача.

Задача Коши:
$u'(x) = f(x, u)$
$u(\xi) = \eta$

Решением данной задачи является сведение уравнения к производным первого порядка при помощи замены переменных:
$u^n(x) = f(x, u, u', ..., u^{n-2}, u^{n-1})$
$u^{(k)} = u_k$

$$\begin{cases} u'_k = u^{(k+1)} = u_{k+1}, 0 \leqslant k \leqslant n-2 \\ u'_n = f(x, u_0, u_1, u_2, ..., u_{n-1}) \end{cases} \tag{1.2}$$

$u_0 \equiv u$
$u_k(\xi) = \eta_k, 0 \leqslant k \leqslant n-1$

Методы решения:

- Аналитические
- Приближенно аналитические
- Численные

Для оценки точности численных методов можно использовать правило Рунге, заключающееся в том, что если мы рассчитаем функцию с шагом h и $h/2$, то точность в x_i будет выражаться как: $\frac{|y_{i,h} - y_{i,h/2}|}{2^p - 1}$, где p - порядок точности.

1.5 Явные методы Рунге-Кутта

$u'(x) = f(x, u)$
$u(\xi) = \eta$
$a \leqslant x \leqslant b$

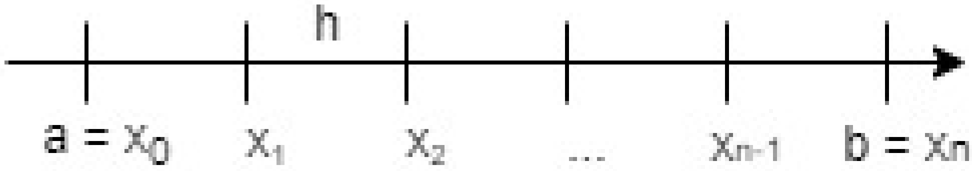

Рисунок 1.1 — Значения на числовой прямой

$w_N = \{x_i : a = x_0 < x_1 ... < x_N\}$
$w_n = \{x_i : x_i = a + ih, i = \overline{0, N}\}$
$y_i \to y(x_i)$

Сходимость разностного решения к точному на отрезке:
$\forall x_i \in [a, b] : |y_i - u_i| \to 0, h \to 0 (i \to \infty)$

1.5.1 Метод Эйлера (p=1)

$u_{i+1} = u_i + h_i \cdot u'_i + \frac{h^2}{2!} u''_i + \frac{h^3}{3!} u'''_i + ...$
здесь $u'_i = u'(x_i); u''_i = u''(x_i)...$
$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, u_i)$, если $|y_i - u_i| = o(h^2)$, при $h \to 0$, то метод имеет р-й порядок точности.

1.5.2 Численный метод Рунге-Кутта (p=2)

$u_{i+1} = u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2} u''_i + ...$
$u'_i = f_i = f(x_i, u_i)$
$u''_i = (u'_i) = \frac{d}{dx} f = f'_{x_i} + f'_{u_i} \cdot f_i$
$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}(f'_{x_i} + f'_{y_i} \cdot f_i), (p = 2), (2)$
$u''i = \frac{f(x+\gamma h, y+\delta h) - f(x,y)}{\Delta x}$
$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}(\frac{f(x+\gamma h, y+\delta h) - f(x,y)}{\Delta x}) = y_i + h[\beta f(x_i, y_i) + \alpha f(x_i + \gamma h, y_i + \delta h)]$ (3)
$y_{i+1} = y_i + h[\beta f(x_i + y_i) + \alpha(f(x_i, y_i) + f'_x \gamma h + f'_y \delta h)] = y_i + h[(\alpha + \beta) f(x_i, y_i) + \alpha\gamma h f'_x + \alpha\delta h f'_y]$ (4)

Сравним (2) и (4):

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha\delta = \frac{1}{2} f(x_i, y_i) \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \gamma = \frac{1}{2\alpha} \\ \delta = \frac{1}{2\alpha} f(x_i, y_i) \end{cases} \tag{1.4}$$

Из (3) видим, что:
$y_{i+1} = y_i + h[(1-\alpha)f(x_i, y_i) + \alpha f(x_i + \frac{1}{2\alpha}h, y_i + \frac{h}{2\alpha}f(x_i, y_i))]$, на практике $\alpha = 1, \alpha = \frac{1}{2}$

1.5.3 Метод Пикара (приближённый аналитический метод)

$u'(x) = f(x, u(x))$
$\frac{du}{dx} = f(x, u(x))$
$u(x) = u(\xi) + \int\limits_{\xi}^{x} f(t, u(t))dt$
$y^{(\delta+1)}(x) = u(\xi) + \int\limits_{\xi}^{x} f(t, y^{(\delta)}(t))dt$

В лабораторной показать Пикара нужной точности (от 1 до 4).

2 Лекция 2

$y_{n+1} = y_n + h_n[(1-\alpha)f(x_n, y_n) + \alpha f(x_n + \frac{h_n}{2\alpha}, y_n + \frac{h_n}{2\alpha} f(x_n, y_n))] + O(max h_n^2)$

2.1 Геометрическое истолкование полученных результатов

Рассмотрим для $\alpha = 1$:

$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n))$

1) $y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n)$

2) $y'_n = f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}})$

3) $y_{n+1} = y_n + h_n y'_n$

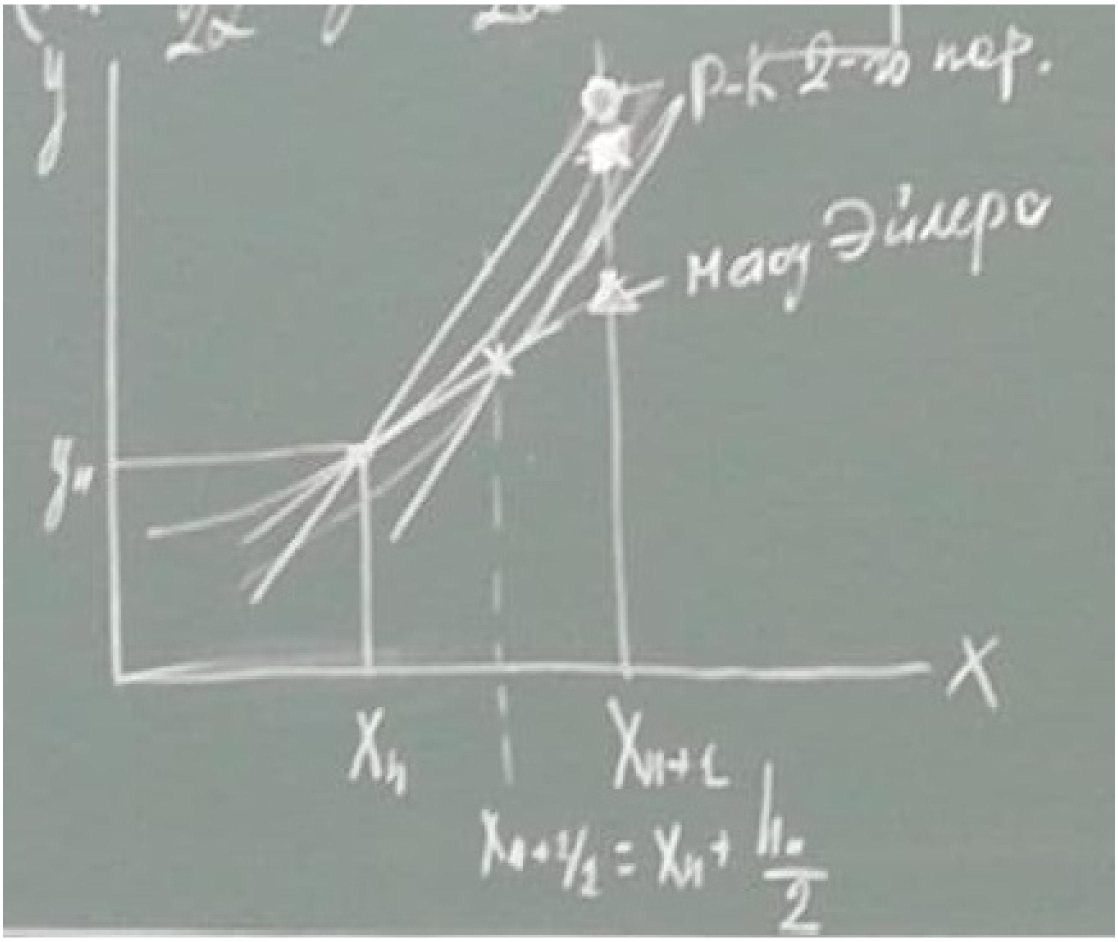

Рисунок 2.1 — Геометрические результаты для a = 1

Рассмотрим для $\alpha = \frac{1}{2}$:

$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n))]$

1) $\overline{y_{n+1}} = y_n + h_n f(x_n, y_n)$

2) $y'_{n+1} = f(x_n + h_n, \overline{y_{n+1}})$

3) $y'_{cp} = \frac{1}{2}(f(x_n, y_n) + y'_{n+1})$

4) $y_{n+1} = y_n + h_n \cdot y'_{cp}$

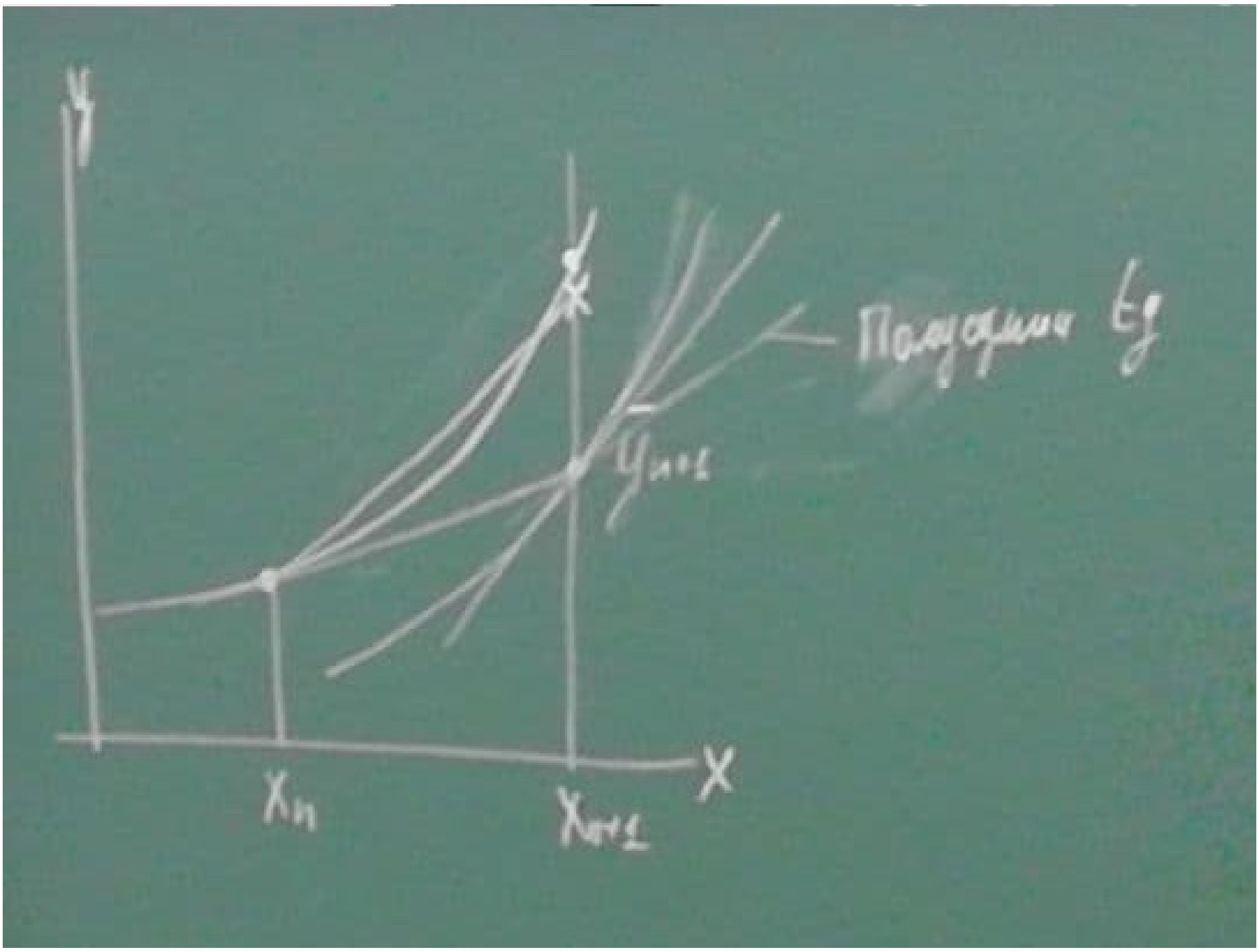

Рисунок 2.2 — Геометрические результаты для а = 1/2

2.2 Методы Рунге-Кутта 4-го порядка точности

Формула обеспечивает переход из узла n в узлел n + 1:

$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1+2k_2+2k_3+k_4}{6}$

$k_1 = hf(x_n, y_n)$

$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$

$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$

$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$

Посмотрим, как формируется порядок точности в специальном варианте правой части:

$u'(x) = f(x)$

$y_{n+1} = y_n + \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx$

При $\alpha = \frac{1}{2}$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n) + f(x_{n+1}))$

По методу трапеции:

$R_{trap} \leqslant \frac{x_N - x_O}{12} h^2 \cdot max|f'(x)|$
Рунге-Кутт 4-го порядка:
$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(f(x_n) + 4f(x_n + \frac{h}{2}) + f(x_n + h))$ - метод Симпсона
$R_{simp} \leqslant \frac{x_n - x_o}{190 \cdot 16} h^4 \cdot max|f^{IV}(x)|, x_o \leqslant x \leqslant x_n$

2.3 Замечания о методах Рунге-Кутта

1) методы явные - позволяет за строго зафиксированное количество шагов перейти из одного узла в другой

2) позволяет производить расчёты с переменным шагом

3) если нужных производынх при интегрировании нет, то применение метода Симпсона бессмысленно, т.е. метод трапеции, треугольника и тд.

2.4 Распространение метода Рунге-Кутта 4-то порядка на систему дифференциальных уравнений

На примере метода Рунге-Кутта 4-го порядка рассмотрим распространить результат на систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} u' = f(x, u, v) \\ v' = \phi(x, u, v) \\ u(\xi) = \eta_1 \\ v(\xi) = \eta_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

$u = y, v = z$

$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$
$z_{n+1} = z_n + \frac{q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4}{6}$
$k_1 = hf(x_n, y_n, z_n), q_1 = h\phi(x_n, y_n, z_n)$
$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{q_1}{2}), q_2 = h\phi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{q_1}{2})$
$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{q_2}{2}), q_3 = h\phi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{q_2}{2})$
$k_4 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_3}{2}, z_n + \frac{q_3}{2}), q_2 = h\phi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_3}{2}, z_n + \frac{q_3}{2})$

Способ рассчёта выше применяется в вычислениях во второй лабораторной работе.

2.5 Применение метода Пикара

Возвращаясь к методу Пикара, сформулируем условие сходимости приближённого решения к точке.

— решение в ограниченной области

— правая часть f непрерывна

— условия Липшеца: $a \leqslant x \leqslant b, |f(x,u_1) - f(x,u_2)| \leqslant \mathcal{L}|u_1 - u_2|$

2.6 Неявный метод Эйлера

$u' = f(x,u)$

В явном методе Эйлера - $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

В неявном методе Эйлера - $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ Последствия:

1) Решения может не быть, либо может быть несколько

2) Для решения уравнения необходимо подобрать метод

Применяется часто, поскольку является устойчивым.

Пример:

$u' = -\alpha u, \alpha > 0$

аналитическое решение: $u(x) = ce^{-\alpha x}$

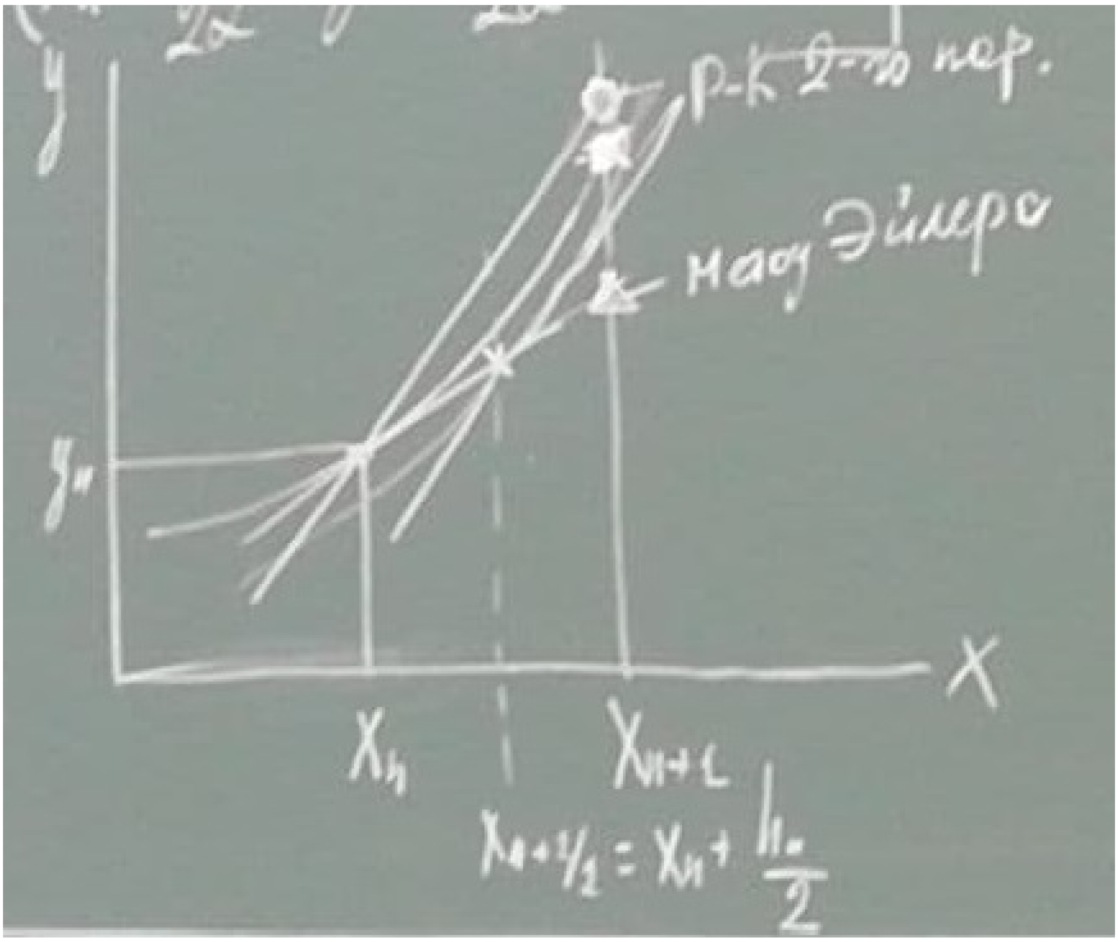

Рисунок 2.3 — Сравнение явного и неявного метода Эйлера

$y_{n+1} = y_n - \alpha y_n h = y_n(1 - \alpha h), 1 - \alpha h > 0, h < \frac{1}{2}$

Применение явного метода может привести к расходящимся решениями и имеет ограничения на α. Чем больше α, тем больше шаг.

Неявный метод:

$y_{n+1} = y_n - \alpha y_{n+1} h$

$y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\alpha h}$ - ограничений на h нет.

В общем виде:

$\sum\limits_{k=0}^{m} a_k y_{n-k} = h(f(x_n, y_n))$

$m = 1, a_0 = 1, a_1 = -1$

$y_n - y_{n-1} = hf(x_n, y_n)$ - метод Эйлера.

2.7 Метод Гира

При $m = 2$:

$\frac{3}{2}y_n - 2y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} = hf(x_n, y_n) + O(h^2)$

При $m = 3$:

$\frac{11}{3}y_n - 3y_{n-1} + \frac{3}{2}y_{n-2} - \frac{1}{3}y_{n-3} = hf(x_n, y_n) + O(h^3)$

Формул более высокого порядка точности не существует. Благоприятны с точки устойчивости решений.

2.8 Замечание о многошаговых методах

В многошаговых методах для получения решения в неизвестном узле необходимо знать значения в определённом количестве предыдущих узлов.

3 Лекция 3

3.1 Методы на основе ОДУ. Краевая задача

Дифференциальное вторение второго порядка может быть сведено к уравнению певрого порядка. В самом общем виде краевая задача формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} u'_k(x) = f_k(x, u_1, u_2, ..., u_n), k = \overline{1, n} \\ \phi_k(\xi_k, u_1(\xi_k), u_2(\xi_k), ..., u_n(\xi_k)) = 0, k = \overline{1, n} \end{cases} \tag{3.1}$$

Методы решения:

- Аналитические
- Приближённые
- Численные

3.2 Приближённый метод

Все функции от x - заданные, надо найти u.

$$\begin{cases} u'(x) + p(x)u'(x) + g(x)u(x) = f(x) \\ \alpha_1 u'(a) + \beta_1 u(a) = y_1 \\ \alpha_2 u'(a) + \beta_2 u(a) = y_2 \\ a \leqslant x \leqslant b \end{cases} \tag{3.2}$$

$Lu = u'(x) + p(x)u'(x) + g(x)u(x)$
$l_a u = \alpha_1 u' + \beta_1 u$
$l_b u = \alpha_2 u' + \beta_2 u$

$$\begin{cases} Lu = f(x)(1) \\ l_a u = y_1(2.1) \\ l_n u = y_2(2.2) \end{cases} \tag{3.3}$$

Решение ищем в виде:
$y(x) = u_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} C_k u_k(x)$

$$u_k(x) \rightarrow \begin{cases} L_a u_k = 0 \\ L_b u_k = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

$R(x, C_1, C_2, ...C_n) = Ly - f(x) = Lu_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} C_k L u_k(x) - f(x)$

3.3 Метод коллокаций

Выбираем множество точек $x_i, i = 1, ...n$
$R(x, C_1, C_2, ...C_n) = 0, i = \overline{1, n}$

Пример:

$$\begin{cases} u^n + (1 + x^2)u + 1 = 0 \\ u(-1) = 0, u(1) = 0 \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{3.5}$$

$u_0(x) = 0, u_1(x) = x^{2k-2}(1 - x^2), k = 1, 2, ...n$
Точки коллокации - $n = 2, x_1 = 0, x_2 = 0.5$

$y(x) = C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4)$
$R(x, C_1, C_2) = 1 - C_1(1 + x^4) + C_2(2 - 11x^2 - x^6)$
Приравниваем полученное выше выражение к нулю в точках коллокации:
$x = 0, C_1 - 2C_2 = 1$
$x = 0.5, 1.0625C_1 + 0.7656C_2 = 1$
Решение: $C_1 = 0.9568, C_2 = -0.0216$
Окончательное решение: $y(x) = 0.1568(1 - x^2) - 0.0216(x_2 - x_4)$

Чем больше точек коллокация. тем лучше полученная фукнция будет совпадать с точным решением.

3.4 Метод Галеркина

$u_0(x), u_1(x), ..., u_m(x)$ - система ортогональных линейно-независимых функций, $a \leqslant x \leqslant b$
$\int\limits_a^b f(x)u_i(x)dx = 0, i = \overline{1, m} \Rightarrow f(x) = 0$
$\int\limits_a^b R(x, C_1, C_2, ..., C_n)u_i dx = 0, i = \overline{1, m}$
$\int\limits_a^b u_m Lu dx + \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \int\limits_a^b u_k Lu dx - \int\limits_a^b u_m f(x)dx = 0, m = 1, 2, ...n$

Пример:

$$\begin{cases} u'' + xu' + u = 2x \\ u(x) = 1 \\ u(1) = 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

$u_0(x) = 1 - x$

$u_1(x) = x^k(1-x), k = 1, 2, ...n$

n = 3

$y(x) = (1-x) + C_1 x(1-x) + C_2 x^2(1-x) + C_3 x^3(1-x)$

$R(x, C_1, C_2, C_3) = 1 + 3x + C_1(-2 + 2x - 3x^2) + C_2(2 - 6x + 3x^2 - 4x^4) + C_3(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4)$

Выполняя процедуру Галёркина, получим систему интегралов от трёх функций:

$\int\limits_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x - x^2)dx = 0$

$\int\limits_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x^2 - x^3)dx = 0$

$\int\limits_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x^3 - x^4)dx = 0$

В результате получим систему из трёх уравнений:

$133C_1 + 63C_2 + 36C_3 = -70$

$140C_1 + 108C_2 + 79C_3 = -98$

$264C_1 + 252C_2 + 211C_3 = -210$

В результате получаем следующие коэффициенты: $C_1 = -0.209, C_2 = -0.789, C_3 = 0.209$

$y(x) = (1-x)(1 - 0.209x - 0.789x^2 + 0.209x^3)$

3.5 Интегральный метод наименьших квадратов

$\int\limits_a^b \Phi^2(x, C_1, C_2, ..., C_n)dx \to min$

$\frac{d\Phi}{dC_2} = 0, \int\limits_a^b 2R(x, C_1, ...C_n)\frac{dR}{dC_2}dx = 0, k = 1, 2, ...n$

Пример:

Из метода коллокаций:

$R(x) = 1 - (1 + x^2)C_2 + (2 - 11x^2 - x^6)C_2$

$\frac{1 d\Phi}{2 dC_1} = -\int\limits_0^1 (1 - (1 + x^2)C_1 + (2 - 11x^2 - x^6)C_2)(1 + x^2)dx = 0$

$\frac{1 d\Phi}{2 dC_2} = -\int\limits_0^1 (1 - (1 + x^4)C_1 + (2 - 11x^2 - x^6)C_2)(2 - 11x^2 - x^6)dx = 0$

$$\begin{cases} \frac{68}{45}C_1 + \frac{3548}{1155}C_2 = \frac{5}{4} \\ \frac{3548}{1155}C_1 + \frac{63404}{4035}C_2 = \frac{38}{91} \end{cases} \tag{3.7}$$

$C_1 = 0.985, C_2 = -0.078$

$y(x) = 0.985(1 - x^2) - 0.078(x^2 - x^4)$

3.6 Дискретный метод наименьших квадратов

$\Phi = \sum\limits_{i=1}^{N} R^2(x, C_1, C_2, ..., C_n) \to min$

Если взять N»n, то метод будет работать. Если взять N = n, то метод перейдёт в метод коллокаций, надо будет показать в лабе.

3.7 Метод стрельбы (численный)

$$\begin{cases} u'(x) = f(x,u,v)(3.1) \\ v'(x) = \phi(x,u,v)(3.2) \\ \Xi(u(a),v(a)) = 0(4) \\ \psi(u(b),v(b)) = 0(5) \\ a \leqslant x \leqslant b \end{cases} \tag{3.8}$$

Берем некое $u(a) = \xi$, тогда из (u):

$\Xi(\xi, u(a)) = 0 \to v(a) = \gamma(\xi)$

Сводится к задаче Коши, решаем уравнение численно

Например, если краевое условие - линейное, то $\alpha_1 u(a) + \beta_1 v(a) = \delta_1, v(a) = \frac{\delta_1 - \alpha_1 \xi}{\beta_1}$

$\psi(u(b,\xi), v(b,\xi)) = \overline{\psi}(\xi) \neq 0$

4 Лекция 4

4.1 Особенности метода стрельбы

Метод стрельбы называется именно так, поскольку мы за счёт подбора условия в одной краевой точки обеспечиваем условие во второй краевой точке.

4.2 Лабораторная работа №2

Исходная информация - задана система уранений:

$$\begin{cases} F = -\frac{c}{3k(r)}\frac{du}{dr} \\ divF = ck(r)(u_p(r) - u(r)) \\ r = 0, F = 0 r = R, F = m\frac{cu}{2} \end{cases} \tag{4.1}$$

Решение в циллиндрических координатах, неизвестные: F(r), u(r).

F - поток, размерность - ватт на сантиметр в квадрате.

u - плотность энергии излучения - джоуль на сантиметр в кубе.

c $= 3 \cdot 10^{10}$ см/с - скорость света.

$u_p = \frac{3.084 \cdot 10^{-4}}{e^{\frac{4.709 \cdot 10^{+4}}{T}} - 1}$ - равновесная плотность излучения

$k = k_0(\frac{T}{300})^2$ - коэффициент поглощения

$T(r) = (T_w - T_0)(\frac{r}{R})^p + T_0$ - температурное поглощение

T_0, T_w, p - заданы

Приведём эти уравнения:

Введём безусловную координату - $Z = \frac{r}{R}$

Тогда:

$$\begin{cases} F = -\frac{c}{3Rk(r)}\frac{du}{dz}, (1) \\ \frac{1}{R}\frac{1}{Z}\frac{d}{dZ}(ZF) = ck(r)(u_p(r) - u(r)), (2) \\ Z = 0, F = 0, (3) \\ Z = 1, F = m\frac{cu}{2}, (4) \end{cases} \tag{4.2}$$

Исходные данные для отладки:

$k_0 = 0.0008$

m $= 0.786$

R $= 0.35$ см

$T_w = 2000$ K

$T_0 = 10^4 K$

p = диапазон от 4 до 15

Получить: u(Z) и F(Z)
$T(Z) = (T_w - T_0)Z^p + T_0$
$\frac{1}{RZ}(F + Z\frac{dF}{dZ}) = \frac{1}{R}(\frac{F}{Z} + \frac{dF}{dZ}) = ck(Z)(u_p - u)$
$\lim\limits_{Z\to 0}\frac{F}{2} = \frac{\lim\limits_{Z\to 0}\frac{dF}{dZ}}{1} = \frac{dF}{dZ}$

Имеем:
$\frac{dF}{dZ} = cK[u_p - u] - \frac{1}{R}\frac{F}{Z}$
$\frac{dF}{dZ} = cRk[u_p - u]$
$Z = 0, F = 0$
$Z = 1, F = m\frac{cu}{2} = 0$

4.3 Задача Коши

$Z = 0, F(0) = 0$
$u(0) = \xi \cdot u_p(0), \xi = 0.01, ..., 1$
$\psi(\xi) = F(\xi) - \frac{mcu(\xi)}{2}$

Задача - взяв интервал кси обеспечить, чтобы определялось, как полуразность. $\xi = \frac{\xi_1 + \xi 2}{2}$
Вычисляем в цикле, пока $\left|\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi}\right| < \epsilon, \epsilon = 10^{-4}$

Решение задачи производится при помощи метода Рунге-Кутта 4-го порядка точности, использованное метода оправдано, поскольку нету разывов в правой части. Вывод оформлять лучше в графиках и если возможно, добавить вывод полученных значнией в файл.

4.4 Разностный метод. Основные понятия

$$\begin{cases} u''(x) - p(x)u(x) = f(x), (5) \\ u(a) = c, (6.1) \\ u(b) = d, (6.2) \\ a \leqslant x \leqslant b \end{cases} \tag{4.3}$$

Для получения разностной схемы используется прямая разность аппроксимации производной:
$u''_n = \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{n^2} - \frac{n^2}{12}u_n^{IV}(\xi), x_{n-1} \leqslant \xi \leqslant x_{n+1}, (7)$
В (7) подставляем (5):
$\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{n^2} - p_n y_n = f_n, p_n = p(x_n), f_n = f(x_n)$

$$\begin{cases} y_{n-1} - (2 + h^2 p_n) y_n + y_{n+1} = h^2 f_n, n = 1,2,...,N-1, (I) \\ y_0 = c \\ y_N = d \\ w_h = \{x_n : x_n = a + nh, n = \overline{0, N}\} \end{cases} \tag{4.4}$$

В результате получена СЛАУ. Матрица данной СЛАУ диагональная, поэтому решаем методом прогонки.

4.5 Решение СЛАУ методом прогонки

$$\begin{cases} A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -F_n, (7') \\ K_0 y_0 + M_0 y_1 = P_0 \\ K_N y_{N-1} + M_N y_N = P_N \end{cases} \tag{4.5}$$

$y_n = \xi_{n+1} y_{n+1} + \nu_{n+1}, (8)$

$\xi n + 1, \nu n + 1$ - прогоночные коэффициенты

Запишем:

$y_{n-1} = \xi_n y_n + \nu_n$

Подставим в (7'):

$y_n = \frac{C_n}{B_n - A_n \xi_n} y_{n+1} + \frac{F_n + A_n \nu_n}{B_n - A_n \xi_n}$

Сравним с (8)Ю видим:

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = \frac{C_n}{B_n - A_n \xi_n}, (9.1) \\ \nu_{n+1} = \frac{F_n + A_n \nu_n}{B_n - A_n \xi_n}, (9.2) \end{cases} \tag{4.6}$$

Алгоритм:

1) Прямой ход, по (9) вычисляем $\xi_n \nu_n$

2) Обратный ход, по (8) вычисляем y_n

Начальные значения прогоночных коэффициентов берутся из левого краевого условия:

$y_0 = -\frac{M_0}{K_0} y_1 + \frac{P_0}{K_0} \to \xi_1 = -\frac{M_0}{K_0}, \nu_1 = \frac{P_0}{K_0}$

Значенияе y_N находится с использованием правого краевого условия:

$y_{N-1} = \xi_N y_N + \nu_N$

$K_N \xi_N y_N + K_N \nu_N + M_N y_N = P_N$

$y_N = \frac{P_N - K_N \nu_N}{K_N \xi_N + M_N}$

Покажем сходимость разностного решения к точному: $y_n \to u(x_n)$

В исходное дифференциальное уравнение подставим точное значение разностного аналога:

$\frac{u_{n-1}-2u_n+u_{n+1}}{n^2}-\frac{n^2}{12}u^{IV}(\xi)-p_nu_n=f_n$

$u_{n-1}-(2+p_nn^2)u_n+u_{n+1}=f_n+\frac{h^2}{12}u_n^{IV}(\xi),(10)$

В (I) подставим (10):

$Z_n=y_n-u_n$

$Z_{n-1}-(2+p_nh^2)Z_n+Z_{n+1}=-\frac{h^4}{12}u^{IV}(\xi)$

$(2+p_nh^2)Z_n=Z_{n-1}+Z_{n+1}+\frac{h^4}{12}u^{IV}(\xi)$

$Z_0=0$

$Z_N=0$

Выберем точку X_m, в которой $Z_m=max|Z_n|$

$(2+p_mh^2)|Z_m|\leqslant|Z_{m-1}|+|Z_{m+1}|+\frac{h^2}{12}|u^{IV}(\xi)|$

$(2+p^mh^2)|Z_n|\leqslant 2|Z_N|+\frac{h^4}{12}|u^{IV}(\xi)$

$p_mh^2|Z_m\leqslant\frac{h^2}{12pm}\cdot max|u^{IV}(\xi)|=o(h^2)$

При $h\to 0,|Z_m|\to 0,o(h^2)$

5 Лекция 5

5.1 ОДУ

$u'(x) = f(x,u)$

$y_{n+1} = y_n + \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, u(t))dt = (\text{по методу трапеции}) = y_n + h\frac{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})}{2}$

$y_n + 1 = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})) \rightarrow F(y_{n+1}) = 0, o(h^2)$

5.2 Кравевая задача

Для решения применяется метод прогонки.

$u''(x) = p(x)u(x) = f(x), p(x) > 0$

Для устойчивости прогонки должно выполняться это условие (является достаточным, но не является необходимым): $|B_n| > |A_n| + |C_n|$ - диагональное преобладание.

$|y_n - u_n| \rightarrow 0, o(h^2)$ при $h \rightarrow 0$

5.3 Решение нелинейного уравнения второго порядка

$u''(x) = f(x, u(x))$

Разностная схема уравнения:

$\frac{y_{n-1}-2y_n+y_{n+1}}{h^2} = f(x, y_n)$

Решение уравнений:

1. Линеаризация (по Ньютону) - в данном уравнении содержится три неизвестных - y_{n-1}, y_n, y_{n+1}.

$F(y_{n-1}, y_n, y_{n+1})$ - для решения данного уравнения необходимо организовать итерационный процесс. Сначала разлогаем в ряд Тейлора: $F(y_{n-1}^{(0)}, y_n^{(0)}, y_{n+1}^{(0)}) + \frac{dF}{dy_{n-1}}\Big| \Delta y_{n-1}^{(S+1)} + \frac{dF}{dy_n}\Big| \Delta y_n^{(S+1)} + \frac{dF}{dy_{n+1}}\Big| \Delta y_{n+1}^{(S+1)} = 0$, S - номер итерации.

$F(y_{n-1}^{(0)}, y_n^{(0)}, y_{n+1}^{(0)}) = y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} - h^2 f(x_n, y_n) = 0$

$y_{n-1}^{(S)} - 2y_n^{(S)} + y_{n+1}^{(S)} - h^2 f(x_n, y_n^{(S)}) + \Delta y_{n-1}^{(S+1)} + (2 + h^2 f_n'(x_n, y_n^{(S)}))\Delta y_n^{(S+1)} + \Delta y_{n+1}^{(S+1)} = 0$

$\Delta y_{n-1}^{(S+1)} - (2 + h^2 f_u'(x_n, y_n^{(S)}))\Delta y_n^{(S+1)} + \Delta y_{n+1}^{(S+1)} = h^2 f(x_n, y_n^{(S)}) - y_{n-1}^{(S)} + 2y_{n-1}^{(S)} + 2y_n^{(S)} + y_{n+1}^{(S)}, (2)$

$y_n^{(S+1)} = y_n^{(S)} + \Delta y_n^{(S+1)}$

$y_{n-1}^{(S+1)} = y_{n-1}^{(S)} + \Delta y_{n-1}^{(S+1)}$

$y_{n+1}^{(S+1)} = y_{n+1}^{(S)} + \Delta y_{n+1}^{(S+1)}$

$max_{0\leqslant n\leqslant N}\left|\frac{\Delta y_n^{(S+1}}{y_n^{(S+1)}}\right| < \xi$

2. Простая итерация.
$y_{n-1}^{(S+1)} - 2y_n^{(S+1)} + y_{n+1}^{(S+1)} = h^2 f(x_n, y_n^{(S)})$
Сходится, если $\frac{1}{8}(b-a)^2 M_n < 1, M_n = max_{1\leqslant n\leqslant N-1}|f_u''(x)|$

Сделаем замечание по поводу краевых условий:

$$\begin{cases} u(a) = c \\ u(b) = d \end{cases} \tag{5.1}$$

Это условия первого рода. Второго рода - первые производные.
Условия второго рода - $\alpha u''(a) + \beta u(a) = \gamma$ - краевое условие третьего рода.

Простейшая аппроксимация:
$\alpha\frac{y_n - y_0}{h} + \beta y_0 = \gamma$, $K_0 y_0 + M_0 y_1 = P_1$
$K_1 = \beta - \frac{\alpha}{h}$
$M_0 = \frac{\alpha}{h}$
$P_1 = \gamma$

$u_1 = u_0 + hu_0' + \frac{h^2}{2}u_0'' + o(h^3)$
$y_1 = y_0 + h\frac{\gamma - \beta y_0}{\alpha} + \frac{h^2}{2}(f(x_0) + p(x_0)y_0)$

6 Лекция 6

Переписать

7 Лекция 7

7.1 Интегро-интерполяционный метод для квазилинейных уравнений в криволинейных координатах

$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^p k(u)\frac{du}{dr}) - p(u)u + f(u) = 0$

p = 0 - плокская геометрия

p = 1 - циллиндрическая

p = 2 - сферическая

$z = \frac{r}{R}$
$d = Rdz$
$F = -k(u)\frac{du}{dr}$
$F = -\frac{k(u)}{r}\frac{du}{dz}$ (1)
$-\frac{1}{RZ^p}\frac{d}{dz}(z^2F)z^p dx - p(u)u + f(u) = 0$ (2)
Интегрируем на ячейке:
$-\int\limits_{z_{n-\frac{1}{2}}}^{z_{n+\frac{1}{2}}} \frac{1}{Rz^p}\frac{d}{dz}(z^pF)z^p dz - \int\limits_{z_{n-\frac{1}{2}}}^{z_{n+\frac{1}{2}}} p(u)uz^p dz + \int\limits_{z_{n-\frac{1}{2}}}^{z_{n+\frac{1}{2}}} f(u)z^p dz = 0$
$\frac{1}{R}(z^p_{n-\frac{1}{2}}F_{n-\frac{1}{2}} - z^p_{n+\frac{1}{2}}F_{n+\frac{1}{2}} - p_n y_n \frac{z^{p+1}_{n+\frac{1}{2}} - z^{p+1}_{n-\frac{1}{2}}}{p+1}$(<- это Vn) $+ f_n V_n = 0$ (3)

Из (1):
$\int\limits_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{du}{dz}dz = \int\limits_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{R}{k(u)}F dz = -RF_{n+\frac{1}{2}} \int\limits_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{dz}{k(u)}$
$F_{n+\frac{1}{2}} = \kappa_{n+\frac{1}{2}}\frac{y_n - y_{n+1}}{Rh}, \kappa_{n+\frac{1}{2}} = \frac{k_n + k_{n+1}}{2}$

$\frac{1}{R}(z^p_{n-\frac{1}{2}}\kappa_{n-\frac{1}{2}}\frac{y_{n-1}-y_n}{Rh} - z^p_{n+\frac{1}{2}}\kappa_{n+\frac{1}{2}}\frac{y_n - y_{n+1}}{Rh}) - p_n y_n V_n + f_n V_n = 0$

$$\begin{cases} A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n-1} = -D_n \\ A_n = \frac{z_{n-\frac{1}{2}}\kappa_{n-\frac{1}{2}}}{R^2 h} \\ C_n = \frac{z^p_{n+\frac{1}{2}}\kappa_{n+\frac{1}{2}}}{R^2 h} \\ B_n = A_n + C_n + p_n V_n \\ D_n = f_n V_n \end{cases} \tag{7.1}$$

$\kappa_{n+\frac{1}{2}} = \frac{k_n + k_{n+1}}{2} = \frac{k(y_n) + k(y_{n+1})}{2}$
$A_n = A(y_n, y_{n-1})$
$B_n = (y_{n-1}, y_n, y_{n+1})$
$C_n = C(y_n, y_{n+1})$
$D_n = D(y_n)$

7.2 Методы решения квазилинейных разностных схем. Метод простой итерации

Получим разностные аналоги краевых условий.

Пусть:

$z = z_0, -k(z_0)\frac{du}{Rdz} = F_0$

$z = 1, -k(1)\frac{du}{Rdz} = \alpha(u(1) - \beta)$

$\int\limits_{z_0}^{z_{\frac{1}{2}}} (\cdot) z^p dz$

$-\frac{1}{R}\int\limits_{z_0}^{z_{\frac{1}{2}}} \frac{1}{z^p}\frac{d}{dz}(z^pF)z^pdz - \int\limits_{z_0}^{z_{\frac{1}{2}}} p(u)uz^pdz + \int\limits_{z_0}^{z_{\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_0}^{z_{\frac{1}{2}}} f(u)z^pdz = 0$

$\frac{1}{R}(z_0^pF_0 - z_{\frac{1}{2}}^p - z_{\frac{1}{2}}^pF_{\frac{1}{2}}) - \frac{h}{4}(p_0y_0 + p_{\frac{1}{2}}y_{\frac{1}{2}})(\frac{z_{\frac{1}{2}}^{p+1} - z_0^{p+1}}{p+1}) + \frac{h}{4}(f_0 + f_{\frac{1}{2}}V_{\frac{1}{2}} = 0$

Подставим:

$F_{\frac{1}{2}} = \kappa_{\frac{1}{2}}\frac{y_0 - y_1}{Rh}$

$\frac{1}{R}(z_0^pF_0 - \kappa_{\frac{1}{2}}\frac{y_0-y_1}{Rh} - \frac{h}{4}(p_0y_0 + p_{\frac{1}{2}}y_{\frac{1}{2}})V_{\frac{1}{2}} + (f_0 + f_{\frac{1}{2}})\frac{h}{4}V_{\frac{1}{2}} = 0$

Простейшая аппроксимация:

$y_2 = \frac{y_0+y_1}{2}$

$p_2 = \frac{p_0+p_1}{2}$

$f_2 = \frac{f_0+f_1}{2}$

$M_0y_0 + K_0y_1 = P_0$

$-k\frac{y_1-y_0}{Rh} = F_0$

Краевые условия при $z = 1$

$\int\limits_{z_{N-\frac{1}{2}}}^{z_N} (\cdot)z_pdz$

Поиск интегрирования учитываем, что:

$F_{N-\frac{1}{2}} = \kappa_{N-\frac{1}{2}}\frac{y_{N-1} - y_N}{Rh}$

$F_N = \alpha(y_N \cdot \beta)$

$M_Ny_N + K_Ny_{N-1} = P_N$

7.3 Методы решения квазилинейных уравнений. Метод простой итерации

$$\begin{cases} A_n^{(s-1)}y_{n-1}^{(s)} - B_n^{(s-1)}y_n^{(s)} + C_n^{(s-1)}y_{n+1}^{(s)} = -D_n^{(s-1)} \\ M_0^{(s-1)}y_0^{(s)} + K_0^{(s-1)}y_1^{(s)} = P_0^{(s-1)} \\ M_N^{(s-1)}y_N^{(s)} + K_N^{(s-1)}y_{N-1}^{(s)} = P_N^{(s-1)} \end{cases} \tag{7.2}$$

1) Задаём начальное распределение $y_n^{(0)}$

2) Вычисляем коэффициенты $A_n ... P_n$

3) Применяем прогонку - $y_n^{(n)}$

4) Окончание итерации: $max_n\left|\frac{y_n^{(s)}-y_n^{(s-1)}}{y}{}_n^{(s)}\right|$

При резкой зависимости параметров исходной задачи от искомой функции есть тонкость при организации итерационного процесса, который позволяет улучшить сходимость.

$y_{\xi_n}^{(s)} = y_{\xi_n}^{(s-1)} + \xi(y_n^{(s)} - y_{\xi_n}^{(s-1)})$

7.4 Метод линеаризации по Ньютону

$A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -D_n$ (6)

Метод Ньютона:

$f(x, y, z) = 0$

$f(x, y, z)|_{s-1} + \frac{df}{dx}|_{s-1}\Delta x^{(s)} + \frac{df}{dy}|_{s-1}\Delta y^{(s)} + \frac{df}{dz}|_{s-1}\Delta z^{(s)} = 0$

Линеаризуем (6):

Имеем три переменных: y_{n-1}, y_n, y_{n+1}

$A_n^{s-1}y_{n-1}^{s-1} - B_n^{s-1}y_n^{s-1} + C_n^{s-1}y_{n+1}^{s-1} + D_n^{s-1} + (\frac{dA_n}{dy_{n-1}} + A_n + \frac{dB_n}{dy_{n-1}}y_n)|_{(s-1)}\Delta y_n^{(s)} + (\frac{dA_n}{dy_{n-1}} + B_n + \frac{dB_n}{dy_n}y_n + \frac{dC_n}{dy_n}y_{n+1} + \frac{dD_n}{dy_n})|_{(s-1)}\Delta y_n^{(s)} + (\frac{dA_n}{dy_{n-1}} + C_n + \frac{dC_n}{dy_{n+1}}y_{n+1})|_{(s-1)}\Delta y_{n+1}^{(s)} = 0$