

МАТЕМАТИКА
В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

$$P(A) = \sum P(A|H_k)P(H_k)$$

XVI

ТЕОРИЯ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана

Математика в техническом
университете

Выпуск XVI

*Серия удостоена
Премии Правительства
Российской Федерации
в области науки и техники
за 2003 год*

Комплекс учебников из 21 выпуска

Под редакцией В.С. Зарубина и А.П. Крищенко

- I. Введение в анализ
- II. Дифференциальное исчисление функций
одного переменного
- III. Аналитическая геометрия
- IV. Линейная алгебра
- V. Дифференциальное исчисление функций
многих переменных
- VI. Интегральное исчисление функций
одного переменного
- VII. Кратные и криволинейные интегралы.
Элементы теории поля
- VIII. Дифференциальные уравнения
- IX. Ряды
- X. Теория функций комплексного переменного
- XI. Интегральные преобразования
и операционное исчисление
- XII. Дифференциальные уравнения
математической физики
- XIII. Приближенные методы математической физики
- XIV. Методы оптимизации
- XV. Вариационное исчисление и оптимальное управление
- XVI. Теория вероятностей
- XVII. Математическая статистика
- XVIII. Случайные процессы
- XIX. Дискретная математика
- XX. Исследование операций
- XXI. Математическое моделирование в технике

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Под редакцией
д-ра техн. наук, профессора В.С. Зарубина
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

Издание четвертое, стереотипное

*Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2006

УДК 519.2.21(075.8)

ББК 22.17

Т34

Рецензенты: проф. А.Д. Соловьев, проф. В.В. Рыков

Т34 Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – 4-е изд., стереотип. / А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 456 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI).

ISBN 5-7038-2485-0 (Вып. XVI)

ISBN 5-7038-2484-2

Несмотря на большое количество учебных руководств по теории вероятностей, в том числе появившихся и в последние годы, в настоящее время отсутствует учебник, предназначенный для технических университетов с усиленной математической подготовкой. Отличительной особенностью данной книги является взвешенное сочетание математической строгости изложения основ теории вероятностей с прикладной направленностью задач и примеров, иллюстрирующих теоретические положения. Каждую главу книги завершает набор большого числа контрольных вопросов, типовых примеров и задач для самостоятельного решения.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических университетов. Может быть полезен преподавателям и аспирантам.

Ил.68. Табл.76. Библиогр. 29 назв.

УДК 519.2.21(075.8)

ББК 22.17

© А.В. Печинкин, О.И. Тескин,
Г.М. Цветкова, П.П. Бочаров,
Н.Е. Козлов, 1998;
2004, с изменениями

© Московский государственный
технический университет
им. Н.Э. Баумана, 1998; 2004,
с изменениями

© Издательство МГТУ
им. Н.Э. Баумана, 1998;
2004, с изменениями

ISBN 5-7038-2485-0 (Вып. XVI)

ISBN 5-7038-2484-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга является одним из выпусков полного курса математики для студентов высших технических заведений и учитывает специфику математической подготовки этих студентов.

В основе выпуска лежит курс лекций по теории вероятностей, читавшийся на протяжении ряда лет студентам различных специальностей МГТУ им. Н.Э. Баумана, а также опыт проведения семинарских занятий по этому курсу.

Построение книги имеет так называемую „блочную“ структуру. После изложения теоретического материала в конце каждой главы представлены типовые примеры с решениями, а также контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения. Наличие большого количества примеров и задач позволяет использовать данную книгу не только как учебник, но и как задачник при проведении семинарских занятий.

Естественно, что ограничения на объем привели и к жесткому отбору включаемого материала.

Содержание материала и стиль его изложения определялись под углом зрения их практических приложений в различных областях инженерной практики. Более того, ряд приведенных задач и примеров ориентирован на дальнейшее изучение вероятностных дисциплин, таких, как математическая статистика, теория случайных процессов, математическая теория надежности и т.д.

Авторы старались расположить излагаемый материал таким образом, чтобы на основе данной книги можно было строить курсы теории вероятностей различного уровня сложности. Так, при изложении стандартного 34-часового курса рекомендуется пропустить главу 8, параграфы 6.5, 6.6, 7.5 и 9.3, в параграфе 5.5 ограничиться только двумерным нормальным

законом, а центральную предельную теорему из параграфа 9.4 приводить без доказательства, останавливаясь только на ее смысле.

Применяемый в книге математический аппарат основан на втузовском курсе высшей математики и не использует сложных понятий функционального анализа, теории меры, интеграла Лебега. Тем не менее принят современный способ изложения теории вероятностей на основе введения пространства элементарных событий и системы аксиом А.Н. Колмогорова. Однако аксиомы вводятся лишь после рассмотрения классического, геометрического и статистического определений как естественное распространение получающихся при таких определениях свойств вероятностей случайных событий.

Основное внимание авторы уделяют не строгим формальным доказательствам, а единству методического подхода, иллюстрируемого многочисленными приложениями. Именно такой подход к изучению теории вероятностей более всего полезен тем, кто ставит перед собой цель решение конкретных инженерных задач.

Авторы предполагают, что читатель знаком с основными понятиями линейной алгебры, математического анализа, дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов, теории функций комплексного переменного и преобразований Фурье.

С целью уточнения того, что обязательно нужно знать из перечисленных разделов математики, в начале книги сформулированы вопросы для самопроверки. При этом в вопросах понятия и термины, которые нужно знать, выделены **прямым полужирным шрифтом**. Далее помещен список основных обозначений, содержащий часто встречающиеся в тексте символы и их расшифровку.

В конце книги приведены таблицы некоторых распределений, список рекомендуемой литературы и предметный указатель, в который входят в алфавитном порядке (по существительному в именительном падеже) все выделенные в тексте

полужирным курсивом термины с указанием страниц, на которых они строго определены или описаны. Выделение термина *светлым курсивом* означает, что в данном параграфе он является одним из ключевых слов и читателю должно быть известно значение термина. Читатель может уточнить это значение, найдя при помощи предметного указателя необходимую страницу.

Ссылки в тексте на номера формул и рисунков набраны обычным шрифтом (например, (1.5) — формула (1.5) в главе 1, рис. 3.2 — рис. 3.2 в главе 3), а на параграфы и таблицы приложений — полужирным (например, **1.3** — третий параграф в главе 1, табл. **П.2** — таблица приложения 2). В квадратных скобках даны ссылки на другие выпуски данной серии, например [X] — на десятый выпуск.

Работа над книгой между авторами распределилась следующим образом. Основной текст книги был написан А.В. Печинкиным и О.И. Тескиным, фактический материал подготовлен Г.М. Цветковой при участии Н.Е. Козлова. Над обсуждением структуры книги и формы подачи материала работали П.П. Бочаров, А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова.

Авторы выражают благодарность Елене Беляковой за помощь, которую она оказала при подготовке рукописи к печати.

Задания для самопроверки

1. Что такое **множество**? **подмножество**? Какие множества называют **конечными**? **счетными**? Какие операции над множествами и подмножествами Вы знаете? Какими свойствами обладают эти операции? Что называют **окрестностью точки**? [I]

2. Какие величины называют **биномиальными коэффициентами**? [I]

3. Дайте определение **числовой последовательности**. Какую **последовательность** называют **возрастающей**? **убывающей**? Что называют **пределом последовательности**? [I]

4. Дайте определение **отображения**. Дайте определение **действительной функции действительного переменного**. Какую **функцию** называют **монотонной**? **возрастающей**? **убывающей**? **неубывающей**? **четной**? **нечетной**? Какую **функцию** называют **обратной** к данной? Какие **функции** называют **элементарными**? [I]

5. Что называют **пределом функции** $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 ? к $+\infty$? к $-\infty$? Какую **функцию** называют **непрерывной в точке**? **непрерывной слева в точке**? **в интервале**? **на отрезке**? [I]

6. Дайте определение **производной** действительной **функции** действительного переменного. Дайте определение **производной n -го порядка**. Запишите **формулы Тейлора и Маклорена**. [II]

7. Запишите зависимость между **декартовыми прямоугольными** и **полярными координатами точки** на плоскости. Какие кривые называют **кривыми второго порядка**? Запишите **каноническое уравнение эллипса** в декартовой прямоугольной системе координат. [III]

8. Какие поверхности называют **поверхностями второго порядка**. Запишите **каноническое уравнение эллипсоида** в декартовой прямоугольной системе координат. [III]

9. Что такое **матрица**? Какую матрицу называют **транспонированной** по отношению к данной? **диагональной**? **единичной**? **симметрической**? Что называют **определителем квадратной матрицы**? Дайте определение **произведения двух матриц**. Какую квадратную матрицу называют **невырожденной**? **вырожденной**? Опишите процедуру приведения невырожденной квадратной матрицы к диагональному виду. Какую квадратную матрицу называют **обратной** по отношению к данной? Как связаны между собой определители взаимобратных матриц? Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы. Что называют **рангом матрицы**? Какую матрицу называют **положительно определенной**? [III], [IV]

10. Что называют **базисом линейного пространства**? Какие **векторы** линейного пространства называют **нормированными**? Какое **линейное пространство** называют **арифметическим**? [IV]

11. Дайте определение **собственного значения** и **собственного вектора** квадратной матрицы. Как их можно вычислить? [IV]

12. Что такое **квадратичная форма**? Какую квадратичную форму называют **положительно определенной**? **неотрицательно определенной**? Что называют **матрицей квадратичной формы**? Запишите формулу **преобразования квадратичной формы** при **линейной замене переменных**. Какие способы приведения квадратичной формы к каноническому виду Вы знаете? В чем состоит метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду? [IV]

13. Дайте определение скалярной функции векторного аргумента (функции многих переменных). Что называют **частной производной** функции? Что такое **смешанная производная**? [V]

14. Какую функцию называют **дифференцируемой в точке**? Сформулируйте правило **дифференцирования сложной функции**. Что такое **якобиан**? [II], [V]

15. Дайте определение векторной функции векторного аргумента. Дайте определение **экстремума** функции. Сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума функции. [II], [V]

16. Что такое **определенный интеграл**? Сформулируйте теорему о производной **интеграла с переменным верхним пределом**. Сформулируйте условия и правило замены переменного в определенном интеграле. В чем состоит **метод интегрирования по частям**? [VI]

17. Дайте определение **несобственного интеграла**. Какой несобственный интеграл называют **абсолютно сходящимся**? [VI]

18. Что называют **двойным, тройным, кратным интегралом**? Какой **интеграл** называют **повторным**? Как вычисляют кратные интегралы? Сформулируйте условия и правило замены переменных в кратном интеграле. Чему равно значение интеграла Пуассона? [VII]

19. Какой **числовой ряд** называют **сходящимся? абсолютно сходящимся**? Сформулируйте свойства абсолютно сходящихся рядов. [IX]

20. Дайте определение **комплексного числа**. Что называют **мнимой единицей**? [I]

21. Что называют **функцией комплексного переменного**? Какую функцию называют **аналитической**? Что называют **изолированной особой точкой** аналитической функции? Какие типы особых точек Вы знаете? Что такое **вычет**? Запишите **интеграл Коши**. [X]

22. Что называют **композицией (сверткой)** двух **функций**? [XI]

23. Запишите прямое и обратное **преобразования Фурье**. Что называют **интегральным преобразованием Лапласа**? [XI]

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- ◀ и ▶ — начало и окончание доказательства
- # — окончание примера или замечания
- \approx — знак равенства, задаваемого приближенной формулой
- \equiv — знак тождественного равенства
- Ω — пространство элементарных исходов, достоверное событие 1.1, 1.2
- ω — элементарный исход 1.1
- A, B, C, \dots — случайные события 1.2
- \emptyset — невозможное событие 1.2
- $\omega \in A$ — элементарный исход ω принадлежит событию A 1.2
- $A \subset B, B \supset A$ — событие A включено в событие B 1.2
- $A \cap B, A \cdot B, AB$ — пересечение событий A и B 1.2
- $A \cup B$ — объединение событий A и B 1.2
- $A + B$ — объединение непересекающихся событий A и B 1.2
- \overline{A} — событие, противоположное событию A 1.2
- $A \setminus B$ — разность событий A и B 1.2
- \mathfrak{B} — сигма-алгебра (σ -алгебра) событий 1.3
- $P(A)$ — вероятность события A 2.1
- N — число элементарных исходов в пространстве элементарных исходов 2.1
- N_A — число элементарных исходов, благоприятствующих событию A 2.1
- A_n^m — число размещений (без повторений) из n элементов по m 2.2

- C_n^m — число сочетаний (без повторений) из n элементов по m **2.2**
 P_n — число перестановок из n элементов **2.2**
 \tilde{A}_n^m — число размещений (с повторениями) из n элементов по m **2.2**
 \tilde{C}_n^m — число сочетаний (с повторениями) из n элементов по m **2.2**
 $C(n_1, \dots, n_m)$ — полиномиальный коэффициент **2.2**
 $P(n_1, \dots, n_m)$ — вероятность, определяемая гипергеометрическим распределением **2.2**
 $\mu(A)$ — мера множества A **2.3**
 n — число испытаний (опытов) **2.4**
 n_A — число появлений события A в n испытаниях **2.4**
 r_A — относительная частота появления события A **2.4**
 $P(A|B)$ — условная вероятность события A при условии события B **3.1**
 $P_n(k)$ — биномиальная вероятность **3.6**
 $P(k; \lambda)$ — вероятность, определяемая распределением Пуассона **3.6, 4.4**
 $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального (гауссова) распределения **3.6, 4.6**
 $\varphi(x)$ — плотность стандартного нормального (гауссова) распределения **3.6, 4.6**
 $\Phi_0(x)$ — функция Лапласа **4.6**
 $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера **4.6, XI**
 $B(x, y)$ — бета-функция Эйлера **6.4**
 X, Y, Z, \dots — случайные величины **4.1**
 $P\{X < x\}, P\{X \geq x\}, P\{x_1 \leq X < x_2\}$ — вероятности событий $\{X < x\}, \{X \geq x\}, \{x_1 \leq X < x_2\}$ соответственно **4.2**
 $F(x), F_X(x)$ — функция распределения (вероятностей) случайной величины X **4.2**

-
- p_i, p_{X_i} — вероятность события $\{X = x_i\}$ для дискретной случайной величины X **4.3**
- $p(x), p_X(x)$ — плотность распределения (вероятностей) непрерывной случайной величины X **4.5**
- $\Phi_{m,\sigma}(x)$ — функция нормального (гауссова) распределения с параметрами m и σ **4.6**
- $\varphi_{m,\sigma}(x)$ — плотность нормального (гауссова) распределения с параметрами m и σ **4.6**
- \mathbb{R}^n — n -мерное линейное арифметическое пространство, $n \geq 1$ **5.1, IV**
- $(X, Y), (X_1, X_2)$ — двумерный случайный вектор **5.1**
- $(X, Y, Z), (X_1, X_2, X_3)$ — трехмерный случайный вектор **5.1**
- $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ — n -мерный случайный вектор **5.1**
- $F(x_1, \dots, x_n), F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$ — функция распределения n -мерного случайного вектора (X_1, \dots, X_n) **5.1**
- p_{ij} — вероятность совместного осуществления событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ для двумерного дискретного случайного вектора (X, Y) **5.2**
- $p(x, y), p_{X,Y}(x, y)$ — плотность распределения непрерывного двумерного случайного вектора (X, Y) **5.3**
- $\Sigma, \Sigma_{\vec{X}}$ — ковариационная матрица случайного вектора \vec{X} **5.5, 7.4**
- $\tilde{\Sigma}, \tilde{\Sigma}_{\vec{X}}$ — матрица, обратная ковариационной матрице случайного вектора \vec{X} **5.5, 7.4**
- $\rho = \rho(X, Y)$ — коэффициент корреляции случайных величин X и Y **5.5, 7.4**
- $Y(X)$ — функция от случайной величины **6.2**
- $p_X * p_Y$ — свертка (композиция) плотностей распределения случайных величин X и Y **6.4**
- MX — математическое ожидание случайной величины X **7.1**

- DX — дисперсия случайной величины X 7.3
- m_k — начальный момент k -го порядка 7.3
- $\overset{\circ}{m}_k$ — центральный момент k -го порядка 7.3
- $P = P_{\vec{X}}$ — корреляционная матрица случайного вектора \vec{X} 7.4
- $\text{cov}(X, Y)$ — ковариация случайных величин X и Y 7.4
- γ_1 — асимметрия случайной величины 7.5
- γ_2 — эксцесс случайной величины 7.5
- Q_α — α -квантиль случайной величины 7.5
- $H(X)$ — энтропия случайной величины X 7.5
- $F_X(x|y), F_X(x|Y=y)$ — условная функция распределения случайной величины X при условии $Y=y$ 8.1
- π_{ij}, π_{ij}^* — условные вероятности события $\{X=x_i\}$ при условии события $\{Y=y_j\}$ и события $\{Y=y_j\}$ при условии события $\{X=x_i\}$ для двумерного случайного вектора (X, Y) соответственно 8.1
- $p_X(x|y), p_X(x|Y=y)$ — условная плотность распределения случайной величины X при условии $Y=y$ 8.1
- $M(X|y), M(X|Y=y)$ — значение условного математического ожидания случайной величины X при условии $Y=y$ 8.1
- $M(X|Y)$ — условное математическое ожидание случайной величины X при условии Y 8.2
- $g(y), h(x)$ — регрессии X на Y и Y на X 8.2
- $D(X|y)$ — значение условной дисперсии случайной величины X при условии $Y=y$ 8.2
- $D(X|Y)$ — условная дисперсия случайной величины X при условии Y 8.2
- $\eta_{X|Y}$ — корреляционное отношение 8.2
- $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0$ — сходимость последовательности случайных величин к нулю с вероятностью 1 (почти наверное) 9.1

$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} 0$ — сходимость последовательности случайных величин к нулю по вероятности **9.1**

$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{с.к.}} 0$ — сходимость последовательности случайных величин к нулю в среднем квадратичном **9.1**

$F_n(x) \xRightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(x)$ — слабая сходимость последовательности функций распределения **9.1**

$f(t), f_X(t)$ — характеристическая функция случайной величины X **9.3**

$\tilde{f}(s)$ — преобразование Лапласа — Стильеса **9.3**

$f^*(z)$ — производящая функция **9.3**

$[a, b]$ — замкнутый промежуток (отрезок) **I**

(a, b) — открытый промежуток (интервал) **I**

$[a, b), (a, b]$ — полуинтервалы **I**

$i = \overline{1, n}$ — число i принимает последовательно все натуральные значения от 1 до n включительно **I**

$n!$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно **I, 2.2**

Буквы латинского алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A a <i>A a</i>	а	N n <i>N n</i>	эн
B b <i>B b</i>	бэ	O o <i>O o</i>	о
C c <i>C c</i>	цэ	P p <i>P p</i>	пэ
D d <i>D d</i>	дэ	Q q <i>Q q</i>	ку
E e <i>E e</i>	е	R r <i>R r</i>	эр
F f <i>F f</i>	эф	S s <i>S s</i>	эс
G g <i>G g</i>	же	T t <i>T t</i>	тэ
H h <i>H h</i>	аш	U u <i>U u</i>	у
I i <i>I i</i>	и	V v <i>V v</i>	вэ
J j <i>J j</i>	йот	W w <i>W w</i>	дубль-вэ
K k <i>K k</i>	ка	X x <i>X x</i>	икс
L l <i>L l</i>	эль	Y y <i>Y y</i>	игрек
M m <i>M m</i>	эм	Z z <i>Z z</i>	зэт

Буквы греческого алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A α	альфа	I ι	йота	P ρ	ро
B β	бета	K κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	T τ	тау
Δ δ	дельта	M μ	ми	Υ υ	ипсилон
E ε	эпсилон	N ν	ни	Φ φ	фи
Z ζ	дзета	Ξ ξ	кси	X χ	хи
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо „йот“ иногда говорят „жи“).

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей является разделом математики, в котором изучают математические модели *случайных экспериментов*, т.е. экспериментов, исходы которых нельзя определить однозначно условиями проведения опыта. При этом предполагается, что сам эксперимент может быть повторен (хотя бы в принципе) любое число раз при неизменном комплексе условий, а исходы эксперимента обладают *статистической устойчивостью*.

Приведем простейшие примеры таких экспериментов.

1. Однократное подбрасывание монеты. Возможными исходами в этом опыте будут: падение монеты „гербом“ вверх (или просто выпадение „герба“) или выпадение „цифры“. В результате проведения опыта возникает лишь один исход, однако установить до проведения опыта, какой именно, невозможно.

2. Бросание игральной кости. В данном случае возможны шесть исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков на верхней грани бросаемой кости.

3. Работа телефонной станции. Предположим, что нас интересует число вызовов, которое поступит за определенный промежуток времени на телефонную станцию. Как и в предыдущих примерах, интересующую нас величину до проведения эксперимента определить невозможно, хотя очевидно, что результатом будет целое неотрицательное число.

4. Измерение времени безотказной работы электрической лампочки. Время безотказной работы лампочки, которое в принципе может быть любым неотрицательным числом, для конкретного образца предсказать невозможно.

5. Стрельба по плоской мишени с большого расстояния. Введем в плоскости мишени прямоугольную систему координат Oxy , в которой начало координат (точка O) является точкой

прицеливания. Возможные исходы в этом опыте можно описать координатами $(x; y)$ точки падения снаряда. Случайные воздействия на траекторию движения снаряда приводят к тому, что установить координаты $(x; y)$ можно только после выстрела.

Примеров такого рода можно привести сколь угодно много. Принято говорить, что исходы опытов (экспериментов), подобных перечисленным выше, являются случайными.

В чем же состоит общность опытов со случайными исходами? Оказывается, несмотря на то что результат каждого из перечисленных выше экспериментов предсказать невозможно, на практике для них уже давно была замечена закономерность определенного вида, а именно: при проведении большого количества испытаний наблюдаемые частоты появления каждого случайного события (*наблюдённой частотой случайного события* называют отношение числа его появлений к общему числу испытаний) стабилизируются, т.е. все меньше отличаются от некоторого числа, называемого вероятностью события. Так, при многократном бросании игральной кости „шестерка“ выпадает в среднем в каждом шестом случае.

Такое свойство **устойчивости частоты** позволяет, не имея возможности предсказать исход отдельного опыта, достаточно точно прогнозировать свойства явлений, связанных с рассматриваемым опытом. Поэтому методы теории вероятностей в современной жизни проникли во все сферы деятельности человека, причем не только в естественно-научные, экономические, но и гуманитарные, такие, как история, лингвистика и т.д.

Практическое применение методов теории вероятностей заключается в пересчете вероятностей „простых“ случайных событий в вероятности „сложных“ событий. Например, вероятность выпадения „герба“ при однократном подбрасывании обычной монеты равна $1/2$. Спрашивается, как часто выпадают два „герба“ при трех подбрасываниях монеты? Решение

данной задачи дает *формула Бернулли*, которую мы получим в третьей главе.

Однако определение вероятности через частоту не является удовлетворительным для теории вероятностей как математической науки. Поэтому А.Н. Колмогоров предложил *аксиоматическое определение* вероятности. Именно оно и является общепринятым в настоящее время. В частности, на его основе изложен курс теории вероятностей в предлагаемом учебнике.

Характерной особенностью современной теории вероятностей является тот факт, что, несмотря на свою практическую направленность, в ней используют новейшие разделы почти всех разделов математики, а значит, для ее изучения на высоком уровне требуются математические знания, в объеме существенно превосходящем возможности технического вуза. В связи с этим даже при подготовке специалистов в области теории вероятностей принят многоуровневый подход, в соответствии с которым изложение ведется сначала на первом (простейшем) уровне, затем на втором (более сложном) и т.д. Настоящий учебник соответствует первому уровню изложения, скорректированному с учетом математической подготовки студентов технического университета. Впрочем, этого уровня вполне достаточно для того, чтобы научиться решать многие практические задачи.

Приведем краткую историческую справку о становлении теории вероятностей как раздела математики.

Исторически теория вероятностей возникла как теория азартных игр (рулетка, игральные кости, карты и т.д.) в конце XVII в. Начало ее развития связано с именами Б. Паскаля, Я. Бернулли, А. Муавра, П. Лапласа, а позднее (начало XIX в.) — К. Гаусса, С. Пуассона.

Первые исследования по теории вероятностей в России относятся к середине XIX в. и связаны с именами таких выдающихся математиков, как Н.И. Лобачевский (1792–1856), М.В. Остроградский (1801–1861), В.Я. Буняковский (1804–1889). В частности, В.Я. Буняковский издал в 1846 г. один из первых

учебников по теории вероятностей (с приложениями в страховом деле, демографии и др.).

Дальнейшее развитие теории вероятностей (конец XIX в. и 20-е гг. XX в.) в основном связано с именами русских ученых П.Л. Чебышева (1821–1894) и его учеников А.М. Ляпунова (1857–1918) и А.А. Маркова (1856–1922). С 30-х гг. XX в. этот раздел математики переживает период расцвета, находя приложения в различных областях науки и техники. И в это время российские ученые С.Н. Бернштейн (1880–1968), А.Я. Хинчин (1894–1959), А.Н. Колмогоров (1903–1987) и многие другие вносят существенный вклад в развитие теории вероятностей. Именно А.Н. Колмогоров в 1933 г. предложил аксиоматическое построение теории вероятностей, установив ее связь с другими разделами математики (теорией множеств, теорией меры, функциональным анализом).

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Любая современная математическая дисциплина основывается на некоторых исходных понятиях (аксиомах). В теории вероятностей такой аксиоматический подход был введен сравнительно недавно (в 30-х гг.) А.Н. Колмогоровым.

Аксиомы, лежащие в основе этого подхода, отражают и обобщают те свойства понятия *вероятности случайных событий*, которые использовались на интуитивном уровне с давних времен — с момента зарождения теории вероятностей как теории „азартных игр“.

В этой и следующих главах будет показано, что основные понятия и аксиомы теории вероятностей представляют собой математические отражения понятий, хорошо известных любому человеку, наблюдавшему опыты со случайными исходами. Одним из таких понятий является *пространство элементарных исходов*, введение которого позволяет при решении конкретных практических задач оперировать общим для современной математики аппаратом теории множеств.

1.1. Пространство элементарных исходов

Определение 1.1. *Элементарным исходом (или элементарным событием)* называют любой простейший (т.е. неделимый в рамках данного опыта) исход опыта. Множество всех элементарных исходов будем называть *пространством элементарных исходов*.

Другими словами, множество исходов опыта образует пространство элементарных исходов, если выполнены следующие требования:

- в результате опыта один из исходов обязательно происходит;
- появление одного из исходов опыта исключает появление остальных;
- в рамках данного опыта нельзя разделить элементарный исход на более мелкие составляющие.

В дальнейшем пространство элементарных исходов будем обозначать прописной буквой Ω , а сами элементарные исходы — строчной буквой ω , снабженной, при необходимости, индексами. То, что элемент ω принадлежит Ω , записывают в виде $\omega \in \Omega$, а тот факт, что множество Ω состоит из элементов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$, и только из них, записывают в виде

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$$

или в виде

$$\Omega = \{\omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

В частности, Ω может содержать конечное число элементарных исходов.

Рассмотрим примеры, поясняющие понятие пространства элементарных исходов.

Пример 1.1. Пусть опыт состоит в однократном подбрасывании монеты. При математическом описании этого опыта естественно отвлечься от несущественных возможностей (например, монета встанет на ребро) и ограничиться только двумя элементарными исходами: выпадением „герба“ (можно обозначить этот исход Γ , ω_Γ или ω_1) и выпадением „цифры“ (Π , ω_Π или ω_2). Таким образом, $\Omega = \{\Gamma, \Pi\}$, $\Omega = \{\omega_\Gamma, \omega_\Pi\}$ или $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

При двукратном подбрасывании монеты (или однократном подбрасывании двух монет) пространство элементарных исходов будет, очевидно, содержать четыре элемента, т.е.

$$\Omega = \{\omega_{\Gamma\Gamma}, \omega_{\Gamma\Pi}, \omega_{\Pi\Gamma}, \omega_{\Pi\Pi}\},$$

где, например, $\omega_{\Gamma\Gamma}$ — появление „герба“ и при первом, и при втором подбрасываниях.

Пример 1.2. При однократном бросании игральной кости возможен любой из шести элементарных исходов $\omega_1, \dots, \omega_6$, где ω_i , $i = \overline{1, 6}$, означает появление i очков на верхней грани кости, т.е.

$$\Omega = \{\omega_i, \quad i = \overline{1, 6}\}.$$

При двукратном бросании игральной кости каждый из шести возможных исходов при первом бросании может сочетаться с каждым из шести исходов при втором бросании, т.е.

$$\Omega = \{\omega_{ij}, \quad i, j = \overline{1, 6}\},$$

где ω_{ij} — исход опыта, при котором сначала выпало i , а затем j очков.

Нетрудно подсчитать, что пространство элементарных исходов Ω содержит 36 элементарных исходов.

Пример 1.3. Пусть опыт заключается в определении числа вызовов, поступивших на телефонную станцию в течение заданного промежутка времени. Разумеется, реально это число не превышает некоторого значения (определяемого, в частности, пропускной способностью линий связи), но, поскольку это значение может быть достаточно большим, в качестве пространства элементарных исходов можно принять множество целых неотрицательных чисел, т.е.

$$\Omega = \{0, 1, \dots, n, \dots\}.$$

Пример 1.4. Предположим, что стрелок производит единственный выстрел по плоской мишени. В этом случае Ω естественно отождествить с множеством точек на плоскости или множеством пар $(x; y)$ действительных чисел, где x — абсцисса, а y — ордината точки попадания пули в мишень в некоторой системе координат. Таким образом,

$$\Omega = \{(x; y): -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}.$$

1.2. События, действия над ними

Введем понятие случайного *события*. Поскольку в дальнейшем будем рассматривать только случайные события, то, начиная с этого момента, будем называть их, как правило, просто событиями.

Определение 1.2. Любой набор *элементарных исходов*, или, иными словами, произвольное подмножество *пространства элементарных исходов*, называют ***событием***.

Элементарные исходы, которые являются элементами рассматриваемого подмножества (события), называют ***элементарными исходами, благоприятствующими*** данному ***событию***, или ***образующими*** это ***событие***.

События будем обозначать прописными латинскими буквами, снабжая их при необходимости индексами, например: A, B_1, C_3 и т.д.

Сразу же оговоримся, что определение 1.2 события будет уточнено в следующем параграфе в том случае, когда Ω не является счетным множеством. Здесь же мы вводим определение 1.2 по двум причинам.

Во-первых, основная цель настоящего параграфа — наглядно показать, как физическое понятие случайного события формализуется в математических понятиях теории множеств, и описать операции над событиями.

Во-вторых, определение 1.2 вполне удовлетворительно можно применять для решения практических задач, в то время как строгое определение события служит лишь для построения теории вероятностей как раздела современной математики, оперирующей логически безупречными, но сложными для неподготовленного читателя понятиями.

Часто используется следующая терминология: говорят, что событие A произошло (или наступило), если в результате опыта появился какой-либо из элементарных исходов $\omega \in A$.

Замечание 1.1. Во многих учебниках по теории вероятностей (и в данной книге тоже) для удобства изложения материала, особенно при решении задач, термин „событие“ как подмножество пространства элементарных событий Ω отождествляется с термином „событие произошло в результате опыта“, или „событие заключается в появлении таких-то элементарных исходов“.

Так, в примере 1.2, где $\Omega = \{\omega_i, i = \overline{1, 6}\}$, событием A является подмножество $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$. Но мы будем также говорить, что событие A — это появление любого из элементарных исходов $\omega_i, i = 1, 3, 5$.

Пример 1.5. В примере 1.2 было показано, что при однократном бросании игральной кости

$$\Omega = \{\omega_i, \quad i = \overline{1, 6}\},$$

где ω_i — элементарный исход, заключающийся в выпадении i очков. Рассмотрим следующие события: A — выпадение четного числа очков; B — выпадение нечетного числа очков; C — выпадение числа очков, кратного трем. Очевидно, что

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}, \quad B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} \quad \text{и} \quad C = \{\omega_3, \omega_6\}.$$

Определение 1.3. Событие, состоящее из всех элементарных исходов, т.е. событие, которое обязательно происходит в данном опыте, называют *достоверным событием*.

Достоверное событие, как и пространство элементарных исходов, обозначают буквой Ω .

Определение 1.4. Событие, не содержащее ни одного элементарного исхода, т.е. событие, которое никогда не происходит в данном опыте, называют *невозможным событием*.

Невозможное событие будем обозначать символом \emptyset .

Пример 1.6. При бросании игральной кости достоверное событие можно описать, например, как выпадение хотя бы одного очка, а невозможное — как выпадение 7 очков. #

Часто бывает полезно наглядно представить события в виде **диаграммы Эйлера — Венна**. Изобразим все пространство элементарных исходов прямоугольником (рис. 1.1). При этом каждый элементарный исход ω соответствует точке внутри прямоугольника, а каждое событие A — некоторому подмножеству точек этого прямоугольника. Трактовкой

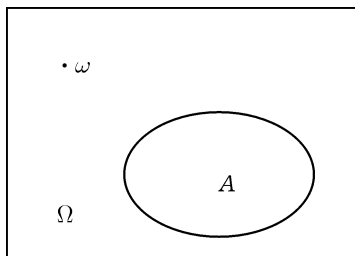


Рис. 1.1

диаграммы Эйлера — Венна может служить опыт с бросанием случайным образом частицы в прямоугольник. Тогда элементарный исход ω — это попадание частицы в точку ω прямоугольника, а событие A — в часть прямоугольника, задаваемую подмножеством A .

Рассмотрим теперь **операции (действия) над событиями**, которые, по существу, совпадают с операциями над подмножествами [I]. Эти операции будем иллюстрировать на диаграммах Эйлера — Венна. На рис. 1.2 заштрихованы области, которые соответствуют событиям, являющимся результатами таких операций.

Определение 1.5. Пересечением (произведением) двух событий A и B называют событие C , происходящее тогда и только тогда, когда одновременно происходят оба события A и B , т.е. событие, состоящее из тех и только тех элементарных исходов, которые принадлежат и событию A , и событию B (рис. 1.2, а).

Пересечение событий A и B записывают следующим образом:

$$C = A \cap B, \quad \text{или} \quad C = AB.$$

Определение 1.6. События A и B называют **несовместными**, или **непересекающимися**, если их пересечение является невозможным событием, т.е. если $A \cap B = \emptyset$ (рис. 1.2, б).

В противном случае **события** называют **совместными**, или **пересекающимися**.

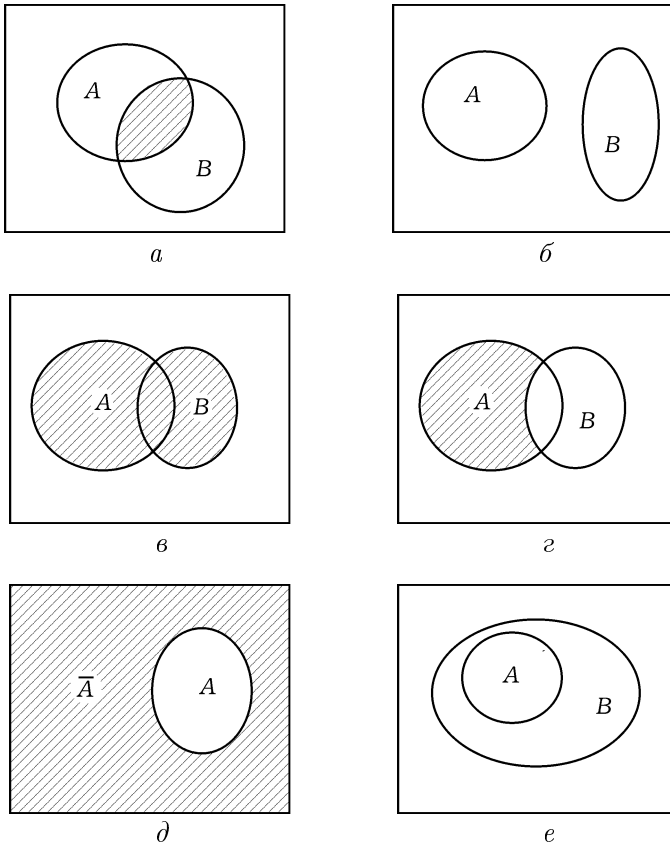


Рис. 1.2

Определение 1.7. *Объединением (суммой) двух событий A и B называют событие C , происходящее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A или B , т.е. событие C , состоящее из тех элементарных исходов, которые принадлежат хотя бы одному из подмножеств A или B (рис. 1.2, в).*

Объединение событий A и B записывают в виде

$$C = A \cup B.$$

Если события A и B несовместны, наряду со знаком „ \cup “ для их объединения употребляют знак „ $+$ “. Обычно знак „ $+$ “ применяют в том случае, если заведомо известно, что A и B несовместны, и это особо хотят подчеркнуть. Например, поскольку невозможное событие \emptyset несовместно с любым событием A , то

$$\emptyset \cup A = \emptyset + A = A.$$

Аналогично определяют понятия произведения и суммы событий для любого конечного числа событий и даже для бесконечных последовательностей событий. Так, событие

$$A_1 A_2 \dots A_n \dots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

состоит из элементарных исходов, принадлежащих всем событиям A_n , $n \in \mathbb{N}$, а событие

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

состоит из элементарных исходов, принадлежащих хотя бы одному из событий A_n , $n \in \mathbb{N}$. В частности, **события** A_1, A_2, \dots, A_n называют **парно несовместными (непересекающимися)**, если

$$A_i A_j = \emptyset$$

для любых $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, и **несовместными (непересекающимися) в совокупности**, если

$$A_1 A_2 \dots A_n = \emptyset.$$

Определение 1.8. *Разностью двух событий A и B называют событие C , происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A , но не происходит событие B , т.е.*

событие C , состоящее из тех элементарных исходов, которые принадлежат A , но не принадлежат B (рис. 1.2, $г$).

Разность событий A и B записывают в виде:

$$C = A \setminus B.$$

Определение 1.9. *Дополнением события A* (обычно обозначают \overline{A}) *называют событие, происходящее тогда и только тогда, когда не происходит событие A* (рис. 1.2, $д$). Другими словами,

$$\overline{A} = \Omega \setminus A.$$

Событие \overline{A} называют также *событием, противоположным* событию A .

Если некоторое событие записано в виде нескольких действий над различными событиями, то сначала переходят к дополнениям, а затем умножают и, наконец, складывают и вычитают (слева направо) события. Так, формула

$$C = A_1 \overline{A_2} B_1 \cup A_3 \overline{B_2} \setminus B_3$$

эквивалентна формуле

$$C = \{ [A_1 (\overline{A_2}) B_1] \cup [A_3 (\overline{B_2})] \} \setminus B_3.$$

Следует отметить, что все действия над событиями можно получить с помощью только двух действий — объединения и дополнения (или пересечения и дополнения). Основанием для этого утверждения служат законы де Моргана, а также соотношение

$$A \setminus B = A \overline{B}.$$

Кроме перечисленных выше действий над событиями нам в дальнейшем понадобится понятие включения.

Определение 1.10. Событие A включено в событие B , что записывают $A \subset B$, если появление события A обязательно

влечет за собой наступление события B (рис. 1.2, e), или каждый элементарный исход ω , принадлежащий A , обязательно принадлежит и событию B .

Ясно, что включение $A \subset B$ эквивалентно равенству $AB = A$.

Используют и обратное понятие: событие B включает событие A ($B \supset A$), если $A \subset B$.

Пример 1.7. Рассмотрим техническое устройство (ТУ), состоящее из m элементов. В теории надежности принято говорить, что элементы соединены последовательно, если ТУ прекращает функционировать при отказе любого элемента, и соединены параллельно, если прекращение функционирования ТУ наступает только при отказе всех m элементов. Условное изображение последовательного и параллельного соединений представлено на рис. 1.3, a и b соответственно.

Обозначим A событие, означающее отказ ТУ, а A_i — событие, означающее отказ i -го элемента ($i = \overline{1, m}$). Тогда события A и A_i связаны соотношениями:

для рис. 1.3, a $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$,

для рис. 1.3, b $A = A_1 \cap \dots \cap A_m$.

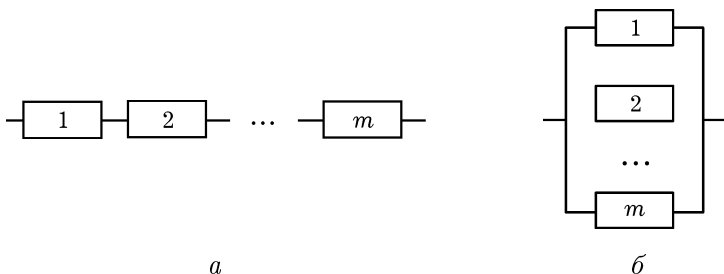


Рис. 1.3

Очевидно, что при параллельном соединении элементов событие A включено в каждое событие A_i , $i = \overline{1, m}$, а при последовательном соединении, наоборот, любое событие A_i , $i = \overline{1, m}$, включено в событие A . #

Приведем основные свойства операций над событиями, справедливость которых нетрудно проверить с помощью диаграмм Эйлера — Венна (проделайте это самостоятельно).

1. Коммутативность суммы и произведения:

$$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA.$$

2. Ассоциативность суммы и произведения:

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (AB)C = A(BC).$$

3. Дистрибутивность относительно сложения:

$$(A \cup B)C = AC \cup BC.$$

4. Дистрибутивность относительно умножения (новое свойство, не выполняющееся для чисел):

$$AB \cup C = (A \cup C)(B \cup C).$$

5. Включение A в B , т.е. $A \subset B$, влечет за собой включение \overline{B} в \overline{A} , т.е. $\overline{A} \supset \overline{B}$.

6. Совпадение двойного дополнения с исходным событием:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

7. Совпадение суммы и произведения одинаковых событий с самим событием

$$A \cup A = AA = A.$$

8. **Законы де Моргана:**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Замечание 1.2. Законы де Моргана верны для любого конечного числа событий:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 A_2 \dots A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}.$$

1.3. Сигма-алгебра событий

Настоящий параграф носит ознакомительный характер и ни в коем случае не претендует на строгость изложения*. Необходимость его введения обусловлена тем, что современная теория вероятностей основывается на понятии *вероятностного пространства*, одним из трех компонентов которого является *сигма-алгебра событий*.

В предыдущем параграфе мы назвали событием любое подмножество *пространства элементарных исходов* Ω . Такое определение допустимо, если Ω является конечным или счетным множеством. Оказывается, однако, что в случае несчетного множества элементарных исходов уже нельзя построить логически непротиворечивую теорию, называя событием произвольное подмножество множества Ω . Поэтому событиями в этом случае называют не любые подмножества элементарных исходов, а только подмножества из Ω , принадлежащие некоторому классу \mathfrak{B} . Этот класс в теории множеств принято называть *сигма-алгеброй событий* (пишут σ -алгебра).

С точки зрения здравого смысла *событие* — это то, что мы наблюдаем после проведения опыта. В частности, если можно после опыта установить, произошли или нет события A и B , то можно также сказать, произошли или нет события \bar{A} и \bar{B} , *объединение*, *пересечение* и *разность событий* A и B . Таким образом, σ -алгебра событий обязана быть классом подмножеств, замкнутым относительно приведенных операций над подмножествами, т.е. указанные операции над элементами (подмножествами) данного класса приводят к элементам (подмножествам) того же класса.

Дадим теперь строгое определение σ -алгебры событий.

*Строгое обоснование основ теории вероятностей можно найти в специальной математической литературе (см., например: Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974).

Определение 1.11. *Сигма-алгеброй (σ -алгеброй)* \mathfrak{B} называют непустую систему подмножеств некоторого множества J , удовлетворяющую следующим двум условиям.

1. Если подмножество A принадлежит \mathfrak{B} , то дополнение \overline{A} принадлежит \mathfrak{B} .

2. Если подмножества $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ принадлежат \mathfrak{B} , то их объединение $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ и их пересечение $A_1 A_2 \dots A_n \dots$ принадлежит \mathfrak{B} .

Поскольку $J = A \cup \overline{A}$ и $\emptyset = \overline{J}$, то множество J и пустое множество \emptyset принадлежат \mathfrak{B} .

Рассмотрим пространство элементарных исходов Ω . Элементы некоторой σ -алгебры \mathfrak{B} , заданной на Ω , будем называть **событиями**. В этом случае σ -алгебру \mathfrak{B} принято называть **сигма-алгеброй (σ -алгеброй) событий**.

Любая σ -алгебра событий содержит *достоверное событие* Ω и *невозможное событие* \emptyset .

В случае конечного или счетного пространства элементарных исходов Ω в качестве σ -алгебры событий обычно рассматривают множество всех подмножеств Ω .

Замечание 1.3. Если в условии 2 счетное множество событий заменить на конечное, то получим определение **алгебры событий**. Любая σ -алгебра событий обязательно является алгеброй событий. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Пример 1.8. Пусть опыт состоит в подбрасывании один раз тетраэдра, каждая грань которого помечена одним из чисел 1, 2, 3 и 4.

Очевидно, что пространство элементарных исходов Ω в этом опыте имеет вид

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

где ω_i — падение тетраэдра на грань с числом i , $i = \overline{1, 4}$.

Поскольку в рассматриваемом опыте может происходить одно из следующих событий:

$$\emptyset,$$

$$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\},$$

$$\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}, \{\omega_3, \omega_4\},$$

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

то алгебра событий будет содержать все подмножества Ω , включая Ω (достоверное событие) и \emptyset (невозможное событие).

Пример 1.9. Пусть опыт состоит в случайном бросании точки на числовую прямую $\mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$, которая в данном случае будет представлять собой пространство элементарных исходов Ω . Ясно, что, зная результат опыта, всегда можно установить, попала или нет точка в любой из промежутков $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) . Поэтому относительно σ -алгебры событий \mathfrak{B} предполагают, что она содержит все эти промежутки.

В принципе могут существовать различные σ -алгебры, удовлетворяющие этому требованию. Но среди них есть одна σ -алгебра, элементы которой принадлежат всем остальным. Ее называют *минимальной*, или *борелевской*, *σ -алгеброй* на числовой прямой.

Аналогично определяют борелевскую σ -алгебру и в \mathbb{R}^n , $n > 1$. #

В заключение заметим, что с точки зрения повседневной практики подмножества пространства Ω элементарных исходов, не являющиеся событиями, представляют собой чистую математическую абстракцию и в практических задачах никогда не встречаются. Даже само доказательство их существования представляет весьма сложную задачу. Поэтому мы предлагаем при первоначальном знакомстве с теорией веро-

ятности под событием понимать произвольное подмножество пространства Ω элементарных исходов, а под σ -алгеброй событий — совокупность всех подмножеств множества Ω .

1.4. Решение типовых примеров

Пример 1.10. Опыт состоит в однократном бросании игральной кости. Опишем пространство элементарных исходов Ω и укажем состав подмножеств, соответствующих следующим событиям:

а) A — число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, кратно трем;

б) B — на верхней грани игральной кости выпало нечетное число очков;

в) C — число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, больше трех;

г) D — число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, меньше семи;

д) E — число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, не является целым числом;

е) F — число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, заключено в пределах от 0,5 до 1,5.

Установим пары совместных событий.

Пространство элементарных исходов в данном опыте имеет вид

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\},$$

где ω_i — выпадение на верхней грани игральной кости i очков.

а. Очевидно, что событие A происходит тогда и только тогда, когда выпадает либо 3, либо 6 очков, т.е. $A = \{\omega_3, \omega_6\}$.

Аналогично получаем следующие выражения для остальных описанных событий:

б. $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$.

в. $C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

г. $D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \Omega$.

д. $E = \emptyset$.

е. $F = \{\omega_1\}$.

Сопоставляя попарно события и проверяя наличие общих элементов, находим пары совместных событий: A и B ; A и C ; A и D ; B и C ; B и D ; B и F ; C и D ; D и F .

Пример 1.11. Игральную кость бросают один раз. События A, B, C, D, E и F определены в примере 1.10. Опишем следующие события:

а) $G_1 = \overline{B}$;

б) $G_2 = \overline{C}$;

в) $G_3 = AB$;

г) $G_4 = A \cup B$;

д) $G_5 = A \setminus B$;

е) $G_6 = E \cup D$;

ж) $G_7 = EF$.

а. Событием, противоположным событию B , является выпадение четного числа очков, т.е. $G_1 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Аналогичные рассуждения приводят нас к следующим результатам.

б. $G_2 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ — выпало не более 3 очков.

в. $G_3 = \{\omega_3\}$ — выпавшее число очков нечетно и кратно трем, т.е. равно трем.

г. $G_4 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$ — выпавшее число очков или нечетно, или кратно трем.

д. $\{\omega_6\}$ — выпавшее число очков четно и кратно трем, т.е. равно 6.

е. $G_6 = \emptyset \cup D = D = \Omega$.

ж. $G_7 = \emptyset F = \emptyset$.

Пример 1.12. Из множества супружеских пар наугад выбирают одну пару. Событие A — мужу больше 30 лет, событие B — муж старше жены, событие C — жене больше 30 лет. Выясним смысл событий:

а) ABC ;

б) $A \setminus AB$;

в) $A\overline{B}C$.

Покажем, что $A\overline{C} \subset B$.

а. ABC — оба супруга старше 30 лет, причем муж старше жены.

б. $A \setminus AB$ — мужу больше 30 лет, но он не старше своей жены.

в. $A\overline{B}C$ — оба супруга старше 30 лет, причем муж не старше своей жены.

$A\overline{C}$ — пересечение событий; мужу больше 30 лет, а жене не больше 30 лет. Следовательно, муж старше жены, т.е. $A\overline{C} \subset B$.

Пример 1.13. Пусть A, B — произвольные события. Докажем следующие равенства:

а) $(A \cup B)(A \cup \overline{B}) = A$;

б) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B) = AB$.

Используя свойства операций над событиями, получаем:

а. $(A \cup B)(A \cup \overline{B}) = AA \cup AB \cup A\overline{B} \cup B\overline{B} = A \cup A(B \cup \overline{B}) \cup \emptyset = A \cup A = A$.

б. $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B) = A(\overline{A} \cup B) = AB$.

Пример 1.14. Выясним, в каких случаях совместны (в совокупности) события $A \cup B$, $\overline{A} \cup B$ и $A \cup \overline{B}$?

Так как $(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B}) = AB$, то события $A \cup B$, $\overline{A} \cup B$ и $A \cup \overline{B}$ совместны тогда и только тогда, когда совместны события A и B .

Пример 1.15. Схема электрической цепи приведена на рис. 1.4. Выход из строя элемента i — событие A_i , $i = \overline{1, 4}$. Запишем выражения для событий A и \overline{A} , если A означает разрыв цепи.

Разрыв цепи произойдет, если выйдет из строя элемент

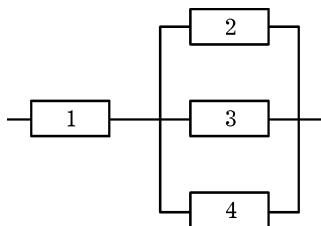


Рис. 1.4

1 или все три элемента 2, 3, 4, т.е. произойдут событие A_1 или событие $A_2A_3A_4$. Поэтому

$$A = A_1 \cup A_2A_3A_4.$$

В соответствии с законами де Моргана находим

$$\overline{A} = \overline{A_1 \cup A_2A_3A_4} = \overline{A_1}(\overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_4}).$$

Вопросы и задачи

1.1. Что понимают под пространством элементарных исходов?

1.2. Что называют случайным событием?

1.3. Какое событие называют достоверным? Какое событие называют невозможным?

1.4. Какие действия над событиями Вы знаете?

1.5. Какие два события называют несовместными? Какие события называют совместными?

1.6. Какие n событий ($n > 2$) называют несовместными попарно? в совокупности?

1.7. Какие события называют противоположными?

1.8. Перечислите свойства операций над событиями.

1.9. В каком случае говорят, что событие A включено в событие B ?

1.10. Какими свойствами должна обладать некоторая система подмножеств пространства элементарных исходов Ω для того, чтобы быть σ -алгеброй событий? алгеброй событий?

1.11. Что называют борелевской σ -алгеброй на числовой прямой?

1.12. Случайным образом выбирают одну из 28 костей домино. Опишите пространство элементарных исходов Ω . Перечислите все элементарные исходы, из которых состоят следующие события:

- а) A — на выбранной кости очки совпадают;
- б) B — сумма очков на выбранной кости равна 6;
- в) C — произведение числа очков на кости нечетно;
- г) $B \setminus A$; д) AB ; е) AC ; ж) $AB \setminus C$; з) $(A \cup B)C$.

О т в е т: $\Omega = \{(i, j), i, j = \overline{0, 6}, i \leq j\}$;

- а) $A = \{(0, 0), (1, 1), \dots, (6, 6)\}$;
- б) $B = \{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3)\}$;
- в) $C = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 3), (3, 5), (5, 5)\}$;
- г) $B \setminus A = \{(0, 6), (1, 5), (2, 4)\}$; д) $AB = \{(3, 3)\}$;
- е) $AC = \{(1, 1), (3, 3), (5, 5)\}$; ж) $AB \setminus C = \emptyset$;
- з) $(A \cup B)C = \{(1, 1), (1, 5), (3, 3), (5, 5)\}$.

1.13. Производят обследование случайным образом выбранной семьи, имеющей четырех детей, с целью определения пола этих детей. Пол каждого ребенка отмечают в порядке старшинства. Определите:

- а) из какого числа элементарных исходов состоит пространство элементарных исходов;
- б) сколько элементарных исходов соответствуют семьям, в которых первый ребенок — девочка;
- в) сколько элементарных исходов соответствуют семьям, в которых есть дети обоего пола.

О т в е т: а) 16; б) 8; в) 14.

1.14. По мишени производят три выстрела. Пусть событие A_i , $i = 1, 2, 3$, — попадание при i -м выстреле. Представьте в виде объединения и пересечения событий A_i или $\overline{A_i}$ следующие события:

- а) A — три попадания в мишень;
- б) B — три промаха;
- в) C — хотя бы одно попадание;
- г) D — хотя бы один промах;

- д) E — не менее двух попаданий;
 е) F — не больше одного попадания;
 ж) G — попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.

О т в е т:

- а) $A = A_1 A_2 A_3$; б) $B = \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}$;
 в) $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$; г) $D = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$;
 д) $E = \overline{A_1} A_2 A_3 \cup A_1 \overline{A_2} A_3 \cup A_1 A_2 \overline{A_3} \cup A_1 A_2 A_3$;
 е) $F = A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 \cup \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}$; ж) $G = \overline{A_1} \overline{A_2}$.

1.15. Монету подбрасывают три раза. Опишите пространство элементарных исходов Ω и определите подмножества, соответствующие следующим событиям:

- а) A — „герб“ выпал ровно один раз;
 б) B — ни разу не выпала „цифра“;
 в) C — выпало больше „гербов“, чем „цифр“;
 г) D — „герб“ выпал не менее двух раз подряд.

О т в е т: $\Omega = \{(Г, Г, Г), (Ц, Г, Г), (Г, Ц, Г), (Г, Г, Ц), (Г, Ц, Ц), (Ц, Г, Ц), (Ц, Ц, Г), (Ц, Ц, Ц)\}$;

- а) $A = \{(Г, Ц, Ц), (Ц, Г, Ц), (Ц, Ц, Г)\}$;
 б) $B = \{(Г, Г, Г)\}$;
 в) $C = \{(Г, Г, Г), (Ц, Г, Г), (Г, Ц, Г), (Г, Г, Ц)\}$;
 г) $D = \{(Г, Г, Г), (Ц, Г, Г), (Г, Г, Ц)\}$.

1.16. Пусть A, B, C — случайные события. Выясните смысл неравенств: а) $ABC = A$; б) $A \cup B \cup C = A$.

О т в е т:

- а) $A \subset BC$, т.е. событие BC происходит всегда, когда происходит событие A ;
 б) $B \subset A, C \subset A$, т.е. всякий раз, когда происходит B или C , происходит также и A .

1.17. Пусть $A \subset B$. Упростите выражения:

- а) AB ; б) $A \cup B$; в) ABC ; г) $A \cup B \cup C$.

О т в е т:

- а) $AB = A$; б) $A \cup B = B$; в) $ABC = AC$; г) $A \cup B \cup C = B \cup C$.

1.18. Используя свойства операций над событиями, докажите следующие равенства:

а) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \overline{B} \overline{C}$; б) $\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

1.19. Два игрока играют в шахматы. Событие A — выиграл первый игрок, событие B — выиграл второй игрок. Что означают события:

а) \overline{AB} ; б) $\overline{B} \setminus A$; в) $\overline{A} \setminus B$?

О т в е т: Во всех случаях ничья.

1.20. Схема электрической цепи приведена на рис. 1.5. Через участок схемы, вышедший из строя, ток не проходит. Пусть событие A_i — выход из строя элемента i , $i = \overline{1, 6}$. Выразите события A и \overline{A} через события A_i , если A — выход из строя всей схемы.

О т в е т: $A = A_1 A_2 \cup A_5 (A_3 \cup A_4) \cup A_6$;

$$\overline{A} = (\overline{A_1 A_2}) (\overline{A_5 (A_3 \cup A_4)}) \overline{A_6}.$$

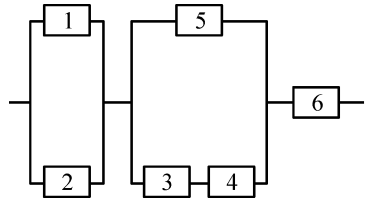


Рис. 1.5

1.21. На рис. 1.6 представлена структурная схема надежности некоторой системы. Пусть события A и A_i означают отказ системы и i -го элемента соответственно, $i = \overline{1, 4}$. Выразите события A и \overline{A} через события A_i и $\overline{A_i}$, $i = \overline{1, 4}$.

О т в е т: $A = (A_1 A_2 \cup A_3) A_4$;

$$\overline{A} = (\overline{A_1 \cup A_2}) \overline{A_3} \cup \overline{A_4}.$$

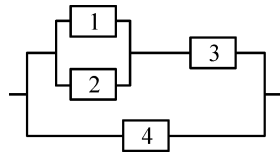


Рис. 1.6

2. ВЕРОЯТНОСТЬ

Говоря о *событиях*, мы с различной степенью уверенности относимся к возможности их наступления. Так, с большей уверенностью можно утверждать, что при однократном подбрасывании монеты выпадет „герб“, чем при однократном бросании игральной кости — 6 очков. Говорят, что первое событие более вероятно, чем второе.

Что же такое *вероятность* события? Возникает мысль поставить каждому событию A в соответствие некоторое число $P(A)$, которое характеризует меру возможности появления этого события. Если принять, что $P(\Omega) = 1$ и $P(\emptyset) = 0$ (хотя возможны и другие допущения), то естественно ожидать, что для любого события A выполняется условие $0 \leq P(A) \leq 1$.

Определение вероятности как меры возможности появления события в современной математике вводится на основании аксиом. Но, прежде чем перейти к аксиоматическому определению, остановимся на нескольких других определениях, которые исторически возникли раньше. Они, с одной стороны, позволяют лучше понять смысл аксиоматического определения, а с другой — во многих случаях являются рабочим инструментом для решения практических задач. Приведем их, следуя хронологическому порядку появления.

2.1. Классическое определение вероятности

В классическом определении вероятности исходят из того, что *пространство элементарных исходов* Ω содержит конечное число элементарных исходов, причем все они равновозможны. Понятие равновозможности поясним следующим образом.

Элементарные исходы в некотором опыте называют **равновозможными**, если в силу условий проведения опыта

можно считать, что ни один из них не является объективно более возможным, чем другие. Опыт, удовлетворяющий условию равновозможности элементарных исходов, часто называют также „*классической схемой*“.

Пусть N — общее число равновозможных элементарных исходов в Ω , а N_A — число *элементарных исходов, образующих событие A* (или, как говорят, *благоприятствующих* событию A).

Определение 2.1. *Вероятностью события A называют отношение числа N_A благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу N равновозможных элементарных исходов, т.е.*

$$P(A) = \frac{N_A}{N}.$$

Данное определение вероятности события принято называть *классическим определением вероятности*.

Заметим, что наряду с названием „классическая схема“ используют также названия „случайный выбор“, „равновероятный выбор“ и т.д.

Пример 2.1. Из урны, содержащей $k = 10$ белых и $l = 20$ черных шаров (шары отличаются лишь цветом), наугад вынимают один шар. Требуется найти вероятность $P(A)$ события A , заключающегося в том, что из урны извлечен белый шар.

Для решения поставленной задачи заметим, что число элементарных исходов в данном опыте совпадает с общим числом шаров в урне

$$N = k + l = 30,$$

причем все исходы равновозможны, а число благоприятствующих событию A исходов

$$N_A = k = 10.$$

Поэтому в соответствии с определением классической вероятности

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{k+l} = \frac{1}{3}. \quad \#$$

Используя классическое определение вероятности события, докажем следующие свойства.

Свойство 2.1. Для любого события A вероятность удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{P}(A) \geq 0.$$

Свойство очевидно, так как отношение N_A/N не может быть отрицательным.

Свойство 2.2. Для достоверного события Ω (которое содержит все N элементарных исходов)

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Свойство 2.3. Если события A и B несовместны ($AB = \emptyset$), то

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Действительно, если событию A благоприятствуют N_1 исходов, а событию B — N_2 исходов, то в силу несовместности A и B событию $A+B$ благоприятствуют $N_1 + N_2$ исходов. Следовательно,

$$\mathbf{P}(A+B) = \frac{N_1 + N_2}{N} = \frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Оказывается, что эти три свойства являются основными. Из них как следствия можно получить другие полезные свойства (подробнее они будут рассмотрены ниже), например:

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A); \quad \mathbf{P}(\emptyset) = 0;$$

$$\mathbf{P}(A) < \mathbf{P}(B), \quad \text{если} \quad A \subset B.$$

Недостаток классического определения заключается в том, что оно применимо только к пространствам элементарных исходов, состоящим из конечного числа равновероятных исходов.

Этим определением нельзя воспользоваться даже в тех случаях, когда пространство элементарных исходов конечно, но среди исходов есть более предпочтительные или менее предпочтительные.

2.2. Вычисление вероятностей с помощью формул комбинаторики

При решении задач, заключающихся в определении *вероятности*, наибольшую трудность представляет подсчет общего числа *элементарных исходов*, благоприятствующих данному событию. В этом случае полезно обратиться к формулам комбинаторики.

Теорема 2.1. Пусть даны m групп элементов, причем i -я группа состоит из n_i элементов. Общее число N способов, с помощью которых можно осуществить указанный выбор, определяется равенством

$$N = n_1 n_2 \dots n_m.$$

Это выражение называют *основной формулой комбинаторики*.

◀ Воспользуемся *методом математической индукции* по числу групп m .

Очевидно, что основная формула комбинаторики справедлива для $m = 1$. Предполагая ее справедливость для $m \geq 1$, покажем, что она выполняется также для $m + 1$. Действительно, поскольку первые m элементов можно выбрать $n_1 n_2 \dots n_m$ способами, а $(m + 1)$ -й элемент можно выбрать n_{m+1} способами, то все $m + 1$ элементов можно выбрать $(n_1 n_2 \dots n_m) n_{m+1} = n_1 n_2 \dots n_{m+1}$ способами. ▶

Пример 2.2. В трех ящиках находятся радиодетали трех типов с различными значениями параметров. В первом ящике

находится $n_1 = 20$ резисторов, во втором — $n_2 = 15$ конденсаторов и в третьем — $n_3 = 10$ транзисторов.

Найдем вероятность $P(A)$ того, что схема, собранная из выбранных наугад трех элементов разного типа, будет содержать элементы с минимальными значениями параметров. Согласно определению 2.1 классической вероятности,

$$P(A) = \frac{N_A}{N},$$

где N — общее число элементарных исходов; N_A — число исходов, благоприятствующих событию A . Очевидно, что

$$N_A = 1,$$

а в силу основной формулы комбинаторики

$$N = n_1 n_2 n_3 = 3000.$$

Поэтому искомая вероятность

$$P(A) = \frac{1}{3000}. \quad \#$$

Предположим теперь, что имеется группа из n различных элементов и из этой группы нужно выбрать m элементов.

Определение 2.2. Результат выбора m элементов из группы, содержащей n элементов, будем называть **выборкой** из n элементов по m . Если при этом элемент после выбора снова возвращается в группу, то выборку называют **выборкой с возвращением**. Если же выбранный элемент не участвует в дальнейшем выборе, то выборку называют **выборкой без возвращения**.

Заметим, что в любом случае результат выбора m элементов из группы, содержащей n элементов, будем называть **выборкой**.

Определение 2.3. Выборку, в которой не учитывают порядок выбора элементов, называют **сочетанием**, а выборку, в которой учитывают порядок выбора элементов, — **размещением**. При этом если рассматривают выборку с возвращением, то сочетание (размещение) называют **сочетанием (размещением) с повторениями**, а если рассматривают выборку без возвращения, то сочетание (размещение) называют **сочетанием (размещением) без повторений**, или просто **сочетанием (размещением)**.

Замечание 2.1. Размещение без повторений из n элементов по n элементов называют **перестановкой** из n элементов.

Теорема 2.2. Число размещений (без повторений) из n элементов по m определяется формулой

$$\begin{aligned} A_n^m &= n(n-1)\dots(n-m+1) = \\ &= \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{(n-m)(n-m-1)\dots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}. \end{aligned}$$

◀ Число A_n^m размещений (без повторений) подсчитаем следующим образом: первым можно выбрать любой из n элементов, вторым — любой из $n-1$ оставшихся, ..., m -м — любой из $n-m+1$ элементов. Воспользовавшись основной формулой комбинаторики (выбор осуществляется из групп размером $n, n-1, \dots, n-m+1$), приходим к утверждению теоремы. ▶

Замечание 2.2. Из этой теоремы, в частности, следует, что число P_n перестановок из n элементов равно $n!$

Пример 2.3. Из шести карточек, образующих слово „МАСТЕР“, наудачу выбирают четыре и выкладывают слева направо. Найдем вероятность $P(A)$ того, что в результате получится слово „ТЕМА“.

Элементарным исходом в данном опыте является любая четверка карточек с учетом порядка их выбора, т.е. размещение

из $n = 6$ элементов по $m = 4$ элементов. Поэтому число этих исходов равно числу размещений из шести элементов по четыре элемента, т.е.

$$N = A_6^4 = 360.$$

Очевидно, что число исходов, благоприятствующих событию A ,

$$N_A = 1.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{1}{360}.$$

Пример 2.4. К Новому году четырем детям были приготовлены подарки. Дед Мороз перепутал подарки и вручил их детям случайным образом.

Найдем вероятность $\mathbf{P}(A)$ того, что каждый ребенок получил свой подарок. В данном случае число элементарных исходов равно числу перестановок из $n = 4$ элементов, т.е.

$$N = P_4 = 24.$$

Поскольку число благоприятствующих событию A исходов

$$N_A = 1,$$

то

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{24}.$$

Теорема 2.3. Число C_n^m сочетаний (без повторений) из n элементов по m определяется формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

◀ Для нахождения числа сочетаний (без повторений) заметим, что сочетание от размещения отличается только тем, что

входящие в него элементы не упорядочены, т.е. могут быть выбраны в любой последовательности. Но число способов, которыми можно упорядочить m элементов, совпадает с числом перестановок из m элементов, т.е. равно $m!$. Значит, каждое сочетание соответствует $m!$ размещениям и

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}.$$

Отсюда получаем утверждение теоремы. ►

Замечание 2.3. Число C_n^m называют также *биномиальным коэффициентом* [1-2.6].

Пример 2.5. Группа состоит из $n = 20$ студентов. Для дежурства по институту наудачу выбирают $m = 3$ студента. Требуется найти вероятность $P(A)$ того, что будут выбраны первые три студента по списку.

Для решения поставленной задачи достаточно заметить, что, поскольку порядок выбора студентов не существен, общее число элементарных исходов равно числу сочетаний из $n = 20$ по $m = 3$, т.е.

$$N = C_{20}^3 = 1140.$$

Учитывая, что число благоприятствующих событию A исходов

$$N_A = 1,$$

получаем

$$P(A) = \frac{1}{1140} \approx 8,8 \cdot 10^{-4}.$$

Теорема 2.4. Число \tilde{A}_n^m размещений с повторениями из n элементов по m определяется формулой

$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

◄ Поскольку выбор осуществляется из одной и той же группы, причем элемент после возвращения каждый раз снова возвращается в группу, то в силу основной формулы комбинаторики

число всех выборок с возвращением из n элементов по m равно n^m . ►

Пример 2.6. Замок камеры хранения открывается при наборе определенной комбинации из четырех цифр от 0 до 9. Пассажир забыл свой номер и набирает комбинацию наугад.

Найдем вероятность $\mathbf{P}(A)$ того, что он откроет замок с первого раза. Элементарным исходом является появление любой четверки из цифр $\overline{0, 9}$, т.е. любое размещение с повторением из $n = 10$ элементов по $m = 4$ элемента. Значит,

$$N_A = \tilde{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000.$$

Поскольку благоприятствующий событию A исход один, то

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{10000} = 0,0001.$$

Теорема 2.5. Число \tilde{C}_n^m сочетаний с повторениями из n элементов по m определяется формулой

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m. \quad (2.1)$$

◄ Рассмотрим разность

$$C_{n+m}^{m+1} - C_{n+m-1}^{m+1}.$$

Подставляя в нее вместо C_{n+m}^{m+1} и C_{n+m-1}^{m+1} их значения (см. теорему 2.3), имеем

$$\begin{aligned} C_{n+m}^{m+1} - C_{n+m-1}^{m+1} &= \frac{(n+m)!}{(m+1)!(n-1)!} - \frac{(n+m-1)!}{(m+1)!(n-2)!} = \\ &= \frac{(n+m)(n+m-1)!}{(m+1)!(n-1)(n-2)!} - \frac{(n+m-1)!}{(m+1)!(n-2)!} = \\ &= \frac{(n+m-n+1)!(n+m-1)!}{(m+1)!(n-1)!} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь методом математической индукции по переменной m .

Поскольку число выборок из n элементов по одному элементу равно $n = C_n^1 = \tilde{C}_n^1$, то формула (2.1) справедлива при $m = 1$.

Пусть теперь формула (2.1) справедлива для некоторого $m \geq 1$. Покажем, что она справедлива и для $m + 1$. Для этого разобьем все выборки с повторениями из n элементов по $m + 1$ элементов на n типов. К первому типу отнесем те выборки, в которых хотя бы один раз встречается первый элемент, ко второму — выборки, в которых отсутствует первый элемент, но при этом хотя бы один раз встречается второй элемент, к третьему — выборки, в которых отсутствуют первый и второй элементы, но хотя бы один раз встречается третий элемент и т.д. Наконец, в выборке n -го типа (единственной!) встречается только n -й элемент. Число выборок i -го типа равно \tilde{C}_{n-i+1}^m , так как выбор m элементов производится из группы, содержащей $n - i + 1$ элементов. Поэтому

$$\begin{aligned}\tilde{C}_n^{m+1} &= \tilde{C}_n^m + \tilde{C}_{n-1}^m + \dots + \tilde{C}_1^m = \\ &= C_{n+m-1}^m + C_{n+m-2}^m + \dots + C_m^m.\end{aligned}$$

Используя теперь доказанное равенство

$$C_{k+m-1}^m = C_{k+m}^{m+1} - C_{k+m-1}^{m+1}$$

при $k = n, n - 1, \dots, 1$, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{C}_n^{m+1} &= (C_{n+m}^{m+1} - C_{n+m-1}^{m+1}) + (C_{n+m-1}^{m+1} - C_{n+m-2}^{m+1}) + \\ &+ \dots + (C_{m+2}^{m+1} - C_{m+1}^{m+1}) + C_{m+1}^{m+1} = C_{n+m}^{m+1}.\end{aligned}\quad \blacktriangleright$$

Формулы для числа размещений и сочетаний можно применять и при решении задач комбинаторики, описываемых в несколько отличных от приведенных выше постановках.

В частности, при распределении частиц по ячейкам:

– число способов, с помощью которых можно заполнить n разных ячеек m различными частицами, причем в каждой

ячейке может находиться не более одной частицы, равно числу A_n^m размещений из n элементов по m элементов, $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$;

– число способов, с помощью которых можно заполнить n различных ячеек m неразличимыми частицами, причем в каждой ячейке может находиться не более одной частицы, равно числу C_n^m сочетаний из n элементов по m элементов, $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$;

– число способов, с помощью которых можно заполнить n различных ячеек m различными частицами без ограничения на число попавших в каждую ячейку частиц, равно числу \tilde{A}_n^m размещений с повторениями из n элементов по m элементов, $\tilde{A}_n^m = n^m$;

– число способов, с помощью которых можно заполнить n различных ячеек m неразличимыми частицами без ограничения на число попавших в каждую ячейку частиц, равно числу \tilde{C}_n^m сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов, $\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Рассмотрим еще одну часто встречающуюся на практике задачу комбинаторики. Требуется найти число размещений с повторениями из n элементов по m элементов, в которых первый элемент встречается ровно m_1 раз, второй элемент встречается ровно m_2 раз, ..., n -й элемент встречается ровно m_n раз ($m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$). Число таких размещений обозначим $C(m_1, \dots, m_n)$.

Теорема 2.6. Число $C(m_1, \dots, m_n)$ определяется формулой

$$C(m_1, \dots, m_n) = \frac{m!}{m_1! \dots m_n!}.$$

◀ Для нахождения $C(m_1, \dots, m_n)$ вычислим сначала число различных способов, с помощью которых можно выбрать первый элемент. Это число равно $C_m^{m_1}$. После определения места, на котором появился первый элемент, вычислим число способов,

с помощью которых можно выбрать второй элемент. Поскольку число мест теперь равно $m - m_1$, то число таких способов равно $C_{m-m_1}^{m_2}$. Число способов выбора третьего элемента равно $C_{m-m_1-m_2}^{m_3}$ и т.д. Используя теперь основную формулу комбинаторики, получаем

$$\begin{aligned} C(m_1, \dots, m_n) &= C_m^{m_1} C_{m-m_1}^{m_2} \dots C_{m-m_1-\dots-m_{n-1}}^{m_n} = \\ &= \frac{m!(m-m_1)! \dots (m-m_1-\dots-m_{n-1})!}{m_1!(m-m_1)! m_2!(m-m_1-m_2)! \dots m_n! 0!} = \\ &= \frac{m!}{m_1! \dots m_n!}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Число $C(m_1, \dots, m_n)$ совпадает с числом способов, с помощью которых можно заполнить m разных ячеек n различными частицами без ограничения на число попавших в каждую ячейку частиц таким образом, чтобы в первой ячейке находилось m_1 частиц, во второй — m_2 частиц и т.д., в n -й — m_n частиц.

Замечание 2.4. Число $C(m_1, \dots, m_n)$ называют также **полиномиальным (мультиномиальным) коэффициентом**, поскольку оно появляется как коэффициент при $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ в разложении функции

$$(x_1 + \dots + x_n)^m$$

по степеням x_1, \dots, x_n .

Пример 2.7. Из цифр 1, 2 и 3 случайным образом составляют шестизначное число. Требуется найти вероятность $P(A)$ того, что в этом числе цифра 1 будет встречаться один раз, цифра 2 — два раза и цифра 3 — три раза.

Элементарными исходами опыта являются всевозможные размещения с повторениями из трех элементов по шесть элементов, т.е.

$$N = \tilde{A}_3^6 = 3^6 = 729.$$

Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно

$$N_A = C(1, 2, 3) = 60.$$

Поэтому

$$P(A) = \frac{60}{729} \approx 0,082. \quad \#$$

В заключение приведем решение часто встречающейся в приложениях вероятностной задачи, которую формулируют в рамках классической схемы.

Пусть имеется $n = n_1 + \dots + n_k$ различных элементов, причем из них n_1 элементов первого типа, n_2 — второго типа, \dots , n_k — k -го типа. Случайным образом из этих элементов выбираются m элементов. Вероятность события A , состоящего в том, что среди выбранных элементов окажется ровно $m_1 \leq n_1$ элементов первого типа, $m_2 \leq n_2$ второго типа, \dots , $m_k \leq n_k$ элементов k -го типа, $m_1 + \dots + m_k = m$, обозначают $P(m_1, \dots, m_k)$.

Определение 2.4. Рассмотренный способ выбора элементов называют *гипергеометрической схемой*, а совокупность вероятностей $P(m_1, \dots, m_k)$ в гипергеометрической схеме при фиксированных n , m , n_i , $i = \overline{1, k}$, и различных m_i , $i = \overline{1, k}$, $m_1 + \dots + m_k = m$, называют *гипергеометрическим распределением*.

Теорема 2.7. Вероятности $P(m_1, \dots, m_k)$ в гипергеометрической схеме определяют по формуле

$$P(m_1, \dots, m_k) = \frac{C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m}.$$

◀ Поскольку порядок выбора элементов не существен, то при определении общего числа элементарных исходов и числа благоприятствующих исходов будем пользоваться формулой для числа сочетаний (см. теорему 2.3). Общее число элементарных исходов есть число сочетаний из n элементов по m , т.е. C_n^m . Далее m_1 элементов первого типа можно выбрать $C_{n_1}^{m_1}$ способами,

m_2 элементов второго типа — $C_{n_2}^{m_2}$ способами, ..., m_k элементов k -го типа — $C_{n_k}^{m_k}$ способами. При этом любой способ выбора элементов определенного типа можно комбинировать с любыми способами выбора элементов остальных типов. Значит, в силу основной формулы комбинаторики (см. теорему 2.1) число благоприятствующих событию A исходов равно $C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_k}^{m_k}$. Поэтому

$$P(m_1, \dots, m_k) = \frac{C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m},$$

что и доказывает теорему. ►

Пример 2.8. Из колоды в 36 карт наудачу извлекают 10 карт. Найдём вероятность $P(A)$ того, что среди выбранных карт окажутся четыре карты пиковой масти, три — трефовой, две — бубновой и одна — червовой. Для этого воспользуемся гипергеометрической схемой, в которой $n = 36$, $n_1 = n_2 = n_3 = 9$, $m_1 = 4$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$, $m_4 = 1$. Следовательно,

$$P(A) = P(4, 3, 2, 1) = \frac{C_9^4 C_9^3 C_9^2 C_9^1}{C_{36}^{10}} \approx 0,0091. \quad \#$$

Во многих случаях вычисление вероятности по схеме классической вероятности удобно проводить с помощью условной вероятности, которую мы введём в следующей главе.

2.3. Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности обобщает классическое на случай *бесконечного множества элементарных исходов* Ω тогда, когда Ω представляет собой подмножество пространства \mathbb{R} (числовой прямой), \mathbb{R}^2 (плоскости), \mathbb{R}^n (n -мерного евклидова пространства).

В пространстве \mathbb{R} в качестве подмножеств будем рассматривать лишь *промежутки* или их объединения, т.е. подмножества, которые имеют длину. В пространстве \mathbb{R}^2 — те подмножества, которые имеют площадь, и т.д.

Под мерой $\mu(A)$ подмножества A будем понимать его длину, площадь или объем (обобщенный объем) в зависимости от того, какому пространству принадлежит Ω : в \mathbb{R} , в \mathbb{R}^2 или в \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^n). Будем также считать, что пространство элементарных исходов Ω имеет конечную меру, а вероятность попадания „случайно брошенной“ точки в любое подмножество Ω пропорциональна мере этого подмножества и не зависит от его расположения и формы. В этом случае говорят, что рассматривается „геометрическая схема“ или „точку наудачу бросают в область Ω “.

Определение 2.5. *Вероятностью события A называют число $P(A)$, равное отношению меры множества A к мере множества Ω :*

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

где $\mu(A)$ — мера множества A .

Данное определение вероятности события принято называть **геометрическим определением вероятности**.

Заметим, что в литературе вероятность события A , определенную выше, на основе **геометрической схемы**, часто называют **геометрической вероятностью**.

Геометрическая вероятность, очевидно, сохраняет отмеченные ранее свойства вероятности $P(A)$ в условиях классической схемы.

Замечание 2.5. Приведенное определение геометрической вероятности с математической точки зрения не является корректным, поскольку в n -мерном пространстве существуют подмножества, не имеющие меры. Поэтому для строгости необходимо в качестве событий A рассматривать только элементы *борелевской σ -алгебры \mathfrak{B}* (см. 1.3), что, впрочем, более чем достаточно для практических потребностей.

Пример 2.9. Ромео и Джульетта договорились встретиться в определенном месте между двенадцатью часами и часом

дня. Необходимо найти вероятность встречи, если приход каждого из них в течение указанного часа происходит наудачу, причем известно, что Ромео ждет Джульетту ровно 20 минут, а Джульетта Ромео — 5 минут.

Для решения задачи воспользуемся геометрической схемой вероятности. Обозначим момент прихода Ромео через x , а Джульетты через y . Тогда любой элементарный исход ω в данной задаче можно отождествить с некоторой точкой $(x; y)$ на плоскости xOy . Выберем за начало отсчета 12 часов, а за единицу измерения 1 минуту и построим на плоскости xOy пространство элементарных исходов Ω . Очевидно, что это будет квадрат со стороной 60 (рис. 2.1). Событие A (Ромео и Джульетта встретятся) произойдет тогда, когда разность $y - x$ не превысит $t_1 = 20$, а разность $x - y$ не превысит $t_2 = 5$, т.е. условие встречи определяет систему неравенств

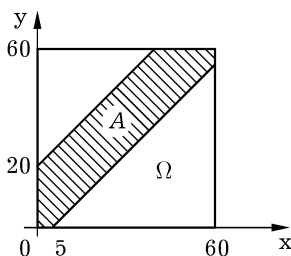


Рис. 2.1

$\begin{cases} y - x \leq 20; \\ x - y \leq 5. \end{cases}$

Область A элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, на рис. 2.1 заштрихована. Ее площадь S_A равна площади квадрата без двух угловых треугольников, т.е.

$$S_A = 60^2 - \frac{(60 - t_1)^2}{2} - \frac{(60 - t_2)^2}{2} = 1287,5.$$

Тогда, согласно определению 2.5, находим

$$\mathbf{P}(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1287,5}{3600} \approx 0,36.$$

2.4. Статистическое определение вероятности

В основе статистического определения вероятности лежит общий принцип, в соответствии с которым методы теории вероятностей применимы только к таким испытаниям, которые могут быть, по крайней мере теоретически, повторены бесконечное число раз, и при этом имеет место свойство *устойчивости частот* появления связанных с этими испытаниями событий (см. Введение).

Пусть произведено n повторений опыта, причем в n_A из них появилось событие A . Обозначим $r_A = n_A/n$ наблюдаемую частоту события A . Практика показывает, что в тех экспериментах, для которых применимы методы теории вероятностей, частота события A с увеличением числа опытов n стабилизируется, т.е. стремится к некоторому пределу (допуская некоторую вольность речи).

Определение 2.6. *Вероятностью события A называют (эмпирический) предел $P(A)$, к которому стремится частота r_A события A при неограниченном увеличении числа n опытов.*

Данное определение вероятности события принято называть **статистическим определением вероятности**.

Можно показать, что при статистическом определении вероятности события сохраняются свойства вероятности события, справедливые в условиях классической схемы, т.е.

- 1) $P(A) \geq 0$;
- 2) $P(\Omega) = 1$;
- 3) $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если $AB = \emptyset$.

С практической точки зрения статистическое определение вероятности является наиболее разумным. Однако с позиции теории вероятностей как раздела современной математики недостаток статистического определения очевиден: нельзя провести бесконечное число повторений опыта, а при конечном числе

повторений наблюдаемая частота, естественно, будет разной при различном числе повторений.

Заметим, что связь между классическим и статистическим определениями была выявлена еще в период становления теории вероятностей как теории азартных игр. Было установлено, что при корректном использовании классического определения вероятность событий практически совпадает с их частотами при большом числе повторений эксперимента.

И хотя игроков интересовала частота определенных событий, решение задач, полученное на основе классического определения вероятности, их вполне устраивало. Иными словами, даже игроки азартных игр знали о совпадении статистического определения с другими (классическим и его обобщением — геометрическим).

Собственно говоря, задача определения связи вероятности с частотой не потеряла актуальности и в наши дни, когда в теории вероятностей повсеместно используется аксиоматическое определение вероятностей Колмогорова (см. 2.5). Это привело к появлению и широкому внедрению в практику обширного раздела теории вероятностей — математической статистики.

2.5. Аксиоматическое определение вероятности

Для того чтобы понять смысл *аксиоматического определения вероятности*, рассмотрим *классическую схему*.

В этом случае вероятность любого элементарного исхода ω_i , $i = \overline{1, N}$, $P(\omega_i) = 1/N$.

Вероятность любого события A при этом равна $P(A) = N_A/N$, где N_A — число исходов, благоприятствующих событию A .

Вероятность $P(A)$ можно записать также в следующем виде

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i),$$

где суммирование ведется по всем значениям индекса i , при которых элементарные исходы ω_i образуют событие A .

Однако задать вероятность события по такому принципу уже в случае *геометрической схемы* нельзя, так как при этом вероятность любого элементарного события равна нулю.

Поэтому следует дать определение вероятности события для любого пространства элементарных исходов Ω , не связанное с вероятностями элементарных исходов, а учитывающее те свойства вероятностей событий, которые имеют место для всех предыдущих определений (*классического, геометрического, статистического*).

Напомним, что этими свойствами являются следующие:

- 1) $\mathbf{P}(A) \geq 0$;
- 2) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
- 3) $\mathbf{P}(A_1 + \dots + A_m) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_m)$, если события A_1, \dots, A_m попарно несовместны.

Именно эти три свойства лежат в основе аксиоматического определения вероятности. При этом свойство 3 постулируется для суммы счетного множества попарно несовместных событий.

Определение 2.7. Пусть каждому событию A (т.е. подмножеству A пространства элементарных исходов Ω , принадлежащему σ -алгебре \mathfrak{B}) поставлено в соответствие число $\mathbf{P}(A)$. Числовую функцию \mathbf{P} (заданную на σ -алгебре \mathfrak{B}) называют **вероятностью** (или **вероятностной мерой**), если она удовлетворяет следующим аксиомам:

Аксиома 1 (аксиома неотрицательности): $\mathbf{P}(A) \geq 0$;

Аксиома 2 (аксиома нормированности): $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;

Аксиома 3 (расширенная аксиома сложения): для любых попарно несовместных событий A_1, \dots, A_n, \dots справедливо равенство

$$\mathbf{P}(A_1 + \dots + A_n + \dots) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n) + \dots$$

Значение $\mathbf{P}(A)$ называют **вероятностью события A** .

Замечание 2.6. Если пространство элементарных исходов Ω является конечным или счетным множеством, то каждому элементарному исходу $\omega_i \in \Omega$, $i = 1, 2, \dots$, можно поставить в соответствие число $\mathbf{P}(\omega_i) = p_i \geq 0$ так, что

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} \mathbf{P}(\omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Тогда для любого события $A \subset \Omega$ в силу аксиомы 3 вероятность $\mathbf{P}(A)$ равна сумме вероятностей $\mathbf{P}(\omega_i)$ всех тех элементарных исходов, которые входят в событие A , т.е.

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathbf{P}(\omega_i).$$

Таким образом, мы определили вероятность любого события, используя вероятности элементарных исходов. Заметим, что вероятности элементарных исходов можно задавать совершенно произвольно, лишь бы они были неотрицательными и в сумме составляли единицу. Именно в этом и состоит идея аксиоматического определения вероятности. #

В следующей теореме докажем утверждения, описывающие ряд полезных свойств вероятности.

Теорема 2.8. Вероятность удовлетворяет следующим свойствам.

1. Вероятность *противоположного события*

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

2. Вероятность *невозможного события*

$$\mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

3. Если $A \subset B$, то

$$\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$$

(„большому“ событию соответствует большая вероятность).

4. Вероятность заключена между 0 и 1:

$$0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1.$$

5. Вероятность объединения двух событий

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB).$$

6. Вероятность объединения любого конечного числа событий

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n) - \\ &\quad - \mathbf{P}(A_1 A_2) - \mathbf{P}(A_1 A_3) - \dots - \mathbf{P}(A_{n-1} A_n) + \\ &\quad + \mathbf{P}(A_1 A_2 A_3) + \dots + (-1)^{n+1} \mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned}$$

◀ Поскольку

$$\Omega = A + \overline{A},$$

то, согласно расширенной аксиоме сложения,

$$\mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}),$$

откуда с учетом аксиомы нормированности получаем утверждение 1.

Утверждение 2 вытекает из равенства

$$A = A + \emptyset$$

и расширенной аксиомы сложения.

Пусть $A \subset B$. Тогда

$$B = A + (B \setminus A).$$

В соответствии с расширенной аксиомой сложения

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \setminus A).$$

Отсюда и из аксиомы неотрицательности приходим к утверждению 3.

В частности, так как всегда $A \subset \Omega$, то с учетом аксиомы неотрицательности получаем утверждение 4.

Поскольку

$$A \cup B = A + (B \setminus A), \quad B = (B \setminus A) + AB,$$

то, используя расширенную аксиому сложения, находим

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \setminus A)$$

и

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \setminus A) + \mathbf{P}(AB).$$

Подставляя в первое из последних двух равенств вероятность $\mathbf{P}(B \setminus A)$, выраженную из второго равенства, приходим к утверждению 5.

Утверждение 6 можно доказать с помощью метода математической индукции по n . Так, для трех событий A , B и C

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \cup C) - \mathbf{P}(A(B \cup C)) = \\ &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(BC) - \mathbf{P}(AB \cup AC) = \\ &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(BC) - \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(AC) + \mathbf{P}(ABC). \end{aligned}$$

Для четырех и более событий это утверждение проверьте самостоятельно. ►

Замечание 2.7. Утверждения 5 и 6 называют *теоремами сложения вероятностей* для двух и для n событий соответственно.

Приведем пример, показывающий, что без учета того, что *события совместные*, можно прийти к неправильному результату.

Пример 2.10. Опыт состоит в двукратном подбрасывании симметричной монеты. Найдём вероятность события A , означающего появление „герба“ хотя бы один раз. Обозначим A_i появление „герба“ при i -м подбрасывании, $i = 1, 2$. Ясно, что

$$A = A_1 \cup A_2,$$

и в соответствии с классической схемой вероятности

$$\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{2}.$$

Если не учитывать, что A_1 и A_2 — совместные события, то можно получить „результат“

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

противоречащий здравому смыслу, поскольку ясно, что *событие* A не является *достоверным*. Применяя теорему сложения для двух совместных событий и учитывая равенство

$$\mathbf{P}(A_1 A_2) = \frac{1}{4},$$

находим

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad \#$$

Иногда вместо аксиомы 3 удобно использовать две другие аксиомы.

Аксиома 3' (аксиома сложения): для любых *попарно непересекающихся событий* A_1, \dots, A_n справедливо равенство

$$\mathbf{P}(A_1 + \dots + A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n).$$

Аксиома 4 (аксиома непрерывности): если последовательность событий A_1, \dots, A_n, \dots такова, что $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = A,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A).$$

Можно доказать, что аксиомы 3' и 4 в совокупности равносильны аксиоме 3.

Покажем, как конструктивно можно задать вероятность для некоторых наиболее часто встречающихся на практике пространств элементарных исходов, содержащих бесконечное число элементарных исходов.

Пусть Ω содержит счетное множество элементарных исходов $\omega_1, \dots, \omega_n, \dots$. В этом случае любую вероятностную меру \mathbf{P} можно получить, задав вероятности

$$p_1 = \mathbf{P}(\omega_1), \quad \dots, \quad p_n = \mathbf{P}(\omega_n), \quad \dots$$

элементарных исходов, где последовательность p_1, \dots, p_n, \dots должна удовлетворять только условиям неотрицательности

$$p_i \geq 0, \quad i \in \mathbb{N},$$

и нормированности

$$p_1 + \dots + p_n + \dots = 1,$$

т.е. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ является знакоположительным числовым рядом, сумма которого равна единице. Вероятность любого события A равна сумме $\sum p_i$ вероятностей всех входящих в A элементарных исходов ω_i .

Предположим теперь, что пространство элементарных исходов Ω представляет собой числовую прямую $(-\infty, +\infty)$ с борелевской σ -алгеброй на ней. Для задания вероятностной меры на числовой прямой можно взять произвольную неубывающую для любого $x \in \mathbb{R}$ непрерывную слева функцию $F(x)$, удовлетворяющую условиям

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1,$$

и каждому событию $A_x = (-\infty, x)$ поставить в соответствие вероятность

$$\mathbf{P}(A_x) = F(x),$$

а событию $A = [x_1, x_2)$ — вероятность

$$\mathbf{P}(A) = F(x_2) - F(x_1).$$

Найденная таким образом для всех событий $A = [x_1, x_2)$ числовая функция $\mathbf{P}(A)$ будет удовлетворять аксиомам в определении 2.7. Для других событий из борелевской σ -алгебры на числовой прямой, вероятность определяется единственным образом с помощью так называемой теоремы о продолжении меры, формулировку и доказательство которой можно найти в специальной литературе*.

Определение 2.8. Тройку $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbf{P})$, состоящую из пространства элементарных исходов Ω , с σ -алгеброй событий \mathfrak{B} и определенной на \mathfrak{B} вероятности \mathbf{P} , называют **вероятностным пространством**.

Таким образом, понятие вероятностного пространства объединяет хорошо известные физические понятия: исход опыта, событие, вероятность события.

2.6. Решение типовых примеров

Пример 2.11. Куб с окрашенными гранями распилен на 27 одинаковых кубиков. Найдем *вероятность* того, что у выбранного наудачу кубика будет окрашена одна грань (две грани, три грани).

Общее число *элементарных исходов* в данном опыте $N = 27$. Обозначим: A — событие, заключающееся в том, что у выбранного кубика окрашена одна грань; B — две грани и C —

*См., например, Лозэ М. Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

три грани. Событию A благоприятствует $N_A = 6$ элементарных исходов (число граней у исходного куба), событию B — $N_B = 12$ исходов (число ребер у исходного куба), а событию C — 8 исходов (число вершин у исходного куба). Поэтому

$$P(A) = \frac{6}{27}, \quad P(B) = \frac{12}{27}, \quad P(C) = \frac{8}{27}.$$

Пример 2.12. Из 33 карточек с написанными на них различными буквами русского алфавита наугад извлекаются пять карточек и располагаются слева направо в порядке извлечения. Найдём вероятность появления слова „РАДИО“ (событие A).

Поскольку карточки обратно не возвращаются и порядок выбора существен, то общее число элементарных исходов равно числу *размещений без повторений* из 33 элементов по пять элементов:

$$N = A_{33}^5 = 28480320.$$

Событию A благоприятствует только один элементарный исход ($N_A = 1$). Значит,

$$P(A) = \frac{1}{28480320} \approx 3,5 \cdot 10^{-8}.$$

Пример 2.13. Из колоды в 52 игральные карты выбирают наудачу три карты. Найдём вероятность того, что среди этих карт будут тройка „пик“, семерка „пик“, туз „пик“.

Поскольку порядок выбора в данном случае не существен и карты обратно в колоду не возвращаются, то число элементарных исходов равно числу *сочетаний без повторений* из 52 элементов по три элемента, т.е.

$$N = C_{52}^3 = 22100.$$

Рассматриваемому событию A благоприятствует единственный исход ($N_A = 1$). Поэтому

$$P(A) = \frac{1}{22100} \approx 0,000045.$$

Пример 2.14. Группа, состоящая из восьми человек, занимает место за круглым столом. Найдем вероятность того, что два определенных человека окажутся сидящими рядом.

Так как упорядочивается все множество из восьми элементов, то мы имеем дело с *перестановкой* из восьми элементов. Поэтому

$$N = P_8 = 8!$$

Рассматриваемому событию A благоприятствуют такие перестановки, когда два отмеченных лица садятся рядом: всего восемь различных пар мест за столом и за каждую пару мест данные лица могут сесть двумя способами. При этом остальные шесть человек могут разместиться на оставшихся местах произвольно. Значит,

$$N_A = 2 \cdot 8 \cdot P_6 = 2 \cdot 8 \cdot 6!$$

и

$$P(A) = \frac{2}{7} \approx 0,29.$$

Для сравнения приведем еще одно решение поставленной задачи. Заметим, что поскольку нас интересуют только два определенных лица, то порядок размещения остальных не играет роли. В свою очередь, если первый человек сел на определенное место, то второй может сесть на оставшиеся семь мест. При этом в двух случаях оба лица окажутся рядом и

$$P(A) = \frac{2}{7}.$$

Пример 2.15. Из десяти первых букв русского алфавита составлены всевозможные трехбуквенные „слова“. Найдем вероятность того, что случайно выбранное „слово“ окажется „словом“ „ИИИ“.

Число различных „слов“ равно числу размещений с повторениями из 10 элементов по три элемента, т.е.

$$N = \tilde{A}_{10}^3 = 10^3.$$

Поскольку благоприятствующий исход только один, то

$$P(A) = 0,001.$$

Пример 2.16. Опыт состоит в четырехкратном случайном выборе с возвращением одной буквы из букв алфавита „А“, „Б“, „К“, „О“ и „М“ и записывании результата выбора слева направо в порядке поступления букв. Найдем вероятность того, что в результате будет записано слово „МАМА“.

Число элементарных исходов равно числу размещений с повторениями из пяти элементов по четыре элемента, т.е.

$$N = \tilde{A}_5^4 = 5^4.$$

Слову „МАМА“ соответствует лишь один исход. Поэтому

$$P(A) = \frac{1}{625} = 0,0016.$$

Пример 2.17. В урне имеются четыре шара различного цвета. Наудачу из урны извлекают шар и после определения его цвета возвращают обратно. Найдем вероятность того, что среди восьми выбранных шаров будут только шары одного цвета (событие A)? будет по два шара разного цвета (событие B).

Число элементарных исходов равно числу размещений

$$N = \tilde{A}_4^8 = 4^8$$

с повторениями из четырех элементов по восемь элементов.

Для того чтобы найти число исходов, благоприятствующих событию A , предположим сначала, что вынимают только шары

первого цвета. Это можно сделать только одним способом. Аналогично только одним способом можно выбрать шары второго, третьего и четвертого цветов. Поэтому $N_A = 4$ и

$$P(A) = \frac{1}{4^7} \approx 0,00061.$$

Число исходов, благоприятствующих событию B , равно числу тех сочетаний с повторениями из четырех элементов по восемь элементов, в которых каждый элемент повторяется по два раза, т.е.

$$N_B = C(2, 2, 2, 2) = 2520.$$

Значит,

$$P(B) = \frac{2520}{4^8} \approx 0,0385.$$

Пример 2.18. Первенство по баскетболу оспаривают 18 команд, которые путем жеребьевки распределены на две подгруппы по девять команд в каждой. Пять команд обычно занимают первые места. Найдём вероятность попадания всех лидирующих команд в одну подгруппу (событие A); трех лидирующих команд в одну подгруппу, а двух — в другую (событие B).

Пространство элементарных исходов в данном случае состоит из всевозможных способов выбрать из 18 команд, среди которых пять лидирующих, девять команд в первую подгруппу (тогда вторую подгруппу будут составлять оставшиеся девять команд), причем события A и B происходят тогда, когда в первую подгруппу попадет определенное число лидирующих команд и команд аутсайдеров. Значит, мы имеем дело с *гипергеометрической схемой*, в которой $k = 2$, $n = 18$, $n_1 = 5$, $m = 9$.

Событие A происходит тогда, когда в первую подгруппу попадают или пять лидирующих команд и четыре команды-аутсайдера ($m_1 = 5$, $m_2 = 4$), или девять команд-аутсайдеров ($m_1 = 0$, $m_2 = 9$). Значит,

$$P(A) = P(5, 4) + P(0, 9) = \frac{C_5^5 C_{13}^4 + C_5^0 C_{13}^9}{C_{18}^9} = \frac{1}{34} \approx 0,029.$$

Аналогично событие B происходит тогда, когда в первую подгруппу попадут или три лидирующие команды и шесть команд-аутсайдеров ($m_1 = 3, m_2 = 6$) или две лидирующие команды и семь команд-аутсайдеров ($m_1 = 2, m_2 = 7$). Таким образом,

$$\mathbf{P}(B) = P(3, 6) + P(2, 7) = \frac{C_5^3 C_{13}^6 + C_5^2 C_{13}^7}{C_{18}^9} = \frac{12}{17} \approx 0,71.$$

Пример 2.19. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a наудачу бросают монету радиуса r , $r < a/2$. Найдём вероятность того, что монета попадет целиком внутрь одного квадрата.

Пусть $(x; y)$ — координаты центра упавшей монеты. В силу бесконечности шахматной доски можно считать, что элементарные исходы данного эксперимента полностью определяются положением центра упавшей монеты относительно вершин квадрата, содержащего этот центр. Помещая начало координат в одну из вершин указанного квадрата (рис. 2.2), можно записать множество элементарных исходов в виде

$$\Omega = \{(x; y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}.$$

Область A , соответствующая рассматриваемому событию, имеет вид

$$A = \{(x; y): r \leq x \leq a - r, r \leq y \leq a - r\},$$

т.е. является квадратом со стороной $a - 2r$. В соответствии с формулой геометрической вероятности находим

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{(a - 2r)^2}{a^2}.$$

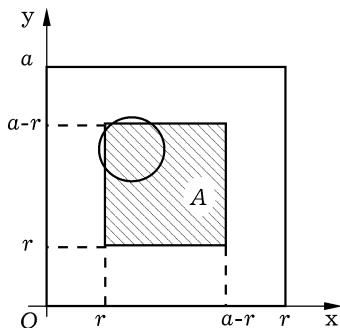


Рис. 2.2

Пример 2.20. В любые моменты интервала времени T равновозможны поступления в приемник двух независимых сигналов. Сигналы искажаются, если разность между моментами их поступления меньше τ . Определим вероятность того, что сигналы будут искажены.

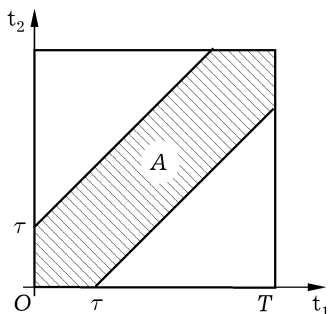


Рис. 2.3

Изобразим случайные моменты t_1 и t_2 поступления сигналов в приемник в виде точки на плоскости с координатами $(x; y)$. Областью возможных значений является квадрат площадью $\mu(\Omega) = T^2$ (рис. 2.3). Сигналы будут искажены, если $|t_1 - t_2| \leq \tau$. Эта область лежит между прямыми

$t_2 - t_1 = \tau$ и $t_1 - t_2 = -\tau$. Площадь ее равна

$$\mu(A) = T^2 - (T - \tau)^2.$$

Следовательно,

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2} = 1 - \frac{(T - \tau)^2}{T^2}.$$

Вопросы и задачи

- 2.1. Приведите классическое определение вероятности.
- 2.2. Напишите основную формулу комбинаторики.
- 2.3. Что называют выбором с возвращением? без возвращения?
- 2.4. Что называют сочетанием? размещением? перестановкой?

2.5. Приведите формулы для числа сочетаний и размещений из n элементов по m элементов с повторениями и без повторений и для числа перестановок из n элементов.

2.6. Чему равно число размещений с повторениями из n элементов по m элементов, в которых первый элемент встречается ровно m_1 раз, второй элемент — m_2 раз, ..., n -й элемент — m_n раз?

2.7. Что называют гипергеометрической схемой? Напишите формулу, используя которую можно вычислить вероятности событий в гипергеометрической схеме.

2.8. Приведите геометрическое определение вероятности.

2.9. Приведите статистическое определение вероятности.

2.10. Дайте аксиоматическое определение вероятности.

2.11. Перечислите основные свойства вероятности.

2.12. Как можно задать вероятность в случае конечного пространства элементарных исходов? счетного пространства элементарных исходов?

2.13. Как можно задать вероятность на числовой прямой?

2.14. Что называют вероятностным пространством?

2.15. У человека имеется N ключей, из которых только один подходит к его двери. Он последовательно испытывает их, выбирая случайным образом (без возвращения). Найдите вероятность того, что этот процесс закончится на k -м испытании $k \leq N$.

О т в е т: $P = 1/N$.

2.16. Из десяти первых букв русского алфавита выбирают наудачу без возвращения четыре буквы и записывают в порядке поступления слева направо. Какова вероятность того, что составленное „слово“ будет оканчиваться на букву „А“?

О т в е т: $P = 1/10$.

2.17. Из шести карточек с буквами „Л“, „И“, „Т“, „Е“, „Р“, „А“ выбирают наугад в определенном порядке четыре. Найдите вероятность того, что при этом получится слово „ТИРЕ“.

О т в е т: $P = 1/A_6^4 \approx 0,0028$.

2.18. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь то, что эти цифры различны, набрал их наугад. Определите вероятность того, что набраны нужные цифры.

О т в е т: $P = 1/A_{10}^2 \approx 0,011$.

2.19. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найдите вероятность того, что номер набран правильно.

О т в е т: $P = 1/A_5^2 = 0,05$.

2.20. Среди 25 экзаменационных билетов пять „хороших“. Три студента по очереди берут по одному билету. Найдите вероятности следующих событий: A — третий студент взял „хороший“ билет; B — все три студента взяли „хороший“ билет.

О т в е т: $P(A) = 5/25$; $P(B) = 1/230 \approx 0,0044$.

2.21. В урне пять белых и четыре черных шара. Из урны в случайном порядке извлекают все находящиеся в ней шары. Найдите вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

О т в е т: $P = 5/9 \approx 0,56$.

2.22. Кодовые комбинации содержат пять различных цифр от 1 до 5. Какова вероятность того, что цифры в случайным образом выбранной кодовой комбинации образуют последовательность 1, 2, 3, 4, 5?

О т в е т: $P = 1/5! \approx 0,0083$.

2.23. Из урны, содержащей 10 перенумерованных шаров, наугад выбирают один за другим все находящиеся в ней шары.

Найдите вероятность того, что все номера вынутых шаров будут идти по порядку.

О т в е т: $P = 1/10! \approx 2,8 \cdot 10^{-7}$.

2.24. В шкафу находятся 10 пар ботинок. Из них наугад выбирают четыре ботинка. Найдите вероятность того, что среди выбранных ботинок отсутствуют парные.

О т в е т: $P = 2^4 C_{10}^4 / C_{20}^4 \approx 0,69$.

2.25. Из урны, содержащей шары с номерами 1, 2, ..., 9, пять раз наугад вынимают шар и каждый раз возвращают обратно. Найдите вероятность того, что из номеров шаров можно составить возрастающую последовательность.

О т в е т: $P = C_9^5 / 9^5 \approx 0,0021$.

2.26. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них случайным образом может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найдите вероятности следующих событий: A — все пассажиры выйдут на четвертом этаже; B — все пассажиры выйдут на одном и том же этаже; C — все пассажиры выйдут на разных этажах.

О т в е т: $P(A) = 1/6^3 \approx 0,0046$; $P(B) = 6/6^3 \approx 0,028$; $P(C) = A_3^3 / 6^3 \approx 0,56$.

2.27. Какова вероятность того, что в группе из n ($n \leq 365$) случайно отобранных студентов хотя бы у двоих окажется один и тот же день рождения?

О т в е т: $P = 1 - A_{365}^n / 365^n$.

2.28. Найдите вероятность того, что дни рождения 12 случайным образом выбранных человек придутся на разные месяцы года.

О т в е т: $P = 12! / 12^{12} \approx 5,4 \cdot 10^{-6}$.

2.29. Десять студентов договорились о поездке за город, но не договорились о вагоне. Любой из студентов наугад может сесть в любой из десяти вагонов поезда. Какова вероятность того, что они все попадут в разные вагоны?

О т в е т: $P = 10! / 10^{10} \approx 0,00036$.

2.30. В отделение связи поступило шесть телеграмм. Телеграммы случайным образом распределяют по четырем каналам, причем каждая телеграмма может быть передана по любому из четырех каналов. Найдите вероятность того, что на первый канал попадут три телеграммы, на второй — две телеграммы, на третий — одна телеграмма и четвертый канал не будет загружен.

О т в е т: $P = C(3, 2, 1, 0)/4^6 \approx 0,23$.

2.31. Чему равна вероятность того, что дни рождения шести наугад выбранных человек придутся в точности на два месяца?

О т в е т: $P = C_{12}^2 [((1/6)^6 - 2(1/12)^6)] \approx 0,000092$.

2.32. В партии из 50 изделий четыре нестандартных. Определите вероятность того, что среди выбранных наугад 10 изделий есть хотя бы одно нестандартное.

О т в е т: $P = 1 - C_4^0 C_{46}^{10} / C_{50}^{10} \approx 0,60$.

2.33. На стелаже в библиотеке стоят 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найдите вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

О т в е т: $P = 1 - C_5^0 C_{10}^3 / C_{15}^3 \approx 0,74$.

2.34. Колоду из 52 карт случайным образом делят пополам. Найдите вероятность того, что в каждой половине будет по два „туза“.

О т в е т: $P = C_4^2 C_{48}^{24} / C_{52}^{26} \approx 0,39$.

2.35. Какова вероятность того, что среди выбранных наудачу четырех карт из колоды в 52 карты ровно две окажутся треновой масти?

О т в е т: $P = C_{13}^2 C_{39}^2 / C_{52}^4 \approx 0,39$.

2.36. Некто купил карточку „Спортлото 6 из 49“ и отметил в ней шесть из имеющихся 49 номеров. В тираже разыгрываются шесть „выигрышных“ номеров. Найдите вероятности

следующих событий: A_3 — угадано три номера; A_4 — угадано четыре номера; A_5 — угадано пять номеров; A_6 — угадано шесть номеров.

О т в е т:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_3) &= C_6^3 C_{43}^3 / C_{49}^6 \approx 0,018; \quad \mathbf{P}(A_4) = C_6^4 C_{43}^2 / C_{49}^6 \approx 0,00097; \\ \mathbf{P}(A_5) &= C_6^5 C_{43}^1 / C_{49}^6 \approx 1,8 \cdot 10^{-5}; \quad \mathbf{P}(A_6) = C_6^6 C_{43}^0 / C_{49}^6 \approx 7,2 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

2.37. Из колоды в 32 карты наугад выбирают четыре карты. Найдите вероятности того, что среди них окажется: один „туз“ (событие A); хотя бы один „туз“ (событие B); хотя бы один „туз“ и обязательно „туз пик“ (событие C).

О т в е т: $\mathbf{P}(A) = C_4^1 C_{28}^3 / C_{32}^4 \approx 0,36$; $\mathbf{P}(B) = 1 - C_4^0 C_{28}^4 / C_{32}^4 \approx 0,43$;
 $\mathbf{P}(C) = C_1^1 C_{31}^3 / C_{32}^4 \approx 0,125$.

2.38. Стержень длиной l ломают на три части, причем точки разлома выбирают наудачу. Найдите вероятность того, что из получившихся частей можно составить треугольник.

О т в е т: $P = 1/4 = 0,25$;

2.39. Два приятеля условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи приятелей, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти в любое время?

О т в е т: $P = 11/36 \approx 0,31$.

3. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Рассмотрим события A и B , связанные с одним и тем же опытом. Пусть из каких-то источников нам стало известно, что событие B наступило, но не известно, какой конкретно из элементарных исходов, составляющих событие B , произошел. Что можно сказать в этом случае о вероятности события A ?

Вероятность события A , вычисленную в предположении, что событие B произошло, принято называть *условной вероятностью* и обозначать $P(A|B)$.

Понятие условной вероятности играет важнейшую роль в современной теории вероятностей. Условная вероятность позволяет учитывать дополнительную информацию при определении вероятности события. В ряде случаев при помощи условной вероятности можно существенно упростить вычисление вероятности. Понятию условной вероятности и посвящена настоящая глава.

3.1. Определение условной вероятности

Предположим сначала, что мы находимся в рамках *классической схемы*. Пусть событиям A и B благоприятствуют N_A и N_B элементарных исходов соответственно. Посмотрим, что дает нам имеющаяся информация о событии B . Поскольку событие B произошло, то достоверно известно, что в результате опыта появился один из N_B элементарных исходов, составляющих событие B . Значит, теперь уже при определении степени возможности события A необходимо выбирать только из N_B возможных исходов, причем событию A благоприятствуют N_{AB} исходов, при которых происходят и событие A , и собы-

тие B , или, другими словами, происходит событие AB . При этом по-прежнему будем считать все N_B входящих в событие B исходов равновероятными. Поэтому **условную вероятность** $\mathbf{P}(A|B)$ события A при условии события B в рамках классической схемы вероятности естественно определить как отношение числа N_{AB} исходов, благоприятствующих совместному осуществлению событий A и B , к числу N_B исходов, благоприятствующих событию B , т.е.

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{N_{AB}}{N_B}.$$

Если теперь поделить числитель и знаменатель полученного выражения на общее число N элементарных исходов, то придем к формуле

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{N_{AB}/N}{N_B/N} = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Обратимся теперь к статистическому определению вероятности.

Пусть n — общее число экспериментов; n_A — число экспериментов, в которых наблюдалось событие A ; n_B — число экспериментов, в которых наблюдалось событие B , n_{AB} — число экспериментов, в которых наблюдалось событие AB . Напомним, что *частота события* A — это отношение

$$r_A = \frac{n_A}{n}.$$

Условной частотой события A при условии, что B произошло (будем обозначать ее $r_{A|B}$) естественно назвать частоту события A , но только не среди всех повторений опыта n , а лишь среди тех, в которых наблюдалось событие B , т.е.

$$r_{A|B} = \frac{n_{AB}}{n_B}.$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$r_{A|B} = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{n_{AB}/n}{n_B/n} = \frac{r_{AB}}{r_B}.$$

При $n \rightarrow \infty$, согласно определению 2.6 *статистической вероятности*, $r_{AB} \rightarrow \mathbf{P}(AB)$, $r_B \rightarrow \mathbf{P}(B)$ и, следовательно, условная частота

$$r_{A|B} \rightarrow \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)},$$

т.е. условной вероятностью события A при условии события B естественно назвать число $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(B)$.

Таким образом, мы пришли к тому же самому выражению, что и в случае классической схемы.

На основании изложенного выше можно дать следующее определение.

Определение 3.1. *Условной вероятностью* события A при условии (наступлении) события B называют отношение вероятности *пересечения событий* A и B к вероятности события B :

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}. \quad (3.1)$$

При этом предполагают, что $\mathbf{P}(B) \neq 0$.

В связи с появлением термина „условная вероятность“ будем вероятность события называть также **безусловной вероятностью** события.

Рассмотрим теперь условную вероятность $\mathbf{P}(A|B)$ как функцию события A .

Теорема 3.1. Условная вероятность $\mathbf{P}(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности $\mathbf{P}(A)$.

◀ Для доказательства достаточно показать, что условная вероятность $\mathbf{P}(A|B)$ удовлетворяет аксиомам 1, 2 и 3 (см. 2.5).

Из определения 3.1 следует, что условная вероятность, удовлетворяет аксиоме неотрицательности, так как числитель дроби является неотрицательным числом, а знаменатель — положительным числом.

Поскольку $\Omega B = B$, то

$$\mathbf{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbf{P}(\Omega B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = 1,$$

т.е. условная вероятность удовлетворяет аксиоме нормированности.

Наконец, пусть A_1, \dots, A_n, \dots — попарно непересекающиеся события. Тогда

$$(A_1 + \dots + A_n + \dots)B = A_1B + \dots + A_nB + \dots$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1 + \dots + A_n + \dots | B) &= \frac{\mathbf{P}((A_1 + \dots + A_n + \dots)B)}{\mathbf{P}(B)} = \\ &= \frac{\mathbf{P}(A_1B) + \dots + \mathbf{P}(A_nB) + \dots}{\mathbf{P}(B)} = \\ &= \mathbf{P}(A_1|B) + \dots + \mathbf{P}(A_n|B) + \dots, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве использовано свойство умножения сходящегося ряда на постоянную. Следовательно, условная вероятность удовлетворяет *расширенной аксиоме сложения* 3. ►

Смысл теоремы 3.1 заключается в том, что условная вероятность представляет собой безусловную вероятность, заданную на новом *пространстве* Ω_1 *элементарных исходов*, совпадающем с событием B .

Пример 3.1. Рассмотрим опыт с однократным бросанием игральной кости, но не обычной, а с раскрашенными гранями: грани с цифрами 1, 3 и 6 окрашены красным, а грани с цифрами 2, 4 и 5 — белым цветом. Введем события: A_1 — выпадение нечетного числа очков; A_2 — выпадение четного числа очков; B — появление грани красного цвета.

Интуитивно ясно, что если произошло событие B , то условная вероятность события A_1 больше, чем условная вероятность события A_2 , поскольку на красных гранях нечетных чисел в два раза больше, чем четных. Заметим, что безусловные вероятности событий A_1 и A_2 при этом одинаковы и равны, очевидно, $1/2$.

Найдем условные вероятности событий A_1 и A_2 при условии события B . Очевидно, что

$$\mathbf{P}(A_1|B) = \frac{N_{A_1B}}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\mathbf{P}(A_2|B) = \frac{N_{A_2B}}{N} = \frac{1}{6},$$

$$\mathbf{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, в силу определения 3.1 условной вероятности имеем

$$\mathbf{P}(A_1|B) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

и

$$\mathbf{P}(A_2|B) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3},$$

что подтверждает наше предположение.

Геометрическая интерпретация условной вероятности. При практическом вычислении условной вероятности события A при условии, что событие B произошло, часто удобно трактовать условную вероятность как безусловную, но заданную не на исходном пространстве Ω элементарных исходов, а на новом пространстве $\Omega_1 = B$ элементарных исходов. Действительно, используя *геометрическое определение вероятности*, получаем для безусловной и условной вероятностей события A (на рис. 3.1 заштрихованная область соответствует

событию AB):

$$\mathbf{P}(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{S_{A\Omega}}{S_\Omega}, \quad \mathbf{P}(A|B) = \frac{S_{AB}/S_\Omega}{S_B/S_\Omega} = \frac{S_{AB}}{S_B} = \frac{S_{A\Omega_1}}{S_{\Omega_1}}.$$

Здесь S_A , S_Ω и т.д. обозначают соответственно площади A , Ω и т.д. Таким образом, выражение для $\mathbf{P}(A|B)$ будет совпадать с выражением для $\mathbf{P}(A)$, вычисленным в соответствии со схемой геометрической вероятности, если исходное пространство Ω элементарных исходов заменить новым пространством $\Omega_1 = B$.

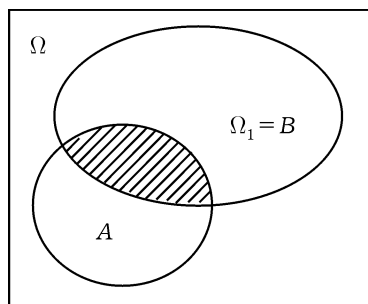


Рис. 3.1

Пример 3.2. Из урны, в которой $a = 7$ белых и $b = 3$ черных шаров, наугад без возвращения извлекают два шара. Пусть событие A_1 состоит в том, что первый извлеченный из урны шар является белым, а A_2 — белым является второй шар. Требуется найти $\mathbf{P}(A_2|A_1)$.

Приведем решение этой задачи двумя способами.

Первый способ. В соответствии с определением условной вероятности имеем (опуская пояснения):

$$\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{\mathbf{P}(A_1 A_2)}{\mathbf{P}(A_1)} = \frac{C_7^2 / C_{10}^2}{C_7^1 / C_{10}^1} = \frac{2}{3}.$$

Второй способ. Перейдем к новому пространству Ω_1 элементарных исходов. Так как событие A_1 произошло, то это означает, что в новом пространстве элементарных исходов всего равновозможных исходов

$$N_{\Omega_1} = a + b - 1 = 9,$$

а событию A_2 благоприятствует при этом

$$N_{A_2} = a - 1 = 6$$

исходов. Следовательно,

$$\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Пример 3.3. Пусть событие B — выпадение 4 или 6 очков на игральной кости, событие A_1 — выпадение четного числа очков, событие A_2 — выпадение 3, 4 или 5 очков, событие A_3 — выпадение нечетного числа очков.

Найдем условные вероятности событий A_1 , A_2 и A_3 при условии события B .

Так как событие B принадлежит событию A_1 , то при наступлении события B событие A_1 обязательно произойдет, т.е. событие A_1 имеет условную вероятность

$$\mathbf{P}(A_1|B) = 1.$$

Поскольку события A_3 и B несовместные, то при наступлении события B событие A_3 уже не может произойти и его условная вероятность

$$\mathbf{P}(A_3|B) = 0.$$

Наконец, в соответствии с классической схемой вероятности приходим к следующему значению условной вероятности события A_2 при условии события B :

$$\mathbf{P}(A_2|B) = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что условная вероятность события A_2 при условии B совпадает с безусловной вероятностью события A_2 .

3.2. Формула умножения вероятностей

При решении различных задач вероятностного характера часто интересующее нас *событие* A можно достаточно просто выразить через некоторые события A_1, A_2, \dots, A_n с помощью *операций объединения или пересечения*. Если $A = A_1 A_2 \dots A_n$, то для нахождения *вероятности* $\mathbf{P}(A)$ события A обычно удобно использовать следующую теорему.

Теорема 3.2 (теорема умножения вероятностей). Если $A = A_1 A_2 \dots A_n$ (т.е. A — пересечение событий A_1, A_2, \dots, A_n) и $\mathbf{P}(A) > 0$, то справедливо равенство

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 A_2)\dots\mathbf{P}(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}),$$

называемое *формулой умножения вероятностей*.

◀ Поскольку $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_n) > 0$, а

$$A_1 A_2 \dots A_k \supseteq A_1 A_2 \dots A_n \quad (k = \overline{1, n-1}),$$

то и $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_k) > 0$. Учитывая это неравенство, согласно определению 3.1 *условной вероятности*, имеем

$$\mathbf{P}(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) = \frac{\mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_n)}{\mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_{n-1})}.$$

Умножая обе части этого равенства на $\mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_{n-1})$, получаем

$$\mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_n) = \mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_{n-1})\mathbf{P}(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

Аналогично находим

$$\mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) = \mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_{n-2})\mathbf{P}(A_{n-1}|A_1 A_2 \dots A_{n-2}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_n) &= \mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_{n-2})\mathbf{P}(A_{n-1}|A_1 A_2 \dots A_{n-2}) \times \\ &\quad \times \mathbf{P}(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}). \end{aligned}$$

Продолжая эту процедуру, получаем формулу умножения вероятностей. ►

Замечание 3.1. Из свойства коммутативности пересечения событий следует, что правая часть формулы умножения для пересечения одних и тех же событий может быть записана по-разному. Например, как

$$\mathbf{P}(A_1 A_2) = \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}(A_2 | A_1),$$

так и в виде

$$\mathbf{P}(A_1 A_2) = \mathbf{P}(A_2 A_1) = \mathbf{P}(A_2) \mathbf{P}(A_1 | A_2).$$

Обычно выбирают тот вариант формулы, который приводит к более простым вычислениям.

Пример 3.4. На семи карточках написаны буквы, образующие слово „СОЛОВЕЙ“. Карточки перемешивают и из них наугад последовательно извлекают и выкладывают слева направо три карточки. Найдём вероятность того, что получится слово „ВОЛ“ (событие A).

Введём события: A_1 — на первой выбранной карточке написана буква „В“; A_2 — на второй карточке — буква „О“; A_3 — на третьей карточке — буква „Л“. Тогда событие A есть пересечение событий A_1 , A_2 и A_3 . Следовательно, в соответствии с формулой умножения вероятностей

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 A_2 A_3) = \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}(A_2 | A_1) \mathbf{P}(A_3 | A_1 A_2).$$

Согласно классическому определению 2.1 вероятности, имеем

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{7}.$$

Если событие A_1 произошло, то на шести оставшихся карточках буква „О“ встречается два раза, поэтому условная вероятность

$$\mathbf{P}(A_2 | A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Аналогично определяем

$$\mathbf{P}(A_3|A_1A_2) = \frac{1}{5}.$$

Окончательно получаем

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{105} \approx 0,0095.$$

3.3. Независимые и зависимые события

Из рассмотренных выше примеров видно, что *условная вероятность* $\mathbf{P}(A|B)$ события A при условии, что событие B произошло, может как совпадать с *безусловной вероятностью* $\mathbf{P}(A)$, так и не совпадать, т.е. наступление события B может влиять или не влиять на *вероятность события* A . Поэтому естественно степень связи (или степень зависимости) событий A и B оценивать путем сопоставления их условных вероятностей $\mathbf{P}(A|B)$, $\mathbf{P}(B|A)$ с безусловными.

Определение 3.2. События A и B , имеющие ненулевую вероятность, называют **независимыми**, если условная вероятность A при условии B совпадает с безусловной вероятностью A или если условная вероятность B при условии A совпадает с безусловной вероятностью B , т.е.

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A) \tag{3.2}$$

или

$$\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B), \tag{3.3}$$

в противном случае **события** A и B называют **зависимыми**.

Теорема 3.3. События A и B , имеющие ненулевую вероятность, являются независимыми тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B). \tag{3.4}$$

◀ Пусть выполнено равенство (3.3). Воспользовавшись *формулой умножения вероятностей* для двух событий, получим

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

К аналогичному выводу приходим и в случае выполнения равенства (3.2), т.е. из условия независимости событий следует (3.4).

Обратно, пусть выполнено равенство (3.4). Тогда, согласно определению 3.1 условной вероятности,

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A)$$

и

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B),$$

т.е. в силу определения 3.2 события A и B независимы. ▶

Таким образом, в качестве эквивалентного определения независимости двух событий, имеющих ненулевую вероятность, может служить следующее определение.

Определение 3.3. События A и B называют независимыми, если выполняется равенство (3.4).

Отметим, что последним определением можно пользоваться даже в том случае, когда вероятности событий A или B равны нулю.

Замечание 3.2. Из теоремы 3.3 следует, что если в определении 3.2 независимости выполняется одно из равенств (3.2) или (3.3), то выполняется автоматически и другое, т.е. в определении 3.2 достаточно потребовать выполнения любого одного из них.

Пример 3.5. Из колоды карт, содержащей $n = 36$ карт, наугад извлекают одну карту. Обозначим через A событие, соответствующее тому, что извлеченная карта будет пиковой

масти, а B — событие, соответствующее появлению „дамы“. Определим, являются ли зависимыми события A и B .

После вычислений получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, & \mathbf{P}(B) &= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \\ \mathbf{P}(AB) &= \frac{1}{36}, & \mathbf{P}(B|A) &= \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{1/36}{9/36} = \frac{1}{9} = \mathbf{P}(B), \end{aligned}$$

т.е. события A и B независимы. Как отмечалось в замечании 3.2, имеет место и равенство

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{1/36}{4/36} = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A). \quad \#$$

Следовательно, события A и B независимы.

Изменим теперь условия опыта, дополнительно добавив в колоду, допустим, $N = 100$ „пустых“ карт (без рисунка). Изменится ли ответ? Имеем

$$\mathbf{P}(B) = \frac{4}{136} = \frac{1}{34},$$

т.е. безусловная вероятность события B уменьшилась. Однако условная вероятность

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{1/136}{9/136} = \frac{1}{9}$$

не изменилась, т.е. события A и B стали зависимыми.

Теорема 3.4. Если события A и B независимые, то независимыми также являются пары событий \overline{A} и B , A и \overline{B} , \overline{A} и \overline{B} , если вероятности соответствующих событий ненулевые.

◀ В силу теоремы 3.1 и независимости событий A и B имеем:

$$\mathbf{P}(\overline{A}|B) = 1 - \mathbf{P}(A|B) = 1 - \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\overline{A}),$$

что означает независимость событий \bar{A} и B . Независимость остальных пар событий можно доказать аналогично. ►

Определение 3.4. События A_1, A_2, \dots, A_n называют *независимыми в совокупности*, если вероятность *пересечения* любых двух различных *событий* равна произведению вероятностей этих событий; вероятность пересечения любых трех событий равна произведению их вероятностей; ...; вероятность пересечения всех событий равна произведению их вероятностей.

Для событий A_1, A_2, \dots, A_n , независимых в совокупности, имеет место утверждение, аналогичное утверждению теоремы 3.4.

Теорема 3.5. Если события A_1, A_2, \dots, A_n независимы в совокупности, то и события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ независимы в совокупности. #

Если только любые два события из данной совокупности являются независимыми, то говорят о *попарной независимости событий* из этой совокупности.

Так же как и в случае двух событий, можно показать, что на вероятность каждого из независимых в совокупности событий не оказывает влияние появление или неоявление остальных событий.

Замечание 3.3. В силу определения независимости событий в совокупности *формула умножения вероятностей* для независимых в совокупности событий имеет вид

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n). \quad \#$$

Из независимости событий с ненулевыми вероятностями в совокупности, согласно теореме 3.3, следует их попарная независимость. Однако из попарной независимости, вообще говоря,

независимость в совокупности не следует, что демонстрирует следующий пример.

Пример 3.6. Опыт состоит в однократном подбрасывании тетраэдра, грани которого „пронумерованы“ следующим образом: на трех гранях стоят цифры 1, 2 и 3 соответственно (одна цифра на каждой из них), а на четвертой присутствуют все цифры 1, 2 и 3.

Введем события A_i — падение тетраэдра на грань, на которой присутствует цифра i , $i = \overline{1, 3}$. Покажем, что события A_1 , A_2 и A_3 попарно независимы, но зависимы в совокупности.

Согласно классическому определению вероятности, получаем

$$\mathbf{P}(A_i) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1, 3},$$

$$\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{\mathbf{P}(A_1A_2)}{\mathbf{P}(A_1)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично

$$\mathbf{P}(A_i|A_j) = \frac{1}{2}$$

при любых $i, j = \overline{1, 3}$, $i \neq j$, т.е. события A_1 , A_2 и A_3 являются попарно независимыми.

Однако, например,

$$\mathbf{P}(A_1|A_2A_3) = \frac{\mathbf{P}(A_1A_2A_3)}{\mathbf{P}(A_2A_3)} = \frac{1/4}{1/4} = 1 \neq \mathbf{P}(A_1),$$

т.е. события A_1 , A_2 и A_3 зависимы в совокупности. #

Заметим, что, когда говорят о независимости событий A_1, \dots, A_n , подразумевают именно независимость событий в совокупности, в отличие от попарной независимости событий A_1, \dots, A_n .

Запишем формулу для вероятности объединения независимых событий. Пусть

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_n.$$

Тогда в соответствии с законом де Моргана

$$\overline{A} = \overline{A_1} \dots \overline{A_n}.$$

Если события A_1, \dots, A_n независимые, то, согласно теореме 3.5, события $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}$ также независимые и, значит,

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}) \dots P(\overline{A_n}).$$

Отсюда окончательно получаем *формулу для вероятности объединения независимых событий*:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - [1 - P(A_1)] \dots [1 - P(A_n)].$$

Замечание 3.4 (о связи между совместными и зависимыми событиями). Между понятиями „несовместные“ и „независимые“ события имеется следующая связь:

1) если A и B — несовместные события (и $P(A) \neq 0$, и $P(B) \neq 0$), то они обязательно зависимые (убедитесь самостоятельно);

2) если A и B — совместные события, то они могут быть и зависимыми, и независимыми;

3) если A и B — зависимые события, то они могут быть и совместными, и несовместными. #

Следует помнить, что при использовании теоремы сложения вероятностей нужно проверять несовместность событий, а при использовании теоремы умножения — независимость событий.

В заключение отметим, что понятие независимости является очень важным в теории вероятностей. При этом следует различать формальное понятие независимости событий, определяемое свойствами вероятностной модели, и понятие независимости событий, возникающее в прикладных задачах и означающее, что события не связаны причинно. При корректном построении вероятностной модели второе трансформируется в первое, но это может быть не всегда.

3.4. Формула полной вероятности

Предположим, что в результате опыта может произойти одно из n событий H_1, H_2, \dots, H_n , которые удовлетворяют следующим двум условиям:

- 1) они являются *попарно несовместными*, т.е.

$$H_i H_j = \emptyset$$

при $i \neq j$;

- 2) хотя бы одно из них обязательно должно произойти в результате опыта, другими словами, их *объединение* есть *достоверное событие*, т.е.

$$H_1 \cup \dots \cup H_n = \Omega.$$

Определение 3.5. События H_1, H_2, \dots, H_n удовлетворяющие условиям 1 и 2, называют *гипотезами*.

Заметим, что если события удовлетворяют второму из двух указанных требований, то их совокупность называют *полной группой событий*. Таким образом, гипотезы — это попарно несовместные события, образующие полную группу событий.

Пусть также имеется некоторое событие A и известны *вероятности* гипотез $\mathbf{P}(H_1), \dots, \mathbf{P}(H_n)$, которые предполагаются ненулевыми, и *условные вероятности* $\mathbf{P}(A|H_1), \dots, \mathbf{P}(A|H_n)$ события A при выполнении этих гипотез. Задача состоит в вычислении *безусловной вероятности* события A . Для решения этой задачи используют следующую теорему.

Теорема 3.6. Пусть для некоторого события A и гипотез H_1, \dots, H_n известны $\mathbf{P}(H_1), \dots, \mathbf{P}(H_n)$, которые положительны, и $\mathbf{P}(A|H_1), \dots, \mathbf{P}(A|H_n)$. Тогда безусловную вероятность $\mathbf{P}(A)$ определяют по формуле

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1) + \dots + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}(A|H_n), \quad (3.5)$$

которую называют *формулой полной вероятности*.

◀ Представим событие A в виде

$$A = A\Omega = A(H_1 + \dots + H_n) = AH_1 + \dots + AH_n$$

(на рис. 3.2, область, соответствующая событию A , заштрихована).

С учетом того, что события AH_i , $i = \overline{1, n}$, несовместны, имеем

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AH_1) + \dots + \mathbf{P}(AH_n).$$

В соответствии с *формулой умножения вероятностей* получаем

$$\mathbf{P}(AH_1) = \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1), \quad \dots, \quad \mathbf{P}(AH_n) = \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}(A|H_n).$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1) + \dots + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}(A|H_n). \quad \blacktriangleright$$

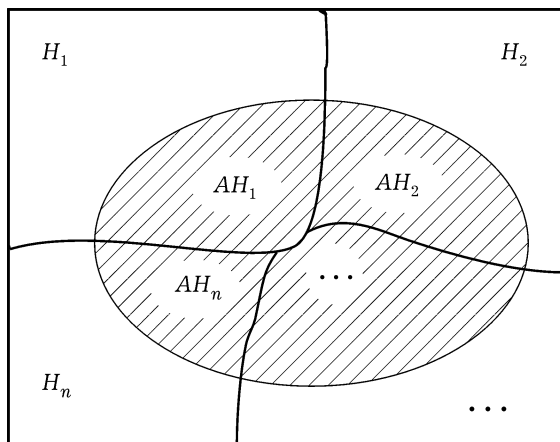


Рис. 3.2

Формула полной вероятности при всей своей простоте играет весьма существенную роль в теории вероятностей.

Пример 3.7. Путник должен попасть из пункта B в пункт A в соответствии со схемой дорог изображенной на рис. 3.3. Выбор любой дороги в любом пункте равновозможен. Найдём вероятность события A — достижения путником намеченной цели.

Для того чтобы попасть в пункт A , путник должен пройти один из промежуточных пунктов H_1 , H_2 или H_3 . Введем гипотезы H_i , где H_i означает, что путник выбрал в пункте B путь, ведущий в пункт H_i , $i = 1, 2, 3$. Ясно, что события H_i несовместные и одно из них обязательно происходит, причем в силу равновозможности выбора дорог из B в H_i

$$\mathbf{P}(H_i) = \frac{1}{3}.$$

Остается вычислить условные вероятности $\mathbf{P}(A|H_i)$, которые легко найти, если рассматривать новое *пространство элементарных исходов*, соответствующее выбранной гипотезе H_i .

Например, появление H_1 означает, что есть два равновозможных исхода (из пункта H_1 выходят две дороги), из которых лишь один благоприятствует событию A , т.е.

$$\mathbf{P}(A|H_1) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично находим, что

$$\mathbf{P}(A|H_2) = \frac{1}{4}$$

и

$$\mathbf{P}(A|H_3) = 0.$$

Согласно формуле 3.5 полной вероятности, получаем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 \right) = 0,25. \quad \#$$

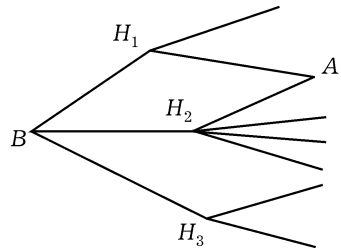


Рис. 3.3

Заметим, что данная задача может иметь техническую интерпретацию: сеть дорог — это сеть каналов передачи информации, а $\mathbf{P}(A)$ — вероятность передачи сообщения по такой сети.

Пример 3.8. Студент Иванов выучил все $N = 30$ экзаменационных билетов, но из них на „пять“ — лишь $N_1 = 6$. Определим, зависит или нет вероятность извлечения „счастливого“ билета (событие A) от того, первым или вторым выбирает Иванов свой билет.

Рассмотрим две ситуации.

Иванов выбирает билет первым. Тогда

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N_1}{N} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

Иванов выбирает билет вторым. Введем гипотезы: H_1 — первый извлеченный билет оказался „счастливым“, H_2 — „несчастливым“. Ясно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(H_1) &= \frac{N_1}{N} = \frac{1}{5}, & \mathbf{P}(H_2) &= \frac{N - N_1}{N} = \frac{4}{5}, \\ \mathbf{P}(A|H_1) &= \frac{N_1 - 1}{N - 1} = \frac{5}{29}, & \mathbf{P}(A|H_2) &= \frac{N_1}{N - 1} = \frac{6}{29}. \end{aligned}$$

В силу формулы (3.5) полной вероятности

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{29} + \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{29} = \frac{1}{5} = \frac{N_1}{N},$$

что совпадает с первой ситуацией.

Изменится ли ответ, если Иванов будет выбирать билет третьим, четвертым, ..., последним?

3.5. Формула Байеса

Пусть по-прежнему некоторое событие A может произойти с одним из событий H_1, \dots, H_n , образующих полную группу

попарно несовместных событий, называемых, как уже отмечалось, *гипотезами*. Предположим, что известны *вероятности* гипотез $\mathbf{P}(H_1), \dots, \mathbf{P}(H_n)$ ($\mathbf{P}(H_i) > 0$, $i = \overline{1, n}$) и что в результате опыта событие A произошло, т.е. получена дополнительная информация. Спрашивается, как „изменяться“ вероятности гипотез, т.е. чему будут равны *условные вероятности* $\mathbf{P}(H_1|A), \dots, \mathbf{P}(H_n|A)$, если известны также условные вероятности $\mathbf{P}(A|H_1), \dots, \mathbf{P}(A|H_n)$ события A ? Для ответа на этот вопрос используют следующую теорему.

Теорема 3.7. Пусть для некоторого события A , $\mathbf{P}(A) > 0$, и гипотез H_1, \dots, H_n известны $\mathbf{P}(H_1), \dots, \mathbf{P}(H_n)$ ($\mathbf{P}(H_i) > 0$, $i = \overline{1, n}$) и $\mathbf{P}(A|H_1), \dots, \mathbf{P}(A|H_n)$. Тогда условная вероятность $\mathbf{P}(H_i|A)$, $i = \overline{1, n}$, гипотезы H_i при условии события A определяется **формулой Байеса**

$$\mathbf{P}(H_i|A) = \frac{\mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)}{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1) + \dots + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}(A|H_n)}. \quad (3.6)$$

◀ Согласно определению 3.1 условной вероятности,

$$\mathbf{P}(H_i|A) = \frac{\mathbf{P}(AH_i)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Выражая теперь по *формуле умножения вероятностей* $\mathbf{P}(AH_i)$ через $\mathbf{P}(A|H_i)$ и $\mathbf{P}(H_i)$, получаем

$$\mathbf{P}(AH_i) = \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i).$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(H_i|A) = \frac{\mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Подставляя вместо вероятности $\mathbf{P}(A)$ ее значение, вычисленное в соответствии с *формулой* (3.5) *полной вероятности*, приходим к утверждению теоремы. ►

Формула Байеса находит широкое применение в математической статистике, теории принятия решений и их приложениях. Заметим, что **вероятности** $P(H_1), \dots, P(H_n)$ обычно называют **априорными** (т.е. полученными „до опыта“), а условные **вероятности** $P(H_1|A), \dots, P(H_n|A)$ — **апостериорными** (т.е. полученными „после опыта“).

Пример 3.9. Врач после осмотра больного считает, что возможно одно из двух заболеваний, которые мы зашифруем номерами 1 и 2, причем степень своей уверенности в отношении правильности диагноза он оценивает как 40 % и 60 % соответственно. Для уточнения диагноза больного направляют на анализ, исход которого дает положительную реакцию при заболевании 1 в 90 % случаев и при заболевании 2 — в 20 % случаев. Анализ дал положительную реакцию. Как изменится мнение врача после этого?

Обозначим через A событие, означающее, что анализ дал положительную реакцию. Естественно ввести следующие гипотезы: H_1 — имеет место заболевание 1; H_2 — имеет место заболевание 2. Из условий задачи ясно, что априорные вероятности гипотез равны:

$$P(H_1) = 0,4 \quad \text{и} \quad P(H_2) = 0,6,$$

а условные вероятности события A при наличии гипотез H_1 и H_2 равны 0,9 и 0,2 соответственно. Используя формулу Байеса, находим

$$P(H_i|A) = \frac{0,4 \cdot 0,9}{0,4 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,2} = 0,75.$$

Итак, врач с большей уверенностью признает наличие заболевания 1.

Пример 3.10. Рассмотрим случай, когда

$$P(A|H_i) = \text{const} = C, \quad i = \overline{1, n},$$

т.е. на вероятность появления события A все гипотезы влияют одинаково. Тогда, согласно формуле Байеса, получаем

$$\mathbf{P}(H_i|A) = \mathbf{P}(H_i),$$

т.е. дополнительная информация о появлении события A не имеет никакой ценности, поскольку не меняет наших представлений об априорных вероятностях гипотез.

3.6. Схема Бернулли

Повторные испытания — это последовательное проведение n раз одного и того же опыта или одновременное проведение n одинаковых опытов. Например, при контроле уровня надежности прибора могут либо проводить n испытаний с одним и тем же прибором, если после отказа полностью восстанавливают его исходные свойства, либо ставить на испытания n опытных образцов этого прибора, которые считают идентичными.

Определение 3.6. *Схемой Бернулли (или последовательностью независимых одинаковых испытаний, или биномиальной схемой испытаний)* называют последовательность испытаний, удовлетворяющую следующим условиям:

1) при каждом испытании различают лишь два *исхода*: появление некоторого *события* A , называемого „успехом“, либо появление его *дополнения* \bar{A} , называемого „неудачей“;

2) испытания являются *независимыми*, т.е. вероятность успеха в k -м испытании не зависит от исходов всех испытаний до k -го;

3) *вероятность* успеха во всех испытаниях постоянна и равна

$$\mathbf{P}(A) = p.$$

Вероятность неудачи в каждом испытании обозначим q , т.е.

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - p = q.$$

Приведем примеры реальных испытаний, которые в той или иной степени „вписываются“ в рамки сформулированной модели испытаний по схеме Бернулли.

1. Последовательное подбрасывание n раз симметричной монеты (здесь успехом является появление „герба“ с вероятностью $p = 1/2$) или последовательное бросание n раз игральной кости (здесь успехом можно считать, например, появление шестерки с вероятностью $p = 1/6$). Эти две реальные схемы испытаний являются примером идеального соответствия схеме испытаний Бернулли.

2. Последовательность n выстрелов стрелка по мишени можно лишь приближенно рассматривать как схему испытаний Бернулли, так как независимость результатов стрельбы может нарушаться либо из-за „пристрелки“ спортсмена, либо вследствие его утомляемости.

3. Испытания n изделий в течение заданного срока при контроле уровня их надежности, как правило, хорошо согласуются с моделью испытаний по схеме Бернулли, если на испытания поставлены идентичные образцы.

При рассмотрении схемы испытаний Бернулли основной задачей является нахождение вероятности события A_k , состоящего в том, что в n испытаниях успех наступит ровно k раз, $k = \overline{0, n}$. Для решения этой задачи используют следующую теорему, обозначая вероятность $\mathbf{P}(A_k)$ через $P_n(k)$.

Теорема 3.8. Вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях по схеме Бернулли произойдет ровно k успехов, определяется *формулой Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (3.7)$$

◀ Результат каждого опыта можно записать в виде последовательности УНН...У, состоящей из n букв „У“ и „Н“, причем буква „У“ на i -м месте означает, что в i -м испытании произошел успех, а „Н“ — неудача. *Пространство элементарных исходов* Ω состоит из 2^n исходов, каждый из которых отождествляется с определенной последовательностью УНН...У.

Каждому элементарному исходу $\omega = \text{УНН...У}$ можно поставить в соответствие вероятность

$$\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{P}(\text{УНН...У}).$$

В силу независимости испытаний события У, Н, Н, ..., У являются независимыми в совокупности, и потому по теореме умножения вероятностей имеем

$$\mathbf{P}(\omega) = p^i q^{n-i}, \quad i = \overline{0, n},$$

если в n испытаниях успех „У“ имел место i раз, а неуспех „Н“, следовательно, $n - i$ раз.

Событие A_k происходит всякий раз, когда реализуется элементарный исход ω , в котором $i = k$. Вероятность любого такого элементарного исхода равна $p^k q^{n-k}$.

Число таких исходов совпадает с числом способов, которыми можно расставить k букв „У“ на n местах, не учитывая порядок, в котором их расставляют. Число таких способов равно C_n^k .

Так как A_k есть объединение (сумма) всех указанных элементарных исходов, то окончательно получаем для вероятности $\mathbf{P}(A_k) = P_n(k)$ формулу (3.7). ►

Формулу (3.7) называют также **биномиальной**, так как ее правая часть представляет собой $(k + 1)$ -й член формулы бинома Ньютона [I].

$$1 = (p + q)^n = C_n^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^n p^n.$$

Набор вероятностей $P_n(k)$, $k = \overline{0, n}$, называют **биномиальным распределением вероятностей**.

Из формулы Бернулли вытекают два следствия.

1. Вероятность появления успеха (события A) в n испытаниях не более k_1 раз и не менее k_2 раз равна:

$$\mathbf{P}\{k_1 \leq k \leq k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (3.8)$$

Это следует из того, что *события* A_k при разных k являются несовместными.

2. В частном случае при $k_1 = 1$ и $k_2 = n$ из (3.8) получаем формулу для вычисления вероятности хотя бы одного успеха в n испытаниях:

$$\mathbf{P}\{k \geq 1\} = 1 - q^n. \quad (3.9)$$

Пример 3.11. Монету (симметричную) подбрасывают $n = 10$ раз. Определим вероятность выпадения „герба“:

- а) ровно пять раз;
- б) не более пяти раз;
- в) хотя бы один раз.

В соответствии с формулой (3.7) Бернулли имеем:

$$\text{а) } P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} = 0,246;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \mathbf{P}\{k \leq 5\} &= \frac{C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5}{1024} = \\ &= \frac{638}{1024} \approx 0,623; \end{aligned}$$

$$\text{в) } \mathbf{P}\{k \geq 1\} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0,999.$$

Пример 3.12. Вероятность выигрыша на один лотерейный билет равна 0,01. Определим, сколько билетов нужно купить, чтобы вероятность хотя бы одного выигрыша в лотерее была не менее заданного значения $P_z = 0,9$.

Пусть куплено n билетов. Предположим, что общее число билетов, разыгрывающихся в лотерее велико (во много раз больше купленных билетов). При этом можно считать, что каждый билет выигрывает независимо от остальных с вероятностью $p = 0,01$. Тогда вероятность получить k выигрышных билетов можно определить, используя формулу Бернулли. В частности, согласно (3.9), имеем при $q = 1 - p$:

$$\mathbf{P}\{k \geq 1\} = 1 - q^n = 1 - (1 - p)^n \geq P_z,$$

откуда получаем

$$n \geq \frac{\ln(1 - P_3)}{\ln(1 - p)} = \frac{\ln 0,1}{\ln 0,99} \approx 230.$$

Таким образом, нужно купить не менее 230 лотерейных билетов. #

При больших значениях числа испытаний n использование формулы Бернулли затруднительно в вычислительном плане. Здесь существенную помощь могут оказать приближенные формулы.

Пусть число испытаний n по схеме Бернулли „велико“, а вероятность успеха p в одном испытании „мала“, причем „мало“ также произведение $\lambda = np$. Тогда $P_n(k)$ определяют по приближенной формуле

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = \overline{0, n},$$

называемой **формулой Пуассона**. Совокупность вероятностей $P(k; \lambda) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$, $k = 0, 1, \dots$, называют **распределением Пуассона**.

Значения функции $P(k; \lambda)$ для некоторых λ приведены в табл. П.1.

Формула Пуассона справедлива также для числа неудач, но только в том случае, когда „мало“ $\lambda' = np$.

Замечание 3.5. Слова „мало“ и „велико“ здесь и далее носят относительный характер. Рекомендации по выбору численных значений соответствующих величин будут приведены ниже.

Пример 3.13. Вероятность выпуска бракованного сверла равна 0,015. Сверла укладывают в коробки по 100 штук. Найдем вероятность того, что в коробке, выбранной наудачу, не окажется ни одного бракованного сверла.

Очевидно, что мы имеем дело со схемой Бернулли, причем $n = 100$, $p = 0,015$ и $k = 0$. Поскольку число n испытаний „велико“, а вероятность успеха p в каждом испытании „мала“, воспользуемся приближенной формулой Пуассона, в которой

$$\lambda = np = 100 \cdot 0,015 = 1,5.$$

Тогда искомая вероятность

$$P \approx \frac{e^{-1,5} 1,5^0}{0!} = P(0; 1,5).$$

По табл. П.1 находим

$$P(0; 1,5) = 0,22313.$$

Локальная формула Муавра — Лапласа. Если в схеме Бернулли число испытаний n „велико“, причем „велики“ также вероятности p успеха и q неудачи, то для всех k справедлива приближенная формула

$$\sqrt{npq}P_n(k) \approx \varphi(x),$$

называемая *локальной формулой Муавра — Лапласа*, где

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

а

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Функцию φ называют *плотностью стандартного нормального* (или *гауссова*) *распределения*.

Значения функции φ для некоторых x приведены в табл. П.2. Поскольку функция φ является четной, то при определении φ для отрицательных x нужно воспользоваться равенством

$$\varphi(x) = \varphi(-x).$$

Пример 3.14. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Определим вероятность того, что при 400 выстрелах произойдет ровно 300 попаданий.

В данном случае „велики“ и число $n = 400$ испытаний, и вероятности $p = 0,8$ успеха и $q = 1 - p = 0,2$ неудачи в одном испытании, поэтому воспользуемся локальной формулой Муавра — Лапласа при $k = 300$. Получим:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 8,$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 320}{8} = -2,5$$

и

$$\mathbf{P} \approx \frac{\varphi(-2,5)}{8}.$$

Отсюда, учитывая четность функции $\varphi(x)$, с помощью табл. П.2 окончательно получаем

$$\mathbf{P} \approx \frac{0,01753}{8} \approx 0,0022.$$

Интегральная формула Муавра — Лапласа. Если число n испытаний по схеме Бернулли „велико“, причем „велики“ также вероятности p успеха и q неудачи, то для вероятности $\mathbf{P}\{k_1 \leq k \leq k_2\}$ того, что число успехов k заключено в пределах от k_1 до k_2 , справедливо приближенное соотношение

$$\mathbf{P}\{k_1 \leq k \leq k_2\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

называемое *интегральной формулой Муавра — Лапласа*, где

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

а

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Функцию $\Phi(x)$ называют **функцией стандартного нормального** (или **гауссова**) **распределения**.

Определение 3.7. Функцию

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2} dy$$

называют **интегралом Лапласа**.

В табл. П.3 приведены значения $\Phi_0(x)$ для положительных x . В силу четности $\varphi(x)$ интеграл Лапласа $\Phi_0(x)$ является нечетной функцией, т.е.

$$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x),$$

и, кроме того,

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}.$$

Используя интеграл Лапласа, интегральную формулу Муавра — Лапласа можно записать в виде

$$\mathbf{P}\{k_1 \leq k \leq k_2\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1).$$

Пример 3.15. Найдем вероятность того, что при 600 бросаниях игральной кости выпадет от 90 до 120 „шестерок“.

Воспользуемся интегральной формулой Муавра — Лапласа, в которой нужно положить

$$x_1 = \frac{90 - 600 \cdot 1/6}{\sqrt{600 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} \approx -1,10$$

и

$$x_2 = \frac{120 - 600 \cdot 1/6}{\sqrt{600 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} \approx 2,19.$$

Тогда искомая вероятность приближенно равна:

$$\mathbf{P} \approx \Phi_0(2,19) - \Phi_0(-1,10).$$

В соответствии с табл. П.3 имеем

$$P \approx 0,48574 + 0,36433 = 0,85007. \quad \#$$

Дадим некоторые рекомендации (носящие, вообще говоря, условный характер) по применению приближенных формул.

Если число испытаний $n = \overline{10, 20}$, то приближенные формулы используют для грубых прикидочных расчетов. При этом формулу Пуассона применяют в том случае, когда $\lambda = np$ или $\lambda' = nq$ изменяются в пределах от 0 до 2 (при $n = 10$) и от 0 до 3 (при $n = 20$); в противном случае необходимо пользоваться формулами Муавра — Лапласа.

При $n = \overline{20, 100}$ приближенные формулы уже можно использовать для прикладных инженерных расчетов. Формулу Пуассона рекомендуется применять, когда λ или λ' заключены в пределах от 0 до 3 (при $n = 20$) и от 0 до 7 (при $n = 100$).

Если $n = \overline{100, 1000}$, то практически в любых инженерных расчетах можно обойтись приближенными формулами. Формулу Пуассона используют в случае, когда λ или λ' изменяются в пределах от 0 до 7 (при $n = 100$) и от 0 до 15 (при $n = 1000$).

Наконец, при $n > 1000$ даже специальные таблицы рассчитывают с помощью приближенных формул (правда, для увеличения точности используют специальные поправки). В этом случае для применения формулы Пуассона необходимо, чтобы λ или λ' лежали в пределах от 0 до α , где $\alpha = 15$ при $n = 1000$ и увеличивается с ростом n .

Во многих задачах рассматривают такие независимые одинаковые испытания, в каждом из которых может произойти не одно из двух *несовместных событий* (успех и неудача), как в схеме Бернулли, а одно из m таких событий.

Определение 3.8. Опыт, состоящий в n -кратном повторении одинаковых независимых испытаний, в каждом из которых может произойти одно и только одно из m несовместных событий A_1, \dots, A_m , причем событие A_i наступает с вероят-

ностью p_i , называют **полиномиальной (мультиномиальной) схемой**.

Теорема 3.9. Вероятность $P(n_1, \dots, n_m)$ того, что в n испытаниях событие A_1 произойдет ровно n_1 раз, событие A_2 произойдет ровно n_2 раз, ..., событие A_m произойдет ровно n_m раз ($n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$), равна:

$$P(n_1, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}.$$

◀ По аналогии со схемой Бернулли в полиномиальной схеме исход каждого опыта можно записать в виде набора чисел k_1, k_2, \dots, k_n , $k_i = \overline{1, m}$, где число k_i на i -м месте означает, что в i -м испытании произошло событие A_{k_i} . Поскольку испытания являются независимыми, то исходу k_1, k_2, \dots, k_n соответствует вероятность $p_{k_1} \dots p_{k_n}$, которую можно записать в виде $p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$, где n_k , $k = \overline{1, m}$, — число испытаний, в которых произошло событие A_k .

Теперь, для того чтобы найти вероятность $P(n_1, \dots, n_m)$, необходимо подсчитать число способов, которыми n_1 символов A_1 , n_2 символов A_2 , ..., n_m символов A_m можно расставить на n местах (см. также 2.2). Поскольку порядок расстановки не существен, то n_1 символов A_1 можно расставить на n местах $C_n^{n_1}$ способами. Затем n_2 символов A_2 можно расставить на оставшихся $n - n_1$ местах $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами. Продолжая эту процедуру и используя основную формулу комбинаторики, получаем, что общее число способов равно:

$$\begin{aligned} C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n-n_1-\dots-n_{m-1}}^{n_m} &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \times \\ &\times \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \dots \frac{(n-n_1-\dots-n_{m-1})!}{n_m!0!} = \frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_m!}. \end{aligned}$$

Отсюда приходим к утверждению теоремы. ►

Набор вероятностей $P(n_1, \dots, n_m)$ также называют **полиномиальным распределением**.

Вероятность $P(n_1, \dots, n_m)$ можно получить как коэффициент при $x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}$ в разложении полинома

$$(p_1 x_1 + \dots + p_m x_m)^n$$

по степеням x_1, \dots, x_m .

Пример 3.16. В некотором государстве живут 60 % блондинов, 25 % брюнетов и 15 % шатенов. Найдём вероятность того, что среди восьми наудачу отобранных подданных этого государства окажутся четыре блондина, три брюнета и один шатен.

В данном случае мы имеем дело с полиномиальной схемой, в которой $m = 3$, $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,25$, $p_3 = 0,15$, $n = 8$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$ и $n_3 = 1$. Тогда

$$P = P(4, 3, 1) = \frac{8! \cdot 0,6^4 \cdot 0,25^3 \cdot 0,15^1}{4! \cdot 3! \cdot 1!} \approx 0,085.$$

Замечание 3.6. Иногда в практических приложениях рассматривают *обобщенную схему Бернулли* или *обобщенную полиномиальную (мультиномиальную) схему*, для которой третье условие в определениях схемы Бернулли или полиномиальной схемы заменяют следующим: вероятность p успеха или вероятность p_k появления события A_k в i -м испытании могут меняться с изменением номера $i = \overline{1, n}$. Для обобщенных схем также можно указать соответствующие формулы для вероятностей сложных событий, рассматривавшихся выше*.

3.7. Решение типовых примеров

Пример 3.17. Одновременно бросают две игральные кости (белую и черную). Рассмотрим следующие *события*: A — на белой кости выпало более двух очков; B — в сумме выпало четное число очков; C — в сумме выпало менее десяти очков.

* Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.

Вычислим *условные вероятности* $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A|C)$, $P(C|A)$, $P(B|C)$ и $P(C|B)$ и определим, какие из *событий* A , B и C являются *независимыми*.

Нетрудно подсчитать в соответствии с *классическим определением вероятности*, что

$$P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{5}{6},$$

$$P(AB) = \frac{1}{3}, \quad P(AC) = \frac{1}{2}, \quad P(BC) = \frac{7}{18}.$$

Поэтому

$$P(A|B) = \frac{2}{3}, \quad P(B|A) = \frac{1}{2}, \quad P(A|C) = \frac{3}{5},$$

$$P(C|A) = \frac{3}{4}, \quad P(B|C) = \frac{7}{15}, \quad P(C|B) = \frac{7}{9}.$$

Отсюда, в частности, следует, что *независимыми* являются события A и B . *События* A и C , B и C *зависимые*. Поэтому *события* A , B и C не являются *независимыми в совокупности*.

Пример 3.18. Каждая буква слова „МАТЕМАТИКА“ написана на отдельной карточке. Карточки тщательно перемешаны. Последовательно извлекают четыре карточки. Найдем *вероятность события* A — получить слово „ТЕМА“?

Пусть A_1 , A_2 , A_3 и A_4 — события, состоящие в последовательном извлечении букв „Т“, „Е“, „М“, „А“. Тогда соответствующие вероятности равны:

$$P(A_1) = \frac{1}{5}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{1}{9},$$

$$P(A_3|A_1A_2) = \frac{1}{4}, \quad P(A_4|A_1A_2A_3) = \frac{3}{7}.$$

Отсюда, согласно *формуле умножения вероятностей*, получаем

$$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{420} \approx 0,0024.$$

Пример 3.19. Обнаружение воздушной цели проводится независимо двумя радиолокационными станциями. Вероятность $P(A)$ обнаружения цели первой станцией равна 0,7. Вероятность $P(B)$ обнаружения цели второй станцией равна 0,8. Определим вероятность $P(C)$ того, что цель будет обнаружена хотя бы одной станцией.

По условию события A и B являются независимыми, поэтому по формуле умножения вероятностей для независимых событий вероятность события AB (цель обнаружена обеими станциями) равна:

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

Значит, в силу *теоремы сложения вероятностей*

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,94.$$

Так как события A и B независимые, то $P(C)$ можно найти путем перехода к противоположным событиям \bar{A} и \bar{B} . В этом случае, используя закон де Моргана и теорему 3.4, имеем

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\overline{\bar{A}\bar{B}}) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = \\ &= 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)] = 0,94. \end{aligned}$$

Пример 3.20. Система управления состоит из четырех узлов с номерами 1, 2, 3 и 4 (рис. 3.4). Вероятности P_i безотказной работы узлов равны $P_1 = 0,7$, $P_2 = 0,6$, $P_3 = 0,8$ и $P_4 = 0,9$ соответственно. Вычислим вероятность безотказной работы всей системы управления, считая отказы узлов независимыми событиями.

Вероятность P_{12} работы участка 1–2 цепи, состоящего из двух соединенных последо-

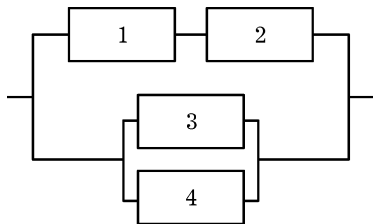


Рис. 3.4

вательно элементов 1 и 2, равна: $P_{12} = P_1 P_2 = 0,42$. Вероятность P_{34} работы участка 3–4 цепи, состоящего из двух соединенных последовательно элементов 3 и 4, равна:

$$P_{34} = 1 - (1 - P_3)(1 - P_4) = 0,98.$$

Поскольку вся система состоит из параллельно соединенных участков 1–2 и 3–4, то вероятность ее безотказной работы равна:

$$P = 1 - (1 - P_{12})(1 - P_{34}) = 1 - (1 - 0,42)(1 - 0,98) \approx 0,99.$$

Пример 3.21. Партия транзисторов, среди которых 10 % дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживается дефект, если он есть, и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан негодным. Найдём вероятность того, что проверяемый транзистор будет признан негодным.

Пусть A — событие, состоящее в том, что проверяемый транзистор признан негодным. С этим событием связаны две гипотезы: H_1 — проверяемый транзистор дефектный и H_2 — проверяемый транзистор исправный. По условию

$$\begin{aligned} P(H_1) &= 0,1, & P(H_2) &= 0,9, \\ P(A|H_1) &= 0,95, & P(A|H_2) &= 0,03. \end{aligned}$$

Тогда в силу *формулы полной вероятности*

$$P(A) = 0,1 \cdot 0,95 + 0,9 \cdot 0,03 = 0,122.$$

Пример 3.22. В поступивших на склад трех партиях деталей годные составляют 89 %, 92 % и 97 % соответственно, а количества деталей в партиях относятся как 1 : 2 : 3. Ответим на два вопроса.

1. Чему равна вероятность того, что случайно выбранная со склада деталь окажется негодной?

2. Пусть известно, что случайно выбранная деталь оказалась негодной. Найдем вероятности того, что она принадлежит первой, второй и третьей партиям.

Обозначим H_1 , H_2 и H_3 события, состоящие в том, что деталь принадлежит первой, второй и третьей партиям соответственно. Поскольку эти события попарно *несовместные* и образуют *полную группу событий*, то они являются гипотезами, причем, как нетрудно подсчитать,

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{1}{6}, \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{2}{6}, \quad \mathbf{P}(H_3) = \frac{3}{6}.$$

Событие A — выбранная деталь является негодной. Условные вероятности события A равны:

$$\mathbf{P}(A|H_1) = 0,11, \quad \mathbf{P}(A|H_2) = 0,08, \quad \mathbf{P}(A|H_3) = 0,03.$$

Согласно формуле полной вероятности, найдем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6} \cdot 0,11 + \frac{2}{6} \cdot 0,08 + \frac{3}{6} \cdot 0,03 = 0,06.$$

Вероятности того, что негодная деталь принадлежит первой, второй и третьей партиям, определяем, используя *формулу Байеса*:

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\frac{1}{6} \cdot 0,11}{0,06} \approx 0,31, \quad \mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\frac{2}{6} \cdot 0,08}{0,06} \approx 0,44,$$

$$\mathbf{P}(H_3|A) = \frac{\frac{3}{6} \cdot 0,03}{0,06} \approx 0,25.$$

Пример 3.23. По каналу связи, подверженному воздействию помех, передают одну из двух команд управления в виде

кодовых комбинаций 11111 или 00000, причем *априорные вероятности* передачи этих команд равны 0,7 и 0,3 соответственно. За счет помех вероятности правильного приема каждого из символов 1 и 0 уменьшаются до 0,6. Предполагается, что символы кодовых комбинаций искажаются независимо один от другого. На выходе зарегистрирована комбинация 10110. Определим, какая из команд наиболее вероятно была передана.

Пусть A — событие, состоящее в приеме комбинации 10110. К этому событию ведут две гипотезы: H_1 — была передана комбинация 11111; H_2 — была передана комбинация 00000. По условию задачи $\mathbf{P}(H_1) = 0,7$ и $\mathbf{P}(H_2) = 0,3$.

Определим условные вероятности $\mathbf{P}(A|H_1)$ и $\mathbf{P}(A|H_2)$. В силу независимости искажения символов имеем:

$$\mathbf{P}(A|H_1) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \approx 0,035;$$

$$\mathbf{P}(A|H_2) = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \approx 0,023.$$

Воспользовавшись теперь формулой Байеса, получим:

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{0,7 \cdot 0,035}{0,7 \cdot 0,035 + 0,3 \cdot 0,023} \approx 0,78;$$

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{0,3 \cdot 0,023}{0,7 \cdot 0,035 + 0,3 \cdot 0,023} \approx 0,22.$$

Сравнивая найденные вероятности, заключаем, что при появлении комбинации 10110 с большей вероятностью 0,78 была передана команда 11111.

Пример 3.24. По цели производят шесть независимых выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле $p = 0,75$. Вычислим:

- а) вероятность ровно пяти попаданий (событие A);
- б) вероятность не менее пяти попаданий (событие B);
- в) вероятность менее трех попаданий (событие C).

Очевидно, мы имеем дело со *схемой Бернулли*, в которой $n = 6$, $p = 0,75$ и $q = 0,25$. Воспользовавшись *формулой Бернулли*, будем иметь:

$$\text{а) } \mathbf{P}(A) = P_6(5) = C_6^5 0,75^5 0,25^1 \approx 0,356;$$

$$\text{б) } \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\{k \geq 5\} = C_6^5 0,75^5 0,25^1 + C_6^6 0,75^6 0,25^0 \approx 0,534;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \mathbf{P}(C) = \mathbf{P}\{k \leq 2\} &= C_6^0 0,75^0 0,25^6 + C_6^1 0,75^1 0,25^5 + \\ &+ C_6^2 0,75^2 0,25^4 \approx 0,0376. \end{aligned}$$

Пример 3.25. В коробке лежит 200 конденсаторов, причем два из них нужной емкости. Случайным образом из коробки вынимают один конденсатор и после определения его емкости возвращают обратно в коробку. Выясним, сколько раз нужно осуществить указанную операцию, чтобы вероятность хотя бы один встретить конденсатор нужной емкости была не менее 0,95.

Поскольку выбор осуществляется с возвращением, мы имеем дело со *схемой Бернулли*, в которой

$$p = \frac{2}{200} \quad \text{и} \quad q = 1 - p = 0,99.$$

Пусть A — интересующее нас событие. Тогда \bar{A} — событие, состоящее в том, что при n испытаниях ни разу не появился конденсатор нужной емкости. Из условия задачи следует:

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = 0,99^n \leq 1 - 0,95 = 0,05.$$

Поэтому

$$n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,99} \approx 296.$$

Итак, указанную операцию необходимо осуществить, по крайней мере, 296 раз.

Пример 3.26. Вероятность искажения одного символа при передаче сообщения по линии связи равна 0,001. Сообщение считают принятым, если в нем отсутствуют искажения. Найдем вероятность того, что будет принято сообщение, состоящее из 20 слов по 100 символов каждое.

Передаваемое сообщение содержит 2000 символов. Предполагая, что символы искажаются независимо, имеем дело со схемой Бернулли, в которой $n = 2000$, $p = 0,001$, $k = 0$. Поскольку n „велико“, причем

$$\lambda = np = 2$$

„малó“ (см. с. 107), то для вычисления интересующей нас вероятности применим приближенную *формулу Пуассона*. Тогда, используя табл. П.1, получаем

$$P \approx P(0; 2) = 0,13534.$$

Пример 3.27. На факультете обучаются 300 студентов. Предполагая, что вероятность родиться в каждый день года одинакова, найдем вероятность того, что ровно 80 студентов факультета будут праздновать дни рождения летом.

Вероятность того, что ровно k студентов будут отмечать летом день рождения, определяется по формуле Бернулли, в которой $n = 300$, $p = 1/4$ и $q = 3/4$. Так как n , p и q „велики“ и

$$\lambda = np = 75 \quad \text{и} \quad \lambda' = nq = 225,$$

то для вычисления искомой вероятности необходимо применить одну из *формул Муавра — Лапласа*. Поскольку в задаче нужно найти вероятность наступления ровно k успехов, то применим *локальную формулу Муавра — Лапласа*, в которой

$$\sqrt{npq} = 7,5, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 75}{7,5} \approx 0,67.$$

Воспользовавшись табл. П.2, имеем

$$P \approx \frac{\varphi(0,67)}{7,5} = \frac{0,31874}{7,5} \approx 0,0425.$$

Пример 3.28. Определим вероятность того, что при 900 бросаниях игральной кости „шестерка“ выпадет от 130 до 300 раз.

Поскольку в данном примере „велики“ $n = 800$,

$$\lambda = np = 150 \quad \text{и} \quad \lambda' = nq = 750,$$

то, согласно интегральной формуле Муавра — Лапласа, имеем:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{130 - 150}{\sqrt{800 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} \approx -1,90,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 150}{\sqrt{800 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} \approx 14,23.$$

Так как в табл. П.3 значение $\Phi_0(14,23)$ отсутствует, заменим его на 0,5. Тогда

$$P \approx \Phi_0(14,23) - \Phi_0(-1,90) = 0,5 + 0,47128 = 0,97128.$$

Пример 3.29. Игральную кость бросают 10 раз. Требуется найти вероятность того, что „шестерка“ выпадет два раза, а „пятерка“ — 3 раза.

В данном опыте имеем дело с 10 независимыми испытаниями, причем в каждом испытании с вероятностью $1/6$ происходит событие A_1 (выпадает „шестерка“), с той же вероятностью $1/6$ происходит событие A_2 (выпадает „пятерка“) и, наконец, с вероятностью $4/6$ происходит событие A_3 (выпадает любое другое число очков). Искомую вероятность можно вычислить, используя теорему 3.9:

$$P = P(2, 3, 5) = \frac{10!(1/6)^2(1/6)^3(4/6)^5}{2!3!5!} \approx 0,043.$$

Вопросы и задачи

- 3.1.** Дайте определение условной вероятности.
- 3.2.** Сформулируйте теорему умножения вероятностей и объясните ее геометрический смысл для двух событий.
- 3.3.** Какие два события называют независимыми? зависимыми?
- 3.4.** Какие n событий называют независимыми в совокупности? попарно?
- 3.5.** Какая связь существует между совместными и зависимыми событиями?
- 3.6.** Какие события называют гипотезами?
- 3.7.** Напишите формулу полной вероятности.
- 3.8.** Напишите формулу Байеса.
- 3.9.** Что называют схемой Бернулли?
- 3.10.** Напишите формулу Бернулли.
- 3.11.** Напишите формулу для вероятности того, что в n испытаниях по схеме Бернулли число успехов будет заключено в пределах от k_1 до k_2 .
- 3.12.** Напишите формулу для вероятности того, что в n испытаниях по схеме Бернулли произойдет, по крайней мере, один успех.
- 3.13.** Напишите формулу Пуассона.
- 3.14.** Напишите локальную формулу Муавра — Лапласа.
- 3.15.** Напишите интегральную формулу Муавра — Лапласа.
- 3.16.** В каких случаях можно применять формулу Пуассона?
- 3.17.** В каких случаях можно применять локальную формулу Муавра — Лапласа?

3.18. В каких случаях можно применять интегральную формулу Муавра — Лапласа?

3.19. Что называют полиномиальной схемой?

3.20. Напишите формулу для вероятности того, что в полиномиальной схеме событие A_1 произойдет ровно n_1 раз, ..., событие A_m произойдет ровно n_m раз.

3.21. Подбрасывают наудачу три игральные кости. Наблюдаемые события: A — на трех костях выпадут разные числа очков, B — хотя бы на одной из костей выпадет „шестерка“. Вычислите $P(A|B)$ и $P(B|A)$.

О т в е т: $P(A|B) = 60/91$, $P(B|A) = 1/2$.

3.22. В шкаф поставили девять новых однотипных приборов. Для проведения опыта берут наугад три прибора, после работы их возвращают в шкаф. На вид прибор, бывший в употреблении, не отличается от нового. Определите вероятность того, что после проведения трех опытов в шкафу не останется новых приборов.

О т в е т: $P = 1 \cdot (6/9 \cdot 5/8 \cdot 4/7) \cdot (3/9 \cdot 2/8 \cdot 1/7) \approx 0,0028$.

3.23. На карточках разрезной азбуки написаны 32 буквы русского алфавита. Пять карточек вынимают наудачу одна за другой и укладывают на стол в порядке появления. Найдите вероятность того, что получится слово „КОНЕЦ“.

О т в е т: $P = 1/32 \cdot 1/31 \cdot 1/30 \cdot 1/29 \cdot 1/28 \approx 4,14 \cdot 10^{-8}$.

3.24. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Если студент не отвечает на один вопрос, преподаватель задает другой. Найти вероятность того, что студент сдаст зачет.

О т в е т: $P = 1 - 1/29 \approx 0,966$.

3.25. Два стрелка стреляют в цель, причем каждый делает по одному выстрелу. Для первого стрелка вероятность попадания в цель равна 0,7, для второго — 0,8. Какова вероятность попасть в цель хотя бы одному стрелку?

О т в е т: $P = 0,94$.

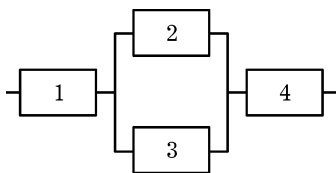


Рис. 3.5

3.26. Система состоит из четырех узлов (рис. 3.5). Вероятности P_i безотказной работы узлов равны соответственно P_1 , P_2 , P_3 и P_4 . Вычислите вероятность безотказной работы всей системы.

О т в е т: $P = P_1 [1 - (1 - P_2)(1 - P_3)] P_4$.

3.27. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживают с вероятностью p . Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найдите вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен.

О т в е т: $P = 1 - (1 - p)^n$.

3.28. В первой урне лежат 10 шаров, из них восемь белых, во второй — 20 шаров, из них четыре белых. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару, а затем из этих двух наудачу берется один шар. Найдите вероятность того, что это будет белый шар.

О т в е т: $P = 0,5$.

3.29. На шахматную доску ставят двух слонов: белого и черного. Какова вероятность того, что при первом ходе один слон может побить другого?

О т в е т: $P = 5/36 \approx 0,139$.

3.30. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20 % телевизоров со скрытым дефектом, второго — 10 % и третьего — 5 %. Определите вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30 телевизоров с первого завода, 20 — со второго и 50 — с третьего.

О т в е т: $P = 0,895$.

3.31. На заводе, изготавливающем болты, на первом станке производят 25 %, на втором 35 % и на третьем 40 % всех изделий. В продукции брак составляет 5 %, 4 % и 2 % соответственно.

а) Найдите вероятность того, что случайно выбранный болт будет дефектным.

б) Пусть случайно выбранный болт оказался дефектным. Найдите вероятности P_1 , P_2 и P_3 того, что болт был произведен на первом, втором, третьем станке.

О т в е т: а) $P = 0,0345$; б) $P_1 = 125/345 \approx 0,36$, $P_2 = 140/345 \approx 0,406$, $P_3 = 80/345 \approx 0,23$.

3.32. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго — 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Определите вероятность того, что в цель попал первый стрелок.

О т в е т: $P = 6/7 \approx 0,857$.

3.33. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков равны P_1 , P_2 и P_3 соответственно. Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся, если после стрельбы в мишени оказались две пробоины?

О т в е т:

$$P = \frac{P_1(1 - P_2)P_3}{(1 - P_1)P_2P_3 + P_1(1 - P_2)P_3 + P_1P_2(1 - P_3)}.$$

3.34. Наудачу подбрасывают три монеты. Найдите вероятность того, что выпадут ровно два „герба“.

О т в е т: $P = 3/8 \approx 0,375$.

3.35. Бросают пять игральные кости. Вычислите вероятность того, что на трех из них выпадет пятерка.

О т в е т: $P = C_5^3(1/6)^3(5/6)^2 \approx 0,032$.

3.36. Бросают 10 одинаковых игральных костей. Определите вероятность того, что ни на одной из них не выпадет шесть очков.

О т в е т: $P = (5/6)^{10} \approx 0,16$.

3.37. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4 независимо от заявок других магазинов. Найдите вероятность того, что в день поступит четыре заявки.

О т в е т: $P \approx 0,251$.

3.38. Вероятность рождения мальчика равна 0,515, девочки — 0,485. В некоторой семье шестеро детей. Какова вероятность того, что среди них не более двух девочек?

О т в е т: $P \approx 0,3723$.

3.39. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника (ничейный исход исключается) три партии из четырех или пять из восьми?

О т в е т: Вероятнее выиграть три партии из четырех.

3.40. Сколько нужно параллельно соединить элементов, вероятность безотказной работы каждого из которых за время t равна 0,9, чтобы вероятность безотказной работы всей системы за время t была не менее 0,999?

О т в е т: не менее трех.

3.41. Известно, что на выпечку 1000 булочек с изюмом нужно израсходовать 10000 изюмин. Найдите вероятность того, что:

а) наудачу выбранная булочка не будет содержать изюма;

б) среди пяти выбранных наудачу булочек две не будут содержать изюма, а в остальных будет хотя бы по одной изюмине.

О т в е т:

а) $P = e^{-10} \approx 0,0000468$;

б) $P \approx C_5^2 (e^{-10})^2 (1 - e^{-10})^3 \approx 2,19 \cdot 10^{-8}$.

3.42. Телефонная станция обслуживает 1000 абонентов. Вероятность того, что в течение минуты какому-либо абоненту понадобится соединение, равна 0,0007. Вычислите вероятность того, что за минуту на телефонную станцию поступит не менее трех вызовов.

О т в е т: $P \approx 1 - P(0; 0,7) - P(1; 0,7) - P(2; 0,7) = 0,03414$.

3.43. Известно, что 40 % автомобилей, следующих по шоссе, у развилки поворачивают направо и 60 % — налево. Какова вероятность того, что из 400 автомобилей, проехавших по шоссе, ровно 250 повернули налево?

О т в е т: $P \approx \varphi(1,02)/\sqrt{400 \cdot 0,4 \cdot 0,6} \approx 0,024$.

3.44. Симметричную монету подбрасывают 10000 раз. Найдите вероятность того, что наблюдаемая частота выпадения „герба“ будет отличаться от $1/2$ не более чем на 2 %.

О т в е т: $P \approx \Phi_0(2) - \Phi_0(-2) = 0,9545$.

3.45. Найдите вероятность того, что среди 10 случайным образом выбранных человек у четырех дни рождения будут в первом квартале, у трех — во втором, у двух — в третьем и у одного — в четвертом.

О т в е т: $P = 10! \cdot 0,25^{10} / (4!3!2!1!) \approx 0,012$.

4. ОДНОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В предыдущих главах мы изучали *случайные события*, что позволяло нам исследовать вероятностные свойства (закономерности) *случайных экспериментов* на качественном уровне („да“ — „нет“): попадание в цель — промах, отказал прибор за время t — не отказал и т.д.

Однако с момента возникновения теории вероятностей ее основной задачей было изучение не вероятностных свойств экспериментов со случайными исходами, а связанных с этими экспериментами числовых величин, которые естественно назвать *случайными величинами*. Начиная с настоящей главы и до конца книги мы будем изучать именно случайные величины.

4.1. Определение случайной величины

Для того чтобы лучше осознать связь, существующую между *случайными величинами* и *случайными событиями*, начнем с пояснения понятия случайной величины.

Случайной величиной естественно называть числовую величину, значение которой зависит от того, какой именно *элементарный исход* произошел в результате эксперимента со случайным исходом. Множество всех значений, которые случайная величина может принимать, называют **множеством возможных значений** этой *случайной величины*.

Следовательно, для задания случайной величины необходимо каждому элементарному исходу поставить в соответствие число — значение, которое примет случайная величина, если в результате испытания произойдет именно этот исход.

Случайные величины будем обозначать прописными латинскими буквами, снабжая их при необходимости индексами: X, Y_1, Z_i и т.д., а их возможные значения — соответствующими строчными буквами: x_3, y_{1k}, z_{ij} . В русскоязычной литературе принято также обозначение случайных величин греческими буквами: ξ, η_1, μ_i и т.д.

Рассмотрим примеры.

Пример 4.1. В опыте с однократным бросанием игральной кости случайной величиной является число X выпавших очков. Множество возможных значений случайной величины X имеет вид

$$\{x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_6 = 6\}.$$

Если вспомнить, как выглядит *пространство элементарных исходов* в этом опыте, то будет очевидно следующее соответствие между элементарными исходами ω и значениями случайной величины X :

$$\begin{array}{cccccc} \omega & = & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_6 \\ & & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ X & = & 1 & 2 & \dots & 6. \end{array}$$

Иными словами, каждому элементарному исходу ω_i , $i = \overline{1, 6}$, ставится в соответствие число i .

Пример 4.2. Монету подбрасывают до первого появления „герба“. В этом опыте можно ввести, например, такие случайные величины: X — число бросаний до первого появления „герба“ с множеством возможных значений $\{1, 2, 3, \dots\}$ и Y — число „цифр“, выпавших до первого появления „герба“, с множеством возможных значений $\{0, 1, 2, \dots\}$ (ясно, что $X = Y + 1$). В данном опыте пространство элементарных исходов Ω можно отождествить с множеством

$$\{\Gamma, ЦГ, ЦЦГ, \dots, Ц\dots ЦГ, \dots\},$$

причем элементарному исходу $\Omega \dots \Omega$ ставится в соответствие число $m + 1$ или m , где m — число повторений буквы „ Ω “.

Пример 4.3. На плоский экран падает частица. Будем считать, что нам известна вероятность попадания частицы в любое (измеримое, т.е. имеющее площадь) множество на экране. Случайными величинами в данном случае будут, например, расстояние X от центра экрана до точки падения, квадрат этого расстояния $Y = X^2$, угол Z в полярной системе координат и т.д. #

Теперь мы можем дать определение случайной величины.

Определение 4.1. Скалярную функцию $X(\omega)$, заданную на пространстве элементарных исходов, называют **случайной величиной**, если для любого $x \in \mathbb{R}$ множество $\{\omega: X(\omega) < x\}$ элементарных исходов, удовлетворяющих условию $X(\omega) < x$, является событием.

Для краткости условимся в дальнейшем вместо записи $\{\omega: X(\omega) < x\}$ использовать запись $\{X(\omega) < x\}$, если необходимо подчеркнуть связь случайной величины с пространством элементарных исходов Ω , или даже запись $\{X < x\}$, если не акцентируется внимание на этой связи.

4.2. Функция распределения случайной величины

Для исследования вероятностных свойств *случайной величины* необходимо знать правило, позволяющее находить *вероятность* того, что случайная величина примет значение из подмножества ее значений. Любое такое правило называют **законом распределения вероятностей**, или **распределением (вероятностей)** случайной величины. При этом слово „вероятностей“ обычно опускают.

Общим законом распределения, присущим всем случайным величинам, является функция распределения.

Определение 4.2. *Функцией распределения (вероятностей) случайной величины X называют функцию $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X < x\}$, т.е. события, состоящего из тех и только тех элементарных исходов ω , для которых $X(\omega) < x$:*

$$F(x) = \mathbf{P}\{X < x\}.$$

Обычно говорят, что значение функции распределения в точке x равно вероятности того, что случайная величина X примет значение, меньшее x .

Теорема 4.1. *Функция распределения обладает следующими свойствами:*

- 1) $0 \leq F(x) \leq 1$;
- 2) $F(x_1) \leq F(x_2)$ при $x_1 < x_2$ (т.е. $F(x)$ — неубывающая функция);
- 3) $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;
- 4) $\mathbf{P}\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$;
- 5) $F(x) = F(x-0)$, где $F(x-0) = \lim_{y \rightarrow x-0} F(y)$ (т.е. $F(x)$ — непрерывная слева функция).

◀ При доказательстве будем использовать свойства вероятностей событий, доказанные в теореме 2.8.

Поскольку значение функции распределения в любой точке x является вероятностью, то из свойства 4 вероятности вытекает утверждение 1.

Если $x_1 < x_2$, то событие $\{X < x_1\}$ включено в событие $\{X < x_2\}$ и, согласно свойству 3, $\mathbf{P}\{X < x_1\} \leq \mathbf{P}\{X < x_2\}$, т.е. в соответствии с определением 4.2 выполнено утверждение 2.

Пусть x_1, \dots, x_n, \dots — любая возрастающая последовательность чисел, стремящаяся к $+\infty$. Событие $\{X < +\infty\}$, с одной стороны, является достоверным, а с другой стороны, представляет собой объединение событий $\{X < x_n\}$. Отсюда в силу аксиомы непрерывности следует второе равенство в утверждении 3. Аналогично доказывается и первое равенство.

Событие $\{X < x_2\}$ при $x_1 < x_2$ представляет собой объединение двух *непересекающихся событий*: $\{X < x_1\}$ — случайная величина X приняла значение, меньшее x_1 , и $\{x_1 \leq X < x_2\}$ — случайная величина X приняла значение, лежащее в промежутке $[x_1, x_2)$. Поэтому в соответствии с *аксиомой сложения* получаем утверждение 4.

Наконец, пусть x_1, \dots, x_n, \dots — любая возрастающая последовательность чисел, стремящаяся к x . Событие $\{X < x\}$ является объединением событий $\{X < x_n\}$. Снова воспользовавшись аксиомой непрерывности, приходим к утверждению 5. ►

На рис. 4.1 приведен типичный вид функции распределения.

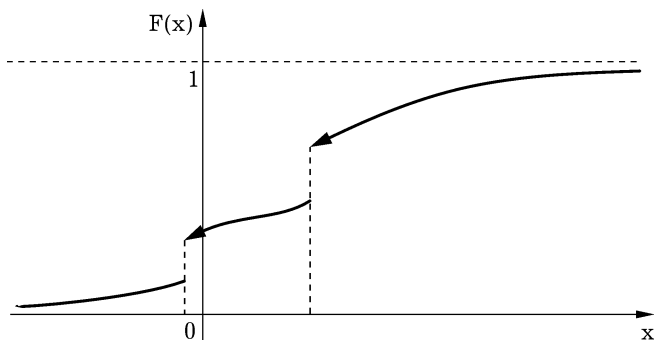


Рис. 4.1

Замечание 4.1. Можно показать, что любая *неубывающая* непрерывная слева функция $F(x)$, удовлетворяющая условиям

$$F(-\infty) = 0 \quad \text{и} \quad F(+\infty) = 1,$$

является функцией распределения некоторой случайной величины X . #

Для того чтобы подчеркнуть, какой именно случайной величине принадлежит функция распределения $F(x)$, далее иногда будем приписывать этой функции нижний индекс, обозначаю-

щий конкретную случайную величину. Например, для случайной величины X

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{X < x\}.$$

В некоторых учебниках функцией распределения называют функцию, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X \leq x\}$. Такое определение ничего не меняет во всех наших рассуждениях. Единственное изменение касается свойства 5: функция $F(x)$ будет непрерывна справа.

Чтобы избежать сложных математических конструкций, обычно при первоначальном изучении теории вероятностей ограничиваются только дискретными и непрерывными случайными величинами. Не давая пока строгие определения, приведем примеры:

- дискретных случайных величин (число очков, выпавших при бросании игральной кости; число бросаний монеты до первого появления „герба“; оценка студента на экзамене и т.д.);
- непрерывных случайных величин (погрешность измерений; время до отказа прибора; время опоздания студента на лекцию и т.п).

4.3. Дискретные случайные величины

Определение 4.3. Случайную величину X называют **дискретной**, если множество ее возможных значений конечно или счетно.

Распределение дискретной случайной величины удобно описывать с помощью ряда распределения.

Определение 4.4. *Рядом распределения (вероятностей) дискретной случайной величины X называют таблицу (табл. 4.1), состоящую из двух строк: в верхней строке перечислены все возможные значения случайной величины, а в*

нижней — вероятности $p_i = \mathbf{P}\{X = x_i\}$ того, что случайная величина примет эти значения.

Таблица 4.1

X	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n
\mathbf{P}	p_1	p_2	\dots	p_i	\dots	p_n

Чтобы подчеркнуть, что ряд распределения относится именно к случайной величине X , будем наряду с обозначением p_i употреблять также обозначение p_{Xi} .

Для проверки правильности составления табл. 4.1 рекомендуется просуммировать вероятности p_i . В силу аксиомы нормированности эта сумма должна быть равна единице:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Покажем теперь, как по ряду распределения дискретной случайной величины построить ее функцию распределения $F(x)$. Пусть X — дискретная случайная величина, заданная своим рядом распределения, причем значения x_1, x_2, \dots, x_n расположены в порядке возрастания. Тогда для всех $x \leq x_1$ событие $\{X < x\}$ является невозможным и поэтому в соответствии с определением 4.2 $F(x) = 0$ (рис. 4.2). Если $x_1 < x \leq x_2$, то собы-

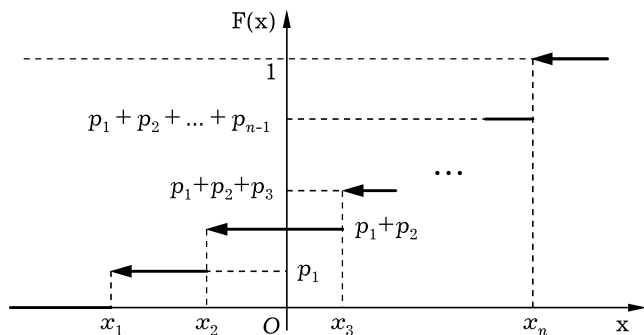


Рис. 4.2

тие $\{X < x\}$ состоит из тех и только тех элементарных исходов ω , для которых $X(\omega) = x_1$, и, следовательно,

$$F(x) = p_1.$$

Аналогично при $x_2 < x \leq x_3$ событие $\{X < x\}$ состоит из элементарных исходов ω , для которых либо $X(\omega) = x_1$, либо $X(\omega) = x_2$, т.е.

$$\{X < x\} = \{X = x_1\} + \{X = x_2\},$$

а следовательно,

$$F(x) = p_1 + p_2$$

и т.д. Наконец, при $x > x_n$ событие $\{X < x\}$ достоверно и

$$F(x) = 1.$$

Таким образом, функция распределения дискретной случайной величины является кусочно постоянной функцией, принимающей на промежутке $(-\infty, x_1]$ значение 0, на промежутках $(x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i < n$, — значение $p_1 + \dots + p_i$ и на промежутке $(x_n, +\infty)$ — значение 1.

Для задания закона распределения дискретной случайной величины, наряду с рядом распределения и функцией распределения используют другие способы. Так, его можно задать аналитически в виде некоторой формулы или графически. Например, распределение игральной кости (см. пример 4.1) описывают формулой

$$\mathbf{P}\{X = i\} = \frac{1}{6}, \quad i = \overline{1, 6}.$$

Графическое изображение этого распределения приведено на рис. 4.3.

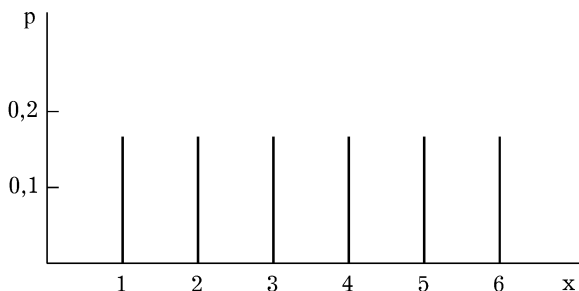


Рис. 4.3

4.4. Некоторые дискретные случайные величины

В этом параграфе рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся на практике *распределения дискретных случайных величин*.

Биномиальное распределение. Дискретная случайная величина X распределена по **биномиальному закону**, если она принимает значения $0, 1, 2, \dots, n$ в соответствии с распределением, заданным формулой

$$\mathbf{P}\{X = i\} = P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i}, \quad i = \overline{0, n},$$

или, что тоже самое, рядом распределения, представленным в табл. 4.2, где $0 < p, q < 1$ и $p + q = 1$.

Таблица 4.2

X	0	1	...	i	...	n
\mathbf{P}	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$...	$C_n^i p^i q^{n-i}$...	p^n

Проверим корректность определения биномиального распределения. Действительно,

$$P_n(i) > 0$$

и

$$\sum_{i=0}^n P_n(i) = \sum_{i=0}^n C_n^i p^i q^{n-i} = (p+q)^n = 1.$$

Биномиальное распределение является не чем иным, как распределением числа успехов X в n испытаниях по *схеме Бернулли* с вероятностью успеха p и неудачи $q = 1 - p$ (см. **3.6**).

Распределение Пуассона. Дискретная случайная величина X распределена по **закону Пуассона**, если она принимает целые неотрицательные значения с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X = i\} = P(i; \lambda) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, \dots,$$

или, по-другому, с вероятностями, представленными рядом распределения в табл. 4.3, где $\lambda > 0$ — параметр распределения Пуассона.

Таблица 4.3

X	0	1	2	...	n	...
\mathbf{P}	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$...	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$...

Убедимся в том, что распределение Пуассона определено корректно:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(i; \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

С распределением Пуассона мы тоже уже встречались в *формуле Пуассона* (см. **3.6**). Распределение Пуассона также называют **законом редких событий**, поскольку оно всегда проявляется там, где производится большое число испытаний, в каждом из которых с малой вероятностью происходит „редкое“ событие. В соответствии с законом Пуассона распределены, например, число вызовов, поступивших в течение суток на телефонную станцию; число метеоритов, упавших в определенном

районе; число распавшихся частиц при радиоактивном распаде вещества.

Геометрическое распределение. Снова рассмотрим схему Бернулли. Пусть X — число испытаний, которое необходимо провести, прежде чем появится первый успех. Тогда X — дискретная случайная величина, принимающая значения $0, 1, 2, \dots, n, \dots$. Определим вероятность события $\{X = n\}$. Очевидно, что $X = 0$, если в первом же испытании произойдет успех. Поэтому

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = p.$$

Далее, $X = 1$ в том случае, когда в первом испытании произошла неудача, а во втором — успех. Но вероятность такого события (см. теорему 3.8), равна qp , т.е.

$$\mathbf{P}\{X = 1\} = qp.$$

Аналогично $X = 2$, если в первых двух испытаниях произошли неудачи, а в третьем — успех, и, значит,

$$\mathbf{P}\{X = 2\} = qqr.$$

Продолжая эту процедуру, получаем

$$\mathbf{P}\{X = i\} = pq^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Таким образом, случайная величина X имеет ряд распределения, представленный в табл. 4.4.

Таблица 4.4

X	0	1	2	...	n	...
\mathbf{P}	p	qp	q^2p	...	$q^n p$...

Случайную величину с таким рядом распределения называют распределенной согласно **геометрическому закону**.

Правильность составления табл. 4.4 вытекает из равенства

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} pq^i = p \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{p}{1-q} = 1.$$

4.5. Непрерывные случайные величины

Определение 4.5. *Непрерывной* называют *случайную величину* X , *функцию распределения* которой $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy. \quad (4.1)$$

Функцию $p(x)$ называют **плотностью распределения (вероятностей)** случайной величины X .

Предполагают, что несобственный интеграл в представлении (4.1) сходится.

Как и прежде, для того чтобы подчеркнуть принадлежность плотности распределения случайной величине X , будем наряду с записью $p(x)$ употреблять запись $p_X(x)$.

Все реально встречающиеся плотности распределения случайных величин являются непрерывными (за исключением, быть может, конечного числа точек) функциями. Следовательно, функция распределения для непрерывной случайной величины является непрерывной на всей числовой оси и в точках непрерывности плотности распределения $p(x)$ имеет место равенство

$$p(x) = F'(x), \quad (4.2)$$

что следует из свойств интеграла с переменным верхним пределом [VI].

Только такие случайные величины мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Замечание 4.2. Соотношения (4.1) и (4.2), связывающие между собой функцию и плотность распределения, делают понятной следующую терминологию, часто употребляемую на практике. Функцию распределения $F(x)$ называют **инте-**

гравным законом распределения случайной величины, а плотность распределения $p(x)$ — **дифференциальным законом распределения** той же случайной величины.

На рис 4.4 представлен типичный вид плотности распределения.

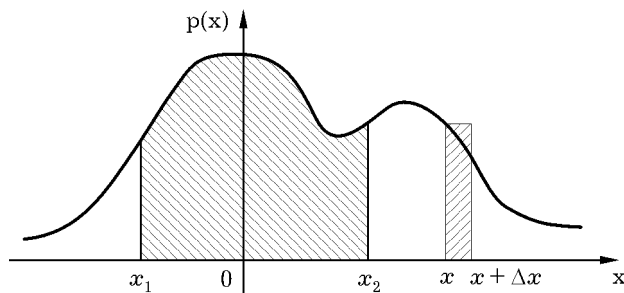


Рис. 4.4

Теорема 4.2. Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1) $p(x) \geq 0$;

2) $\mathbf{P}\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$;

4) $\mathbf{P}\{x \leq X < x + \Delta x\} \approx p(x)\Delta x$ в точках непрерывности плотности распределения;

5) $\mathbf{P}\{X = x\} = 0$.

◀ Утверждение 1 следует из того, что плотность распределения является производной от функции распределения, в силу свойства 1 функции распределения она является *неубывающей функцией*, а производная неубывающей функции неотрицательна.

Согласно свойству 2 функции распределения,

$$\mathbf{P}\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Отсюда в соответствии с определением непрерывной случайной величины и свойством аддитивности сходящегося несобственного интеграла [VI] имеем

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} p(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} p(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx,$$

что и доказывает утверждение 2.

В частности, при $x_1 = -\infty$, $x_2 = +\infty$ событие $\{x_1 \leq X < x_2\}$ является *достоверным*, и поэтому справедливо утверждение 3.

Согласно свойству 4 (см. теорему 4.1),

$$\mathbf{P}\{x \leq X < x + \Delta x\} = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x).$$

Если Δx „малó“ (см. рис. 4.4), то имеем

$$\Delta F(x) \approx dF(x) = F'(x)\Delta x = p(x)\Delta x,$$

что и доказывает утверждение 4.

Наконец, поскольку в силу определения 4.5 функция распределения случайной величины есть несобственный интеграл от плотности, то она является непрерывной, что приводит нас к утверждению 5. ►

Замечание 4.3. В силу свойства 2 плотности распределения вероятность попадания непрерывной случайной величины в промежуток $[x_1, x_2)$ численно равна площади криволинейной трапеции, заштрихованной на рис. 4.4.

Согласно свойству 3 площадь, заключенная под всей кривой, изображающей плотность распределения, равна единице.

В соответствии со свойством 4 вероятность попадания случайной величины X в некоторый „малый“ промежуток

$(x, x + \Delta x)$ практически пропорциональна Δx с коэффициентом пропорциональности, равным значению плотности распределения в точке x . Поэтому выражение $p(x)\Delta x$ или $p(x)dx$ называют иногда *элементом вероятности*. Можно также сказать, что непрерывная случайная величина реализует *геометрическую схему* с коэффициентом пропорциональности $p(x)$, но только в „малой“ окрестности точки x .

Наконец, согласно свойству 5, вероятность попадания в любую (заданную до опыта) точку для непрерывной случайной величины равна нулю. #

В заключение отметим, что на практике иногда встречаются случайные величины, которые нельзя отнести ни к дискретным, ни к непрерывным случайным величинам, как показывает следующий пример.

Пример 4.4. На перекрестке стоит автоматический светофор, в котором $\tau_1 = 1$ мин горит зеленый свет, $\tau_2 = 0,5$ мин — красный, снова 1 мин — зеленый, 0,5 мин — красный и т.д. В случайный момент времени, не связанный с работой светофора, к перекрестку подъезжает автомобиль.

Пусть X — время ожидания у перекрестка. Покажем, что X не является ни дискретной, ни непрерывной случайной величиной.

Обозначим $\tau = \tau_1 + \tau_2 = 1,5$ мин цикл работы светофора. Естественно считать, что автомобиль подъезжает к перекрестку в случайный момент времени по отношению к циклу работы светофора. Тогда, с одной стороны, с вероятностью $\tau_1/\tau = 2/3$ автомобиль проедет перекресток не останавливаясь, т.е. X принимает значение 0 с вероятностью $2/3 > 0$. Поэтому X не может быть непрерывной случайной величиной. С другой стороны, на второй 0,5-минутной части цикла работы светофора время ожидания X может принять любое значение от 0 до 0,5. Значит, X не может быть также дискретной случайной величиной.

Для того чтобы лучше понять существо дела, построим функцию распределения $F(x)$ случайной величины X . Посколь-

ку время ожидания не может принять отрицательное значение, то

$$F(x) = 0$$

для всех $x \leq 0$. Далее если $0 < x \leq 0,5$, то событие $\{X < x\}$ происходит в том случае, когда автомобиль либо попадет на первую часть цикла работы светофора (зеленый свет), либо подъедет к светофору при красном свете, но до включения зеленого света останется время, меньшее x . В соответствии с определением *геометрической вероятности*

$$F(x) = \mathbf{P}\{X < x\} = \frac{\tau_1 + x}{\tau} = \frac{x + 1}{1,5}.$$

Наконец, поскольку автомобиль в любом случае проведет у перекрестка не более 0,5 мин, то

$$F(x) = 1, \quad x > 0,5.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x+1}{1,5}, & 0 < x \leq 0,5; \\ 1, & x > 0,5. \end{cases}$$

График функции распределения $F(x)$ приведен на рис. 4.5.

Отметим, что в рассмотренном примере случайная величина X представляла собой „смесь“ дискретной и непрерывной случайных величин, причем $\mathbf{P}\{X = 0\} = F(+0) - F(0)$ — скачку функции распределения в точке $x = 0$. Можно привести и более сложные примеры, в которых случайные величины уже не являются „смесью“ дискретной и непрерывной составляющих, однако эти примеры нужно отнести к разряду математических абстракций.

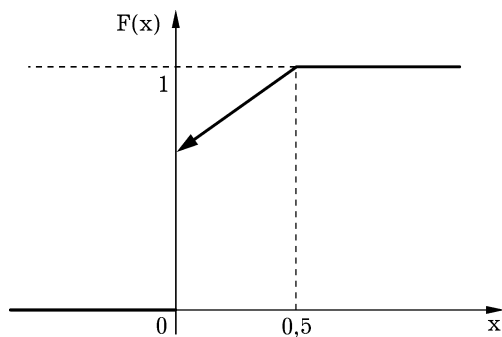


Рис. 4.5

4.6. Некоторые непрерывные случайные величины

Приведем примеры некоторых наиболее важных *распределений непрерывных случайных величин*. То, что приводимые функции $F(x)$ являются функциями распределения, следует из замечания 4.1 и проверяться не будет.

Равномерное распределение. Случайная величина имеет *равномерное распределение* на отрезке $[a, b]$, если ее *плотность распределения*

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a \text{ или } x > b. \end{cases}$$

Легко видеть, что *функция распределения* в этом случае определяется выражением

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Графики плотности распределения $p(x)$ и функции распределения $F(x)$ приведены на рис. 4.6 и 4.7.

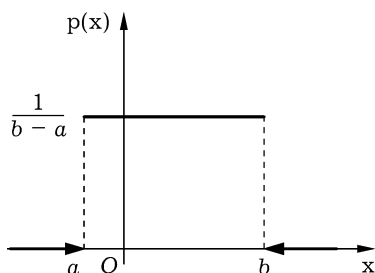


Рис. 4.6

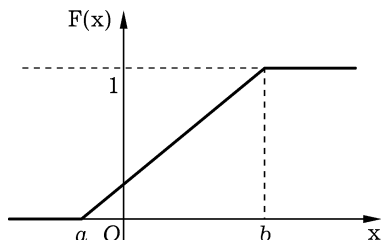


Рис. 4.7

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины в интервал (x_1, x_2) , лежащий внутри отрезка $[a, b]$, равна $F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1)/(b - a)$, т.е. пропорциональна длине этого интервала. Таким образом, равномерное распределение реализует *схему геометрической* вероятности при бросании точки на отрезок $[a, b]$.

Экспоненциальное распределение. Случайная величина на распределена по *экспоненциальному (показательному) закону*, если она имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ — параметр экспоненциального распределения. Для функции распределения в данном случае нетрудно получить следующее выражение:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Графики плотности распределения и функции распределения экспоненциально распределенной случайной величины приведены на рис. 4.8 и 4.9.

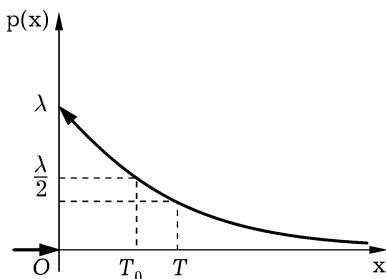


Рис. 4.8

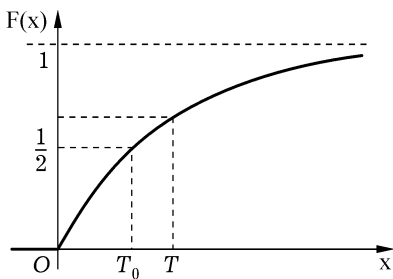


Рис. 4.9

Экспоненциально распределенная случайная величина может принимать только положительные значения.

Примером случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение, является время распада радиоактивных элементов. При этом число

$$T = \frac{1}{\lambda}$$

называют средним временем распада. Кроме того, употребляют также число

$$T_0 = \frac{\ln 2}{\lambda},$$

называемое периодом полураспада.

Название „период полураспада“ основано на следующем физическом соображении. Пусть у нас первоначально имелось n атомов вещества. Тогда спустя время T_0 каждый атом распадется с вероятностью

$$p = F(T_0) = 1 - e^{-\lambda \ln 2 / \lambda} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому в силу независимости отдельных распадов число распавшихся за время T_0 атомов имеет *биномиальное распределение* с $p = q = 1/2$. Но, как мы увидим далее, согласно *закону больших чисел* (см. 9.2), при больших n это число будет примерно равно $n/2$, т.е. период полураспада T_0 представляет собой

время, в течение которого распадается половина имеющегося вещества.

Экспоненциально распределенная случайная величина X обладает весьма важным свойством, которое естественно называть *отсутствием последействия*. Трактуя X как время распада атома, рассмотрим событие

$$A = \{x_1 < X < x_1 + x_2\}$$

и найдем *условную вероятность* этого события при условии выполнения события $B = \{X > x_1\}$. В соответствии с определением условной вероятности

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Но событие AB , как нетрудно понять, совпадает с событием A . Поэтому

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Далее, используя свойство 4 функции распределения (см. теорему 4.1), имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}\{x_1 < X < x_1 + x_2\} = \\ &= (1 - e^{-\lambda(x_1+x_2)}) - (1 - e^{-\lambda x_1}) = e^{-\lambda x_1} (1 - e^{-\lambda x_2}),\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\{X > x_1\} = 1 - \mathbf{P}\{X < x_1\} = e^{-\lambda x_1}.$$

Значит,

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{e^{-\lambda x_1} (1 - e^{-\lambda x_2})}{e^{-\lambda x_1}} = 1 - e^{-\lambda x_2}.$$

Таким образом, вероятность распада атома за время x_2 при условии, что перед этим он уже прожил время x_1 , совпадает с безусловной вероятностью распада того же самого атома за

время x_2 . Именно это свойство и представляет собой отсутствие последействия. Допуская некоторую вольность речи, отсутствие последействия можно трактовать как независимость остаточного времени жизни атома от того времени, которое он уже прожил. Можно показать и обратное: если случайная величина X обладает свойством отсутствия последействия, то она обязательно должна быть распределена по экспоненциальному закону. Таким образом, отсутствие последействия является характеристическим свойством экспоненциально распределенных случайных величин.

Практика показывает, что экспоненциальное распределение имеют и другие физические величины, например: времена между падениями метеоритов в определенный район, времена между соседними поступлениями вызовов на телефонную станцию и т.д. Экспоненциальное распределение тесно связано с *распределением Пуассона*, а именно: если времена между последовательными наступлениями некоторого события представляют собой *независимые* (определение независимости случайных величин будет дано в 5.4) экспоненциально распределенные (с одним и тем же параметром λ) *случайные величины*, то число наступлений этого события за время t распределено по закону Пуассона с параметром λt . Отметим также, что дискретным аналогом экспоненциального распределения является *геометрическое распределение*.

Нормальное распределение. Случайная величина *распределена по нормальному* (или *гауссову*) *закону*, или имеет *нормальное (гауссово) распределение*, если ее плотность

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < m < +\infty, \sigma > 0).$$

Нормальное распределение зависит от двух параметров: m , называемого *математическим ожиданием* или *средним*

значением, и σ , называемого *средним квадратичным отклонением*.

Графики плотности $\varphi_{m,\sigma}(x)$ и функции

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

нормального распределения для различных значений m и σ приведены на рис. 4.10 и рис. 4.11.

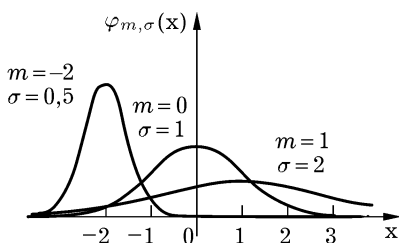


Рис. 4.10

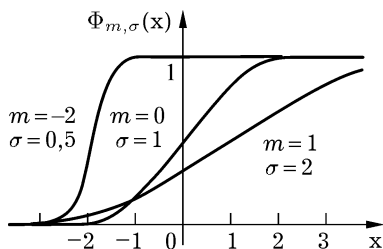


Рис. 4.11

Как следует из этих рисунков, параметр m определяет положение „центра симметрии“ плотности нормального распределения, т.е. график плотности нормального распределения симметричен относительно прямой $x = m$, а σ — разброс значений случайной величины относительно центра симметрии. Если $m = 0$ и $\sigma = 1$, то такой **нормальный закон** называют **стандартным** и его функцию распределения обозначают $\Phi(x)$, а плотность распределения — $\varphi(x)$. С плотностью и функцией стандартного нормального распределения мы уже встречались в локальной и интегральной формулах Муавра — Лапласа (см. 3.6).

Как известно из курса математического анализа [VI], интеграл $\int e^{-x^2/2} dx$ не может быть выражен через элементарные функции. Поэтому во всех справочниках и в большинстве учебников по теории вероятностей приведены таблицы значе-

ний функции стандартного нормального распределения. Напомним, что в табл. П.3 даны значения *интеграла Лапласа* $\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(y) dy$. Покажем, как, используя эту таблицу, найти вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону с произвольными параметрами m и σ , в интервал (a, b) .

В соответствии со свойством 2 плотности распределения (см. теорему 4.2) вероятность попадания случайной величины X , распределенной по нормальному закону с параметрами m и σ , в интервал (a, b) задается формулой

$$\mathbf{P}\{a < X < b\} = \int_a^b \varphi_{m,\sigma}(y) dy = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y-m)^2/(2\sigma^2)} dy.$$

Проводя замену $x = (y - m)/\sigma$, этот интеграл можно записать в виде

$$\mathbf{P}\{a < X < b\} = \int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} \varphi(x) dx.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\mathbf{P}\{a < X < b\} = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \quad (4.3)$$

Распределение Вейбулла. Случайная величина распределена по **закону Вейбулла**, если она имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Нетрудно проверить, что функция распределения в этом случае определяется следующим выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\alpha x^\beta}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Семейство распределений Вейбулла является двухпараметрическим (α, β — параметры) и описывает положительные случайные величины.

Графики плотности $p(x)$ и функции $F(x)$ распределения Вейбулла представлены на рис. 4.12 и 4.13.

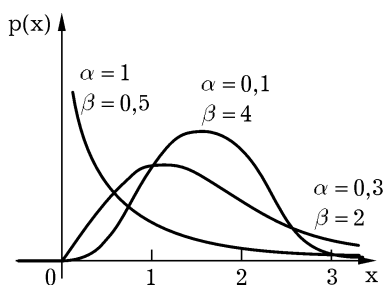


Рис. 4.12

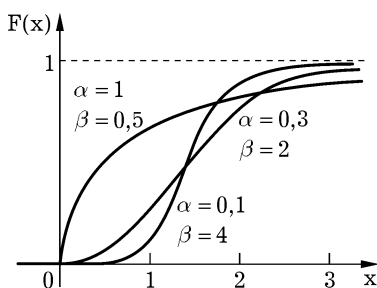


Рис. 4.13

Считают, что распределению Вейбулла подчиняются времена безотказной работы многих технических устройств. Если $\beta = 1$, то распределение Вейбулла превращается в экспоненциальное распределение, а если $\beta = 2$ — в так называемое **распределение Релея (закон Релея)**.

Гамма-распределение. Другим распределением, также достаточно хорошо описывающим времена безотказной работы различных технических устройств, является **гамма-распределение** с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{\lambda^\gamma x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0, \gamma > 0),$$

где

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{+\infty} x^{\gamma-1} e^{-x} dx$$

есть гамма-функция Эйлера [VI]. При изучении гамма-распределения весьма полезными являются следующие свойства гамма-функции: $\Gamma(\gamma + 1) = \gamma\Gamma(\gamma)$ и $\Gamma(n) = (n - 1)!$ для целых n .

Графики плотности $p(x)$ и функции $F(x)$ гамма-распределения изображены на рис. 4.14 и 4.15.

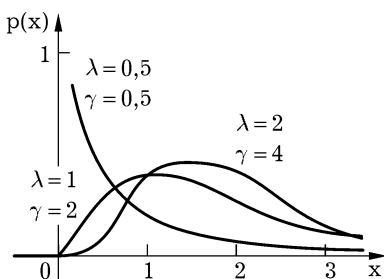


Рис. 4.14

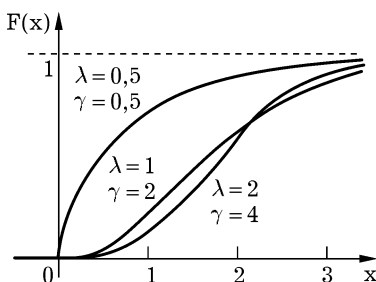


Рис. 4.15

Как видно на рис. 4.12–4.15, распределение Вейбулла и гамма-распределение весьма близки между собой. Основным преимуществом закона Вейбулла перед гамма-распределением является то, что его функция распределения является элементарной функцией. Поэтому раньше, когда ЭВМ еще не были достаточно распространены, распределение Вейбулла использовалось гораздо чаще, чем гамма-распределение. Хотя в общем случае гамма-распределение и не является элементарной функцией, гамма-распределение обладает некоторыми весьма полезными свойствами. Так, если $\gamma = k$, т.е. γ принимает целые значения, то мы получаем **распределение Эрланга** порядка k , находящее важные применения в *теории массового обслуживания*. Если же $\gamma = k/2$, где k — нечетное число, а $\lambda = 1/2$, то гамма-распределение превращается в так называемое **распределение χ^2 (хи-квадрат)**, роль которого в математической

статистике невозможно переоценить. Параметр k называют в этом случае **числом степеней свободы распределения** χ^2 , а само распределение — **распределением** χ^2 (*хи-квадрат*) с k степенями свободы. Наконец, при $\gamma = 1$ мы имеем дело все с тем же экспоненциальным распределением. Гамма-распределение обладает и другими интересными свойствами, которые мы здесь не будем рассматривать.

4.7. Решение типовых примеров

Пример 4.5. Игральную кость бросают один раз. Если выпадает четное число очков, игрок выигрывает 8 рублей, если нечетное, но больше одного — проигрывает 1 рубль, если выпадает одно очко — проигрывает 10 рублей. Найдём *распределение случайной величины* X — величины выигрыша в данной игре.

Пространство элементарных исходов в данном случае имеет вид

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\},$$

где ω_i — выпадение i очков. Считая, что игральная кость симметричная, имеем

$$\mathbf{P}(\omega_i) = \frac{1}{6}, \quad i = \overline{1, 6}.$$

Случайная величина X может принять всего три значения: $x_1 = 8$, $x_2 = -1$ и $x_3 = -10$ (является *дискретной*), причем каждому из этих значений соответствуют *события*

$$\{X = 8\} = \{\omega: X(\omega) = 8\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\},$$

$$\{X = -1\} = \{\omega: X(\omega) = -1\} = \{\omega_3, \omega_5\},$$

$$\{X = -10\} = \{\omega: X(\omega) = -10\} = \{\omega_1\}$$

с вероятностями

$$p_1 = \mathbf{P}\{X = 8\} = \mathbf{P}\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \mathbf{P}(\omega_2) + \mathbf{P}(\omega_4) + \mathbf{P}(\omega_6) = \frac{1}{2},$$

$$p_2 = \mathbf{P}\{X = -1\} = \mathbf{P}\{\omega_3, \omega_5\} = \mathbf{P}(\omega_3) + \mathbf{P}(\omega_5) = \frac{1}{3},$$

$$p_3 = \mathbf{P}\{X = -10\} = \mathbf{P}\{\omega_1\} = \frac{1}{6}.$$

Таблица 4.5

X	-10	-1	8
\mathbf{P}	1/6	1/3	1/2

Таким образом, ряд распределения случайной величины X можно представить в виде табл. 4.5.

Графическое изображение распределения случайной величины X приведено на рис. 4.16.

Найдем теперь функцию распределения $F(x)$ случайной величины X . В соответствии с определением функции распределения

$$F(x) = \mathbf{P}\{X < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq -10; \\ p_1 = 1/6, & -10 < x \leq -1; \\ p_1 + p_2 = 1/2, & -1 < x \leq 8; \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1, & x > 8. \end{cases}$$

График функции распределения $F(x)$ изображен на рис. 4.17.

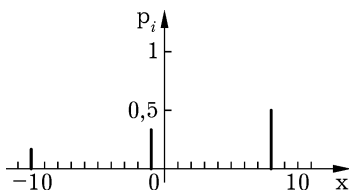


Рис. 4.16

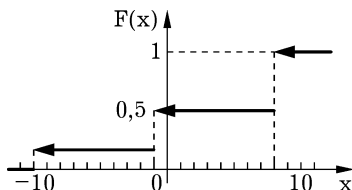


Рис. 4.17

Пример 4.6. Производят четыре независимых опыта, в каждом из которых некоторое событие A появляется с вероятностью $p = 0,8$. Построим ряд распределения и функцию

распределения случайной величины X — числа появлений события A в четырех опытах.

В соответствии с условием задачи мы имеем дело со *схемой Бернулли*, т.е. число появлений события A распределено по *биномиальному закону* с параметрами $n = 4$, $p = 0,8$ и $q = 1 - p = 0,2$. Значит, случайная величина X может принимать только значения i , $i = \overline{0, 4}$.

Согласно *формуле Бернулли*

$$\mathbf{P}\{X = i\} = C_n^i p^i q^{n-i}, \quad i = \overline{0, n},$$

определим вероятности возможных значений случайной величины X :

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = C_4^0 p^0 q^4 = 0,0016, \quad \mathbf{P}\{X = 1\} = C_4^1 p^1 q^3 = 0,0256,$$

$$\mathbf{P}\{X = 2\} = C_4^2 p^2 q^2 = 0,1536, \quad \mathbf{P}\{X = 3\} = C_4^3 p^3 q^1 = 0,4096,$$

$$\mathbf{P}\{X = 4\} = C_4^4 p^4 q^0 = 0,4096.$$

Ряд распределения рассматриваемой случайной величины представлен в табл. 4.6.

Таблица 4.6

X	0	1	2	3	4
\mathbf{P}	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \mathbf{P}\{X < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,0016, & 0 < x \leq 1; \\ 0,0272, & 1 < x \leq 2; \\ 0,1808, & 2 < x \leq 3; \\ 0,5904, & 3 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

График функции распределения $F(x)$ изображен на рис. 4.18.

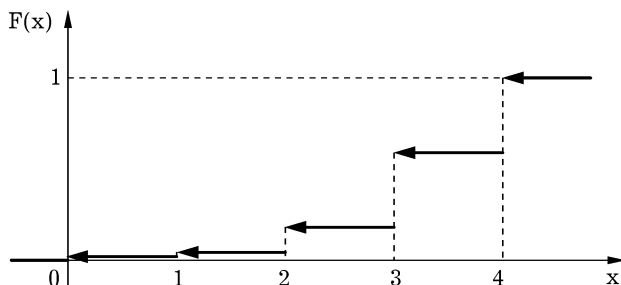


Рис. 4.18

Пример 4.7. Функция распределения *непрерывной случайной величины* X задана выражением

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найдем:

- а) *плотность распределения* $p(x)$ случайной величины X ;
- б) вероятность попадания случайной величины X в интервал от 0,25 до 0,5;
- в) вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше 0,3;
- г) вероятность того, что случайная величина X примет значение больше 0,7;
- д) графики $F(x)$ и $p(x)$.

Воспользовавшись определением 4.5 и свойствами плотности распределения и функции распределения, (см. теоремы 4.1 и 4.2, имеем:

$$\text{а) } p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 2x, & 0 < x < 1; \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \mathbf{P}\{0,25 < x < 0,5\} = F(0,5) - F(0,25) = 0,5^2 - 0,25^2 = 0,1875;$$

$$\text{в) } \mathbf{P}\{x < 0,3\} = F(0,3) = 0,3^2 = 0,09;$$

$$\text{г) } \mathbf{P}\{x > 0,7\} = 1 - \mathbf{P}\{x \leq 0,7\} = 1 - F(0,7) = 1 - 0,7^2 = 0,51;$$

д) графики $F(x)$ и $p(x)$ приведены на рис. 4.19 и 4.20.

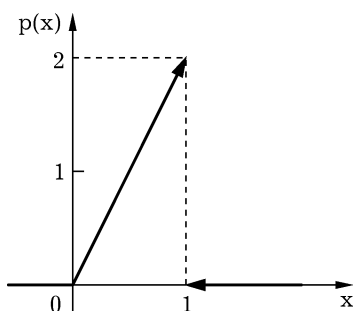


Рис. 4.19

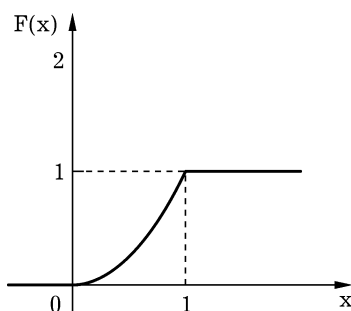


Рис. 4.20

Пример 4.8. Функция распределения непрерывной случайной величины X задается формулой

$$F(x) = c + b \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

Найдем:

- а) постоянные c и b ;
- б) плотность распределения случайной величины X ;
- в) $\mathbf{P}\{x_1 < X < x_2\}$.

В соответствии с определениями 4.2 и 4.5 и свойствами функции и плотности распределения (см. теоремы 4.1, 4.2):

- а) постоянные b и c определяем из условий

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(c + b \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) = c - b \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(c + b \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) = c + b \frac{\pi}{2} = 1,$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} c - b \frac{\pi}{2} = 0; \\ c + b \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

находим, что $c = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{\pi}$ и поэтому $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$;

б) плотность распределения равна

$$p(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right)' = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)};$$

в) вероятность попадания X в интервал (x_1, x_2) равна:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{x_1 < X < x_2\} &= F(x_2) - F(x_1) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{a} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{a} = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{x_2}{a} - \operatorname{arctg} \frac{x_1}{a} \right). \end{aligned}$$

Пример 4.9. Непрерывная случайная величина X имеет следующую плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ a/x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Определим:

- а) коэффициент a ;
- б) функцию распределения $F(x)$;
- в) графики $p(x)$ и $F(x)$;
- г) вероятность $\mathbf{P}\{2 < X < 3\}$ попадания случайной величины X в интервал $(2, 3)$;
- д) вероятность того, что при четырех независимых испытаниях случайная величина X ни разу не попадет в интервал $(2, 3)$.

а. Для нахождения коэффициента a воспользуемся свойством 3 плотности распределения. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x^2} dx = -\frac{a}{x} \Big|_1^{+\infty} = a,$$

откуда получаем $a = 1$.

б. В соответствии с определением 4.5 плотности распределения

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dx = 0, & x \leq 1; \\ \int_1^x \frac{dy}{y^2} = \frac{x-1}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

в. Графики функций $p(x)$ и $F(x)$ изображены на рис. 4.21 и 4.22.

г. $\mathbf{P}\{2 < X < 3\} = F(3) - F(2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

д. Вероятность того, что X не попадет в интервал $(2, 3)$ при одном испытании равна $1 - 1/6 = 5/6$, та же вероятность при четырех испытаниях равна $(5/6)^4 \approx 0,48$.

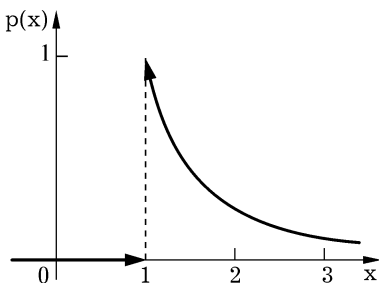


Рис. 4.21

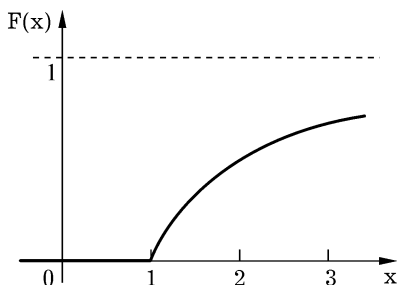


Рис. 4.22

Пример 4.10. Случайное отклонение размера детали от номинала имеет *нормальное распределение со средним значением $m = 1$ мм и средним квадратичным отклонением $\sigma = 2$ мм.* Найдем:

а) вероятность того, что отклонение от номинала будет отрицательным;

б) процент деталей, размер которых будет иметь отклонение от номинала не более 5 мм;

в) верхнюю границу отклонения от номинала, обеспечиваемую с вероятностью 0,9.

Обозначим через X отклонение от номинала. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m = 1$ мм и $\sigma = 2$ мм.

а. Используя формулу (4.3) и данные из табл. П.3, содержащей значения *интеграла Лапласа*, находим:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X < 0\} &= \Phi_0\left(\frac{0-1}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty-1}{2}\right) = \\ &= \Phi_0\left(\frac{-1}{2}\right) - \Phi_0(-\infty) = -0,19146 - (-0,5) = 0,30854.\end{aligned}$$

б. Аналогично

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{-5 < X < 5\} &= \Phi_0\left(\frac{5-1}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{-5-1}{2}\right) = \\ &= \Phi_0(2) - \Phi_0(-3) = 0,47725 - (-0,49865) = 0,9759.\end{aligned}$$

Таким образом, в пределах допуска ± 5 мм находится 97,59 % деталей.

в. Для ответа на третий вопрос нужно найти такое число x^+ , при котором $\mathbf{P}\{X < x^+\} = 0,9$. Поскольку

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X < x^+\} &= \Phi_0\left(\frac{x^+-1}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty-1}{2}\right) = \\ &= \Phi_0\left(\frac{x^+-1}{2}\right) + 0,5 = 0,9,\end{aligned}$$

то

$$\Phi_0\left(\frac{x^+ - 1}{2}\right) = 0,4, \quad \frac{x^+ - 1}{2} = 1,28$$

и $x^+ = 3,56$. Значит, с вероятностью 0,9 отклонение от номинала будет меньше 3,56.

Пример 4.11. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m = 0$ и σ . При каком значении среднего квадратичного отклонения σ вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал (a, b) , $0 < a < b < \infty$, будет наибольшей?

Вероятность попадания случайной величины X в интервал (a, b) можно определить по формуле (4.3):

$$\mathbf{P}\{a < X < b\} = \Phi_0\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a}{\sigma}\right).$$

Поскольку $\Phi_0(b/\sigma)$ и $\Phi_0(a/\sigma)$ — дифференцируемые по σ функции, то необходимым условием экстремума является равенство нулю производной $(\mathbf{P}\{a < X < b\})'_\sigma$. Отсюда, согласно определению интеграла Лапласа, имеем

$$(\mathbf{P}\{a < X < b\})'_\sigma = -\frac{b}{\sigma^2}\varphi\left(\frac{b}{\sigma}\right) + \frac{a}{\sigma^2}\varphi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = 0,$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

есть плотность стандартного нормального распределения. Производя элементарные арифметические преобразования, приходим к уравнению

$$ae^{-a^2/(2\sigma^2)} - be^{-b^2/(2\sigma^2)} = 0$$

относительно $\sigma > 0$. Его решение имеет вид

$$\sigma = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2(\ln b - \ln a)}}.$$

Нетрудно проверить, что при фиксированных значениях a и b , в силу условия $0 < a < b < +\infty$ справедливы соотношения

$$\mathbf{P}\{a < X < b\} = \Phi_0\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a}{\sigma}\right) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

и

$$\mathbf{P}\{a < X < b\} = \Phi_0\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a}{\sigma}\right) \xrightarrow{\sigma \rightarrow +\infty} 0.$$

Поэтому вероятность $\mathbf{P}\{a < X < b\}$ при

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b^2 - a^2)}{2(\ln b - \ln a)}}$$

принимает максимальное значение.

Вопросы и задачи

- 4.1.** Дайте определение случайной величины.
- 4.2.** Что называют законом распределения (вероятностей) случайной величины?
- 4.3.** Дайте определение функции распределения (вероятностей). Перечислите и докажите свойства функции распределения.
- 4.4.** Как, зная функцию распределения, найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал?
- 4.5.** Какие свойства должна иметь некоторая функция для того, чтобы она могла быть функцией распределения?
- 4.6.** Какую случайную величину называют дискретной? Приведите примеры дискретных случайных величин.
- 4.7.** Что называют рядом распределения дискретной случайной величины? Как еще можно задать закон распределения дискретной случайной величины?

4.8. Какой вид имеет функция распределения дискретной случайной величины?

4.9. Какое распределение называют биномиальным?

4.10. Какое распределение называют распределением Пуассона?

4.11. Какое распределение называют геометрическим распределением?

4.12. Какую случайную величину называют непрерывной? Приведите примеры непрерывных случайных величин.

4.13. Дайте определение плотности распределения (вероятностей). Перечислите и докажите свойства плотности распределения. Существует ли плотность распределения у дискретной случайной величины?

4.14. Как, зная плотность распределения, найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал?

4.15. Чем различаются графики функций распределения дискретной и непрерывной случайных величин?

4.16. Какое распределение называют равномерным?

4.17. Какое распределение называют экспоненциальным (показательным)?

4.18. Какое распределение называют нормальным?

4.19. Как выглядит график плотности нормального распределения?

4.20. Что называют интегралом Лапласа? Как, пользуясь таблицей значений интеграла Лапласа, вычислить вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в некоторый интервал?

4.21. Какое распределение называют распределением Вейбулла?

4.22. Какое распределение называют гамма-распределением?

4.23. Из партии в 10 деталей, среди которых две бракованные, наудачу выбирают три детали. Найдите закон распределения числа бракованных деталей среди выбранных. Постройте функцию распределения.

О т в е т:

$$\mathbf{P}\{X = i\} = \frac{C_2^i C_8^{3-i}}{C_{10}^3}, \quad i = 0, 1, 2; \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 7/15, & x \in (0, 1]; \\ 14/15, & x \in (1, 2]; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

4.24. Вероятность приема самолетом радиосигнала при каждой передаче равна 0,7. Найдите ряд распределения и функцию распределения числа X принятых сигналов при шестикратной передаче.

О т в е т: Ряд распределения и функцию распределения случайной величины X легко построить, зная, что $\mathbf{P}\{X = i\} = C_6^i (0,7)^i (0,3)^{6-i}$, $i = \overline{0, 6}$.

4.25. Найдите закон распределения случайной величины X — числа таких бросаний трех игральных костей, в каждом из которых ровно на двух костях появится по 2 очка, если общее число бросаний равно 15.

О т в е т: $\mathbf{P}\{X = i\} = C_{15}^i p^i q^{15-i}$, $i = \overline{0, 15}$, где $p = C_3^2 (1/6)^2 (5/6)^1 = 5/72 \approx 0,0694$.

4.26. В течение часа на станцию скорой помощи поступает случайное число X вызовов, распределенное по закону Пуассона с параметром $\lambda = 5$. Найдите вероятность того, что в течение часа поступит:

- а) ровно два вызова;
- б) не более двух вызовов;
- в) не менее двух вызовов.

- О т в е т: а) $\mathbf{P}\{X = 2\} = 5^2 e^{-5} / 2! \approx 0,086$;
б) $\mathbf{P}\{X \leq 2\} = (5^0 / 0! + 5^1 / 1! + 5^2 / 2!) e^{-5} \approx 0,127$;
в) $\mathbf{P}\{X \geq 2\} = 1 - \mathbf{P}\{X < 2\} = 1 - (5^0 / 0! + 5^1 / 1!) e^{-5} \approx 0,041$.

4.27. Число вызовов, поступающих на АТС (автоматическая телефонная станция) каждую минуту, распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = 1,5$. Найдите вероятность того, что за минуту поступит:

- а) ровно три вызова;
б) хотя бы один вызов;
в) менее пяти вызовов.

О т в е т: а) 0,12551; б) 0,77687; в) 0,98143.

4.28. В приборный отсек космического корабля за время полета попадает случайное число частиц, распределенное по закону Пуассона с параметром λ , причем вероятность попасть в блок управления, расположенный в отсеке космического корабля, для каждой из этих частиц равна p . Определите вероятность попадания в блок:

- а) ровно k частиц; б) хотя бы одной частицы.

О т в е т: а) $(\lambda p)^k e^{-\lambda p} / k!$; б) $1 - e^{-\lambda p}$.

4.29. По цели производят серию независимых выстрелов до первого попадания. Даны вероятность p попадания в цель при одном выстреле и запас патронов n . Найдите ряд распределения и функцию распределения числа X израсходованных патронов.

О т в е т: $\mathbf{P}\{X = i\} = \begin{cases} pq^{i-1}, & i = \overline{0, n-1} \quad (q = 1 - p); \\ q^{n-1}, & i = n. \end{cases}$

4.30. Летательный аппарат, по которому ведется стрельба, состоит из двух различных по уязвимости частей. Аппарат выходит из строя при одном попадании в первую часть или трех попаданиях во вторую. Стрельба ведется до поражения летательного аппарата. Постройте ряд распределения и функцию

распределения числа попаданий X в летательный аппарат, которое понадобится для его поражения, если каждый попавший в аппарат снаряд с вероятностью 0,3 поражает первую часть и с вероятностью 0,7 — вторую.

О т в е т: $\mathbf{P}\{X = 1\} = 0,3$; $\mathbf{P}\{X = 2\} = 0,21$; $\mathbf{P}\{X = 3\} = 0,49$.

4.31. Непрерывная случайная величина X распределена по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 0,2$. Найдите вероятность попадания этой случайной величины в интервал $(0, 2)$.

О т в е т: $1 - e^{-0,4} \approx 0,33$.

4.32. Длительность времени X безотказной работы элемента имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 0,02 \text{ ч}^{-1}$. Вычислите вероятность того, что за время $t = 100 \text{ ч}$ элемент: а) выйдет из строя; б) будет исправно работать.

О т в е т: а) $1 - e^{-2} \approx 0,865$; б) $e^{-2} \approx 0,135$.

4.33. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m = 2$ и $\sigma = 1$. Определите вероятность попадания случайной величины в интервал $(1, 5)$.

О т в е т: 0,83999.

4.34. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m = 4$ и $\sigma = 1$. Определите вероятность попадания случайной величины X в интервал $(6, 8)$.

О т в е т: 0,0227.

4.35. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ . Вычислите вероятность попадания случайной величины в интервал $(m - 4\sigma, m)$.

О т в е т: 0,499971.

4.36. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с $m = 0$. Вероятность попадания случайной величины в интервал $(-0,3, 0,3)$ равна 0,5. Найдите среднее квадратичное отклонение σ .

О т в е т: $\sigma \approx 0,44$.

4.37. Измерительный прибор имеет систематическую погрешность 5 м. Случайные погрешности подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 10 м. Какова вероятность того, что погрешность измерения не превзойдет по абсолютному значению 5 м?

О т в е т: 0,3413.

4.38. Измерение дальности до объекта сопровождается случайными погрешностями, подчиняющимися нормальному закону со средним квадратичным отклонением, равным 50 м. Систематическая погрешность отсутствует. Найдите:

а) вероятность измерения дальности с погрешностью, не превосходящей по абсолютному значению 100 м;

б) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

О т в е т: а) 0,9545; б) 0,5.

4.39. Высотомер имеет случайную и систематическую погрешности. Систематическая погрешность равна 20 м. Случайная погрешность распределена по нормальному закону. Какую среднюю квадратичную погрешность должен иметь прибор, чтобы с вероятностью 0,9452 погрешность измерения высоты была меньше 10 м?

О т в е т: 50 м.

4.40. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и средним квадратичным отклонением σ . Определите абсциссы и ординаты точек перегиба кривой плотности распределения.

О т в е т: $m \pm \sigma$; $e^{-1/2}/(\sigma\sqrt{2\pi})$.

4.41. Нормально распределенная случайная величина X имеет математическое ожидание, равное нулю. Найдите среднее квадратичное отклонение σ , при котором вероятность попадания случайной величины в интервал (5, 10) была бы наибольшей.

О т в е т: $\sigma = \sqrt{75/(2\ln 2)}$.

4.42. Время X (в часах) безотказной работы электрической лампочки имеет распределение Вейбулла с параметрами $\alpha = 0,02$ и $\beta = 0,5$. Определите вероятность того, что лампочка проработает не менее 10000 ч.

О т в е т: $\mathbf{P}\{X > 10000\} = e^{-0,02 \cdot 10000^{1/2}} \approx 0,14$.

4.43. Время X (в месяцах) безотказной работы некоторой системы, состоящей из одного основного и двух резервных элементов, имеет гамма-распределение с параметрами $\gamma = 3$ и $\lambda = 0,05$. Найдите вероятность того, что система проработает не менее 5 лет.

О т в е т: $\mathbf{P}\{X > 60\} = e^{-3}(1 + 3 + 3^2/2) \approx 0,42$.

5. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В прикладных задачах обычно приходится рассматривать не одну *случайную величину*, а несколько случайных величин, одновременно измеряемых (наблюдаемых) в эксперименте. При этом с каждым *элементарным исходом* $\omega \in \Omega$ бывает связан набор числовых значений некоторых количественных параметров.

В этой главе мы обобщим ранее полученные результаты на совокупность из нескольких случайных величин, заданных на одном и том же *вероятностном пространстве*.

5.1. Многомерная случайная величина. Совместная функция распределения

Определение 5.1. Совокупность *случайных величин*

$$X_1 = X_1(\omega), \quad \dots, \quad X_n = X_n(\omega),$$

заданных на одном и том же *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbf{P})$, называют **многомерной** (***n*-мерной**) **случайной величиной**, или ***n*-мерным случайным вектором**. При этом сами случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n называют **координатами случайного вектора**. В частности, при $n = 1$ говорят об **одномерной**, при $n = 2$ — **двумерной случайной величине** (или **двумерном случайном векторе**).

Для *n*-мерного случайного вектора воспользуемся обозначениями (X_1, \dots, X_n) и $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$. В случае двумерных и трехмерных случайных векторов наряду с обозначениями (X_1, X_2) и (X_1, X_2, X_3) будем использовать также обозначения (X, Y) и (X, Y, Z) .

Множество значений n -мерного случайного вектора можно отождествить с точками n -мерного линейного арифметического пространства \mathbb{R}^n [IV].

Замечание 5.1. Обратим внимание, что в данном выпуске в отличие от предыдущих [IV] вектор пространства \mathbb{R}^n будем обозначать матрицей-строкой.

Приведем примеры случайных векторов.

Пример 5.1. Отклонение точки разрыва снаряда от точки прицеливания при стрельбе по плоской цели можно задать двумерной случайной величиной (X, Y) , где X — отклонение по дальности, а Y — отклонение в боковом направлении.

При стрельбе по воздушной цели необходимо рассматривать трехмерный случайный вектор (X, Y, Z) , где X, Y, Z — координаты отклонения точки разрыва зенитного снаряда от точки прицеливания в некоторой пространственной системе координат [III].

Пример 5.2. При испытании прибора на надежность совокупность внешних воздействий в некоторый момент времени можно описать случайным вектором (X, Y, Z, \dots) . Здесь, например, X — температура окружающей среды, Y — атмосферное давление, Z — амплитуда вибрации платформы, на которой установлен прибор и т.д. Размерность этого вектора зависит от количества учитываемых факторов и может быть достаточно большой. #

Свойства многомерных случайных векторов мы будем в основном изучать на примере двумерного случайного вектора, делая, если это потребуется, пояснения для случайного вектора произвольной размерности.

Напомним, что рассмотрение одномерной случайной величины начиналось с обсуждения способа задания ее *закона распределения*. В частности, закон распределения одномерной случайной величины можно задать с помощью *функции распределения*. То же можно сказать и по отношению к n -мерному

случайному вектору. Отметим, что в дальнейшем для *пересечения событий* $\{X_1 < x_1\}, \dots, \{X_n < x_n\}$ вместо записи

$$\{X_1 < x_1\} \cap \dots \cap \{X_n < x_n\}$$

будем использовать запись

$$\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\}.$$

Определение 5.2. *Функцией распределения (вероятностей)*

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$$

(n -мерного) *случайного вектора* (X_1, \dots, X_n) называют функцию, значение которой в точке $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ равно вероятности совместного осуществления (пересечения) событий $\{X_1 < x_1\}, \dots, \{X_n < x_n\}$, т.е.

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\}.$$

Функцию распределения $F(x_1, \dots, x_n)$ называют также **совместной (n -мерной) функцией распределения** случайных величин X_1, \dots, X_n . В частности, при $n = 1$ будем говорить об одномерной, при $n = 2$ — о двумерной функции распределения.

Значение двумерной функции распределения в точке $(a_1; a_2)$, согласно определению 5.2, представляет собой не что иное, как вероятность попадания точки с координатами $(X_1; X_2)$ в квадрант с вершиной в точке $(a_1; a_2)$, заштрихованный на рис. 5.1.

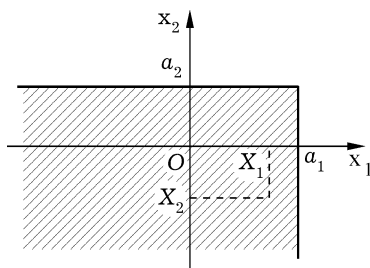


Рис. 5.1

Свойства двумерной функции распределения, аналогичные свойствам функции распределения одномерной случайной величины, доказываются в следующей теореме.

Теорема 5.1. Двумерная функция распределения удовлетворяет следующим свойствам.

1. $0 \leq F(x_1, x_2) \leq 1$.
2. $F(x_1, x_2)$ — неубывающая функция $[V]$ по каждому из аргументов x_1 и x_2 .
3. $F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$.
4. $F(+\infty, +\infty) = 1$.
5. $P\{a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$.
6. $F(x_1, x_2)$ — непрерывная слева в любой точке $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ по каждому из аргументов x_1 и x_2 функция.
7. $F_{X_1, X_2}(x, +\infty) = F_{X_1}(x)$, $F_{X_1, X_2}(+\infty, x) = F_{X_2}(x)$.

◀ Утверждения 1 и 2 доказываются точно так же, как и в одномерном случае (см. теорему 4.1).

События $\{X_1 < -\infty\}$ и $\{X_2 < -\infty\}$ являются невозможными, а пересечение невозможного события с любым событием, как известно, также невозможное событие, вероятность которого равна нулю. Отсюда с учетом определения 5.2 вытекает утверждение 3.

Аналогично из того, что события $\{X_1 < +\infty\}$ и $\{X_2 < +\infty\}$ так же, как и их пересечение, являются достоверными, вероятность которых равна единице, вытекает утверждение 4.

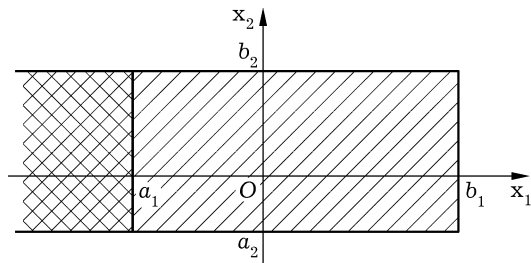


Рис. 5.2

Чтобы найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X_1, X_2) в прямоугольник $\{a_1 \leq x_1 < b_1, a_2 \leq x_2 < b_2\}$ (на

рис. 5.2 заштрихован), сначала определим вероятность попадания в полуполосу $\{x_1 < a_1, a_2 \leq x_2 < b_2\}$ (отмечена двойной штриховкой). Но эта вероятность представляет собой вероятность попадания в квадрант $\{x_1 < b_1, x_2 < b_2\}$ за вычетом вероятности попадания в квадрант $\{x_1 < b_1, x_2 < a_2\}$, т.е.

$$\mathbf{P}\{X_1 < a_1, a_2 \leq X_2 < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2).$$

Теперь осталось заметить, что вероятность попадания в прямоугольник $\{a_1 \leq x_1 < b_1, a_2 \leq x_2 < b_2\}$ совпадает с вероятностью попадания в полуполосу $\{x_1 < b_1, a_2 \leq x_2 < b_2\}$ из которой вычитается вероятность попадания в полуполосу $\{x_1 < a_1, a_2 \leq x_2 < b_2\}$, равная $F(a_1, b_2) - F(a_1, a_2)$. Окончательно получим утверждение 5.

Подобно одномерному случаю доказывается и утверждение 6.

Наконец, событие $\{X_2 < +\infty\}$ является достоверным, поэтому

$$\{X_1 < x_1\} \cap \{X_2 < +\infty\} = \{X_1 < x_1\}.$$

Аналогично

$$\{X_1 < +\infty\} \cap \{X_2 < x_2\} = \{X_2 < x_2\}.$$

Отсюда приходим к утверждению 7, которое устанавливает естественную связь между двумерной функцией распределения F_{X_1, X_2} случайного вектора (X_1, X_2) и функциями F_{X_1} и F_{X_2} , которые называют *одномерными* (говорят также *частными*, или *маргинальными*) *функциями распределения* случайных величин X_1 и X_2 . ►

Пример 5.3. Некоторое техническое устройство состоит из двух различных по надежности элементов, причем время безотказной работы первого элемента можно задать случайной величиной X_1 , а второго — случайной величиной X_2 . Тогда надежность всего устройства можно описать двумерным случайным вектором (X_1, X_2) , имеющим неотрицательные координаты X_1 и X_2 .

Пусть известно, что для любых $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ вероятность события $\{X_1 \geq x_1, X_2 \geq x_2\}$ определяется формулой

$$\mathbf{P}\{X_1 \geq x_1, X_2 \geq x_2\} = e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_{12} \max\{x_1, x_2\}},$$

где $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, и $\lambda_{12} \geq 0$. Найдём совместную функцию распределения $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ и одномерные функции распределения $F_{X_1}(x)$ и $F_{X_2}(x)$.

В силу неотрицательности X_1 и X_2 событие $\{X_1 \geq x\}$ совпадает с событием $\{X_1 \geq x, X_2 \geq 0\}$, а событие $\{X_2 \geq x\}$ — с событием $\{X_1 \geq 0, X_2 \geq x\}$. Подставляя 0 вместо x_1 и x_2 в выражение для $\mathbf{P}\{X_1 \geq x_1, X_2 \geq x_2\}$, получаем:

$$\mathbf{P}\{X_1 \geq x\} = \mathbf{P}\{X_1 \geq x, X_2 \geq 0\} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x}, \quad x \geq 0;$$

$$\mathbf{P}\{X_2 \geq x\} = \mathbf{P}\{X_1 \geq 0, X_2 \geq x\} = e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})x}, \quad x \geq 0.$$

Отсюда находим одномерные функции распределения $F_{X_1}(x)$ и $F_{X_2}(x)$:

$$F_{X_1}(x) = 1 - \mathbf{P}\{X_1 \geq x\} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x}, \quad x \geq 0;$$

$$F_{X_2}(x) = 1 - \mathbf{P}\{X_2 \geq x\} = 1 - e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})x}, \quad x \geq 0.$$

Естественно, поскольку случайные величины X_1 и X_2 неотрицательные, то

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) = 0, \quad x \leq 0.$$

Так как событие $\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}$ совпадает с событием $\Omega \setminus (\{X_1 \geq x_1\} \cup \{X_2 \geq x_2\})$, то совместная функция распределения $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$, согласно свойствам 1 и 5 (см. теорему 2.8), при $x_1, x_2 \geq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= 1 - \mathbf{P}(\{X_1 \geq x_1\} \cup \{X_2 \geq x_2\}) = \\ &= 1 - \mathbf{P}\{X_1 \geq x_1\} - \mathbf{P}\{X_2 \geq x_2\} + \mathbf{P}\{X_1 \geq x_1, X_2 \geq x_2\} = \\ &= 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x_1} - e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})x_2} + e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_{12} \max\{x_1, x_2\}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что значение совместной функции распределения $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ при $x_1 < 0$ или $x_2 < 0$ задается равенством

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = 0.$$

Полученная функция распределения задает **двумерное экспоненциальное распределение**. Заметим, что это распределение моделирует простейший случай зависимых отказов, при котором могут одновременно отказать оба элемента. При этом в теории надежности λ_1 называют интенсивностью отказа только первого элемента, λ_2 — только второго элемента и λ_{12} — одновременно и первого, и второго элементов.

5.2. Дискретные двумерные случайные величины

Определение 5.3. *Двумерную случайную величину (X, Y) называют дискретной, если каждая из случайных величин X и Y является дискретной.*

Как и в одномерном случае, распределение двумерной дискретной случайной величины естественно описать с помощью перечисления всевозможных пар (x_i, y_j) значений координат *случайного вектора (X, Y) и соответствующих вероятностей*, с которыми эти пары значений принимают случайные величины X и Y .

Для простоты ограничимся конечным *множеством возможных значений*, когда случайная величина X может принимать только значения x_1, \dots, x_n , Y — значения y_1, \dots, y_m , а координаты двумерного случайного вектора (X, Y) — пары значений (x_i, y_j) , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Такое перечисление удобно представить в виде таблицы (табл. 5.1). В этой таблице в верхней строке перечислены все возможные значения $y_1, \dots, y_j, \dots, y_m$ случайной величины Y , а в левом столбце — значения $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ случайной величины X . На пересечении столбца „ y_j “ со строкой „ x_i “ находится вероятность $p_{ij} = \mathbf{P}\{X = x_i, Y = y_j\}$ совместного осуществления событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$.

Таблица 5.1

X	Y				
	y_1	y_2	\dots	y_m	\mathbf{P}_X
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1m}	p_{X1}
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2m}	p_{X2}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_n	p_{n1}	p_{n2}	\dots	p_{nm}	p_{Xn}
\mathbf{P}_Y	p_{Y1}	p_{Y2}	\dots	p_{Ym}	

В этой таблице обычно добавляют еще одну строку „ \mathbf{P}_Y “ и столбец „ \mathbf{P}_X “.

На пересечении столбца „ \mathbf{P}_X “ со строкой „ x_i “ записывают число

$$p_{Xi} = p_{i1} + \dots + p_{im}.$$

Но p_{Xi} представляет собой не что иное, как вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i , т.е.

$$p_{Xi} = \mathbf{P}\{X = x_i\}.$$

Таким образом, первый и последний столбцы таблицы дают нам *ряд распределения* случайной величины X .

Аналогично, в последней строке „ \mathbf{P}_Y “ помещены значения

$$p_{Yj} = p_{1j} + \dots + p_{nj},$$

а первая и последняя строки дают ряд распределения случайной величины Y . Для контроля правильности составления таблицы рекомендуется просуммировать элементы последней строки и последнего столбца. Если хотя бы одна из этих сумм не будет равна единице, то при составлении таблицы была допущена ошибка.

Используя табл. 5.1, нетрудно определить *совместную функцию распределения* $F_{X,Y}(x,y)$. Ясно, что для этого необходимо

просуммировать p_{ij} по всем тем значениям i и j , для которых $x_i < x$, $y_j < y$, т.е.

$$F(x, y) = \sum_{\substack{i: x_i < x \\ j: y_j < y}} p_{ij}.$$

Пример 5.4. В соответствии со схемой Бернулли (см. 3.6) с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1 - p$ проводятся два испытания. Выпишем распределение двумерного случайного вектора (X_1, X_2) , где X_i , $i = 1, 2$, — число успехов в i -м испытании. Каждая из случайных величин X_1 и X_2 может принимать два значения: 0 или 1. Числа успехов в обоих испытаниях равны нулю тогда, когда произойдут две неудачи, а это в силу независимости испытаний происходит с вероятностью q^2 . Поэтому

$$\mathbf{P}\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = q^2,$$

и на пересечении столбца „0“ со строкой „0“ нужно записать q^2 (табл. 5.2).

Далее, $X_1 = 1$ и $X_2 = 0$, если в первом испытании произошел успех, а во втором — неудача, и, значит,

$$\mathbf{P}\{X_1 = 1, X_2 = 0\} = pq.$$

Аналогично заполняем второй столбец:

$$\mathbf{P}\{X_1 = 0, X_2 = 1\} = qp,$$

$$\mathbf{P}\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = p^2.$$

Таблица 5.2

X_1	X_2		\mathbf{P}_{X_1}
	0	1	
0	q^2	qp	q
1	pq	p^2	p
\mathbf{P}_{X_2}	q	p	

Наконец, на пересечении столбца „ \mathbf{P}_{X_1} “ и строки „0“ должно стоять

$$\mathbf{P}\{X_1 = 0\} = q^2 + pq = q(q + p) = q,$$

а на пересечении столбца „ \mathbf{P}_{X_1} “ и строки „1“ —

$$\mathbf{P}\{X_1 = 1\} = pq + p^2 = p(p + q) = p.$$

Проверим правильность составления таблицы. Сумма элементов последнего столбца $p + q = 1$, последней строки $p + q = 1$. Так и должно быть.

Построим теперь совместную функцию распределения случайных величин X_1 и X_2 :

$$F(x_1, x_2) = \mathbf{P}\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}.$$

Поскольку при $x_1 \leq 0$ или $x_2 \leq 0$ нет ни одного элементарного исхода ω , для которого или $X_2(\omega) < x_2$, то для таких x_1 и x_2 событие $\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}$ невозможное, и, значит

$$F(x_1, x_2) = 0$$

при $x_1 \leq 0$ или $x_2 \leq 0$.

Далее, если $0 < x_1 \leq 1$ и $0 < x_2 \leq 1$, то событие $\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}$ эквивалентно событию $\{X_1 = 0, X_2 = 0\}$, которое, как видно из табл. 5.2, происходит с вероятностью q^2 , и

$$F(x_1, x_2) = q^2.$$

Если же $0 < x_1 \leq 1$, а $x_2 > 1$, то событие $\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}$ совпадает с объединением *непересекающихся событий*

$$\{X_1 = 0, X_2 = 0\} \quad \text{и} \quad \{X_1 = 0, X_2 = 1\}.$$

Тогда $F(x_1, x_2) = q^2 + qp = q$. Аналогично

$$F(x_1, x_2) = q^2 + qp = q.$$

при $x_1 > 1$ и $0 < x_2 \leq 1$.

Наконец, если $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$, то событие $\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}$ достоверно, и, следовательно,

$$F(x_1, x_2) = 1.$$

Совместная функция распределения $F(x_1, x_2)$ задает поверхность в трехмерном пространстве, и ее не очень удобно изо-

бражать графически. Тем не менее такая попытка предпринята на рис. 5.3.

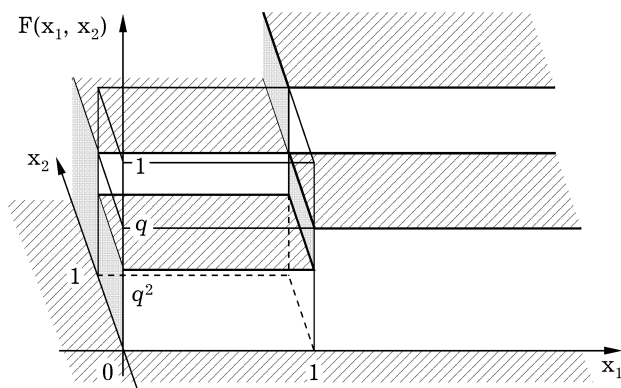


Рис. 5.3

Пример 5.5. Игральная кость размечена таким образом, что сумма очков на противоположных гранях равна 7 (т.е. 1 — 6, 2 — 5, 3 — 4). Случайная величина X — число очков, выпавших на верхней грани, случайная величина Y — то же на нижней грани. И случайная величина X , и случайная величина Y могут принимать любые значения от 1 до 6 с одинаковой вероятностью $1/6$. Однако если случайная величина X приняла значение 1 (на верхней грани выпало 1 очко), то единственным значением случайной величины Y может быть только 6 (на нижней грани обязательно выпадет 6 очков). Значит, строка „1“ табл. 5.3 будет состоять из нулей, за исключением пересечения со столбцом „6“: на этом месте должна стоять вероятность $1/6$. Аналогично строка „2“ будет иметь единственный отличный от нуля элемент на пересечении со столбцом „5“, также равный $1/6$ (на верхней грани выпало 2 очка, на нижней — 5), и т.д. Столбец „ P_X “ и строку „ P_Y “ находим, суммируя соответствующие строки и столбцы; как и должно было быть, мы получаем в них одинаковые значения $1/6$, соответствующие классической схеме.

Таблица 5.3

X	Y						
	1	2	3	4	5	6	\mathbf{P}_X
1	0	0	0	0	0	1/6	1/6
2	0	0	0	0	1/6	0	1/6
3	0	0	0	1/6	0	0	1/6
4	0	0	1/6	0	0	0	1/6
5	0	1/6	0	0	0	0	1/6
6	1/6	0	0	0	0	0	1/6
\mathbf{P}_Y	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	

Предоставляем возможность интересующемуся читателю самостоятельно построить совместную функцию распределения случайных величин X и Y .

5.3. Непрерывные случайные величины

Определение 5.4. *Непрерывной двумерной случайной величиной* (X, Y) называют такую двумерную случайную величину (X, Y) , *совместную функцию распределения* которой

$$F(x_1, x_2) = \mathbf{P}\{X < x_1, Y < x_2\}$$

можно представить в виде сходящегося несобственного интеграла:

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

Функцию

$$p(x_1, x_2) = p_{X,Y}(x_1, x_2)$$

называют **совместной двумерной плотностью распределения** случайных величин X и Y , или плотностью распределения случайного вектора (X, Y) . Область интегрирования в двойном интеграле представляет собой квадрант $\{y_1 < x_1, y_2 < x_2\}$ с вершиной в точке $(x_1; x_2)$. Как известно [VII], двойной интеграл можно представить в виде повторного, причем в любом порядке, следовательно,

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} dy_1 \int_{-\infty}^{x_2} p(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{x_2} dy_2 \int_{-\infty}^{x_1} p(y_1, y_2) dy_1.$$

Так же как и в одномерном случае, будем предполагать, что $p(x_1, x_2)$ непрерывная (или непрерывная за исключением отдельных точек или линий) функция по обоим аргументам. Тогда в соответствии с определением непрерывной случайной величины и теоремой о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом [VI] совместная плотность распределения представляет собой (в точках ее непрерывности) вторую смешанную производную [V] совместной функции распределения:

$$p(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}. \quad (5.1)$$

Заметим, что аналогичный смысл имеет **совместная n -мерная плотность распределения** случайных величин X_1, \dots, X_n , или **плотность распределения случайного вектора** (X_1, \dots, X_n) :

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

Нетрудно доказать следующие свойства двумерной плотности распределения.

Теорема 5.2. Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами:

- 1) $p(x_1, x_2) \geq 0$;
- 2) $\mathbf{P}\{a_1 < X < b_1, a_2 < Y < b_2\} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} p(x_1, x_2) dx_2$;
- 3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$;
- 4) $\mathbf{P}\{x_1 < X < x_1 + \Delta x_1, x_2 < Y < x_2 + \Delta x_2\} \approx p(x_1, x_2) \Delta x_1 \Delta x_2$;
- 5) $\mathbf{P}\{X = x_1, Y = x_2\} = 0$;
- 6) $\mathbf{P}\{(X; Y) \in D\} = \iint_D p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$;
- 7) $p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y) dy$;
- 8) $p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y) dx$.

◀ Свойства 1 — 5 аналогичны свойствам *одномерной плотности распределения*. Свойство 6 является обобщением свойства 2.

Докажем утверждения 7 и 8. Из свойства 7 двумерной функции распределения (см. 5.1) и определения 5.4 двумерной плотности распределения вытекает:

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(y_1, y_2) dy_1 dy_2,$$

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y p_{X,Y}(y_1, y_2) dy_1 dy_2,$$

откуда, дифференцируя интегралы по переменному верхнему пределу и учитывая формулу (4.2), получаем утверждение 7 для *одномерных (частных, маргинальных) плотностей распределения* $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ случайных величин X и Y . ►

Пример 5.6. Рассмотрим двумерную случайную величину, плотность распределения которой имеет вид

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} A, & x_1^2 + x_2^2 \leq R^2; \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 > R^2. \end{cases}$$

Для определения коэффициента A воспользуемся свойством 3 двумерной плотности распределения. Поскольку $p(x_1, x_2) = 0$ при $x_1^2 + x_2^2 > R^2$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2} A dx_1 dx_2 = \pi A R^2 = 1,$$

и, значит, $A = \frac{1}{\pi R^2}$. Таким образом,

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1^2 + x_2^2 > R^2; \\ \frac{1}{\pi R^2}, & x_1^2 + x_2^2 \leq R^2. \end{cases}$$

Нетрудно найти одномерную плотность распределения случайной величины X_1 :

$$\begin{aligned} p_{X_1}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{\pi R^2} dy = \\ &= \begin{cases} 0, & |x| > R; \\ \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}, & |x| \leq R. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогичное выражение можно получить и для $p_{X_2}(y)$.

Совместная функция распределения $F(x_1, x_2)$ в силу определения двумерной плотности распределения равна

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_D dy_1 dy_2,$$

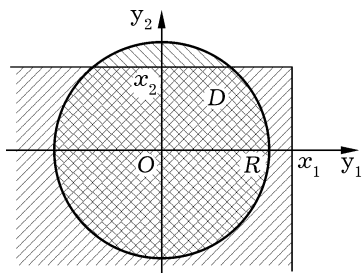


Рис. 5.4

где область D представляет собой пересечение квадранта $\{y_1 < x_1, y_2 < x_2\}$ и круга $x_1^2 + x_2^2 < R^2$, т.е. $F(x_1, x_2)$ с точностью до множителя $\frac{1}{\pi R^2}$ совпадает с площадью области D , имеющей двойную штриховку на рис. 5.4.

Предлагаем самостоятельно определить площадь области D для различных значений x_1 и x_2 . #

В заключение рассмотрим пример, показывающий, что даже на практике реально могут встретиться двумерные случайные величины, не являющиеся ни дискретными, ни непрерывными.

Пример 5.7. Рассмотрим двумерный случайный вектор (X_1, X_2) из примера 5.3. Результаты этого примера, в частности, показывают, что случайные величины X_1 и X_2 являются непрерывными и распределенными по экспоненциальному закону с параметрами $\lambda_1 + \lambda_{12}$ и $\lambda_2 + \lambda_{12}$ соответственно.

Функция распределения двумерного случайного вектора (X_1, X_2)

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x_1} - e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})x_2} + \\ + e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_{12} \max\{x_1, x_2\}}, & x_1 \geq 0 \text{ и } x_2 \geq 0; \\ 0, & x_1 < 0 \text{ или } x_2 < 0 \end{cases}$$

непрерывна во всех точках. Ее смешанная производная

$$p(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} =$$

$$= \begin{cases} \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x_1 - \lambda_2 x_2}, & x_1 > x_2 > 0; \\ \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_{12})e^{-\lambda_1 x_1 - (\lambda_2 + \lambda_{12})x_2}, & x_2 > x_1 > 0; \\ 0, & x_1 < 0 \text{ или } x_2 < 0 \end{cases}$$

непрерывна во всех точках, кроме точек прямых $x_1 = 0$; $x_2 = 0$ и $x_1 = x_2$.

Убедимся, что функция $p(x_1, x_2)$ не является плотностью распределения двумерного случайного вектора (X_1, X_2) . Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x_1} \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x_1 - \lambda_2 x_2} dx_2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_1}^{+\infty} \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_{12})e^{-\lambda_1 x_1 - (\lambda_2 + \lambda_{12})x_2} dx_2 \right) dx_1 = \\ &= 1 - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}} < 1, \end{aligned}$$

что противоречит свойству 3 (см. теорему 5.2).

5.4. Независимые случайные величины

Определение 5.5. Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если совместная функция распределения $F_{X,Y}(x, y)$ является произведением одномерных функций распре-

деления $F_X(x)$ и $F_Y(y)$:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y).$$

В противном случае **случайные величины** называют **зависимыми**.

Пример 5.8. Снова обратимся к примеру 5.3 и определим, в каком случае компоненты X_1 и X_2 двумерного случайного вектора (X_1, X_2) будут независимыми. Заметим, что при $x_1 < 0$ или $x_2 < 0$

$$F_{X_1}(x)F_{X_2}(x_2) = 0 = F_{X,Y}(x_1, x_2).$$

Если же $x_1, x_2 > 0$, то

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x)F_{X_2}(x_2) &= 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x_1} - \\ &\quad - e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})x_2} + e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_{12}(x_1 + x_2)}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что произведение $F_{X_1}(x)F_{X_2}(x_2)$ совпадает при всех x_1, x_2 с совместной функцией распределения (см. пример 5.3)

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x_1} - e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})x_2} + \\ \quad + e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_{12} \max\{x_1, x_2\}}, & x_1 \geq 0 \text{ и } x_2 \geq 0; \\ 0, & x_1 < 0 \text{ или } x_2 < 0, \end{cases}$$

только в том случае, когда $\lambda_{12} = 0$. Таким образом, условие $\lambda_{12} = 0$ является необходимым и достаточным, чтобы времена безотказной работы элементов были независимыми. Как следует из результатов примера 5.7, это условие соответствует тому, что одновременно два отказа произойти не могут. #

Из определения 5.5 вытекает, что для независимых случайных величин X и Y события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ являются независимыми. Покажем, что независимыми являются и все события $\{x_1 \leq X < x_2\}$ и $\{y_1 \leq Y < y_2\}$. Действительно, в силу

независимости X и Y , свойства 5 двумерной функции распределения (см. теорему 5.1) и свойства 4 одномерной функции распределения (см. теорему 4.1) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2\} &= \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) = \\ &= F_X(x_2)F_Y(y_2) - F_X(x_1)F_Y(y_2) - F_X(x_2)F_Y(y_1) + \\ &+ F_X(x_1)F_Y(y_1) = [F_X(x_2) - F_X(x_1)][F_Y(y_2) - F_Y(y_1)] = \\ &= \mathbf{P}\{x_1 \leq X < x_2\}\mathbf{P}\{y_1 \leq Y < y_2\}, \end{aligned}$$

что и означает независимость двух событий $\{x_1 \leq X < x_2\}$ и $\{y_1 \leq Y < y_2\}$.

Замечание 5.2. Можно доказать и более сильное утверждение, состоящее в следующем. Для того чтобы случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы были независимыми любые события $\{X \in A\}$ и $\{Y \in B\}$, где A и B — промежутки или объединения промежутков.

Теорема 5.3. Для того чтобы непрерывные случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы для всех x и y

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

◀ Пусть случайные величины X и Y независимы. Тогда, согласно определению 5.5,

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

С учетом формул (5.1) и (4.2) имеем

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} = \\ &= \left(\frac{dF_X(x)}{dx} \right) \left(\frac{dF_Y(y)}{dy} \right) = p_X(x)p_Y(y). \end{aligned}$$

Тем самым необходимость утверждения доказана.

Для доказательства достаточности следует воспользоваться определением 5.4 двумерной плотности распределения и определением 4.1.

$$\begin{aligned}
 F_{X,Y}(x,y) &= \iint_{\substack{-\infty < v < x \\ -\infty < w < y}} p_{X,Y}(v,w) dv dw = \\
 &= \left(\int_{-\infty}^x p_X(v) dv \right) \left(\int_{-\infty}^y p_Y(w) dw \right) = F_X(x) F_Y(y). \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Пример 5.9. а. Рассмотрим двумерный вектор (X_1, X_2) , совместная плотность распределения которого имеет вид

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 \in [0, 1] \text{ и } x_2 \in [0, 1]; \\ 0, & x_1 \notin [0, 1] \text{ или } x_2 \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что одномерные плотности распределения $p_{X_1}(x)$ и $p_{X_2}(x)$ случайных величин X_1 и X_2 задаются формулой

$$p_{X_1}(x) = p_{X_2}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1]; \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, что в данном случае совместная плотность распределения $p(x_1, x_2)$ для всех x_1, x_2 является произведением одномерных плотностей $p_{X_1}(x_1)$ и $p_{X_2}(x_1)$. Значит, случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми.

б. Также нетрудно показать, что случайные величины X_1 и X_2 из примера 5.6 являются зависимыми. #

Отметим, что если независимые случайные величины X и Y являются непрерывными, то двумерная случайная величина (X, Y) непрерывна.

Теорема 5.4. Дискретные случайные величины X и Y являются независимыми тогда и только тогда, когда для всех возможных значений x_i и y_j

$$p_{i,j} = \mathbf{P}\{X = x_i, Y = y_j\} = \mathbf{P}\{X = x_i\} \mathbf{P}\{Y = y_j\} = p_{X_i} p_{Y_j}.$$

Мы предоставляем возможность читателю доказать эту теорему самостоятельно.

Пример 5.10. В схеме Бернулли с двумя испытаниями (см. пример 5.4)

$$\mathbf{P}\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = q^2 = \mathbf{P}\{X_1 = 0\}\mathbf{P}\{X_2 = 0\},$$

$$\mathbf{P}\{X_1 = 0, X_2 = 1\} = qp = \mathbf{P}\{X_1 = 0\}\mathbf{P}\{X_2 = 1\},$$

$$\mathbf{P}\{X_1 = 1, X_2 = 0\} = pq = \mathbf{P}\{X_1 = 1\}\mathbf{P}\{X_2 = 0\},$$

$$\mathbf{P}\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = p^2 = \mathbf{P}\{X_1 = 1\}\mathbf{P}\{X_2 = 1\}.$$

Таким образом, числа успехов X_1 и X_2 в первом и втором испытаниях представляют собой независимые случайные величины. Впрочем, в силу определения схемы Бернулли иного нельзя было ожидать. Убедитесь самостоятельно в том, что независимыми в совокупности являются случайные величины X_1, \dots, X_n — числа успехов в первом, втором, ..., n -м испытаниях по схеме Бернулли. #

В заключение заметим, что в 8.1 будут приведены другие необходимые и достаточные условия независимости случайных величин, выраженные в терминах *условных распределений*.

Определение 5.6. *Случайные величины X_1, \dots, X_n , заданные на одном и том же вероятностном пространстве, называют независимыми в совокупности, если*

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n).$$

Замечание 5.3. Теоремы 5.3 и 5.4 распространяются на любое число случайных величин.

Разумеется, как и для событий, из попарной независимости не следует независимость случайных величин в совокупности.

Пример 5.11. Свяжем с бросанием тетраэдра из примера 3.6 три случайные величины: X_1, X_2 и X_3 , каждая из

которых может принимать значения 0 или 1, причем $X_1 = 1$, если тетраэдр упал на грань, на которой присутствует цифра 1, и $X_1 = 0$ в противном случае. Аналогично X_2 характеризует наличие цифры 2, а X_3 — цифры 3. Покажем, что случайные величины X_1 , X_2 и X_3 будут попарно независимыми, но не являются независимыми в совокупности.

Действительно, $\mathbf{P}\{X_i = 1\} = \mathbf{P}\{X_i = 0\} = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, 3$, и $\mathbf{P}\{X_i = 1, X_j = 1\} = \frac{1}{4} = \mathbf{P}\{X_i = 1\}\mathbf{P}\{X_j = 1\}$, $i \neq j$, т.е. X_i попарно независимы. Однако, например, $\mathbf{P}\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1\} = \frac{1}{4} \neq \mathbf{P}\{X_1 = 1\}\mathbf{P}\{X_2 = 1\}\mathbf{P}\{X_3 = 1\} = \frac{1}{8}$, т.е. X_i , $i = 1, 2, 3$, не являются независимыми в совокупности.

5.5. Многомерное нормальное распределение

Нормальное распределение одномерной случайной величины рассмотрено выше (см. 4.6). Обратимся к многомерному случаю. При этом сначала введем **двумерное нормальное распределение случайного вектора** $\vec{X} = (X_1, X_2)$, а затем обобщим полученные результаты на случайный вектор \vec{X} произвольной размерности $n > 2$.

Пусть координаты X_1 и X_2 случайного вектора $\vec{X} = (X_1, X_2)$ являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону, т.е. имеют *плотности распределения*

$$p_{X_1}(x) = \varphi_{m_1, \sigma_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

и

$$p_{X_2}(x) = \varphi_{m_2, \sigma_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x - m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right).$$

Напомним, что параметры m_i и $\sigma_i > 0$, $i = \overline{1, 2}$, этих распределений называют *математическими ожиданиями* и *средними квадратическими отклонениями* случайных величин X_1 и X_2 .

Если X_1 и X_2 являются независимыми случайными величинами, то, согласно результатам предыдущего параграфа (см. теорему 5.3),

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$$

и в этом случае плотность двумерного нормального распределения имеет вид

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2 \sigma_1 \sigma_2} \exp \left(-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2} \right).$$

В общем случае вектор $\vec{X} = (X_1, X_2)$ имеет (**невыврожденное**) **двумерное нормальное распределение**, если его плотность распределения определяется формулой

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2 \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1 - m_1, x_2 - m_2)}, \quad (5.2)$$

где функция двух переменных

$$Q(y_1, y_2) = \frac{1}{1 - \rho^2} \left(\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \right), \quad (5.3)$$

$y_i = x_i - m_i$, $i = 1, 2$, есть положительно определенная квадратичная форма [IV] (т.е. $Q(y_1, y_2) > 0$ для любых $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$).

Двумерное нормальное распределение зависит от пяти параметров:

- координат m_1 и m_2 вектора $\vec{m} = (m_1, m_2)$, называемого **вектором математических ожиданий** вектора $\vec{X} = (X_1, X_2)$;

- координат σ_1 и σ_2 вектора $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$, называемого **вектором средних квадратичных отклонений** вектора $\vec{X} = (X_1, X_2)$;

- числа ρ , $|\rho| < 1$, называемого **коэффициентом корреляции** случайных величин X_1 и X_2 .

Последние три параметра запишем для дальнейшего обобщения на случай $n > 2$ в виде **матрицы ковариаций (ковариационной матрицы)** Σ вектора $\vec{X} = (X_1, X_2)$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix},$$

где $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$, $i = \overline{1, 2}$, а $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2$.

Если ввести матрицу $\tilde{\Sigma}$, обратную матрице Σ , т.е.

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma^{-1}$$

и вектор

$$\vec{y} = (y_1, y_2),$$

то квадратичную форму (5.3) можно записать в матричной форме в виде

$$Q(\vec{y}) = \vec{y} \tilde{\Sigma} \vec{y}^T, \quad (5.4)$$

где знак „ T “ означает транспонирование. Действительно, если учитывать, что

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix},$$

то, подставляя $\tilde{\Sigma}$ в (5.4), приходим к выражению (5.3).

Далее, если заметить, что множитель $\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} = \sqrt{\det \Sigma}$, где $\det \Sigma$ — определитель матрицы Σ , то выражение (5.2) можно записать в виде

$$p_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2 (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m})\tilde{\Sigma}(\vec{x}-\vec{m})^T}. \quad (5.5)$$

Теперь можно записать плотность (невыврожденного) нормального распределения для *случайного вектора* $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ произвольной размерности $n > 2$.

Как и в двумерном случае, **многомерное нормальное распределение (многомерный нормальный закон)** определяется вектором средних значений

$$\vec{m} = (m_1, \dots, m_n)$$

и **матрицей ковариаций (ковариационной матрицей)**

$$\Sigma = (\sigma_{ij}), \quad i, j = \overline{1, n},$$

причем Σ является положительно определенной симметрической матрицей [IV].

Диагональный элемент σ_{ii} матрицы Σ называют **дисперсией** случайной величины X_i , а $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{ii}}$ — **средним квадратичным отклонением** X_i . Недиагональный элемент σ_{ij} называют **ковариацией** случайных величин X_i и X_j (σ_{ij} записывают также в виде $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, и тогда ρ_{ij} называют **коэффициентом корреляции** X_i и X_j).

Обозначив, как и прежде, $\tilde{\Sigma}$ матрицу, обратную к матрице Σ , и используя матричную запись, **плотность многомерного (n -мерного) нормального распределения** определим следующим выражением, аналогичным (5.2):

$$p_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{m})\tilde{\Sigma}(\vec{x} - \vec{m})^T}.$$

Если матрица Σ (а значит, и матрица $\tilde{\Sigma} = \Sigma^{-1}$) совпадает с единичной матрицей I , а вектор $\vec{m} = (0, \dots, 0)$, то

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)}.$$

Такую плотность по аналогии с одномерным случаем называют **плотностью стандартного многомерного (n -мерного) нормального распределения**.

Дадим геометрическую интерпретацию плотности нормального распределения.

Начнем с двумерного случая. При этом (X_1, X_2) будем трактовать как координаты брошенной случайным образом на плоскость точки.

Функция $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ задает некоторую поверхность в трехмерном пространстве. Линии уровня этой поверхности имеют уравнение

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = a,$$

которое с учетом (5.2) можно записать в виде

$$Q(x_1 - m_1, x_2 - m_2) = b, \quad (5.6)$$

где $b = -2 \ln \{2\pi a (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}\}$, а $Q(x_1 - m_1, x_2 - m_2)$ определяется формулой (5.3).

Последнее уравнение представляет собой уравнение эллипса (точнее говоря, семейства эллипсов при разных значениях b). Оси симметрии $O'x_1$ и $O'x_2$ этого эллипса (рис. 5.5) проходят через точку $O'(m_1; m_2)$, а их направления совпадают с направлениями собственных векторов матрицы $\tilde{\Sigma}$. В свою очередь, собственные векторы \vec{e}_i , $i = 1, 2$, матрицы $\tilde{\Sigma}$ определяются из уравнений [IV]

$$\vec{e}_i^T \tilde{\Sigma} = \lambda_i \vec{e}_i^T$$

где λ_i — собственные значения матрицы $\tilde{\Sigma}$, т.е. решения характеристического уравнения

$$\det(\tilde{\Sigma} - \lambda I) = 0,$$

или

$$\lambda^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2) - \lambda(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 1 = 0.$$

Углы α_i , $i = 1, 2$, между осями симметрии эллипса и осью Ox_1 можно выразить через параметры σ_1, σ_2 и ρ по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_i = \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}. \quad (5.7)$$

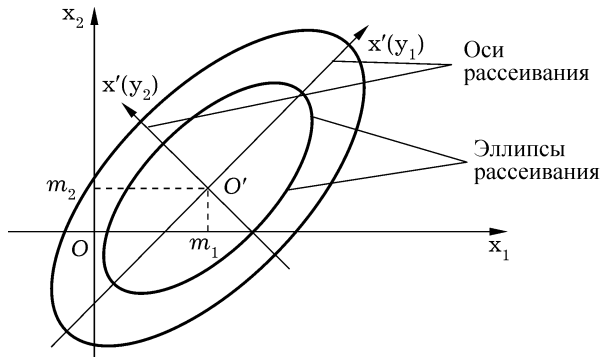


Рис. 5.5

Оси симметрии эллипса (5.6) называют **осями рассеивания**, сам эллипс — **эллипсом рассеивания** (или **эллипсом равной вероятности**), а центр эллипса — точку $O'(m_1; m_2)$ — **центром рассеивания**.

Из формулы (5.7), в частности, следует, что при $\rho = 0$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$ оси рассеивания параллельны координатным, при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ эллипс рассеивания представляет собой окружность радиуса σ и в качестве осей рассеивания можно взять любые две перпендикулярные прямые, проходящие через точку O' .

Вводя новую (прямоугольную) систему координат, оси которой совпадают с осями рассеивания, т.е. каноническую систему координат для эллипса рассеивания, можно показать, что в этой системе координаты (X'_1, X'_2) случайной точки имеют нормальное распределение с нулевым вектором средних значений $m' = (0; 0)$ и матрицей ковариаций $\Sigma' = \begin{pmatrix} \sigma_1'^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2'^2 \end{pmatrix}$, где $\sigma_1' = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, $\sigma_2' = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$.

Если изменить масштабы на осях канонической системы координат, взяв за единицы отсчета σ_1' и σ_2' соответственно, то в такой системе координат координаты случайной точки будут иметь нормальное распределение с нулевым вектором средних

и единичной матрицей ковариаций, т.е. иметь двумерное стандартное нормальное распределение.

Аналогично в случае $n > 2$ уравнение

$$p_{\vec{X}}(\vec{x}) = a$$

или эквивалентное ему уравнение

$$(\vec{x} - \vec{m})\tilde{\Sigma}(\vec{x} - \vec{m})^T = b, \quad b = -2\ln\{(\sqrt{2\pi})^n a(\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}\}$$

в силу положительной определенности матрицы Σ представляет собой уравнение n -мерного эллипсоида, называемого **эллипсоидом рассеивания**, его оси симметрии по-прежнему называются *осями рассеивания*.

Будем трактовать n -мерный случайный вектор \vec{X} как координаты случайной точки в n -мерном пространстве. Пусть x'_1, \dots, x'_n — каноническая система координат эллипсоидов рассеивания, тогда новые координаты (X'_1, \dots, X'_n) случайной точки снова будут описываться n -мерным нормальным законом, имеющим нулевой вектор средних \vec{m}' и диагональную матрицу ковариаций Σ' , причем ее диагональные элементы $\sigma_i'^2 = 1/\lambda_i$, где λ_i , $i = \overline{1, n}$, — собственные значения матрицы $\tilde{\Sigma}$ с учетом их кратностей. Еще раз вводя новые координаты $y_i = \sigma_i' x'_i$ (т.е. изменяя масштабы на осях канонической системы координат), получаем, что в последней системе координат y_1, \dots, y_n координаты случайной точки будут распределены по стандартному нормальному закону.

Таким образом, делая обратные преобразования, можно трактовать (невырожденный) нормально распределенный вектор \vec{X} с произвольным вектором средних \vec{m} и матрицей ковариаций Σ как координаты случайной точки в некоторой (вообще говоря, не ортонормированной, но ортогональной) прямолинейной системе координат, причем эта точка имеет стандартное нормальное распределение.

Пример 5.12. Известно, что при стрельбе по плоской цели отклонение точки разрыва снаряда от точки прицеливания хорошо описывается двумерным нормальным распределением.

При испытании гауицы было обнаружено, что в некоторой прямоугольной системе координат с центром в точке O прицеливания вектор $\vec{X} = (X_1, X_2)$ отклонений (в метрах) от точки O имеет вектор средних $\vec{m} = (2, 3)$ и матрицу ковариаций (в квадратных метрах) $\Sigma = \begin{pmatrix} 300 & 140 \\ 140 & 200 \end{pmatrix}$.

Найдем уравнения осей рассеивания двумерной случайной величины (X_1, X_2) . Центр рассеивания находится в точке $O'(2, 3)$. Матрица $\tilde{\Sigma} = \Sigma^{-1}$ имеет вид

$$\tilde{\Sigma} \approx \begin{pmatrix} 0,005 & -0,0035 \\ -0,0035 & 0,0075 \end{pmatrix}.$$

Определим собственные значения и собственные векторы матрицы $\tilde{\Sigma}$. Собственные значения находим из уравнения

$$40400\lambda^2 - 500\lambda + 1 = 0,$$

они равны $\lambda_1 \approx 0,0025$, $\lambda_2 \approx 0,01$.

Решая уравнения

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \begin{pmatrix} 0,005 & -0,0035 \\ -0,0035 & 0,0075 \end{pmatrix} &= 0,0025\vec{e}_1, \\ \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0,005 & -0,0035 \\ -0,0035 & 0,0075 \end{pmatrix} &= 0,01\vec{e}_2, \end{aligned}$$

находим собственные векторы

$$\vec{e}_1 \approx (7, 5), \quad \vec{e}_2 \approx (-5, 7).$$

Тогда уравнения осей рассеивания принимают вид

$$\frac{x_1 - 2}{7} = \frac{x_2 - 3}{5}, \quad \frac{x_1 - 2}{-5} = \frac{x_2 - 3}{7},$$

а матрица ковариаций в канонических координатах

$$\Sigma' = (\tilde{\Sigma}')^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Плотность распределения случайного вектора (X'_1, X'_2) , представляющего собой координаты отклонения точки разрыва от точки O' , вычисленные в ортонормированной системе координат, связанной с осями рассеивания, имеет вид

$$p_{X'_1, X'_2}(x'_1, x'_2) = \frac{1}{400\pi} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x'^2_1}{400} + \frac{x'^2_2}{100} \right)}.$$

Для того чтобы получить стандартное нормальное распределение, мы должны за единицу масштаба по большей оси эллипса рассеивания принять 20 м, а по меньшей — 10 м.

Предположим теперь, что цель поражается в том случае, когда точка разрыва снаряда находится от нее не далее чем в 10 м. Вычислим вероятность поражения цели одним снарядом.

В соответствии с формулой (5.5) двумерная плотность распределения вектора $\bar{X} = (X_1, X_2)$ имеет вид (см. вид матрицы Σ)

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \approx \frac{1}{400\pi} e^{-\frac{1}{2} [0,005(x_1-2)^2 - 0,007(x_1-2)(x_2-3) + 0,0075(x_2-3)^2]}.$$

Искомая вероятность равна вероятности попадания снаряда в область $x^2_1 + x^2_2 \leq 100$ и в силу свойства 6 двумерной плотности распределения определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X^2_1 + X^2_2 \leq 100\} &= \iint_{x^2_1 + x^2_2 \leq 100} p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \approx \frac{1}{400\pi} \times \\ &\times \iint_{x^2_1 + x^2_2 \leq 100} e^{-\frac{1}{2} [0,005(x_1-2)^2 - 0,007(x_1-2)(x_2-3) + 0,0075(x_2-3)^2]} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Для вычисления последнего интеграла необходимо применить численные методы, поэтому окончательный ответ мы не приводим. #

Рассмотрим основные свойства многомерного нормального распределения.

1. Закон распределения каждой из координат случайного вектора \vec{X} , имеющего n -мерное нормальное распределение с вектором средних $\vec{m} = (m_1, \dots, m_n)$ и матрицей ковариаций $\Sigma = \sigma_{ij}$, является нормальным с параметрами m_i и σ_i .

◀ Докажем это утверждение для случая $n = 2$ (общий случай требует более громоздких преобразований).

Определим плотность распределения $p_{X_1}(x_1)$ в случае, когда $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ определяется формулами (5.2) и (5.3). Используя свойство 7 двумерной плотности распределения, находим

$$p_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\tilde{Q}(x_1, x_2)} dx_2,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(x_1, x_2) = & -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \\ & \times \left[\left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Делая замену

$$y = \frac{\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} - \rho \frac{(x_1 - m_1)}{\sigma_1}}{1 - \rho^2},$$

после преобразований получаем

$$p_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{y^2}{2} - \frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2}} dy.$$

Поскольку с учетом значения интеграла Пуассона [VII]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2\pi},$$

приходим к окончательному ответу

$$p_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(x_1 - m_1)^2/2\sigma_1^2},$$

что и доказывает требуемое утверждение. Аналогично можно показать, что

$$p_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2}}. \quad \blacktriangleright$$

2. Если ковариационная матрица Σ случайного вектора \vec{X} , распределенного по нормальному закону (невырожденному), является диагональной [III], то координаты вектора X_1, \dots, X_n являются независимыми случайными величинами.

◀ Действительно, матрица $\tilde{\Sigma} = \Sigma^{-1}$ также является диагональной и имеет вид

$$\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix},$$

и, следовательно, формула (5.2) для совместной (n -мерной) плотности распределения имеет вид

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma_1 \dots \sigma_n} \times \\ \times e^{-\left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \dots + \frac{(x_n - m_n)^2}{2\sigma_n^2} \right]} = p_{X_1}(x_1) \dots p_{X_n}(x_n),$$

т.е. случайные величины X_1, \dots, X_n являются независимыми (см. замечание 5.3). ▶

Заметим, что если $\sigma_{ij} = 0$ для некоторых i и j или, что то же самое, коэффициент корреляции $\rho_{ij} = 0$, то говорят, что **случайные величины** X_i и X_j являются **некоррелированными**.

Таким образом, из некоррелированности координат случайного вектора, распределенного по нормальному закону, следует (в силу теоремы 5.3) их независимость. Легко показать и обратное: независимые нормально распределенные случайные

величины являются некоррелированными (в 7.4 будет показано, что для произвольно распределенных случайных векторов некоррелированность координат есть лишь необходимое условие независимости).

3. Если вектор $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ имеет нормальный закон распределения с вектором средних $\vec{m} = (m_1, \dots, m_n)$ и матрицей ковариаций Σ , то вектор $\vec{X}' = (X_1, \dots, X_{n-1})$ также распределен по нормальному закону с вектором средних $\vec{m}' = (m_1, \dots, m_{n-1})$ и матрицей ковариаций Σ' , полученной из матрицы Σ вычеркиванием последних строки и столбца.

◀ Это свойство доказывается так же, как и свойство 1, но в силу громоздкости вывода оно здесь не приводится. ▶

Из свойства 3 методом математической индукции можно показать, что любой набор координат n -мерного случайного вектора $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$, распределенного по нормальному закону, снова имеет нормальное распределение. В частности, двумерный случайный вектор (X_1, X_2) распределен по нормальному закону с вектором средних (m_1, m_2) и матрицей ковариаций $\Sigma' = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$.

5.6. Решение типовых примеров

Пример 5.13. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет совместную функцию распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0; \\ 1 - e^{-x^2} - e^{-2y} + e^{-x^2-2y}, & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Найдем:

а) вероятности событий

$$\{-2 \leq X < 2, 1 \leq Y < 3\}, \quad \{X \geq 0, Y \geq 1\} \quad \text{и} \quad \{X < 1, Y \geq 2\};$$

б) частные функции распределения случайных величин X и Y .

а. В соответствии со свойством 5 двумерной функции распределения имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{-2 \leqslant X < 2, 1 \leqslant Y < 3\} &= F(2, 3) - F(2, 1) - \\ &- F(-2, 3) + F(-2, 1) = 1 - e^{-4} - e^{-6} + e^{-10} - \\ &- (1 - e^{-4} - e^{-2} + e^{-6}) - 0 + 0 = e^{-2} - 2e^{-6} + e^{-10}. \end{aligned}$$

Событие $\{X \geqslant 0, Y \geqslant 1\}$ представляет собой попадание двумерной случайной величины (X, Y) в квадрант $\{x \geqslant 0, y \geqslant 1\}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X \geqslant 0, Y \geqslant 1\} &= F(+\infty, +\infty) - F(+\infty, 1) - \\ &- F(0, +\infty) + F(0, 1) = 1 - (1 - e^{-2}) - 0 + 0 = e^{-2}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X < 1, Y \geqslant 2\} &= F(1, +\infty) - F(1, 2) - F(-\infty, +\infty) + \\ &+ F(-\infty, 2) = 1 - e^{-1} - (1 - e^{-1} - e^{-4} + e^{-5}) - 0 + 0 = e^{-4} - e^{-5}. \end{aligned}$$

б. В соответствии со свойством 7 двумерной функции распределения частные распределения случайных величин X и Y задаются формулами

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1 - e^{-x^2}, & x > 0; \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ 1 - e^{-2y}, & y > 0. \end{cases}$$

Пример 5.14. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет совместную функцию распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ \sin x \sin y, & 0 < x \leqslant \pi/2 \text{ и } 0 < y \leqslant \pi/2; \\ \sin x, & 0 < x \leqslant \pi/2 \text{ и } y > \pi/2; \\ \sin y, & x > \pi/2 \text{ и } 0 < y \leqslant \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2 \text{ и } y > \pi/2. \end{cases}$$

Найдем:

а) вероятности событий

$$\left\{-1 \leq X < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} \leq Y < \frac{\pi}{3}\right\}, \left\{X \geq \frac{\pi}{4}, Y \geq \frac{\pi}{4}\right\} \text{ и } \left\{X < \frac{\pi}{3}, Y \geq \frac{\pi}{6}\right\};$$

б) частные функции распределения случайных величин X и Y .

Действуя таким же образом, как в примере 5.13, получаем:

$$\begin{aligned} \text{а) } \mathbf{P}\left\{-1 \leq X \leq \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} \leq Y < \frac{\pi}{3}\right\} &= F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) - \\ &- F\left(-1, \frac{\pi}{3}\right) + F\left(-1, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} - 0 + 0 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \\ \mathbf{P}\left\{X \geq \frac{\pi}{4}, Y \geq \frac{\pi}{4}\right\} &= F(+\infty, +\infty) - F\left(+\infty, \frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}, +\infty\right) + \\ &+ F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2}{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2}, \\ \mathbf{P}\left\{X < \frac{\pi}{3}, Y \geq \frac{\pi}{6}\right\} &= F\left(\frac{\pi}{3}, +\infty\right) - F\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) - F(-\infty, -\infty) + \\ &+ F\left(-\infty, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} - 0 + 0 = \frac{\sqrt{3}}{4}; \end{aligned}$$

$$\text{б) } F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \sin y, & 0 < y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & y > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Пример 5.15. Распределение вероятностей *дискретной двумерной случайной величины* (X, Y) задано табл. 5.4. Найдем:

а) *ряды распределения* случайных величин X и Y ;

Таблица 5.4

X	Y		
	3	8	12
3	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

б) значения совместной функции распределения $F(x, y)$ в точках $(4, 5; 8)$ и $(9; 11)$, а также вероятность события $\{4 \leq X < 9, 8 \leq Y < 11\}$.

а. Поскольку событие $\{X = 3\}$ совпадает с объединением непересекающихся событий $\{X = 3, Y = 3\}$, $\{X = 3, Y = 8\}$ и $\{X = 3, Y = 12\}$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X = 3\} &= \mathbf{P}\{X = 3, Y = 3\} + \mathbf{P}\{X = 3, Y = 8\} + \\ &+ \mathbf{P}\{X = 3, Y = 12\} = 0,55. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X = 5\} &= \mathbf{P}\{X = 5, Y = 3\} + \mathbf{P}\{X = 5, Y = 8\} + \\ &+ \mathbf{P}\{X = 5, Y = 12\} = 0,45. \end{aligned}$$

Ряд распределения случайной величины X приведен в табл. 5.5.

Таблица 5.5

X	3	5
\mathbf{P}	0,55	0,45

Таблица 5.6

Y	3	8	12
\mathbf{P}	0,27	0,43	0,30

Суммируя вероятности по столбцам (см. табл. 5.4), находим:

$$\mathbf{P}\{Y = 3\} = \mathbf{P}\{X = 3, Y = 3\} + \mathbf{P}\{X = 5, Y = 3\} = 0,27,$$

$$\mathbf{P}\{Y = 8\} = \mathbf{P}\{X = 3, Y = 8\} + \mathbf{P}\{X = 5, Y = 8\} = 0,43,$$

$$\mathbf{P}\{Y = 12\} = \mathbf{P}\{X = 3, Y = 12\} + \mathbf{P}\{X = 5, Y = 12\} = 0,30.$$

Ряд распределения случайной величины Y представлен в табл. 5.6.

б. Используя определение 5.3 совместной функции распределения и то, что событие $\{X < 4, 5, Y < 8\}$ совпадает с событием $\{X = 3, Y = 3\}$, получаем

$$F(4, 5, 8) = \mathbf{P}\{X < 4, 5, Y < 8\} = \mathbf{P}\{X = 3, Y = 3\} = 0,17.$$

Аналогично событие $\{X < 9, Y < 11\}$ совпадает с объединением непересекающихся событий $\{X = 3, Y = 3\}$, $\{X = 3, Y = 8\}$, $\{X = 5, Y = 3\}$ и $\{X = 5, Y = 8\}$, и, значит,

$$\begin{aligned} F(9, 11) = \mathbf{P}\{X < 9, Y < 11\} = \mathbf{P}\{X = 3, Y = 3\} + \mathbf{P}\{X = 3, Y = 8\} + \\ + \mathbf{P}\{X = 5, Y = 3\} + \mathbf{P}\{X = 5, Y = 8\} = 0,70. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\mathbf{P}\{4 \leq X < 9, 8 \leq Y < 11\} = \mathbf{P}\{X = 5, Y = 8\} = 0,30.$$

Пример 5.16. Совместная функция распределения *непрерывной двумерной случайной величины* (X, Y) имеет вид

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} \right) \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{b} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (a > 0, b > 0).$$

Найдем совместную плотность распределения.

Воспользовавшись равенством

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y},$$

получим

$$p(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{\pi^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} \right) \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{b} + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{ab}{\pi^2 (a^2 + x^2)(b^2 + y^2)}.$$

Пример 5.17. Совместная плотность распределения *непрерывной случайной величины* (X, Y) имеет вид

$$p(x, y) = \frac{C}{(x^2 + y^2 + \pi)^2}.$$

Найдем:

- а) постоянную C ;
- б) частные плотности распределения случайных величин X и Y .

а. Постоянную C находим согласно свойству 3 совместной плотности распределения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1.$$

Вычисления интеграла с помощью перехода к полярным координатам [VII] дают:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C dx dy}{(x^2 + y^2 + \pi)^2} &= C \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + \pi)^2} = \\ &= C \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \int_0^{+\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + \pi)^2} = \frac{C\pi}{\pi} = 1. \end{aligned}$$

Поэтому $C = 1$.

б. Частные плотности распределения случайных величин X и Y вычисляются в соответствии со свойством 7 совместной плотности распределения:

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2 + \pi)^2} = \frac{\pi}{2(x^2 + \pi)^{3/2}}, \\ p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + y^2 + \pi)^2} = \frac{\pi}{2(y^2 + \pi)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Пример 5.18. Совместная плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0; \\ 3^{-x-y} \ln^2 3, & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Найдем:

- а) совместную функцию распределения;
- б) частные плотности распределения случайных величин X и Y ;
- в) вероятность попадания случайного вектора (X, Y) в треугольник с вершинами в точках $A(2, 1)$, $B(2, 2)$ и $C(5, 1)$.
- а. Совместная функция распределения

$$F(x, y) = 0$$

при $x \leq 0$ или $y \leq 0$, а при $x > 0$ и $y > 0$, согласно определению 5.4,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^x \int_0^y 3^{-u-v} \ln^2 3 \, du \, dv = \int_0^x du \int_0^y 3^{-u-v} \ln^2 3 \, dv = \\ &= \left(\int_0^x 3^{-u} \ln 3 \, du \right) \left(\int_0^y 3^{-v} \ln 3 \, dv \right) = (1 - 3^{-x})(1 - 3^{-y}). \end{aligned}$$

б. Частная плотность распределения случайной величины X равна 0 при $x \leq 0$, а при $x > 0$ имеет вид

$$p_X(x) = \int_0^{+\infty} 3^{-x-y} \ln^2 3 \, dy = 3^{-x} \ln 3.$$

Аналогично частная функция распределения случайной величины Y равна 0 при $y \leq 0$, а при $y > 0$ определяется выражением

$$p_Y(y) = \int_0^{+\infty} 3^{-x-y} \ln^2 3 \, dx = 3^{-y} \ln 3.$$

в. В соответствии со свойством 6 (см. теорему 5.2) совместной плотности распределения вероятность попадания случайного вектора (X, Y) в треугольник с вершинами в точках $A(2; 1)$,

$B(2;2)$ и $C(5;1)$ находим по свойству 6 теоремы 5.2:

$$\mathbf{P}\{(X;Y) \in D\} = \iint_D p(x,y) dx dy,$$

где область D представляет собой рассматриваемый треугольник (рис. 5.6).

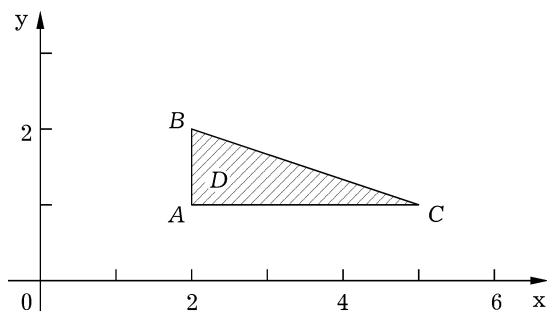


Рис. 5.6

Проводя интегрирование, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{(X;Y) \in D\} &= \int_2^5 3^{-x} \ln 3 dx \int_1^{(8-x)/3} 3^{-y} \ln 3 dy = \\ &= \int_2^5 3^{-x} \ln 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{27} 3^{x/3} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{3} 3^{-x} \Big|_2^5 + \frac{\sqrt[3]{3}}{18} 3^{-2x/3} \Big|_2^5 = \frac{14}{27^2} \approx 0,019. \end{aligned}$$

Пример 5.19. Проверим, являются ли случайные величины X и Y из примера 5.13 независимыми.

Из результатов примера 5.13 следует, что совместная функция распределения $F(x,y)$ случайного вектора (X, Y) совпадает при всех x и y с произведением частных функций распределения

$F_X(x)$ и $F_Y(y)$ случайных величин X и Y . Поэтому случайные величины X и Y являются независимыми согласно определению 5.5.

Пример 5.20. Распределение вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) задано табл. 5.7. Проверим, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Таблица 5.7

X	Y		
	2	4	6
-1	0,08	0,12	0,20
1	0,12	0,18	0,30

Ряды распределения случайных величин X и Y представлены в табл. 5.8 и 5.9.

Таблица 5.8

X	-1	1
P	0,4	0,6

Таблица 5.9

Y	2	4	6
P	0,2	0,3	0,5

Из табл. 5.7–5.9 следует, что вероятность события $\{X = -1, Y = 2\}$ совпадает с произведением вероятностей событий $\{X = -1\}$ и $\{Y = 2\}$. Это же свойство верно и для всех остальных возможных пар значений случайных величин X и Y . Поэтому случайные величины X и Y являются независимыми согласно теореме 5.4.

Пример 5.21. Проверим, являются ли случайные величины X и Y из примера 5.15 независимыми.

Поскольку вероятность события $\{X = 3, Y = 3\}$ не равна произведению вероятностей событий $\{X = 3\}$ и $\{Y = 3\}$, то, согласно теореме 5.3, случайные величины X и Y являются зависимыми.

Пример 5.22. Проверим, являются ли случайные величины X и Y из примера 5.17 независимыми.

Из результатов примера 5.17 видно, что совместная плотность распределения $p(x, y)$ случайного вектора (X, Y) не равна тождественно произведению частных плотностей распределения $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ случайных величин X и Y . Поэтому, согласно теореме 5.3, случайные величины X и Y являются зависимыми.

Пример 5.23. Проверим, являются ли случайные величины X и Y из примера 5.18 независимыми.

В данном случае совместная плотность распределения $p(x, y)$ случайного вектора (X, Y) тождественно равна произведению частных плотностей распределения $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ случайных величин X и Y . Значит, согласно теореме 5.4, случайные величины X и Y являются независимыми.

Пример 5.24. Известно, что рост X_1 и вес X_2 взрослого мужчины (и женщины), проживающего в одном регионе, достаточно хорошо описывается *двумерным нормальным законом распределения*. В частности, рост (в сантиметрах) и вес (в килограммах) мужчин некоторой страны Нормалии подчинены нормальному закону с *вектором средних значений* $\vec{m} = (172, 74)$ и *матрицей ковариаций* $\Sigma = \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 28 & 40 \end{pmatrix}$.

Найдем вероятности следующих событий:

а) рост случайно встретившегося нормальца больше среднего;

б) его вес меньше среднего;

в) его рост больше среднего, а вес меньше среднего.

а. Одномерное распределение случайной величины X_1 является нормальным со *средним значением* $m_1 = 172$ и *дисперсией* $\sigma_1^2 = 45$. Поэтому вероятность того, что рост случайно встретившегося нормальца будет больше среднего, равна:

$$\mathbf{P}\{X_1 > 172\} = 1 - \Phi_{172, \sqrt{45}}(172) = 1 - \Phi_0(0) = 0,5.$$

б. Действуя, как и в предыдущем пункте, приходим к следующему результату: вероятность того, что вес случайно встретившегося нормальца будет меньше среднего, также равна 0,5.

в. Для того чтобы найти вероятность $\mathbf{P}\{X_1 > 172, X_2 < 74\}$ того, что рост случайно встретившегося нормальца будет больше среднего, а его вес меньше среднего, выпишем совместную плотность распределения случайных величин X и Y . Вычислив коэффициент корреляции

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2}} = \frac{28}{\sqrt{45 \cdot 40}} \approx 0,66,$$

имеем

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{45 \cdot 40 \cdot (1 - 0,66^2)}} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1 - 172, x_2 - 74)},$$

где

$$\begin{aligned} Q(x_1 - 172, x_2 - 74) &= \\ &= \frac{1}{1 - 0,66^2} \left[\frac{(x_1 - 172)^2}{45} + \frac{2 \cdot 0,66(x_1 - 172)(x_2 - 74)}{\sqrt{45 \cdot 40}} + \frac{(x_2 - 74)^2}{40} \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_1 > 172, X_2 < 74\} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{45 \cdot 40 \cdot (1 - 0,66^2)}} \times \\ &\times \int\limits_{\substack{x_1 > 172 \\ x_2 < 74}} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1 - 172, x_2 - 74)} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Проводя замену

$$x_1 - 172 = \sqrt{45}\sqrt{1 - 0,66^2}r \cos \varphi,$$

$$x_2 - 74 = \sqrt{40}\sqrt{1 - 0,66^2}r \sin \varphi,$$

вычисляя якобиан [VII]

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{array} \right| = \sqrt{45 \cdot 40} \cdot (1 - 0,66^2)r$$

и учитывая, что область интегрирования $\{x_1 > 172, x_2 < 74\}$ при этом переходит в область $\{r > 0, 3\pi/2 < \varphi < 2\pi\}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{x_1 > 172, x_2 < 74\} &= \frac{\sqrt{1-0,66^2}}{2\pi} \times \\ &\times \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} r \exp\left\{-\frac{1}{2}(r^2 \cos^2 \varphi - 2 \cdot 0,66 r^2 \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)\right\} dr = \\ &= \frac{\sqrt{1-0,66^2}}{2\pi} \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2 \cdot 0,66 \cos \varphi \sin \varphi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{0,66}{\sqrt{1-0,66^2}} \right) \approx 0,11. \end{aligned}$$

Таким образом, искомая вероятность равна примерно 0,11. Отметим, что если бы рост и вес были независимыми величинами, то эта вероятность равнялась бы $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$, т.е. была бы в два с лишним раза больше.

Пример 5.25. Трехмерный случайный вектор $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ распределен по нормальному закону с вектором средних значений $\vec{m} = (2,5, 1, 2)$ и матрицей ковариаций

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0,5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0,5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем:

а) совместную плотность распределения случайного вектора \vec{X} ;

б) одномерные плотности распределения случайных величин X_1, X_2 и X_3 .

а. Вычислим определитель матрицы Σ и матрицу $\tilde{\Sigma}$, обратную к матрице Σ [II]:

$$\det \Sigma = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0,5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0,5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 13,25,$$

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma^{-1} = \frac{1}{13,25} \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0,5 \\ -3 & 7,75 & -3,5 \\ 0,5 & -3,5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{m}) \tilde{\Sigma} (\vec{x} - \vec{m})^T &= (x_1 - 2,5 \quad x_2 - 1 \quad x_3 - 2) \times \\ &\times \frac{1}{13,25} \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0,5 \\ -3 & 7,75 & -3,5 \\ 0,5 & -3,5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 2,5 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{13,25} \left[8(x_1 - 2,5)^2 - 6(x_1 - 2,5)(x_2 - 1) + 7,75(x_2 - 1)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (x_1 - 2,5)(x_3 - 2) - 7(x_2 - 1)(x_3 - 2) + 5(x_3 - 2)^2 \right], \end{aligned}$$

и совместная плотность распределения случайного вектора \vec{X} , согласно (5.5), имеет вид

$$\begin{aligned} p_{\vec{X}}(\vec{x}) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3 \sqrt{13,25}} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{26,5} \left(8(x_1 - 2,5)^2 - 6(x_1 - 2,5)(x_2 - 1) + 7,75(x_2 - 1)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (x_1 - 2,5)(x_3 - 2) - 7(x_2 - 1)(x_3 - 2) + 5(x_3 - 2)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

б. Случайные величины X_1 , X_2 и X_3 распределены по нормальному закону с параметрами $m_1 = 2,5$ и $\sigma_1 = \sqrt{2}$, $m_2 = 1$

и $\sigma_2 = \sqrt{3}$, $m_3 = 2$ и $\sigma_3 = \sqrt{2}$. Поэтому

$$P_{X_1}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(x-2,5)^2/4}, \quad P_{X_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-(x-1)^2/6},$$

$$P_{X_3}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(x-2)^2/8}.$$

Пример 5.26. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) , представляющая собой координаты падения случайной точки на плоскость, распределена по нормальному закону с вектором средних значений $\vec{m}_{\vec{X}} = (1, 2)$ и матрицей ковариаций $\Sigma_{\vec{X}} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Найдем:

- а) *оси рассеивания* двумерной случайной величины (X_1, X_2) ;
- б) вероятность попадания случайной величины X_1 в интервал $(1/3, 1)$;
- в) вероятность попадания двумерной случайной величины (X_1, X_2) в область D , ограниченную эллипсом [III],

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 18x_1 - 36x_2 + 41 = 0.$$

а. Направление осей рассеивания совпадает с направлением собственных векторов матрицы [IV]

$$\tilde{\Sigma}_{\vec{X}} = \Sigma_{\vec{X}}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $\tilde{\Sigma}_{\vec{X}}$ определим из уравнения

$$\det(\tilde{\Sigma}_{\vec{X}} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 8 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

Они равны $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$. Решая систему

$$\vec{e}_i' \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \lambda_i \vec{e}_i', \quad i = 1, 2,$$

находим нормированные собственные векторы

$$\vec{e}_1' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}} \right), \quad \vec{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Поскольку оси рассеивания проходят через точку $O'(1;2)$, то уравнения осей рассеивания имеют вид

$$\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2 - 2}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 - 2}{2}.$$

В частности, в системе координат $x_1' O' x_2'$ с центром в точке O' и базисными векторами [IV] \vec{e}_1' и \vec{e}_2' координаты $(X_1'; X_2')$ случайной точки имеют нормальное распределение с вектором средних $\vec{m}_{\vec{X}'} = (0; 0)$ и матрицей ковариаций

$$\Sigma_{\vec{X}'} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

Наконец, если ввести систему координат $y_1 O' y_2$ с центром в той же точке O' и базисными векторами

$$\vec{e}_1'' = \frac{\vec{e}_1'}{\sqrt{\lambda_1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{20}} \right), \quad \vec{e}_2'' = \frac{\vec{e}_2'}{\sqrt{\lambda_2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{45}}; \frac{2}{\sqrt{45}} \right),$$

то в этой последней системе координаты (Y_1, Y_2) случайной точки будут иметь *стандартное нормальное распределение*.

б. Случайная величина X_1 имеет нормальное распределение со средним значением $m_{X_1} = 1$ и *средним квадратичным отклонением* $\sigma_{X_1} = \sqrt{2}/3$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{1}{3} < X_1 < 1\right\} &= \Phi_{1, \frac{\sqrt{2}}{3}}(1) - \Phi_{1, \frac{\sqrt{2}}{3}}\left(\frac{1}{3}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{1-1}{\sqrt{2}/3}\right) - \Phi\left(\frac{1/3-1}{\sqrt{2}/3}\right) = \Phi(0) - \Phi(-\sqrt{2}) \approx 0,42. \end{aligned}$$

в. Матрица квадратичной формы $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2$, которая представляет собой многочлен второй степени, определяющий

рассматриваемый эллипс, совпадает с матрицей $\tilde{\Sigma}_{\tilde{X}}$. Поэтому оси симметрии эллипса параллельны осям рассеивания случайной величины (X_1, X_2) . Более того, проводя вычисления, получаем, что центр эллипса совпадает с *центром рассеивания* O' . Значит, в системе координат, образованной осями рассеивания, т.е. в системе координат с центром в точке O' и базисными векторами \vec{e}_1' и \vec{e}_2' , эллипс имеет каноническое уравнение. Поскольку матрица квадратичной формы в уравнении рассматриваемого эллипса совпадает с матрицей $\tilde{\Sigma}_{\tilde{X}}$, видим, что этот эллипс является одновременно *эллипсом рассеивания*, и в системе координат $y_1 O y_2$ он превращается в окружность $y_1^2 + y_2^2 = 4$. Поэтому вероятность попадания двумерной случайной величины (X_1, X_2) в область D равна вероятности попадания двумерной случайной величины (Y_1, Y_2) , распределенной по стандартному нормальному закону, в круг радиуса 2 и определяется формулой

$$\mathbf{P}\{(X_1, X_2) \in D\} = \mathbf{P}\{Y_1^2 + Y_2^2 < 4\} = \int\int_{y_1^2 + y_2^2 < 4} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}} dy_1 dy_2.$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$\mathbf{P}\{(X_1, X_2) \in D\} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho d\rho = 1 - e^{-2} \approx 0,14.$$

Таким образом, искомая вероятность приближенно равна 0,14.

Вопросы и задачи

5.1. Что называют n -мерной случайной величиной (n -мерным случайным вектором)?

5.2. Дайте определение совместной функции распределения (вероятностей) n -мерной случайной величины (n -мерного случайного вектора).

5.3. Какими свойствами обладает функция распределения n -мерного случайного вектора?

5.4. Как найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в прямоугольник $(a_1 \leq x < a_2, b_1 \leq y < b_2)$ с помощью совместной функции распределения $F_{XY}(x, y)$?

5.5. Какую двумерную случайную величину называют дискретной?

5.6. Каким образом можно задать распределение двумерной случайной величины?

5.7. Какую двумерную случайную величину называют непрерывной?

5.8. Дайте определение совместной (n -мерной) плотности распределения (вероятностей).

5.9. Какими свойствами обладает двумерная плотность распределения?

5.10. Как найти одномерные плотности распределения по двумерной плотности распределения?

5.11. Как найти вероятность попадания в некоторую область с помощью плотности распределения?

5.12. Как найти совместную плотность распределения, если известна совместная функция распределения непрерывной случайной величины?

5.13. Как найти совместную функцию распределения n -мерной непрерывной случайной величины, если известна ее совместная плотность распределения?

5.14. Какие случайные величины называют независимыми?

5.15. Могут ли случайные величины быть независимыми попарно, но зависимыми в совокупности?

5.16. Как проверить независимость двух дискретных случайных величин?

5.17. Как проверить независимость двух непрерывных случайных величин?

5.18. Запишите выражение совместной плотности распределения для двух нормально распределенных независимых случайных величин.

5.19. Запишите выражение совместной плотности распределения двумерного нормального закона (в общем случае).

5.20. Что называют вектором средних и матрицей ковариаций двумерного случайного вектора, имеющего нормальное распределение? Чему равен коэффициент корреляции координат двумерного случайного вектора, имеющего нормальный закон распределения?

5.21. Запишите выражение плотности n -мерного нормального распределения.

5.22. Что называют вектором средних значений и матрицей ковариаций многомерного нормального распределения? Чему равен коэффициент корреляции координат n -мерного случайного вектора, имеющего многомерное нормальное распределение?

5.23. Какой нормальный закон называют стандартным?

5.24. Что называют эллипсом рассеивания двумерного нормального закона? Как определить угол поворота осей симметрии эллипса рассеивания двумерного закона относительно осей координат?

5.25. Что называют эллипсоидом рассеивания многомерного нормального закона? Как можно получить n -мерный случайный вектор, распределенный по произвольному нормальному закону, с помощью n -мерного случайного вектора, распределенного по стандартному нормальному закону?

5.26. Какие свойства многомерного нормального распределения Вы знаете?

5.27. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет совместную функцию распределения

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} (4 \arctg x \arctg y + 2\pi \arctg x + 2\pi \arctg y + \pi^2).$$

Вычислите: а) вероятности событий $\{-1 \leq X < 1, 1 \leq Y < \sqrt{3}\}$ и $\{X \geq 1, Y \geq \sqrt{3}\}$;

б) частные функции распределения случайных величин X и Y ;

в) проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

О т в е т:

а) $\mathbf{P}\{-1 \leq X < 1, 1 \leq Y < \sqrt{3}\} = 1/24$, $\mathbf{P}\{X \geq 1, Y \geq \sqrt{3}\} = 1/24$;

б) $F_X(x) = \frac{1}{2\pi}(2 \arctg x + \pi)$, $F_Y(y) = \frac{1}{2\pi}(2 \arctg y + \pi)$;

в) да, являются.

5.28. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет совместную функцию распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0; \\ \frac{\sin x + \sin y - \sin(x+y)}{2}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < y \leq \frac{\pi}{2}; \\ \frac{\sin x - \cos x + 1}{2}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ и } y > \pi/2; \\ \frac{\sin y - \cos y + 1}{2}, & x > \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \text{ и } y > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите:

а) вероятности событий $\{\pi/12 \leq X < \pi/4, \pi/12 \leq Y < \pi/4\}$, $\{X \geq \pi/4, Y \geq \pi/4\}$ и $\{X < \pi/3, Y \geq \pi/6\}$;

б) частные функции распределения случайных величин X и Y ;

в) проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

О т в е т: а) $\mathbf{P}\{\pi/12 \leq X < \pi/4, \pi/12 \leq Y < \pi/4\} = (2\sqrt{3} - 3)/4$,
 $\mathbf{P}\{X \geq \pi/4, Y \geq \pi/4\} = (\sqrt{2} - 1)/2$, $\mathbf{P}\{X < \pi/3, Y \geq \pi/6\} = 1/2$;

$$\text{б) } F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{\sin x - \cos x + 1}{2}, & 0 < x \leq \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2; \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{\sin y - \cos y + 1}{2}, & 0 < y \leq \pi/2; \\ 1, & y > \pi/2; \end{cases}$$

в) нет, не являются.

5.29. Распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задано табл. 5.10. Найдите:

а) ряды распределения случайных величин X и Y ;

б) значения совместной функции распределения $F(x, y)$ случайных величин X и Y в точках $(2,5; 25)$ и $(9; 11)$, а также вероятность события $\{2 \leq X < 9, 10 \leq Y \leq 30\}$;

в) проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Таблица 5.10

X	Y			
	10	20	30	40
0,5	0,05	0,12	0,08	0,04
2,5	0,09	0,30	0,11	0,21

О т в е т:

а) ряды распределения случайных величин X и Y приведены в табл. 5.11 и 5.12;

б) $F(2,5, 25) = 0,17$, $F(9, 11) = 0,14$,

$\mathbf{P}\{2 \leq X < 9, 10 \leq Y < 30\} = 0,50$;

в) нет, не являются.

Таблица 5.11

X	0,5	2,5
P	0,29	0,71

Таблица 5.12

Y	10	20	30	40
P	0,14	0,42	0,19	0,25

5.30. Найдите совместную плотность распределения для непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) из задачи 5.28.

О т в е т:

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ или } y \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right]; \\ \frac{\sin(x+y)}{2}, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

5.31. Совместная плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & (x-3)^2 + (y-2)^2 > 4; \\ C(2 - \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}), & (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 4. \end{cases}$$

Найдите:

- а) постоянную C ;
- б) частные плотности распределения случайных величин X и Y ;
- в) вероятность попадания случайного вектора (X, Y) в круг $(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1$;
- г) проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

О т в е т:

- а) $C = 3/(8\pi)$;

$$\text{б) } p_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [1, 5]; \\ \frac{3}{8\pi} \left(2\sqrt{4 - (x-3)^2} - \right. \\ \left. - (x-3)^2 \ln \frac{2 + \sqrt{4 - (x-3)^2}}{|x-3|} \right), & x \in [1, 5]; \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0, 4]; \\ \frac{3}{8\pi} \left(2\sqrt{4 - (y-2)^2} - \right. \\ \left. - (y-2)^2 \ln \frac{2 + \sqrt{4 - (y-2)^2}}{|y-2|} \right), & y \in [0, 4]; \end{cases}$$

в) $\mathbf{P} = 1/2$; г) нет, не являются.

5.32. Совместная плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0; \\ Ce^{-4x-2y}, & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Найдите:

- а) постоянную C ;
- б) совместную функцию распределения;
- в) частные плотности распределения случайных величин X и Y ;
- г) вероятность попадания случайного вектора (X, Y) в область, ограниченную прямыми $y = x$, $x + y = 2$ и $x = 0$;
- д) проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

О т в е т:

а) $C = 8$;

$$\text{б) } F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0; \\ (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}), & x > 0 \text{ и } y > 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } p_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 4e^{-4x}, & x > 0; \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ 2e^{-2y}, & y > 0; \end{cases}$$

г) $\mathbf{P} = 2(1 - 3e^{-4} + 2e^{-6})/3$; д) да, являются.

5.33. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в квадрате с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$. Найдите:

- а) совместную плотность распределения;

- б) совместную функцию распределения;
 в) частные плотности распределения случайных величин X и Y ;
 г) вероятность попадания случайного вектора (X, Y) в круг $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1/2$;
 д) проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

О т в е т:

$$\text{а) } p(x, y) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 1] \text{ или } y \notin [0, 1]; \\ 1, & x \in [0, 1] \text{ и } y \in [0, 1]; \end{cases}$$

$$\text{б) } F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0; \\ xy, & 0 < x \leq 1 \text{ и } 0 < y \leq 1; \\ x, & 0 < x \leq 1 \text{ и } y > 1; \\ y, & x > 1 \text{ и } 0 < y \leq 1; \\ 1, & x > 1 \text{ и } y > 1; \end{cases}$$

$$\text{в) } p_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 1]; \\ 1, & x \in [0, 1]; \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0, 1]; \\ 1, & y \in [0, 1]; \end{cases}$$

г) $P = \pi/8$; д) да, являются.

5.34. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) имеет совместную плотность распределения

$$p(x, y) = \frac{C}{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}.$$

Найдите:

- а) постоянную C ;
 б) совместную функцию распределения;
 в) частные плотности распределения случайных величин X и Y ;
 г) вероятность попадания случайного вектора (X, Y) в треугольник с вершинами в точках $(-1; 1)$, $(1; 1)$ и $(0; 0)$;
 д) проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

О т в е т:

а) $C = 1/\pi$; б) $F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\right)$;

в) $p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $p_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$;

г) $\mathbf{P} = \frac{1}{16}$; д) да, являются.

5.35. Распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задано в табл. 5.13. Проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Таблица 5.13

X	Y			
	-3	-1	1	3
-1	0,06	0,02	0,04	0,08
0	0,15	0,005	0,10	0,20
1	0,09	0,03	0,06	0,12

О т в е т: да, являются.

5.36. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) распределена по нормальному закону с вектором средних $\vec{m} = (2, 0)$ и матрицей ковариаций $\Sigma = \frac{1}{576} \begin{pmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 25 \end{pmatrix}$. Найдите:

а) оси рассеивания двумерной случайной величины (X_1, X_2) ;

б) вероятности события $\{X_1 > 2,28\}$ и $\{-0,2 < X_2 < 0,2\}$;

в) вероятность попадания двумерной случайной величины (X_1, X_2) внутрь эллипса $25x_1^2 - 14x_1x_2 + 25x_2^2 - 100x_1 + 28x_2 + 98 = 0$.

О т в е т: а) $x_1 - x_2 = 2$ и $x_1 + x_2 = 2$;

б) $\mathbf{P}\{X_1 > 2,28\} \approx 0,159$, $\mathbf{P}\{-0,2 < X_2 < 0,2\} \approx 0,711$;

в) $\mathbf{P} = 1 - e^{-1} \approx 0,63$.

5.37. Трехмерный случайный вектор $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ распределен по нормальному закону с вектором средних значений

$\vec{m} = (-2, 0, 1)$ и матрицей ковариаций

$$\Sigma = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 13 & 5 & 2 \\ 5 & 35/2 & 7 \\ 2 & 7 & 19 \end{pmatrix}.$$

Найдите: а) плотность распределения случайного вектора \vec{X} ;
б) одномерные плотности распределения случайных величин X_1 , X_2 и X_3 .

О т в е т:

$$\begin{aligned} \text{а) } p_{\vec{X}}(\vec{x}) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3 9\sqrt{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{324} \left[7(x_1 + 2)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4(x_1 + 2)x_2 + 6x_2^2 - 4x_2(x_3 - 1) + 5(x_3 - 1)^2 \right] \right\}. \\ \text{б) } p_{X_1}(x) &= \frac{9}{\sqrt{2\pi}\sqrt{13}} e^{-\frac{81(x+2)^2}{26}}, \quad p_{X_2}(x) = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{35}} e^{-\frac{81x^2}{35}}, \\ p_{X_3}(x) &= \frac{9}{\sqrt{2\pi}\sqrt{19}} e^{-\frac{81(x-1)^2}{38}}. \end{aligned}$$

5.38. Независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют нормальное распределение с математическими ожиданиями $m_{X_1} = 3$ и $m_{X_2} = 2$ и средними квадратичными отклонениями $\sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} = 0,5$. Найдите радиус R круга с центром в точке $(3; 2)$, вероятность попадания в который равна 0,997.

О т в е т: $R \approx 0,45$.

6. ФУНКЦИИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

На практике очень часто встречается случай, когда рассматриваемая числовая величина Y является функцией от одной X или нескольких X_1, \dots, X_n числовых величин, т.е., как говорят, связана с этой или этими величинами функциональной зависимостью $Y = Y(X)$ или $Y = Y(X_1, \dots, X_n)$. Очевидно, что если величина X или величины X_1, \dots, X_n , через которые выражается Y , являются *случайными*, то и Y также будет случайной величиной. Таким образом, мы приходим к понятию *функции от случайной величины X или от случайного вектора (X_1, \dots, X_n)* , которое будет рассмотрено в настоящей главе.

6.1. Примеры функциональной зависимости между случайными величинами

Прежде чем переходить к строгому математическому определению *функции от случайной величины* и выводу формул, связывающих законы *распределения* аргумента и самой функции, остановимся несколько подробнее на описании функциональной связи между случайными величинами и приведем поясняющие примеры.

В предыдущей главе были рассмотрены *многомерные случайные величины*, или *случайные векторы*. Было показано, что полное вероятностное описание многомерного, в частности двумерного, случайного вектора состоит в задании *совместной функции распределения*. Если же нам известно, какое значение приняла одна из координат двумерного случайного вектора, то вероятностные свойства второй координаты определяются

условным законом распределения, который будет рассмотрен ниже в 8.1.

Однако условная функция распределения отражает только вероятностную, или стохастическую, связь между случайными величинами, а предсказать точное значение одной случайной величины по значению другой, вообще говоря, невозможно. Более того, как мы теперь знаем, для весьма часто встречающихся в реальной жизни *независимых случайных величин* по значению одной случайной величины нельзя судить о значении другой, и в этом плане независимость нужно признать крайним случаем стохастической связи.

Еще один крайний случай стохастической связи между случайными величинами, также постоянно используемый на практике, заключается в том, что по значению одной случайной величины можно однозначно определить значение другой; его называют функциональной зависимостью между случайными величинами. При этом говорят также, что вторая случайная величина является функцией от первой случайной величины. Аналогично вводят скалярную и векторную функции от случайного вектора.

Рассмотрим примеры.

Пример 6.1. Для измерения недоступного предмета, например высоты H трубы, с помощью угломера используют функциональную зависимость (рис. 6.1) $H = a \operatorname{tg} \alpha$, где a — размер „базы“; α — угол, под которым видна труба. Однако если размер a можно измерить практически точно, то вследствие погрешностей измерений, присущих угломеру, α необходимо считать случайной величиной. Таким образом, приведенная выше формула задает функциональную

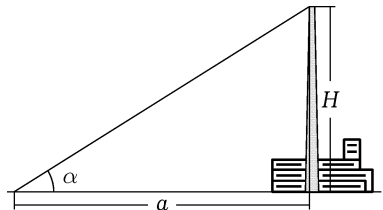


Рис. 6.1

связь между измеренным значением угла α и полученной по этой формуле высотой H трубы.

Пример 6.2. Пусть X и Y — измеренные (с погрешностями) длины катетов прямоугольного треугольника. Тогда функциями от двух случайных аргументов X и Y будут:

$L = \sqrt{X^2 + Y^2}$ — найденная по теореме Пифагора длина гипотенузы;

$S = XY/2$ — вычисленная площадь этого треугольника.

Пример 6.3. Предположим, что на плоскость в соответствии с некоторым вероятностным законом случайным образом бросают точку и измеряют ее полярные координаты ρ и φ . Тогда формулы $X = \rho \cos \varphi$ и $Y = \rho \sin \varphi$ перехода от полярных координат ρ и φ к декартовым X и Y [III] определяют векторную функцию от векторного аргумента.

6.2. Функции от одномерной случайной величины

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbf{P})$ задана случайная величина $X = X(\omega)$. Рассмотрим действительную функцию

$$y = Y(x)$$

действительного аргумента x (область определения которой включает в себя множество возможных значений случайной величины X).

Определение 6.1. Случайную величину Y , которая каждому элементарному исходу ω ставит в соответствие число

$$Y(X(\omega)),$$

называют *функцией $Y(X)$ (скалярной) от скалярной случайной величины X* .

Функция $Y = Y(X)$ от дискретной случайной величины также является дискретной случайной величиной, поскольку она

не может принимать больше значений, чем случайная величина X . Очевидно, что если случайная величина X имеет *ряд распределения*, представленный в табл. 6.1, то ряд распределения случайной величины $Y = Y(X)$ определяется табл. 6.2.

Таблица 6.1

X	x_1	x_2	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_n

Таблица 6.2

Y	$Y(x_1)$	$Y(x_2)$	\dots	$Y(x_n)$
P	p_1	p_2	\dots	p_n

При этом, если в верхней строке табл. 6.2 появляются одинаковые значения $Y(x_i)$, соответствующие столбцы нужно объединить в один, приписав им суммарную *вероятность*.

Пример 6.4. Рассмотрим игру „Спортлото 6 из 49“. Поставив на некоторые фиксированные номера, мы в результате розыгрыша получим случайную величину X — число угаданных номеров. Число угаданных номеров имеет *гипергеометрическое распределение* (см. 2.2, а также задачу 2.36), в котором $k = 2$, $n = 49$, $n_1 = 6$, $n_2 = 43$ и $m = 6$, а значит, вероятность угадать i , $i = \overline{0, 6}$, номеров определяется формулой

$$P(i, 6 - i) = P\{X = i\} = C_6^i C_{43}^{6-i} / C_{49}^6.$$

Проводя вычисления, получаем ряд распределения случайной величины X , представленный в табл. 6.3.

Таблица 6.3

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,4360	0,4130	0,1324	0,0176	0,00097	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-8}$

Однако случайная величина X нас не интересует, для нас важен выигрыш, связанный с числом угаданных номеров X . Рассмотрим идеализированный вариант игры, при котором, не угадав ни одного или угадав один или два номера, мы проигрываем (с учетом платы за билет) 0,3 р., угадав три

номера, получаем выигрыш 2,7 р., угадав четыре номера — 54,7 р., пять номеров — 699,7 р. и шесть номеров — 9999,7 р. Выигрыш Y зависит только лишь от числа угаданных номеров, т.е. представляет собой функцию от случайной величины X :

$$Y = Y(X).$$

При этом числовая функция $Y(x)$ определена формулами:

$$Y(0) = Y(1) = Y(2) = -0,3, \quad Y(3) = 2,7,$$

$$Y(4) = 54,7, \quad Y(5) = 699,7, \quad Y(6) = 9999,7.$$

Ряд распределения случайной величины Y получаем из ряда распределения X (см. табл. 6.3) заменой в верхней строке чисел $i = \overline{0, 6}$ на соответствующие значения $Y(i)$ (табл. 6.4).

Таблица 6.4

Y	-0,3	-0,3	-0,3	2,7	54,7	699,7	9999,7
P	0,4360	0,4130	0,1324	0,0176	0,00097	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-8}$

Осталось заметить, что в табл. 6.4 три первых столбца имеют одинаковые значения Y , равные -0,3. Объединяя их в один, окончательно получаем ряд распределения случайной величины Y , представленный в табл. 6.5.

Таблица 6.5

Y	-0,3	2,7	54,7	699,7	9999,7
P	0,9814	0,0176	0,00097	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-8}$

Реально при игре в „Спортлото“ выигрыш Y зависит от числа играющих, поставивших на ту или иную комбинацию, и в этом случае его нельзя считать функцией от числа угаданных номеров X , а необходимо рассматривать более сложную модель, учитывающую вероятности (частоты) использования различных комбинаций номеров. В частности, нельзя (без обращения к „потусторонним“ силам) изменить вероятность угадывания определенного числа номеров, но можно увеличить выигрыш,

ставя на „непопулярные“ комбинации, которые, хотя и появляются с той же частотой, что и остальные, но приносят больший выигрыш. Однако риск от „непопулярных“ комбинаций относится к сфере психологии, а не к теории вероятностей. #

Функция $Y = Y(X)$ от непрерывной случайной величины X может быть как непрерывной, так и дискретной (если, например, множество значений функции $Y(X)$ конечное или счетное).

Сформулируем правило определения функции распределения $F_Y(y)$ по заданной плотности распределения $p_X(x)$, пояснив идею вывода (при строгом выводе необходимо использовать понятие интеграла Лебега).

В силу определения $F_Y(y)$ представляет собой вероятность события $\{Y < y\}$, состоящую из тех элементарных исходов ω , для которых $Y(X(\omega)) < y$. Для этих же элементарных исходов ω случайная величина $X(\omega)$ будет принимать свои возможные значения на некоторой совокупности $\{\Delta_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, непересекающихся промежутков числовой прямой \mathbb{R} . Иными словами, событие $\{Y(X(\omega)) < y\}$ эквивалентно событию $\bigcup_k \{X(\omega) \in \Delta_k\}$, и, следовательно, по расширенной аксиоме сложения вероятностей

$$F_Y(y) = \mathbf{P}\{Y(X(\omega)) < y\} = \sum_k \mathbf{P}\{X(\omega_k) \in \Delta_k\}.$$

Зная плотность распределения $p_X(x)$ случайной величины X , имеем

$$\mathbf{P}\{X(\omega) \in \Delta_k\} = \int_{\Delta_k} p_X(x) dx,$$

а следовательно, учитывая свойство аддитивности определенного интеграла, получаем

$$F_Y(y) = \sum_k \int_{\Delta_k} p_X(x) dx = \int_{\Delta} p_X(x) dx, \quad \Delta = \bigcup_k \Delta_k,$$

где сумма может быть и бесконечной.

Поскольку совокупность промежутков $\{\Delta_k\}$ определена как множество тех значений случайной величины $X(\omega)$, для которых $Y(X(\omega)) < y$, то для множества $\Delta = \bigcup_k \Delta_k$, по которому ведется интегрирование, принято обозначение: $Y(x) < y$. Окончательно получаем

$$F_Y(y) = \int_{Y(x) < y} p_X(x) dx. \quad (6.1)$$

Последняя запись означает, что интегрирование проводится по всем тем значениям x , для которых $Y(x) < y$. Множество таких значений может представлять собой совокупность промежутков, и тогда нужно использовать свойство аддитивности интеграла, а пределы интегрирования по отдельным промежуткам определяются их границами.

Таким образом, формула (6.1) позволяет вычислять функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины $Y(X)$ через плотность $p_X(x)$ распределения случайной величины X . В случаях, когда функция $Y = Y(X)$ является монотонной или кусочно монотонной, формула (6.1) далее будет записана в более простом виде.

Пример 6.5. Случайная величина X имеет *стандартное нормальное распределение*. Найдём распределение случайной величины $Y = X^2$. В данном случае $Y(x) = x^2$, поэтому

$$F_Y(y) = \int_{x^2 < y} p_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^2 < y} e^{-x^2/2} dx.$$

Поскольку при $y \leq 0$ нет ни одного значения x , для которого $x^2 < y$, то не существует ни одного ω , для которого $Y(X(\omega)) = (X(\omega))^2 < y$, и

$$F_Y(y) = 0 \quad \text{при} \quad y \leq 0.$$

Если же $y > 0$, то область $\{x^2 < y\}$ совпадает с областью $\{-\sqrt{y} < x < \sqrt{y}\}$, и, значит,

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-x^2/2} dx,$$

или в силу четности $\varphi(x)$

$$F_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x^2/2} dx.$$

Делая в последнем интеграле замену $z = x^2$ при $y > 0$, получаем

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z/2} dz.$$

Следовательно (см. 4.1),

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y p_Y(y) dy,$$

где

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}, & y > 0. \end{cases}$$

Так как $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, где $\Gamma(x)$ — *гамма-функция Эйлера* [XI], то плотность распределения $p_Y(y)$ случайной величины Y совпадает с плотностью *гамма-распределения* с параметрами $\lambda = 1/2$ и $\gamma = 1/2$.

Замечание 6.1. Напомним (см. 4.6), что эту плотность распределения также называют плотностью χ^2 -распределения

с одной степенью свободы. Таким образом, χ^2 -распределение с одной степенью свободы является распределением квадрата случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение.

В общем случае в математической статистике используют χ^2 -распределение с n степенями свободы, которое, по определению, есть распределение суммы квадратов n независимых случайных величин, распределенных по стандартному нормальному закону. #

Если функция $Y(x)$ является монотонной или кусочно монотонной, что обычно бывает в прикладных задачах, то закон распределения случайной величины $Y = Y(x)$ в виде функции распределения или плотности распределения можно получить без интегрирования через функцию распределения или плотность распределения случайной величины X .

Действительно, предположим сначала, что функция $Y(x)$ является непрерывной возрастающей (рис. 6.2) или убывающей функцией. В этом случае существует обратная функция [1]

$$\psi(y) = Y^{-1}(y)$$

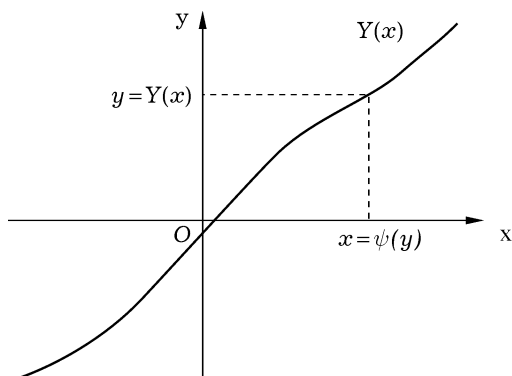


Рис. 6.2

и событие $\{Y(X(\omega)) < y\}$ эквивалентно событию $X(\omega) < \psi(y)$ (в случае возрастающей функции $Y(x)$) или событию $\{X(\omega) > \psi(y)\}$ (в случае убывающей $Y(x)$). Значит, для возрастающей функции $Y(x)$

$$\mathbf{P}\{Y(X) < y\} = \mathbf{P}\{X < \psi(y)\}, \quad (6.2)$$

для убывающей $Y(x)$

$$\mathbf{P}\{Y(X) < y\} = \mathbf{P}\{X > \psi(y)\}. \quad (6.3)$$

Поскольку, согласно определению (4.2) функции распределения,

$$F_Y(y) = \mathbf{P}\{Y < y\},$$

а $\mathbf{P}\{X < \psi(y)\} = F_X(\psi(y))$ и $\mathbf{P}\{X > \psi(y)\} = 1 - F_X(\psi(y))$, то окончательно получаем:

для возрастающей функции $Y(x)$

$$F_Y(y) = F_X(\psi(y)); \quad (6.4)$$

для убывающей функции $Y(x)$

$$F_Y(y) = 1 - F_X(\psi(y)). \quad (6.5)$$

Напомним, что $\psi(x) = Y^{-1}(y)$ — функция, обратная к $Y(x)$.

Пример 6.6. Пусть случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$, которая является возрастающей функцией. Рассмотрим случайную величину $Y = F(X)$. Она принимает значение только на промежутке $[0, 1]$. Обратная функция для функции F

$$\psi(y) = F^{-1}(y)$$

при $y \in [0, 1]$, очевидно, удовлетворяет тождеству

$$F(\psi(y)) = y,$$

и, следовательно, в соответствии с формулой (6.4) имеем для $y \in [0, 1]$:

$$F_Y(y) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

В случае $y < 0$ событие $\{Y < y\}$ является невозможным. Поэтому, если $y < 0$, то

$$F_Y(y) = \mathbf{P}\{Y < y\} = 0.$$

В случае $y > 1$ событие $\{Y < y\}$ является достоверным. Поэтому, если $y > 1$, то

$$F_Y(y) = \mathbf{P}\{Y < y\} = 1.$$

Итак,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ y, & 0 \leq y \leq 1; \\ 1, & y > 1, \end{cases}$$

и случайная величина Y имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Переходя к обратной функции, видим, что случайная величина

$$X = F^{-1}(Y) \tag{6.6}$$

имеет функцию распределения $F(x)$, если случайная величина Y имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Полученный результат широко применяют при моделировании случайных величин с заданной функцией распределения $F(x)$. Действительно, если нужно смоделировать такую случайную величину, то достаточно иметь датчик случайных чисел Y , распределенных равномерно на отрезке $[0, 1]$, и каждое такое число преобразовать по формуле (6.6).

Например, пусть нужно смоделировать реализацию случайной величины X с экспоненциальной функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, при известном параметре λ . Тогда, учитывая, что

$$F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x),$$

реализацию X можно получить по формуле

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y),$$

где Y — случайное число с равномерным в интервале $(0, 1)$ законом распределения. #

Используя формулы (6.4) и (6.5), легко найти связь между плотностью распределения $p_X(x)$ случайной величины X и плотностью распределения $p_Y(y)$ случайной величины $Y = Y(X)$ в том случае, когда функция $Y(x)$ не только монотонна, но и дифференцируема. Действительно, согласно правилу дифференцирования сложной функции [II], имеем:

в случае возрастающей функции $Y(x)$

$$p_Y(y) = F'_Y(y) = \left(F_X(x) \right)' \Big|_{x=\psi(y)} \psi'(y) = p_X(\psi(y)) \psi'(y);$$

в случае убывающей функции $Y(x)$

$$p_Y(y) = F'_Y(y) = - \left(F_X(x) \right)' \Big|_{x=\psi(y)} \psi'(y) = -p_X(\psi(y)) \psi'(y).$$

Оба эти случая можно записать в виде

$$p_Y(y) = p_X(\psi(y)) |\psi'(y)|. \quad (6.7)$$

Пример 6.7. Пусть случайная величина Y получена из случайной величины X линейным преобразованием

$$Y = aX + b \quad (a \neq 0),$$

где a и b — неслучайные числа. Поскольку линейная функция является монотонной, то, учитывая, что

$$Y^{-1}(y) = \frac{y-b}{a} \quad \text{и} \quad (Y^{-1}(y))' = \frac{1}{a},$$

согласно (6.7), имеем

$$p_Y(y) = \frac{1}{|a|} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right). \quad (6.8)$$

Применим полученный результат к случайной величине X , распределенной по нормальному закону распределения с параметрами m_X и σ_X . Тогда случайная величина $Y = aX + b$ в соответствии с формулой (6.8) имеет плотность распределения

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{1}{|a|} \varphi_{m_X, \sigma_X} \left(\frac{y-b}{a} \right) = \frac{1}{|a| \sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp \left\{ -\frac{\left(\frac{y-b}{a} - m_X \right)^2}{2\sigma_X^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(|a|\sigma_X)^2}} \exp \left\{ -\frac{(y - (am_X + b))^2}{2(|a|\sigma_X)^2} \right\} = \\ &= \varphi_{am_X + b, |a|\sigma_X}(y), \end{aligned}$$

т.е. также распределена по нормальному закону с параметрами $m_Y = am_X + b$ и $\sigma_Y = |a|\sigma_X$.

В частности, с помощью линейного преобразования

$$Y = \frac{X - m_X}{\sigma_X} = \frac{1}{\sigma_X} X - \frac{m_X}{\sigma_X} \quad \left(a = \frac{1}{\sigma_X}, \quad b = -\frac{m_X}{\sigma_X} \right)$$

из случайной величины X , распределенной по нормальному закону с параметрами m_X и σ_X , получаем случайную величину Y , имеющую стандартное нормальное распределение, так как $m_Y = am_X + b = 0$, $\sigma_Y = |a|\sigma_X = 1$. И наоборот, с помощью линейного преобразования

$$X = \sigma_X Y + m_X \quad (a = \sigma_X, \quad b = m_X)$$

из случайной величины Y , имеющей стандартное нормальное распределение, получаем случайную величину X , имеющую нормальное распределение с произвольными параметрами $\sigma_X \cdot 0 + m_X = m_X$ и $\sigma_X \cdot 1 = \sigma_X$. #

Пусть теперь $Y(x)$ является непрерывной кусочно монотонной функцией [I], имеющей n интервалов монотонности (рис. 6.3). Для любого y все решения уравнения

$$Y(x) = y$$

обозначим $x_1 = x_1(y)$, \dots , $x_k = x_k(y)$ (в силу кусочной монотонности $Y(x)$ таких решений не более n , причем каждое решение соответствует определенному интервалу монотонности). Пусть для определенности x_1 соответствует интервалу возрастания, а x_k — интервалу убывания функции $Y(x)$. Тогда событие $Y < y$ представляет собой (см. рис. 6.3) *объединение несовместных событий* $\{X \in (-\infty, x_1)\}$, $\{X \in (x_2, x_3)\}$, \dots , $\{X \in (x_k, +\infty)\}$, и, значит, согласно определению 4.2 функции распределения и аксиоме 3' сложения,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbf{P}\{Y < y\} = \mathbf{P}\{X < x_1\} + \\ &\quad + \mathbf{P}\{x_2 < X < x_3\} + \dots + \mathbf{P}\{X > x_k\} = \\ &= F_X(x_1) + F_X(x_3) - F_X(x_2) + \dots + 1 - F_X(x_k). \end{aligned} \quad (6.9)$$

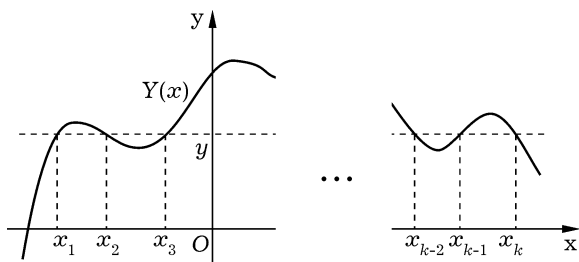


Рис. 6.3

Из формулы (6.9) можно получить выражение для плотности распределения случайной величины Y в том случае, когда $Y(x)$ является дифференцируемой функцией. Действительно, пусть I_1, \dots, I_k — интервалы монотонности Y , которым принадлежат x_1, \dots, x_k . Тогда в этих интервалах существуют обратные к $Y(x)$ дифференцируемые функции, которые обозначим $\psi_1(y), \dots, \psi_k(y)$ соответственно. Учитывая, что $x_1 = \psi_1(y), \dots, x_k = \psi_k(y)$, перепишем (6.9) в виде

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= F_X(\psi_1(y)) + F_X(\psi_3(y)) - \\ &\quad - F_X(\psi_2(y)) + \dots + 1 - F_X(\psi_k(y)). \end{aligned}$$

Дифференцируя обе части последнего равенства, получаем

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^k p_X(\psi_i(y)) |\psi'_i(y)|. \quad (6.10)$$

Пример 6.8. Снова обратимся к задаче, рассмотренной в примере 6.5, однако теперь для ее решения воспользуемся формулой (6.10).

Заметим, что функция $Y(x) = x^2$ принимает только неотрицательные значения и, следовательно, при $y < 0$ уравнение $Y(x) = y$ не имеет решений. Поэтому случайная величина

$$Y = Y(X) = X^2$$

не может принимать отрицательные значения и, следовательно функция распределения $F_Y(y) = 0$ при $y < 0$. Отсюда дифференцированием получаем

$$p_Y(y) = F'_Y(y) = 0, \quad y < 0.$$

Далее, при $y > 0$ уравнение $y = x^2$ имеет два решения:

$$x = \psi_1(y) = -\sqrt{y} \quad \text{и} \quad x = \psi_2(y) = \sqrt{y},$$

причем первое решение принадлежит интервалу $(-\infty, 0)$ убывания функции $Y(x) = x^2$, а второе — интервалу $(0, +\infty)$ возрастания этой функции. Подставляя $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ и плотность стандартного нормального распределения в формулу (6.10), получаем

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(-\sqrt{y})^2} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}, \quad y > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, пришли к тому же выражению для плотности распределения, что и в примере 6.5.

6.3. Скалярные функции от случайного векторного аргумента

Скалярную функцию от случайного векторного аргумента определяют так же, как и функцию от *одномерной случайной величины*. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением функции от двух случайных аргументов, хотя приведенные ниже выводы можно полностью перенести на случай любого числа аргументов.

Рассмотрим на *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbf{P})$ двумерный *случайный вектор* $\vec{X} = (X_1, X_2)$ и числовую функцию $Y(x_1, x_2)$ числовых аргументов x_1 и x_2 .

Определение 6.2. Случайную величину

$$Y = Y(X_1, X_2) = Y(X_1(\omega), X_2(\omega))$$

называют **функцией** (скалярной) *от двумерной случайной величины* (двумерного случайного вектора) (X_1, X_2) .

Ясно, что функция $Y(X_1, X_2)$ от двумерной *дискретной случайной величины* (X_1, X_2) является дискретной случайной величиной, принимающей значения $Y(x_{1i}, x_{2j})$ с *вероятностью*

$$p_{ij} = \mathbf{P}\{X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2j}\},$$

где x_{1i} и x_{2j} — значения случайных величин X_1 и X_2 соответственно.

Чтобы построить *ряд распределения дискретной случайной величины* $Y = Y(X_1, X_2)$, необходимо, во-первых, не учитывать все те значения $Y(x_{1i}, x_{2j})$, вероятность принять которые случайной величине Y равна нулю, а во-вторых, объединить в один столбец все одинаковые значения $Y(x_{1i}, x_{2j})$ случайной величины Y , приписав этому столбцу суммарную вероятность.

Пример 6.9. Пусть Y — случайная величина, равная суммарному числу успехов в двух испытаниях *по схеме Бернулли*,

а X_i — число успехов в i -м испытании, $i = 1, 2$. Тогда

$$Y = X_1 + X_2 \quad \text{и} \quad Y(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Поскольку X_i могут принимать только значения 0 или 1, то случайная величина Y может принимать четыре значения:

$$\begin{aligned} Y(0, 0) &= 0 + 0 = 0, & Y(1, 0) &= 1 + 0 = 1, \\ Y(0, 1) &= 0 + 1 = 1, & Y(1, 1) &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

с вероятностями q^2 , pq , qp и p^2 соответственно, где p — вероятность успеха в одном испытании, $q = 1 - p$ (табл. 6.6, см. также пример 5.4 и табл. 5.2).

Таблица 6.6

Y	$Y(0, 0) = 0$	$Y(1, 0) = 1$	$Y(0, 1) = 1$	$Y(1, 1) = 2$
P_Y	q^2	pq	qp	p^2

Заметим, что двум средним столбцам соответствует одно и то же значение 1 случайной величины Y , и их необходимо объединить. Окончательно получаем ряд распределения случайной

Таблица 6.7 величины Y , представленный в табл. 6.7.

Y	0	1	2
P_Y	q^2	$2pq$	p^2

Как и следовало ожидать, суммарное число успехов Y в двух испытаниях имеет биномиальное распределение. #

В том случае, когда (X_1, X_2) — двумерная непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$, функцию распределения случайной величины $Y = Y(X_1, X_2)$ можно найти по формуле, аналогичной (6.1):

$$F_Y(y) = \iint_{Y(x_1, x_2) < y} p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (6.11)$$

где область интегрирования состоит из всех значений x_1 и x_2 , для которых $Y(x_1, x_2) < y$.

Поясним геометрически вывод формулы (6.11). Пусть поверхность, определенная функцией $y = Y(x_1, x_2)$, имеет вид „чаши“ (рис. 6.4) и y — произвольное значение случайной величины $Y = Y(X_1, X_2)$. Проведем плоскость π , проходящую через точку $(0; 0; y)$ и ортогональную оси Oy . Обозначим через L линию пересечения плоскости π и поверхности $y = Y(x_1, x_2)$; L' — ее проекцию на плоскость x_1Ox_2 ; $D(y)$ — ту часть плоскости x_1Ox_2 , попадание в которую случайного вектора (X_1, X_2) ведет к реализации события $\{Y < y\}$. Поскольку $Y = Y(X_1, X_2)$, то

$$D(y) = \{(x_1, x_2): Y(x_1, x_2) < y\} = \{Y(x_1, x_2) < y\}.$$

События $\{Y < y\}$ и $\{(X_1, X_2) \in D(y)\}$ совпадают, и в соответствии со свойством 6 *двумерной плотности распределения*

$$\mathbf{P}\{Y < y\} = \mathbf{P}\{(X_1, X_2) \in D(y)\} = \iint_{Y(x_1, x_2) < y} p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Учитывая равенство $\mathbf{P}\{Y < y\} = F_Y(y)$, приходим к формуле (6.11).

Пример 6.10. Пусть (X_1, X_2) — двумерный случайный вектор, имеющий *стандартное нормальное распределение*. Найдем распределение случайной величины

$$Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}.$$

В этом случае

$$Y(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Очевидно, что

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \iint_{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < y} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2, & y > 0. \end{cases}$$

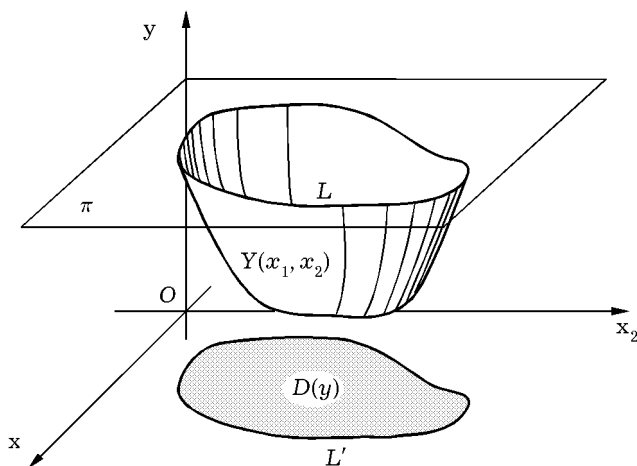


Рис. 6.4

Переходя к полярным координатам ρ и φ , имеем

$$F_Y(y) = \int_0^y d\rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\rho^2/2} \rho d\varphi = \int_0^y \rho e^{-\rho^2/2} d\rho = 1 - e^{-y^2/2}, \quad y > 0.$$

Это известное нам *распределение Релея* (см. 4.6).

Полученный результат допускает многочисленные физические трактовки. Приведем одну из них. Если движущаяся в плоскости частица имеет случайные составляющие скорости, распределенные по двумерному стандартному нормальному закону, то абсолютное значение скорости распределено по *закону Релея*. Трехмерным аналогом распределения Релея (абсолютное значение скорости частицы, движущейся в трехмерном пространстве, причем составляющие скорости распределены по трехмерному стандартному нормальному закону) является ***распределение Максвелла***, представляющее собой распределение случайной величины $Y = \sqrt{X}$, где X — случайная величина, распределенная по *закону* χ^2 с числом степеней свободы, равным трем.

6.4. Формула свертки

Важную роль в теории вероятностей и ее приложениях играет тот случай, когда X_1 и X_2 являются *независимыми случайными величинами*, т.е. их *двумерная плотность распределения*

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$$

(мы ограничиваемся здесь только случаем *непрерывных случайных величин*), а случайная величина Y является их суммой:

$$Y = X_1 + X_2.$$

Тогда $Y = Y(X_1, X_2)$, где

$$Y(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

и, согласно формуле (6.11), находим:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \iint_{x_1+x_2 < y} p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \iint_{x_1+x_2 < y} p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1}(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{y-x_1} p_{X_2}(x_2) dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_2}(y-x_1)p_{X_1}(x_1) dx_1. \end{aligned}$$

Дифференцируя последнюю формулу по y под знаком интеграла (см. [VI]), получаем (с учетом переобозначения $x_1 = x$) выражение для *плотности* $p_Y(y)$ *распределения* суммы X_1 и X_2 :

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_2}(y-x)p_{X_1}(x) dx. \quad (6.12)$$

В этом случае говорят, что плотность распределения $p_Y(y)$ случайной величины Y является **сверткой (композицией) плотностей распределения** $p_{X_1}(x)$ и $p_{X_2}(x)$ слагаемых X_1 и X_2 или что закон распределения суммы двух независимых случайных величин является **сверткой (композицией) законов распределения** слагаемых. Соотношение (6.12) условно записывают в виде

$$p_Y = p_{X_2} * p_{X_1}.$$

Формулу (6.12) называют **формулой свертки** для плотностей распределения случайных величин X_1 и X_2 , она хорошо известна из теории преобразований Фурье [XI].

Пример 6.11. Пусть X_1 и X_2 — независимые случайные величины, распределенные по *нормальному закону* со *средними значениями* m_1 и m_2 и *средними квадратичными отклонениями* σ_1 и σ_2 . Найдем плотность распределения суммы $Y = X_1 + X_2$. Воспользовавшись формулой свертки, имеем

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m_1, \sigma_1}(y-x) \varphi_{m_2, \sigma_2}(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{(y-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(x - \frac{\sigma_1^2 m_2 - \sigma_2^2 m_1 + \sigma_2^2 y}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2\right) dx. \end{aligned}$$

Делая теперь замену

$$z = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2} \left(x - \frac{\sigma_1^2 m_2 - \sigma_2^2 m_1 + \sigma_2^2 y}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right),$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{(y - m_1 - m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-z^2/2} dz = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{(y - m_1 - m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, случайная величина Y также распределена по нормальному закону с параметрами $m_1 + m_2$ и $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, т.е. композиция плотностей нормальных законов распределения является плотностью нормального закона распределения.

Замечание 6.2. Выведенное свойство справедливо для суммы любого числа слагаемых, распределенных по нормальному закону, т.е. если X_1, \dots, X_n — независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону со средними значениями m_1, \dots, m_n и средними квадратичными отклонениями $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, то их сумма $Y = X_1 + \dots + X_n$ также распределена по нормальному закону с параметрами $m_1 + \dots + m_n$ и $\sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}$.

Замечание 6.3. В условиях примера 6.11 случайная величина $-X_2$ имеет *нормальное распределение* с параметрами $-m_2$ и σ_2 (см. пример 6.7), случайные величины X_1 и $-X_2$ являются независимыми (см. далее лемму 1, с. 251). Поэтому, согласно результату примера 6.11, разность $Z = X_1 - X_2$ распределена по нормальному закону с параметрами $m_1 - m_2$ и $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. #

Рассмотрим независимые случайные величины X_1 и X_2 , имеющие *гамма-распределения* с параметрами λ и γ_1 , λ и γ_2 соответственно. Найдем плотность распределения суммы

$$Y = X_1 + X_2.$$

Поскольку X_1 и X_2 — положительные случайные величины, то случайная величина Y также положительна и поэтому при $y < 0$

$$p_Y(y) = 0.$$

В случае $y > 0$, учитывая, что $p_{X_1}(x) = 0$ при $x < 0$ и $p_{X_2}(y - x) = 0$ при $x > y$, имеем, согласно формуле свертки,

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_2}(y - x)p_{X_1}(x) dx = \\ &= \int_0^y \frac{\lambda^{\gamma_2} (y - x)^{\gamma_2 - 1}}{\Gamma(\gamma_2)} e^{-\lambda(y-x)} \frac{\lambda^{\gamma_1} x^{\gamma_1 - 1}}{\Gamma(\gamma_1)} e^{-\lambda x} dx = \\ &= \lambda^{\gamma_1 + \gamma_2} e^{-\lambda y} \int_0^y \frac{(y - x)^{\gamma_2 - 1} x^{\gamma_1 - 1}}{\Gamma(\gamma_2)\Gamma(\gamma_1)} dx. \end{aligned}$$

где $\Gamma(\gamma)$ — гамма-функция.

Делая замену $x = yz$, получаем

$$p_Y(y) = \frac{\lambda^{\gamma_1 + \gamma_2} y^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\gamma_2)\Gamma(\gamma_1)} \int_0^1 (1 - z)^{\gamma_2 - 1} z^{\gamma_1 - 1} dz.$$

Интеграл, стоящий в последнем выражении, представляет собой так называемую *бета-функцию* $B(\gamma_1, \gamma_2)$. Согласно свойству бета-функции, имеем

$$B(\gamma_1, \gamma_2) = \int_0^1 (1 - z)^{\gamma_2 - 1} z^{\gamma_1 - 1} dz = \frac{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\gamma_1 + \gamma_2)}.$$

Следовательно,

$$p_Y(y) = \frac{\lambda^{\gamma_1 + \gamma_2} y^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\gamma_1 + \gamma_2)},$$

т.е. случайная величина Y также имеет гамма-распределение с параметрами λ и $\gamma_1 + \gamma_2$.

Полученный результат можно обобщить на любое число независимых слагаемых, имеющих гамма-распределение. Ввиду

важности полученного результата сформулируем его в виде следующей теоремы.

Теорема 6.1. Если случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n являются независимыми и имеют гамма-распределения с параметрами λ и γ_i , $i = \overline{1, n}$, соответственно, то их сумма

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

имеет гамма-распределение с параметрами λ и $\sum_{i=1}^n \gamma_i$, т.е. композиция гамма-распределений с одинаковым параметром λ и различными параметрами γ_i является также гамма-распределением с параметрами λ и $\sum_{i=1}^n \gamma_i$. #

Поскольку распределение Эрланга и χ^2 -распределение являются частным случаем гамма-распределения (см. 4.6), то композиция любого конечного числа распределений Эрланга с одним и тем же параметром λ или χ^2 -распределений снова является распределением того же типа.

В частности, учитывая, что χ^2 -распределение с одной степенью свободы есть распределение квадрата случайной величины, распределенной по стандартному нормальному закону (см. пример 6.5), распределение χ^2 с n степенями свободы можно трактовать как распределение суммы квадратов n независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение.

6.5. Векторные функции от случайного векторного аргумента

Пусть теперь с двумерным *случайным вектором* (X_1, X_2) связана не одна, а две (можно рассматривать и большее количество) *случайные величины*

$$Y_1 = Y_1(X_1, X_2), \quad Y_2 = Y_2(X_1, X_2).$$

Тогда мы можем определить *совместную функцию распределения* случайных величин Y_1 и Y_2 . Можно доказать, что в случае непрерывной двумерной случайной величины (X_1, X_2) двумерная функция распределения вектора (Y_1, Y_2) будет иметь вид

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \iint_{\substack{Y_1(x_1, x_2) < y_1 \\ Y_2(x_1, x_2) < y_2}} p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (6.13)$$

где $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ — совместная плотность распределения случайных величин X_1 и X_2 . Эта формула является обобщением (6.11) на случай двух функций. Но в отличие от формулы (6.11), область интегрирования в формуле (6.13) задана двумя неравенствами

$$Y_1(x_1, x_2) < y_1 \quad \text{и} \quad Y_2(x_1, x_2) < y_2.$$

Пример 6.12. Пусть случайный вектор (X_1, X_2) имеет *двумерное стандартное нормальное распределение*. Случайные величины $Y_1 = Y_1(X_1, X_2)$ и $Y_2 = Y_2(X_1, X_2)$ определяются функциями $Y_1(x_1, x_2)$ и $Y_2(x_1, x_2)$, заданными неявно уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \cos y_2, & x_2 &= y_1 \sin y_2, \\ 0 &\leq y_1 < +\infty, & 0 &\leq y_2 < 2\pi, \end{aligned}$$

относительно y_1, y_2 . Нетрудно видеть, что если трактовать $(x_1; x_2)$ как прямоугольные декартовы координаты случайной точки на плоскости, то $(y_1; y_2)$ представляют собой полярные координаты этой же точки [III].

Найдем двумерную функцию распределения вектора (Y_1, Y_2) . Поскольку полярный радиус Y_1 и полярный угол Y_2 не могут быть отрицательными, то при $y_1 \leq 0$ или $y_2 \leq 0$

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \mathbf{P}\{Y_1 < y_1, Y_2 < y_2\} = 0.$$

Пусть теперь $y_1 > 0$ и $0 < y_1 \leq 2\pi$. Тогда в соответствии с формулой (6.13)

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \iint_D \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2,$$

где область интегрирования D представляет собой сектор, ограниченный окружностью радиуса y_1 , осью Ox_1 и лучом, исходящим из начала координат и составляющим с осью Ox_1 угол y_2 (на рис. 6.5 этот сектор заштрихован). Переходя к полярным координатам ρ и φ , получаем

$$\begin{aligned} F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= \iint_{\substack{0 \leq \rho < y_1 \\ 0 \leq \varphi < y_2}} \frac{1}{2\pi} e^{-\rho^2/2} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{y_1} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho \int_0^{y_2} \frac{1}{2\pi} d\varphi = \left(1 - e^{-y_1^2/2}\right) \frac{y_2}{2\pi}. \end{aligned}$$

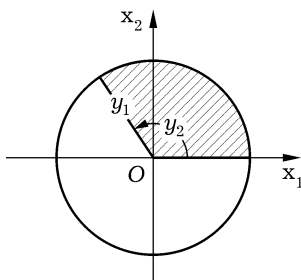


Рис. 6.5

Наконец, пусть $y_1 > 0$ и $y_2 > 2\pi$. Тогда событие $\{Y_1 < y_1, Y_2 < y_2\}$ совпадает с событием $\{Y_1 < y_1, Y_2 < 2\pi\}$ и, значит,

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = F_{Y_1, Y_2}(y_1, 2\pi) = \left(1 - e^{-y_1^2/2}\right) \frac{2\pi}{2\pi} = 1 - e^{-y_1^2/2}.$$

Согласно теореме 5.1,

$$F_{Y_1}(y_1) = F_{Y_1, Y_2}(y_1, +\infty) = \begin{cases} 0, & y_1 \leq 0; \\ 1 - e^{-y_1^2/2}, & y_1 > 0; \end{cases}$$

$$F_{Y_2}(y_2) = F_{Y_1, Y_2}(+\infty, y_2) = \begin{cases} 0, & y_2 \leq 0; \\ y_2/2\pi, & 0 < y_2 \leq 2\pi; \\ 1, & y_2 > 2\pi. \end{cases}$$

Таким образом, для любых y_1 и y_2

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = F_{Y_1}(y_1)F_{Y_2}(y_2).$$

Следовательно, случайные величины Y_1 и Y_2 являются независимыми, причем Y_1 имеет *распределение Релея*, а Y_2 — *равномерное распределение* в промежутке $[0, 2\pi)$.

Полученный результат обычно используют для моделирования случайных величин, распределенных по нормальному закону. Действительно, пусть Y_1 и Y_2 — *независимые случайные величины*, имеющие соответственно распределение Релея и равномерное распределение на промежутке $[0, 2\pi)$ (их моделирование с учетом изложенного в примере 6.6 не вызывает затруднения). Тогда случайный вектор (X_1, X_2) ,

$$X_1 = Y_1 \cos Y_2, \quad X_2 = Y_1 \sin Y_2$$

имеет двумерное стандартное нормальное распределение. #

В заключение отметим, что если функции $Y_1(x_1, x_2)$ и $Y_2(x_1, x_2)$ задают преобразование плоскости или некоторой ее области G , причем обратное преобразование $x_1 = \psi_1(y_1, y_2)$, $x_2 = \psi_2(y_1, y_2)$ имеет непрерывные частные производные по y_1 и y_2 , то *плотности распределения* случайных векторов (X_1, X_2) и (Y_1, Y_2) связаны между собой соотношением

$$p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = p_{X_1, X_2}(\psi_1(y_1, y_2), \psi_2(y_1, y_2))|J|, \quad (6.14)$$

где

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \psi_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

представляет собой якобиан преобразования $(\psi_1(y_1, y_2), \psi_2(y_1, y_2))$. Формула (6.14) вытекает из правила замены переменных в двойном интеграле [VII].

Пример 6.13. Найдем совместную плотность распределения случайного вектора (Y_1, Y_2) из примера 6.12. Воспользуемся формулой (6.14). Поскольку в данном случае

$$\psi_1(y_1, y_2) = y_1 \cos y_2, \quad \psi_2(y_1, y_2) = y_1 \sin y_2,$$

$$0 \leq y_1 < +\infty, \quad 0 \leq y_2 < 2\pi,$$

то $J = y_1$, $p_{X_1, X_2}(\psi_1(y_1, y_2), \psi_2(y_1, y_2)) = \frac{1}{2\pi} e^{-y_1^2/2}$, и, согласно (6.14), получаем, что при $y_1 \geq 0$, $0 \leq y_2 < 2\pi$

$$p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} y_1 e^{-y_1^2/2}.$$

Так как все значения случайного вектора (Y_1, Y_2) содержатся в множестве $\{(y_1, y_2): y_1 \geq 0, 0 \leq y_2 < 2\pi\}$ (см. пример 6.12), то в остальных случаях

$$p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 0.$$

Таким образом, мы пришли к тому же результату, что и в примере 6.12, но только в терминах плотности распределения. #

Покажем, как будет выглядеть формула (6.14) в случае линейного преобразования

$$Y_i(x_1, x_2) = x_1 b_{1i} + x_2 b_{2i} + c_i, \quad i = 1, 2,$$

или в матричной записи

$$\vec{Y}(\vec{x}) = \vec{x}B + \vec{c}, \quad \vec{Y} = (Y_1, Y_2), \quad \vec{x} = (x_1, x_2), \quad \vec{c} = (c_1, c_2),$$

где $B = (b_{ij})$ — невырожденная матрица. Обратное преобразование

$$\vec{\psi}(\vec{y}) = (\vec{y} - \vec{c})\tilde{B}, \quad \vec{y} = (y_1, y_2),$$

также будет линейным, причем матрица

$$\tilde{B} = B^{-1}$$

является обратной к B , а якобиан J равен определителю

$$\det \tilde{B} = \frac{1}{\det B},$$

где $\det B$ — определитель матрицы B .

Поэтому формула (6.14) принимает вид

$$p_{Y_1, Y_2}(\vec{y}) = p_{\vec{X}}((\vec{y} - \vec{c})\tilde{B}) \frac{1}{|\det B|}. \quad (6.15)$$

Пример 6.14. Пусть двумерная случайная величина (X_1, X_2) имеет равномерное внутри треугольника D с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 0)$ распределение. Найдём плотность распределения двумерного случайного вектора $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}$, где $\vec{c} = (-1, 2)$, а $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Нетрудно видеть, что *совместная плотность распределения*

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = 2,$$

если точка (x_1, x_2) принадлежит треугольнику D , в противном случае

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = 0.$$

При рассматриваемом линейном преобразовании треугольник D переходит в треугольник D' с вершинами в точках $(-1; 2)$, $(2; 3)$ и $(0; 3)$, а $\det B = -2$. Поэтому в соответствии с формулой (6.15)

$$p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 1,$$

если точка (y_1, y_2) принадлежит треугольнику D' , в противном случае

$$p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 0. \quad \#$$

В заключение приведем простой, но важный для дальнейшего результат, устанавливающий достаточное условие независимости функций от независимых случайных величин.

Лемма 1. Пусть случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми, а функции $Y_1(x_1, x_2)$ и $Y_2(x_1, x_2)$ таковы, что

$$Y_1(x_1, x_2) = Y_1(x_1),$$

т.е. $Y_1(x_1, x_2)$ зависит только от x_1 , а

$$Y_2(x_1, x_2) = Y_2(x_2),$$

т.е. $Y_2(x_1, x_2)$ зависит только от x_2 . Тогда случайные величины

$$Y_1 = Y_1(X_1, X_2) = Y_1(X_1) \quad \text{и} \quad Y_2 = Y_2(X_1, X_2) = Y_2(X_2)$$

также являются независимыми.

◀ Действительно (ограничиваясь непрерывными случайными величинами X_1 и X_2), в соответствии с (6.13) и теоремой 5.3 имеем:

$$\begin{aligned} F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= \iint_{\substack{Y_1(x_1, x_2) < y_1 \\ Y_2(x_1, x_2) < y_2}} p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \iint_{\substack{Y_1(x_1) < y_1 \\ Y_2(x_2) < y_2}} p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 = \left(\int_{Y_1(x_1) < y_1} p_{X_1}(x_1) dx_1 \right) \times \\ &\quad \times \left(\int_{Y_2(x_2) < y_2} p_{X_2}(x_2) dx_2 \right) = F_{Y_1}(y_1) F_{Y_2}(y_2). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Замечание 6.4. Утверждение леммы 1 обобщается на случай n случайных величин X_1, \dots, X_n .

Пример 6.15. Пусть X_1, \dots, X_n — независимые случайные величины, имеющие *стандартное нормальное распределение*. Тогда случайные величины X_1^2, \dots, X_n^2 также являются независимыми и распределены *по закону χ^2* с одной степенью свободы (см. пример 6.5), и, как следует из теоремы 6.1, случайная величина

$$Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$$

имеет распределение χ^2 с n степенями свободы. Извлекая квадратный корень из Y , получаем при $n = 2$ и $n = 3$ распределения Релея и Максвелла (см. пример 6.10). #

Отметим еще раз, что приведенные в настоящей главе результаты сформулированы для векторов размерности $n = 2$ лишь для краткости и наглядности изложения. Нетрудно показать, что они остаются справедливыми для случайных векторов, имеющих произвольную размерность $n \geq 2$.

6.6. Линейные преобразования нормально распределенных случайных величин. Метод линеаризации

В силу особой важности для практических применений в этом параграфе мы подробно остановимся на линейных преобразованиях *многомерных случайных величин*, распределенных по *нормальному закону*.

Пусть $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ — n -мерный *случайный вектор*, распределенный по *нормальному закону* с *матрицей ковариаций* $\Sigma_{\vec{X}}$ и *вектором средних значений* $\vec{m}_{\vec{X}}$. Рассмотрим новый случайный вектор $\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$, полученный из вектора \vec{X} с помощью линейного преобразования

$$\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}, \quad (6.16)$$

где B — невырожденная квадратная матрица порядка n [III], а \vec{c} — n -мерный вектор. Тогда в соответствии с формулой (6.15) случайный вектор \vec{Y} имеет *плотность распределения*

$$\begin{aligned} p_{\vec{Y}}(\vec{y}) &= p_{\vec{X}}((\vec{y} - \vec{c})\tilde{B}) \frac{1}{|\det B|} = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n (\det \Sigma_{\vec{X}})^{\frac{1}{2}} |\det B|} e^{-\frac{1}{2}((\vec{y} - \vec{c})\tilde{B} - \vec{m}_{\vec{X}})\tilde{\Sigma}_{\vec{X}}((\vec{y} - \vec{c})\tilde{B} - \vec{m}_{\vec{X}})^T} = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n (\det(B^T \Sigma_{\vec{X}} B))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{y} - \vec{m}_{\vec{Y}})\tilde{\Sigma}_{\vec{Y}}(\vec{y} - \vec{m}_{\vec{Y}})^T} = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n (\det \Sigma_{\vec{Y}})^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{y} - \vec{m}_{\vec{Y}})\tilde{\Sigma}_{\vec{Y}}(\vec{y} - \vec{m}_{\vec{Y}})^T}, \end{aligned}$$

где $\tilde{B} = B^{-1}$ — матрица, обратная к матрице B ; $\tilde{\Sigma}_{\vec{X}} = \Sigma_{\vec{X}}^{-1}$ — матрица, обратная к матрице $\Sigma_{\vec{X}}$;

$$\Sigma_{\vec{Y}} = B^T \Sigma_{\vec{X}} B; \quad (6.17)$$

$\tilde{\Sigma}_{\vec{Y}} = \Sigma_{\vec{Y}}^{-1}$ — матрица, обратная к матрице $\Sigma_{\vec{Y}}$;

$$\vec{m}_{\vec{Y}} = \vec{m}_{\vec{X}} B + \vec{c}. \quad (6.18)$$

Таким образом, случайный вектор \vec{Y} также распределен по нормальному закону с вектором средних значений $\vec{m}_{\vec{Y}}$ и матрицей ковариаций $\Sigma_{\vec{Y}}$, определяемыми формулами (6.18) и (6.17).

Пример 6.16. Предположим, что двумерный случайный вектор $\vec{X} = (X_1, X_2)$ имеет нормальное распределение с вектором средних значений $\vec{m}_{\vec{X}} = (1, 2)$ и матрицей ковариаций $\Sigma_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдем вектор средних значений $\vec{m}_{\vec{Y}}$ и матрицу ковариаций $\Sigma_{\vec{Y}}$ случайного вектора $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}$, где $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\vec{c} = (-1, -3)$.

В соответствии с формулами (6.17) и (6.18) имеем:

$$\Sigma_{\vec{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{m}_{\vec{Y}} = (1, 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1, -3) = (0, 0).$$

Значит, вектор \vec{Y} имеет *двумерное стандартное нормальное распределение*. #

Пусть n -мерный случайный вектор \vec{X} имеет многомерное нормальное распределение с матрицей ковариаций $\Sigma_{\vec{X}}$ и вектором средних значений $\vec{m}_{\vec{X}}$. Формула (6.17) является формулой преобразования матрицы квадратичной формы. Поскольку матрица $\Sigma_{\vec{X}}$ является положительно определенной, то всегда можно подобрать невырожденное линейное преобразование B таким образом (например, используя метод Лагранжа [IV]), чтобы матрица $\Sigma_{\vec{Y}}$, определенная формулой (6.17), была единичной. Полагая теперь

$$\vec{c} = -\vec{m}_{\vec{X}} B,$$

из формулы (6.18) заключаем, что $\vec{m}_{\vec{Y}}$ есть нулевой вектор. Таким образом, приходим к выводу, что вектор \vec{Y} имеет многомерное стандартное нормальное распределение.

Выражая теперь вектор \vec{X} через вектор \vec{Y} по формуле

$$\vec{X} = \vec{Y} B^{-1} + \vec{m}_{\vec{X}}, \quad (6.19)$$

приходим к следующему результату (ср. с результатом в 5.4): n -мерный случайный вектор \vec{X} , распределенный по нормальному закону с произвольными вектором средних значений $\vec{m}_{\vec{X}}$ и матрицей ковариаций $\Sigma_{\vec{X}}$, может быть получен с помощью преобразования (6.19), где вектор \vec{Y} распределен по *стандартному нормальному закону*.

Пример 6.17. Пусть $\vec{X} = (X_1, X_2)$ имеет нормальное распределение с вектором средних значений $\vec{m} = (-2, 4)$ и матрицей ковариаций $\Sigma_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 0,04 & 0,04 \\ 0,04 & 0,2 \end{pmatrix}$. Найдём вектор \vec{c} и матрицу B линейного преобразования, переводящего вектор \vec{X} в вектор \vec{Y} , имеющий стандартное нормальное распределение.

Запишем квадратичную форму, соответствующую матрице $\Sigma_{\vec{X}}$ и преобразуем ее методом Лагранжа [IV] к каноническому виду, являющемуся суммой квадратов:

$$0,04x^2 + 0,08xy + 0,2y^2 = (0,2x + 0,2y)^2 + (0,4)^2 = z_1^2 + z_2^2,$$

где

$$\begin{cases} z_1 = 0,2x + 0,2y; \\ z_2 = 0,4y. \end{cases}$$

Поэтому матрица B^{-1} имеет вид

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix},$$

а матрица B — вид

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2,5 \\ 0 & 2,5 \end{pmatrix}.$$

Вектор \vec{c} задается равенством

$$\vec{c} = -(-2, 4) \begin{pmatrix} 5 & -2,5 \\ 0 & 2,5 \end{pmatrix} = (10, -15).$$

Отметим, что к стандартному нормальному распределению приводят и другие линейные преобразования, например преобразование с матрицей:

$$B' = \begin{pmatrix} 5 & -2,5 \\ 0 & 2,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ -0,8 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

Общий нормальный закон. Как известно (см. 5.5), невырожденный n -мерный закон вполне определяется вектором средних значений \vec{m} и матрицей ковариаций Σ , которая является положительно определенной. Для общего n -мерного нормального закона условие положительной определенности матрицы ковариаций Σ заменяется условием неотрицательной определенности этой матрицы [IV]. В частности, если $\det \Sigma = 0$, то **нормальное распределение** называют **вырожденным**.

Оказывается, что вырожденное нормальное распределение не является распределением непрерывного случайного вектора. Определим общий нормальный закон, исходя из формулы (6.16). Скажем, что вектор \vec{Y} распределен по **общему n -мерному нормальному закону**, если он может быть получен из нормально распределенного случайного вектора \vec{X} с помощью линейного преобразования (6.16). При этом матрица B может быть и вырожденной [III]. Более того, матрица B не обязательно должна быть квадратной, а может иметь размерность $n \times k$, и тогда из n -мерного нормально распределенного вектора \vec{X} с помощью линейного преобразования получается k -мерный нормально распределенный вектор Y . Если матрица ковариаций Σ имеет ранг k [III], то n -мерный вектор \vec{Y} может быть выражен с помощью линейного преобразования (6.16) через k -мерный вектор \vec{X} , имеющий стандартное нормальное распределение. В частности, если матрица Σ нулевая, т.е. ее ранг равен нулю, то вектор \vec{Y} состоит из неслучайных координат $Y_i = c_i$, т.е. вектор с неслучайными координатами представляет собой частный случай нормально распределенного вектора.

Формулы (6.17) и (6.18), выведенные нами для матриц ковариаций и векторов средних невырожденных нормальных распределений, полностью сохраняются и для общих нормальных распределений (напомним, что матрица B может быть не квадратной). Более того, в следующей главе будет показано, что эти формулы имеют место для произвольно распределенных случайных векторов.

Пример 6.18. Пусть двумерный случайный вектор $\vec{X} = (X_1, X_2)$ распределен по стандартному нормальному закону. Рассмотрим трехмерный случайный вектор $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$, полученный из вектора \vec{X} с помощью линейного преобразования $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}$, где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{c} = (1, 0, -1).$$

Следовательно, вектор \vec{Y} имеет нормальный трехмерный закон с матрицей ковариаций

$$\Sigma_{\vec{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

и вектором средних значений

$$\vec{m}_{\vec{Y}} = (1, 0, -1).$$

Матрица $\Sigma_{\vec{Y}}$ является вырожденной, причем ее ранг равен единице, собственные значения $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и собственный вектор, соответствующий ненулевому собственному значению λ_1 , имеет вид $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$. Последнее означает, что трехмерный случайный вектор \vec{Y} может принимать только значения $y_1 = z + 1$, $y_2 = z$, $y_3 = z - 1$, т.е. множество всех его значений лежит на прямой $y_1 = z + 1$, $y_2 = z$, $y_3 = z - 1$. Иными словами, зная, например, значения координаты Y_2 случайного вектора \vec{Y} , можно однозначно определить значения остальных координат по формулам

$$Y_1 = Y_2 + 1 \quad \text{и} \quad Y_3 = Y_2 - 1,$$

что следует и непосредственно из определения вектора \vec{Y} .

Метод линеаризации. Пусть $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ — n -мерный случайный вектор, распределенный по нормальному (невырожденному) закону с матрицей ковариаций $\Sigma_{\vec{X}}$ и вектором

средних значений $\vec{m}_{\vec{X}}$. Вернемся к общему случаю и предположим, что $\vec{Y} = \vec{Y}(\vec{X})$ — векторная функция от случайного вектора \vec{X} .

В ряде практических задач функция $\vec{Y}(\vec{x})$ хотя и не является линейной, но тем не менее хорошо аппроксимируется линейной в области реального изменения случайного вектора \vec{X} . Тогда можно воспользоваться **методом линеаризации**, который мы сейчас опишем.

Положим

$$\vec{m}_{\vec{Y}} = \vec{Y}(\vec{m}_{\vec{X}}). \quad (6.20)$$

Кроме того, считая, что функция $\vec{Y}(\vec{x})$ дифференцируема в точке $\vec{m}_{\vec{X}}$, введем матрицу

$$B = (b_{ij}) = \left(\frac{\partial Y_j(\vec{x})}{\partial x_i} \bigg|_{\vec{x}=\vec{m}_{\vec{X}}} \right). \quad (6.21)$$

В окрестности точки $\vec{m}_{\vec{X}}$ функцию $\vec{Y}(\vec{x})$ можно приближенно заменить линейной [V]:

$$\vec{Y}(\vec{x}) \approx \vec{m}_{\vec{Y}} + (\vec{x} - \vec{m}_{\vec{X}})B.$$

Поэтому

$$\vec{Y}(\vec{X}) \approx \vec{m}_{\vec{Y}} + (\vec{X} - \vec{m}_{\vec{X}})B,$$

и, значит, случайный вектор \vec{Y} распределен приближенно по нормальному закону с вектором средних $\vec{m}_{\vec{Y}}$, определяемым формулой (6.20), и матрицей ковариаций $\Sigma_{\vec{Y}}$, задаваемой формулой (6.17), в которой матрица B вычисляется по формуле (6.21).

Пример 6.19. Для определения плотности минерала был взят образец цилиндрической формы с неизвестными радиусом основания m_1 , высотой m_2 и массой m_3 . Измерения проводились со случайными погрешностями и дали следующие результаты: радиус основания X_1 , высота X_2 и масса X_3 . Плотность

минерала Y была вычислена по формуле

$$Y = \frac{X_3}{\pi X_1^2 X_2}.$$

Считая, что результаты измерений X_1, X_2, X_3 являются независимыми случайными величинами, имеющими совместное нормальное распределение с вектором средних (m_1, m_2, m_3) (в этом случае говорят, что отсутствуют систематические погрешности измерений) и средними квадратичными отклонениями $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (которые предполагаются малыми по сравнению с истинными значениями радиуса m_1 , высоты m_2 и массы m_3), найдем распределение полученной плотности Y минерала.

Из условия задачи следует, что измеренные параметры представляют собой трехмерный случайный вектор

$$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3),$$

распределенный по нормальному закону с вектором средних значений

$$\vec{m}_{\vec{X}} = (m_1, m_2, m_3)$$

и матрицей ковариаций

$$\Sigma_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix},$$

а полученное значение плотности минерала Y является скалярной функцией вектора \vec{X} :

$$Y(\vec{X}) = \frac{X_3}{\pi X_1^2 X_2}.$$

Для нахождения распределения Y воспользуемся методом линеаризации. В соответствии с формулами (6.20) и (6.21)

положим:

$$m_Y = Y(\vec{m}_{\vec{X}}) = \frac{m_3}{\pi m_1^2 m_2}, \quad (6.22)$$

$$B = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} Y(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{m}_{\vec{X}}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{x_3}{\pi x_1^2 x_2} \Big|_{\vec{x}=\vec{m}_{\vec{X}}} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{x_3}{\pi x_1^2 x_2} \Big|_{\vec{x}=\vec{m}_{\vec{X}}} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{x_3}{\pi x_1^2 x_2} \Big|_{\vec{x}=\vec{m}_{\vec{X}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \frac{m_3}{\pi m_1^3 m_2} \\ -\frac{m_3}{\pi m_1^2 m_2^2} \\ \frac{1}{\pi m_1^2 m_2} \end{pmatrix}.$$

Далее, воспользовавшись формулой (6.17), имеем:

$$\begin{aligned} \Sigma_Y = B^T \Sigma_{\vec{X}} B &= \begin{pmatrix} -2 \frac{m_3}{\pi m_1^3 m_2} & -\frac{m_3}{\pi m_1^2 m_2^2} & \frac{1}{\pi m_1^2 m_2} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \frac{m_3}{\pi m_1^3 m_2} \\ -\frac{m_3}{\pi m_1^2 m_2^2} \\ \frac{1}{\pi m_1^2 m_2} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{4m_2^2 m_3^2 \sigma_1^2 + m_1^2 m_3^2 \sigma_2^2 + m_1^2 m_2^2 \sigma_3^2}{\pi^2 m_1^6 m_2^4}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Таким образом, полученное значение плотности Y распределено приближенно по нормальному закону со средним значением и дисперсией, определяемыми формулами (6.22) и (6.23).

6.7. Решение типовых примеров

Пример 6.20. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения, представленный в табл. 6.8.

Таблица 6.8

X	-2	-1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4

Найдем ряд распределения случайной величины $Y = 2X^2 + 1$.

Значениям $-2, -1, 0, 1$ и 2 случайной величины X соответствуют значения $9, 3, 1, 3$ и 9 случайной величины Y . Воспользовавшись табл. 6.8, получим ряд распределения случайной величины Y , представленный в табл. 6.9. Теперь, для того чтобы получить окончательный ответ, нужно объединить столбцы с одинаковыми значениями Y (табл. 6.10).

Таблица 6.9

Y	9	3	1	3	9
P	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4

Таблица 6.10

Y	1	3	9
P	0,1	0,3	0,6

Пример 6.21. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найдём функцию распределения случайной величины $Y = (X - 2)^2$.

Случайная величина Y может принимать только неотрицательные значения. Поэтому при $y \leq 0$

$$F_Y(y) = 0.$$

При $y > 0$ функцию распределения $F_Y(y)$ определяем по формуле

$$F_Y(y) = \int_{Y(x) \leq y} p_X(x) dx.$$

Поскольку в данном примере

$$Y(x) = (x - 2)^2,$$

то область интегрирования представляет собой интервал $(2 - \sqrt{y}, 2 + \sqrt{y})$. Согласно определению плотности распределения экспоненциального закона, получаем:

при $y < 4$

$$F_Y(y) = \int_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} e^{-x} dx = e^{-2+\sqrt{y}} - e^{-2-\sqrt{y}};$$

при $y \geq 4$

$$F_Y(y) = \int_0^{2+\sqrt{y}} e^{-x} dx = 1 - e^{-2-\sqrt{y}}.$$

Таким образом,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ e^{-2+\sqrt{y}} - e^{-2-\sqrt{y}}, & 0 < y \leq 4; \\ 1 - e^{-2-\sqrt{y}}, & y > 4. \end{cases}$$

Пример 6.22. Случайная величина X имеет *равномерный закон распределения* в интервале $(0, \pi)$. Найдём плотность распределения случайной величины $Y = \cos X$.

Функция $Y(x) = \cos x$ является непрерывной убывающей в интервале $(0, \pi)$ и отображает этот интервал в интервал $(-1, 1)$. Обратная функция

$$\psi(y) = Y^{-1}(y) = \arccos y$$

имеет производную

$$\psi'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Поскольку плотность распределения случайной величины X

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0, \pi); \\ 1/\pi, & x \in (0, \pi), \end{cases}$$

то

$$p_Y(y) = p_X(\psi(y))|\psi'(y)| = \begin{cases} 0, & y \notin (-1, 1); \\ 1/(\pi\sqrt{1-y^2}), & y \in (-1, 1). \end{cases}$$

Пример 6.23. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(0, 2\pi)$. Найдём плотность распределения случайной величины $Y = \cos X$.

Эта задача отличается от предыдущей только тем, что теперь функция $Y(x) = \cos x$ не является монотонной в интервале $(0, 2\pi)$. Однако она является непрерывной функцией, имеющей два интервала монотонности: $(0, \pi)$ и $(\pi, 2\pi)$. Обозначая для любого y , $-1 < y < 1$, решения уравнения $y = \cos x$ в интервалах $(0, \pi)$ и $(\pi, 2\pi)$ через $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ соответственно ($\psi_1(y) = \arccos y$, $\psi_2(y) = 2\pi - \arccos y$), находим

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= p_X(\psi_1(y))|\psi_1'(y)| + p_X(\psi_2(y))|\psi_2'(y)| = \\ &= \begin{cases} 0, & y \notin (-1, 1); \\ 1/(\pi\sqrt{1-y^2}), & y \in (-1, 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили тот же ответ, что и в предыдущем примере.

Пример 6.24. Распределение дискретной случайной величины (X_1, X_2) задается табл. 6.11. Найдем ряд распределения случайной величины $Y = X_1^2 + X_2^2 - 1$.

Таблица 6.11

X_2	X_1		
	-1	0	1
-1	0,07	0,10	0,13
1	0,20	0,23	0,27

Табл. 6.11 представим в виде табл. 6.12, состоящей из двух строк, причем в верхней строке перечислены все значения случайной величины Y , а в нижней — соответствующие вероятности.

Таблица 6.12

Y	1	0	1	1	0	1
P	0,07	0,10	0,13	0,20	0,23	0,27

Таблица 6.13

Y	0	1
P	0,33	0,67

Объединяя теперь столбцы с одинаковыми значениями Y , получаем окончательно ряд распределения случайной величины Y (табл. 6.13).

Пример 6.25. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) распределена равномерно в круге $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Найдем функцию распределения случайной величины $Y = X_1 X_2$.

Значение функции распределения $F_Y(y)$ случайной величины Y равно вероятности попадания двумерного случайного

вектора (X_1, X_2) в область $x_1 x_2 < y$. Эта вероятность, в свою очередь, равна площади S_D области D , состоящей из точек круга, координаты которых удовлетворяют неравенству $x_1 x_2 < y$ (на рис. 6.6 и рис. 6.7 область D заштрихована), деленной на площадь круга π . Это следует из того, что случайная величина (X_1, X_2) равномерно распределена.

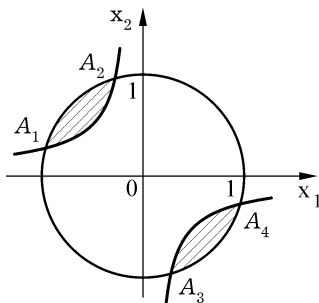


Рис. 6.6

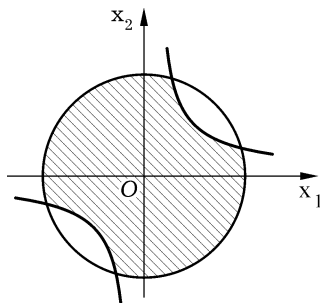


Рис. 6.7

При $y \leq -1/2$ область D пуста, а при $y > 1/2$ эта область совпадает с кругом. Поэтому

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -\frac{1}{2}; \\ 1, & y > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Пусть теперь $-1/2 < y \leq 0$. Тогда пересечение гиперболы $x_1 x_2 = y$ и окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$ происходит в четырех точках (см. рис. 6.6):

$$\begin{aligned} A_1 & \left(-\sqrt{1/2 + \sqrt{1/4 - y^2}}; \sqrt{1/2 - \sqrt{1/4 - y^2}} \right), \\ A_2 & \left(-\sqrt{1/2 - \sqrt{1/4 - y^2}}; \sqrt{1/2 + \sqrt{1/4 - y^2}} \right), \\ A_3 & \left(\sqrt{1/2 - \sqrt{1/4 - y^2}}; -\sqrt{1/2 + \sqrt{1/4 - y^2}} \right), \\ A_4 & \left(\sqrt{1/2 + \sqrt{1/4 - y^2}}; -\sqrt{1/2 - \sqrt{1/4 - y^2}} \right), \end{aligned}$$

координаты которых находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 = 1; \\ x_1 x_2 = y. \end{cases}$$

Значит,

$$\begin{aligned} S_D &= 2 \int_{-\sqrt{1/2+\sqrt{1/4-y^2}}}^{-\sqrt{1/2-\sqrt{1/4-y^2}}} \left(\sqrt{1-x_1^2} - \frac{y}{x_1} \right) dx_1 = \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}} + 2 \ln \left(\frac{1}{2y} - \sqrt{\frac{1}{4y^2} - 1} \right), \end{aligned}$$

и поэтому при $-1/2 < y \leq 0$

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}} + \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{1}{2y} - \sqrt{\frac{1}{4y^2} - 1} \right).$$

Аналогично при $0 < y \leq 1/2$ имеем (см. рис. 6.7):

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}} - \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{1}{2y} - \sqrt{\frac{1}{4y^2} - 1} \right).$$

Полученные формулы задают значения функции распределения $F_Y(y)$ при всех значениях аргумента y .

Пример 6.26. Независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют стандартное нормальное распределение и распределение χ^2 с k степенями свободы соответственно (см. 4.6). Найдём плотность распределения случайной величины $Y = X_1 / \sqrt{X_2/k}$.

Поскольку случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми, двумерная случайная величина (X_1, X_2) имеет совместную плотность распределения:

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_2 < 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2^{k/2} \Gamma(\frac{k}{2})} e^{-x_1^2/2} x_2^{k/2-1} e^{-x_2/2}, & x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Значение функции распределения $F_Y(y)$ равно вероятности попадания двумерного случайного вектора (X_1, X_2) в область D (на рис. 6.8 эта область заштрихована), определяемую неравенствами

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_2/k}} < y, \quad x_2 \geq 0,$$

т.е.

$$F_Y(y) = \iint_D \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2^{k/2} \Gamma(\frac{k}{2})} e^{-x_1^2/2} x_2^{k/2-1} e^{-x_2/2} dx_1 dx_2.$$

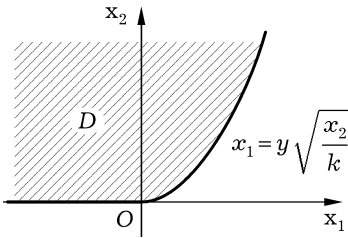


Рис. 6.8

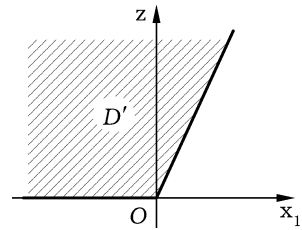


Рис. 6.9

Сделаем замену $z = \sqrt{x_2}$. Тогда

$$F_Y(y) = \iint_{D'} \frac{2}{\sqrt{2\pi} 2^{k/2} \Gamma(\frac{k}{2})} e^{-x_1^2/2} z^{k-1} e^{-z^2/2} dx_1 dz,$$

где область интегрирования D' (рис. 6.9) представляет собой угол между лучами $x_1 = -t, z = 0$ ($t \geq 0$) и $x_1 = yt, z = \sqrt{kt}$ ($t \geq 0$). Переходя теперь к полярным координатам

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad z = \rho \sin \varphi,$$

получаем

$$F_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} 2^{k/2} \Gamma(\frac{k}{2})} \int_{\arctg(\sqrt{k}/y)}^{\pi} \sin^{k-1} \varphi d\varphi \int_0^{+\infty} \rho^{k-1} e^{-\rho^2/2} \rho d\rho.$$

Снова делая замену $u = \rho^2/2$ и учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} u^{(k-1)/2} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right),$$

находим

$$F_Y(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_{\arctg(\sqrt{k}/y)}^{\pi} \sin^{k-1} \varphi d\varphi.$$

Так как нам необходимо определить плотность распределения случайной величины Y , мы не будем вычислять интеграл в последней формуле, а воспользуемся формулой дифференцирования интеграла:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\arctg(\sqrt{k}/y)}^{\pi} \sin^{k-1} \varphi d\varphi \right)'_y &= \\ &= -\sin^{k-1} \left(\arctg \left(\frac{\sqrt{k}}{y} \right) \right) \left(\arctg \left(\frac{\sqrt{k}}{y} \right) \right)' = \\ &= \sin^{k-1} \left(\arctg \left(\frac{\sqrt{k}}{y} \right) \right) \frac{1}{\sqrt{k}} \left(1 + \frac{y^2}{k} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, наконец, соотношение

$$\sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

приходим к окончательному ответу:

$$p_Y(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{y^2}{k} \right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

Распределение случайной величины Y называют **распределением Стьюдента (t -распределением)**. Распределение Стьюдента, наряду с распределением χ^2 , играет важную роль в математической статистике.

Пример 6.27. Случайная величина X_1 распределена равномерно на отрезке $[1, 2]$, а случайная величина X_2 имеет *показательное (экспоненциальное) с параметром $\lambda = 2$ распределение*. Предполагая, что случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми, и воспользовавшись *формулой свертки*, найдем функцию распределения и плотность распределения случайной величины $Y = X_1 + X_2$.

Запишем формулу свертки:

$$p_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1}(y) p_{X_2}(x - y) dy.$$

Поскольку $p_{X_1}(x) = 0$ при $x < 1$ и $p_{X_2}(x) = 0$ при $x < 0$, то при $x < 1$ подынтегральное выражение тождественно равно нулю, и, значит,

$$p_Y(x) = 0, \quad x < 1.$$

При $x > 1$ формула свертки принимает вид

$$p_Y(x) = \int_1^x p_{X_1}(y) p_{X_2}(x - y) dy,$$

причем, поскольку

$$p_{X_1}(x) = 0$$

также при $x > 2$, то при $x > 2$ формулу свертки можно записать в виде

$$p_Y(x) = \int_1^2 p_{X_1}(y) p_{X_2}(x - y) dy.$$

Подставляя в полученные формулы выражения для равномерной и экспоненциальной плотностей распределения, находим

$$p_Y(x) = 2 \int_1^x e^{-2(x-y)} dy = 1 - e^{-2(x-1)}, \quad 1 \leq x \leq 2;$$

$$p_Y(x) = 2 \int_1^2 e^{-2(x-y)} dy = e^{-2(x-2)} - e^{-2(x-1)}, \quad x > 2.$$

Таким образом,

$$p_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 1 - e^{-2(x-1)}, & 1 \leq x \leq 2; \\ e^{-2(x-2)} - e^{-2(x-1)}, & x > 2. \end{cases}$$

Пример 6.28. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины (X_1, X_2) (табл. 6.14). Найдем распределение вероятностей двумерной случайной величины (Y_1, Y_2) , где

$$Y_1 = X_2 + X_1^2 - 2X_1^2X_2,$$

$$Y_2 = X_2 - \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_1^2 - X_1^2X_2.$$

Таблица 6.14

X_2	X_1		
	-1	0	1
0	0,15	0,25	0,10
1	0,20	0,05	0,25

Для того чтобы определить совместное распределение случайных величин Y_1 и Y_2 , удобно сначала выписать общую таблицу, в которой в первой строке и первом столбце перечислены значения случайных величин Y_1 и Y_2 , соответствующие всем парам значений случайных величин X_1 и X_2 , на главной диагонали записаны вероятности, а на остальных местах стоят нули (табл. 6.15).

Таблица 6.15

Y_2	Y_1					
	1	0	1	0	1	0
1	0,15					
0		0,25				
0			0,10			
1				0,20		
1					0,05	
0						0,25

Объединяя строки с одинаковыми значениями Y_2 , приходим к табл. 6.16.

Таблица 6.16

Y_2	Y_1					
	1	0	1	0	1	0
0		0,25	0,10			0,25
1	0,15			0,20	0,05	

Таблица 6.17

Y_2	Y_1	
	0	1
0	0,50	0,10
1	0,20	0,20

Наконец, объединяя столбцы с одинаковыми значениями Y_1 , получаем табл. 6.17, окончательно задающую совместное распределение вероятностей случайных величин Y_1 и Y_2 .

Пример 6.29. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) распределена равномерно в квадрате с вершинами в точках $A_1(0; -1)$, $A_2(0; 1)$, $A_3(2; 1)$ и $A_4(2; -1)$. Найдём совместную функцию распределения случайных величин

$$Y_1 = X_2^2 \quad \text{и} \quad Y_2 = X_1 + X_2.$$

Очевидно, что случайная величина Y_1 может принимать только значения от 0 до 1, а случайная величина Y_2 — от -1 до 3. Поэтому $F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 0$, если $y_1 \leq 0$ или $y_2 \leq -1$, и $F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 1$, если $y_1 > 1$ и $y_2 > 3$. Пусть теперь $0 < y_1 \leq 1$ и $-1 < y_2 \leq 3$. Тогда значение $F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ равно четверти

площади части D квадрата, ограниченной прямыми $y_1 = -x_2^2$, $y_1 = x_2^2$ и $y_2 = x_1 + x_2$. Область D при различных соотношениях между y_1 и y_2 на рис. 6.10–6.14 отмечена штриховкой. Проводя вычисления, получаем

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & y_2 \leq -\sqrt{y_1}; \\ \frac{(y_2 + \sqrt{y_1})^2}{8}, & -\sqrt{y_1} < y_2 < \sqrt{y_1}; \\ \frac{y_2 \sqrt{y_1}}{2}, & \sqrt{y_1} \leq y_2 \leq 2 - \sqrt{y_1}; \\ \sqrt{y_1} - \frac{(2 + \sqrt{y_1} - y_2)^2}{8}, & 2 - \sqrt{y_1} < y_2 < 2 + \sqrt{y_1}; \\ \sqrt{y_1}, & 2 + \sqrt{y_1} \leq y_2. \end{cases}$$

Далее, если $0 < y_1 \leq 1$, а $y_2 > 3$, то $F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ совпадает с функцией распределения $F_{Y_1}(y_1)$, которая, как нетрудно видеть, равна

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = F_{Y_1}(y_1) = \sqrt{y_1}.$$

Наконец, при $y_1 > 1$ и $-1 < y_2 \leq 3$ совместная функция распределения $F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ совпадает с функцией распределения $F_{Y_2}(y_2)$

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = F_{Y_2}(y_2) = \begin{cases} \frac{(y_2 + 1)^2}{8}, & y_2 \leq 1; \\ \frac{1 - (3 - y_2)^2}{8}, & y_2 > 1. \end{cases}$$

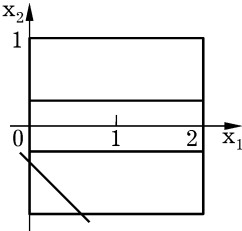


Рис. 6.10

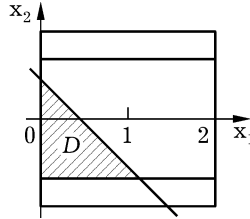


Рис. 6.11

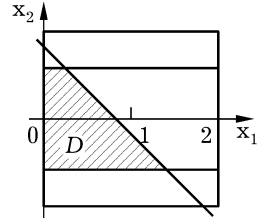


Рис. 6.12

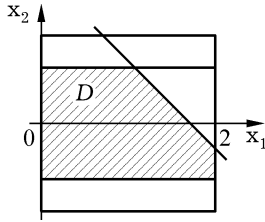


Рис. 6.13

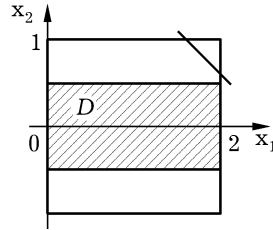


Рис. 6.14

Полученные формулы определяют значения совместной функции распределения $F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ при всех значениях y_1 и y_2 .

Пример 6.30. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) имеет совместную плотность распределения

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2}.$$

Найдем совместную плотность распределения случайных величин

$$Y_1 = e^{X_1} + e^{X_2} \quad \text{и} \quad Y_2 = e^{X_1} - e^{X_2}.$$

С помощью преобразования

$$Y_1(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2},$$

$$Y_2(x_1, x_2) = e^{x_1} - e^{x_2}$$

осуществим взаимнооднозначное преобразование плоскости в область D' , задаваемую неравенствами $y_1 + y_2 > 0$, $y_1 - y_2 > 0$, причем обратное преобразование

$$\psi_1(y_1, y_2) = \ln\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right),$$

$$\psi_2(y_1, y_2) = \ln\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)$$

имеет непрерывные частные производные

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_1}\psi_1(y_1, y_2) &= \frac{1}{y_1 + y_2}, & \frac{\partial}{\partial y_2}\psi_1(y_1, y_2) &= \frac{1}{y_1 + y_2}, \\ \frac{\partial}{\partial y_1}\psi_2(y_1, y_2) &= \frac{1}{y_1 - y_2}, & \frac{\partial}{\partial y_2}\psi_2(y_1, y_2) &= -\frac{1}{y_1 - y_2}\end{aligned}$$

и якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{y_1 + y_2} & \frac{1}{y_1 + y_2} \\ \frac{1}{y_1 - y_2} & -\frac{1}{y_1 - y_2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{y_1^2 - y_2^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= p_{X_1, X_2}(\psi_1(y_1, y_2), \psi_2(y_1, y_2))|J| = \\ &= \begin{cases} 0, & (y_1, y_2) \notin D'; \\ \frac{2}{\pi \left(\ln^2 \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) + \ln^2 \left(\frac{y_1 - y_2}{2} \right) + 1 \right) (y_1^2 - y_2^2)}, & (y_1, y_2) \in D'. \end{cases}\end{aligned}$$

Пример 6.31. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) распределена равномерно в круге D , определяемом неравенством $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 < 1$ (рис. 6.15). Найдём совместную плотность распределения случайных величин

$$Y_1 = X_1 + X_2 \quad \text{и} \quad Y_2 = X_1 - 2X_2 + 3.$$

Совместная плотность распределения двумерного случайного вектора (X_1, X_2) имеет вид

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \notin D; \\ 1/\pi, & (x_1, x_2) \in D. \end{cases}$$

Линейное преобразование

$$Y_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad Y_2(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 + 3,$$

в матричной форме имеет вид

$$\vec{Y}(\vec{x}) = \vec{x}B + \vec{c}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = (0, 3),$$

где B — невырожденная матрица. Это преобразование осуществляет отображение круга D в множество D' (рис. 6.16) точек внутри эллипса с центром в точке $O(1; 1)$, задаваемого уравнением

$$5y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_2^2 - 12y_1 - 6y_2 = 0.$$

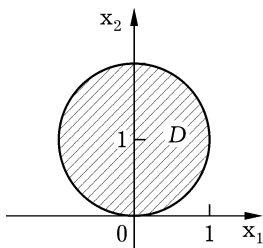


Рис. 6.15

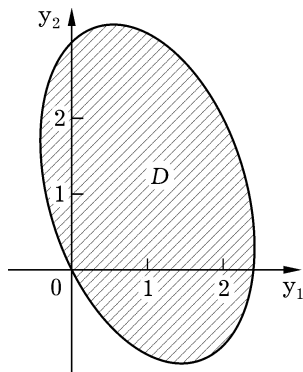


Рис. 6.16

Нетрудно подсчитать, что

$$\det B = -3.$$

Обозначая $\tilde{B} = B^{-1}$ обратную к B матрицу, получаем

$$p_{\vec{Y}}(\vec{y}) = p_{\vec{X}}(\vec{y}\tilde{B}) \frac{1}{|\det \tilde{B}|} = \begin{cases} 0, & (y_1, y_2) \notin D'; \\ 1/(3\pi), & (y_1, y_2) \in D'. \end{cases}$$

Пример 6.32. Пусть $X = (X_1, X_2, X_3)$ — *трехмерный случайный вектор*, распределенный по *нормальному закону*

с вектором средних значений $\vec{m}_{\vec{X}} = (2, -1, 0)$ и матрицей ковариаций

$$\Sigma_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор средних значений $\vec{m}_{\vec{Y}}$ и матрицу ковариаций $\Sigma_{\vec{Y}}$ случайного вектора $\vec{Y} = \vec{X} B + \vec{c}$, где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{c} = (-3, -2, 0).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_{\vec{Y}} &= B^T \Sigma_{\vec{X}} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/2 & 2 & 5/2 \\ 2 & 19/2 & 3 \\ 5/2 & 3 & 3/2 \end{pmatrix}, \\ \vec{m}_{\vec{Y}} &= \vec{m}_{\vec{X}} B + \vec{c} = (2, -1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \\ &\quad + (-3, -2, 0) = (-1, 1, 2). \end{aligned}$$

Пример 6.33. Пусть $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ — трехмерный случайный вектор — имеет нормальное распределение с вектором средних значений $\vec{m}_{\vec{X}} = (3, 1, 2)$ и матрицей ковариаций

$$\Sigma_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор \vec{c} и матрицу B линейного преобразования, переводящего вектор \vec{X} в вектор \vec{Y} , имеющий *стандартное нормальное распределение*.

Запишем квадратичную форму $\Sigma_{\vec{X}}(\vec{x})$, соответствующую матрице $\Sigma_{\vec{X}}$:

$$\Sigma_{\vec{X}}(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3.$$

Воспользовавшись методом Лагранжа выделения полных квадратов, получим

$$\begin{aligned}\Sigma_{\vec{X}}(\vec{x}) &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2 = \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2 + x_3^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.\end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - x_2 + x_3; \\ z_2 = 2x_2 + x_3; \\ z_3 = x_3. \end{cases}$$

Значит,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор \vec{c} задается равенством

$$\vec{c} = -(3, 1, 2) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-3, -2, 3).$$

Пример 6.34. Для определения абсолютного значения скорости движущейся в пространстве частицы были замерены ее составляющие (получены значения X_1 , X_2 и X_3). Абсолютное

значение скорости Y вычислялось по формуле

$$Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}.$$

Считая, что результаты измерений представляют собой независимые нормально распределенные случайные величины и отсутствуют систематические погрешности, причем средние квадратичные отклонения σ_1 , σ_2 и σ_3 малы по сравнению с истинными значениями составляющих m_1 , m_2 и m_3 , найдем распределение полученного абсолютного значения скорости Y .

Из условия задачи следует, что измеренные параметры представляют собой трехмерный случайный вектор $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$, распределенный по нормальному закону с вектором средних значений

$$\vec{m}_X = (m_1, m_2, m_3)$$

и матрицей ковариаций

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix},$$

а полученное абсолютное значение скорости Y является (скалярной) функцией

$$\vec{Y}(\vec{X}) = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$$

от вектора \vec{X} .

Для нахождения распределения Y воспользуемся методом линеаризации. Тогда полученное абсолютное значение скорости Y распределено приближенно по нормальному закону со средним значением

$$m_Y = Y(\vec{m}_{\vec{X}}) = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}.$$

Для определения дисперсии нормального закона вычислим матрицу частных производных

$$\begin{aligned}
 B = (b_i) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} Y(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{m}_{\vec{X}}} \right) = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \Big|_{\vec{x}=\vec{m}_{\vec{X}}} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \Big|_{\vec{x}=\vec{m}_{\vec{X}}} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \Big|_{\vec{x}=\vec{m}_{\vec{X}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}} \\ \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}} \\ \frac{m_3}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 \Sigma_Y &= B^T \Sigma_{\vec{X}} B = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{m_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}} & \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}} & \frac{m_3}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}} \end{pmatrix} \times \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{m_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}} \\ \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}} \\ \frac{m_3}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Перемножая матрицы, находим, что дисперсия нормального закона, приближенно описывающего распределение полученного абсолютного значения скорости Y , определяется формулой

$$\Sigma_Y = \frac{\sigma_1^2 m_1^2 + \sigma_2^2 m_2^2 + \sigma_3^2 m_3^2}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}.$$

Вопросы и задачи

6.1. Как могут быть связаны между собой случайные величины?

6.2. Что называют функцией от одномерной случайной величины?

6.3. Как найти ряд распределения функции от дискретной случайной величины?

6.4. Как найти функцию распределения функции от непрерывной случайной величины?

6.5. Как найти плотность распределения монотонной функции от непрерывной случайной величины?

6.6. Как найти плотность распределения кусочно монотонной функции от непрерывной случайной величины?

6.7. Как найти плотность распределения линейной функции от непрерывной случайной величины?

6.8. Как найти ряд распределения скалярной функции от дискретного случайного вектора?

6.9. Как найти функцию распределения скалярной функции от случайного вектора?

6.10. Что называют сверткой (композицией) плотностей распределения случайных величин?

6.11. Как найти функцию распределения векторной функции от случайного вектора?

6.12. Как изменится плотность распределения векторной функции от случайного вектора при линейном преобразовании?

6.13. Какое распределение имеет случайный вектор, полученный из нормально распределенного случайного вектора с помощью линейного преобразования?

6.14. Как изменяются вектор средних и матрица ковариаций нормально распределенного случайного вектора при линейном преобразовании?

6.15. Какими параметрами определяется общий нормальный закон? В каком случае нормальный закон называют вырожденным?

6.16. Какими свойствами обладает ковариационная матрица общего нормального закона?

6.17. Какая связь существует между нормально распределенным случайным вектором и случайным вектором, распределенным по стандартному нормальному закону?

6.18. В чем заключается метод линеаризации? Когда его можно применять?

6.19. Как вычислить параметры нормального распределения, приближенно описывающего распределение функции от случайного вектора в соответствии с методом линеаризации?

6.20. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения, представленный в табл. 6.18. Найдите ряд распределения случайной величины Y , если:

а) $Y = 10X - 1$; б) $Y = -X^2$; в) $Y = 2^X$.

Таблица 6.18

X	-0,5	0	0,5	1	1,5
P	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1

О т в е т: ряд распределения случайной величины Y представлен:

а) в табл. 6.19; б) в табл. 6.20; в) в табл. 6.21.

Таблица 6.19

Y	-6	-1	4	9	14
P	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1

Таблица 6.20

Y	-2,25	-1	-0,25	0
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Таблица 6.21

Y	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$
P	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1

6.21. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, 3)$. Найдите функцию распределения случайной величины $Y = X^2 + 1$.

О т в е т:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1; \\ \sqrt{y-1}/3, & 1 \leq y \leq 10; \\ 1, & y > 10. \end{cases}$$

6.22. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром λ . Найдите плотность распределения случайной величины Y , если:

а) $Y = e^{-X}$; б) $Y = X^3$; в) $Y = 1/X^2$; г) $Y = \sqrt{X}$.

О т в е т:

$$\text{а) } p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (0, 1); \\ \lambda y^{\lambda-1}, & y \in (0, 1); \end{cases}$$

$$\text{б) } p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \lambda e^{-\lambda \sqrt[3]{y}} / (3 \sqrt[3]{y^2}), & y > 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \lambda e^{-\lambda/\sqrt{y}} / (3y\sqrt{y}), & y > 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ 2\lambda y e^{-\lambda^2 y^2}, & y > 0. \end{cases}$$

6.23. Случайная величина X распределена по нормальному закону со средним значением m и дисперсией σ^2 . Найдите плотность распределения случайной величины Y , если:

а) $Y = |X|$; б) $Y = \arctg X$; в) $Y = X^2$; г) $Y = e^X$ (плотность *логарифмически нормального*, или *логнормального*, распределения).

О т в е т:

$$\text{а) } p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{e^{-(y-m)^2/(2\sigma^2)} + e^{-(y+m)^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi}\sigma}, & y > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (-\pi/2, \pi/2); \\ \frac{e^{-(\operatorname{tg} y - m)^2/(2\sigma^2)}}{2\sqrt{2\pi}\sigma \cos^2 y}, & y \in (-\pi/2, \pi/2); \end{cases}$$

$$\text{в) } p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{e^{-(\sqrt{y} - m)^2/(2\sigma^2)} + e^{-(\sqrt{y} + m)^2/(2\sigma^2)}}{2\sqrt{2\pi}y\sigma}, & y > 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{e^{-(\ln y - m)^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi}\sigma y}, & y > 0. \end{cases}$$

6.24. Распределение двумерной случайной величины (X_1, X_2)

Таблица 6.22

X_2	X_1		
	10	12	14
1	0,08	0,02	0,10
2	0,32	0,08	0,40

задается табл. 6.22. Найдите ряд распределения случайной величины Y , если:

а) $Y = X_1 - 2X_2 - 8$;

б) $Y = (X_1 - 12)^2 + X_2^2 - 1$;

в) $Y = (X_1 - 12)/X_2$.

О т в е т: ряд распределения случайной величины Y представлен:

а) в табл. 6.23; б) в табл. 6.24; в) в табл. 6.25.

Таблица 6.23

Y	-2	0	2	4
P	0,32	0,16	0,42	0,10

Таблица 6.24

Y	0	3	4	7
P	0,02	0,08	0,18	0,72

Таблица 6.25

Y	-2	-1	0	1	2
P	0,08	0,32	0,10	0,40	0,10

6.25. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) распределена равномерно в прямоугольнике с вершинами в точках $A_1(0; 0)$, $A_2(0; 2)$, $A_3(3; 2)$ и $A_4(3; 0)$. Найдите функцию распределения случайной величины Y , если: а) $Y = X_1 + X_2$; б) $Y = X_1/X_2$.

О т в е т:

$$\text{а) } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ y^2/12, & 0 < y \leq 2; \\ (y-1)/3, & 2 < y \leq 3; \\ [12 - (5-y)^2]/12, & 3 < y \leq 5; \\ 1, & y > 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ y/3, & 0 < y \leq 3/2; \\ 1 - 3/(4y), & y > 3/2. \end{cases}$$

6.26. Независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют стандартное нормальное распределение. Найдите плотности распределения случайной величины $Y = X_1/X_2$.

О т в е т:

$$p_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

6.27. Независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют распределение χ^2 с k и n степенями свободы соответственно. Найдите плотность распределения случайной величины $Y = nX_1/(kX_2)$ (плотность **F-распределения**, или **распределения Фишера — Снедекора**).

О т в е т:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} k^{k/2} n^{n/2} y^{k/2-1} (n+ky)^{-(k+n)/2}, & y > 0. \end{cases}$$

6.28. Независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют экспоненциальное распределение с параметрами $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$ соответственно. Воспользовавшись формулой свертки, найдите плотность распределения случайной величины $Y = X_1 + X_2$.

О т в е т:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ 2(e^{-y} - e^{-2y}), & y > 0. \end{cases}$$

6.29. Независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют равномерное распределение на отрезках $[0, 1]$ и $[0, 2]$ соответственно. Воспользовавшись формулой свертки, найдите плотность распределения случайной величины $Y = X_1 + X_2$.

О т в е т:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (0, 3); \\ y/2, & 0 < y \leq 1; \\ 1/2, & 1 < y \leq 2; \\ (3 - y)/2, & 2 < y < 3. \end{cases}$$

6.30. Распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины (X_1, X_2) задается табл. 6.26. Найдите распределение вероятностей двумерной случайной величины (Y_1, Y_2) , где $Y_1 = X_1 X_2$, $Y_2 = (X_1 - X_2)^2$.

Таблица 6.26

X_2	X_1	
	0	1
-1	0,15	0,20
0	0,25	0,10
2	0,10	0,20

Таблица 6.27

Y_2	Y_1		
	0	1	4
-1	0	0,25	0,20
0	0	0,25	0,10
2	0	0,20	0

О т в е т: Совместное распределение вероятностей двумерной случайной величины (Y_1, Y_2) представлено в табл. 6.27.

6.31. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) распределена равномерно в прямоугольнике с вершинами в точках $A_1(1; -1)$, $A_2(-1; 1)$, $A_3(0; 2)$ и $A_4(2; 0)$. Найдите совместную функцию распределения случайных величин $Y_1 = (X_1 - X_2)^2$ и $Y_2 = X_1 + X_2$.

О т в е т:

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & y_1 \leq 0 \text{ или } y_2 \leq 0; \\ y_2 \sqrt{y_1}/4, & 0 < y_1 \leq 4 \text{ и } 0 < y_2 \leq 2; \\ \sqrt{y_1}/2, & 0 < y_1 \leq 4 \text{ и } y_2 > 2; \\ y_2/2, & y_1 > 4 \text{ и } 0 < y_2 \leq 2; \\ 1, & y_1 > 4 \text{ и } y_2 > 2. \end{cases}$$

6.32. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) имеет совместную плотность распределения

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \notin D; \\ x_1 - x_2, & (x_1, x_2) \in D, \end{cases}$$

где D — треугольник с вершинами в точках $A_1(0; 0)$, $A_2(1; 1)$ и $A_3(2; 0)$. Найдите совместную плотность распределения случайных величин $Y_1 = X_2/(X_1 + 1)$ и $Y_2 = X_1 + X_2$.

О т в е т:

$$p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & (y_1, y_2) \notin D'; \\ \frac{(y_2 + 2)(y_2 + 1)(1 - y_1) - 2(y_2 + 1)}{(y_1 + 1)^3}, & (y_1, y_2) \in D', \end{cases}$$

где D' — область, ограниченная линиями $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ и $(y_2 + 2)(y_1 - 1) = -2$.

6.33. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) распределена равномерно в параллелограмме с вершинами в точках $A_1(-1; -1)$, $A_2(-1; 3)$, $A_3(4; 5)$ и $A_4(4; 1)$. Найдите плотность распределения случайных величин $Y_1 = 2X_1 + X_2 - 1$ и $Y_2 = X_1 - 3X_2 + 2$.

О т в е т:

$$p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & (y_1, y_2) \notin D'; \\ 1/140, & (y_1, y_2) \in D', \end{cases}$$

где D' — параллелограмм, ограниченный прямыми $3y_1 + y_2 - 27 = 0$, $3y_1 + y_2 + 8 = 0$, $y_1 + 12y_2 + 96 = 0$ и $y_1 + 12y_2 - 44 = 0$.

6.34. Пусть $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ — трехмерный случайный вектор, распределенный по нормальному закону с вектором средних значений $\vec{m}_{\vec{X}} = (1, 2, 1)$ и матрицей ковариаций

$$\Sigma_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Найдите вектор средних значений $\vec{m}_{\vec{Y}}$ и матрицу ковариаций $\Sigma_{\vec{Y}}$ случайного вектора $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}$, где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{c} = (1, 3).$$

О т в е т: $\vec{m}_{\vec{Y}} = (2, -1)$, $\Sigma_{\vec{Y}} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

6.35. Пусть $\vec{X} = (X_1, X_2)$ — двумерный случайный вектор, распределенный по нормальному закону с вектором средних значений $\vec{m}_{\vec{X}} = (1, 3)$ и матрицей ковариаций $\Sigma_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдите вектор \vec{c} и матрицу B линейного преобразования $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}$, переводящего вектор \vec{X} в вектор \vec{Y} , имеющий стандартное нормальное распределение.

Одним из возможных ответов является:

$$\vec{c} = (0, -\sqrt{3}), \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{15}/5 & 0 \\ -\sqrt{15}/15 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

6.36. Трехмерный случайный вектор $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ имеет нормальное распределение с вектором средних значений $\vec{m} = (10, 5, 3)$ и матрицей ковариаций

$$\Sigma_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,0042 & -0,0024 \\ 0,0042 & 0,0036 & 0,00288 \\ -0,0024 & 0,00288 & 0,0064 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись методом линеаризации, найдите параметры нормального закона, приближенно описывающего распределение величины $Y = (3X_1^2 + 1)/(X_2^2 + 2X_3^2)$.

О т в е т: $m_Y = 7$, $\sigma_Y \approx 0,26$.

6.37. Независимые случайные величины X_1 и X_2 распределены по нормальному закону с математическими ожиданиями $m_{X_1} = m_{X_2} = 900$ и средними квадратическими отклонениями $\sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} = 3$. Воспользовавшись методом линеаризации, найдите приближенное распределение случайного вектора $\vec{Y} = (Y_1, Y_2)$, где $Y_1 = X_1 X_2 / (X_1 + X_2)$ и $Y_2 = X_1^2 / (X_2 + 100)$.

О т в е т: Случайный вектор \vec{Y} имеет распределение, близкое к нормальному закону с вектором средних значений $\vec{m}_{\vec{Y}} = (450, 810)$ и матрицей ковариаций

$$\Sigma_{\vec{Y}} = \begin{pmatrix} 1,125 & 0,405 \\ 0,405 & 16,544 \end{pmatrix}.$$

7. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Из результатов предыдущих глав следует, что *вероятности* любых *событий*, связанных с каждой *случайной величиной* (в том числе *многомерной*), полностью определяются ее *законом распределения*, причем закон распределения *дискретной случайной величины* удобно задавать в виде *ряда распределения*, а непрерывной — в виде *плотности распределения*.

Однако при решении многих задач нет необходимости указывать закон распределения случайной величины, а достаточно характеризовать ее лишь некоторыми (неслучайными) числами. Такие числа (в теории вероятностей их называют *числовыми характеристиками* случайной величины) будут рассмотрены в настоящей главе. Отметим, что основную роль на практике играют *математическое ожидание*, задающее „центральное“ значение случайной величины, и *дисперсия*, характеризующая „разброс“ значений случайной величины вокруг ее математического ожидания. В математической статистике [XVII] для построения доверительных интервалов и проверки статистических гипотез широко используются *квантили*.

7.1. Математическое ожидание случайной величины

Как уже отмечалось выше, наиболее употребляемой на практике числовой характеристикой является *математическое ожидание*, или, по-другому, *среднее значение* случайной величины. Роль математического ожидания более подробно будет выяснена ниже (см. 9).

Определение 7.1. *Математическим ожиданием (средним значением) MX дискретной случайной величины X называют сумму произведений значений x_i случайной величины и вероятностей $p_i = \mathbf{P}\{X = x_i\}$, с которыми случайная величина принимает эти значения: $MX = \sum_i x_i p_i$. При этом, если множество возможных значений случайной величины X счетно, предполагается, что*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < +\infty,$$

т.е. ряд, определяющий математическое ожидание, сходится абсолютно $[IX]$; в противном случае говорят, что математическое ожидание случайной величины X не существует.

Математическое ожидание дискретной случайной величины имеет аналог в теоретической механике. Пусть на прямой расположена система материальных точек с массами p_i ($\sum_i p_i = 1$) и пусть x_i — координата i -й точки. Тогда центр масс системы будет иметь координату

$$\overline{X} = \frac{\sum_i x_i p_i}{\sum_i p_i} = \frac{\sum_i x_i p_i}{1} = \sum_i x_i p_i,$$

совпадающую с математическим ожиданием MX случайной величины X .

Пример 7.1. Пусть X — число угаданных номеров в „Спортлото 6 из 49“ (см. пример 6.4). В соответствии с *рядом распределения* в табл. 6.3 имеем

$$\begin{aligned} MX &= 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 + 5 \cdot p_5 + \\ &+ 6 \cdot p_6 \approx 0 \cdot 0,436 + 1 \cdot 0,413 + 2 \cdot 0,1324 + 3 \cdot 0,0176 + \\ &+ 4 \cdot 0,00097 + 5 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5} + 6 \cdot 7 \cdot 10^{-8} \approx 0,735. \end{aligned}$$

Таким образом, среднее число угаданных номеров равно 0,735.

Пример 7.2. Найдем математическое ожидание случайной величины X , распределенной по *биномиальному закону* (число успехов в n испытаниях по *схеме Бернулли* с вероятностью успеха p):

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{i=0}^n iP_n(i) = \sum_{i=0}^n iC_n^i p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^n i \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i} = \\ &= \sum_{i=1}^n np \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} p^{i-1} q^{n-i} = np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j p^j q^{n-1-j} = \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} P_{n-1}(j) = np. \end{aligned}$$

Пример 7.3. Пусть случайная величина X имеет *распределение Пуассона*. Тогда

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda} = \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \lambda e^{\lambda} e^{-\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

Пример 7.4. Найдем математическое ожидание случайной величины X , имеющей *геометрическое распределение*:

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{i=0}^{\infty} ipq^i = pq \sum_{i=0}^{\infty} iq^{i-1} = pq \left(\sum_{i=0}^{\infty} q^i \right)'_q = \\ &= pq \left(\frac{1}{1-q} \right)'_q = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

Пример 7.5. Положительная целочисленная случайная величина X имеет закон распределения, задаваемый выражением

$$p_i = \mathbf{P}\{X = i\} = \frac{1}{i(i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} ip_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i+1} = +\infty,$$

и, значит, математическое ожидание случайной величины X не существует.

Определение 7.2. Математическим ожиданием (средним значением) $\mathbf{M}X$ непрерывной случайной величины называют интеграл

$$\mathbf{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx.$$

При этом предполагается, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|p(x) dx < +\infty,$$

т.е. несобственный интеграл [VI], определяющий математическое ожидание, сходится абсолютно.

Заметим, что определение 7.2 является естественным обобщением определения 7.1, так как для непрерывной случайной величины с плотностью распределения $p(x)$

$$\mathbf{P}(x \leq X < x + \Delta x) \approx p(x)dx.$$

Так же как и в дискретном случае, математическое ожидание непрерывной случайной величины можно интерпретировать как центр масс стержня, плотность массы которого в точке x равна $p(x)$.

Пример 7.6. Найдем математическое ожидание *равномерно распределенной* на отрезке $[a, b]$ случайной величины X . Поскольку в этом случае $p(x) = 0$ при $x < a$ и $x > b$, то

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{b+a}{2}.$$

Как и следовало ожидать, MX совпадает с серединой отрезка $[a, b]$.

Пример 7.7. Найдем математическое ожидание случайной величины X , распределенной по *нормальному закону* с параметрами m и σ :

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_{m,\sigma}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} dx.$$

Делая замену $y = (x - m)/\sigma$, получаем

$$\begin{aligned} MX &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma y + m}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma y}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy + \\ &+ m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-y^2/2} dy + m \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Первый интеграл равен нулю в силу нечетности подынтегральной функции, а второй равен единице как интеграл от стандартной нормальной плотности. Таким образом,

$$MX = m,$$

т.е. параметр m имеет смысл математического ожидания случайной величины X (см. 4.6).

Пример 7.8. Пусть X — случайная величина, имеющая *распределение Вейбулла* (см. 4.6). Тогда, поскольку

$$p(x) = 0$$

при $x < 0$, то

$$\mathbf{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \int_0^{+\infty} \alpha \beta x^\beta e^{-\alpha x^\beta} dx.$$

Делая замену $y = \alpha x^\beta$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}X &= \int_0^{+\infty} y e^{-y} \alpha^{-1/\beta} y^{1/\beta-1} dy = \\ &= \alpha^{-1/\beta} \int_0^{+\infty} y^{1/\beta} e^{-y} dy = \alpha^{-1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right). \end{aligned}$$

Пример 7.9. Математическое ожидание случайной величины X , имеющей *гамма-распределение*, задается выражением

$$\mathbf{M}X = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\gamma x^\gamma}{\Gamma(\gamma)} e^{-\lambda x} dx.$$

Делая замену $y = \lambda x$, получаем

$$\mathbf{M}X = \frac{1}{\lambda \Gamma(\gamma)} \int_0^{+\infty} y^\gamma e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\lambda \Gamma(\gamma)} = \frac{\gamma}{\lambda},$$

что следует из свойства *гамма-функции Эйлера*: $\Gamma(\gamma + 1) = \gamma \Gamma(\gamma)$.

Пример 7.10. Случайная величина X имеет *распределение Коши*, т.е. распределение с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x| dx}{\pi(1+x^2)} = +\infty,$$

поскольку подынтегральная функция эквивалентна $1/(\pi x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Поэтому математическое ожидание случайной величины X не существует.

Замечание 7.1. В общем случае математическое ожидание случайной величины задается выражением

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x),$$

где $F(x)$ — *функция распределения* случайной величины X , а интеграл понимают в смысле Римана — Стильеса [XI]. Поскольку мы рассматриваем только дискретные и непрерывные случайные величины, последнее выражение можно трактовать как обобщенную запись формул для математических ожиданий дискретной и непрерывной случайных величин.

7.2. Математическое ожидание функции от случайной величины. Свойства математического ожидания

Прежде чем переходить к описанию свойств *математического ожидания случайной величины*, позволяющих, как будет видно из примеров, в ряде случаев существенно упростить

его вычисление, определим математическое ожидание функции случайной величины (*случайного вектора*). Итак, пусть

$$Y = Y(X)$$

является функцией от случайной величины. Для определения $\mathbf{MY} = \mathbf{MY}(X)$ можно было бы сначала по формулам из **6.2** найти распределение случайной величины Y и затем уже, воспользовавшись определением 7.1 или 7.2, вычислить \mathbf{MY} . Однако мы применим другой, более удобный подход.

Рассмотрим сначала *дискретную случайную величину* X , принимающую значения x_1, \dots, x_n . Тогда случайная величина $Y = Y(X)$, как мы уже знаем, принимает значения $Y(x_1), \dots, Y(x_n)$ с вероятностями

$$p_i = \mathbf{P}\{X = x_i\}$$

и ее математическое ожидание определяется формулой

$$\mathbf{MY} = \mathbf{MY}(X) = \sum_{i=1}^n Y(x_i)p_i. \quad (7.1)$$

Если же величина X принимает счетное число значений, то математическое ожидание Y определяется формулой

$$\mathbf{MY} = \mathbf{MY}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} Y(x_i)p_i, \quad (7.2)$$

но при этом для существования математического ожидания требуется абсолютная сходимость соответствующего ряда [IX], т.е. выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{\infty} |Y(x_i)|p_i < +\infty. \quad (7.3)$$

Пример 7.11. Определим математическое ожидание выигрыша Y в „Спортлото 6 из 49“ (см. пример 6.4). Поскольку

Y является функцией от случайной величины X — числа угаданных номеров, то, воспользовавшись формулой для математического ожидания функции от случайной величины и рядом распределения (см. табл. 6.3), получим

$$\begin{aligned} MY = M(X) &= Y(0)P\{X = 0\} + Y(1)P\{X = 1\} + \\ &+ Y(2)P\{X = 2\} + Y(3)P\{X = 3\} + Y(4)P\{X = 4\} + \\ &+ Y(5)P\{X = 5\} + Y(6)P\{X = 6\} \approx \\ &\approx -0,3 \cdot (0,436 + 0,413 + 0,1324) + 2,7 \cdot 0,0176 + \\ &+ 54,7 \cdot 0,00097 + 699,7 \cdot 2 \cdot 10^{-5} + 9999,7 \cdot 7 \cdot 10^{-8} \approx -0,179. \end{aligned}$$

Таким образом, математическое ожидание выигрыша отрицательно и равно примерно 18 к., а это означает, что играющий в среднем проигрывает больше половины стоимости билета (30 к.). Естественно, мы получим то же значение MY , если воспользуемся рядом распределения случайной величины Y , представленным в табл. 6.5. #

Для непрерывной случайной величины X , имеющей плотность распределения $p(x)$, математическое ожидание случайной величины $Y = Y(X)$ можно найти, используя аналогичную (7.3) формулу

$$M = MY(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x)p(x) dx, \quad (7.4)$$

причем и здесь требуется выполнение условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(x)|p(x) dx < +\infty.$$

В дальнейшем, чтобы каждый раз не оговаривать условие существования математического ожидания, будем предполагать, что соответствующие сумма или интеграл сходятся абсолютно.

Аналогично можно вычислить математическое ожидание функции от многомерной случайной величины. Так, математическое ожидание $\mathbf{M}Y$ функции $Y = Y(X_1, X_2)$ от дискретной двумерной случайной величины (X_1, X_2) можно найти, воспользовавшись формулой

$$\mathbf{M}Y = \mathbf{M}Y(X_1, X_2) = \sum_{i,j} Y(x_i, y_j) p_{ij},$$

где $p_{ij} = \mathbf{P}\{X_1 = x_i, X_2 = y_j\}$, а функции $Y = Y(X_1, X_2)$ от двумерной непрерывной случайной величины (X_1, X_2) — формулой

$$\mathbf{M}Y = \mathbf{M}Y(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x, y) p_{X_1, X_2}(x, y) dx dy, \quad (7.5)$$

где $p_{X_1, X_2}(x, y)$ — совместная плотность распределения случайных величин X_1 и X_2 .

Докажем теперь теорему о свойствах математического ожидания.

Теорема 7.1. Математическое ожидание удовлетворяет следующим свойствам.

1. Если случайная величина X принимает всего одно значение C с вероятностью единица (т.е., по сути дела, не является случайной величиной), то $\mathbf{M}C = C$.

2. $\mathbf{M}(aX + b) = a\mathbf{M}X + b$, где a, b — постоянные.

3. $\mathbf{M}(X_1 + X_2) = \mathbf{M}X_1 + \mathbf{M}X_2$.

4. $\mathbf{M}(X_1 X_2) = \mathbf{M}X_1 \cdot \mathbf{M}X_2$ для независимых случайных величин X_1 и X_2 .

◀ Если случайная величина X принимает всего одно значение C с вероятностью единица, то

$$\mathbf{M}C = C \cdot 1 = C,$$

откуда следует утверждение 1.

Доказательство свойств 2 и 4 проведем для непрерывных случайных величин (для дискретных случайных величин пред-

лагаем читателю провести самостоятельно), а свойство 3 докажем для дискретных случайных величин (для непрерывных — доказать самостоятельно).

Найдем математическое ожидание случайной величины $Y = aX + b$ ($Y(x) = ax + b$):

$$\begin{aligned} MY &= M(aX + b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b)p_X(x) dx = \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = aMX + b \cdot 1, \end{aligned}$$

т.е. приходим к утверждению 2.

Пусть теперь $Y = X_1 + X_2$ ($Y(x_1, x_2) = x_1 + x_2$). Тогда

$$\begin{aligned} MY &= M(X_1 + X_2) = \sum_{i,j} (x_i + y_j)p_{ij} = \\ &= \sum_{i,j} x_i p_{ij} + \sum_{i,j} y_j p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} + \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \\ &= \sum_i x_i p_{X_1 i} + \sum_j y_j p_{X_2 j} = MX_1 + MX_2, \end{aligned}$$

и, значит, утверждение 3 доказано.

Наконец, если X_1 и X_2 независимые случайные величины, то для математического ожидания их произведения $Y = X_1 X_2$ (воспользовавшись формулой 7.5 и теоремой 5.3) имеем:

$$\begin{aligned} MY &= M(X_1 X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 p_{X_1}(x_1) dx_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_2 p_{X_2}(x_2) dx_2 \right) = MX_1 MX_2. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Замечание 7.2. В соответствии с ранее принятым соглашением в теореме 7.1 предполагается, что математические ожидания случайных величин X , X_1 и X_2 существуют. Однако математическое ожидание суммы случайных величин может существовать даже тогда, когда математические ожидания обоих слагаемых не существуют. Так,

$$\mathbf{M}(X - X) = \mathbf{M}0 = 0$$

несмотря на то, что $\mathbf{M}X$ может и не существовать.

Очевидно также, что свойство 3 можно обобщить на случай произвольного числа слагаемых, т.е.

$$\mathbf{M}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{M}X_1 + \dots + \mathbf{M}X_n.$$

Замечание 7.3. Свойство 4 также допускает обобщение на произведение конечного числа *независимых* (в совокупности) случайных величин:

$$\mathbf{M}(X_1 \cdot X_2 \dots X_n) = \mathbf{M}X_1 \cdot \mathbf{M}X_2 \dots \mathbf{M}X_n.$$

Пример 7.12. Математическое ожидание случайной величины X , распределенной по *стандартному нормальному закону*, имеет вид

$$\mathbf{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 0.$$

В примере 6.7 было показано, что случайная величина

$$Y = \sigma X + m$$

распределена по *нормальному закону* с параметрами m и σ . Таким образом, согласно свойству 2 математического ожидания,

$$\mathbf{M}Y = \sigma \mathbf{M}X + m = m,$$

и, следовательно, параметр m *нормального распределения* является математическим ожиданием. Этот результат был получен непосредственным вычислением в примере 7.7.

Пример 7.13. Представим число успехов X в n испытаниях по *схеме Бернулли* в виде

$$X = X_1 + \dots + X_n,$$

где X_i — число успехов в i -м испытании. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{M}X_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Значит, в силу свойства 3

$$\mathbf{M}X = \mathbf{M}X_1 + \dots + \mathbf{M}X_n = np,$$

что совпадает с результатами примера 7.2, но получено с минимальными вычислениями. #

Перейдем теперь к многомерному случаю и рассмотрим n -мерный случайный вектор $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$.

Определение 7.3. Вектор $\vec{m} = (\mathbf{M}X_1, \dots, \mathbf{M}X_n)$ называют *вектором математических ожиданий (средних значений)* случайного вектора \vec{X} .

Из замечания 7.2 и свойства 2 математического ожидания следует, что если случайный вектор \vec{Y} связан со случайным вектором \vec{X} линейной зависимостью

$$\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c},$$

то

$$\vec{m}_{\vec{Y}} = \vec{m}_{\vec{X}}B + \vec{c}$$

(покажите это самостоятельно). В частном случае нормально распределенного вектора \vec{X} этот результат был получен в 6.6.

7.3. Дисперсия. Моменты высших порядков

Две случайные величины могут иметь одинаковые средние значения, но их возможные значения будут по-разному рассеиваться вокруг этого среднего. Например, средний балл на экзамене в двух группах равен „4“, но в первой группе почти все студенты получили „4“, а во второй группе „четверочников“ нет вообще, но есть как „пятерочники“, так и „троечники“.

Поэтому, наряду со средним значением, хотелось бы иметь и число, характеризующее „разброс“ случайной величины относительно своего среднего значения. Такой характеристикой обычно служит *дисперсия*.

Кроме дисперсии можно предложить и другие меры разброса, например *центральные моменты* любого четного порядка, которые также будут определены в этом параграфе. Однако именно использование дисперсии и других характеристик второго порядка (*ковариаций*) позволяет применить в теории вероятностей сильно развитый аппарат *гильбертовых пространств* [IX]. Особо важную роль этот аппарат играет в теории так называемых *стационарных* в широком смысле *случайных процессов*, которые, в свою очередь, являются основной математической моделью в ряде практических приложений [XVIII].

Определение 7.4. *Вторым начальным моментом* (обычно опускают слово „начальный“) m_2 случайной величины X называют математическое ожидание квадрата X ($Y(x) = x^2$):

$$m_2 = \mathbf{M}X^2 = \sum_i x_i^2 p_i$$

для *дискретной случайной величины* X и

$$m_2 = \mathbf{M}X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$$

для *непрерывной*.

Определение 7.5. *Дисперсией* DX случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее среднего значения, т.е.

$$DX = M(X - MX)^2.$$

Используя формулы (7.1)–(7.4), в которых положено

$$Y(x) = (x - MX)^2,$$

легко написать расчетные формулы для дисперсий дискретной и непрерывной случайных величин соответственно:

$$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 p_i \quad (7.6)$$

и

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 p(x) dx. \quad (7.7)$$

Замечание 7.4. Из определения непосредственно следует, что дисперсия любой случайной величины является неотрицательным числом.

Дисперсия DX представляет собой второй момент *центрированной* (имеющей нулевое математическое ожидание) *случайной величины*

$$\overset{\circ}{X} = X - MX.$$

Поэтому иногда дисперсию называют **вторым центральным моментом** случайной величины.

Дисперсия имеет аналог в теоретической механике — центральный (относительно центра масс) момент инерции массы, распределенной на оси с линейной плотностью $p(x)$.

Выведем некоторые свойства дисперсии.

Теорема 7.2. Дисперсия удовлетворяет следующим свойствам.

1. Если случайная величина X принимает всего одно значение C с вероятностью единица, то $\mathbf{D}C = 0$.

$$2. \mathbf{D}(aX + b) = a^2 \mathbf{D}X.$$

$$3. \mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2.$$

4. $\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y$ для независимых случайных величин X и Y .

◀ Если случайная величина X с вероятностью единица принимает всего одно значение C , то в силу свойства 1 математического ожидания ($\mathbf{M}X = C$) получаем

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X - C)^2 = (C - C)^2 \cdot 1,$$

откуда вытекает утверждение 1.

Определим дисперсию случайной величины

$$Y = aX + b.$$

Используя свойство 2 математического ожидания, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}Y &= \mathbf{M}(Y - \mathbf{M}Y) = \mathbf{M}(aX + b - \mathbf{M}(aX + b))^2 = \\ &= \mathbf{M}(aX + b - a\mathbf{M}X - b)^2 = \mathbf{M}(a(X - \mathbf{M}X))^2 = \\ &= \mathbf{M}(a^2(X - \mathbf{M}X)^2) = a^2 \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2. \end{aligned}$$

Поэтому справедливо утверждение 2.

Далее, согласно свойствам 2 и 3 математического ожидания, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}X &= \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 = \mathbf{M}(X^2 - 2X\mathbf{M}X + (\mathbf{M}X)^2) = \\ &= \mathbf{M}X^2 - 2(\mathbf{M}X)^2 + (\mathbf{M}X)^2 = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2, \end{aligned}$$

т.е. приходим к утверждению 3.

Наконец, пусть X и Y — независимые случайные величины. Тогда, используя независимость случайных величин (см. лемму 1)

$$\overset{\circ}{X} = X - \mathbf{M}X \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{Y} = Y - \mathbf{M}Y,$$

а также свойства 2–4 математического ожидания, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(X + Y) &= \mathbf{M}(X + Y - \mathbf{M}(X + Y))^2 = \\ &= \mathbf{M}((X - \mathbf{M}X) + (Y - \mathbf{M}Y))^2 = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 + \\ &\quad + 2\mathbf{M}((X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y)) + \mathbf{M}(Y - \mathbf{M}Y)^2 = \\ &= \mathbf{D}X + 2(\mathbf{M}\overset{\circ}{X} \cdot \overset{\circ}{MY}) + \mathbf{D}Y = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y, \end{aligned}$$

поскольку $\mathbf{M}\overset{\circ}{X} = 0$ и $\overset{\circ}{MY} = 0$. Значит, имеет место утверждение 4. ►

Замечание 7.5. Можно показать, что справедливо и свойство, обратное свойству 1, а следовательно, имеет место утверждение: дисперсия случайной величины X равна нулю тогда и только тогда, когда X с вероятностью 1 принимает всего одно значение.

Замечание 7.6. Свойство 3 дает весьма удобную формулу для расчета дисперсии случайной величины с помощью ЭВМ или микрокалькулятора. Действительно, если вычислять дисперсию по первоначальной формуле (7.6), то необходимо два раза суммировать по i : первый раз при подсчете математического ожидания и второй — дисперсии. Свойство 3 позволяет обходиться одним циклом: можно одновременно суммировать с коэффициентами p_i и сами значения случайной величины, и их квадраты.

Замечание 7.7. Очевидно, что свойство 4 справедливо для суммы не только двух, но и любого числа n попарно независимых случайных величин

$$\mathbf{D}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{D}X_1 + \dots + \mathbf{D}X_n.$$

Замечание 7.8. В 7.4 будет приведена формула для дисперсии суммы любых (а не только независимых) слагаемых. #

Нетрудно видеть, что дисперсия $\mathbf{D}X$ имеет размерность квадрата размерности случайной величины X . Для практических же целей удобно иметь величину, характеризующую разброс значений случайной величины вокруг ее математического ожидания, размерность которой совпадает с размерностью X . В качестве такой величины естественно использовать $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}X}$, которую называют **средним квадратичным отклонением** случайной величины X (иногда также стандартом, или стандартным отклонением).

Пример 7.14. Найдем дисперсию случайной величины X , распределенной по *закону Пуассона*. Для этого воспользуемся свойством 3 дисперсии. Математическое ожидание $\mathbf{M}X = \lambda$ было найдено в примере 7.3. Определим второй момент:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}X^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda} = \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \lambda \left(\sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \right) = \\ &= \lambda(\mathbf{M}X + 1) = \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{D}X = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda,$$

и, значит, дисперсия X , так же как и математическое ожидание, совпадает с параметром λ .

Пример 7.15. Пусть X — число успехов в n испытаниях по *схеме Бернулли*. Дисперсию X можно подсчитать так же, как в примере 7.2 было подсчитано математическое ожидание, а именно непосредственно воспользоваться определением 7.5

дисперсии. Однако мы поступим другим образом. Для этого снова (см. пример 7.13) представим X в виде суммы

$$X = X_1 + \dots + X_n.$$

Дисперсия каждого слагаемого равна:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}X_i &= (0 - \mathbf{M}X_i)^2 q + (1 - \mathbf{M}X_i)^2 p = \\ &= (-p)^2 q + (1 - p)^2 p = p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = pq. \end{aligned}$$

Учитывая, что случайные величины X_i являются независимыми, в силу свойства 4 дисперсии получаем

$$\mathbf{D}X = \mathbf{D}X_1 + \dots + \mathbf{D}X_n = npq.$$

Пример 7.16. Дисперсия равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$ случайной величины X определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{D}X &= \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \\ &= \frac{1}{3(b-a)} \left(\left(b - \frac{b+a}{2}\right)^3 - \left(a - \frac{b+a}{2}\right)^3 \right) = \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Пример 7.17. Дисперсия случайной величины X , распределенной по нормальному закону с параметрами m и σ , имеет вид

$$\mathbf{D}X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \varphi_{m,\sigma}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-m)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Делая замену $y = (x-m)/\sigma$, получаем

$$\mathbf{D}X = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy.$$

Полагая $u = y/\sqrt{2\pi}$, $dv = ye^{-y^2/2}dy$ и интегрируя по частям, находим

$$\mathbf{D}X = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy = \sigma^2.$$

Таким образом, дисперсия нормально распределенной случайной величины совпадает с квадратом второго параметра. Этого и следовало ожидать, поскольку σ носит название среднего квадратичного отклонения.

Пример 7.18. Для определения дисперсии случайной величины X , имеющей *гамма-распределение*, воспользуемся свойством 3 дисперсии. Имеем

$$\mathbf{M}X^2 = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\gamma x^{\gamma+1}}{\Gamma(\gamma)} e^{-\lambda x} dx,$$

или после замены $y = \lambda x$

$$\mathbf{M}X^2 = \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(\gamma)} \int_0^{+\infty} y^{\gamma+1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\gamma+2)}{\lambda^2 \Gamma(\gamma)} = \frac{\gamma(\gamma+1)}{\lambda^2}.$$

Учитывая, что $\mathbf{M}X = \gamma/\lambda$ (см. пример 7.9), окончательно получаем

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2 = \frac{\gamma(\gamma+1)}{\lambda^2} - \frac{\gamma^2}{\lambda^2} = \frac{\gamma}{\lambda^2}.$$

Пример 7.19. Пусть X — случайная величина, имеющая дисперсию $\mathbf{D}X$. Введем новую случайную

$$Y = X - a.$$

Найдем число a , при котором достигается минимум $\mathbf{M}Y^2$. Согласно свойствам 2 и 3 дисперсии, имеем

$$\mathbf{M}Y^2 = \mathbf{D}Y + (\mathbf{M}Y)^2 = \mathbf{D}X + (\mathbf{M}X - a)^2.$$

Первое слагаемое от a не зависит, а второе принимает минимальное значение, равное 0, при $a = \mathbf{M}X$. Таким образом, в качестве a нужно взять $\mathbf{M}X$, а само минимальное значение $\mathbf{M}Y^2$ совпадает с дисперсией $\mathbf{D}X$. #

В некоторых теоретических исследованиях встречаются моменты высших порядков.

Определение 7.6. Моментом k -го порядка m_k (k -м моментом) случайной величины X называют математическое ожидание k -й степени случайной величины X :

$$m_k = \mathbf{M}X^k = \sum_i x_i^k p_i,$$

если X — дискретная случайная величина, и

$$m_k = \mathbf{M}X^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx,$$

если X — непрерывная случайная величина.

Иногда k -й момент называют также **начальным моментом k -го порядка**.

Определение 7.7. Центральным моментом k -го порядка $\overset{\circ}{m}_k$ (k -м центральным моментом) случайной величины X называют математическое ожидание k -й степени случайной величины $\overset{\circ}{X} = X - \mathbf{M}X$:

$$\overset{\circ}{m}_k = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^k = \sum_i (x_i - \mathbf{M}X)^k p_i$$

и

$$\overset{\circ}{m}_k = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}X)^k p(x) dx$$

для дискретной и непрерывной случайных величин X соответственно.

Момент первого порядка совпадает с математическим ожиданием, центральный момент первого порядка равен нулю, центральный момент второго порядка является дисперсией. Отметим также, что в теоретических изысканиях рассматривают моменты не обязательно целого порядка k .

7.4. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин

Пусть (X_1, X_2) — двумерный случайный вектор.

Определение 7.8. Ковариацией (корреляционным моментом) $\text{cov}(X_1, X_2)$ случайных величин X_1 и X_2 называют математическое ожидание произведения случайных величин $\overset{\circ}{X}_1 = X_1 - \mathbf{M}X_1$ и $\overset{\circ}{X}_2 = X_2 - \mathbf{M}X_2$:

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \mathbf{M}(\overset{\circ}{X}_1 \overset{\circ}{X}_2) = \mathbf{M}((X_1 - \mathbf{M}X_1)(X_2 - \mathbf{M}X_2)).$$

Запишем формулы, определяющие ковариацию.

Для дискретных случайных величин X_1 и X_2

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \sum_{i,j} (x_i - \mathbf{M}X_1)(y_j - \mathbf{M}X_2)p_{ij},$$

для непрерывных случайных величин X_1 и X_2

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mathbf{M}X_1)(x_2 - \mathbf{M}X_2)p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Заметим, что введение понятия ковариации позволяет записать выражение для дисперсии суммы случайных величин и к уже имеющимся свойствам дисперсии добавить еще одно:

$$\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y + 2\mathbf{cov}(X, Y)$$

(свойство 5 дисперсии), справедливое для произвольных, а не только независимых случайных величин X и Y . Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(X + Y) &= \mathbf{M}((X + Y) - \mathbf{M}(X + Y))^2 = \\ &= \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 + 2\mathbf{M}((X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y)) + \mathbf{M}(Y - \mathbf{M}Y)^2 = \\ &= \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y + 2\mathbf{cov}(X, Y). \end{aligned}$$

Свойство 5 дисперсии допускает обобщение на произвольное число слагаемых:

$$\mathbf{D}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{D}X_1 + \dots + \mathbf{D}X_n + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{cov}(X_i, X_j).$$

Следующая теорема устанавливает основные свойства ковариации.

Теорема 7.3. Ковариация имеет следующие свойства.

1. $\mathbf{cov}(X, X) = \mathbf{D}X$.
2. $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0$ для независимых случайных величин X_1 и X_2 .
3. Если $Y_1 = a_1X_1 + b_1$ и $Y_2 = a_2X_2 + b_2$, то $\mathbf{cov}(Y_1, Y_2) = a_1a_2\mathbf{cov}(X_1, X_2)$.
4. $-\sqrt{\mathbf{D}X_1\mathbf{D}X_2} \leq \mathbf{cov}(X_1, X_2) \leq \sqrt{\mathbf{D}X_1\mathbf{D}X_2}$.
5. Равенство

$$|\mathbf{cov}(X_1, X_2)| = \sqrt{\mathbf{D}X_1\mathbf{D}X_2} \quad (7.8)$$

верно тогда и только тогда, когда случайные величины X_1 и X_2 связаны линейной зависимостью, т.е. существуют такие числа a и b , при которых

$$X_2 = aX_1 + b. \quad (7.9)$$

6. $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = \mathbf{M}(X_1X_2) - \mathbf{M}X_1\mathbf{M}X_2$.

◀ Утверждение 1 вытекает из очевидного соотношения

$$\mathbf{cov}(X, X) = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2.$$

Если случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми (и имеют математические ожидания), то

$$\begin{aligned}\mathbf{cov}(X_1, X_2) &= \mathbf{M}((X_1 - \mathbf{M}X_1)(X_2 - \mathbf{M}X_2)) = \\ &= (\mathbf{M}(X_1 - \mathbf{M}X_1))(\mathbf{M}(X_2 - \mathbf{M}X_2)),\end{aligned}$$

откуда приходим к утверждению 2.

Пусть $Y_1 = a_1X_1 + b_1$, $Y_2 = a_2X_2 + b_2$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{cov}(Y_1, Y_2) &= \mathbf{M}((Y_1 - \mathbf{M}Y_1)(Y_2 - \mathbf{M}Y_2)) = \\ &= \mathbf{M}((a_1X_1 + b_1 - a_1\mathbf{M}X_1 - b_1)(a_2X_2 + b_2 - a_2\mathbf{M}X_2 - b_2)) = \\ &= \mathbf{M}(a_1a_2(X_1 - \mathbf{M}X_1)(X_2 - \mathbf{M}X_2)).\end{aligned}$$

Поэтому справедливо утверждение 3.

Рассмотрим дисперсию случайной величины

$$Y_x = xX_1 - X_2,$$

где x — произвольное число. В силу свойств дисперсии и свойства 3 ковариации

$$\begin{aligned}\mathbf{D}Y_x &= \mathbf{D}(xX_1) + 2\mathbf{cov}(xX_1, -X_2) + \mathbf{D}(-X_2) = \\ &= x^2\mathbf{D}X_1 - 2x\mathbf{cov}(X_1, X_2) + \mathbf{D}X_2.\end{aligned}$$

Дисперсия $\mathbf{D}Y_x$, как функции от x , представляет собой квадратный трехчлен. Но дисперсия любой случайной величины не может быть меньше нуля, а это означает, что дискриминант

$$D = (2\mathbf{cov}(X_1, X_2))^2 - 4\mathbf{D}X_1\mathbf{D}X_2 \quad (7.10)$$

квадратного трехчлена $\mathbf{D}Y_x$ является неположительным, т.е. имеет место утверждение 4.

Далее, пусть выполнено равенство (7.8). Значит, дискриминант (7.10) равен нулю, и уравнение

$$\mathbf{D}Y_x = 0$$

имеет решение, которое обозначим a . Тогда в соответствии с замечанием 7.5 случайная величина $Y_a = aX_1 - X_2$ принимает всего одно значение (допустим, b), и, следовательно,

$$X_2 = aX_1 - b,$$

т.е. из (7.8) вытекает (7.9).

Наоборот, пусть выполнено (7.9). Тогда в соответствии со свойством 1 дисперсии $\mathbf{D}Y_a = 0$, а значит, дискриминант (7.10) является неотрицательным. Поскольку при доказательстве утверждения 4 было показано, что этот дискриминант неположителен, то он равен нулю, откуда следует, что

$$|\mathbf{cov}(X_1, X_2)| = \sqrt{\mathbf{D}X_1 \mathbf{D}X_2}.$$

Таким образом, из (7.9) вытекает (7.8). Утверждение 5 полностью доказано.

Наконец, раскрывая скобки в формуле, определяющей ковариацию, и используя свойства математического ожидания, получаем утверждение 6, которое часто бывает полезным при численном подсчете ковариации. ►

Замечание 7.9. Если случайные величины X_1 и X_2 связаны линейной зависимостью $X_2 = aX_1 - b$, $a \neq 0$, то в соответствии со свойствами 3 и 1

$$\mathbf{cov}(X_1, X_2) = a \mathbf{cov}(X_1, X_1) = a \mathbf{D}X_1.$$

Поэтому знак ковариации совпадает со знаком коэффициента a и свойство 5 допускает следующее уточнение:

$$\mathbf{cov}(X_1, X_2) = \begin{cases} \sqrt{\mathbf{D}X_1 \mathbf{D}X_2}, & a > 0; \\ -\sqrt{\mathbf{D}X_1 \mathbf{D}X_2}, & a < 0. \end{cases}$$

Замечание 7.10. Из свойств дисперсии и ковариации можно получить еще одно полезное при расчетах свойство дисперсии

$$\mathbf{D}(a_1 X_1 + a_2 X_2 + b) = a_1^2 \mathbf{D}X_1 + a_2^2 \mathbf{D}X_2 + 2a_1 a_2 \mathbf{cov}(X_1, X_2).$$

Докажите это свойство самостоятельно.

Замечание 7.11. Как следует из свойства 2, ковариация независимых случайных величин равна нулю. Однако обратное, вообще говоря, неверно. Существуют зависимые и даже функционально зависимые случайные величины, ковариация которых равна нулю, что демонстрирует следующий пример.

Пример 7.20. Пусть случайная величина X имеет *равномерное* в интервале $(-1, 1)$ *распределение*, а случайная величина Y связана со случайной величиной X функциональной зависимостью $Y = X^2$ (см. 6.1). Покажем, что $\mathbf{cov}(X, Y) = 0$, несмотря на функциональную зависимость X и Y .

Действительно, учитывая равенство $\mathbf{M}X = 0$ и свойство 6 ковариации, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{cov}(X, Y) &= \mathbf{M}(X \cdot Y) - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y = \\ &= \mathbf{M}X^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 p(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^3 dx = 0. \end{aligned}$$

Определение 7.9. *Случайные величины X и Y называют некоррелированными*, если их ковариация равна нулю, т.е.

$$\mathbf{cov}(X, Y) = 0.$$

Приведенный выше пример показывает, что из некоррелированности случайных величин не следует их независимость. Можно сказать, что ковариация случайных величин отражает, насколько их зависимость близка к линейной.

Рассмотрим теперь n -мерный случайный вектор

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n).$$

Определение 7.10. Матрицей ковариаций (ковариационной матрицей) случайного вектора \vec{X} называют матрицу

$$\Sigma = (\sigma_{ij}) = (\text{cov}(X_i, X_j)),$$

состоящую из ковариаций случайных величин X_i и X_j .

Пример 7.21. Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y) , распределенную по нормальному закону. Тогда

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-m_1)(y-m_2)}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ &\times \exp \left[\left(\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} - \frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{2\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} + \frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \right) \right] dx dy. \end{aligned}$$

Делая замену $u = (x - m_1)/\sigma_1$, $v = (y - m_2)/\sigma_2$, получаем

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \\ &= \sigma_1\sigma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{uv}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uv + v^2) \right\} du dv = \\ &= \sigma_1\sigma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v}{2\pi(1-\rho^2)} \exp \left\{ -\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)} \right\} dv du. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл равен ρu . Поэтому

$$\text{cov}(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = \rho\sigma_1\sigma_2.$$

Поскольку $\mathbf{D}X = \sigma_1^2$, $\mathbf{D}Y = \sigma_2^2$, то матрица Σ представляет собой матрицу ковариаций (в данном случае понятие „ковариационная матрица“ мы ввели раньше, нежели выяснили смысл этого понятия).

Аналогично в общем случае n -мерного нормального случайного вектора

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$$

элементы σ_{ij} ковариационной матрицы Σ являются ковариациями случайных величин X_i и X_j . #

Основные свойства матрицы ковариаций определяются следующей теоремой.

Теорема 7.4. 1. Матрица ковариаций Σ является симметрической.

2. Пусть m -мерный случайный вектор $\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ получен из n -мерного случайного вектора $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ с помощью линейного преобразования B , т.е.

$$\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}.$$

Тогда матрица ковариаций $\Sigma_{\vec{Y}}$ случайного вектора \vec{Y} связана с матрицей ковариаций $\Sigma_{\vec{X}}$ случайного вектора \vec{X} соотношением

$$\Sigma_{\vec{Y}} = B^T \Sigma_{\vec{X}} B.$$

3. Матрица ковариаций Σ является неотрицательно определенной, т.е. $\vec{b} \Sigma \vec{b}^T \geq 0$ для всех векторов \vec{b} .

◀ Утверждение 1 следует непосредственно из определения матрицы ковариаций.

Пусть матрица B линейного преобразования $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}$ имеет вид $B = (b_{ij})$. Вычислим ковариацию случайных величин

Y_i и Y_j :

$$\begin{aligned}\mathbf{cov}(Y_i, Y_j) &= \mathbf{M}(\overset{\circ}{Y}_i \overset{\circ}{Y}_j) = \mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^n \overset{\circ}{X}_k b_{ki} \sum_{l=1}^n \overset{\circ}{X}_l b_{lj}\right) = \\ &= \sum_{k,l=1}^n \mathbf{M}(\overset{\circ}{X}_k b_{ki} \overset{\circ}{X}_l b_{lj}) = \sum_{k,l=1}^n b_{ki} \mathbf{cov}(X_k, X_l) b_{lj}.\end{aligned}$$

Записывая последнее равенство в матричной форме, получаем утверждение 2.

Для доказательства утверждения 3 рассмотрим скалярную случайную величину

$$Y = \vec{X} \vec{b}^T.$$

В случае скалярной случайной величины Y ее дисперсия $\mathbf{D}Y = \Sigma_Y$, и поэтому в соответствии утверждением 2 теоремы имеем

$$\mathbf{D}Y = \Sigma_Y = \vec{b} \Sigma \vec{b}^T,$$

откуда в силу неотрицательности дисперсии получаем утверждение 3. ►

Замечание 7.12. Для многомерного случайного вектора, распределенного по *нормальному закону*, свойства 1–3 ковариационной матрицы уже были получены ранее (см. 5.5).

Замечание 7.13. В том случае, когда ранг m ковариационной матрицы Σ строго меньше размерности n вектора \vec{X} , можно доказать, что среди n случайных величин X_1, \dots, X_n имеется ровно m таких, что остальные $n - m$ случайных величин являются их *линейной комбинацией* [IV]. Это свойство также отмечалось нами для нормально распределенных случайных векторов. #

Существенным недостатком ковариации является то, что ее размерность совпадает с произведением размерностей случайных величин. Естественно, хотелось бы иметь безразмерную

характеристику степени линейной зависимости. Но это очень просто сделать — достаточно поделить ковариацию случайных величин на произведение их средних квадратичных отклонений.

Определение 7.11. *Коэффициентом корреляции* случайных величин X и Y называют число $\rho = \rho(X, Y)$, определяемое равенством (предполагается, что $\mathbf{D}X > 0$ и $\mathbf{D}Y > 0$)

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{D}X \cdot \mathbf{D}Y}}.$$

Теорема 7.5. Коэффициент корреляции имеет следующие свойства.

1. $\rho(X, X) = 1$.
2. Если случайные величины X и Y являются независимыми (и существуют $\mathbf{D}X > 0$ и $\mathbf{D}Y > 0$), то $\rho(X, Y) = 0$.
3. $\rho(a_1X_1 + b_1, a_2X_2 + b_2) = \pm\rho(X_1, X_2)$. При этом знак плюс нужно брать в том случае, когда a_1 и a_2 имеют одинаковые знаки, и минус — в противном случае.
4. $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
5. $|\rho(X, Y)| = 1$ тогда и только тогда, когда случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью.

◀ Доказательство теоремы следует из свойств ковариации, и мы предлагаем провести его самостоятельно. ▶

Пример 7.22. Найдем коэффициент корреляции случайных величин X — числа очков, выпавших на верхней грани игральной кости, и Y — на нижней (см. пример 5.5). Для этого сначала вычислим $\mathbf{M}X$, $\mathbf{M}Y$, $\mathbf{D}X$, $\mathbf{D}Y$ и $\text{cov}(X, Y)$. Воспользовавшись табл. 5.3, получим

$$\mathbf{M}X = \mathbf{M}Y = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}X = \mathbf{D}Y &= (1 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \\ &+ (4 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (5 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X, Y) &= (1 - 3,5)(1 - 3,5) \cdot 0 + (2 - 3,5)(1 - 3,5) \cdot 0 + \\
&+ \dots + (6 - 3,5)(1 - 3,5) \cdot \frac{1}{6} + (1 - 3,5)(2 - 3,5) \cdot 0 + \dots + \\
&+ (5 - 3,5)(2 - 3,5) \cdot \frac{1}{6} + (6 - 3,5)(2 - 3,5) \cdot 0 + \dots + \\
&+ (4 - 3,5)(3 - 3,5) \cdot \frac{1}{6} + (3 - 3,5)(4 - 3,5) \cdot \frac{1}{6} + \dots + \\
&+ (2 - 3,5)(5 - 3,5) \cdot \frac{1}{6} + \dots + (1 - 3,5)(6 - 3,5) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{35}{12}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\rho = \frac{-35/12}{35/12} = -1.$$

Впрочем, это мы могли бы установить и без всяких вычислений в силу свойства 5 коэффициента корреляции, если бы вспомнили, что сумма чисел очков на противоположных гранях равна семи и, значит, $X \equiv 7 - Y$ (X и Y связаны линейной зависимостью с отрицательным коэффициентом пропорциональности).

Пример 7.23. Температура воздуха X_1 и X_2 в два последовательных дня представляет собой двумерную случайную величину с вектором средних (m_1, m_2) , дисперсиями $\sigma_1^2 > 0$ и $\sigma_2^2 > 0$ и коэффициентом корреляции ρ . Рассмотрим новую случайную величину

$$\tilde{X}_2 = xX_1 + b, \quad (7.11)$$

где x, b — некоторые числа. Назовем \tilde{X}_2 линейным прогнозом температуры воздуха на следующий день при известной температуре воздуха в предыдущий день. Подберем числа x и b таким образом, чтобы математическое ожидание

$$\mathbf{M}(\tilde{X}_2 - X_2)^2$$

приняло минимальное значение. В этом случае \tilde{X}_2 называют наилучшим в средне квадратичном линейным прогнозом. В

соответствии со свойствами математического ожидания и дисперсии находим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\tilde{X}_2 - X_2)^2 &= \mathbf{D}(\tilde{X}_2 - X_2) + [\mathbf{M}(\tilde{X}_2 - X_2)]^2 = \\ &= \mathbf{D}\tilde{X}_2 - 2\mathbf{cov}(\tilde{X}_2, X_2) + \mathbf{D}X_2 + (\mathbf{M}\tilde{X}_2 - \mathbf{M}X_2)^2 = \\ &= (x^2\sigma_1^2 - 2x\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + (xm_1 + b - m_2)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что первое слагаемое $x^2\sigma_1^2 - 2x\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$ в последнем выражении зависит только от x . Второе слагаемое $(xm_1 + b - m_2)^2$ является неотрицательным, причем при любом фиксированном x его минимальное значение, равное нулю, достигается при

$$b = m_2 - xm_1.$$

Минимум первого слагаемого достигается при

$$x = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (7.12)$$

Следовательно, минимальное значение математического ожидания $\mathbf{M}(\tilde{X}_2 - X_2)^2$ достигается при $x = \rho\sigma_2/\sigma_1$ и $b = m_2 - m_1\rho\sigma_2/\sigma_1$ и равно:

$$\mathbf{M}(\tilde{X}_2 - X_2)^2 = \rho\sigma_2^2 - 2\rho^2\sigma_2^2 + \sigma_2^2 = (1 - \rho^2)\sigma_2^2.$$

Поэтому $\mathbf{M}(\tilde{X}_2 - X_2)^2 = 0$, т.е. $\tilde{X}_2 = X_2$ в случае $|\rho| = 1$, и наилучший линейный прогноз является абсолютно точным. Качество прогноза ухудшается с уменьшением $|\rho|$. При $\rho = 0$ наилучший линейный прогноз $\tilde{X}_2 = b = m_2$, состоит в указании средней температуры на следующий день и не зависит от температуры в предыдущий день. #

Примеры 7.22 и 7.23 показывают, что коэффициент корреляции (также как и ковариация) отражают „степень линейной близости“ случайных величин. При этом, если $\rho > 0$, то коэффициент пропорциональности (7.12) в наилучшем линейном приближении (7.11) одной случайной величины другой является положительным, а в случае $\rho < 0$ — отрицательным.

Поэтому при $\rho > 0$ говорят о *положительной* корреляционной зависимости X и Y , при $\rho < 0$ — об *отрицательной*. Например, рост и вес человека связаны положительной корреляционной зависимостью, а температура и время сохранности продукта — отрицательной.

Однако, коэффициент корреляции (ковариация) может не улавливать „степень нелинейной близости“ случайных величин. Для этой цели служат другие характеристики, например, *корреляционное отношение*, которое будет рассмотрено в 8.2.

По аналогии с ковариационной матрицей для случайного вектора $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ можно ввести корреляционную матрицу.

Определение 7.12. *Корреляционной (нормированной ковариационной) матрицей* случайного вектора \vec{X} называют матрицу

$$P = (\rho_{ij}) = (\rho(X_i, X_j)),$$

состоящую из коэффициентов корреляций случайных величин X_i и X_j .

Корреляционная матрица P порядка n имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

7.5. Другие числовые характеристики случайных величин

В этом параграфе мы дадим краткое описание некоторых других применяемых на практике числовых характеристик *случайных величин*. Отметим, что эти характеристики, как и все остальные, рассматриваемые в настоящей главе, по

сути дела, являются характеристиками *законов распределений* случайных величин.

Поэтому в дальнейшем вместо слов „характеристика случайной величины, имеющей некоторое *распределение* (закон распределения)“ будем говорить „характеристика распределения“.

Случайную величину X называют симметрично распределенной относительно математического ожидания, если

$$P\{X < MX - x\} = P\{X > MX + x\}$$

для любого x . В частности, непрерывная случайная величина X является симметричной тогда и только тогда, когда график ее плотности распределения симметричен относительно прямой $x = MX$.

Определение 7.13. *Асимметрией* A случайной величины X называют отношение *третьего центрального момента* $\overset{\circ}{m}_3$ к кубу *среднего квадратичного отклонения* σ :

$$A = \frac{\overset{\circ}{m}_3}{\sigma^3}.$$

Нетрудно видеть, что (при условии существования третьего момента) для симметрично распределенной относительно *математического ожидания* случайной величины X асимметрия равна нулю.

Определение 7.14. *Экссессом* E случайной величины X называют отношение *четвертого центрального момента* $\overset{\circ}{m}_4$ к квадрату *дисперсии* за вычетом числа 3:

$$E = \frac{\overset{\circ}{m}_4}{\sigma^4} - 3.$$

Ясно, что асимметрия и эксцесс — безразмерные величины.

Пример 7.24. Вычислим асимметрию и эксцесс случайной величины, имеющей *нормальное распределение*. Согласно опре-

делению,

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{m}_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^3 \varphi_{m,\sigma}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-m)^3}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} dx, \\ \overset{\circ}{m}_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^4 \varphi_{m,\sigma}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-m)^4}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} dx.\end{aligned}$$

Делая замену $y = x - m$, имеем

$$\overset{\circ}{m}_3 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^3 e^{-y^2/(2\sigma^2)} dy,$$

откуда в силу нечетности подынтегральной функции следует, что $\overset{\circ}{m}_3 = 0$ и асимметрия $\gamma_1 = 0$.

Для того чтобы найти $\overset{\circ}{m}_4$, применим формулу интегрирования по частям. Полагая

$$u = \frac{(x-m)^3}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{и} \quad dv = \frac{x-m}{\sigma} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} dx,$$

имеем

$$\overset{\circ}{m}_4 = 3\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-m)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} dx.$$

Воспользовавшись теперь результатом примера 7.17, окончательно получим, что $\overset{\circ}{m}_4 = 3\sigma^4$, и, следовательно, эксцесс $E = 0$.

Таким образом, для нормального распределения асимметрия и эксцесс равны нулю.

Определение 7.15. *Квантилью уровня α , или α -квантилью*, ($0 < \alpha < 1$) случайной величины X (распределения случайной величины X) называют число Q_α , удовлетворяющее неравенствам

$$\mathbf{P}\{X < Q_\alpha\} \leq \alpha \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\{X > Q_\alpha\} \leq 1 - \alpha.$$

1/2-квантиль называют также **медианой** M случайной величины X .

Для непрерывной случайной величины X α -квантиль Q_α является решением уравнения

$$F(Q_\alpha) = \alpha,$$

где $F(x)$ — функция распределения случайной величины X . Таким образом, для непрерывной случайной величины X квантиль Q_α — это такое число, меньше которого X принимает значение с вероятностью α .

Если известна плотность распределения $p(x)$ случайной величины X , то, учитывая связь между функцией распределения и плотностью распределения, уравнение для определения α -квантиля можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{Q_\alpha} p(x) dx = \alpha.$$

Пример 7.25. Найдем α -квантиль и медиану экспоненциального распределения. В этом случае Q_α представляет собой решение уравнения (рис. 7.1)

$$1 - e^{-\lambda Q_\alpha} = \alpha.$$

Поэтому

$$Q_\alpha = -\frac{\ln(1 - \alpha)}{\lambda}.$$

Ясно, что медиана экспоненциального распределения

$$M = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Если трактовать экспоненциальное распределение как распределение времени распада атома (см. 4.6), то медиана будет соответствовать периоду полураспада.

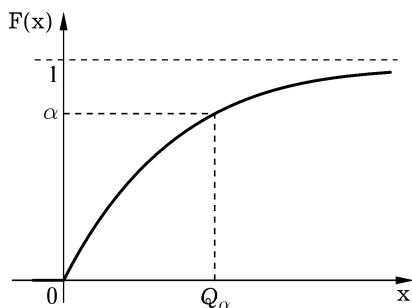


Рис. 7.1

Пример 7.26. Пусть случайная величина X представляет собой число успехов в одном испытании по *схеме Бернулли* с вероятностью успеха p . Тогда, как видно на рис. 7.2,

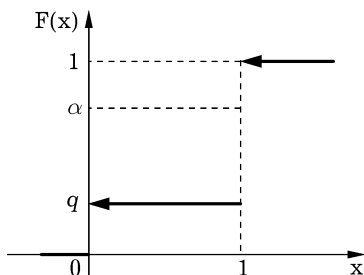


Рис. 7.2

$$Q_{\alpha} = 0 \quad \text{при } 0 < \alpha < q,$$

$$Q_{\alpha} = 1 \quad \text{при } q < \alpha < 1,$$

а q -квантиль может быть любым числом от 0 до 1 включительно. Этот пример показывает, что, во-первых, квантили могут совпадать для разных α ,

а, во-вторых, для некоторых α квантили могут определяться неоднозначно.

Определение 7.16. *Модой непрерывной случайной величины* называют точку максимума (локального) плотности распределения $p(x)$. Различают *унимодальные* (имеющие одну моду), *бимодальные* (имеющие две моды) и *мультимодальные* (имеющие несколько мод) *распределения*.

Для определения моды дискретной случайной величины предположим сначала, что ее значения x_1, \dots, x_n расположены в порядке возрастания.

Определение 7.17. *Модой дискретной случайной величины* называют такое значение x_i , при котором для вероятностей выполняются неравенства

$$p_{i-1} < p_i \quad \text{и} \quad p_{i+1} < p_i.$$

В случае дискретных случайных величин распределения также могут быть унимодальными, бимодальными и мультимодальными.

Наивероятнейшим значением называют моду, при которой достигается глобальный максимум вероятности (дискретной случайной величины) или плотности распределения (непрерывной случайной величины).

Если распределение унимодальное, то мода также будет наивероятнейшим значением.

Мода и наивероятнейшее значение введены, скорее, для наглядности, чем для практических целей.

Пример 7.27. *Плотность нормального распределения* имеет единственный максимум в точке m (см. 5.6). Поэтому мода нормального закона совпадает с математическим ожиданием. Она же является наивероятнейшим значением и медианой.

Пример 7.28. Найдем моду биномиального распределения. Для этого заметим, что

$$\frac{P_n(i)}{P_n(i+1)} = \frac{C_n^i p^i q^{n-i}}{C_n^{i+1} p^{i+1} q^{n-(i+1)}} = \frac{(i+1)q}{(n-i)p}.$$

Отсюда нетрудно вывести, что отношение $P_n(i)/P_n(i+1)$ меньше единицы при $i < np - q$ и больше единицы при $i > np - q$. Таким образом, если $np - q$ не является целым числом, то минимальное i , для которого $i > np - q$, является модой и наивероятнейшим значением. Если же $np - q$ — целое число, то

биномиальный закон имеет две моды и два наименее вероятных значения: $np - q$ и $np - q + 1$. #

Последнюю числовую характеристику, которую мы здесь рассмотрим, называют *энтропией*. Эта характеристика играет одну из основных ролей в теории информации*. Мы ограничимся здесь лишь определением энтропии и перечислением ее основных свойств.

Определение 7.18. *Энтропией $H = H(X)$ дискретной случайной величины X называют число, равное*

$$H = H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

(здесь и далее в определениях энтропии принято соглашение $0 \cdot \log 0 = 0$, а $\log p_i$ обычно означает $\log_2 p_i$).

Отметим, что энтропия не зависит от значений x_i случайной величины X , а определяется только вероятностями p_i , с которыми эти значения принимаются. Энтропия является мерой неопределенности случайной величины. Максимальное значение $H_{\max} = \log n$ энтропия дискретной случайной величины достигает тогда, когда все n возможных значений случайная величина принимает с одной и той же вероятностью $p_i = 1/n$, минимальное $H_{\min} = 0$ — когда случайная величина принимает единственное значение с вероятностью 1.

Определение 7.19. *Энтропией $H(X, Y)$ двумерной дискретной случайной величины (X, Y) называют число, равное*

$$H(X, Y) = - \sum_{i,j} p_{ij} \log p_{ij}.$$

*См., например: Кульбак С. Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967. 407 с.

Поскольку для *независимых случайных величин* X и Y

$$p_{ij} = p_{X_i} p_{Y_j} \quad \text{и} \quad \log p_{ij} = \log p_{X_i} + \log p_{Y_j},$$

то

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= - \sum_{i,j} p_{X_i} p_{Y_j} (\log p_{X_i} + \log p_{Y_j}) = \\ &= - \sum_i p_{X_i} \log p_{X_i} \sum_j p_{Y_j} - \sum_j p_{Y_j} \log p_{Y_j} \sum_i p_{X_i} = \\ &= - \sum_i p_{X_i} \log p_{X_i} - \sum_j p_{Y_j} \log p_{Y_j} = H(X) + H(Y), \end{aligned}$$

т.е. энтропия случайной величины (X, Y) , если X и Y — независимые случайные величины, представляет собой сумму энтропий. Показано*, что в случае зависимости X и Y энтропия $H(X, Y)$ всегда меньше суммы $H(X) + H(Y)$.

Энтропия в некотором смысле представляет собой минимальный объем памяти, необходимый для записи информации, содержащейся в случайной величине. Поскольку информация записывается обычно в двоичной системе, то основанием логарифма берется число 2.

Определение 7.20. *Энтропией $H = H(X)$ непрерывной случайной величины X и энтропией $H(X, Y)$ двумерной случайной величины (X, Y) называют числа, равные соответственно*

$$\begin{aligned} H &= H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) \log p_X(x) dx, \\ H(X, Y) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y) \log p_{X,Y}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

*См.: *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей: Учеб. М.: Наука, 1969. 564 с.

Для непрерывных, так же как и для дискретных, случайных величин X и Y энтропия $H(X, Y)$ двумерной случайной величины совпадает с суммой $H(X) + H(Y)$ энтропий координат тогда и только тогда, когда X и Y являются независимыми случайными величинами; иначе $H(X, Y) < H(X) + H(Y)$ (см. учебник Е.С. Вентцель). Отметим также, что при заданной дисперсии σ^2 максимальную энтропию $\log \sqrt{2\pi e} \sigma^2$ имеет нормально распределенная случайная величина.

7.6. Решение типовых примеров

Пример 7.29. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины X , ряд распределения которой представлен в табл. 7.1.

Таблица 7.1

X	0	1	2	3
P	0,41	0,43	0,11	0,05

В соответствии с определением математического ожидания дискретной случайной величины X

$$MX = \sum_{i=0}^n x_i p_i = 0 \cdot 0,41 + 1 \cdot 0,43 + 2 \cdot 0,11 + 3 \cdot 0,05 = 0,8.$$

Дисперсию находим по формуле $DX = MX^2 - (MX)^2$. Математическое ожидание квадрата X равно

$$MX^2 = \sum_{i=0}^n x_i^2 p_i = 0^2 \cdot 0,41 + 1^2 \cdot 0,43 + 2^2 \cdot 0,11 + 3^2 \cdot 0,05 = 1,32.$$

Поэтому $DX = 1,32 - 0,8^2 = 0,68$.

Наконец, среднее квадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{DX} = \sqrt{0,68} \approx 0,82.$$

Пример 7.30. Вероятность того, что в течение часа на станцию скорой помощи не поступит ни одного вызова,

равна 0,00248. Считая, что число вызовов X , поступающих в течение часа на станцию, имеет распределение Пуассона, найдем математическое ожидание и дисперсию X .

Поскольку случайная величина X имеет распределение Пуассона, то

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = e^{-\lambda},$$

где λ — параметр распределения Пуассона. В свою очередь, из условия задачи следует, что

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = e^{-\lambda} = 0,00248.$$

Решая последнее уравнение относительно λ с помощью табл. П.1, получаем $\lambda = 6$. Так как параметр λ является одновременно математическим ожиданием и дисперсией случайной величины X (см. примеры 7.3 и 7.14), то $\mathbf{M}X = 6$ и $\mathbf{D}X = 6$.

Пример 7.31. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение непрерывной случайной величины X , плотность распределения которой имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \pi/2; \\ \cos x/2, & |x| \leq \pi/2. \end{cases}$$

В соответствии с определением математического ожидания непрерывной случайной величины X

$$\mathbf{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} x \cos x dx = 0.$$

Вычислим теперь дисперсию X :

$$\mathbf{D}X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}X)^2 p(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \approx 0,468.$$

Наконец, $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}X} = \sqrt{0,468} \approx 0,684$.

Пример 7.32. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X , имеющей *логнормальное распределение* (см. задачу 6.23), т.е. случайной величины с плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ e^{-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\beta^2}} \\ \frac{x}{\beta\sqrt{2\pi}}, & x > 0. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание X :

$$\mathbf{M}X = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\beta^2}\right\} dx.$$

Для вычисления интеграла в последней формуле сделаем замену $x = e^y$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{M}X &= \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^y \exp\left\{-\frac{(y - \alpha)^2}{2\beta^2}\right\} dy = \\ &= \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} e^{\alpha + \beta^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(y - \alpha - \beta^2)^2}{2\beta^2}\right\} dy. \end{aligned}$$

Делая теперь замену $t = (y - \alpha - \beta^2)/\beta$, получаем

$$\mathbf{M}X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\alpha + \beta^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = e^{\alpha + \beta^2/2}.$$

Аналогично находим математическое ожидание X^2 :

$$\mathbf{M}X^2 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\beta^2}\right\} dx = e^{2\alpha + 2\beta^2}.$$

Тогда

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2 = e^{2\alpha+2\beta^2} - e^{2\alpha+\beta^2} = e^{2\alpha+\beta^2}(e^{\beta^2} - 1).$$

Наконец,

$$\sigma = \sqrt{\mathbf{D}X} = \sqrt{e^{2\alpha+\beta^2}(e^{\beta^2} - 1)} = e^{\alpha+\beta^2/2} \sqrt{e^{\beta^2} - 1}.$$

Пример 7.33. Случайная величина X распределена по *равномерному закону* на отрезке $[a, b]$, причем a и b не известны, а $\mathbf{M}X = 4$ и $\mathbf{D}X = 3$. Найдём a и b .

Для равномерно распределённой случайной величины

$$\mathbf{M}X = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbf{D}X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

(см. примеры 7.6 и 7.16). Поэтому

$$\frac{a+b}{2} = 4, \quad \frac{(b-a)^2}{12} = 3.$$

Решая полученную систему и учитывая, что $b > a$, находим:

$$a = 1, \quad b = 7.$$

Пример 7.34. Из хорошо перетасованной колоды карт слева направо последовательно выкладывают карты лицевой стороной вверх. На карты первой колоды таким же образом кладут карты второй колоды. Найдём среднее число совпадений верхней и нижней карт.

Пусть число карт в каждой колоде равно n . Число совпадений X можно записать в виде

$$X = X_1 + \dots + X_n,$$

где $X_i = 1$, если i -я пара карт совпала, и $X_i = 0$ в противном случае. Воспользовавшись свойством математического ожидания, получаем

$$\mathbf{M}X = \mathbf{M}X_1 + \dots + \mathbf{M}X_n.$$

Далее, вероятность совпадения верхней и нижней карт в каждой паре в соответствии с принципом классической вероятности равна $1/n$. Поэтому

$$\mathbf{M}X_i = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Окончательно имеем

$$\mathbf{M}X = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Интересно отметить, что ответ не зависит от числа n карт в колодах.

Пример 7.35. Независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют нормальное распределение со средними значениями m_1 и m_2 и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно. Найдём математическое ожидание случайной величины $Y = X_1 X_2$.

Поскольку случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми, то в соответствии со свойством математического ожидания

$$\mathbf{M}Y = \mathbf{M}X_1 \mathbf{M}X_2 = m_1 m_2.$$

Пример 7.36. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения, представленный

Таблица 7.2

X	1	e	e^2	e^3
P	0,2	0,1	0,5	0,2

в табл. 7.2. Найдём математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \ln X$.

Поскольку математическое ожидание $\mathbf{M}Y(X)$ и второй момент $\mathbf{M}Y^2(X)$ функции $Y(X)$ от дискретной случайной величины X можно вычислить по формулам

$$\mathbf{M}Y(X) = \sum_{i=1}^n Y(x_i) p_i, \quad \mathbf{M}Y^2(X) = \sum_{i=1}^n Y^2(x_i) p_i,$$

то

$$\begin{aligned} MY &= \ln 1 \cdot 0,2 + \ln e \cdot 0,1 + \ln e^2 \cdot 0,5 + \ln e^3 \cdot 0,2 = 1,7, \\ MY^2 &= \ln^2 1 \cdot 0,2 + \ln^2 e \cdot 0,1 + \ln^2 e^2 \cdot 0,5 + \ln^2 e^3 \cdot 0,2 = 3,9. \end{aligned}$$

Значит,

$$MY = 1,7 \quad \text{и} \quad DY = MY^2 - (MY)^2 = 3,9 - (1,7)^2 = 1,01.$$

Пример 7.37. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 3$. Найдём математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^X$.

Поскольку математическое ожидание $MY(X)$ и второй момент $MY^2(X)$ функции $Y(X)$ от непрерывной случайной величины X можно вычислить, используя формулы

$$MY(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x)p(x) dx, \quad MY^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y^2(x)p(x) dx,$$

то

$$MY = \int_0^{+\infty} e^x 3e^{-3x} dx = \frac{3}{2}, \quad MY^2 = \int_0^{+\infty} e^{2x} 3e^{-3x} dx = 3.$$

Значит,

$$MY = \frac{3}{2}, \quad DY = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Пример 7.38. Закон распределения вероятностей двумерной дискретной случайной величины (X_1, X_2) представлен в табл. 7.3. Найдём математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$$Y = \log_2(X_1/X_2).$$

Таблица 7.3

X_2	X_1		
	0,5	1	2
1	0,1	0,4	0,2
2	0,2	0	0,1

В соответствии с формулой для вычисления математического ожидания функции от двумерной дискретной случайной величины

$$\begin{aligned} MY &= \log_2 \frac{0,5}{1} \cdot 0,1 + \log_2 \frac{1}{1} \cdot 0,4 + \log_2 \frac{2}{1} \cdot 0,2 + \\ &\quad + \log_2 \frac{0,5}{2} \cdot 0,2 + \log_2 \frac{1}{2} \cdot 0 + \log_2 \frac{2}{2} \cdot 0,1 = 0,2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MY^2 &= \left(\log_2 \frac{0,5}{1}\right)^2 \cdot 0,1 + \left(\log_2 \frac{1}{1}\right)^2 \cdot 0,4 + \left(\log_2 \frac{2}{1}\right)^2 \cdot 0,2 + \\ &\quad + \left(\log_2 \frac{0,5}{2}\right)^2 \cdot 0,2 + \left(\log_2 \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0 + \left(\log_2 \frac{2}{2}\right)^2 \cdot 0,1 = 1,2 \end{aligned}$$

и

$$DY = 1,2 - (-0,2)^2 = 1,16.$$

Пример 7.39. Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины (X_1, X_2) имеет вид

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1^2 + x_2^2 > 1; \\ \frac{3\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2\pi}, & x_1^2 + x_2^2 \leq 1. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = X_1 X_2$.

Используя формулу для вычисления математического ожидания функции от двумерной непрерывной случайной величины, получаем

$$\begin{aligned} MY &= \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} \frac{3}{2\pi} x_1 x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{3}{2\pi} \int_{-1}^1 x_1 dx_1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} dx_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
DY = MY^2 - (MY)^2 &= \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} \frac{3}{2\pi} x_1^2 x_2^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2 = \\
&= \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^4 \rho d\rho = \\
&= \frac{3}{112\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(4\varphi)) d\varphi = \frac{3}{56} \approx 0,05.
\end{aligned}$$

Пример 7.40. Плотность распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0, 1); \\ 2x, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Найдем начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков, а также асимметрию и эксцесс случайной величины X .

В соответствии с формулой

$$m_k = MX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx$$

вычислим начальные моменты:

$$\begin{aligned}
m_1 &= \int_0^1 x 2x dx = \frac{2}{3}, & m_2 &= \int_0^1 x^2 2x dx = \frac{1}{2}, \\
m_3 &= \int_0^1 x^3 2x dx = \frac{2}{5}, & m_4 &= \int_0^1 x^4 2x dx = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Для нахождения центральных моментов выведем формулы, выражающие центральные моменты через начальные:

$$\overset{\circ}{m}_1 = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X) = \mathbf{M}X - \mathbf{M}X = 0,$$

$$\overset{\circ}{m}_2 = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 = m_2 - (m_1)^2 = \mathbf{D}X,$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{m}_3 = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^3 = \mathbf{M}(X^3 - 3X^2\mathbf{M}X + \\ + 3X(\mathbf{M}X)^2 - (\mathbf{M}X)^3) = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{m}_4 = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^4 = \mathbf{M}(X^4 - 4X^3\mathbf{M}X + 6X^2(\mathbf{M}X)^2 - \\ - 4X(\mathbf{M}X)^3 + (\mathbf{M}X)^4) = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4. \end{aligned}$$

Подставляя в эти формулы найденные значения начальных моментов, получаем

$$\overset{\circ}{m}_1 = 0,$$

$$\overset{\circ}{m}_2 = \mathbf{D}X = \sigma^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18},$$

$$\overset{\circ}{m}_3 = \frac{2}{5} - 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{1}{135},$$

$$\overset{\circ}{m}_4 = \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{1}{135}.$$

Наконец, в соответствии с определениями асимметрии $\gamma_1 = \overset{\circ}{m}_3/\sigma^3$ и эксцесса $\gamma_2 = \overset{\circ}{m}_4/\sigma^4 - 3$

$$\gamma_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}, \quad \gamma_2 = -\frac{3}{5}.$$

Пример 7.41. Распределение вероятностей двумерной слу-

Таблица 7.4

X_2	X_1		
	-1	0	1
0	0,10	0,15	0,20
1	0,15	0,25	0,15

чайной величины (X_1, X_2) задано табл. 7.4. Найдем математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную и корреляционную матрицы случайных величин X_1 и X_2 .

Вычислим математические ожидания и дисперсии случайных величин X_1 и X_2 :

$$\mathbf{M}X_1 = (-1) \cdot (0,10 + 0,15) + 0 \cdot (0,15 + 0,25) + 1 \cdot (0,20 + 0,15) = 0,10,$$

$$\mathbf{M}X_2 = 0 \cdot (0,10 + 0,15 + 0,20) + 1 \cdot (0,15 + 0,25 + 0,15) = 0,55,$$

$$\mathbf{D}X_1 = \mathbf{M}X_1^2 - (\mathbf{M}X_1)^2 = (-1)^2 \cdot (0,10 + 0,15) + 0^2 \cdot (0,15 + 0,25) + 1^2 \cdot (0,20 + 0,15) - (0,10)^2 = 0,59,$$

$$\mathbf{D}X_2 = \mathbf{M}X_2^2 - (\mathbf{M}X_2)^2 = 0^2 \cdot (0,10 + 0,15 + 0,20) + 1^2 \cdot (0,15 + 0,25 + 0,15) - (0,55)^2 = 0,2475.$$

Для определения $\mathbf{cov}(X_1, X_2)$ воспользуемся формулой

$$\mathbf{cov}(X_1, X_2) = \mathbf{M}(X_1 X_2) - \mathbf{M}X_1 \mathbf{M}X_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(X_1 X_2) &= (-1) \cdot 0 \cdot 0,10 + (-1) \cdot 1 \cdot 0,15 + 0 \cdot 0 \cdot 0,15 + \\ &\quad + 0 \cdot 1 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0 \cdot 0,20 + 1 \cdot 1 \cdot 0,15 = 0, \end{aligned}$$

$$\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0 - 0,10 \cdot 0,55 = -0,055$$

и

$$\rho = \frac{\mathbf{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbf{D}X_1 \mathbf{D}X_2}} = -\frac{0,055}{\sqrt{0,59 \cdot 0,2475}} \approx -0,144.$$

Ковариационная и корреляционная матрицы имеют вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,59 & -0,055 \\ -0,055 & 0,2475 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -0,144 \\ -0,144 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 7.42. Совместная плотность распределения двумерной случайной величины (X_1, X_2) имеет вид

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 \notin (0, \pi/2) \text{ или } x_2 \notin (0, \pi/2); \\ \sin(x_1 + x_2)/2, & x_1 \in (0, \pi/2) \text{ и } x_2 \in (0, \pi/2). \end{cases}$$

Найдем математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную и корреляционную матрицы случайных величин X_1 и X_2 .

Имеем

$$\mathbf{M}X_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x_1 dx_1 \int_0^{\pi/2} \sin(x_1 + x_2) dx_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x_1 (\sin x_1 + \cos x_1) dx_1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\mathbf{M}X_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x_2 dx_2 \int_0^{\pi/2} \sin(x_1 + x_2) dx_1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}X_1 &= \mathbf{M}X_1^2 - (\mathbf{M}X_1)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x_1^2 dx_1 \int_0^{\pi/2} \sin(x_1 + x_2) dx_2 - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}X_2 &= \mathbf{M}X_2^2 - (\mathbf{M}X_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x_2^2 dx_2 \int_0^{\pi/2} \sin(x_1 + x_2) dx_1 - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(X_1 X_2) &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x_1 dx_1 \int_0^{\pi/2} x_2 \sin(x_1 + x_2) dx_2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x_1 \left(\frac{\pi}{2} \sin x_1 + \cos x_1 - \sin x_1 \right) dx_1 = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{cov}(X_1, X_2) = \mathbf{M}(X_1 X_2) - \mathbf{M}X_1 \mathbf{M}X_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi(4 - \pi)}{16}$$

и

$$\rho = \frac{\mathbf{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbf{D}X_1 \mathbf{D}X_2}} = \frac{\pi(4 - \pi)}{\pi^2 + 8\pi - 32}.$$

Наконец, ковариационная и корреляционная матрицы имеют вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16} & \frac{\pi(4 - \pi)}{16} \\ \frac{\pi(4 - \pi)}{16} & \frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16} \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\pi(4 - \pi)}{\pi^2 + 8\pi - 32} \\ \frac{\pi(4 - \pi)}{\pi^2 + 8\pi - 32} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 7.43. Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины (X_1, X_2) имеет вид

$$p(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi(x_1^2 + x_2^2 + 1)^3}.$$

Проверим, являются ли случайные величины X_1 и X_2 некоррелированными.

Найдем $\mathbf{M}X_1$:

$$\mathbf{M}X_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x_1 dx_1 dx_2}{\pi(x_1^2 + x_2^2 + 1)^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1 dx_1}{\pi(x_1^2 + x_2^2 + 1)^3}.$$

Здесь внутренний интеграл равен нулю, поскольку подынтегральная функция нечетная, а пределы интегрирования симметричны относительно начала координат. Поэтому $\mathbf{M}X_1 = 0$.

Аналогично получаем, что $\mathbf{M}X_2 = 0$.

Вычислим теперь ковариацию X_1 и X_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{cov}(X_1, X_2) &= \mathbf{M}(X_1 X_2) - \mathbf{M}X_1 \mathbf{M}X_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x_1 x_2 dx_1 dx_2}{\pi(x_1^2 + x_2^2 + 1)^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} 2x_1 dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_2 dx_2}{\pi(x_1^2 + x_2^2 + 1)^3} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0$, случайные величины X_1 и X_2 являются некоррелированными.

Пример 7.44. Случайные величины X_1 и X_2 имеют математические ожидания $\mathbf{M}X_1 = 2$, $\mathbf{M}X_2 = -1$, дисперсии $\mathbf{D}X_1 = 3$, $\mathbf{D}X_2 = 4$ и ковариацию $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = -1$. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$$Y = 2X_1 - 3X_2 - 5.$$

В соответствии со свойствами 2 и 3 математического ожидания

$$\mathbf{M}Y = 2\mathbf{M}X_1 + (-3)\mathbf{M}X_2 - 5 = 2,$$

а, согласно свойствам 2 и 5 дисперсии,

$$\mathbf{D}Y = 2^2\mathbf{D}X_1 + 2 \cdot 2 \cdot (-3)\mathbf{cov}(X_1, X_2) + (-3)^2\mathbf{D}X_2 = 60.$$

Пример 7.45. Трехмерный случайный вектор \vec{X} имеет вектор средних значений $\vec{m}_{\vec{X}} = (-1, 0, 2)$ и матрицу ковариаций

$$\Sigma_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор средних значений и матрицу ковариаций случайного вектора $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}$, где

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 5 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = (1, 13).$$

Используя правило изменения вектора средних значений при линейном преобразовании случайного вектора, получаем

$$\vec{m}_{\vec{Y}} = \vec{m}_{\vec{X}}B + \vec{c} = (-1, 0, 2) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 5 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + (1, 13) = (1, 2).$$

Аналогично в силу утверждения 2 теоремы 7.4 имеем

$$\begin{aligned}\Sigma_{\bar{Y}} &= B^T \Sigma_{\bar{X}} B = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 5 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & -8 \\ -8 & 77 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Пример 7.46. Для случайной величины X , имеющей *распределение Релея* с параметром γ_1 , найдем α -квантиль, медиану, моды и *наивероятнейшее значение*.

Функция распределения Релея имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\gamma x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Поэтому α -квантиль Q_α определяется из уравнения

$$1 - e^{-\gamma Q_\alpha^2} = \alpha,$$

т.е.

$$Q_\alpha = \sqrt{-\frac{\ln(1-\alpha)}{\gamma}}.$$

Поскольку медиана M является $1/2$ -квантилью, то

$$M = \sqrt{\frac{\ln 2}{\gamma}}.$$

Плотность распределения Релея

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2\gamma x e^{-\gamma x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

является дифференцируемой функцией (кроме точки $x = 0$), причем

$$p'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2\gamma(1 - 2\gamma x^2)e^{-\gamma x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Значение $x = 0$ не является модой, так как $p(0) = 0$. Поэтому любая мода удовлетворяет уравнению

$$p' = 2\gamma(1 - 2\gamma x^2)e^{-\gamma x^2} = 0.$$

Решая это уравнение, имеем

$$x_0 = \sqrt{\frac{1}{2\gamma}}.$$

При x_0 достигается как локальный, так и глобальный максимум плотности распределения Релея, а значит, x_0 является как единственной модой, так и наивероятнейшим значением случайной величины X .

Пример 7.47. Распределение вероятностей двумерной дискретной случайной величины (X_1, X_2)

Таблица 7.5

X_2	X_1		
	-2	-1	0
-2	0,1	0,2	0,3
-1	0,2	0,1	0,1

задано табл. 7.5. Найдём *энтропии* скалярных случайных величин X_1 и X_2 , а также энтропию двумерной случайной величины (X_1, X_2) . Являются ли случайные величины X_1 и X_2 независимыми?

Случайные величины X_1 и X_2 имеют ряды распределения, представленные в табл. 7.6 и 7.7.

Таблица 7.6

X_1	-2	-1	0
P	0,3	0,3	0,4

Таблица 7.7

X_2	-2	-1
P	0,6	0,4

В соответствии с определением энтропии дискретной случайной величины

$$\begin{aligned} H(X_1) &= - \sum_i p_{X_1 i} \log p_{X_1 i} = -(0,3 \log 0,3 + \\ &\quad + 0,3 \log 0,3 + 0,4 \log 0,4) = \log 5 + 0,2 \log 2 - 0,6 \log 3, \end{aligned}$$

$$H(X_2) = - \sum_i p_{X_2 i} \log p_{X_2 i} = \log 5 - 0,4 \log 2 - 0,6 \log 3.$$

Энтропия двумерного случайного вектора (X_1, X_2) равна:

$$\begin{aligned} H(X_1, X_2) &= - \sum_{i,j} p_{ij} \log p_{ij} = \\ &= - (0,1 \log 0,1 + 0,2 \log 0,2 + 0,3 \log 0,3 + 0,2 \log 0,2 + \\ &\quad + 0,1 \log 0,1 + 0,1 \log 0,1) = \log 5 + 0,6 \log 2 - 0,3 \log 3. \end{aligned}$$

Производя простые арифметические подсчеты, получаем

$$H(X_1, X_2) - H(X_1) - H(X_2) = 0,1 \log \frac{10^{10}}{12^9} \approx 0,1 \log 0,516 < 0.$$

Поскольку энтропия $H(X_1, X_2)$ меньше суммы энтропий $H(X_1)$ и $H(X_2)$, то случайные величины X_1 и X_2 являются зависимыми.

Пример 7.48. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) имеет нормальное распределение со средними значениями m_1 и m_2 , дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 и коэффициентом корреляции ρ , т.е.

$$\begin{aligned} p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} + 2\rho \frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Найдем энтропии случайных величин X_1 и X_2 , а также энтропию случайного вектора (X_1, X_2) . В каком случае энтропия случайного вектора (X_1, X_2) совпадает с суммой энтропий случайных величин X_1 и X_2 ?

Поскольку случайная величина X_1 имеет нормальное распределение со средним значением m_1 и дисперсией σ_1^2 , т.е.

$$p_{X_1}(x) = \varphi_{m_1, \sigma_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(x-m_1)^2/(2\sigma_1^2)},$$

то, согласно определению энтропии непрерывной случайной величины,

$$\begin{aligned} H(X_1) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1}(x) \log p_{X_1}(x) dx = \\ &= \log \sqrt{2\pi\sigma_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m_1, \sigma_1}(x) dx + \frac{\log e}{2\sigma_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^2 \varphi_{m_1, \sigma_1}(x) dx. \end{aligned}$$

В записанной формуле первый интеграл равен единице как интеграл от плотности распределения, а второй — дисперсии случайной величины X_1 . Значит,

$$H(X_1) = \log \sqrt{2\pi\sigma_1^2} + \frac{\log e}{2} = \log \sqrt{2\pi e\sigma_1^2}.$$

Аналогично

$$H(X_2) = \log \sqrt{2\pi e\sigma_2^2}.$$

Энтропия двумерного случайного вектора (X_1, X_2) равна:

$$\begin{aligned} H(X_1, X_2) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \log p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \log \left(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\ &+ \frac{\log e}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_1)^2 p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \\ &- \frac{\rho \log e}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\ &+ \frac{\log e}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_2 - m_2)^2 p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл равен единице, второй и четвертый — дисперсиям случайных величин X_1 и X_2 соответственно, а третий — ковариации X_1 и X_2 . Таким образом,

$$\begin{aligned} H(X_1, X_2) &= \log \left(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \right) + \frac{\log e}{2(1-\rho^2)} - \\ &\quad - \frac{\rho^2 \log e}{(1-\rho^2)} + \frac{\log e}{2(1-\rho^2)} = \log \left(2\pi e\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \right). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что энтропия $H(X_1, X_2)$ равна сумме энтропий $H(X_1)$ и $H(X_2)$ тогда и только тогда, когда $\rho = 0$. Значит, из условия некоррелированности случайных величин X_1 и X_2 вытекает их независимость. Этот результат нам уже известен из 5.5.

Вопросы и задачи

7.1. Что называют математическим ожиданием дискретной случайной величины? В каком случае существует математическое ожидание дискретной случайной величины, принимающей счетное число значений?

7.2. Что называют математическим ожиданием непрерывной случайной величины? В каком случае существует математическое ожидание непрерывной случайной величины?

7.3. Как можно вычислить математическое ожидание функции от скалярной случайной величины?

7.4. Как можно вычислить математическое ожидание функции от многомерного случайного вектора?

7.5. Перечислите свойства математического ожидания случайной величины.

7.6. В каком случае математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых?

7.7. В каком случае математическое ожидание произведения случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей? Является ли независимость случайных величин необходимым условием для того, чтобы математическое ожидание произведения случайных величин равнялось произведению математических ожиданий?

7.8. Что называют вектором средних значений (вектором математических ожиданий) случайного вектора? Как изменяется вектор средних значений при линейном преобразовании случайного вектора?

7.9. Что называют вторым (начальным) моментом случайной величины?

7.10. Что называют дисперсией случайной величины?

7.11. Что называют средним квадратичным отклонением случайной величины?

7.12. Перечислите свойства дисперсии случайной величины.

7.13. В каком случае дисперсия суммы случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых?

7.14. Что называют начальным моментом k -го порядка случайной величины?

7.15. Что называют центральным моментом k -го порядка случайной величины?

7.16. Что называют ковариацией случайных величин?

7.17. Перечислите свойства ковариации случайных величин?

7.18. Как называют случайные величины, ковариация которых равна нулю?

7.19. Напишите формулу для дисперсии суммы произвольных случайных величин.

7.20. Что называют ковариационной матрицей случайного вектора? Перечислите свойства ковариационной матрицы.

7.21. Приведите достаточное условие, при котором случайные величины являются некоррелированными. Можно ли сказать, что если случайные величины являются некоррелированными, то они также являются независимыми?

7.22. Что называют коэффициентом корреляции случайных величин?

7.23. Перечислите свойства коэффициента корреляции случайных величин.

7.24. В каких пределах может изменяться коэффициент корреляции случайных величин?

7.25. Приведите условие, необходимое и достаточное для равенства коэффициента корреляции случайных величин ± 1 .

7.26. Что называют матрицей корреляций случайного вектора?

7.27. Что называют асимметрией случайной величины?

7.28. Что называют эксцессом случайной величины?

7.29. Что называют α -квантилью случайной величины?

7.30. Что называют модой дискретной случайной величины? Какую дискретную случайную величину называют унимодальной? бимодальной? мультимодальной?

7.31. Что называют наивероятнейшим значением дискретной случайной величины?

7.32. Что называют модой непрерывной случайной величины? Какую непрерывную случайную величину называют унимодальной? бимодальной? мультимодальной?

7.33. Что называют наивероятнейшим значением непрерывной случайной величины?

7.34. Что называют энтропией дискретной скалярной случайной величины?

7.35. Что называют энтропией дискретной двумерной случайной величины? В каком случае энтропия дискретной двумерной случайной величины равна сумме энтропий координат?

7.36. Что называют энтропией непрерывной случайной величины?

7.37. Что называют энтропией непрерывной двумерной случайной величины? В каком случае энтропия непрерывной двумерной случайной величины равна сумме энтропий координат?

Таблица 7.8

X	1	2	3
P	0,30	0,21	0,49

7.38. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины X , ряд распределения которой представлен в табл. 7.8.

О т в е т: $MX = 2,19$, $DX = 5,55$, $\sigma \approx 2,35$.

7.39. Вероятность того, что при трех выстрелах стрелок попадет в цель хотя бы один раз, равна 0,992. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа X попаданий при двадцати выстрелах.

О т в е т: $MX = 16$, $DX = 3,2$.

7.40. Время X безотказной работы станка имеет экспоненциальное распределение. Известно, что вероятность отказа станка за 5 ч равна 0,39347. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение времени безотказной работы станка.

О т в е т: $MX = 10$ ч, $DX = 100$ ч², $\sigma = 10$ ч.

7.41. Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, асимметрию, эксцесс, α -квантиль, медиану, моды и наивероятнейшее значение случайной величины X , имеющей плотность распределения $p(x) = e^{-|x-3|/2}$.

О т в е т: $MX = 3$, $DX = 2$, $\sigma = \sqrt{2}$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 3$, $Q_\alpha = 3 + \ln(2\alpha)$, если $\alpha \leq 1/2$ и $Q_\alpha = 3 - \ln(2(1 - \alpha))$, если $\alpha > 1/2$, $M = 3$.

Случайная величина имеет единственную моду и наивероятнейшее значение $x_0 = 3$.

7.42. Непрерывная случайная величина X имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a, b); \\ \frac{2}{b-a} - \frac{4}{(b-a)^2} \left| x - \frac{b+a}{2} \right|, & x \in (a, b), \end{cases}$$

причем a и b не известны, но $b > a$, а $\mathbf{M}X = 5$ и $\mathbf{D}X = 6$. Найдите a и b .

О т в е т: $a = -1$, $b = 11$.

7.43. Каждый из 25 студентов группы выучил 80% экзаменационных билетов. Найдите среднее число студентов, сдавших экзамен.

О т в е т: 20.

7.44. Независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют экспоненциальное распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найдите математическое ожидание случайной величины $Y = X_1 X_2$.

О т в е т: $\mathbf{M}Y = 1/(\lambda_1 \lambda_2)$.

7.45. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения, представленный в табл. 7.9.

Таблица 7.9

Найдите математическое ожидание

и дисперсию случайной величины

$$Y = X^2 + 1.$$

О т в е т: $\mathbf{M}Y = 2,6$, $\mathbf{D}Y = 0,84$.

X	1	2	3	4
P	0,1	0,4	0,3	0,2

7.46. Площадь круга вычисляют по измеренному диаметру круга X , используя формулу $S = \pi X^2/4$. Считая, что измеренный диаметр круга X распределен равномерно на отрезке $[a, b]$, найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины S .

О т в е т: $\mathbf{M}S = \pi(a^2 + ab + b^2)/12$, $\mathbf{D}S = \pi^2(b-a)^2(4a^2 + 7ab + 4b^2)/720$.

Таблица 7.10

X_2	X_1		
	-1	0	1
0	0,1	0,2	0
1	0,2	0,3	0,20

7.47. Закон распределения вероятностей двумерной дискретной случайной величины (X_1, X_2) представлен табл. 7.10. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = X_1^2 + 2X_2$.
О т в е т: $MY = 1,9$, $DY = 1,29$.

7.48. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) распределена равномерно в квадрате $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию площади Y прямоугольника со сторонами X_1 и X_2 .

О т в е т: $MY = 1/4$, $DY = 7/144$.

7.49. Плотность распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-1, 1); \\ 3(1 - x^2)/4, & x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Найдите начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядка, а также асимметрию и эксцесс случайной величины X .

О т в е т: $m_1 = \overset{\circ}{m}_1 = 0$, $m_2 = \overset{\circ}{m}_2 = DX = 1/5$, $m_3 = \overset{\circ}{m}_3 = 0$, $m_4 = \overset{\circ}{m}_4 = 3/35$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = -6/7$.

7.50. Изготавливаемые в цехе втулки сортируют по отклонению их внутреннего диаметра от номинального размера на четыре группы со значениями 0,01, 0,02, 0,03 и 0,04 мм и по овальности на четыре группы со значениями 0,002, 0,004, 0,006 и 0,008 мм. Совместное распределение вероятностей отклонения диаметра X_1 и овальности X_2 представлено табл. 7.11. Найдите математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную и корреляционную матрицы случайных величин X_1 и X_2 .

Таблица 7.11

X_2	X_1			
	0,01	0,02	0,03	0,04
0,002	0,01	0,02	0,04	0,4
0,004	0,03	0,24	0,15	0,06
0,006	0,04	0,10	0,08	0,08
0,008	0,02	0,04	0,03	0,02

О т в е т: $\mathbf{M}X_1 = 0,026$ мм, $\mathbf{M}X_2 = 0,005$ мм, $\mathbf{D}X_1 = 81 \times 10^{-5}$ мм², $\mathbf{D}X_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ мм², $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 254 \cdot 10^{-5}$ мм²,
 $\rho \approx 0,41$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 81 \cdot 10^{-5} & 254 \cdot 10^{-5} \\ 254 \cdot 10^{-5} & 4 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0,41 \\ 0,41 & 1 \end{pmatrix}$.

7.51. Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины (X_1, X_2) имеет вид

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq 0 \text{ или } x_2 \leq 0; \\ 4x_1x_2e^{-(x_1^2+x_2^2)}, & x_1 > 0 \text{ и } x_2 > 0. \end{cases}$$

Найдите математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную и корреляционную матрицы случайных величин X_1 и X_2 .

О т в е т:

$$\mathbf{M}X_1 = \mathbf{M}X_2 = \sqrt{\pi}/2, \quad \mathbf{D}X_1 = \mathbf{D}X_2 = (4 - \pi)/4,$$

$$\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0, \quad \rho = 0,$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} (4 - \pi)/4 & 0 \\ 0 & (4 - \pi)/4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.52. Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины (X_1, X_2) имеет вид

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq 0 \text{ или } x_2 \leq 0; \\ \lambda_1\lambda_2e^{-\lambda_1x_1-\lambda_2x_2}, & x_1 > 0 \text{ и } x_2 > 0, \end{cases}$$

где $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Проверьте, являются ли случайные величины X_1 и X_2 некоррелированными.

О т в е т: да, являются.

7.53. Случайные величины X_1 и X_2 имеют математические ожидания $\mathbf{M}X_1 = -5$, $\mathbf{M}X_2 = 2$, дисперсии $\mathbf{D}X_1 = 0,5$, $\mathbf{D}X_2 = 0,4$ и ковариацию $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0,2$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 4X_1 - 5X_2 + 25$.

О т в е т: $\mathbf{M}Y = -5$, $\mathbf{D}Y = 10$.

7.54. Найдите математические ожидания, дисперсии и ковариацию случайных величин Y_1 и Y_2 , где $Y_1 = 3X_1 - 2X_2$, $Y_2 = 5X_2 - X_1$, а случайные величины X_1 и X_2 имеют следующие числовые характеристики: $\mathbf{M}X_1 = -0,5$, $\mathbf{M}X_2 = 1$, $\mathbf{D}X_1 = 3$, $\mathbf{D}X_2 = 2,9$, $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 2$.

О т в е т: $\mathbf{M}Y_1 = -3,5$, $\mathbf{M}Y_2 = 5,5$, $\mathbf{D}Y_1 = 14,6$, $\mathbf{D}Y_2 = 50,5$, $\mathbf{cov}(Y_1, Y_2) = -4$.

7.55. Двумерный случайный вектор \vec{X} имеет вектор средних значений $\vec{m}_{\vec{X}} = (0,06, 0,08)$ и матрицу ковариаций $\Sigma_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$. Найдите вектор средних значений и матрицу ковариаций случайного вектора $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}$, где $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, а $\vec{c} = (0, -0,1, -0,2)$.

О т в е т: $\vec{m}_{\vec{Y}} = (0,10, 0,04, -0,02)$, $\Sigma_{\vec{Y}} = \begin{pmatrix} 1,0 & 1,1 & 1,2 \\ 1,1 & 1,3 & 1,5 \\ 1,2 & 1,5 & 1,8 \end{pmatrix}$.

7.56. Для непрерывной случайной величины X , имеющей плотность распределения

$$p(x) = \frac{2}{\pi(x^2 - 6x + 13)},$$

найдите α -квантиль, медиану, моду и ее наивероятнейшее значение.

О т в е т: $Q_\alpha = 2 \operatorname{tg}(\pi(2\alpha - 1)/2) + 3$, $M = 3$. Случайная величина X имеет единственную моду и наивероятнейшее значение $x_0 = 3$.

7.57. Распределение вероятностей двумерной дискретной случайной величины (X_1, X_2)

задано табл. 7.12. Найдите энтропии скалярных случайных величин X_1 и X_2 , а также энтропию двумерного случайного вектора (X_1, X_2) . Являются ли случайные величины X_1 и X_2 независимыми?

Таблица 7.12

X_2	X_1		
	-0,5	0,34	1,48
-0,19	0,08	0,12	0,20
12,24	0,12	0,18	0,30

О т в е т: $H(X_1) = 0,5 \log 5 + 0,8 \log 2 - 0,3 \log 3$, $H(X_2) = \log 5 - 0,4 \log 2 - 0,6 \log 3$, $H(X_1, X_2) = 1,5 \log 5 + 0,4 \log 2 - 0,9 \log 3$. Случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми.

7.58. Двумерная непрерывная случайная величина (X_1, X_2) имеет совместную плотность распределения

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq 0 \text{ или } x_2 \leq 0; \\ \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2}, & x_1 > 0 \text{ и } x_2 > 0. \end{cases}$$

Найдите энтропии скалярных случайных величин X_1 и X_2 , а также энтропию двумерного случайного вектора (X_1, X_2) . Являются ли случайные величины X_1 и X_2 независимыми?

О т в е т: $H(X_1) = \log(e/\lambda_1)$, $H(X_2) = \log(e/\lambda_2)$, $H(X_1, X_2) = \log(e^2/(\lambda_1 \lambda_2))$. Случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми.

8. УСЛОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие *условной вероятности*, введенное в гл. 3. Там же было показано, что условная вероятность $P(A|B)$ обладает всеми свойствами *безусловной вероятности* и так же, как и безусловная вероятность, представляет собой численную меру наступления *события* A , но только при условии, что событие B произошло.

Аналогом понятия условной вероятности для двух *случайных величин* X и Y является *условный закон распределения* одной из них, допустим, X при условии, что вторая случайная величина Y приняла определенное значение. С помощью условного закона распределения вводят условные числовые характеристики. Именно эти понятия и рассматриваются в настоящей главе.

8.1. Условные распределения

Понятие условного распределения, как обычно, введем только для случаев *дискретных и непрерывных случайных величин*.

В случае *двумерной дискретной случайной величины* (X, Y) будем предполагать для простоты изложения, что *множества возможных значений* случайных величин X и Y являются конечными, т.е. координаты X и Y принимают значения x_i , $i = \overline{1, n}$, и y_j , $j = \overline{1, m}$, соответственно. В этом случае, как мы знаем, *закон распределения* двумерного случайного вектора (X, Y) удобно задавать набором *вероятностей*

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

для всех значений i и j . Напомним, что, зная вероятности p_{ij} , нетрудно найти (см. 5.2) законы распределений каждой из координат по формулам

$$p_{Xi} = \mathbf{P}\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^m p_{ij},$$

$$p_{Yj} = \mathbf{P}\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^n p_{ij}.$$

Определение 8.1. Для двумерной дискретной случайной величины (X, Y) **условной вероятностью** π_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, того, что случайная величина X примет значение x_i при условии $Y = y_j$, называют условную вероятность события $\{X = x_i\}$ при условии события $\{Y = y_j\}$, т.е.

$$\pi_{ij} = \mathbf{P}\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{\mathbf{P}\{X = x_i, Y = y_j\}}{\mathbf{P}\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{Yj}}. \quad (8.1)$$

При каждом j , $j = \overline{1, m}$, набор вероятностей π_{ij} , $i = \overline{1, n}$, определяет, с какими вероятностями случайная величина X принимает различные значения x_i , если известно, что случайная величина Y приняла значение y_j . Иными словами, набор вероятностей π_{ij} , $i = \overline{1, n}$, характеризует **условное распределение** дискретной случайной величины X при условии $Y = y_j$.

Обычно условное распределение дискретной случайной величины X при условии, что дискретная случайная величина Y примет все возможные значения, задают с помощью табл. 8.1. Элементы π_{ij} табл. 8.1 получают из элементов табл. 5.1, используя формулу

$$\pi_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{Yj}},$$

Очевидно, что, наоборот, элементы табл. 5.1 можно выразить через элементы табл. 8.1 с помощью соотношения

$$p_{ij} = \pi_{ij} p_{Yj}.$$

Для проверки правильности составления табл. 8.1 рекомендуется просуммировать π_{ij} по столбцам. Сумма элементов последней строки должна быть равна 1.

Таблица 8.1

X	Y				
	y_1	y_2	\dots	y_m	P_X
x_1	π_{11}	π_{12}	\dots	π_{1m}	p_{X1}
x_2	π_{21}	π_{22}	\dots	π_{2m}	p_{X2}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_n	π_{n1}	π_{n2}	\dots	π_{nm}	p_{Xn}
P_Y	p_{Y1}	p_{Y2}	\dots	p_{Ym}	

Аналогично определяют условную вероятность π_{ij}^* того, что случайная величина Y примет значение y_j при условии $X = x_i$:

$$\pi_{ij}^* = P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{Xi}}.$$

Таблица 8.2

X_1	X_2		
	0	1	P_{X_1}
0	q	q	q
1	p	p	p
P_{X_2}	q	p	

Пример 8.1. Условное распределение числа X_1 успехов в первом испытании по схеме Бернулли (см. пример 5.4) при условии, что число успехов во втором испытании $X_2 = j$, $j = 0, 1$, задается табл. 8.2. Из этой таблицы следует, что, независимо от числа успехов во вто-

ром испытании, 0 или 1 успех в первом испытании происходит с одними и теми же вероятностями p и q . Это очевидно, поскольку испытания по схеме Бернулли являются независимыми.

Пример 8.2. Условное распределение случайной величины X (числа очков, выпавших на верхней грани игральной кости, см. пример 5.5) при условии $Y = y_j$ (числа очков, выпавших на нижней грани игральной кости), $j = \overline{1, 6}$, представлено в табл. 8.3. Действительно, если, например, на нижней грани

выпало одно очко, то на верхней грани может выпасть только шесть очков ($\pi_{61} = 1$). #

Таблица 8.3

X	Y						
	1	2	3	4	5	6	\mathbf{P}_X
1	0	0	0	0	0	1	1/6
2	0	0	0	0	1	0	1/6
3	0	0	0	1	0	0	1/6
4	0	0	1	0	0	0	1/6
5	0	1	0	0	0	0	1/6
6	1	0	0	0	0	0	1/6
\mathbf{P}_Y	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	

В общем случае (т.е. когда X и Y не обязательно дискретные случайные величины) хотелось бы ввести *условную функцию распределения* случайной величины X при условии $Y = y$ по формуле

$$F_X(x|Y = y) = \frac{\mathbf{P}\{X < x, Y = y\}}{\mathbf{P}\{Y = y\}}. \quad (8.2)$$

Однако это не всегда возможно (например, для непрерывной случайной величины Y событие $\{Y = y\}$ имеет нулевую вероятность, т.е. $\mathbf{P}\{Y = y\} = 0$). Поэтому воспользуемся предельным переходом, рассматривая вместо события $\{Y = y\}$ событие $\{y \leq Y < y + \Delta\}$ и устремляя Δ к нулю.

Ограничимся случаем, когда *двумерный случайный вектор* (X, Y) имеет непрерывную *совместную плотность распределения* $p(x, y)$, а следовательно (см. 5.3), и *маргинальные плотности распределения*

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \quad \text{и} \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx,$$

которые также будем считать непрерывными.

Определим условную вероятность события $\{X < x\}$ при условии события $\{y \leq Y < y + \Delta y\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X < x | y \leq Y < y + \Delta y\} &= \frac{\mathbf{P}\{X < x, y \leq Y < y + \Delta y\}}{\mathbf{P}\{y \leq Y < y + \Delta y\}} = \\ &= \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{F_Y(y + \Delta y) - F_Y(y)} = \frac{\int_y^{y+\Delta y} dv \int_{-\infty}^x p(u, v) du}{\int_y^{y+\Delta y} p_Y(v) dv}. \end{aligned}$$

Можно показать, что в силу сделанных предположений функция $\int_{-\infty}^x p(u, v) du$ является непрерывной. Поэтому, согласно теореме о среднем значении [VI],

$$\begin{aligned} \int_y^{y+\Delta y} dv \int_{-\infty}^x p(u, v) du &= \Delta y \int_{-\infty}^x p(u, \xi) du, \\ \int_y^{y+\Delta y} p_Y(v) dv &= p_Y(\eta) \Delta y \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}\{X < x | y \leq Y < y + \Delta y\} = \frac{\int_{-\infty}^x p(u, \xi) du}{p_Y(\eta)},$$

где ξ и η — некоторые числа, заключенные между y и $y + \Delta y$.

Устремляя теперь Δy к нулю, получаем следующие выражения для **условной функции распределения** $F_X(x|Y = y)$:

$$F_X(x|Y = y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \mathbf{P}\{X < x | y \leq Y < y + \Delta y\} = \frac{\int_{-\infty}^x p(u, y) du}{p_Y(y)}.$$

Таким образом, по определению, имеем

$$F_X(x|Y=y) = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^x p(u, y) du. \quad (8.3)$$

При сделанных предположениях о непрерывности случайного вектора (X, Y) условная функция распределения $F_X(x|Y=y)$ имеет производную по x , т.е. существует условная плотность распределения случайной величины X при условии $Y=y$:

$$p_X(x|Y=y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}.$$

Аналогично определяют условную функцию распределения $F_Y(y|X=x)$ и условную плотность распределения $p_Y(y|X=x)$ случайной величины Y при условии $X=x$:

$$F_Y(y|X=x) = \frac{1}{p_X(x)} \int_{-\infty}^y p(x, v) dv, \quad (8.4)$$

$$p_Y(y|X=x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}.$$

Для краткости далее вместо $p_X(x|Y=y)$ и $p_Y(y|X=x)$ будем писать $p_X(x|y)$ и $p_Y(y|x)$.

Итак, для непрерывного случайного вектора (X, Y) мы пришли к следующему определению условной плотности распределения.

Определение 8.2. *Условной плотностью распределения* случайной величины X , являющейся координатой двумерного случайного вектора (X, Y) , при условии, что другая его координата приняла некоторое фиксированное значение y , т.е. $Y=y$, называют функцию $p_X(x|y)$, определяемую соотношением

$$p_X(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}. \quad (8.5)$$

Аналогично определяют условную плотность распределения $p_Y(y|x)$ координаты Y при условии $X = x$:

$$p_Y(y|x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}. \quad (8.6)$$

Введенные понятия — условное распределение (дискретной случайной величины), условная функция распределения и условная плотность распределения (для непрерывных случайных величин) — называют **условными законами распределения**.

Смысл введенных понятий поясним на примерах.

Пример 8.3. Пусть двумерный случайный вектор (X, Y) имеет нормальное распределение с вектором средних значений (m_1, m_2) и матрицей ковариаций

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (\sigma_1, \sigma_2 > 0, \quad -1 < \rho < 1).$$

Найдем условную плотность распределения случайной величины X при условии $Y = y$.

Как известно (см. 5.5), совместная двумерная плотность распределения случайных величин X и Y

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\},$$

а маргинальная плотность распределения случайной величины Y

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-(y-m_2)^2/(2\sigma_2^2)}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} p_X(x|y) &= \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \\ &= \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} \left[x - \left(m_1 + \frac{\rho\sigma_1(y-m_2)}{\sigma_2} \right) \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, условное распределение X при условии $Y = y$ также является нормальным со *средним значением* (которое обозначим $g(y)$)

$$g(y) = m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2) \quad (8.7)$$

и *средним квадратичным отклонением* (обозначим его $\sigma_{X|y}$)

$$\sigma_{X|y} = \sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2}. \quad (8.8)$$

Аналогично условное распределение Y при условии $X = x$ является нормальным со *средним значением* (которое обозначим $h(x)$)

$$h(x) = m_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - m_1) \quad (8.9)$$

и *средним квадратичным отклонением* (обозначим его $\sigma_{Y|x}$)

$$\sigma_{Y|x} = \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}. \quad (8.10)$$

Для того чтобы дать наглядную интерпретацию полученного результата, обратимся к примеру 5.24, в котором координаты X_1 и X_2 двумерного случайного вектора (X_1, X_2) представляют собой рост и вес жителя страны Нормалии.

Пусть известно, что вес случайно встреченного нормальца равен x_2 . Тогда его рост будет иметь нормальное распределение со *средним значением* (в см)

$$g(x_2) = 172 + \frac{0,66\sqrt{45}(x_2 - 74)}{\sqrt{40}} \approx 120 + 0,70x_2$$

и средним квадратичным отклонением

$$\sigma_{X_1|x_2} = \sqrt{45}\sqrt{1-0,66^2} \approx 5,0.$$

Таким образом,

$$p_{X_1}(x_1|x_2) = \frac{1}{\sqrt{50\pi}} e^{-(x_1-120-0,7x_2)^2/50}.$$

В частности, весу 70 кг соответствует среднее значение роста 169 см, весу 75 кг — около 173 см и т.д.

Отметим, что в отличие от среднего роста $g(x_2)$, зависящего линейно от x_2 , среднее квадратичное отклонение роста $\sigma_{X_1|x_2}$ является постоянным, т.е. не зависит от x_2 .

Графическое изображение зависимости роста от веса приведено на рис. 8.1. Здесь по оси абсцисс отложены значения роста нормальца, а по оси ординат — его веса. Прямая линия $x_1 = g(x_2)$ показывает зависимость среднего роста от веса. Условная плотность распределения $p_{X_1}(x_1|x_2)$ роста, как функции от веса x_2 , изображена в виде „срезов“.

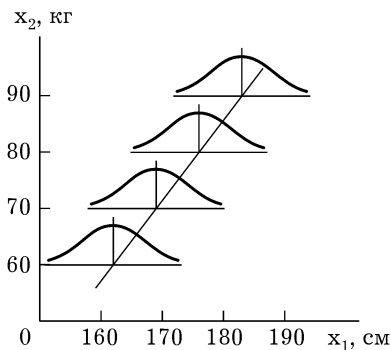


Рис. 8.1

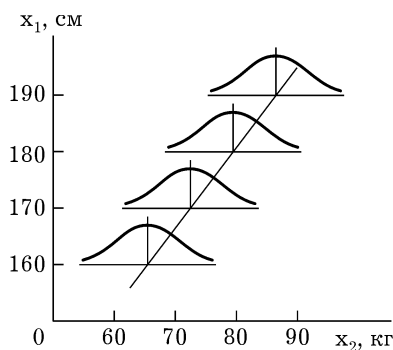


Рис. 8.2

Аналогичные вычисления показывают, что условная плотность распределения $p_{X_2}(x_2|x_1)$ веса нормальца X_2 в зависимости от его роста x_1 является плотностью нормального распределения с параметрами

$$h(x_1) \approx 0,62x_1 - 33 \quad \text{и} \quad \sigma_{X_2|x_1} \approx 4,8,$$

т.е. имеет вид

$$p_{X_2}(x_2|x_1) = \frac{1}{\sqrt{46\pi}} e^{-(x_2+33-0,62x_1)^2/46}.$$

Графическое изображение зависимости веса от роста приведено на рис. 8.2.

Пример 8.4. Пусть случайные величины X_1 и X_2 представляют собой координаты точки падения частицы, случайным образом брошенной в круг радиуса R с центром в начале координат (см. пример 5.6). Случайный вектор (X_1, X_2) имеет плотность распределения

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1^2 + x_2^2 > R^2; \\ \frac{1}{\pi R^2}, & x_1^2 + x_2^2 \leq R^2. \end{cases}$$

Найдем условную плотность распределения абсциссы X_1 точки падения частицы при условии, что ордината X_2 приняла значение x_2 . Поскольку маргинальная плотность распределения $p_{X_2}(x_2)$ случайной величины X_2 имеет вид

$$p_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 0, & |x_2| > R; \\ \frac{2\sqrt{R^2 - x_2^2}}{\pi R^2}, & |x_2| \leq R, \end{cases}$$

получаем при $|x_2| \leq R$:

$$p_{X_1}(x_1|x_2) = \frac{p(x_1, x_2)}{p_{X_2}(x_2)} = \begin{cases} 0, & |x_1| > \sqrt{R^2 - x_2^2}; \\ \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x_2^2}}, & |x_1| \leq \sqrt{R^2 - x_2^2}. \end{cases}$$

Таким образом, случайная величина X_1 при условии $X_2 = x_2$ равномерно распределена на отрезке $[-\sqrt{R^2 - x_2^2}, \sqrt{R^2 - x_2^2}]$. Если $|x_2| > R$, то условная плотность распределения $p_{X_1}(x_1|x_2)$ не определена; но это нас не должно волновать, поскольку случайная величина X_2 не может принимать значения, по абсолютной величине большие R . #

Для проверки независимости случайных величин часто удобно пользоваться следующим критерием.

Критерий независимости случайных величин X и Y . Случайные величины X и Y являются независимыми тогда и только тогда, когда условное распределение (функция распределения, плотность распределения) случайной величины X при условии $Y = y$ совпадает с безусловным распределением (функцией распределения, плотностью распределения) случайной величины X .

В частности, дискретные величины X и Y являются независимыми тогда и только тогда, когда все условные вероятности

$$\pi_{ij} = \mathbf{P}\{X = x_i | Y = y_j\}$$

совпадают с безусловными вероятностями

$$p_{X_i} = \mathbf{P}\{X = x_i\},$$

т.е. все столбцы табл. 8.1 совпадают с последним.

Пример 8.5. В двух испытаниях по схеме Бернулли (см. пример 8.1) числа успехов X_1 и X_2 в первом и втором испытаниях являются независимыми случайными величинами, поскольку в табл. 8.2 все три столбца совпадают. Этот факт нами уже был установлен другим способом в примере 5.9.

Пример 8.6. Число очков X , выпавших на верхней грани игральной кости, и число очков Y — на нижней грани (см. пример 8.2) — зависимые случайные величины, поскольку вообще ни один из первых шести столбцов табл. 8.3 не совпадает с последним.

Пример 8.7. Условная плотность распределения случайной величины X_1 (абсциссы точки падения при равномерном бросании частицы в круг, см. пример 8.4) при условии $X_2 = x_2$ (ординаты точки падения) равномерна, в то время как безусловная плотность X_1 таковой не является. И в этом примере X_1 и X_2 зависимые случайные величины.

8.2. Условные числовые характеристики

Рассмотрим *двумерную случайную величину* (X, Y) . В соответствии с результатами предыдущего параграфа можно определить *условное распределение* случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла определенное значение y . Поскольку условное распределение обладает всеми свойствами обычного (безусловного) распределения, то по нему можно определить *математическое ожидание*, *дисперсию* и другие числовые характеристики, которые естественно назвать *условными*.

Начнем со случая *дискретной случайной величины* (X, Y) . Пусть случайная величина X принимает значения x_1, \dots, x_n , а случайная величина Y — значения y_1, \dots, y_m и пусть

$$\begin{aligned} \pi_{ij} &= \mathbf{P}\{X = x_i | Y = y_j\} = \\ &= \frac{\mathbf{P}\{X = x_i, Y = y_j\}}{\mathbf{P}\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{Yj}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

условные вероятности случайной величине X принять значение x_i при условии $Y = y_j$.

Определение 8.3. Для дискретной двумерной случайной величины (X, Y) *значением* $\mathbf{M}(X | Y = y_j)$ *условного математического ожидания* дискретной случайной величины X при условии $Y = y_j$, называют число

$$\mathbf{M}(X | Y = y_j) = \sum_{i=1}^n x_i \pi_{ij}.$$

Далее для краткости будем писать $\mathbf{M}(X | y_j)$ вместо $\mathbf{M}(X | Y = y_j)$.

По аналогии с (безусловным) математическим ожиданием $\mathbf{M}X$ случайной величины X значение $\mathbf{M}(X | y_j)$ условного математического ожидания при условии $Y = y_j$ задает „среднее“

значение случайной величины X , но при условии, что случайная величина Y приняла значение y_j .

Таким же образом интерпретируют значение $\mathbf{M}(Y|x_i) = \mathbf{M}(Y|X = x_i)$ условного математического ожидания случайной величины Y при условии $X = x_i$.

Согласно определению 8.3, значение $\mathbf{M}(X|y_j)$ условного математического ожидания зависит от значения y_j случайной величины Y , и только от него. Вспоминая понятие функции от случайной величины, приходим к следующему определению условного математического ожидания.

Определение 8.4. *Условным математическим ожиданием $\mathbf{M}(X|Y)$ дискретной случайной величины X относительно дискретной случайной величины Y называют функцию*

$$\mathbf{M}(X|Y) = g(Y)$$

от случайной величины Y , где область определения функции $g(y)$ совпадает с множеством значений y_1, \dots, y_m случайной величины Y , а каждому значению y_j аргумента y поставлено в соответствие число

$$g(y_j) = \mathbf{M}(X|y_j).$$

Подчеркнем еще раз, что условное математическое ожидание $\mathbf{M}(X|Y)$ является функцией от случайной величины, т.е. также случайной величиной.

Приведем примеры.

Пример 8.8. Пусть X_1 и X_2 — числа успехов в первом и втором испытаниях по *схеме Бернулли* с вероятностью успеха p . Найдём $\mathbf{M}(X_1|X_2)$. Используя табл. 8.2, получаем:

$$\mathbf{M}(X_1|0) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$$

$$\mathbf{M}(X_1|1) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Таким образом, значения $\mathbf{M}(X_1|0)$ и $\mathbf{M}(X_1|1)$ условного математического ожидания совпадают для обоих значений 0 и 1 случайной величины X_2 и равны p . Поэтому

$$\mathbf{M}(X_1|X_2) \equiv p.$$

Пример 8.9. Найдем условное математическое ожидание $\mathbf{M}(X|Y)$ случайной величины X — числа очков, выпавших на верхней грани игральной кости, относительно случайной величины Y — числа очков, выпавших на нижней грани (см. пример 8.2). В соответствии с табл. 8.3

$$\mathbf{M}(X|1) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 6,$$

$$\mathbf{M}(X|2) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 5,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\mathbf{M}(X|6) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 1.$$

Полученный результат в терминах условного математического ожидания можно записать в виде

$$\mathbf{M}(X|Y) = 7 - Y.$$

Теорема 8.1. Условное математическое ожидание $\mathbf{M}(X|Y)$ обладает следующими свойствами.

1. $\mathbf{M}(c|Y) \equiv c$.
2. $\mathbf{M}(aX + b|Y) = a\mathbf{M}(X|Y) + b$.
3. $\mathbf{M}(X_1 + X_2|Y) = \mathbf{M}(X_1|Y) + \mathbf{M}(X_2|Y)$.
4. Пусть случайные величины X_1 и X_2 являются *независимыми* при условии, что случайная величина Y приняла любое конкретное значение. Тогда $\mathbf{M}(X_1 X_2|Y) = \mathbf{M}(X_1|Y)\mathbf{M}(X_2|Y)$ (это утверждение мы приводим без доказательства).
5. $\mathbf{M}X = \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y))$.
6. Пусть $u(X)$ и $v(Y)$ — функции от случайных величин X и Y . Тогда $\mathbf{M}(u(X)v(Y)|Y) = v(Y)\mathbf{M}(u(X)|Y)$.

7. Если X и Y — независимые случайные величины, то $\mathbf{M}(X|Y) \equiv \mathbf{M}X$.

◀ Утверждения 1–3 доказываются совершенно аналогично тому, как это делалось для безусловного математического ожидания (разумеется, арифметические действия нужно понимать уже не как действия над числами, а как действия над функциями, определенными для всех значений случайной величины Y).

Докажем последние три утверждения.

Действительно, в силу определений математического ожидания и условного математического имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y)) &= \sum_{j=1}^m \mathbf{M}(X|y_j) p_{Yj} = \sum_{j=1}^m p_{Yj} \sum_{i=1}^n x_i \pi_{ij} = \\ &= \sum_{j=1}^m p_{Yj} \sum_{i=1}^n x_i \frac{p_{ij}}{p_{Yj}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p_{ij} = \mathbf{M}X, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение 5.

Далее, случайная величина $u(X)v(Y)$ принимает значение $u(x_i)v(y_j)$, когда X принимает значение x_i и Y — значение y_j , и, следовательно, для каждого j

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(u(X) \cdot v(Y)|y_j) &= \sum_{i=1}^n u(x_i) \cdot v(y_j) \pi_{ij} = \\ &= v(y_j) \sum_{i=1}^n u(x_i) \pi_{ij} = v(y_j) \mathbf{M}(u(X)|y_j), \end{aligned}$$

откуда вытекает утверждение 6.

Наконец, используя условие независимости случайных величин X и Y , выраженное в терминах условного распределения (см. 8.1), находим

$$\mathbf{M}(X|y_j) = \sum_{i=1}^n x_i \pi_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i \pi_{Xi} = \mathbf{M}X,$$

откуда следует справедливость утверждения 7. ▶

Пример 8.10. Еще раз вычислим $M(X_1|X_2)$ (см. пример 8.8), но теперь уже воспользуемся свойством 7 условного математического ожидания. Тогда, поскольку X_1 и X_2 — независимые случайные величины, то

$$M(X_1|X_2) \equiv M X_1 = p.$$

Пример 8.11. Снова обратимся к примеру 8.9. Так как сумма очков на противоположных гранях игральной кости равна 7, то $X = 7 - Y$. Представим X в виде

$$X = 1 \cdot (7 - Y).$$

Используя теперь свойство 6, в котором положено $u(x) = 1$, $v(y) = 7 - y$, и свойство 1, получим

$$M(X|Y) = M(1 \cdot (7 - Y)|Y) = (7 - Y)M(1|Y) = 7 - Y,$$

т.е. мы пришли к тому же результату, что и раньше, но практически без вычислений. #

Перейдем теперь к двумерной непрерывной случайной величине.

Определение 8.5. Для непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) значением $M(X|y) = M(X|Y = y)$ *условного математического ожидания* непрерывной случайной величины X при условии $Y = y$ называют число

$$M(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x|y) dx,$$

где

$$p_X(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

является условной плотностью распределения случайной величины X при условии $Y = y$.

Определение 8.6. Для непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) **условным математическим ожиданием** $\mathbf{M}(X|Y)$ непрерывной случайной величины X относительно случайной величины Y называют функцию $g(Y) = \mathbf{M}(X|Y)$ от случайной величины Y , принимающую значение $g(y) = \mathbf{M}(X|y)$ при $Y = y$.

Проверьте самостоятельно, что свойства условного математического ожидания, выведенные для дискретного случая, справедливы и для непрерывного (исключение составляет свойство 1, поскольку непрерывная случайная величина не может принимать всего одно значение).

Резюмируя изложенное выше, можно сказать, что зависимость поведения „в среднем“ случайной величины X от значения случайной величины Y характеризуется функцией $g(y) = \mathbf{M}(X|y)$.

Определение 8.7. Функцию $g(y)$ называют **функцией регрессии**, или просто **регрессией**, случайной величины X на случайную величину Y , а ее график — **линией регрессии** случайной величины X на случайную величину Y , или просто X на Y .

Линия регрессии графически изображает зависимость „в среднем“ случайной величины X от значения случайной величины Y .

Совершенно аналогично определяют значение $\mathbf{M}(Y|x)$ условного математического ожидания случайной величины Y при условии $X = x$ и условное математическое ожидание $\mathbf{M}(Y|X) = h(X)$. При этом функцию $h(x)$ называют функцией регрессии, или просто регрессией, случайной величины Y на случайную величину X , а ее график — линией регрессии Y на X . Линия регрессии Y на X графически изображает зависимость „в среднем“ случайной величины Y от значения случайной величины X .

Пример 8.12. Пусть (X, Y) — двумерная случайная величина, имеющая *нормальное распределение*. Как было показано в примере 8.3, условное распределение X при условии $Y = y$ является нормальным со средним значением

$$m_1 + \frac{\rho\sigma_1(y - m_2)}{\sigma_2}.$$

Следовательно, согласно определению математического ожидания, имеем

$$\mathbf{M}(X|Y) = m_1 + \frac{\rho\sigma_1(Y - m_2)}{\sigma_2},$$

т.е. линия регрессии случайной величины X на случайную величину Y в этом случае представляет собой прямую линию

$$g(y) = m_1 + \frac{\rho\sigma_1(y - m_2)}{\sigma_2}.$$

Очевидно, что аналогичный вид имеет в рассматриваемом случае и линия регрессии $h(x)$ координаты Y на координату X .

В частности, регрессия роста жителя страны Нормалии на его вес определяется формулой

$$g(x_2) = 120 + 0,70x_2,$$

а веса на рост — формулой

$$h(x_1) = 0,62x_1 - 33.$$

Линии регрессии роста на вес и веса на рост приведены на рис. 8.1 и рис. 8.2. #

Условное математическое ожидание, как обычное (безусловное) математическое ожидание, характеризует *центр рассеивания* случайной величины. Однако оно не дает никакой информации о степени рассеивания случайной величины относительно среднего значения.

Поскольку степень рассеивания случайной величины X можно оценить с помощью *дисперсии*, то в качестве меры рассеивания случайной величины X относительно Y можно принять *условную дисперсию*, которую естественно определить аналогично обычной дисперсии, но используя условное распределение случайной величины X при условии $Y = y$.

Определение 8.8. *Условной дисперсией $D(X|Y)$ случайной величины X относительно (случайной величины) Y называют случайную величину, задаваемую формулой*

$$D(X|Y) = M([X - M(X|Y)]^2 | Y).$$

Приведенное определение применимо как для двумерной дискретной случайной величины, так и для непрерывной.

Для двумерной дискретной случайной величины (X, Y) значение $D(X|y_j)$ *условной дисперсии* X при условии $Y = y_j$ определяется формулой

$$D(X|y_j) = M([X - M(X|y_j)]^2 | y_j) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X|y_j)]^2 \pi_{ij},$$

а для двумерной непрерывной случайной величины (X, Y) значение $D(X|y)$ *условной дисперсии* X при условии $Y = y$ задается формулой

$$D(X|y) = M([X - M(X|y)]^2 | y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X|y)]^2 p_X(x|y) dx.$$

Условная дисперсия случайной величины X так же, как и условное математическое ожидание этой случайной величины, зависит от того значения, которое приняла случайная величина Y . Поэтому условная дисперсия $D(X|Y)$ является функцией от случайной величины Y , область определения которой совпадает с *множеством возможных значений* случайной величины Y .

Наряду с условной дисперсией $\mathbf{D}(X|Y)$ (или ее значением $\mathbf{D}(X|y)$) используют условное среднее квадратичное отклонение $\sigma_{X|Y} = \sqrt{\mathbf{D}(X|Y)}$ (или его значение $\sigma_{X|y} = \sqrt{\mathbf{D}(X|y)}$).

Все сказанное выше относительно условной дисперсии $\mathbf{D}(X|Y)$ справедливо и для условной дисперсии $\mathbf{D}(Y|X)$ случайной величины Y относительно X .

Свойства условной дисперсии определяются следующей теоремой.

Теорема 8.2. Условная дисперсия $\mathbf{D}(X|Y)$ обладает следующими свойствами.

1. $\mathbf{D}(c|Y) \equiv 0$.

2. $\mathbf{D}(aX + b|Y) = a^2 \mathbf{D}(X|Y)$.

3. $\mathbf{D}(X|Y) = \mathbf{M}(X^2|Y) - [\mathbf{M}(X|Y)]^2$.

4. Пусть случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми при условии, что случайная величина Y приняла любое конкретное значение. Тогда $\mathbf{D}(X_1 + X_2|Y) = \mathbf{D}(X_1|Y) + \mathbf{D}(X_2|Y)$ (это утверждение мы приводим без доказательства).

5. Пусть $u(X)$ и $v(Y)$ — функции от случайных величин X и Y . Тогда $\mathbf{D}(u(X) \cdot v(Y)|Y) = v^2(Y) \mathbf{D}(u(X)|Y)$.

6. Если X и Y — независимые случайные величины, то $\mathbf{D}(X|Y) \equiv \mathbf{D}X$.

7. $\mathbf{D}X = \mathbf{M}(\mathbf{D}(X|Y)) + \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y) - \mathbf{M}X)^2$.

◀ Первые два утверждения мы предлагаем доказать самостоятельно.

Докажем оставшиеся четыре утверждения.

Согласно определению условной дисперсии,

$$\mathbf{D}(X|Y) = \mathbf{M}\left((X^2 - 2X\mathbf{M}(X|Y) + [\mathbf{M}(X|Y)]^2) \middle| Y\right).$$

Воспользовавшись свойством 2 условного математического ожидания, имеем

$$\mathbf{D}(X|Y) = \mathbf{M}(X^2|Y) - 2\mathbf{M}(X\mathbf{M}(X|Y)|Y) + \mathbf{M}((\mathbf{M}(X|Y))^2|Y).$$

Поскольку $\mathbf{M}(X|Y)$ и $(\mathbf{M}(X|Y))^2$ являются функциями от случайной величины Y , то в соответствии со свойством 6 условного математического ожидания

$$\mathbf{D}(X|Y) = \mathbf{M}(X^2|Y) - 2(\mathbf{M}(X|Y))(\mathbf{M}(X|Y)) + (\mathbf{M}(X|Y))^2.$$

Отсюда вытекает утверждение 3.

В силу определения условной дисперсии и свойства 6 условного математического ожидания имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(u(X) \cdot v(Y)|Y) &= \\ &= \mathbf{M}\left((u(X) \cdot v(Y) - \mathbf{M}(u(X) \cdot v(Y)|Y))^2|Y\right) = \\ &= \mathbf{M}\left((v(Y) \cdot u(X) - v(Y)\mathbf{M}(u(X)|Y))^2|Y\right) = \\ &= \mathbf{M}\left(v^2(Y)(u(X) - \mathbf{M}(u(X)|Y))^2|Y\right) = \\ &= v^2(Y)\mathbf{M}\left((u(X) - \mathbf{M}(u(X)|Y))^2|Y\right) = \\ &= v^2(Y)\mathbf{D}(u(X)|Y). \end{aligned}$$

Поэтому справедливо утверждение 5.

Далее, если случайные величины X и Y являются независимыми, то в силу свойства 7 условного математического ожидания

$$\mathbf{D}(X|Y) = \mathbf{M}((X - \mathbf{M}(X|Y))^2|Y) = \mathbf{M}((X - \mathbf{M}X)^2|Y).$$

Поскольку $(X - \mathbf{M}X)^2$ и Y также независимые случайные величины, то, вновь воспользовавшись свойством 7 условного математического ожидания, получим утверждение 6 теоремы.

Наконец, согласно свойству 3 условной дисперсии, имеем

$$\mathbf{M}(X^2|Y) = \mathbf{D}(X|Y) + (\mathbf{M}(X|Y))^2,$$

Беря от обеих частей этого равенства математическое ожидание, согласно свойству 5 условного математического ожидания,

находим

$$\mathbf{M}X^2 = \mathbf{M}(\mathbf{M}(X^2|Y)) = \mathbf{M}(\mathbf{D}(X|Y)) + \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y))^2.$$

Вычитая из обеих частей последнего равенства $(\mathbf{M}X)^2$, получаем

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2 = \mathbf{M}(\mathbf{D}(X|Y)) + \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y))^2 - (\mathbf{M}X)^2.$$

Осталось заметить, что в соответствии со свойствами 2 и 5 условного математического ожидания

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y) - \mathbf{M}X)^2 &= \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y))^2 - \\ &- 2(\mathbf{M}X)\mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y)) + (\mathbf{M}X)^2 = \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y))^2 - \\ &- 2(\mathbf{M}X)(\mathbf{M}X) + (\mathbf{M}X)^2 = \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y))^2 - (\mathbf{M}X)^2. \end{aligned}$$

Подставляя полученное равенство в предыдущую формулу, приходим к утверждению 7. ►

Пример 8.13. Пусть (X, Y) — двумерная случайная величина, имеющая нормальное распределение (см. примеры 8.3, 8.12). Из результатов этих примеров следует, что

$$\mathbf{D}(X|y) = \sigma_1^2(1 - \rho^2) \quad \text{и} \quad \mathbf{D}(X|Y) \equiv \sigma_1^2(1 - \rho^2).$$

Таким образом, значение $\mathbf{D}(X|y)$ условной дисперсии $\mathbf{D}(X|Y)$ не зависит от значения y случайной величины Y (естественно, что для произвольного двумерного случайного вектора (X, Y) это, вообще говоря, не так). Отметим также, что при фиксированной дисперсии $\mathbf{D}X = \sigma_1^2$ условная дисперсия $\mathbf{D}(X|Y)$ тем меньше, чем больше абсолютное значение коэффициента корреляции ρ .

При $\rho = \pm 1$ условная дисперсия $\mathbf{D}(X|Y) \equiv 0$. Этот факт становится очевидным (причем для произвольно распределенных случайных векторов (X, Y)), если вспомнить (см. 7.4), что при $\rho = \pm 1$ существует линейная зависимость

$$X = aY + b$$

между X и Y , а значит, в силу свойств 2, 5 и 1 условной дисперсии

$$\mathbf{D}(X|Y) = \mathbf{D}(aY + b|Y) = a^2 \mathbf{D}(Y|Y) = a^2 Y^2 \mathbf{D}(1|Y) \equiv 0.$$

Вычислим теперь дисперсию $\mathbf{D}X$ с помощью условной дисперсии $\mathbf{D}(X|Y)$. Воспользовавшись свойством 7 условной дисперсии и подставляя вместо условного математического ожидания $\mathbf{M}(X|Y)$ его значение, вычисленное в примере 8.12, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}X &= \mathbf{M}(\sigma_1^2(1 - \rho^2)) + \mathbf{M}\left(m_1 + \frac{\rho\sigma_1(Y - m_2)}{\sigma_2} - m_1\right)^2 = \\ &= \sigma_1^2(1 - \rho^2) + \frac{\rho^2\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\mathbf{M}(Y - m_2)^2 = \\ &= \sigma_1^2(1 - \rho^2) + \frac{\rho^2\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\mathbf{D}Y = \sigma_1^2(1 - \rho^2) + \rho^2\sigma_1^2 = \sigma_1^2. \end{aligned}$$

Естественно, мы получили хорошо известный нам результат (см. пример 7.17 и 5.5).

Пример 8.14. Рассмотрим двумерный случайный вектор (X, Y) , где X — случайная величина, *равномерно распределенная* на отрезке $[-1, 1]$, а $Y = X^2$ (см. пример 7.20). Найдём условные дисперсии $\mathbf{D}(X|Y)$ и $\mathbf{D}(Y|X)$ и с их помощью вычислим $\mathbf{D}X$ и $\mathbf{D}Y$.

Определим сначала $\mathbf{D}(Y|X)$ и $\mathbf{D}Y$. В соответствии со свойствами 6 и 1 условного математического ожидания имеем

$$\mathbf{M}(Y|X) = \mathbf{M}(X^2|X) = X^2 \mathbf{M}(1|X) = X^2.$$

Тогда, согласно свойствам 5 и 1 условной дисперсии,

$$\mathbf{D}(Y|X) = \mathbf{D}(X^2|X) = X^4 \mathbf{D}(1|X) = 0.$$

Полученный результат очевиден, поскольку если случайная величина X приняла конкретное значение x , то вследствие

наличия функциональной зависимости $Y = X^2$ значение $y = x^2$ случайной величины Y определяется однозначно.

Так как

$$\mathbf{M}Y = \mathbf{M}X^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

то, согласно свойствам 1 и 7 условной дисперсии, получаем

$$\mathbf{D}Y = \mathbf{M}0 + \mathbf{M}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{4}{45}.$$

Вычислим теперь $\mathbf{D}(X|Y)$ и $\mathbf{D}X$. Для этого заметим, что если случайная величина Y приняла конкретное значение y (лежащее на отрезке $[0, 1]$), то случайная величина X может принять только одно из двух значений:

$$x_1 = -\sqrt{y} \quad \text{и} \quad x_2 = \sqrt{y},$$

причем, поскольку X равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$, оба эти значения равновероятны. Иными словами, значению y случайной величины Y соответствуют значения $x_1 = -\sqrt{y}$ и $x_2 = \sqrt{y}$ случайной величины X , принимаемые с вероятностью $1/2$. Значит,

$$\mathbf{M}(X|y) = -\sqrt{y} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

и

$$\mathbf{D}(X|y) = (-\sqrt{y} - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (\sqrt{y} - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} = y.$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}(X|Y) \equiv 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{D}(X|Y) = Y.$$

Наконец, поскольку

$$\mathbf{M}X = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = 0,$$

то в силу свойства 7 условной дисперсии с учетом равенства $\mathbf{D}(X|Y) = Y$ получаем

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}Y + \mathbf{M}(0 - 0)^2 = \frac{1}{3}. \quad \#$$

В заключение отметим, что для характеристики нелинейной связи случайных величин X и Y часто используют корреляционные отношения $\eta_{X|Y}$ и $\eta_{Y|X}$.

Определение 8.9. *Корреляционными отношениями* случайных величин X и Y называют числа $\eta_{X|Y}$ и $\eta_{Y|X}$, которые задаются выражениями

$$\eta_{X|Y} = \sqrt{1 - \frac{1}{\mathbf{D}X} \mathbf{M}D(X|Y)} \quad (8.11)$$

и

$$\eta_{Y|X} = \sqrt{1 - \frac{1}{\mathbf{D}Y} \mathbf{M}D(Y|X)}. \quad (8.12)$$

Корреляционное отношение $\eta_{X|Y}$ вычисляют для дискретной и непрерывной случайных величин (X, Y) в соответствии с формулами

$$\eta_{X|Y} = \sqrt{1 - \frac{1}{\mathbf{D}X} \sum_{j=1}^m \mathbf{D}(X|y_j) p_{Yj}} \quad (8.13)$$

и

$$\eta_{X|Y} = \sqrt{1 - \frac{1}{\mathbf{D}X} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{D}(X|y) p_Y(y) dy}. \quad (8.14)$$

Заметим, что, в отличие от коэффициента корреляции ρ , корреляционное отношение зависит от порядка следования случайных величин X и Y , т.е. $\eta_{X|Y}$, вообще говоря, не совпадает с $\eta_{Y|X}$.

Свойства корреляционного отношения $\eta_{X|Y}$ определяются следующей теоремой.

Теорема 8.3. 1. Корреляционное отношение $\eta_{X|Y}$ можно записать в виде

$$\eta_{X|Y} = \sqrt{\frac{1}{DX} \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y) - \mathbf{M}X)^2}.$$

2. Корреляционное отношение $\eta_{X|Y}$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \eta_{X|Y} \leq 1.$$

3. Корреляционное отношение

$$\eta_{X|Y} = 1$$

тогда и только тогда, когда случайная величина X функционально (не обязательно линейно) зависит от Y .

4. Корреляционное отношение

$$\eta_{X|Y} = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{M}(X|Y) \equiv C = \mathbf{M}X,$$

т.е. линия регрессии X на Y представляет собой горизонтальную прямую.

5. Коэффициент корреляции ρ и корреляционное отношение $\eta_{X|Y}$ связаны неравенством

$$|\rho| \leq \eta_{X|Y}.$$

6. Модуль $|\rho|$ коэффициента корреляции совпадает с корреляционным отношением $\eta_{X|Y}$ тогда и только тогда, когда линия регрессии X на Y является прямой.

◀ Первое утверждение теоремы вытекает из свойства 7 условной дисперсии. Действительно,

$$\eta_{X|Y}^2 = \frac{DX - \mathbf{M}(\mathbf{D}(X|Y))}{DX} = \frac{\mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y) - \mathbf{M}X)^2}{DX}.$$

Правая часть неравенства утверждения 2 следует из определения корреляционного отношения, поскольку

$$\mathbf{D}(X|Y) \geq 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{M}(\mathbf{D}(X|Y)) \geq 0.$$

При этом равенство $\mathbf{M}(\mathbf{D}(X|Y)) = 0$, эквивалентное равенству $\eta_{X|Y} = 1$, имеет место тогда и только тогда, когда $\mathbf{D}(X|Y) \equiv 0$. В свою очередь, это тождество означает, что при каждом значении случайной величины Y случайная величина X принимает всего одно значение, т.е. X является функцией от Y , что доказывает утверждение 3.

Аналогично левая часть неравенства утверждения 2 следует из утверждения 1 теоремы, так как

$$(\mathbf{M}(X|Y) - \mathbf{M}X)^2 \geq 0,$$

при этом тождество $(\mathbf{M}(X|Y) - \mathbf{M}X)^2 \equiv 0$, эквивалентное тождеству $\mathbf{M}(X|Y) \equiv \mathbf{M}X$, имеет место тогда и только тогда, когда $\eta_{X|Y} = 0$, что доказывает утверждение 4.

Для доказательства утверждения 5 рассмотрим случайную величину

$$Z_x = xY - \mathbf{M}(X|Y),$$

где x — произвольное число, и вычислим ее дисперсию:

$$\mathbf{D}Z_x = x^2 \mathbf{D}Y - 2x \mathbf{cov}(Y, \mathbf{M}(X|Y)) + \mathbf{D}(\mathbf{M}(X|Y)).$$

Дисперсия $\mathbf{D}Z_x$, как функция от x , представляет собой квадратный трехчлен. Поскольку дисперсия любой случайной величины является неотрицательной, то дискриминант

$$(2\mathbf{cov}(Y, \mathbf{M}(X|Y)))^2 - 4\mathbf{D}Y\mathbf{D}(\mathbf{M}(X|Y)) \leq 0. \quad (8.15)$$

Найдем для $\mathbf{cov}(Y, \mathbf{M}(X|Y))$ и $\mathbf{D}(\mathbf{M}(X|Y))$ другие выражения. Воспользовавшись свойством 5 условного математического ожидания и утверждением 1 теоремы, заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{M}(X|Y)) &= \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y) - \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y)))^2 = \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y) - \mathbf{M}X)^2 = \eta_{X|Y}^2 \mathbf{D}X. \end{aligned}$$

По определению 7.8 ковариации, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{cov}(Y, \mathbf{M}(X|Y)) &= \\ &= \mathbf{M}\left((Y - \mathbf{M}Y)(\mathbf{M}(X|Y) - \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y)))\right). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Выражение под знаком математического ожидания в правой части равенства можно преобразовать, используя свойства 6 и 3 условного математического ожидания, следующим образом:

$$\begin{aligned} (Y - \mathbf{M}Y)(\mathbf{M}(X|Y) - \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y))) &= \\ &= \mathbf{M}\left[(Y - \mathbf{M}Y)X|Y\right] - \mathbf{M}\left[\left((Y - \mathbf{M}Y)\mathbf{M}X\right)|Y\right] = \\ &= \mathbf{M}\left((XY - X\mathbf{M}Y - Y\mathbf{M}X + \mathbf{M}X\mathbf{M}Y)|Y\right) = \\ &= \mathbf{M}\left((X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y)|Y\right). \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения $\mathbf{D}(\mathbf{M}(X|Y))$ и $\mathbf{cov}(Y, \mathbf{M}(X|Y))$ в (8.15), имеем

$$\left(\rho\sqrt{\mathbf{D}X\mathbf{D}Y}\right)^2 \leq \eta_{X|Y}^2 \mathbf{D}Y\mathbf{D}X,$$

откуда после деления на $\mathbf{D}Y\mathbf{D}X$ получаем утверждение 5.

Наконец, для того чтобы доказать утверждение 6, достаточно заметить, что, согласно свойству 5 ковариации (см. с. 310), неравенство (8.15) превращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$b + x_0Y - \mathbf{M}(X|Y) \equiv 0$$

для некоторых x_0 и b , или

$$\mathbf{M}(X|Y) \equiv x_0Y + b,$$

что эквивалентно утверждению 6. ►

Пример 8.15. Вычислим корреляционное отношение $\eta_{X|Y}$ для случайного вектора (X, Y) , распределенного по нормальному закону. Как следует из формулы (8.16) и примера 8.13,

$$\eta_{X|Y} = \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma_1^2} \mathbf{M}(\sigma_1^2(1 - \rho^2))} = \sqrt{\rho^2} = |\rho|.$$

Значение корреляционного отношения в данном случае совпадает с модулем коэффициента корреляции. Это становится очевидным, если вспомнить (см. пример 8.12), что линия регрессии X на Y является прямой, и воспользоваться утверждением 6 теоремы 8.3.

Пример 8.16. Найдём корреляционные отношения $\eta_{X|Y}$ и $\eta_{Y|X}$ для случайного вектора (X, Y) из примера 8.14:

$$\eta_{X|Y} = \sqrt{1 - 3\mathbf{M}Y} = 0, \quad \eta_{Y|X} = \sqrt{1 - \frac{45}{4}\mathbf{M}0} = 1.$$

Итак, мы получили, что $\eta_{X|Y} = 0$, что соответствует утверждению 4 теоремы 8.3, поскольку

$$\mathbf{M}(X|Y) \equiv 0 = \mathbf{M}X.$$

В свою очередь, равенство

$$\eta_{Y|X} = 1$$

соответствует утверждению 3 той же теоремы, так как случайная величина Y связана со случайной величиной X функциональной зависимостью

$$Y = X^2.$$

8.3. Решение типовых примеров

Пример 8.17. Распределение двумерного случайного вектора (X, Y) задано табл. 8.4. Найдём условное распределение случайной величины X при условии, что случайная величина Y

приняла значение y_j , $j = 1, 2$, и условное распределение случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x_i , $i = 1, 2, 3$. Используя найденные условные распределения, проверим, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Таблица 8.4

X	Y		
	0,2	0,5	0,8
0,04	0,15	0,30	0,35
0,08	0,05	0,12	0,03

Распределения случайных величин Y и X приведены в табл. 8.5 и 8.6.

Таблица 8.5

Y	0,2	0,5	0,8
P	0,20	0,42	0,38

Таблица 8.6

X	0,04	0,08
P	0,8	0,2

Воспользовавшись определением условных вероятностей

$$\pi_{ij} = P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{Yj}},$$

имеем:

$$\pi_{11} = P\{X = 0,04 | Y = 0,2\} = 0,15/0,20 = 0,750,$$

$$\pi_{21} = P\{X = 0,08 | Y = 0,2\} = 0,05/0,20 = 0,250,$$

$$\pi_{12} = P\{X = 0,04 | Y = 0,5\} = 0,15/0,42 \approx 0,714,$$

$$\pi_{22} = P\{X = 0,08 | Y = 0,5\} = 0,12/0,42 \approx 0,286,$$

$$\pi_{13} = P\{X = 0,04 | Y = 0,8\} = 0,35/0,38 \approx 0,921,$$

$$\pi_{23} = P\{X = 0,08 | Y = 0,8\} = 0,03/0,38 \approx 0,079.$$

Таким образом, для условного закона распределения случайной величины X при условии Y получаем табл. 8.7. Аналогично находим условные вероятности

Таблица 8.7

X	Y		
	0,2	0,5	0,8
0,04	0,750	0,714	0,921
0,08	0,250	0,286	0,079

$$\pi_{ij}^* = P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{Xi}},$$

представленные в табл. 8.8.

Поскольку, например, строки в табл. 8.8 не совпадают, то случайные величины X и Y являются независимыми.

Таблица 8.8

Y	X	
	0,04	0,08
0,2	0,1875	0,2500
0,5	0,3750	0,6000
0,8	0,4375	0,1500

Пример 8.18. Будем говорить, что случайный вектор (X, Y) имеет **равномерное распределение** в области D (с площадью S), если его плотность распределения

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S}, & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Пусть случайный вектор (X, Y) имеет равномерное распределение в треугольнике с вершинами в точках $(0;0)$, $(0;2)$, $(1;0)$. Найдем *условную плотность распределения* случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y , и *условную плотность распределения* случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x . Используя найденные условные плотности распределения, проверим, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Поскольку двумерный случайный вектор (X, Y) распределен равномерно в области D , представляющей собой треугольник с вершинами в точках $(0;0)$, $(0;2)$, $(1;0)$, то его плотность распределения имеет вид

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Отсюда нетрудно найти частные плотности распределения случайных величин X и Y :

$$p_X(x) = \begin{cases} 2(1-x), & x \in [0, 1]; \\ 0, & x \notin [0, 1]; \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1-y/2, & y \in [0, 2]; \\ 0, & y \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Воспользовавшись теперь определением *условной плотности распределения*, получаем

$$p_X(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2}{2-y}, & x \in [0, 1-y/2] \text{ и } y \in [0, 2]; \\ 0, & x \notin [0, 1-y/2] \text{ и } y \in [0, 2]; \end{cases}$$

$$p_Y(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-x)}, & y \in [0, 2(1-x)] \text{ и } x \in [0, 1]; \\ 0, & y \notin [0, 2(1-x)] \text{ и } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

При $y \notin [0, 2]$ и $x \notin [0, 1]$ условные плотности распределения $p_X(x|y)$ и $p_Y(y|x)$ не определяются, поскольку случайная величина Y не может попасть вне отрезка $[0, 2]$, а случайная величина X — вне отрезка $[0, 1]$.

Так как, например, условная плотность распределения $p_X(x|y)$ зависит от y , а плотность распределения $p_X(x)$ от y не зависит, случайные величины X и Y являются зависимыми.

Пример 8.19. В условиях примера 8.17 найдем *условные математические ожидания* $M(X|Y)$ и $M(Y|X)$, *условные дисперсии* $D(X|Y)$ и $D(Y|X)$ и *корреляционные отношения* $\eta_{X|Y}$ и $\eta_{Y|X}$.

Используя определение условного математического ожидания для *двумерной дискретной случайной величины* и результаты примера 8.17, находим значения $M(X|y_j)$ и $M(Y|x_i)$ услов-

ных математических ожиданий $\mathbf{M}(X|Y)$ и $\mathbf{M}(Y|X)$:

$$\mathbf{M}(X|0,2) = 0,04 \cdot 0,75 + 0,08 \cdot 0,25 = 0,05,$$

$$\mathbf{M}(X|0,5) = 0,04 \cdot 0,714 + 0,08 \cdot 0,286 = 0,05144,$$

$$\mathbf{M}(X|0,8) = 0,04 \cdot 0,921 + 0,08 \cdot 0,079 = 0,04316,$$

$$\mathbf{M}(Y|0,04) = 0,2 \cdot 0,1875 + 0,5 \cdot 0,375 + 0,8 \cdot 0,4375 = 0,575,$$

$$\mathbf{M}(Y|0,08) = 0,2 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,15 = 0,47.$$

Таким образом, условное математическое ожидание $\mathbf{M}(X|Y)$ является функцией $g(y)$ от случайной величины Y , причем область определения функции $g(y)$ состоит из трех точек 0,2, 0,5, 0,8 и

$$g(0,2) = 0,05, \quad g(0,5) = 0,05144, \quad g(0,8) = 0,04316.$$

Аналогично условное математическое ожидание $\mathbf{M}(Y|X)$ является функцией $h(X)$ от случайной величины X , причем область определения функции $h(x)$ состоит из двух точек 0,04, 0,08 и

$$h(0,04) = 0,575, \quad h(0,08) = 0,47.$$

Вычислим теперь значения $\mathbf{D}(X|y_j)$ и $\mathbf{D}(Y|x_i)$ условных дисперсий $\mathbf{D}(X|Y)$ и $\mathbf{D}(Y|X)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(X|0,2) &= \mathbf{M}(X^2|0,2) - (\mathbf{M}(X|0,2))^2 = \\ &= 0,04^2 \cdot 0,75 + 0,08^2 \cdot 0,25 - 0,05^2 = 0,0003, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(X|0,5) &= \mathbf{M}(X^2|0,5) - (\mathbf{M}(X|0,5))^2 = \\ &= 0,04^2 \cdot 0,714 + 0,08^2 \cdot 0,286 - 0,05144^2 = 0,00033, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(X|0,8) &= \mathbf{M}(X^2|0,8) - (\mathbf{M}(X|0,8))^2 = \\ &= 0,04^2 \cdot 0,921 + 0,08^2 \cdot 0,079 - 0,04316^2 \approx 0,00012, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(Y|0,04) &= \mathbf{M}(Y^2|0,04) - (\mathbf{M}(Y|0,04))^2 = \\ &= 0,2^2 \cdot 0,1875 + 0,5^2 \cdot 0,375 + 0,8^2 \cdot 0,4375 - 0,575^2 \approx 0,051, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(Y|0,08) &= \mathbf{M}(Y^2|0,08) - (\mathbf{M}(Y|0,08))^2 = \\ &= 0,2^2 \cdot 0,25 + 0,5^2 \cdot 0,6 + 0,8^2 \cdot 0,15 - 0,47^2 \approx 0,035.\end{aligned}$$

Условная дисперсия $\mathbf{D}(X|Y)$ является функцией от случайной величины Y с областью определения, состоящей из точек 0,2, 0,5, 0,8, и

$$\mathbf{D}(X|0,2)=0,0003, \quad \mathbf{D}(X|0,5)=0,00033, \quad \mathbf{D}(X|0,8)=0,00012.$$

Условная дисперсия $\mathbf{D}(Y|X)$ является функцией от случайной величины X с областью определения, состоящей из точек 0,04, 0,8, и

$$\mathbf{D}(Y|0,04) = 0,051, \quad \mathbf{D}(Y|0,08) = 0,035.$$

Наконец, найдем корреляционные отношения $\eta_{X|Y}$ и $\eta_{Y|X}$. Для этого вычислим сначала $\mathbf{D}X$ и $\mathbf{D}Y$. Имеем

$$\mathbf{M}X = 0,04 \cdot 0,8 + 0,08 \cdot 0,2 = 0,048,$$

$$\mathbf{D}X = 0,04^2 \cdot 0,8 + 0,08^2 \cdot 0,2 - 0,048^2 = 0,000256,$$

$$\mathbf{M}Y = 0,2 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,42 + 0,8 \cdot 0,38 = 0,554,$$

$$\mathbf{D}Y = 0,2^2 \cdot 0,2 + 0,5^2 \cdot 0,42 + 0,8^2 \cdot 0,38 - 0,554^2 = 0,04928.$$

Далее вычисляем

$$\begin{aligned}\mathbf{MD}(X|Y) &= 0,0003 \cdot 0,2 + 0,0003308 \cdot 0,42 + \\ &\quad + 0,0001164 \cdot 0,38 = 0,000243,\end{aligned}$$

$$\mathbf{MD}(Y|X) = 0,0508 \cdot 0,8 + 0,0351 \cdot 0,2 = 0,0475.$$

Окончательно получаем

$$\eta_{X|Y} = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{MD}(X|Y)}{\mathbf{D}X}} = \sqrt{1 - \frac{0,000243}{0,000256}} = 0,225,$$

$$\eta_{Y|X} = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{MD}(Y|X)}{\mathbf{D}Y}} = \sqrt{1 - \frac{0,0475}{0,04928}} = 0,191.$$

Пример 8.20. В условиях примера 8.18 найдем условные математические ожидания $\mathbf{M}(X|Y)$ и $\mathbf{M}(Y|X)$, условные дисперсии $\mathbf{D}(X|Y)$ и $\mathbf{D}(Y|X)$ и корреляционные отношения $\eta_{X|Y}$ и $\eta_{Y|X}$. Найдем *регрессии* случайных величин X на Y и Y на X и построим линии регрессии. Не проводя дополнительных вычислений, определим, чему равен *коэффициент корреляции* случайных величин X и Y .

Поскольку случайная величина Y принимает значения только из отрезка $[0, 2]$, а случайная величина X — из отрезка $[0, 1]$, то значения $\mathbf{M}(X|y)$ условного математического ожидания $\mathbf{M}(X|Y)$ и значение $\mathbf{D}(X|y)$ условной дисперсии $\mathbf{D}(X|Y)$ заданы только для y из отрезка $[0, 2]$, а значения $\mathbf{M}(Y|x)$ дисперсии $\mathbf{D}(Y|X)$ заданы только для x из отрезка $[0, 1]$. Поэтому далее будем предполагать, не оговаривая этого особо, что $y \in [0, 2]$, а $x \in [0, 1]$.

Воспользовавшись определением 8.6 условного математического ожидания и условной дисперсии 8.8 для непрерывной случайной величины и результатами примера 8.18, найдем:

$$\mathbf{M}(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x|y) dx = \int_0^{1-y/2} \frac{2x dx}{2-y} = \frac{2-y}{4},$$

$$\mathbf{M}(Y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y|x) dy = \int_0^{2(1-x)} \frac{y dy}{2(1-x)} = 1-x,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(X|y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}(X|y))^2 p_X(x|y) dx = \\ &= \int_0^{1-y/2} \left(x - \frac{2-y}{4}\right)^2 \frac{2 dx}{2-y} = \frac{(2-y)^2}{48}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(Y|x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}(Y|x))^2 p_Y(y|x) dy = \\ &= \int_0^{2(1-x)} \frac{(y - (1-x))^2 dy}{2(1-x)} = \frac{(1-x)^2}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом, условное математическое ожидание

$$\mathbf{M}(X|Y) = g(Y) = \frac{2-Y}{4},$$

условное математическое ожидание

$$\mathbf{M}(Y|X) = h(X) = 1 - X,$$

условная дисперсия

$$\mathbf{D}(X|Y) = \frac{(2-Y)^2}{48},$$

условная дисперсия

$$\mathbf{D}(Y|X) = \frac{(1-X)^2}{3}$$

В частности, регрессия случайной величины X на Y задается формулой

$$g(y) = \frac{2-y}{4},$$

а регрессия случайной величины Y на X — формулой

$$h(x) = 1 - x.$$

Графики линий регрессии X на Y и Y на X приведены на рис. 8.3 и 8.4.

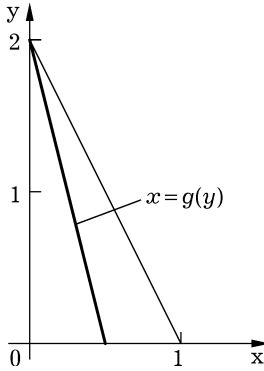


Рис. 8.3

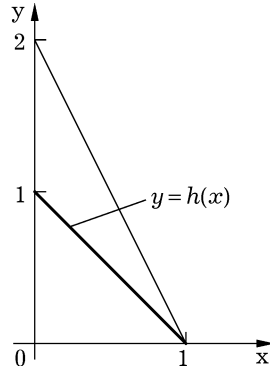


Рис. 8.4

Найдем корреляционные отношения $\eta_{X|Y}$ и $\eta_{Y|X}$. Имеем:

$$\mathbf{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x) dx = \int_0^1 2x(1-x) dx = \frac{1}{3},$$

$$\mathbf{M}Y = \int_{-\infty}^{+\infty} yp_Y(y) dy = \int_0^2 y\left(1 - \frac{y}{2}\right) dy = \frac{2}{3},$$

$$\mathbf{D}X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}X)^2 p_X(x) dx = \int_0^1 2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 (1-x) dx = \frac{1}{18},$$

$$\mathbf{D}Y = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mathbf{M}Y)^2 p_Y(y) dy = \int_0^2 \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{y}{2}\right) dy = \frac{2}{9},$$

$$\mathbf{M}\mathbf{D}(X|Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{D}(X|y) p_Y(y) dy = \int_0^2 \frac{(2-y)^3}{96} dy = \frac{1}{24},$$

$$\mathbf{M}\mathbf{D}(Y|X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{D}(Y|x) p_X(x) dx = \int_0^1 \frac{2(1-x)^3}{3} dx = \frac{1}{6}.$$

Отсюда получаем

$$\eta_{X|Y} = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{MD}(X|Y)}{\mathbf{D}X}} = \sqrt{1 - \frac{1/24}{1/18}} = 0,5,$$
$$\eta_{Y|X} = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{MD}(Y|X)}{\mathbf{D}Y}} = \sqrt{1 - \frac{1/6}{2/9}} = 0,5.$$

Поскольку, например, линия регрессии X на Y прямая, то абсолютное значение $|\rho|$ коэффициента корреляции равно корреляционному отношению $\eta_{X|Y}$. Кроме того, так как с ростом X случайная величина Y в среднем убывает, то коэффициент корреляции отрицателен и

$$\rho = -\eta_{X|Y} = -\frac{1}{2}.$$

Вопросы и задачи

8.1. Дайте определение условного распределения одной координаты двумерного дискретного случайного вектора при условии, что вторая координата приняла определенное значение.

8.2. Дайте определение условной плотности распределения одной координаты двумерного непрерывного случайного вектора при условии, что вторая координата приняла определенное значение.

8.3. Сформулируйте условия независимости координат дискретного и непрерывного случайных векторов в терминах условных распределений.

8.4. Как определяют значение условного математического ожидания одной координаты двумерного дискретного случайного вектора при условии, что другая координата приняла

определенное значение? Что называют условным математическим ожиданием одной координаты двумерного дискретного случайного вектора относительно другой?

8.5. Как определяют значение условного математического ожидания одной координаты двумерного непрерывного случайного вектора при условии, что другая координата приняла определенное значение? Что называют условным математическим ожиданием одной координаты двумерного непрерывного случайного вектора относительно другой?

8.6. Перечислите свойства условного математического ожидания.

8.7. Что называют регрессией одной координаты двумерного случайного вектора на другую? Что такое линия регрессии?

8.8. Что называют условной дисперсией одной координаты двумерного случайного вектора относительно другой? Как определяется значение условной дисперсии одной координаты двумерного случайного вектора при условии, что другая координата приняла соответствующее значение?

8.9. Перечислите свойства условной дисперсии.

8.10. Что называют корреляционным отношением $\eta_{X|Y}$? Как вычислить корреляционное отношение для дискретных и непрерывных случайных векторов?

8.11. Перечислите свойства корреляционного отношения.

8.12. Распределение двумерного случайного вектора (X, Y) задано табл. 8.9. Найдите условное распределение случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y_j , $j = 1, 2$, и условное распределение случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x_i , $i = 1, 2, 3$. Используя найденные условные распределения, проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Таблица 8.9

X	Y		
	0,10	0,15	0,20
0,3	0,25	0,15	0,32
0,6	0,10	0,05	0,13

Таблица 8.10

X	Y		
	0,10	0,15	0,20
0,3	5/7	3/4	32/45
0,6	2/7	1/4	13/45

О т в е т: Условные распределения случайной величины X при условии Y и случайной величины Y при условии X представлены в табл. 8.10 и 8.11 соответственно. Случайные величины X и Y являются зависимыми.

Таблица 8.11

Y	X	
	0,3	0,6
0,10	25/72	5/14
0,15	5/24	5/28
0,20	4/9	13/28

8.13. Двумерный случайный вектор (X, Y) распределен равномерно в прямоугольнике с вершинами в точках $(-3; -10)$, $(-3; 10)$, $(3; 10)$ и $(3; -10)$. Найдите условную плотность распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y и условную плотность распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x . Используя найденные условные плотности распределения, проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

О т в е т:

$$p_X(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & |x| \leq 3 \text{ и } |y| \leq 10; \\ 0, & |x| > 3 \text{ и } |y| \leq 10; \end{cases}$$

$$p_Y(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & |y| \leq 10 \text{ и } |x| \leq 3; \\ 0, & |y| > 10 \text{ и } |x| \leq 3. \end{cases}$$

Случайные величины X и Y являются независимыми.

8.14. Непрерывный двумерный случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} Cy, & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

где D — область, ограниченная линиями $y = x^2$ и $y = 1$. Найдите постоянную C , условную плотность распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y , и условную плотность распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x . Используя найденные условные плотности распределения, проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

О т в е т:

$$C = 5/4;$$

$$p_X(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & x \in [-\sqrt{y}, \sqrt{y}] \text{ и } y \in [0, 1]; \\ 0, & x \notin [-\sqrt{y}, \sqrt{y}] \text{ и } y \in (0, 1]; \end{cases}$$

$$p_Y(y|x) = \begin{cases} \frac{2y}{1-x^4}, & y \in [x^2, 1] \text{ и } x \in (-1, 1); \\ 0, & y \notin [x^2, 1] \text{ и } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Условная плотность $p_X(x|y)$ не определяется при $y \notin (0, 1]$, условная плотность $p_Y(y|x)$ — при $x \notin (-1, 1)$. Случайные величины X и Y являются зависимыми.

8.15. Двумерный случайный вектор (X, Y) имеет нормальное распределение с плотностью распределения

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} e^{-4x^2 - 2xy - y^2}.$$

Найдите условную плотность распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y , и условную плотность распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x . Используя найденные условные плотности распределения, проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

О т в е т:

$$p_X(x|y) = \frac{2}{\pi} e^{-(4x+y)^2/4}, \quad p_Y(y|x) = \frac{1}{\pi} e^{-(x+y)^2}.$$

Случайные величины X и Y являются зависимыми.

8.16. В условиях задачи 8.12 найдите условные математические ожидания $\mathbf{M}(X|Y)$ и $\mathbf{M}(Y|X)$, условные дисперсии $\mathbf{D}(X|Y)$ и $\mathbf{D}(Y|X)$, корреляционные отношения $\eta_{X|Y}$ и $\eta_{Y|X}$.

О т в е т:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(X|0,10) &\approx 0,39, \quad \mathbf{M}(X|0,15) = 0,375, \quad \mathbf{M}(X|0,20) \approx 0,39, \\ \mathbf{M}(Y|0,3) &\approx 0,16, \quad \mathbf{M}(Y|0,6) \approx 0,55, \quad \mathbf{D}(X|0,10) \approx 0,018, \\ \mathbf{D}(X|0,15) &\approx 0,17, \quad \mathbf{D}(X|0,20) \approx 0,17, \quad \mathbf{D}(Y|0,3) \approx 0,0019, \\ \mathbf{D}(Y|0,6) &\approx 0,0020, \quad \eta_{X|Y} \approx 0,59, \quad \eta_{Y|X} \approx 0,52.\end{aligned}$$

8.17. В условиях задачи 8.13 найдите условные математические ожидания $\mathbf{M}(X|Y)$ и $\mathbf{M}(Y|X)$, условные дисперсии $\mathbf{D}(X|Y)$ и $\mathbf{D}(Y|X)$, корреляционные отношения $\eta_{X|Y}$ и $\eta_{Y|X}$. Определите регрессии случайных величин X на Y и Y на X и постройте линии регрессии. Не проводя дополнительных вычислений, скажите, чему равен коэффициент корреляции случайных величин X и Y .

$$\begin{aligned}\text{О т в е т: } \mathbf{M}(X|Y) &\equiv \mathbf{M}X = 0, \quad \mathbf{M}(Y|X) \equiv \mathbf{M}Y = 0, \\ \mathbf{D}(X|Y) &\equiv \mathbf{D}X = 3, \quad \mathbf{D}(Y|X) \equiv \mathbf{D}Y = 100/3, \quad g(y) \equiv 0, \\ \eta_{X|Y} &= \eta_{Y|X} = \rho = 0.\end{aligned}$$

8.18. В условиях задачи 8.14 найдите условные математические ожидания $\mathbf{M}(X|Y)$ и $\mathbf{M}(Y|X)$, условные дисперсии $\mathbf{D}(X|Y)$ и $\mathbf{D}(Y|X)$, корреляционные отношения $\eta_{X|Y}$ и $\eta_{Y|X}$. Определите регрессии случайных величин X на Y и Y на X и постройте линии регрессии. Не проводя дополнительных вычислений, скажите, чему равен коэффициент корреляции случайных величин X и Y .

$$\begin{aligned}\text{О т в е т: } \mathbf{M}(X|Y) &\equiv 0, \quad \mathbf{M}(Y|X) = \frac{2(1+X^2+X^4)}{3(1+X^2)}, \\ \mathbf{D}(X|Y) &= \frac{Y}{3}, \quad \mathbf{D}(Y|X) = \frac{(1-X^2)^2(1+4X^2+X^4)}{18(1+X^2)^2}, \quad g(y) \equiv 0, \\ h(x) &= \frac{2(1+x^2+x^4)}{3(1+x^2)}, \quad \eta_{X|Y} = \rho = 0, \quad \eta_{Y|X} \approx 0,31.\end{aligned}$$

8.19. В условиях задачи 8.15 найдите условные математические ожидания $\mathbf{M}(X|Y)$ и $\mathbf{M}(Y|X)$, условные дисперсии $\mathbf{D}(X|Y)$ и $\mathbf{D}(Y|X)$ и корреляционные отношения $\eta_{X|Y}$ и $\eta_{Y|X}$. Определите регрессии случайных величин X на Y и Y на X и постройте линии регрессии.

О т в е т: $\mathbf{M}(X|Y) = -Y/4$, $\mathbf{M}(Y|X) = -X$, $\mathbf{D}(X|Y) \equiv 1/8$, $\mathbf{D}(Y|X) \equiv 1/2$, $g(y) = -y/4$, $h(x) = -x$, $\eta_{X|Y} = \eta_{Y|X} = 1/2$.

8.20. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

а случайная величина Y связана со случайной величиной X функциональной зависимостью $Y = X^4$. Найдите условные математические ожидания $\mathbf{M}(X|Y)$ и $\mathbf{M}(Y|X)$, условные дисперсии $\mathbf{D}(X|Y)$ и $\mathbf{D}(Y|X)$ и корреляционные отношения $\eta_{X|Y}$ и $\eta_{Y|X}$. Определите регрессии случайных величин X на Y и Y на X и постройте линии регрессии. Не проводя дополнительных вычислений, скажите, чему равен коэффициент корреляции случайных величин X и Y .

О т в е т: $\mathbf{M}(X|Y) \equiv 0$, $\mathbf{M}(Y|X) = X^4$, $\mathbf{D}(X|Y) = \sqrt{Y}$, $\mathbf{D}(Y|X) \equiv 0$, $g(y) \equiv 0$, $h(x) = x^4$, $\eta_{X|Y} = \rho = 0$, $\eta_{Y|X} = 1$.

9. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

С самого начала изучения курса теории вероятностей мы говорили о том, что практическое применение методов этой математической дисциплины основывается на законе предельного постоянства *частоты события*.

Закон предельного постоянства частоты события установлен эмпирически. В соответствии с этим законом повторение одного и того же опыта приводит к тому, что частота появления конкретного случайного события теряет свойства случайности и приближается к некоторому пределу, который в соответствии со *статистическим определением вероятности* (см. 2.4) и называют *вероятностью*.

Однако для того чтобы теория согласовывалась с практикой, при *аксиоматическом определении вероятности*, которое мы использовали, этот закон предельного постоянства частоты должен быть обоснован теоретически. Иначе говоря, он должен быть сформулирован и доказан в виде одной или нескольких теорем. В теории вероятностей теоремы такого типа обычно называют различными формами *закона больших чисел*. В настоящей главе мы докажем некоторые формы этого закона, которые, в частности, поясняют смысл *математического ожидания случайной величины*, и то, почему его называют также *средним значением*.

Далее (см. 9.4) доказывается простейший вариант *центральной предельной теоремы*, уточняющей закон больших чисел. Центральная предельная теорема, в свою очередь, объясняет то широкое распространение, которое получило на практике *нормальное распределение*.

9.1. Сходимость последовательности случайных величин

Пусть

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

представляет собой последовательность *случайных величин*, заданных на одном и том же *вероятностном пространстве*. Опишем типы сходимости последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ к некоторой случайной величине X .

Сразу же отметим, что естественно все определения сходимости вводить таким образом, чтобы сходимость последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ к случайной величине X была эквивалентна сходимости последовательности

$$Y_1 = X_1 - X, Y_2 = X_2 - X, \dots, Y_n = X_n - X, \dots$$

случайных величин к нулю, т.е. к случайной величине, принимающей всего одно значение 0. Поэтому далее мы будем говорить только о сходимости последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ к нулю.

Поскольку каждая из случайных величин X_i представляет собой функцию, заданную на *пространстве элементарных исходов* Ω , и существуют разные определения сходимости функций, то можно ввести и различные определения сходимости последовательности случайных величин.

Казалось бы, наиболее разумно понимать сходимость последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ случайных величин следующим образом. Для каждого *элементарного исхода* $\omega \in \Omega$ последовательность $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$ представляет собой обычную числовую последовательность, и можно определить сходимость последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ случайных величин как сходимость числовых последовательностей $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$ при всех $\omega \in \Omega$.

К сожалению, такая сходимость (ее называют *сходимостью всюду*) редко встречается на практике.

Введем некоторые типы сходимости случайных величин. Рассмотрим все элементарные исходы ω , для которых последовательности $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$ сходятся к нулю, и обозначим через A событие, состоящее из этих исходов, т.е.

$$A = \left\{ \omega: \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 0 \right\}.$$

Определение 9.1. Если последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ случайных величин удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}(A) = 1,$$

то говорят о *сходимости* этой последовательности к нулю *с вероятностью 1*, или *почти наверное*.

Сходимость к нулю с вероятностью 1 записывается в виде

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0.$$

В дальнейшем мы в основном будем использовать *сходимость по вероятности*.

Определение 9.2. Если последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ случайных величин для любого $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|X_n| < \varepsilon\} = 1,$$

то говорят о *сходимости* этой последовательности к нулю *по вероятности*. Сходимость к нулю по вероятности записывается в виде

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} 0.$$

Смысл сходимости по вероятности заключается в том, что вероятность нарушения неравенства $|X_n| < \varepsilon$ при увеличении n становится сколь угодно малой.

Наконец, во многих приложениях теории вероятностей важную роль играет *сходимость в среднем квадратичном*.

Определение 9.3. Если последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ случайных величин удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M X_n^2 = 0,$$

то говорят о **сходимости** этой последовательности к нулю **в среднем квадратичном**.

Сходимость к нулю в среднем квадратичном записывается в виде

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{с.к.}} 0.$$

При доказательстве центральной предельной теоремы нам понадобится понятие слабой сходимости последовательности функций распределения.

Определение 9.4. Последовательность функций распределения $F_1(x), \dots, F_n(x), \dots$ сходится к предельной функции распределения $F(x)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

для любых x , являющихся точками непрерывности $F(x)$. Такую сходимость называют **слабой сходимостью** последовательности **функций распределения** и обозначают

$$F_n(x) \xRightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(x).$$

Приведем пример последовательности случайных величин, для которой не имеет место сходимость всюду.

Пример 9.1. Рассмотрим бесконечное число испытаний по *схеме Бернулли* с равными вероятностями успеха и неудачи $p = q = 1/2$. Последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, где X_i — число успехов в i -м испытании, будет представлять собой последовательность *независимых* одинаково распределенных *случайных величин*.

Рассмотрим последовательность Y_1, Y_2, \dots , где

$$Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

представляет собой вычисленную по первым n испытаниям частоту успеха.

Далее будет показано (см. теорему 9.4), что последовательность $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ сходится по вероятности к $1/2$. Более того, имеет место так называемый усиленный закон больших чисел, согласно которому эта последовательность будет сходиться к $1/2$ с вероятностью 1.

Установим существование таких элементарных исходов ω , для которых числовые последовательности $Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_n(\omega), \dots$ не сходятся к $1/2$. Это означает, что для последовательности $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ случайных величин сходимость всюду не имеет места.

Пространство элементарных исходов Ω состоит из всевозможных (бесконечных) последовательностей УНН...УН... (см. 3.6). В отличие от случая конечного числа испытаний, Ω уже не будет дискретным (более того, Ω „почти“ эквивалентно отрезку $[0, 1]$ с равномерной вероятностью на нем; для доказательства этого достаточно отождествить последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ с двоичным представлением некоторого числа, заключенного между нулем и единицей). При этом каждый элементарный исход ω имеет вероятность

$$\mathbf{P}(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots = 0.$$

Рассмотрим элементарный исход

$$\omega_0 = \text{УУ...У...}$$

Для него

$$X_1(\omega_0) = X_2(\omega_0) = \dots = 1 \quad \text{и} \quad Y_1(\omega_0) = Y_2(\omega_0) = \dots = 1,$$

т.е. средние арифметические значения равны единице. Таким образом, для элементарного исхода $\omega_0 = УУ...У...$ последовательность $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ случайных величин сходится к 1, а не к $1/2$.

Читатель без труда может привести примеры и других элементарных исходов, для которых последовательность $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ либо будет сходиться к некоторому отличному от $1/2$ числу из промежутка $[0, 1]$, либо вообще не будет сходиться. #

К определению слабой сходимости можно сделать несколько замечаний.

Замечание 9.1. Из слабой сходимости последовательности функций распределения еще нельзя сделать вывод о какой-либо сходимости последовательности самих случайных величин, так как даже одинаково распределенные случайные величины могут быть заданы на совершенно разных вероятностных пространствах.

Замечание 9.2. Требование сходимости в любой точке непрерывности $F(x)$ нельзя заменить более сильным требованием сходимости во всех точках x . Это подтверждает следующий пример.

Пример 9.2. Пусть на одном и том же вероятностном пространстве задана последовательность случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, причем каждая случайная величина X_n принимает всего одно значение $1/n$. Тогда последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ будет сходиться к случайной величине $X \equiv 0$ для любого элементарного исхода ω (причем даже равномерно). Тем не менее

$$F_{X_n}(0) = 1$$

при всех n , но

$$F_X(0) = 0.$$

Приведенный пример показывает, что $F_{X_n}(0)$ не стремится к $F_X(0)$, хотя естественно было бы ожидать сходимости $F_{X_n}(x)$ к $F_X(x)$ в любой точке x , поскольку

$$X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)$$

при всех элементарных исходах ω . Разгадка этого парадокса заключается в том, что 0 является точкой разрыва $F_X(x)$, а при определении слабой сходимости функций распределения сходимости в таких точках мы не требовали.

Замечание 9.3. Если последовательность $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$ функций распределения сходится к некоторой функции $F(x)$ в каждой точке непрерывности последней, то это не гарантирует слабой сходимости, поскольку $F(x)$ может вообще не быть функцией распределения.

Пример 9.3. Пусть $X_n \equiv n$ для всех ω . Тогда

$$F_{X_n}(x) \xRightarrow{n \rightarrow \infty} F(x) \equiv 0$$

при каждом x . Но $F(x)$ не является функцией распределения, так как

$$F(+\infty) = 0 \neq 1.$$

Значит, при определении слабой сходимости обязательно нужно требовать, чтобы предельная функция являлась функцией распределения. #

Можно показать, что из сходимости с вероятностью 1 и из сходимости в среднем квадратичном следует сходимость по вероятности, а из сходимости по вероятности вытекает слабая сходимость функций распределения*.

*См., например: *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей, 1969.

9.2. Неравенства Чебышева. Закон больших чисел

Прежде чем приступить к рассмотрению закона *больших чисел*, докажем два *неравенства Чебышева*. Заметим, что неравенства Чебышева представляют и самостоятельный интерес, поскольку в современной теории вероятностей широко используются неравенства такого типа.

Теорема 9.1. Для каждой неотрицательной *случайной величины* X , имеющей *математическое ожидание* MX , при любом $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon},$$

называемое *первым неравенством Чебышева*.

◀ Доказательство проведем для *непрерывной случайной величины* X с *плотностью распределения* $p(x)$ (для геометрической интерпретации доказательства удобно воспользоваться рис. 9.1). Поскольку случайная величина X является неотрицательной, то

$$MX = \int_0^{+\infty} xp(x) dx.$$

Так как подынтегральное выражение неотрицательное, то при уменьшении области интегрирования интеграл может лишь уменьшиться. Поэтому

$$MX = \int_0^{\varepsilon} xp(x) dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} xp(x) dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} xp(x) dx.$$

Заменяя в подынтегральном выражении множитель x на ε , имеем

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} xp(x) dx \geq \varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} p(x) dx.$$

Остается заметить, что последний интеграл (равный площади области, заштрихованной на рис. 9.1) представляет собой вероятность события $X \geq \varepsilon$, и, значит,

$$\mathbf{M}X \geq \varepsilon \mathbf{P}\{X \geq \varepsilon\},$$

откуда и вытекает первое неравенство Чебышева. Аналогично первое неравенство Чебышева доказывается и для дискретной случайной величины, при этом нужно только заменить интеграл суммой. ►

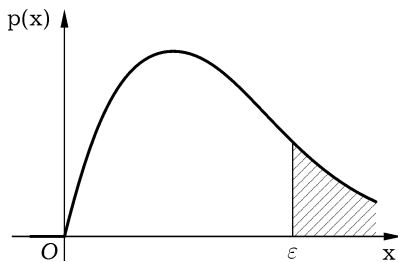


Рис. 9.1

Ясно, что применять первое неравенство Чебышева имеет смысл только тогда, когда $\varepsilon > \mathbf{M}X$; в противном случае оно дает тривиальную оценку.

Пример 9.4. Пусть X — время опоздания студента на лекцию, причем известно, что $\mathbf{M}X = 1$ мин. Воспользовавшись первым неравенством Чебышева, оценим вероятность $\mathbf{P}\{X \geq 5\}$ того, что студент опоздает не менее, чем на 5 мин.

Имеем

$$\mathbf{P}\{X \geq 5\} \leq \frac{\mathbf{M}X}{5} = 0,2.$$

Таким образом, искомая вероятность не более 0,2, т.е. в среднем из каждых пяти студентов опаздывает, по крайней мере, на 5 мин не более чем один студент. #

Рассмотрим теперь случайную величину X , имеющую дисперсию $\mathbf{D}X = \sigma^2$. Мы уже говорили, что дисперсия является показателем разброса X вокруг математического ожидания $\mathbf{M}X$. Однако с точки зрения исследователя разброс естественнее характеризовать вероятностью $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| \geq \varepsilon\}$ отклонения случайной величины X от $\mathbf{M}X$ на величину, большую некоторого заданного ε . Следующее неравенство позволяет оценить эту вероятность с помощью дисперсии σ^2 .

Теорема 9.2. Для каждой случайной величины X , имеющей дисперсию $\mathbf{D}X = \sigma^2$, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо **второе неравенство Чебышева**

$$\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

◀ Для доказательства воспользуемся утверждением первого неравенства Чебышева. Применяя к случайной величине

$$Y = (X - \mathbf{M}X)^2$$

это неравенство, в котором ε заменено на ε^2 , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| \geq \varepsilon\} &= \mathbf{P}\{(X - \mathbf{M}X)^2 \geq \varepsilon^2\} = \\ &= \mathbf{P}\{Y \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{\mathbf{M}Y}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

что и доказывает второе неравенство Чебышева. ▶

Геометрический смысл второго неравенства Чебышева понятен из рис. 9.2.

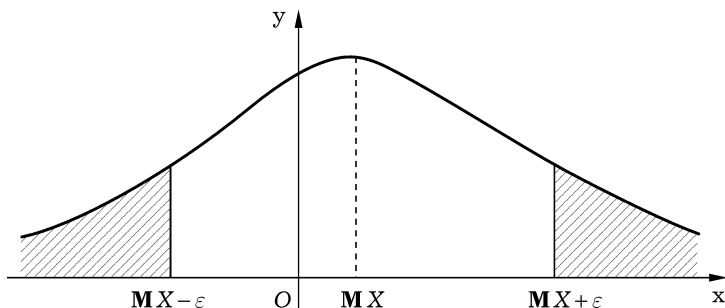


Рис. 9.2

Второе неравенство Чебышева имеет содержательный смысл лишь при $\varepsilon > \sigma$.

Пример 9.5. Пусть в условиях предыдущего примера известно дополнительно, что $\sigma = \sqrt{DX} = 1$. Оценим минимальное значение x_0 , при котором вероятность опоздания студента на время не менее x_0 не превышает заданного значения $P_3 = 0,1$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся вторым неравенством Чебышева. Тогда

$$\begin{aligned} P_3 &\leq \mathbf{P}\{X \geq x_0\} = \mathbf{P}\{X - \mathbf{M}X \geq x_0 - \mathbf{M}X\} \leq \\ &\leq \mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| \geq x_0 - \mathbf{M}X\} \leq \frac{\sigma^2}{(x_0 - \mathbf{M}X)^2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$(x_0 - \mathbf{M}X)^2 \leq \frac{\sigma^2}{P_3} \quad \text{и} \quad x_0 \leq \mathbf{M}X + \sqrt{\frac{\sigma^2}{P_3}}.$$

Подставляя конкретные значения, имеем

$$x_0 \leq 1 + \sqrt{\frac{1}{0,1}} \approx 4,16.$$

Таким образом, вероятность опоздания студента на время более 4,16 мин не более 0,1.

Сравнивая полученный результат с результатом примера 9.4, видим, что дополнительная информация о дисперсии времени опоздания позволяет дать более точную оценку искомой вероятности.

Пример 9.6. Пусть случайная величина X имеет плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{M}X &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{e^{-|x|}}{2} dx = 0, \\ \sigma^2 = \mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-|x|}}{2} dx = 2.\end{aligned}$$

Воспользовавшись вторым неравенством Чебышева, оценим

$$p_\varepsilon = \mathbf{P}\{|X| \geq \varepsilon\}$$

для $\varepsilon = 2, 5, 10$. В результате получим

$$p_2 \leq 0,5, \quad p_5 \leq 0,08, \quad p_{10} \leq 0,02.$$

Сравним полученные оценки с точными значениями. Поскольку

$$p_\varepsilon = 1 - F(\varepsilon) + F(-\varepsilon) = e^{-\varepsilon},$$

имеем:

$$p_2 = \frac{1}{e^2} \approx 0,1353, \quad p_5 = \frac{1}{e^5} \approx 0,0067, \quad p_{10} = \frac{1}{e^{10}} \approx 0,000045.$$

Таким образом, в этом примере второе неравенство Чебышева дает очень грубую оценку вероятности p_ε .

Пример 9.7. Предположим, что случайная величина X принимает только значения 1 и -1 с одинаковыми вероятностями $1/2$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{M}X &= (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0, \\ \sigma^2 = \mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 &= (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

Применяя второе неравенство Чебышева, получаем, что

$$p_1 = \mathbf{P}\{|X| \geq 1\} \leq 1.$$

Найдем точное значение вероятности $p_1 = \mathbf{P}\{|X| \geq 1\}$. Поскольку оба возможных значения X равны по модулю единице, то $p_1 = 1$.

Этот пример указывает на тот факт, что по дисперсии $\mathbf{D}X$ нельзя оценить p_ε более точно, чем с помощью второго неравенства Чебышева. #

Рассмотрим некоторые формы закона больших чисел.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность случайных величин, имеющих математические ожидания $m_i = \mathbf{M}X_i$.

Определение 9.5. Последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ случайных величин удовлетворяет **закону больших чисел (слабому)**, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Иными словами, выполнение закона больших чисел отражает предельную устойчивость средних арифметических случайных величин: при большом числе испытаний они практически перестают быть случайными и совпадают со своими средними значениями.

Очевидно, что последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ удовлетворяет закону больших чисел тогда и только тогда, когда среднее арифметическое случайных величин $X_1 - m_1, X_2 - m_2, \dots, X_n - m_n$ сходится по вероятности к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 9.3. Если последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимых случайных величин такова, что существуют $\mathbf{M}X_i = m_i$ и $\mathbf{D}X_i = \sigma_i^2$, причем дисперсии σ_i^2 ограничены в совокупности (т.е. $\sigma_i^2 \leq C < +\infty$), то для последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ выполнен закон больших чисел.

При этом говорят также, что к последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ случайных величин применим **закон больших чисел в форме Чебышева**.

◀ Теорема является элементарным следствием второго неравенства Чебышева. Действительно, в силу свойств математического ожидания и дисперсии

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n m_i, \\ \mathbf{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \leq \frac{Cn}{n^2} = \frac{C}{n}. \end{aligned}$$

Применяя теперь второе неравенство Чебышева к случайным величинам

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i,$$

получаем для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, мы показали, что для последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ выполняется закон больших чисел. ►

Следствие 9.1. Если случайные величины X_i , $i = 1, 2, \dots$, в условиях теоремы 9.3 являются также одинаково распределенными (в этом случае $m_i = m$ и $\sigma_i^2 = \sigma^2$), то последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ случайных величин удовлетворяет закону больших чисел в следующей форме:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} m.$$

◀ Доказательство проведите самостоятельно. ►

Теорема 9.4. Пусть проводится n испытаний по схеме Бернулли и Y_n — общее число успехов в n испытаниях. Тогда

наблюдаемая частота успехов

$$r_n = \frac{Y_n}{n}$$

сходится по вероятности к вероятности p успеха в одном испытании, т.е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|r_n - p| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

◀ Обозначим X_i число успехов в i -м испытании Бернулли. Тогда частоту успехов в n испытаниях можно определить в виде

$$r_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

причем

$$\mathbf{M}X_i = p \quad \text{и} \quad \mathbf{D}X_i = pq.$$

Значит, выполняются все условия следствия 9.1, из которого вытекает утверждение теоремы. ►

Теорему 9.4 называют также **теоремой Бернулли**, или **законом больших чисел в форме Бернулли**. Из хода доказательства теоремы 9.4 видно, что закон больших чисел в форме Бернулли является частным случаем закона больших чисел в форме Чебышева.

Пример 9.8. Пусть дана последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимых случайных величин, причем ряд распределения случайной величины X_n представлен в табл. 9.1. Покажем, что к этой последовательности применим закон больших чисел в форме Чебышева. Для этого вычислим дисперсию $\mathbf{D}X_n$. Имеем

Таблица 9.1

X_n	$-5n$	0	$5n$
\mathbf{P}	$\frac{1}{2n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

$$\mathbf{M}X_n = (-5n) \cdot \frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + 5n \cdot \frac{1}{2n^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}X_n &= \mathbf{M}X_n^2 - (\mathbf{M}X_n)^2 = \mathbf{M}X_n^2 = \\ &= (-5n)^2 \frac{1}{2n^2} + 0^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + (5n)^2 \frac{1}{2n^2} = 25. \end{aligned}$$

Итак, дисперсии $\mathbf{D}X_n$ ограничены в совокупности, и к последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ применим закон больших чисел в форме Чебышева.

Замечание 9.4. В специальных курсах теории вероятностей рассматривают также усиленный закон больших чисел, в котором сходимость по вероятности заменяется сходимостью с вероятностью 1.

9.3. Характеристическая функция

Для дальнейших исследований нам понадобится понятие *характеристической функции*.

Определение 9.6. *Характеристической функцией* $f(t) = f_X(t)$ случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины e^{itX} , где i — мнимая единица, а t — произвольное (действительное) число.

В определении математического ожидания фигурирует комплекснозначная случайная величина, которая определяется так же, как и скалярная, с той лишь разницей, что каждому *элементарному исходу* ставится в соответствие комплексное число, а не действительное.

Используя общее правило вычисления математического ожидания и *формулу Эйлера* $[X]$, получаем:

для *дискретной случайной величины* X , принимающей значения x_j , $j = 1, 2, \dots$,

$$f(t) = \mathbf{M}e^{itX} = \sum_j e^{itx_j} p_j = \sum_j p_j \cos(tx_j) + i \sum_j p_j \sin(tx_j);$$

для непрерывной случайной величины с плотностью распределения $p(x)$

$$\begin{aligned} f(t) = \mathbf{M}e^{itX} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) p(x) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) p(x) dx. \end{aligned}$$

Поскольку $|e^{itx}| = 1$, то

$$\sum_j |e^{itx_j} p_j| = \sum_j p_j = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx} p(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Следовательно, $\sum_j e^{itx_j} p_j$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx$ сходятся при всех t (действительных), т.е. характеристическая функция существует при всех t для каждой случайной величины. Отметим, что характеристическая функция определяется не собственно случайной величиной, а ее *функцией распределения*, т.е., по существу, она характеризует именно распределение случайной величины. Читатель, знакомый с преобразованием Фурье, сразу же заметит, что характеристическая функция непрерывной случайной величины отличается от преобразования Фурье *плотности распределения* этой случайной величины только лишь отсутствием множителя $1/\sqrt{2\pi}$, что, как будет видно из дальнейшего, представляет определенное удобство при действиях над случайными величинами.

Пример 9.9. Найдем характеристическую функцию случайной величины X , распределенной по *биномиальному закону*. Поскольку X — дискретная случайная величина, принимающая

значения $\overline{0, n}$, то

$$f(t) = \sum_{j=0}^n e^{itj} C_n^j p^j q^{n-j} = \sum_{j=0}^n C_n^j (pe^{it})^j q^{n-j} = (q + pe^{it})^n.$$

Пример 9.10. Характеристическая функция случайной величины X , распределенной по *экспоненциальному закону*, имеет вид

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Пример 9.11. Пусть случайная величина X распределена по *стандартному нормальному закону*. Тогда

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Делая замену $y = x - it$, получаем

$$f(t) = \int_{-\infty - it}^{+\infty - it} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y^2 + t^2)/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \int_{-\infty - it}^{+\infty - it} e^{-y^2/2} dy.$$

Из теории функций комплексного переменного $[X]$ известно, что

$$\int_{-\infty - it}^{+\infty - it} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}.$$

Окончательно получаем $f(t) = e^{-t^2/2}$. #

Выведем некоторые свойства характеристических функций.

Теорема 9.5. Характеристическая функция удовлетворяет следующим свойствам.

1. $f(t)$ — непрерывная функция, причем абсолютное значение $f(t)$ ограничено единицей, т.е. $|f(t)| \leq 1$ и $f(0) = 1$.
2. Если $Y = aX + b$, то $f_Y(t) = f_X(at)e^{ibt}$.
3. Если X_1 и X_2 — независимые случайные величины и $Y = X_1 + X_2$, то $f_Y(t) = f_{X_1}(t)f_{X_2}(t)$.
4. Если случайная величина X имеет момент n -го порядка m_n , то характеристическая функция X дифференцируема n раз, причем для $k \leq n$

$$f^{(k)}(0) = i^k m_k.$$

◀ 1. Утверждение 1 докажем для дискретной случайной величины. Тогда

$$f(0) = \sum_j e^{it0} p_j = \sum_j p_j = 1.$$

Из неравенства

$$|f(t)| \leq \sum_j |e^{itx}| p_j = \sum_j p_j = 1$$

вытекает ограниченность функции по абсолютной величине единицей.

Непрерывность $f(t)$ следует из непрерывности функции e^{itx_j} и абсолютной сходимости ряда $\sum_j p_j [X]$.

2. В силу определения характеристической функции и свойства 2 математического ожидания (см. 7.2)

$$\begin{aligned} f_Y(t) &= \mathbf{M}e^{itY} = \mathbf{M}e^{it(aX+b)} = \\ &= \mathbf{M}(e^{iatX} e^{ibt}) = e^{ibt} \mathbf{M}e^{iatX} = e^{ibt} f_X(at). \end{aligned}$$

3. Поскольку X_1 и X_2 независимые, то независимыми являются также случайные величины e^{itX_1} и e^{itX_2} . Поэтому в соот-

ветствии со свойством 4 математического ожидания (см. 7.2)

$$\mathbf{M}e^{itY} = \mathbf{M}e^{it(X_1+X_2)} = \mathbf{M}(e^{itX_1}e^{itX_2}) = \mathbf{M}e^{itX_1}\mathbf{M}e^{itX_2}.$$

4. Формальное k -кратное ($k \leq n$) дифференцирование характеристической функции дает

$$f^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} p(x) dx.$$

Законность дифференцирования определяется тем фактом, что

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} p(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x^k| p(x) dx,$$

и существованием момента n -го порядка. Заметим, что при четном n справедливо и обратное: если характеристическая функция имеет производную $f^{(n)}(0)$, то существуют моменты m_k всех порядков k до n -го включительно, и

$$m_k = i^{-k} f^{(k)}(0). \quad \blacktriangleright$$

Заметим, что свойство 3 является основным свойством, благодаря которому характеристические функции нашли широкое применение в теории вероятностей. При суммировании независимых случайных величин их плотности распределения преобразуются по *формуле свертки*. Но формула свертки весьма неудобна для исследования, гораздо проще заменить ее простым перемножением характеристических функций.

Пример 9.12. Как мы знаем, если случайная величина X распределена по *стандартному нормальному закону*, то случайная величина

$$Y = \sigma X + m$$

распределена по нормальному закону с параметрами m и σ . Согласно свойству 2 характеристические функции $f_{m,\sigma}(t)$ и $f(t)$ случайных величин Y и X связаны соотношением

$$f_{m,\sigma}(t) = e^{imt} f(\sigma t),$$

или, с учетом результата примера 9.11,

$$f_{m,\sigma}(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Пример 9.13. Вычислим момент n -го порядка случайной величины X , распределенной по *экспоненциальному закону*. Воспользовавшись свойством 4 и результатом примера 9.10, получим

$$m_n = i^{-n} f^{(n)}(0) = i^{-n} \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^{(n)} \Big|_{t=0} = i^{-n} i^n \frac{\lambda n!}{\lambda^{n+1}} = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

Пример 9.14. Найдем еще раз характеристическую функцию числа успехов X в n испытаниях по *схеме Бернулли*, однако, в отличие от примера 9.9, воспользуемся равенством

$$X = X_1 + \dots + X_n,$$

где X_j — число успехов в j -м испытании. Тогда

$$f_{X_j}(t) = qe^{it0} + pe^{it1} = q + pe^{it}$$

и в силу свойства 3

$$f_X(t) = f_{X_1}(t) \dots f_{X_n}(t) = (q + pe^{it})^n. \quad \#$$

Важнейшей особенностью характеристической функции $f(t)$ является тот факт, что она однозначно определяет функцию распределения $F(x)$ с помощью *формулы обращения* [XI].

Формула обращения. Для любых точек непрерывности x_1 и x_2 функции распределения $F(x)$

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} f(t) dt.$$

Отметим, что формула обращения справедлива и в точках разрыва $F(x)$, если предположить, что в этих точках

$$F(x) = \frac{F(x+0) - F(x-0)}{2}.$$

Если характеристическая функция $f(t)$ является абсолютно интегрируемой на $(-\infty, +\infty)$ [IX], то существует непрерывная плотность распределения $p(x)$, задаваемая выражением

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t) dt.$$

Последнее соотношение называют **формулой обращения** для плотности распределения случайной величины.

Формула обращения для плотности распределения $p(x)$ хорошо известна из курса математического анализа как формула обратного преобразования Фурье.

Не давая строго математического доказательства, покажем, что по своей сути формула обращения представляет собой разновидность обратного преобразования Фурье. Действительно, формально применяя обратное преобразование Фурье

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t) dt$$

к характеристической функции $f(t)$ и вспоминая соотношение между плотностью распределения $p(x)$ и функцией распределе-

ния $F(x)$, имеем

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t) dt.$$

Формально проводя еще одну операцию — перестановку интегралов, получаем

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \int_{x_1}^{x_2} e^{-itx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} f(t) dt. \end{aligned}$$

Хотя каждая из формально проведенных операций, вообще говоря, математически не обоснована (в частности, дискретные случайные величины вообще не имеют плотности распределения), конечный результат верен, если только понимать последний интеграл в том смысле, как написано в формуле обращения (в смысле главного значения) [XI].

Из определения характеристической функции и формулы обращения следует существование взаимно однозначного соответствия между плотностью распределения и характеристической функцией, а следовательно, и между функцией распределения и характеристической функцией.

Пример 9.15. Пусть X_1 и X_2 — независимые случайные величины, распределенные по *нормальному закону* с параметрами m_1 и σ_1 , m_2 и σ_2 соответственно. Рассмотрим случайную величину

$$Y = X_1 + X_2.$$

Тогда, как показано в примере 9.12,

$$f_{X_1}(t) = e^{im_1 t - \sigma_1^2 t^2 / 2}, \quad f_{X_2}(t) = e^{im_2 t - \sigma_2^2 t^2 / 2}$$

и в соответствии со свойством 3 характеристических функций получаем, что

$$f_Y(t) = e^{i(m_1+m_2)t - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2/2}.$$

Но характеристическую функцию $f_Y(t)$ имеет случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $m_1 + m_2$ и $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Следовательно, случайная величина Y также распределена нормально (с параметрами $m_1 + m_2$ и $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$).

Таким образом, с помощью характеристических функций получили хорошо известный нам результат (см. пример 6.11): сумма независимых случайных величин, имеющих *нормальное распределение*, также является распределенной по нормальному закону — и вычислили параметры этого распределения. Заметим, что использование многомерных характеристических функций позволяет весьма просто установить аналогичный результат для суммы любого конечного числа случайных величин, распределенных по нормальному закону (ср. с результатами 6.6).

Пример 9.16. Рассмотрим независимые случайные величины X_1 и X_2 , распределенные по *закону Пуассона* с параметрами λ_1 и λ_2 . Их характеристические функции задаются формулами

$$f_{X_1}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} \frac{\lambda_1^n}{n!} e^{-\lambda_1} = e^{-\lambda_1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 e^{it})^n}{n!} = e^{\lambda_1(e^{it}-1)},$$

$$f_{X_2}(t) = e^{\lambda_2(e^{it}-1)}.$$

Пусть

$$Y = X_1 + X_2.$$

Тогда

$$f_Y(t) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^{it}-1)},$$

и в силу взаимно однозначного соответствия между функцией распределения и характеристической функцией случайная

величина Y распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$. #

Основную роль при доказательстве *центральной предельной теоремы* играет теорема о связи слабой сходимости последовательности функций распределения со сходимостью последовательности соответствующих характеристических функций, или *теорема непрерывности*. Приведем без доказательства формулировку этой теоремы.

Теорема 9.6 (теорема непрерывности). Для того чтобы последовательность $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$ функций распределения слабо сходилась к функции распределения $F(x)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t), \dots$ характеристических функций сходилась к характеристической функции $f(t)$ в любой точке t .

Теорема непрерывности позволяет свести задачу изучения предельного поведения распределений сумм независимых случайных величин к задаче изучения предельного поведения характеристических функций этих сумм. В разных учебниках приведены различные формулировки теоремы непрерывности; данная здесь формулировка наиболее естественна для наших дальнейших рассуждений.

В заключение отметим, что наряду с характеристической функцией в теории вероятностей используют также:

– для неотрицательной случайной величины X **преобразование Лапласа — Стильеса**

$$\tilde{f}(s) = \mathbf{M}e^{-sX}, \quad \operatorname{Re} s \geq 0;$$

– для неотрицательной целочисленной случайной величины X **производящую функцию**

$$f^*(z) = \mathbf{M}z^X, \quad |z| \leq 1.$$

Ясно, что преобразование Лапласа — Стильеса $\tilde{f}(s)$ и производящая функция $f^*(z)$ связаны с характеристической

функцией той же самой случайной величины соотношениями

$$f(t) = \tilde{f}(-it), \quad f(t) = f^*(e^{it}).$$

Преобразование Лапласа — Стильтеса и производящая функция, по сути дела, имеют те же самые свойства, что и характеристическая функция, но их существенно проще использовать уже хотя бы потому, что они являются действительными функциями.

9.4. Центральная предельная теорема

Рассмотрим последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих математическое ожидание $\mathbf{M}X_n = m$. Предположим также, что существует дисперсия $\mathbf{D}X_n = \sigma^2$. Закон больших чисел (слабый) для этой последовательности можно представить в следующей форме:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{M}X_i) = \frac{1}{n} (S_n - nm) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

где

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad —$$

суммарное значение первых n случайных величин последовательности, а сходимостъ можно понимать как в смысле *сходимости по вероятности* (слабый закон больших чисел), так и в смысле сходимости с вероятностью 1 (усиленный закон больших чисел).

Однако сразу возникает вопрос: поскольку случайные величины X_n имеют не только математическое ожидание, но и дисперсию, то нельзя ли доказать более „тонкую“ предельную теорему, позволяющую точнее описать предельное поведение

распределений величин $S_n - nm$? Такая теорема существует, ее называют центральной предельной теоремой.

Теорема 9.7 (центральная предельная теорема). Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{M}X_n = m$, $\mathbf{D}X_n = \sigma^2$. Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} < x \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

◀ Прежде всего заметим, что поскольку функция стандартного нормального распределения $\Phi(x)$ является непрерывной функцией, то сходимость к ней последовательности функций распределения в каждой точке представляет собой слабую сходимость, и, значит, для доказательства центральной предельной теоремы можно воспользоваться теоремой непрерывности.

Обозначим $f_1(t)$ характеристическую функцию случайных величин X_n , а $g_n(t)$ — характеристическую функцию случайной величины $(S_n - nm)/\sqrt{n\sigma^2}$. Воспользовавшись свойствами 2 и 3 характеристических функций, найдем

$$g_n(t) = \left[f_1 \left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}} \right) e^{-imt/\sqrt{n\sigma^2}} \right]^n.$$

Поскольку $f_1(t)$ имеет производные первых двух порядков (свойство 4 характеристических функций), то $\ln f_1(t/\sqrt{n\sigma^2})$ можно в любой точке t представить первыми тремя слагаемыми формулы Маклорена:

$$\begin{aligned} \ln f_1 \left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}} \right) &= \ln f_1(0) + \frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}} \cdot \frac{f_1'(0)}{f_1(0)} + \\ &+ \frac{t^2}{2n\sigma^2} \left(\frac{f_1''(0)}{f_1(0)} - \frac{(f_1'(0))^2}{(f_1(0))^2} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

или,

$$\ln f_1\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = \frac{im_1 t}{\sqrt{n\sigma^2}} - \frac{\sigma^2 t^2}{2n\sigma^2} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

если учесть (см. теорему 9.5), что

$$f_1(0) = 1, \quad f_1'(0) = im_1, \quad f_1''(0) = i^2 m_2 \quad \text{и} \quad m_2 = m^2 = \sigma^2.$$

Поэтому

$$\ln g_n(t) = n \left[\ln f_1\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \frac{imt}{\sqrt{n\sigma^2}} \right] \approx -\frac{t^2}{2}$$

и, значит,

$$g_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t^2/2}.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что $e^{-t^2/2}$ — характеристическая функция $f(t)$ стандартного нормального распределения (см. пример 9.11). ►

Центральная предельная теорема выявляет ту особую роль, которую играет нормальное распределение на практике. Нормальный закон всегда имеет место в тех ситуациях, когда случайная величина порождена большим количеством случайных факторов, действующих независимо друг от друга. Уже само название „нормальный закон“ объясняется тем широким распространением, которое он находит в самых различных областях научных исследований.

Следствием из центральной предельной теоремы является интегральная теорема Муавра — Лапласа (см. **3.6**, *интегральная формула Муавра — Лапласа*).

Теорема 9.8 (интегральная теорема Муавра — Лапласа). Обозначим S_n суммарное число успехов в n испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1 - p$. Тогда с ростом n последовательность функций распределения случайных величин $(S_n - np)/\sqrt{npq}$ сходится к функции стандартного нормального распределения, т.е.

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x).$$

◀ Пусть X_i — число успехов в i -м испытании. Тогда

$$\mathbf{M}X_i = p, \quad \mathbf{D}X_i = pq.$$

Представляя S_n в виде

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

и используя центральную предельную теорему, приходим к утверждению теоремы. ▶

Пример 9.17. Для определения скорости v движения объекта делают n измерений v_1, \dots, v_n , причем i -е измерение проводят с погрешностью X_i (т.е. $v_i = v + X_i$), при этом погрешности измерений являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с математическим ожиданием $\mathbf{M}X_i = 0$ (отсутствуют систематические погрешности наблюдений) и дисперсии $\mathbf{D}X_i = \sigma^2$.

Оценим вероятность того, что средняя наблюдаемая скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_1 + \dots + v_n}{n}$$

будет отличаться от истинной скорости v не более чем на ε . Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|v_{\text{ср}} - v| < \varepsilon\} &= \mathbf{P}\left\{-\varepsilon < \frac{v_1 + \dots + v_n - nv}{n} < \varepsilon\right\} = \\ &= \mathbf{P}\left\{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} < \frac{v_1 + \dots + v_n - nv}{\sqrt{n\sigma^2}} < \varepsilon \sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right\}. \end{aligned}$$

Считая теперь, что число n измерений велико, воспользуемся центральной предельной теоремой, согласно которой случайная величина

$$\frac{v_1 + \dots + v_n - nv}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

приближенно распределена по стандартному нормальному закону. Значит,

$$\mathbf{P}\{|v_{\text{ср}} - v| < \varepsilon\} \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right) = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right).$$

Значения *интеграла Лапласа* $\Phi_0(x)$ приведены в табл. П.3.

9.5. Решение типовых примеров

Пример 9.18. По многолетним наблюдениям, средняя скорость ветра в некотором пункте равна 16 км/ч. Оценим с помощью *первого неравенства Чебышева* вероятность того, что в случайный момент времени скорость ветра в этом пункте превысит 80 км/ч.

Обозначим через X скорость ветра при наблюдении в случайный момент времени и, воспользовавшись первым неравенством Чебышева, получим

$$\mathbf{P}\{X > 80\} < \frac{16}{80} = \frac{1}{5}.$$

Пример 9.19. Используя *второе неравенство Чебышева*, оценим вероятность того, что *случайная величина* отклонится от своего *среднего значения* m более чем на 3σ , где σ — *среднее квадратичное отклонение* случайной величины X .

В соответствии со вторым неравенством Чебышева

$$\mathbf{P}\{|X - m| > 3\sigma\} < \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}.$$

Пример 9.20. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность *независимых случайных величин*, причем случайная величина X_n имеет *гамма-распределение* с параметрами $\gamma_n = n$ и $\lambda_n = \sqrt{n}$. Покажем, что последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ удовлетворяет закону больших чисел в форме Чебышева.

Дисперсия случайной величины X_n равна

$$\mathbf{D}X_n = \frac{\gamma_n}{\lambda_n^2} = 1.$$

Поскольку дисперсии $\mathbf{D}X_n$ ограничены 1, то к последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ применим закон больших чисел в форме Чебышева.

Пример 9.21. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность случайных величин, удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{D}X_n \leqslant C \quad \text{и} \quad \lim_{|i-j| \rightarrow \infty} \mathbf{cov}(X_i, X_j) = 0.$$

Докажем, что к этой последовательности применим закон больших чисел.

Согласно второму неравенству Чебышева,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{M}X_i \right| \geqslant \varepsilon \right\} = \\ = \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mathbf{M} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) \right| \geqslant \varepsilon \right\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{D} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right). \end{aligned}$$

Поэтому для решения поставленной задачи достаточно показать, что

$$\mathbf{D} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Действительно, в соответствии со свойствами дисперсии

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) &= \frac{1}{n^2} \mathbf{D} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{D}X_i + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{cov}(X_i, X_j) \right). \end{aligned}$$

Из условия задачи следует существование для любого $\varepsilon > 0$ такого N , что

$$\text{cov}(X_i, X_j) < \varepsilon$$

при всех i, j , для которых $i - j > N$. Поэтому сумма ковариаций содержит не более nN слагаемых, больших ε . Поскольку всего слагаемых в этой сумме $n(n-1)/2$ и в соответствии со свойством 4 ковариации

$$|\text{cov}(X_i, X_j)| \leq \sqrt{\mathbf{D}X_i \mathbf{D}X_j} \leq C,$$

получаем

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \leq Cn + 2CnN + \varepsilon n(n-1).$$

Значит,

$$\mathbf{D}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \leq \frac{Cn + 2CnN + \varepsilon n(n-1)}{n^2} \leq \frac{C(1+2N)}{n} + \varepsilon,$$

что в силу произвольности ε доказывает утверждение.

Пример 9.22. Найдем характеристическую функцию случайной величины X , ряд распределения которой представлен в табл. 9.2.

X	-2	-1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2

В соответствии с определением характеристической функции

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_j e^{itx_j} p_j = 0,2(e^{-2it} + e^{2it}) + \\ &+ 0,1(e^{-it} + e^{it}) + 0,4e^{0 \cdot it} = 0,4 \cos(2t) + 0,2 \cos t + 0,4 = \\ &= 0,8 \cos^2 t + 0,2 \cos t = 0,2 \cos t (4 \cos t + 1). \end{aligned}$$

Пример 9.23. Найдем характеристическую функцию случайной величины X , имеющей геометрическое распределение с параметром p .

Используя ряд распределения случайной величины, имеющей геометрическое распределение с параметром p , получаем

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{itj} p(1-p)^j = p \sum_{j=0}^{\infty} (e^{it}(1-p))^j = \frac{p}{1 - (1-p)e^{it}}.$$

Пример 9.24. Найдем характеристическую функцию случайной величины X , имеющей *равномерное* на интервале (a, b) *распределение*.

Вспоминая определение *плотности распределения* равномерно распределенной на интервале (a, b) случайной величины, имеем

$$f(t) = \int_a^b \frac{e^{itx} dx}{b-a} = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Пример 9.25. Найдем характеристическую функцию *непрерывной случайной величины* X , имеющей плотность распределения

$$p(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

Характеристическая функция случайной величины X равна:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} e^{-|x|}}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{(it+1)x} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{(it-1)x} dx = \\ &= \frac{1}{2(it+1)} - \frac{1}{2(it-1)} = \frac{1}{t^2+1}. \end{aligned}$$

Пример 9.26. Найдем характеристическую функцию *непрерывной случайной величины* X , имеющей плотность *распределения Коши*

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Имеем

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} dx}{\pi(1+x^2)}.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся методом контурного интегрирования [X]. При этом рассмотрим отдельно два случая: $t > 0$ и $t < 0$.

В первом случае выберем замкнутый контур L , состоящий из полуокружности L' большого радиуса R с центром в точке 0, лежащей в верхней части комплексной плоскости, и части L'' действительной оси, представляющей собой диаметр этой полуокружности (рис. 9.3). Поскольку подынтегральная функция является аналитической внутри рассматриваемого контура за исключением простого полюса в точке $z = i$, то интеграл по контуру L будет равен вычету в точке i , умноженному на $2\pi i$, т.е.

$$\int_L \frac{e^{itz} dz}{\pi(1+z^2)} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \left\{ \frac{e^{itz}}{\pi(1+z^2)} \right\}.$$

В свою очередь,

$$\operatorname{Res}_{z=i} \left\{ \frac{e^{itz}}{\pi(1+z^2)} \right\} = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{e^{itz}}{\pi(1+z^2)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{itz}}{\pi(z+i)} = \frac{e^{-t}}{2\pi i}.$$

Оценим

$$\int_{L'} \frac{e^{itz} dz}{\pi(1+z^2)}$$

при $R > \sqrt{2}$. Поскольку

$$|e^{itz}| \leq 1$$

при $t > 0$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ и, кроме того,

$$|1 + z^2| > \frac{R^2}{2}$$

на окружности $|z| = R$ при $R > \sqrt{2}$, то

$$\left| \int_{L'} \frac{e^{itz} dz}{\pi(1 + z^2)} \right| \leq \int_{L'} \frac{2|dz|}{\pi R^2} = \frac{2\pi R}{\pi R^2} = \frac{2}{R}.$$

Устремляя теперь R к бесконечности, видим, что интеграл по полуокружности L' стремится к нулю, а интеграл по диаметру L'' — к характеристической функции. Значит,

$$f(t) = e^{-t} \quad \text{при} \quad t > 0.$$

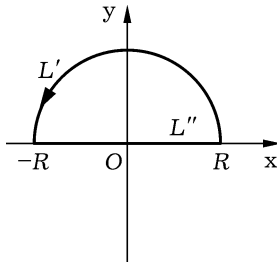


Рис. 9.3

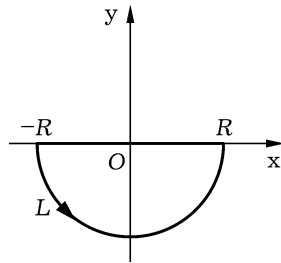


Рис. 9.4

Во втором случае поступим точно так же, только вместо полуокружности, лежащей в верхней части комплексной плоскости, возьмем полуокружность, лежащую в нижней части этой плоскости (рис. 9.4). Аналогичные выкладки дают:

$$f(t) = e^t \quad \text{при} \quad t < 0.$$

Объединяя оба случая, получаем

$$f(t) = e^{-|t|}.$$

Пример 9.27. Выясним, может ли функция

$$f(t) = \sin t$$

являться характеристической функцией некоторой случайной величины.

Не может, так как

$$f(0) = 0 \neq 1,$$

что противоречит свойству 1 характеристической функции.

Пример 9.28. Ответим на вопрос: может ли функция

$$f(t) = e^t$$

являться характеристической функцией некоторой случайной величины?

Не может, так как $f(t)$ не является ограниченной, что противоречит свойству 1 характеристической функции.

Пример 9.29. Выясним, может ли функция

$$f(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1; \\ 1, & |t| \leq 1 \end{cases}$$

являться характеристической функцией некоторой случайной величины.

Оказывается, что не может, так как функция $f(t)$ терпит разрыв в точках $t = -1$ и $t = 1$, что противоречит свойству 1 характеристической функции.

Пример 9.30. Найдем характеристическую функцию случайной величины

$$Y = aX + b, \quad a > 0,$$

где X — случайная величина, определенная в примере 9.26.

Используя свойство 2 характеристической функции и результаты примера 9.25, имеем

$$f_Y(t) = f_X(at)e^{ibt} = e^{-a|t|+ibt}.$$

Пример 9.31. Независимые случайные величины X_1 и X_2 распределены по *экспоненциальному закону* с параметрами λ_1 и λ_2 . Найдём характеристическую функцию случайной величины

$$Y = X_1 + X_2.$$

Поскольку случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют характеристические функции

$$f_{X_1}(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - it} \quad \text{и} \quad f_{X_2}(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - it}$$

(см. пример 9.10), то в соответствии со свойством 3 характеристической функции

$$f_Y(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - it)(\lambda_2 - it)}.$$

Пример 9.32. Найдём математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , имеющей характеристическую функцию

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0; \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что характеристическая функция $f(t)$ имеет производные всех порядков в любой точке t , причем

$$f'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}, \quad f''(t) = \frac{-t^2 \sin t - 2t \cos t + 2 \sin t}{t^3}$$

при $t \neq 0$, а $f'(0)$ и $f''(0)$ определяются из условия непрерывности. Воспользовавшись правилом Лопиталья, имеем

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = -\frac{1}{3}.$$

Отсюда в силу свойства 4 характеристической функции

$$\mathbf{M}X = \frac{f'(0)}{i} = 0, \quad \mathbf{M}X^2 = -f''(0) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2 = \frac{1}{3}.$$

Пример 9.33. Найдём закон распределения случайной величины, характеристическая функция которой равна

$$f(t) = \frac{1 + \cos t}{2}.$$

Мы не будем пользоваться формулой обращения, а представим характеристическую функцию $f(t)$ в соответствии с формулой Эйлера в виде

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{it \cdot 0} + \frac{1}{4}e^{it \cdot (-1)} + \frac{1}{4}e^{it \cdot 1}.$$

Таблица 9.3

X	-1	0	1
P	0,25	0,5	0,25

Отсюда видно, что $f(t)$ является характеристической функцией дискретной случайной величины X , имеющей ряд распределения, представленный в табл. 9.3.

Пример 9.34. Найдём закон распределения случайной величины X , характеристическая функция которой равна

$$f(t) = e^{-|t|}.$$

В данном случае характеристическая функция $f(t)$ является абсолютно интегрируемой, а значит, случайная величина X имеет плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-|t|} dt.$$

Производя интегрирование, получаем

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-|t|} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{(-ix+1)t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{(-ix-1)t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi(-ix+1)} - \frac{1}{2\pi(-ix-1)} = \frac{1}{\pi(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, случайная величина X имеет плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}$$

(см. также пример 9.25).

Пример 9.35. Случайная величина X является средним арифметическим из 3200 независимых одинаково распределенных случайных величин, причем каждое слагаемое имеет математическое ожидание 3 и дисперсию 2. Воспользовавшись *центральной предельной теоремой*, оценим вероятность того, что X попадет в интервал $(2,925, 3,075)$.

Случайная величина X имеет математическое ожидание

$$MX = 3 \quad \text{и дисперсию} \quad DX = \frac{2}{3200} = \frac{1}{1600}.$$

Тогда в силу центральной предельной теоремы случайная величина

$$Y = (X - 3)\sqrt{1600}$$

имеет приближенно стандартное нормальное распределение, а значит,

$$\begin{aligned} P\{2,925 < X < 3,075\} &= \\ &= P\{(2,925 - 3)\sqrt{1600} < Y < (3,075 - 3)\sqrt{1600}\} \approx \\ &\approx \Phi_0(3) - \Phi_0(-3). \end{aligned}$$

Воспользовавшись табл. П.3, в которой приведены значения функции Лапласа, имеем

$$P\{2,925 < X < 3,075\} \approx 2 \cdot 0,49865 = 0,9973.$$

Пример 9.36. Найдем вероятность того, что при 720 бросаниях игральной кости „шестерка“ выпадает от 100 до 130 раз.

Обозначим через X суммарное число выпавших „шестерок“ при $n = 720$ бросания игральной кости. Поскольку вероятность выпадения „шестерки“ при одном бросании $p = 1/6$, то в силу *интегральной теоремы Муавра — Лапласа* случайная величина

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} = \frac{X - 120}{10}$$

приближенно распределена по стандартному нормальному закону. Значит,

$$\mathbf{P}\{100 < X < 130\} = \mathbf{P}\left\{\frac{100-120}{10} < Y < \frac{130-120}{10}\right\} \approx \Phi_0(1) - \Phi_0(-2).$$

Используя таблицу значений функции Лапласа (см. табл. П.3), находим:

$$\mathbf{P}\{100 < X < 130\} \approx 0,34134 - (-0,47725) = 0,81859.$$

Отметим, что задачи такого рода уже рассматривались нами (см. **3.6**).

Вопросы и задачи

9.1. Какие типы сходимости случайных величин Вы знаете? Как связаны между собой различные типы сходимости?

9.2. Дайте определение слабой сходимости последовательности функций распределения.

9.3. Напишите первое неравенство Чебышева.

9.4. Напишите второе неравенство Чебышева.

9.5. В каком случае говорят, что последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин удовлетворяет закону больших чисел? В чем заключается физический смысл закона больших чисел?

9.6. Докажите закон больших чисел в форме Чебышева.

9.7. Докажите закон больших чисел в форме Бернулли.

9.8. Дайте определение характеристической функции.

9.9. Перечислите основные свойства характеристической функции.

9.10. Напишите формулу обращения.

9.11. Как связаны между собой слабая сходимость последовательности функций распределения и сходимость последовательности соответствующих им характеристических функций (теорема непрерывности)?

9.12. Докажите центральную предельную теорему. В чем заключается физический смысл этой теоремы?

9.13. Докажите интегральную теорему Муавра — Лапласа.

9.14. Средний ежедневный расход воды в некотором населенном пункте составляет 50 000 л. Оцените с помощью первого неравенства Чебышева вероятность того, что в произвольно выбранный день расход воды в этом пункте превысит 150 000 л.
О т в е т: $P\{X > 150\,000\} < 1/3$.

9.15. Среднее потребление электроэнергии в мае в некотором населенном пункте составляет 360 000 кВт·ч.

а) Оцените с помощью первого неравенства Чебышева вероятность того, что потребление электроэнергии в мае текущего года в этом населенном пункте превысит 1 000 000 кВт·ч.

б) Оцените с помощью второго неравенства Чебышева ту же вероятность, если известно, что среднее квадратичное отклонение потребления электроэнергии в мае равно 40 000 кВт·ч.
О т в е т: а) $P\{X > 1\,000\,000\} < 0,36$; б) $P\{X > 1\,000\,000\} < \frac{1}{256}$.

9.16. Среднее квадратичное отклонение погрешности измерения курса самолета равно 2° . Считая математическое ожидание погрешности измерения равным нулю, оцените с помощью второго неравенства Чебышева вероятность того, что погрешность одного измерения курса самолета превысит 5° .

О т в е т: $P\{|X| > 5^\circ\} < 0,16$.

9.17. Вероятность появления некоторого события в каждом из 800 независимых испытаний равна $1/4$. Воспользовавшись вторым неравенством Чебышева, оцените вероятность того, что число X появлений этого события заключено в пределах от 150 до 250.

О т в е т: $\mathbf{P}\{150 \leq X \leq 250\} \geq 0,94$.

9.18. Пусть дана последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимых дискретных случайных величин, причем ряд рас-

Таблица 9.4

X_n	$-\sqrt{n}$	0	\sqrt{n}
\mathbf{P}	$\frac{1}{2n}$	$1 - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{2n}$

пределения случайной величины X_n представлен в табл. 9.4. Проверьте, применим ли к этой последовательности закон больших чисел в форме Чебышева.

О т в е т: да, применим.

9.19. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, причем случайная величина X_n имеет плотность распределения

$$p_{X_n}(x) = \frac{n^{2(n+1)}|x|}{(n^2 + x^2)^{n+2}}.$$

Проверьте, удовлетворяет ли последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ закону больших чисел в форме Чебышева.

О т в е т: да, удовлетворяет.

9.20. Пусть последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ некоррелированных случайных величин удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{D}X_i = 0.$$

Проверьте, применим ли к этой последовательности закон больших чисел.

О т в е т: да, применим.

9.21. Найдите характеристическую функцию случайной величины X , ряд распределения которой представлен в табл. 9.5.

Таблица 9.5

X	0	1	2	3
P	1/2	1/8	1/4	1/8

О т в е т: $f(t) = 1/2 + e^{it}(1 + e^{it})^2/8$.

9.22. Найдите характеристическую функцию случайной величины X , ряд распределения которой представлен в табл. 9.6.

Таблица 9.6

X	-2	0	2
P	1/4	1/2	1/4

О т в е т: $f(t) = \cos^2 t$.

9.23. Найдите характеристическую функцию неотрицательной целочисленной случайной величины X , распределение которой задается вероятностями

$$p_n = P\{X = n\} = (n+1)p^2(1-p)^n \quad (n = 0, 1, \dots, \quad 0 < p < 1).$$

О т в е т: $f(t) = p^2 / (1 - (1-p)e^{it})^2$.

9.24. Найдите характеристическую функцию непрерывной случайной величины X , имеющей плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1; \\ \frac{3(1-x^2)}{4}, & |x| < 1. \end{cases}$$

О т в е т:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0; \\ \frac{3(\sin t - t \cos t)}{t^3}, & t \neq 0. \end{cases}$$

9.25. Найдите характеристическую функцию случайной величины X , имеющей гамма-распределение с параметрами γ и λ .

О т в е т: $f(t) = \lambda^\gamma / (\lambda - it)^\gamma$.

9.26. Найдите характеристическую функцию непрерывной случайной величины X , имеющей плотность распределения

$$p(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi(1+x^4)}.$$

О т в е т: $f(t) = \sqrt{2}e^{-|t|/\sqrt{2}}\sin(\pi/4 + |t|/\sqrt{2})$.

9.27. Может ли функция

$$f(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

являться характеристической функцией некоторой случайной величины?

О т в е т: не может.

9.28. Может ли функция

$$f(t) = 2 - \cos t$$

являться характеристической функцией некоторой случайной величины?

О т в е т: не может.

9.29. Может ли функция

$$f(t) = 1 - t + [t],$$

где $[t]$ — целая часть числа t , являться характеристической функцией некоторой случайной величины?

О т в е т: не может.

9.30. Найдите характеристическую функцию случайной величины $Y = aX + b$, где X — случайная величина, определенная в задаче 9.26.

О т в е т: $f(t) = \sqrt{2}e^{-|at|/\sqrt{2}+ibt}\sin(\pi/4 + |at|/\sqrt{2})$.

9.31. Случайная величина X_1 распределена равномерно в интервале $(0, 1)$, а случайная величина X_2 имеет стандартное нормальное распределение. Найдите характеристическую

функцию случайной величины $Y = X_1 + X_2$, если известно, что X_1 и X_2 являются независимыми.

О т в е т: $f_Y(t) = \frac{(e^{it} - 1)e^{-t^2/2}}{it}$.

9.32. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , имеющей характеристическую функцию

$$f(t) = \frac{1}{1 + 2it}.$$

О т в е т: $MX = -2$, $DX = 4$.

9.33. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , имеющей характеристическую функцию

$$f(t) = \sqrt{2}e^{-|t|/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{|t|}{\sqrt{2}}\right).$$

О т в е т: $MX = 0$, $DX = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}$.

9.34. Найдите закон распределения случайной величины, характеристическая функция которой равна

$$f(t) = \frac{\cos t(2 \cos t + 1)}{3}.$$

О т в е т: $f(t)$ является характеристической функцией дискретной случайной величины X , имеющей ряд распределения, представленный в табл. 9.7.

Таблица 9.7

X	-2	-1	0	1	2
P	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

9.35. Найдите плотность распределения случайной величины, имеющей характеристическую функцию

$$f(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq 1; \\ 1 - |t|, & |t| < 1. \end{cases}$$

О т в е т: $p(x) = \frac{2}{\pi x^2} \sin^2 \frac{x}{2}$.

9.36. Проводится выборочное обследование большой партии электрических лампочек для определения среднего времени их горения. Среднее квадратичное отклонение времени горения лампочки равно $\sigma = 80$ ч. Из всей партии наудачу выбирается 400 лампочек. Воспользовавшись центральной предельной теоремой, оцените вероятность того, что среднее (математическое ожидание) время горения лампочки будет отличаться от наблюдаемого среднего времени горения выбранных 400 лампочек не более чем на 10 ч.

О т в е т: 0,98758.

9.37. Случайная величина X является средним арифметическим из n независимых одинаково распределенных случайных величин, дисперсия каждой из которых равна 5. Воспользовавшись центральной предельной теоремой, оцените, какое число слагаемых n нужно взять для того, чтобы с вероятностью не менее 0,9973 случайная величина X отклонялась от своего среднего не более чем на 0,01.

О т в е т: $n \geq 450000$.

9.38. Решите задачу 9.17, воспользовавшись для приближенной оценки искомой вероятности интегральной теоремой Муавра — Лапласа. Сравните полученные результаты.

О т в е т: $P\{150 \leq X \leq 250\} \approx 0,9999366$. Сравнивая полученные результаты, видим, что интегральная теорема Муавра — Лапласа дает гораздо более точный ответ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1

Значения функции $P(m; \lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

[illegible][illegible]

Таблица П.2

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
x	Десятые доли x									
	0		2		4		6		8	
3,0	0,00443		00238		00123		00061		00029	
4,0	00013		00006		00002		00001			

Таблица П.3

Значения интеграла Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
x	Десятые доли x									
	0		2		4		6		8	
3,0	0,49865		49931		49966		49984		49993	
4,0	49997		49999							

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия

Боровков А.А. Курс теории вероятностей: Учеб. пособ. М.: Наука, 1972. 288 с.

Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. М.: Гардарики, 1998. 328 с.

Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. М.: Наука, 1969. 564 с.

Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. М.: Радио и связь, 1973. 415 с.

Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1972. 477 с.

Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учеб. М.: Наука, 1988. 447 с.

Карташов Г.Д. Теория вероятностей. Вероятностные модели: Учеб. пособ. М.: Изд-во МГТУ, 1990. 63 с.

Климов Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Изд-во МГУ, 1983. 328 с.

Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974. 120 с.

Лозв М. Теория вероятностей / Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 719 с.

Неве Ж. Математические основы теории вероятностей / Пер. с франц. М.: Мир, 1969. 310 с.

Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973. 494 с.

Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособ. М.: Наука, 1979. 495 с.

Розанов Ю.А. Лекции по теории вероятностей. М.: Наука, 1986. 213 с.

Севостьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982. 257 с.

Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений: Учеб. пособ. М.: Наука, 1965. 511 с.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / Пер. с англ.: В 2 т. Т.1. М.: Мир, 1984. 498 с.; Т.2. М.: Мир, 1984. 752 с.

Четыркин Е.М., Калицман И.Л. Вероятность и статистика. М.: Финансы и статистика, 1982. 319 с.

Чистяков В.П. Курс теории вероятностей: Учеб. М.: Наука, 1987. 240 с.

Задачники

Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. М.: Высш. шк., 1986. 80 с.

Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей: Задачник. М.: Наука, 1973. 172 с.

Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. шк., 1975. 334 с.

Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. 330 с.

Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Изд-во МГУ, 1963. 143 с.

Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред А.А. *Свешникова*. М.: Наука, 1970. 632 с.

Тескин О.И., Тверитинов Д.И., Северцев Н.А. Методические указания к выполнению домашнего задания по теории вероятностей и математической статистике. М.: Изд-во МВТУ, 1981. 58 с.

Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособ. / Под ред. А.В. *Ефимова*. М.: Наука, 1990. 428 с.

Вспомогательная литература

Ежов И.И., Скорород А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. М.: Наука, 1977. 80 с.

Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику / Пер. с англ. М.: Наука, 1975. 479 с.

Кульбак С. Теория информации и статистика / Пер. с англ. М.: Наука, 1967. 409 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиома неотрицательности 60

- непрерывности 64
- нормированности 60
- сложения 64
- расширенная 60

Алгебра событий 33

Асимметрия 321

Вектор математических ожиданий
187, 300

- случайный двумерный 165
- n -мерный 165
- средних значений 300
- квадратичных отклонений 187

Величина случайная 126

- двумерная 165
- дискретная 171
- непрерывная 176
- дискретная 129
- многомерная (n -мерная) 165
- непрерывная 135
- одномерная 165
- центрированная 302

Величины случайные зависимые 182

- независимые 181
- в совокупности 185
- некоррелированные 196, 313

Вероятности апостериорные 98

- априорные 98

Вероятность безусловная 80

- геометрическая 56

Вероятность события 43, 56, 58, 60

- условная 79, 80, 355

Выборка 46

- без возвращения 46
- с возвращением 46

Гипотезы 93

Группа событий полная 93

Диаграммы Эйлера — Венна 26

Дисперсия (второй центральный
момент) 189, 302

- условная 372

Дополнение события 29

Задача о встрече 56

Закон биномиальный 132

- больших чисел в форме Бернулли
411

----- Чебышева 409

--- слабый 409

– геометрический 134

– нормальный многомерный 189

-- стандартный 145

-- n -мерный общий 256

– Пуассона 133

– распределения Вейбулла 146

-- вероятностей 126

-- дифференциальный 136

-- интегральный 135

-- Релея 147

Закон распределения

экспоненциальный
(показательный) 141

-- χ^2 (хи-квадрат) 148

-- редких событий 133

Законы де Моргана 31

-- распределения условные 360

Значение наивероятнейшее 325

-- среднее 144

-- условного математического
ожидания 365, 369

-- условной дисперсии 372

Интеграл Лапласа 106

Интерпретация геометрическая
вероятности условной 82

Исходы элементарные

равновозможные 42

Исход элементарный 21

-- благоприятствующий событию
24

-- образующий событие 24

Квантиль уровня α (α -квантиль)

322

Ковариация 189, 309

Координаты случайного вектора
165

Коэффициент корреляции 187, 189,
317

-- полиномиальный
(мультиномиальный) 53

Критерий независимости
случайных величин 364

Линия регрессии 370**Матрица ковариаций**

(ковариационная матрица) 188,
189, 314

-- корреляционная (нормированная
ковариационная) 320

Медиана 323**Мера вероятностная 60****Метод линеаризации 258**

-- математической индукции I-63

Множество возможных значений
случайной величины 124

Мода случайной величины

дискретной 325

--- непрерывной 324

Момент второй начальный 301

-- центральный 302

-- корреляционный 309

-- k -го порядка 308

--- начальный 308

--- центральный 308

Независимость событий попарная

90

Неравенство Чебышева второе 406

-- первое 404

Объединение (сумма) событий 27**Ожидание математическое 144**

-- (среднее значение) случайной
величины дискретной 289

----- непрерывной 291

-- условное 366, 370

Операции (действия) над
событиями 26

Определение вероятности

аксиоматическое 59

-- геометрическое 56

-- классическое 43

- Определение вероятности
 статистическое 58
 Оси рассеивания 191
 Отклонение среднее квадратичное
 145, 189, 305
 Отношение корреляционное 378
 Отсутствие последействия 143
Пересечение (произведение)
 событий 26
 Перестановка 47
 Плотность распределения
 (вероятностей) 135
 -- нормального многомерного 189
 -- случайного вектора 177
 -- совместная 208
 --- двумерная 177
 --- n -мерная 177
 -- условная 359
 Последовательность независимых
 одинаковых испытаний 99
 Преобразование Лапласа —
 Стилтьеса 421
 Пространство вероятностное 66
 - элементарных исходов 21
Размещение 47
 - без повторов 47
 - с повторениями 47
 Разность событий 28
 Распределение бимодальное 324
 - биномиальное 132
 - (вероятностей) 126
 - вероятностей биномиальное 101
 - гамма 147
 - гауссово 144
 - геометрическое 134
 - гипергеометрическое 54
 Распределение Коши 294
 - логарифмически нормальное
 (логнормальное) 282
 - Максвелла 240
 - мультимодальное 324
 - нормальное 144
 -- вырожденное 256
 -- двумерное 186
 --- невырожденное 187
 -- многомерное 189
 --- стандартное 189
 -- стандартное 104
 - полиномиальное 108
 - Пуассона 103, 133
 - равномерное 140
 -- в области 384
 - Релея 147
 - Стьюдента (t -распределение) 268
 - унимодальное 324
 - условное 355
 - Фишера — Снедекора
 (F -распределение) 284
 - экспоненциальное двумерное 171
 - Эрланга 148
 - χ^2 (хи-квадрат) 149
 Регрессия 370
 Ряд распределения (вероятностей)
 дискретной случайной величины
 129
Свертка (композиция) законов
 распределения 242
 -- плотностей распределения 242
 Сигма-алгебра (σ -алгебра) 33
 - борелевская (минимальная) 34
 - событий 33
 Событие 24, 33

Событие достоверное 25, 168

- невозможное 25
- противоположное 29
- элементарное 21

События зависимые 87

- независимые 87
- в совокупности 90
- несовместные (непересекающиеся) 26
- в совокупности 28
- попарно 28
- совместные (пересекающиеся) 27

Сочетание 47

- без повторений 47
- с повторениями 47

Схема Бернулли 99

- обобщенная 109
- биномиальная 99
- геометрическая 56
- гипергеометрическая 54
- классическая 43
- полиномиальная (мультиномиальная) 108, 109

Сходимость в среднем

- квадратичном 400
- всюду 398
- по вероятности 399
- с вероятностью 1 (почти наверное) 399
- функций распределения слабая 400

Теорема Бернулли 411

- Муавра — Лапласа интегральная 424

Теорема непрерывности 421

- сложения вероятностей 63
- центральная предельная 423

Устойчивость статистическая 17

Формула Байеса 97

- Бернулли 100
- биномиальная 101
- вероятности объединения независимых событий 92
- комбинаторики основная 45
- Муавра — Лапласа интегральная 105
- Муавра — Лапласа локальная 104
- обращения 418
- полной вероятности 93
- Пуассона 103
- свертки 242
- умножения вероятностей 85

Функция от случайной величины
двумерной 237

- скалярной 224
- производящая 421
- распределения (вероятностей) 127
- случайного вектора n -мерного 167
- совместная 167
- нормального стандартного 106
- одномерная частная или маргинальная 169
- условная 358
- регрессии 370
- характеристическая 412

Центр рассеивания 191

Частота события случайного

наблюденная 18

-- условная 79

Число степеней свободы

распределения χ^2 149

Эксперимент случайный 17

Экссесс 321

Элемент вероятности 138

Эллипсоид рассеивания 192

Эллипс равной вероятности 191

– рассеивания 191

Энтропия случайной величины

дискретной 326

---- двумерной 326

--- непрерывной 327

---- двумерной 327

Якобиан VII, 207

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Основные обозначения	11
Введение	17
1. Случайные события	21
1.1. Пространство элементарных исходов	21
1.2. События, действия над ними	24
1.3. Сигма-алгебра событий	32
1.4. Решение типовых примеров	35
Вопросы и задачи	38
2. Вероятность	42
2.1. Классическое определение вероятности	42
2.2. Вычисление вероятностей с помощью формул комбина- тики	45
2.3. Геометрическое определение вероятности	55
2.4. Статистическое определение вероятности	58
2.5. Аксиоматическое определение вероятности	59
2.6. Решение типовых примеров	66
Вопросы и задачи	72
3. Условная вероятность. Схема Бернулли	78
3.1. Определение условной вероятности	78
3.2. Формула умножения вероятностей	85
3.3. Независимые и зависимые события	87
3.4. Формула полной вероятности	93
3.5. Формула Байеса	96
3.6. Схема Бернулли	99
3.7. Решение типовых примеров	109
Вопросы и задачи	118

4. Одномерные случайные величины	124
4.1. Определение случайной величины	124
4.2. Функция распределения случайной величины	126
4.3. Дискретные случайные величины	129
4.4. Некоторые дискретные случайные величины	132
4.5. Непрерывные случайные величины	135
4.6. Некоторые непрерывные случайные величины	140
4.7. Решение типовых примеров	149
Вопросы и задачи	158
5. Многомерные случайные величины	165
5.1. Многомерная случайная величина. Совместная функция распределения	165
5.2. Дискретные двумерные случайные величины	171
5.3. Непрерывные случайные величины	176
5.4. Независимые случайные величины	181
5.5. Многомерное нормальное распределение	186
5.6. Решение типовых примеров	197
Вопросы и задачи	212
6. Функции от случайных величин	222
6.1. Примеры функциональной зависимости между случайными величинами	222
6.2. Функции от одномерной случайной величины	224
6.3. Скалярные функции от случайного векторного аргумента	237
6.4. Формула свертки	241
6.5. Векторные функции от случайного векторного аргумента	245
6.6. Линейные преобразования нормально распределенных случайных величин. Метод линеаризации	252
6.7. Решение типовых примеров	260
Вопросы и задачи	279
7. Числовые характеристики случайных величин	288
7.1. Математическое ожидание случайной величины	288
7.2. Математическое ожидание функции от случайной величины. Свойства математического ожидания	294
7.3. Дисперсия. Моменты высших порядков	301
7.4. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин	309

7.5. Другие числовые характеристики случайных величин	320
7.6. Решение типовых примеров	328
Вопросы и задачи	345
8. Условные характеристики случайных величин	354
8.1. Условные распределения	354
8.2. Условные числовые характеристики	365
8.3. Решение типовых примеров	382
Вопросы и задачи	391
9. Предельные теоремы теории вероятностей	397
9.1. Сходимость последовательности случайных величин	398
9.2. Неравенства Чебышева. Закон больших чисел	404
9.3. Характеристическая функция	412
9.4. Центральная предельная теорема	422
9.5. Решение типовых примеров	426
Вопросы и задачи	436
Приложение	443
Список рекомендуемой литературы	446
Предметный указатель	448

Учебное издание

**Математика в техническом университете
Выпуск XVI**

Печинкин Александр Владимирович

Тескин Олег Иванович

Цветкова Галина Михайловна

Бочаров Павел Петрович

Козлов Николай Ефимович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор Г.А. Нилова

Художник С.С. Водичиц

Корректор Е.В. Авалова

Компьютерная верстка В.Н. Подобряев

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве

МГТУ им. Н.Э. Баумана

под руководством *А.Н. Канатникова*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.005683.09.04 от 13.06.2004 г.

Подписано в печать 20.06.2006. Формат 60×88 1/16.

Печать офсетная. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 28,5. Уч.-изд. л. 29,12.

Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана,
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Отпечатано с диапозитивов
в ГУП ППП «Типография «Наука».
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 5-7038-2485-0



9 785703 824856