Теория вероятностей. Первый семинар.

Классическая вероятность и комбинаторика.

Вероятность того, что событие A произойдет, равна

$$P(A) = \frac{\text{число результатов, благоприятных событию } A}{\text{число всех результатов эксперимента}}.$$

Задача 1.1. 1) Сколько различных результатов можно получить в следующих экспериментах:
a) Один раз бросаем монету (на ребро не становящуюся); b) 2-кратное бросание монеты;
c) n-кратное бросание монеты; d) 2-кратное бросание игральной кости.
2) С какой вероятностью в эксперименте (a) выпадет орел? в (b) выпадут два орла?
в (c) выпадут n орлов? в (d) не выпадет ни одной шестерки?

Решение. a) 1) $N = 2$; 2) $P\{\text{выпадет орел}\} = \frac{1}{2}$;
b) 1) $N = 4$; 2) $P\{\text{выпадут 2 орла}\} = \frac{1}{4}$;
c) 1) $N = 2^n$; 2) $P\{n \text{ орлов}\} = \frac{1}{2^n}$;
d) $N = 6^2 = 36$; 2) $P\{\text{нет шестерок}\} = \frac{5^2}{36} = \frac{25}{36}$. □

Задача 1.2. Имеется алфавит из k букв. Сколько можно составить слов длины n из букв этого алфавита?

Решение. Ответ: k^n. □

Задача 1.3. Есть 4-разрядный цифровой замок: кодовое устройство замка состоит из 4 вращающихся дисков, на каждом из которых 10 цифр от 0 до 9. Только одна комбинация из четырех цифр позволяет открыть замок. С какой вероятностью, не зная вашего кода, замок откроют?

Решение. Всего комбинаций $10^4 = 10000$; а благоприятных открытию, как сказано, одна. Поэтому $P\{\text{открыть замок}\} = \frac{1}{10000}$. □

Задача 1.4. Один раз бросаем 2 монеты: обыкновенную (из зад.1) и "мечту студента" — еще и становящейся на ребро. 1) Сколько различных результатов можно получить в этом случае?
А если эти монеты бросаем 2 раза? 3 раза? 2) С какой вероятностью при одном бросании таких монет выпадут два орла? ни одного орла? хотя бы один орел?

Решение. 1) Всего результатов $N = 2 \cdot 3 = 6; 6^2; 6^3$. 2) $P\{\text{два орла}\} = \frac{1}{6}$; $P\{\text{ни одного орла}\} = \frac{1 \cdot 2}{6} = \frac{1}{3}$; $P\{\text{хотя бы один орел}\} = 1 - P\{\text{ни одного орла}\} = \frac{2}{3}$. □

Число **перестановок** из n элементов: $P_n = n!$.
Число **размещений** (важен порядок) из n элементов по k: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.
Число **сочетаний** (не важен порядок) из n элементов по k: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^{n-k}$.

Задача 1.5. a) Сколькими способами можно рассадить 10 человек в президиуме на 10 мест?
b) Сколькими способами можно выбрать из 10 кандидатов руководителей фирмы — президента и вице-президента? c) Сколькими способами можно выбрать из 10 кандидатов комиссию, состоящую из 2 человек?

Решение. a) $10! = 3628800$. b) $A_{10}^2 = 90$. c) $C_{10}^2 = 45$. □

Задача 1.6. Из колоды в 36 карт вытаскивают 2 карты. Найдите
a) число способов это сделать;
b) число способов вытащить 2 черные карты;
c) число способов вытащить 2 одноцветные карты;
d) число способов вытащить обе карты одной масти
и соответствующие вероятности.

Решение. a) $N = C_{36}^2 = 35 \cdot 18 = 630$; $P(a) = 1$. b) $C_{18}^2 = 17 \cdot 9 = 153$; $P(b) = \frac{C_{18}^2}{C_{36}^2} = \frac{17}{70}$. c) $C_{18}^2 \cdot 2 = 306$; $P(c) = \frac{17}{35}$. d) $C_9^2 \cdot 4 = 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144$; $P(d) = \frac{8}{35}$. □

Задача 1.7. Сколько машинных слов можно составить из букв слова МАМА? слова ЭКОНОМИКА? слова ПОЛИТОЛОГИЯ?

Решение. 1) *I способ.* В слове МАМА 2 буквы М и 2 буквы А. Число способов разместить букву М в новом 4-буквенном слове равно C_4^2, после чего буква А займет оставшиеся места. Следовательно, ответ: $C_4^2 = 6$.
II способ. Всего перестановок из 4 букв — 4! В каждом новом слове можно поменять местами 2 буквы М и 2 буквы А, поэтому надо поделить на 2!2!: 4!/2!2! = 6.
2) *I способ.* В слове ЭКОНОМИКА буквы К и О встречаются по 2 раза, остальные 5 букв (ЭНМИА)— по одному разу. Две буквы К можно разместить в 9-буквенном слове C_9^2 способами, две буквы О на оставшихся незанятыми 7 местах — C_7^2 способами, остальные буквы аналогичным образом размещаются $C_5^1 C_4^1 C_3^1 C_2^1 = 5!$ способами. Итак, число способов разместить все буквы равно $C_9^2 C_7^2 \cdot 5! = 90720$.
II способ: $9!/2!2! = 90720$.
3)*I способ*: $C_{11}^3 C_8^2 C_6^2 \cdot 4! = 1663200$. *II способ*: $11!/2!2!3! = 1663200$.
□

Задача 1.8. Есть 6 карточек с числами 0,1,2,3,4,5. Сколько из этих карточек можно составить 6-значных чисел, делящихся на 5?

Решение. Число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 0 или 5. Количество искомых чисел, оканчивающихся на 0, равно 5!. Оканчивающихся на 5 чисел $5! - 4!$, т.к. требуемое число не может начинаться с 0. Всего $5! + 5! - 4! = 4! \cdot 9 = 216$. □

Задача 1.9. Правитель решил различать своих подданных по зубам: себе оставил все 32 зуба белыми, ближайшим подданным велел окрасить черным цветом по 1 зубу на разных позициях, подданным следующего, второго ранга — по 2 зуба, и т.д. до последнего человека в королевстве со всеми черными зубами. Сколько подданных было у правителя?

Решение. *I способ*: число подданных ровно с 1 черным зубом = числу способов раскрасить ровно 1 зуб = C_{32}^1, ровно с 2 черными зубами — C_{32}^2, ..., со всеми черными зубами — C_{32}^{32}. Итого жителей государства (считая короля): $\sum\limits_{k=0}^{32} C_{32}^k = 2^{32}$.
II способ: обозначим белый зуб 0, черный — 1; тогда число жителей = числу слов длины 32 из символов 0 и 1 = $2^{32} = 4294967296$. □

Задача 1.10. Сколькими способами можно составить комиссию из 3 человек, выбирая из 4 супружеских пар так, чтобы в одну комиссию не вошли члены одной семьи?

Решение. *I способ*: Всего можно составить комиссию из 3 человек $C_8^3 = 56$ способами. Из них нам не годятся те, в которые вошли семейные пары. Сколько таких "неправильных" комиссий? Семейную пару можно выбрать $C_4^1 = 4$ способами, после чего на 3-е место в комиссию можно выбрать кого угодно из оставшихся $C_6^1 = 6$ способами; следовательно, нам не годятся 24 комиссии. Искомое число = 56 - 24 = 32.
II способ: Число способов выбрать 3 семьи для вхождения в комиссию равно $C_4^3 = 4$, и внутри отобранных 3 семей можно выбирать по одному представителю $2^3 = 8$ способами; всего $4 \cdot 8 = 32$ способов.
□

Задача 1.11. При 1-кратном бросании игральной кости обозначим
событие $A = \{$ выпадение четного числа очков $\}$,
событие $B = \{$ выпадение числа очков, делящегося на 3 $\}$.
Выпишите события $A, B, \bar{A}, \bar{B}, A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и найдите их вероятности.

Решение.

$$\begin{array}{l}
\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, N = 6; \\
A = \{2,4,6\}, N_A = 3, P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \\
B = \{3,6\}, N_B = 2, P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \\
\bar{A} = \{1,3,5\}, N_{\bar{A}} = 3, P(\bar{A}) = \frac{1}{2}; \\
\bar{B} = \{1,2,4,5\}, N_{\bar{B}} = 4, P(\bar{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \\
A \cup B = \{2,3,4,6\}, N_{A\cup B} = 4, P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\
A \cap B = \{6\}, N_{A\cap B} = 1, P(A \cup B) = \frac{1}{6} \\
A \setminus B = \{2,4\}, N_{A\setminus B} = 2, P(A \setminus B) = \frac{1}{3}
\end{array}$$

□

Задача 1.12. Пусть A, B, C — 3 произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C

1) произошло только A;
2) произошли A и B, но C не произошло;
3) все 3 события произошли;
4) произошло по крайней мере одно из этих событий;
5) произошли по крайней мере 2 события;
6) произошло ровно 1 из этих событий;
7) произошло ровно 2 из этих событий;
8) ни одно событий не произошло;
9) произошло не больше 2 событий.

Решение. 1) $A\bar{B}\bar{C}$; 2) $AB\bar{C}$; 3) ABC; 4) $A \cup B \cup C$; 5) $AB \cup AC \cup BC$; 6) $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$; 7) $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$; 8) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; 9) $\overline{ABC}$. □

Задача 1.13. Из колоды в 36 карт вытаскивают 2 карты. Обозначим события
$A = \{$ обе карты — трефы $\}$,
$B = \{$ обе карты — дамы $\}, C = \{$ одна из карт — туз .$\}$
Что означают события
$A \cup B, AB, A\bar{B}, A \setminus B, A \cup C, AC, A \setminus C, B \cup C, BC, B \setminus C, C \setminus B, C \setminus A$?

Решение.

$A \cup B = \{$ обе карты либо трефы, либо дамы $\}, AB = \emptyset, A\bar{B} = A \setminus B = A,$
$A \cup C = \{$ либо обе карты трефы, либо одна из карт — туз $\},$
$AC = \{$ обе трефы, причем одна — трефовый туз $\}, A \setminus C = \{$ обе трефы, но нет туза $\},$
$C \setminus A = \{$ есть туз, но если туз трефовый, то вторая карта другой масти $\},$
$B \cup C = \{$ или 2 дамы, или есть туз $\}, BC = \emptyset, B \setminus C = B, C \setminus B = C.$

□

Задача 1.14. Сколькими способами можно рассадить 6 гостей за круглым столом? А если это 3 дамы и 3 кавалера?

Решение. a) $\frac{6!}{6} = 5!$; b) $\frac{2 \cdot 3! 3!}{6}$. □

Задача 1.15. Сколькими способами можно расселить 8 студентов по 3 комнатам: 1-местной, 3-местной и 4-местной?

Решение. $\dfrac{8!}{1!3!4!} = C_8^1 C_7^3$ □

Задача 1.16. Сколькими способами четверо юношей могут пригласить на танец четырех из шести девушек?

Решение. $\dfrac{6!}{1!1!1!1!2!} = 4! C_6^4 = A_6^4$. □

Задача 1.17. Сколько прямых можно провести через 8 точек таким образом, чтобы ровно 3 точки лежали на одной прямой?

Решение. Всего через 8 точек можно провести C_8^2 прямых (каждая прямая проходит через 2 точки). Но у нас ровно 3 точки лежат на одной прямой, т.е. через эти 3 точки проходит только 1 прямая; без данного условия через эти 3 точки проходили бы $C_3^2 = 3$ прямые. Таким образом, из $C_8^2 = 28$ надо вычесть лишние $3 - 1 = 2$ прямые; ответ — 26 прямых. □

Теория вероятностей. Второй семинар.

Классическая вероятность.

Задача 2.1. При бросании 2 игральных костей какая сумма очков имеет больше шансов выпасть — 11 или 12? Сумму 12 составляют 2 числа — 6 и 6, сумму 11 тоже 2 — 5 и 6. На первый взгляд, шансы событий равны. Верен ли первый взгляд?

Решение. Условно обозначим кости "первая" и "вторая". Тогда число всевозможных комбинаций очков, выпавших на костях, равно $N = 6^2 = 36$.
Сумма 12 выпадает только при комбинации $(6,6)$: на "первой" 6 и на "второй" 6. Поэтому $P(12) = \frac{1}{36}$.
Сумма 11 выпадает при 2 комбинациях $(5,6)$ и $(6,5)$. Поэтому $P(11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.
Таким образом, 11 имеет в 2 раза больше шансов выпасть, чем 12. □

Задача 2.2. Из колоды в 36 карт вытащили 3. Какова вероятность того, что среди этих карт 1) есть пики? 2) ровно 2 пики? 3) 2 туза и 1 дама?

Решение. 1) *I способ:* $P\{\text{есть пики}\} = 1 - P\{\text{нет пик}\} = 1 - \dfrac{C_{27}^3}{C_{36}^3} = 1 - \dfrac{25 \cdot 26 \cdot 27}{34 \cdot 35 \cdot 36} = 1 - \dfrac{15 \cdot 13}{17 \cdot 28} = 1 - \dfrac{195}{476} = \dfrac{281}{476}$. *II способ:* $P\{\text{есть пики}\} = P\{\text{ровно 1 пика}\} + P\{\text{ровно 2 пики}\} + P\{\text{все 3 пики}\} = $
$= \dfrac{C_9^1 C_{27}^2}{C_{36}^3} + \dfrac{C_9^2 C_{27}^1}{C_{36}^3} + \dfrac{C_9^3}{C_{36}^3} = \dfrac{9 \cdot 26 \cdot 27 + 8 \cdot 9 \cdot 27 + 3 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 6} = \dfrac{281}{476}$.
2) $\dfrac{C_9^2 C_{27}^1}{C_{36}^3} = \dfrac{81}{595}$. 3) $\dfrac{C_4^2 C_4^1}{C_{36}^3} = \dfrac{2}{595}$. □

Задача 2.3. Из 30 экзаменационных вопросов по теории вероятностей студент успел подготовить только 25. Все вопросы случайным образом разбиты на билеты, по 2 в каждом. Какова вероятность того, что студент вытащит билет с вопросами, которые он выучил?

Решение. $\dfrac{C_{25}^2}{C_{30}^2} = \dfrac{24 \cdot 25}{29 \cdot 30} = \dfrac{20}{29}$. □

Задача 2.4. Из 10 задач домашнего задания студент знает решение первых двух. Три домашние задачи случайным образом были выбраны для контрольной. Какова вероятность того, что в контрольной будут обе известные студенту задачи?

Решение. $\dfrac{8}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{15}$. □

Задача 2.5. В ящике комода лежат 2 белых носка и 3 носка черного цвета. 1) Наугад вынули 2 носка. Найдите вероятность того, что оба носка — белые.
2) Те же условия, но после первого вынимания носок по рассеяности возвращается в ящик.

Решение. 1) $P\{\text{оба белые}\} = \dfrac{1}{C_5^2} = \dfrac{1}{10}$.
2) $P\{\text{оба белые в выборке с возвращением}\} = \dfrac{2}{5}\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{25}$. □

Задача 2.6. В ящике комода лежат 5 носков белого цвета и 6 — черного цвета. Наудачу вынимаются 3 носка. Найти вероятность того, что образовалась пара.

Задача 2.7. А если в ящике еще 4 синих носка?

Решение. $1 - P\{1\text{б}+1\text{ч}+1\text{с}\} = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 4}{C_1 5^3}$ □

Задача 2.8. В лотерее 1000 билетов. Из них выигрышных: один — с выигрышем в 500р., 10 — в 100р., 50 — в 20р., 100 — в 5р. Лотерейный билет стоит 5р. Некто покупает один билет. Найти вероятность получения им прибыли от этой покупки.

Решение. $P\{\text{получения прибыли}\} = P\{\text{выиграть не меньше 20р.}\} = \dfrac{1 + 10 + 50}{1000} = 0.061$. [Заметим, что вероятность выиграть хоть что-то больше: 0.161.] □

Задача 2.9. Из колоды тянут 3 карты. Вам предлагают поставить на одно из следующих событий: A) вытянут ровно 2 пики; B) вытянут хотя бы одну даму. На какое из событий выгоднее ставить?

Решение. На второе. $\square$

Геометрические вероятности.

Задача 2.10. Генральным штабом некоей Большой Державы размечены 3 круговые зоны, располагающиеся вокруг входа в секретный дворец Правителя некоторой Малой Страны. Самолет Большой Державы, сбрасывая бомбу, попадает в какую-то из зон случайным образом, но никогда не промахивается. Радиусы I, II и III зон равны $r_1 = 5$ км , $r_2 = 10$ км , $r_3 = 15$ км соответственно. Какова для каждой из зон вероятность попадания в эту зону?

Решение. Площадь зоны I $= S_1 = \pi r_1^2$, площадь зоны II $= S_2 = \pi r_2^2 - S_1 = 4\pi r_1^2 - \pi r_1^2 = 3\pi r_1^2 = 3S_1$, площадь зоны III $= S_3 = \pi r_3^2 - \pi r_2^2 = 9\pi r_1^2 - 4\pi r_1^2 = 5S_1$, площадь всей мишени $= S = \pi r_3^2 = 9S_1$. Поэтому $P\{\text{попадет в зону I}\} = \dfrac{S_1}{S} = \dfrac{1}{9}$, $P\{\text{попадет в зону II}\} = \dfrac{S_2}{S} = \dfrac{1}{3}$, $P\{\text{попадет в зону III}\} = \dfrac{S_3}{S} = \dfrac{5}{9}$. $\square$

Задача 2.11. Известно, что за месяц каждый из магазинов торовой марки "Золотая Липа" продает от 0 до 1 кг продукции. Какова вероятность того, что суммарно в двух магазинах за месяц будет продано больше 0.5 и меньше 1 кг продукции?

Решение. Здесь $\Omega = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]\}$, $S(\Omega) = 1$. Искомая вероятность события $A = \{(x, y) \in \Omega : \frac{1}{2} \le x + y \le 1\}$ равна площади множества A:

$$P(A) = 1 - (\frac{1}{8} + \frac{1}{2}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

$\square$

Задача 2.12. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что за месяц в одном из магазинов продадут более чем вдвое больше продукции, чем в другом.

Решение. Искомое событие $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 2x < y \text{ или } 2y < x\}$, $P(A) = \frac{1}{2}$. $\square$

Задача 2.13. Два человека случайным образом приходят к памятнику Примусу от 0:00 часов до 1:00 часов по московскому времени и ждут друг друга по 15 минут. Какова вероятность того, что они встетятся?

Решение. Аналогично предыдущим задачам обозначим $\Omega = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]\}$. Пусть T — промежуток времени, в течение которого они приходят на место встречи (у нас $T = 60$ мин.), τ — время ожидания ($\tau = 15$ мин.). Тогда искомая вероятность = площади множества $\{(x, y) : |x - y| \le \dfrac{\tau}{T}\} = 1 - (1 - \dfrac{\tau}{T})^2 = 1 - \left(1 - \dfrac{15}{60}\right)^2 = \dfrac{7}{16}$. $\square$

Задача 2.14. Поселок "Бермудский прямоугольник" разделен заборами на квадратные дачные участки со стороной 40 м. Найти вероятность того, что летающая тарелка радиуса 5 м, приземляющаяся случайным образом, не сломает забора.

Решение. Тарелка попадет на границу, если расстояние от центра монеты до границы будет меньше 5 м. Следовательно, искомая вероятность =
$P\{\text{центр тарелки попадет в квадрат, равноудаленный от сторон участка на 5 м}\} = \frac{30^2}{40^2} = \frac{9}{16}$. $\square$

Задача 2.15. Древний грек Пифагор развлекается тем, что, вписав в круг квадрат, кидает в этот круг камешки. Какова вероятность того, что неприцельно брошенный камешек окажется внутри квадрата?

Решение. $P\{\text{точка попадет в квадрат}\} = \dfrac{\text{площадь квадрата}}{\text{площадь круга}} = \dfrac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}$. $\square$

Теория вероятностей. Третий семинар.

Сложение и умножение вероятностей.

Теорема сложения вероятностей. Для любых событий $A_1, \dots, A_n$

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_iA_j) + \sum_{i,j,k} P(A_iA_jA_k) + \dots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\dots A_n).$$

Условная вероятность: вероятность события A при условии, что произошло событие B

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Теорема умножения вероятностей. Для любых событий $A_1, \dots, A_n$

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_{n-1}|A_1A_2\dots A_{n-2})P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}).$$

События $A_1, \dots, A_n$ называются **попарно независимыми**, если для любых пар A_i, A_j выполнено $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$. События $A_1, \dots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого набора $A_{k_1}, \dots, A_{k_l}$ выполнено $P(A_{k_1}\dots A_{k_l}) = P(A_{k_1})\dots P(A_{k_l})$.

Задача 3.1. Бросаем 2 монеты: I и II. Обозначим 1 — орел, 0 — решка. События $A = \{$ 1 на I $\}$, $B = \{$ 1 на II $\}$ и событие $C = \{$ на I и II монетах выпали различные стороны $\}$. Являются ли события A, B, C a) попарно независимыми? b) независимыми в совокупности?

Решение. $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4} = P(AB)$, то есть события A, B, C попарно независимы. Но $ABC = \emptyset, P(ABC) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$, т.е. события A, B, C не являются независимыми в совокупности. □

Задача 3.2. Бросаем 3 монеты. Являются ли независимыми события $A = \{$ 1 на I монете $\}$ и $B = \{$ хотя бы один 0 $\}$?

Решение. $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, $P(AB) = \frac{3}{8} \neq P(A)P(B)$, т.е. события A и B не независимы. □

Задача 3.3. Бросаем 2 игральные кости. Найти условную вероятность
$P\{$выпала четная сумма очков|выпала хотя бы одна 6$\}$.

Решение. Обозначим события $A = \{$ выпала четная сумма $\}, B = \{$ выпала хотя бы одна 6 $\}$.
Тогда $P(B) = 1 - \frac{25}{36}, P(AB) = \frac{5}{36}$, $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{5}{11}$. □

Задача 3.4. Из колоды в 36 карт одну за другой вытаскивают три карты. Найти вероятность того, что первая карта — туз, вторая — король, третья — дама.

Решение. $P(T_1K_2D_3) = P(T_1)P(K_2|T_1)P(D_3|T_1K_2) = \frac{4}{36}\frac{4}{35}\frac{4}{34} = \frac{8}{5355} = 0.0015$ □

Задача 3.5. Буквы слова ЭКОНОМИКА выписаны на карточках. Наудачу вынимают 4 карточки одну за другой и выкладывают по порядку. Чему равна вероятность, что получится слово КИНО?

Решение. $P\{\text{КИНО}\} = \frac{2}{9}\frac{1}{8}\frac{1}{7}\frac{2}{6} = \frac{1}{756} = 0.0013$ □

Задача 3.6. Спозаранку выходя на рыбалку, 4 человека, имеющие одинаковый размер обуви, надевают в темноте резиновые сапоги. Каждый из них может отличить правый сапог от левого, но не может отличить свой сапог от чужого. Найти вероятность того, что a) каждый рабак наденет свои сапоги; b) каждый рыбак наденет сапоги, относящиеся к одной паре (может быть и не свои).

Решение. a) $\frac{1}{4\cdot 4}\frac{1}{3\cdot 3}\frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{276}$; b) $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{24}$. □

Задача 3.7. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, но если рыбаки уже не могут отличить правый сапог от левого, и каждый просто берет два первых попавшихся сапога.

Решение. a) $\frac{2}{8}\frac{1}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{2520}$; b) $\frac{1}{7}\frac{1}{5}\frac{1}{3} = \frac{1}{105}$. ☐

Схема с неравновозможными исходами.
$\Omega = \{\omega_1, \dots\}$ — конечное (**конечная схема**) или счетное (**дискретная схема**) число элементарных событий, для каждого ω_i задана его вероятность $P(\omega_i) = p_i \geq 0$: $\sum_i p_i = 1$.

Вероятность события A: $P(A) = \sum_{\text{все } \omega_i \in A} p_i$.

Задача 3.8. Генеральным штабом некоей Большой Державы размечены 3 круговые зоны, располагающиеся вокруг входа в секретный дворец Правителя некоторой Малой Страны. Вероятность попадания одной ракеты в зону I равна 0.15, в зону II — 0.23, в зону III — 0.17. Чему равна вероятность пролета мимо?

Решение. $P\{\text{промаха}\} = 1 - P\{\text{попадания в какую-нибудь зону}\} = 1 - (P\{\text{попадания в I}\} +$
$+ P\{\text{попадания в II}\} + P\{\text{попадания в III}\}) = 1 - (0.15 + 0.23 + 0.17) = 0.45$. ☐

Задача 3.9. На 3 химические лаборатории Малой Страны сбрасывается одна бомба. Вероятность попадания в первую лаораторию равна 0.01, во вторую 0.008, в третью 0.025. При попадании в одну из лабораторий происходит экологическая катастрофа, в результате которой, в частности, выходят из строя все лаборатории. Найти вероятность уничтожения лабораторий.

Решение. $P\{\text{все уничтожится}\} = 0.01 + 0.008 + 0.025 = 0.043$. ☐

Задача 3.10. Устраиваясь на работу, некий господин посылает свое CV сразу в две фирмы. Вероятность того, что его примут на работу на 1-й фирме, равна $p_1 = 0.2$, на 2-й фирме $p_2 = 0.5$. Описать пространство элементарных событий; найти вероятности всех элементарных событий. Найти вероятность того, что господина захотят принять на работу сразу обе фирмы.

Решение. Обозначим 1 — попадание, 0 — промах. Все исходы эксперимента: $\omega_1 = (1,1), \omega_2 = (1,0), \omega_3 = (0,1), \omega_4 = (0,0)$. Их вероятности $P(\omega_1) = P(1,1) = p_1 p_2, P(\omega_2) = P(1,0) = p_1(1 - p_2), P(\omega_3) = P(0,1) = (1-p_1)p_2, P(\omega_4) = P(0,0) = (1-p_1)(1-p_2)$. Попадание обоих попыток в цель выражается событием ω_1, вероятность $P(\omega_1) = p_1 p_2 = 0.1$. ☐

Задача 3.11. Проекты по увеличению рентабельности фирмы проверяются на прибыльность двумя независимыми экспертами; проект принимается, если получает положительные оценки обоих экспертов. Убыточный проект может ошибочно быть признан прибыльным с вероятностями $\alpha_1 = 0.1$ и $\alpha_2 = 0.2$ первым и вторым экспертами соответственно. А прибыльный проект может быть раскритикован с вероятностями $\beta_1 = 0.2$ и $\beta_2 = 0.1$ для первого и второго экспертов соответственно. 1) Найти вероятность утверждения убыточного проекта. 2) Найти вероятность того, что прибыльный проект будет отвергнут.

Решение. 1) Аналогично предыдущей задаче (теперь 1 — прохождение проверки) получаем
$P\{\text{убыт. проект прошел проверку}\} = \alpha_1\alpha_2 = 0.02$.
2) Пусть 1 — отбраковка годного проекта. Годный проект отбраковывается, если не проходит хотя бы одну проверку, этому сответствуют элементарные события $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Значит, искомая вероятность равна $= P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) = \beta_1\beta_2 + \beta_1(1-\beta_2) + (1-\beta_1)\beta_2 = 0.02 + 0.18 + 0.08 = 0.28$.
$= 1 - P(\omega_4) = 1 - (1-\beta_1)(1-\beta_1)(1-\beta_2) = 1 - 0.72 = 0.28$. ☐

Задача 3.12. Недавно принятое решение о Вашей срочной долгосрочной командировке на Канарские о-ва должно быть подписано одним из заместителей директора, а затем утверждено директором. Однако, ввиду эпидемии гриппа, директор может заболеть и не прийти на работу с вероятностью 0.7, один из замов — с вероятностью 0.3, другой — с вероятностью 0.4. С какой вероятностью Ваша командировка не состоится?

Решение. $p_1 p_2 + p_3 - p_1 p_2 p_3 = 0.736$. ☐

Задача 3.13. Каждый проект на стол генерального директора может попасть двумя путями: либо проект дожен быть утвержден одним из двух заместителей директора филиала, а затем и самим директором филиала, который передаст проект гендиректору;

либо проект должен получить одобрение Крупнейшего Специалиста, который представит его гендиректору. Вероятность для одного из замов отвергнуть проект равна 0.4, для другого 0.5, для директора филиала 0.3, для Специалиста 0.6. 1) Каким из путей выгоднее действовать?
2) Разработчики проекта решили действовать обоими путями одновременно. С какой вероятностью проект не будет внедрен, если гендиректор утверждает попавшие к нему проекты с вероятностью 0.8?

Решение. 1) $p_1p_2 + p_3 - p_1p_2p_3 = 0.56 < 0.6$
2) $(p_1p_2 + p_3 - p_1p_2p_3)p_4 + p_5 - (\dots)p_4p_5 = 0.4688$ □

Формула полной вероятности. Если события H_i сотавляют **полную систему гипотез**, т.е. 1) $H_iH_j = \emptyset$; 2) $\Omega = \cup_1^n H_i$,
то для любого события A вероятность $P(A) = \sum\limits_1^n P(H_i)P(A|H_i)$.

Формула Байеса.

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum\limits_1^n P(H_i)P(A|H_i)}.$$

Повторение опыта.

$$P(B|A) = \sum_1^n P(H_i|A)P(B|AH_i).$$

Задача 3.14. Марина Сергеевна является счастливой обладательницей 20 акций АО ХаХаХа и 10 акций АО УхУхУх. Вероятность получить хоть что-то по акции ОА ХаХаХа равна 0.1, по акции АО УхУхУх — 0.2. Марина Сергеевна подарила соседке одну из своих акций. 1) Найти вероятность того, что эта акция принесет соседке прибыль.
2) Подаренная акция - увы! - так и не принесла никакий прибыли. С какой вероятностью это была акция АО ХаХаХа?

Решение. 1) Пусть H_1 — событие, состоящее в том, что наугад взятая акция является акцией ХаХаХа, H_2 — акцией УхУхУх. Тогда $PH_1 = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}, PH_2 = \frac{1}{3}$, искомая $P(A) = \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 = \frac{4}{30} = 0.1(3)$;
2) $P(H_1|\bar{A}) = \dfrac{\frac{2}{3}(1-p_1)}{\frac{2}{3}(1-p_1) + \frac{1}{3}(1-p_2)} = \frac{9}{13} = 0.692.$ □

Задача 3.15. Сверхсекретное предприятие г.Ухабинска проводит набор на работу. На должность сторожа заявления подали 2 местных жителя и 3 агента Пентагона, на должность завхоза — 4 местных жителя и 5 агентов Пентагона, на должность рядового рабочего — только местные жители. На какую-то из этих должностей приняли одного из желающих, выбранного случайным образом. 1) Найти вероятность того, что на работу взяли местного жителя.
2) По итогам срочно проведенной строжайшей проверки нового рабочего последний оказался действительно местным жителем. Найти вероятность того, что он пошел работать а) сторожем, б) завхозом и в) рядовым рабочим.
3) Такой принцип случайного отбора на работу был признан единственно верным и утвержден для дальнейшего использования. С какой вероятностью следующий срочно отобранный на такую же должность новый сотрудник окажется из Пентагона?

Решение. Пусть H_1 — должность сторожа, H_2 — должность завхоза, H_3 — должность рабочего; тогда $P(H_i) = \frac{1}{3}$. Пусть A — местный, B — из Пентагона. 1) $P(A) = \frac{1}{3}\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{18+20+45}{135} = \frac{83}{135}$
2) $P(H_1|A) = \frac{18}{83}, P(H_2|A) = \frac{20}{83}, P(H_3|A) = \frac{45}{83}$.
3) $P(B|A) = \frac{18}{83}\frac{3}{4} + \frac{20}{83}\frac{5}{8} + 0 = \frac{26}{83}$. □

Задача 3.16. Группа студентов состоит из 5 отличников, 15 хорошистов и 5 троечников. Отличники на экзамене получают пятерку с вероятностью 1, хорошисты — пятерку или четверку равновероятно, а троечники — любую случайную оценку (пятерку, четверку или тройку). Наугад выбирается студент.
1) Чему равна вероятность того, что он получит четверку или пятерку?
2) Этот студент получил пятерку. С какой вероятностью он является а) отличником, б) хорошистом, в) троечником?

Решение. 1) Пусть H_1 — отличник, H_2 — хорошист, H_3 — троечник; тогда $P(H_1) = \frac{1}{5}, P(H_2) = \frac{3}{5}, P(H_3) = \frac{1}{5}$. $P\{4 \text{ или } 5\} = \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5}\frac{2}{3} = \frac{14}{15}$.
2) $P\{\text{отл.}|5\} = \dfrac{\frac{1}{5} \cdot 1}{\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\frac{1}{3}} = \dfrac{30}{5 \cdot 17} = \frac{6}{17}; P\{\text{хор.}|5\} = \dfrac{\frac{3}{5}\frac{1}{2}}{\frac{17}{30}} = \frac{9}{17}; P\{\text{троечн.}|5\} = \frac{2}{17}$. □

Задача 3.17. В предыдущей задаче случайно выбираются два студента. Найти вероятность того, что они получат пятерку и тройку (в любом порядке).

Решение. Пусть $H_1 = $ отл+отл , $H_2 = $ отл+хор , $H_3 = $ отл+уд , $H_4 = $ хор+хор , $H_5 = $ хор+уд , $H_6 = $ уд+уд . Тогда $P\{5 \text{ и } 3|H_i\} \neq 0$ только для H_3, H_5, H_6. $P(H_3) = 2\frac{5}{25}\frac{5}{24} = \frac{1}{12}, P(H_5) = 2\frac{15}{25}\frac{5}{24}, P(H_6) = \frac{5}{25}\frac{4}{24} = \frac{1}{30}$. $P\{5 \text{ и } 3\} = \frac{1}{12}\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{13}\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{79}{1080} = 0.073$. □

Задача 3.18. Имеется 15 экзаменационных билетов, по два вопроса в каждом. Студент выучил только 20 вопросов. Экзамен считается сданным, если студент ответил на оба вопроса своего билета или на один вопрос из своего билета и на оба вопроса из дополнительного билета (по выбору преподавателя). Чему равна вероятность сдачи экзамена?

Решение. Пусть 1 — ответ на вопрос, 0 — неответ; а $H_1 = \{(1,1)\}, H_2 = \{(0,1) + (1,1)\}$. Тогда $P(H_1) = \frac{20 \cdot 19}{30 \cdot 29} = 0.437; P(H_2) = 2\frac{20 \cdot 10}{30 \cdot 29}\frac{19 \cdot 18}{28 \cdot 27} = 0.208; P(A) = P(H_1) + P(H_2) = \frac{1178}{1827} = 0.645$. □

Задача 3.19. Двое по очереди бросают монету. Выигрывает тот, у кого первого выпадет орел. Найти вероятность выигрыша каждого.

Решение. *I сп.:* $P\{\text{выигр.I}\} = \sum\limits_k P\{\text{I выиграет на k-м шаге}\} = \sum\limits_k \frac{1}{4^k}\frac{1}{2} = \frac{1/2}{1-1/4} = \frac{2}{3}$
II сп.: $P\{\text{I}\} = \frac{1}{2}P\{\text{выигр.I}|\text{вып.0 у I}\} + \frac{1}{4}P\{\text{выигр.I}|\text{вып.1 у I и 0 у II}\} + \frac{1}{4}P\{\text{I}\} \Longleftrightarrow P\{\text{I}\} = \frac{2}{3}$. □

Задача 3.20. Господин NN, пытаясь поступить на работу, поочередно ходит на собеседования в две фирмы до тех пор, пока его не примут хоть куда-то. После очередного собеседования на I фирме господину NN дадут работу с вероятностью 0,2, на II фирме — с вероятностью 0,3. Чему равна вероятность того, что NN будет работать на II фирме?

Решение. I сп.: $P\{\text{возьмет II}\} = \sum\limits_k P\{\text{II возьмет после k-го собесед.}\} =$
$\sum\limits_k (1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}(1-p_1)p_2 = \frac{p_2(1-p_1)}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{0.3 \cdot 0.8}{1-0.8 \cdot 0.7} = \frac{6}{11} = 0.(54)$
II сп.: $P\{\text{II}\} = p_1 \cdot 0 + (1-p_1)p_2 \cdot 1 + (1-p_1)(1-p_2)P\{\text{II}\} \Longleftrightarrow P\{\text{II}\} = \frac{0.24}{0.44} = \frac{6}{11}$. □

Теория вероятностей. Четвертый семинар.

Схема Бернулли.

$P_n(m) = P(m$ успехов в n испытаниях $) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где p — вероятность успеха при одном испытании, $q = 1 - p$.

Большое число испытаний в схеме Бернулли (предельные теоремы).

Ф-ла Пуассона: $P_n(m) \approx \dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, где $\lambda = np, e \approx 2.71828$.

Локальная ф-ла Муавра-Лапласа: $P_n(m) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\phi\left(\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ — ф-ция Гаусса, $\phi(-x) = \phi(x)$.

Интегральная ф-ла Муавра-Лапласа: $P_n(m_1 \leq$ число успехов $\leq m_2) = P_n(m_1, m_2) \approx$
$\approx \Phi\left(\dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — ф-ция Лапласа, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Задача 4.1. Для Политолога вероятность застрять в пробке по дороге на работу каждый день одинакова и равна $\frac{1}{3}$. Какова вероятность застрять по дороге на работу a) ровно в 2 пробках в течение 6-дневной рабочей недели? b) не менее чем в 2 пробках? c) Каково наивероятнейшее число пробок?

Решение. a) В этой задаче "успех" — это застревание в пробке, вероятность "успеха при одном испытании" — вероятность застрять в пробке при однократном проезде по дороге, поэтому $p = \frac{1}{3}$, число испытаний равно числу проездов $n = 6$, а искомая вероятность
$P_6(m = 2) = C_6^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{80}{243} = 0.329$;
b) Эту вероятность проще вычислять через вероятность противоположного события, то есть искомая вероятность равная единице минус вероятности событий, которые нам не годятся: $P_6(m \geq 2) = 1 - P_6(0) - P_6(1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^6 - 6\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 = 1 - \dfrac{256}{729} = \dfrac{473}{729} = 0.65$;
c) Наиболее вероятное число успехов m_0 — это целое число в промежутке $[np - q; np + q]$, в данном случае $m_0 = np = 2$. □

Задача 4.2. Согласно известной песне, на 10 девчонок по статистике 9 ребят. В семье 10 детей. Определить вероятность того, что в данной семье a) ровно 5 мальчиков; b) мальчиков не меньше 2, но не больше 9. c) Какое наиболее вероятное число мальчиков?
Найти вероятность того, что среди 190 детей, проживающих в одной многоэтажке, мальчиков d) ровно 70; e) больше 75.

Решение. a) Здесь $p = \frac{9}{19}$, поэтому $P_{10}(5) = C_{10}^5\left(\dfrac{9}{19}\right)^5\left(\dfrac{10}{19}\right)^5$;
b) Такую вероятность лучше считать через противоположное событие $P_{10}(2 \leq m \leq 9) = 1 - P_{10}(0) - P_{10}(1) - P_{10}(10) = 1 - \left(\dfrac{10}{19}\right)^{10} - 10\cdot\dfrac{9}{19}\left(\dfrac{10}{19}\right)^9 - \left(\dfrac{9}{19}\right)^{10}$;
c) Наиболее вероятное число m_0 ищем как в пункте c) предыдущей задачи: $np - q = \dfrac{80}{19} \leq m_0 =$
$= 5 \leq \dfrac{99}{19} = np + p$ (выбираем $m_0 = 5$ как единственное целое число в указанном промежутке).
d) Применим локальную ф-лу Муавра-Лапласа с $\sqrt{npq} \approx 6.88$, $m - np = 70 - 190\cdot\frac{9}{19} = -20$ и получим $P_{190}(70) \approx \dfrac{1}{6.88}\phi\left(\dfrac{-20}{6.88}\right) = 0.15\phi(2.91) = 0.00087$;
e) по интегральной ф-ле Муавра-Лапласа $P_{190}(75 < m < 190) \approx 0.5 + \Phi\left(\dfrac{15}{6.88}\right) = 0.5 + \Phi(2.18) = 0.9854$.
□

Задача 4.3. Клиент корпорации Матрица может получить по почте мобильник (без клавиатуры) с вероятностью 0.005. С какой вероятностью из 600 клиентов Матрицы мобильник получат один или двое?

Решение. Здесь $p = 0.005, n = 600$, число успехов $m = 1$ или $m = 2$ — сравнительно мало, поэтому применим ф-лу Пуассона с $\lambda = np = 3$ и получим $P_{600}(1) + P_{600}(2) = \left(\frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!}\right) e^{-3} = 0.373$. $\square$

Задача 4.4. Что вероятнее выиграть у равносильного теннисиста: больше одного сета из 3 или больше 2 сетов из 4? (В теннисе ничья исключается.)

Решение. Ничья исключается, значит, возможны 2 исхода для каждого сета (выигрыш или проигрыш), которые равновероятны (играют равносильные теннисисты). То есть $p = \frac{1}{2}$. Поэтому $P_3(m > 1) = 1 - P_3(0) - P_3(1) = 0.5$, $P_4(m > 2) = P_3(2) + P_3(3) + P_3(4) = \frac{11}{16} > 0.5$, вероятнее выиграть больше 2 сетов из 4. $\square$

Задача 4.5. Торговый центр Полиглот ежедневно разыгрывает среди покупателей 6 книжек: на английском, китайском, греческом, финском, турецком и сербском языках.
a) Азартный Политолог выиграл в разные дни 4 книжки. С какой вероятностью хотя бы 2 из них написаны на известном ему английском языке?
Теперь он решил набрать таким образом себе англоязычную библиотеку и просит подсчитать, с какой вероятностью из 720 выигранных (в разные дни) книг английских наберется b) ровно 130; c) хотя бы 130; d) не более 127.

Решение. $p = P\{\text{выигранная книжка на английском языке}\} = \dfrac{1}{6}$;
a) $P_4(m \geq 2) = 1 - P_6(0) - P_6(1) = 1 - \frac{125}{144} = \frac{19}{44}$;
b) по локальной ф-ле Муавра-Лапласа $P_{720}(130) \approx \frac{1}{10}\phi(1) = 0.0242$;
c) по интегральной ф-ле Муавра-Лапласа $P_{720}(130 \leq m \leq 720) \approx 0.5 - \Phi(1) = 0.1587$;
d) аналогично $P_{720}(0 \leq m \leq 127) \approx \Phi(0.7) + 0.5 = 0.7580$. $\square$

Задача 4.6. В комнате 4 компьютера. Вероятность исправной работы в течение года для каждого из них равна 0.9. a) Найти вероятность того, что к концу года будут работать ровно 3 компьютера (выбывший из строя до конца года не чинится в связи с отсутствием средств). b) Чему равно наиболее вероятное число работающих в конце года компьютеров?

Решение. $p = P\{\text{компьютер исправно работает}\} = 0.9$; a) $P_4(3) = C_4^3 0.9^3 0.1 = 0.2916$;
b) $np - q = 3.6 - 0.1 = 3.5 \leq m_0 = 4 \leq np + p = 3.6 + 0.9 = 4.5$. $\square$

Задача 4.7. Пирамидка (цифры 1,2,3,4) подбрасыватся четыре раза. Какова вероятность того, что a) не выпадет ни одной четверки? b) цифра 1 выпадет не более трех раз?

Решение. a) $p = P\{\text{выпадет 4 при одном броске}\} = \frac{1}{4}$, тогда $P_4(0) = (\frac{3}{4})^4 = \frac{81}{256}$;
b) $p = P\{\text{выпадет 1 при одном броске}\} = \frac{1}{4}$, тогда $P_4(m \leq 3) = 1 - P_4(4) = 1 - (\frac{1}{4})^4 = \frac{255}{256}$. $\square$

Задача 4.8. Каждый новый продукт, выпущенный фирмой, приносит прибыль с вероятностью $\frac{2}{3}$. В этом году фирма планирует выпуск 6 новых продуктов. a) С какой вероятностью не менее 4 из них окажутся прибыльными для фирмы? b) Какое наиболее вероятное число новых прибыльных продуктов?

Решение. $p = P\{\text{проект прибыльный}\} = \frac{2}{3}$; a) $P_6(m \leq 4) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) =$
$= C_6^4(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^2 + 6(\frac{2}{3})^5\frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^6 = \frac{112}{243}$; b) $m_0 = np = 4$. $\square$

Задача 4.9. Книжка, подаренная покупателю магазина "Библиошарик" во время рекламной акции, может оказаться на языке жителей Марса с вероятностью 0.03. С какой вероятностью не более 2 из 200 осчастливленных покупателей получат книжки на марсианском языке?

Решение. $p = P\{\text{получить марсианскую книжку}\} = 0.03$, число успехов $m = 2$ мало, поэтому применяем ф-лу Пуассона с $\lambda = 6$ и получаем $P_{200}(m \leq 2) = (\frac{6^0}{0!} + \frac{6}{1!} + \frac{6^2}{2!})e^{-6} = 25e^{-6}$. $\square$

Задача 4.10. На вопрос "Как пройти в библиотеку?" каждый человек независимо от других дает вразумительный ответ с вероятностью 0.2. Найти вероятность того, что из 22500 ответов число вразумительных будет a) равно 4620; b) не более 4620; c) не менее 4600.

Решение. $p = P\{\text{ответ вразумительный}\} = 0.2$, $n = 22500$;
a) по локальной ф-ле Муавра-Лапласа $P(4620) \approx \frac{1}{60}\phi(\frac{4620-4500}{60}) = 0.016\phi(2) = 0.000864$;
b) по интегральной ф-ле Муавра-Лапласа $P(m \le 4620) \approx \Phi(2) + 0.5 = 0.9772$;
c) аналогично $P(m \ge 4600) \approx 0.5 - \Phi(1.67) = 0.0475$. □

Задача 4.11. Политолог может проехать на работу по 4 различным дорогам, на одной из которых оплата превышения скорости составляет 30 рублей, на трех других — 50 рублей. Последние 5 дней Политолог ездит на работу по одной и той же дороге. Какова вероятность того, что ему придется заплатить 150 рублей, если он любит быструю езду и попадается на этом с вероятностью $\frac{1}{2}$?

Решение. По ф-ле полной вероятности $P(\text{ отдать 150р. }) =$
$= P\{\text{выбрать дорогу со штрафом в 30р.}\}P\{\text{отдать 5 раз по 30р.}\}+$
$+P\{\text{выбрать дорогу со штрафом в 50р.}\}P(\text{ отдать 3 раза по 50р. }) = \frac{1}{4}C_5^5\frac{1}{2^5} + \frac{3}{4}C_5^3\frac{1}{2^5} = \frac{31}{128}$. □

Задача 4.12. Каждый из двух Опытных политологов представляет по 3 новых политпроекта в квартал. Вероятность того, что проект окажется успешным, равна 0.7 для первого политолога и 0.8 для второго. Найти вероятность того, что в ближайшем квартале у обоих политологов будет равное количество успешных проектов.

Решение. $P\{\text{искомая}\} = P\{\text{0 успешных проектов}\}+ P\{\text{по 1 усп. проекту}\} + P\{\text{по 2 усп. проекта}\}+$
$+P\{\text{по 3 усп. проекта}\} = 0.3^3 0.2^3 + 9 \cdot 0.7 \cdot 0.3^2 0.8 \cdot 0.2^2 + 9 \cdot 0.7^2 0.3 \cdot 0.8^2 0.2 + 0.7^3 0.8^3$. □

Задача 4.13. Некий Политолог носит с собой 2 пачки жевачки (по 20 пластинок в каждой). Каждый раз, когда он хочет достать жевачку, он выбирает наугад одну из пачек. Найти вероятность того, что когда первая пачка опустошится, в другой будет ровно 7 пластинок.

Решение. Всего осталось 7 пластинок, значит, брали жевачку $40 - 7 = 33$ раза, причем из I пачки доставали пластинку ровно 20 раз. $p = P\{\text{достать I пачку}\} = \frac{1}{2}$. Искомая вероятность
$P\{\text{20 из 33 раз брали из I пачки}\} = P_{33}(20) = C_{33}^{20}(\frac{1}{2})^{20}(\frac{1}{2})^{13} = C_{33}^{20}(\frac{1}{2})^{33}$. □

Задача 4.14. Партия ж/к мониторов содержит 1 процент брака. Каков должен быть контрольный объем выборки, чтобы вероятность обнаружить в ней хотя бы один бракованный монитор была не меньше 0.9?

Решение. $p = P\{\text{монитор бракованный}\} = 0.01$, $q = 0.99 = P\{\text{монитор исправный}\}$. Тогда
$P(\text{ хотя бы 1 брак из n }) = 1 - P(\text{ нет брака }) = 1 - 0.99^n$, получаем условие $1 - 0.99^n \ge 0.9$, откуда $n \ge \frac{\ln 0.1}{\ln 0.99} \approx 230$. □

Задача 4.15. Для Молодого и не столь опытного политолога вероятность успешности каждого нового проекта равна 0.4. Сколько проектов Молодой политолог должен разработать, чтобы с вероятностью не менее 0.95 гарантировать себе хотя бы один успешный проект?

Решение. Аналогично предыдущей задаче, получим условие $1 - 0.4^n \ge 0.95$, откуда
$n \ge \frac{\ln 0.05}{\ln 0.4} \approx 3.27$, то есть по крайней мере 4 проекта. □

Задача 4.16. (Задача Дж.Смита, 1693.) Одинаковы ли шансы следующих трех событий: получить хотя бы одну шестерку при бросании игральной кости 3 раза, получить не менее 2 шестерок при 6-кратном бросании игральной кости и получить не менее 3 шестерок при 9-кратном бросании кости?

Решение. $P_1 = 1 - P_3(0) = 1 - \frac{125}{216} \approx 0.421$; $P_2 = 1 - P_6(0) - P_6(1) = 1 - \frac{12281}{46656} \approx 0.263$;
$P_3 = 1 - P_9(0) - P_9(1) - P_9(2) = 1 - \frac{1796446}{10077696} \approx 0.178$. Шансы уменьшаются. □

Теория вероятностей. Пятый семинар.

Случайные величины, их ф-ции распределения и числовые характеристики.

X — **дискретная** случайная величина задается **законом распределения** $\begin{array}{c|c|c} x_1 & \dots & x_n \\ \hline p_1 & \dots & p_n \end{array}$ где $p_i = P(X = x_i)$, $\sum\limits_1^n p_i = 1$.

X — **непрерывная** случайная величина задается **функцией плотности** $f_X(x)$, где $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$.

Функция распределения $F_X(x) = P\{X < x\} =$

$= \sum\limits_{x_k < x} p_k$. | $= \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$, т.е. $f_X(x) = F'_X(x)$.

Свойства: 1) F — неубывающая ф-ция, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;

2) $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$;

| $= \int\limits_a^b f_X(x)dx$, т.е. площадь под графиком f.

Математическое ожидание MX

$MX = \sum\limits_1^n x_i p_i$. | $MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$.

Свойства: 1) $M(Const) = Const$; 2) $M(Const \cdot X) = Const \cdot MX$;

3) $M(X + Y) = MX + MY$;4) $M(XY) = MX \cdot MY$ для независимых X, Y.

Дисперсия $DX = M(X - MX)^2 = MX^2 - (MX)^2$, где

$MX^2 = \sum\limits_1^n x_i^2 p_i$. | $MX^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$.

Свойства: 0) $DX > 0$ всегда!; 1) $D(Const) = 0$; 2) $D(Const \cdot X) = Const^2 \cdot DX$; 3) $D(X + Y) =$
$= DX + DY - 2(M(XY) - MX \cdot MY)$; 3') $D(X + Y) = DX + DY$ для независимых X, Y.

Задача 5.1. Монета подбрасывается один раз. Случайная величина X — число выпадений орла. Построить закон распределения и функцию распределения X; найти MX, DX.

Решение. Закон распределения $\begin{array}{c|c} X=0 & X=1 \\ \hline 0.5 & 0.5 \end{array}$; ф-ция распределения $F_X(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ 0.5, x \in (0; 1], \\ 1, x > 1. \end{cases}$

Математическое ожидание $MX = 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0.5$. Для дисперсии понадобится
$MX^2 = 0^2 \cdot 0.5 + 1^2 \cdot 0.5 = 0.5$. Дисперсия $DX = MX^2 - (MX)^2 = 0.5 - 0.25 = 0.25$. □

Задача 5.2. Монета подбрасывается три раза. Случайная величина X — число выпадений орла. Построить закон распределения и $F_X(x)$; найти MX, DX.

Решение. Закон распределения

$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$0.5^3 = 0.125$	$C_3^1 0.5 \cdot 0.5^2 = 0.375$	$C_3^2 0.5^2 0.5 = 0.375$	$0.5^3 = 0.125$

;

ф-ция распределения $F_X(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ 0.125, x \in (0; 1], \\ 0.5, x \in (1; 2], \\ 0.875, x \in (2; 3], \\ 1, x > 3. \end{cases}$

Математическое ожидание $MX = 0 + 0.375 + 2 \cdot 0.375 + 3 \cdot 0.125 = 1.5$. $MX^2 = 0.375 + 4 \cdot 0.375 + 9 \cdot 0.125 = 3$.
Дисперсия $DX = MX^2 - (MX)^2 = 3 - 2.25 = 0.75$. □

Задача 5.3. В каждом из поединков Нео побивает агента Смита с вероятностью 0.6. Случайная величина X — число побед Нео над Смитом при трех поединках. Построить закон распределения и $F_X(x)$; найти MX, DX.

Решение. Закон распределения

$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$0.4^3 = 0.064$	$3 \cdot 0.6 \cdot 0.4^2 = 0.288$	$3 \cdot 0.6^2 0.4 = 0.432$	$0.6^3 = 0.216$

;

ф-ция распределения $F_X(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ 0.064, x \in (0; 1], \\ 0.352, x \in (1; 2], \\ 0.784, x \in (2; 3], \\ 1, x > 3. \end{cases}$

Математическое ожидание $MX = 0+0.288+2\cdot 0.432+3\cdot 0.216 = 1.8$. $MX^2 = 0.288+4\cdot 0.432+9\cdot 0.216 = 3.96$. Дисперсия $DX = MX^2 - (MX)^2 = 3.96 - 3.24 = 0.72$. □

Задача 5.4. В условиях предыдущей задачи Y — число побед Смита над Нео при трех поединках. Построить законы распределения и функции распределения для Y, $Z = X + Y$ и $W = X - Y$; найти MX, MZ, MW, DX, MW, DW.

Решение. Заметим, что $X + Y = 3$, отсюда легко найти закон распределения $Y = 3 - X$:

$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$
0.216	0.432	0.288	0.064

;

Ф-ция распределения $F_Y(y) = \begin{cases} 0, y \le 0, \\ 0.216, y \in (0;1], \\ 0.648, y \in (1;2], \\ 0.936, y \in (2;3], \\ 1, y > 3. \end{cases}$ Для вычисления MY используем свойства математического ожидания: $MY = M(3 - X) = M(3) - MX = 3 - MX = 1.2$. Аналогично для дисперсии: $DY = D(3 - X) = D(3) + (-1)^2 DX = DX = 0.72$.

Как уже замечено, $Z = X + Y = 3$, ф-ция распределения $F_Z(z) = \begin{cases} 0, z \le 3, \\ 1, z > 3. \end{cases}$, $MZ = M(3) = 3$, $DZ = D(3) = 0$. Заметим, что $D(X + Y) = 3 \ne DX + DY = 1.44$, т.к. X и Y зависимы.

Понятно, что $W = X - Y = 2X - 3$, закон распределения

$W=-3$	$W=-1$	$W=1$	$W=3$
0.064	0.288	0.432	0.216

;

ф-ция распределения $F_W(w) = \begin{cases} 0, w \le -3, \\ 0.064, w \in (-3;-1], \\ 0.352, w \in (-1;1], \\ 0.784, w \in (1;3], \\ 1, w > 3. \end{cases}$, $MW = M(2X - 3) = 2MX - 3 = 0.6$,

$DW = D(2X - 3) = 4DX = 2.88$. □

Задача 5.5. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, x \in [0;2], \\ 0, \text{ иначе }. \end{cases}$. Найти a, $F_X(x)$, MX, DX; найти вероятность $P(X \in [0.5;1])$ и показать ее на графике плотности.

Решение. Для нахождения a используем свойство ф-ции плотности: $1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int\limits_0^2 \frac{1}{a}dt = \frac{x}{a}|_0^2 = \frac{2}{a}$, откуда $a = 2$. Ф-ция распределения $F_X(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ \frac{x}{2}, x \in [0;2], \\ 1, x \ge 2. \end{cases}$ $MX = \int\limits_0^2 x\frac{1}{2}dx = \frac{x^2}{4}|_0^2 = 1$.

$MX^2 = \int\limits_0^2 x^2\frac{1}{2}dx = \frac{x^3}{6}|_0^2 = \frac{4}{3}$. $DX = MX^2 - M^2X = \frac{1}{3}$. $P(X \in [0.5;1]) = \int\limits_{0.5}^1 \frac{1}{2}dx = \frac{x}{2}|_{0.5}^1 = \frac{1}{4}$ — площадь под графиком $f_X(x)$ между прямыми $x = 0.5$ и $x = 1$. □

Задача 5.6. (**Равномерное распределение.**) Случайная величина X имеет ф-цию распределения $F_X(x) = \begin{cases} 0, x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, x \in [a;b], \\ 1, x \ge b. \end{cases}$. Найти $f_X(x)$, MX, DX.

Решение. Плотность $f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a;b], \\ 0, \text{ иначе }. \end{cases}$ $MX = \int\limits_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}|_a^b = \frac{b+a}{2}$.

$MX^2 = \int\limits_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}|_a^b = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$. $DX = MX^2 - M^2X = \frac{(a-b)^2}{12}$. □

Задача 5.7. Из 2 эльфов и 4 гномов случайным образом выбирают двух для поездки в Новую Зеландию. Случайная величина X — число эльфов, которых осчастливят поездкой, Y — число осчастливленных гномов. Построить законы распределения и функции распределения для X, Y, $Z = X + Y$ и $W = X - Y$; найти их матем. ожидания и дисперсии.

Решение. Закон распределения для X: $\begin{array}{c|c|c} X=0 & X=1 & X=2 \\ \hline \frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15} & \frac{2\cdot 4}{C_6^2}=\frac{8}{15} & \frac{1}{C_6^2}=\frac{1}{15} \end{array}$; ф-ция распределения

$F_X(x)=\begin{cases} 0, x\le 0, \\ 6/15, x\in(0;1], \\ 14/15, x\in(1;2], \\ 1, x>2. \end{cases}$ $MX=\frac{8}{15}+\frac{2}{15}=\frac{2}{3}$. $MX^2=\frac{8}{15}+\frac{4}{15}=\frac{4}{5}$. $DX=MX^2-(MX)^2=\frac{16}{45}$.

Аналогично задаче 5.4 заметим, что $X+Y=2$, откуда легко найти закон распределения $Y=2-X$, Ф-цию распределения $F_Y(y)$; $MY=M(2-X)=2-MX=\frac{4}{3}$; $DY=D(2-X)=DX=\frac{16}{45}$.
Из равенства $Z=X+Y=2$ легко находится ф-ция распределения $F_Z(z)$, $MZ=2$, $DZ=0$.

Так как $W=X-Y=2X-2$, закон распределения $\begin{array}{c|c|c} W=-2 & W=0 & W=2 \\ \hline 6/15 & 8/15 & 1/15 \end{array}$;

ф-ция распределения строится аналогично; $MW=M(2X-2)=2MX-2=-\frac{2}{3}$,
$DW=D(2X-2)=4DX=\frac{64}{45}$. □

Задача 5.8. Задание то же, что в предыдущей задаче, но выбирать приходится из 2 эльфов, 4 гномов и 1 хоббита.

Решение. Закон распределения для X: $\begin{array}{c|c|c} X=0 & X=1 & X=2 \\ \hline \frac{C_5^2}{C_7^2}=\frac{10}{21} & \frac{2\cdot 5}{C_7^2}=\frac{10}{21} & \frac{1}{C_7^2}=\frac{1}{21} \end{array}$; ф-ция распределения

$F_X(x)=\begin{cases} 0, x\le 0, \\ 10/21, x\in(0;1], \\ 20/21, x\in(1;2], \\ 1, x>2. \end{cases}$ $MX=\frac{10}{21}+\frac{2}{21}=\frac{4}{7}$. $MX^2=\frac{10}{21}+\frac{4}{21}=\frac{2}{3}$. $DX=MX^2-(MX)^2=\frac{50}{147}$.

В этой задаче прямой зависимости между X и Y не прослеживается. Закон распределения для Y:

$\begin{array}{c|c|c} Y=0 & Y=1 & Y=2 \\ \hline \frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{7} & \frac{4\cdot 3}{C_7^2}=\frac{4}{7} & \frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{3}{7} \end{array}$; ф-ция распределения $F_Y(y)=\begin{cases} 0, y\le 0, \\ 1/7, y\in(0;1], \\ 5/7, y\in(1;2], \\ 1, y>2. \end{cases}$

$MY=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}=\frac{8}{7}$. $MY^2=\frac{4}{7}+\frac{8}{7}=\frac{12}{7}$. $DY=MY^2-(MY)^2=\frac{20}{49}$.
Чтобы построить законы распределения для $Z=X+Y$ и $W=X-Y$, рассмотрим все возможные выборки ("Э"— эльф, "Г"— гном, "Х"— хоббит), их вероятности и значения случайных величин:

ЭЭ	$p=1/21$	$X=2$	$Y=0$	$X+Y=2$	$X-Y=2$
ЭГ	$p=8/21$	$X=1$	$Y=1$	$X+Y=2$	$X-Y=0$
ГГ	$p=6/21$	$X=0$	$Y=2$	$X+Y=2$	$X-Y=-2$
ЭХ	$p=2/21$	$X=1$	$Y=0$	$X+Y=1$	$X-Y=1$
ГХ	$p=4/21$	$X=0$	$Y=1$	$X+Y=1$	$X-Y=-1$

Теперь видно, что закон распределения Z: $\begin{array}{c|c} Z=1 & Z=2 \\ \hline 2/7 & 5/7 \end{array}$; откуда $MZ=M(X+Y)=MX+MY=\frac{12}{7}$.
$MZ^2=\frac{2}{7}+\frac{20}{7}=\frac{22}{7}$; $DZ=MZ^2-(MZ)^2=\frac{120}{49}$.
Закон распределения W: $\begin{array}{c|c|c|c|c} W=-2 & W=-1 & W=0 & W=1 & W=2 \\ \hline 6/21 & 4/21 & 8/21 & 2/21 & 1/21 \end{array}$;
$MW=M(X-Y)=MX-MY=\frac{4}{7}$. $MW^2=\frac{24+4+2+4}{21}=\frac{34}{21}$; $DW=MW^2-(MW)^2=\frac{190}{147}$. □

Задача 5.9. Монета подбрасывается три раза. За каждый выпавший герб Игроку выплачивают 1 руб., за каждую выпавшую решку Игрок платит 1 руб. Случайная величина X — суммарный выигрыш Игрока. Построить закон распределения и F_X; найти MX, DX.

Решение. Закон распределения для X: $\begin{array}{c|c|c|c} X=-3 & X=-1 & X=1 & X=3 \\ \hline \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$;
$MX=0$. $MX^2=\frac{9+3+3+9}{8}=3$, $DX=MX^2-(MX)^2=3$. □

Задача 5.10. Игральная кость бросается 4 раза. Случайная величина X — число выпадений очков, кратных трем. Построить закон распределения и F_X; найти MX, DX.

Решение. При однократном бросании игральной кости $P\{$выпало число, кратное 3$\}=\frac{1}{3}$. Закон распределения для X строим с использованием схемы Бернулли:

$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$
$(\frac{2}{3})^4=\frac{16}{81}$	$4\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^3=\frac{32}{81}$	$6(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2=\frac{24}{81}$	$4(\frac{1}{3})^3\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$	$(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{81}$

;

$MX=\frac{4}{3}$. $MX^2=\frac{8}{3}$; $DX=MX^2-(MX)^2=\frac{8}{9}$. □

Задача 5.11. Нео стреляет по агенту Смиту до первого попадания. У Нео один револьвер с 6 пулями. При каждом из выстрелов вероятность попасть равна 0.3. Случайная величина X — число неизрасходованных патронов. Построить закон распределения и F_X; найти MX, DX.

Решение. Закон распределения для X:

$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$
0.3	$0.7\cdot 0.3=0.21$	$0.7^2 0.3=0.147$	$0.7^3 0.3=0.1029$	$0.7^4 0.3=0.07203$	$0.7^5 0.3+0.7^6=0.16807$

;

$MX=3.05883$. $MX^2=12.66663$; $DX=MX^2-(MX)^2=3.31019$. □

Задача 5.12. Петька и Василий Иванович смотрят очередную Матрицу. Они поспорили, кто из героев более метко стреляет. Они договорились, что тот, чей герой попадет в своего противника, получает рубль от товарища. Петька ставит на Нео, Василий Иванович — на агента Смита. Нео и агент Смит одновременно стреляют друг в друга (по одному разу), вероятность попадания для каждого из них на самом деле равна 0.3. Случайная величина X — выигрыш Петьки в таком пари. Построить закон распределения и F_X; найти MX, DX.

Решение. Рассмотрим все исходы поединка:
1) $P\{$Нео промахнулся, Смит промахнулся$\}=0.7\cdot 0.7=0.49$, никто ничего не получает, $X=0$;
2) $P\{$Нео промахнулся, Смит попал$\}=0.7\cdot 0.3=0.21$, Петька отдал 1 рубль, $X=-1$;
3) $P\{$Нео попал, Смит промахнулся$\}=0.3\cdot 0.7=0.21$, Петька получил 1 рубль, $X=1$;
4) $P\{$Нео попал, Смит попал$\}=0.3\cdot 0.3=0.09$, Петька получил 1 рубль, но и отдал рубль, $X=0$.

Закон распределения для X:

$X=-1$	$X=0$	$X=1$
0.21	0.58	0.21

;

$MX=-0.21+0.21=0$. $MX^2=0.21+0.21=0.42$. $DX=MX^2-(MX)^2=0.42$. □

Задача 5.13. Торговец книгами продает "Энциклопедию растениевыводства" за 10 руб. и две книги "Популярное дымоводство" по 20 руб. каждая. Вероятность продать "Энциклопедию" равна 0.5, "Дымоводство" — 0.3. Случайная величина X — суммарная выручка торговца. Построить закон распределения и F_X; найти MX, DX.

Решение. Рассмотрим все исходы торговли ("Э"— Энциклопедия, "Д"— Дымоводство):

Э прод., Д не прод.	$p=0.5\cdot 0.3=0.15$	$X=30$
Э не прод, Д прод.	$p=0.5\cdot 0.3=0.15$	$X=20$
Э прод., Д не прод.	$p=0.5\cdot 0.7=0.35$	$X=10$
Э не прод., Д не прод.	$p=0.5\cdot 0.7=0.35$	$X=0$

Закон распределения для X:

$X=0$	$X=10$	$X=20$	$X=30$
0.15	0.15	0.35	0.35

;

$MX=3.5+3+4.5=11$. $MX^2=35+60+135=230$. $DX=MX^2-(MX)^2=109$. □

Задача 5.14. Продавец пытается реализовать два DVD "Без матрицы" и "Matrix X" стоимостью 100 руб. каждый. Для любого из этих DVD вероятность его продажи равна 0.2. Случайная величина X — выручка от продажи, Y — цена непроданного товара. Построить законы распределения и функции распределения для случайных величин $Z=X+Y, W=X-Y$; найти их математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Закон распределения для X:

$X=0$	$X=100$	$X=200$
$0.8^2=0.64$	$2\cdot 0.8\cdot 0.2=0.32$	$0.2\cdot 0.2=0.04$

;

$MX=32+8=40$. $MX^2=3200+1600=4800$, $DX=MX^2-(MX)^2=3200$. Аналогично задаче 5.4, $X+Y=200$, то есть $Y=200-X$, откуда $MY=M(200-X)=160$; $D(200-X)=DX=3200$. □

Задача 5.15. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)=\begin{cases} ax^2, x\in[1;2], \\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$. Найти a, $F_X(x)$, MX, DX; найти вероятность $P(X\in[1;1.5])$ и показать ее на графике плотности.

Решение. Аналогично задаче 5.5 для нахождения a используем свойство ф-ции плотности:
$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = a\int\limits_1^2 x^2dx = a\frac{x^3}{3}|_1^2 = \frac{7a}{3}$, откуда $a = \frac{3}{7}$.

Ф-ция распределения $F_X(x) = \begin{cases} 0, x \le 1, \\ \frac{3}{7}\int\limits_1^x t^2dt = \frac{x^3-1}{7}, x \in [1;2], \\ 1, x \ge 2. \end{cases}$ $MX = \frac{3}{7}\int\limits_1^2 x^3dx = \frac{45}{28} \approx 1.607.$

$MX^2 = \frac{3}{7}\int\limits_1^2 x^4dx = \frac{93}{35} \approx 2.657$. $DX = MX^2 - M^2X \approx 0.074$. $P(X \in [1;1.5]) = \frac{3}{7}\int\limits_1^{1.5} x^2dx = \frac{x^3}{7}|_1^{1.5} \approx 0.34$ — площадь под графиком $f_X(x)$ между прямыми $x = 1$ и $x = 1.5$. □

Задача 5.16. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2, x \in [1;4], \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$. Найти a, $F_X(x)$, MX, DX; найти вероятность $P(X \in [2;3])$ и показать ее на графике.

Решение. Для нахождения a используем свойство ф-ции плотности:
$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = a\int\limits_1^4 (x-1)^2dx = a\frac{(x-1)^3}{3}|_1^4 = \frac{27a}{3} = 9a$, откуда $a = \frac{1}{9}$.

Ф-ция распределения $F_X(x) = \begin{cases} 0, x \le 1, \\ \frac{1}{9}\int\limits_1^x (t-1)^2dt = \frac{(x-1)^3}{27}, x \in [1;4], \\ 1, x \ge 4. \end{cases}$ $MX = \frac{1}{9}\int\limits_1^4 x(x-1)^2dx \approx 3.25.$

$MX^2 = \frac{1}{9}\int\limits_1^4 x^2(x-1)^2dx \approx 12.07$. $DX = MX^2 - M^2X \approx 1.504$. $P(X \in [2;3]) = \frac{1}{9}\int\limits_2^3 (x-1)^2dx = \frac{(x-1)^3}{27}|_2^3 = \frac{7}{27}$ — площадь под графиком $f_X(x)$ между прямыми $x = 2$ и $x = 3$. □

Задача 5.17. (**Нормальное распределение.**) Текущая цена акции компании "Морпзаг" подчиняется нормальному распределению с математическим ожиданием 40\$ и средним квадратическим отклонением 20\$. Найдите вероятность того, что цена акции окажется
а) в пределах от 30 до 80\$; б) не выше 20\$ и покажите эти вероятности на графике плотности.
С помощью правила трех сигм найдите границы текущей цены акции.

Решение. Напомним, что для нормально распределенной случайной величины $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$ (то есть с матем. ожиданием m и дисперсией σ^2) вероятность $P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — ф-ция Лапласа, табличная, со свойством $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

В данной задаче $X \sim \mathcal{N}(40, 20)$, а) $P(30 \le X \le 80) = \Phi\left(\frac{80-40}{20}\right) - \Phi\left(\frac{30-40}{20}\right) = \Phi(2) - \Phi(-0.5) =$
$= \Phi(2) + \Phi(0.5) = 0.4772 + 0.1915 = 0.6687$ — площадь под "шапочкой" (с максимумом при $x = 40$) графика плотности нормального распределения между прямыми $x = 30$ и $x = 80$.
b) $P(X \le 20) = \Phi\left(\frac{20-40}{20}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty}{20}\right) = \Phi(1) + 0.5 = 0.3413$ — площадь под графиком плотности нормального распределения левее прямой $x = 20$.
Напомним **правило трех сигм**: для случайной величины $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$ вероятность
$P(X \in (m-3\sigma, m+3\sigma)) = 2\Phi(3) \approx 0.9973$, т.е. вероятность не попасть в указанный промежуток очень мала. Значит, в нашей задаче $P(X \in (20,60)) \approx 0.9973$, т.е. цена акции почти наверняка лежит в промежутке от 20\$ до 60\$. □

Задача 5.18. Вашей фирме стало известно, что цена акции конкурирующей компании подчинена нормальному распределению, а также что вероятность ее стоимости меньше 1.06\$ считается равной 0.15, а вероятность стоимости больше 3.38\$ равна 0.1. Найдите параметры распределения цены акции. С помощью правила трех сигм оцените возможные изменения этой цены.

Решение. Поскольку $X \sim \mathcal{N}(a,\sigma)$, искомые параметры — это a и σ.
Согласно первому условию на цену акции $0.15 = P(X < 1.06) = \Phi\left(\frac{0.6-m}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) =$

$= \Phi\left(\frac{0.6-m}{\sigma}\right) + 0.5$, откуда $\Phi\left(\frac{0.6-m}{\sigma}\right) = -0.35$, т.е. $\Phi\left(-\frac{0.6-m}{\sigma}\right) = 0.35$. По таблице значений Φ находим $-\frac{0.6-m}{\sigma} \approx 1.04$, получаем уравнение $m - 0.6 = 1.04\sigma$.

Согласно второму условию на цену акции $0.1 = P(X > 3.38) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{3.38-m}{\sigma}\right) =$
$= 0.5 - \Phi\left(\frac{3.38-m}{\sigma}\right)$, откуда $\Phi\left(\frac{3.38-m}{\sigma}\right) = 0.4$. По таблице значений Φ находим $\frac{3.38-m}{\sigma} \approx 1.28$, получаем уравнение $3.38 - m = 1.28\sigma$.
Решая полученную систему из двух уравнений, находим $\sigma \approx 1, m \approx 2.1$.
Согласно правилу трех сигм $P(X \in (2.1-3, 2.1+3)) = P(X \in (-0.9, 5.1)) \approx 0.9973$, т.е. цена акции почти наверняка лежит в промежутке от -0.9$ до 5.1$. □

Задача 5.19. Внутренний рынок Хоббитании стабилен, если курс ходоллара будет колебаться в пределах от z_1 до z_2 золотых. Курс ходоллара имеет нормальное распределение со средним $\frac{z_1+z_2}{2}$ и средним квадратическим отклонением $\frac{z_2-z_1}{4}$. С какой вероятностью на внутренний рынок Хоббитании обрушится кризис?

Решение. Случайная величина $X \sim \mathcal{N}\left(\frac{z_1+z_2}{2}, \frac{z_2-z_1}{4}\right)$ — курс ходоллара. $P\{\text{кризиса}\} =$
$= 1 - P(z_1 < X < z_2) = 1 - [\Phi\left(\frac{z_2-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{z_1-m}{\sigma}\right)] = 1 - 2\Phi\left(\frac{4(z_2-z_1)}{2(z_2-z_1)}\right) = 1 - 2\Phi(2) \approx 1 - 0.9544 =$
0.0456. □

Задача 5.20. В день на биржевых торгах Хоббитании продают акции в среднем на a ходолларов. Фактически ежедневная сумма сделок подчинена нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = \frac{a}{2}$. Каковы вероятности событий: A — за день продано акций более, чем на $1.2a$ ходолларов;
B — за день продано акций на сумму от $0.5a$ до $1.2a$ ходолларов;
C — в последние 3 дня за какой-то день продано акций менее, чем на $0.5a$, а за каждый из остальных — более, чем на $0.5a$ ходолларов.

Решение. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}\left(a, \frac{a}{2}\right)$ — сумма сделок за день.

$P(A) = P(X > 1.2a) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{0.2a}{a/2}\right) = 0.5 - \Phi(0.4) = 0.3446$.

$P(B) = P(0.5a < X < 1.2a) = \Phi\left(\frac{0.2a}{a/2}\right) - \Phi\left(-\frac{0.5a}{a/2}\right) = \Phi(0.4) + \Phi(1) = 0.4967$.

Обозначим $p_0 = P(X < 0.5a) = \Phi\left(-\frac{0.5a}{a/2}\right) - \Phi(-\infty) == -\Phi(1) + 0.5 = 0.1587$, тогда по ф-ле Бернулли $P(C) = C_3^1 p_0 (1-p_0)^2 \approx 0.34$. □

Теория вероятностей. Шестой семинар.

Ковариация и корреляция.

Ковариацией двух случайных величин (X, Y) называется

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = M((X - MX)(Y - MY)) = M(XY) - MX \cdot MY.$$

Свойства ковариации: 1) $\mathrm{Cov}(CX,Y) = C \cdot \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,CY)$; 2) $\mathrm{Cov}(X+Y,Z) = \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(Y,Z)$, $\mathrm{Cov}(X,Y+Z) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Z)$; 3) если X, Y — независимые случайные величины, то $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Обратное неверно (см. задачу 6.1).

Коэффициентом корреляции называется $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$.
Ковариация и корреляция характеризуют *линейную* зависимость.
Свойства: 1) $Y = aX + b \Longrightarrow \rho(X,Y) = sign(a)$; 2) $|\rho(X,Y)| \le 1$, $|\rho(X,Y)| = 1 \Longleftrightarrow X, Y$ — линейно зависимы;
3) X, Y — независимые случайные величины $\Longrightarrow \rho(X,Y) = 0$.

Задача 6.1. Случайная величина X имеет закон распределения

x_i	-2	-1	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Случайная величина $Y = X^2$. Найдите $\mathrm{Cov}(X,Y)$ и $\rho(X,Y)$.

Решение. $MX = -\frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = 0$. Закон распределения для Y:

(x_i, y_j)	1	4
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

и $MY = \frac{5}{2}$. Совместный закон распределения (X,Y) имеет вид

(x_i, y_j)	$(-2,4)$	$(-1,1)$	$(1,1)$	$(2,4)$
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

поэтому $M(XY) = -8 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} = 0$. Тогда $\mathrm{Cov}(X,Y) = M(XY) - MX \cdot MY = 0$ и $\rho(X,Y) = 0$. Заметим, что по условию X и Y, очевидно, не являются независимыми случайными величинами, они независимы *линейно*. $\square$

Задача 6.2. Из двух кандидатов из Суздаля и трех из Владимира сначала выбирают менеджера, а затем секретаря. а) Случайная величина X — число менеджеров из Владимира, Y — число секретарей из Владимира.
б) Случайная величина X — число менеджеров из Владимира, Y — число менеджеров из Суздаля.
в) Случайная величина X — число менеджеров из Владимира, Y — число секретарей из Суздаля. В каждом из случаев найти $\rho(X,Y)$.

Решение. Все возможные случаи запишем в виде таблицы ("В" — владимирец, "С" — суздалец), в которой для пунктов a-c проставлены значения X и Y:

менеджер	секретарь	вероятность	a	b	c
B	B	$(3/5) \cdot (2/4) = 0.3$	$X = 1, Y = 1$	$X = 1, Y = 0$	$X = 1, Y = 0$
B	C	$(3/5) \cdot (2/4) = 0.3$	$X = 1, Y = 0$	$X = 1, Y = 0$	$X = 1, Y = 1$
C	B	$(2/5) \cdot (3/4) = 0.3$	$X = 0, Y = 1$	$X = 0, Y = 1$	$X = 0, Y = 0$
C	C	$(2/5) \cdot (1/4) = 0.1$	$X = 0, Y = 0$	$X = 0, Y = 1$	$X = 0, Y = 1$

Дальше каждый пункт рассматриваем в отдельности.
а) $MX = 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.1 = 0.6$, $MY = 1 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.1 = 0.6$, $M(XY) = 1 \cdot 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0 \cdot 0.3 + 0 \cdot 1 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0 \cdot 0.1 = 0.3$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = M(XY) - MX \cdot MY = 0.3 - 0.36 = -0.06$. $MX^2 = 0.6 = MY^2$, $DX = DY = 0.6 - 0.36 = 0.24$, поэтому $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = -\dfrac{0.06}{0.24} = -0.25$.
b) Заметим, что случайная величина X такая же, как в а), и что теперь $X + Y = 1$. То есть X и Y обратно линейно зависимы ("обратно" означает убывание Y с ростом X, и наоборот), тогда по св-вам корреляции $\rho(X,Y) = -1$. Проверим это. В п.а) посчитано, что $MX = 0.6$, $DX = 0.24$. По св-вам матем. ожидания и дисперсии получим $MY = M(1 - X) = 1 - MX = 0.4$, $DY = D(1 - DX) = DX = 0.24$. Из таблицы имеем $M(XY) = 0$, поэтому $\mathrm{Cov}(X,Y) = -0.24$, $\rho(X,Y) = -\dfrac{0.24}{0.24} = -1$.
c) Случайная веоичина X не изменилась, $MX = 0.6$, $DX = 0.24$. По таблице находим $MY = MY^2 = 0.4$, $DY = 0.24$, $M(XY) = 0.3$, откуда $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.3 - 0.24 = 0.06$, $\rho(X,Y) = \dfrac{0.06}{0.24} = 0.25$. $\square$

Задача 6.3. Известно, что нефть есть только на 4 из 12 участков, но на каких именно — неизвестно. Компании A и B делают по одной пробной скважине (на разных участках). Случайная величина X — число скважин с нефтью у компании A, Y — число скважин с нефтью у компании B. Найти $\rho(X,Y)$.

Решение. Все возможные случаи запишем в виде таблицы ("Н" — нефтяной участок, "БН" — участок без нефти):

компания A	компания B	вероятность	
Н	Н	$(4/12)\cdot(3/11) = 3/33$	$X=1, Y=1$
Н	БН	$(4/12)\cdot(8/11) = 8/33$	$X=1, Y=0$
БН	Н	$(8/12)\cdot(4/11) = 8/33$	$X=0, Y=1$
БН	БН	$(8/12)\cdot(7/11) = 14/33$	$X=0, Y=0$

Тогда $MX = MY = \dfrac{11}{33} = \dfrac{1}{3}$, $MX^2 = MY^2 = \dfrac{1}{3}$, $DX = DY = \dfrac{2}{9}$, $M(XY) = \dfrac{3}{33} = \dfrac{1}{11}$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{9} = -\dfrac{2}{99}$, $\rho(X,Y) = -\dfrac{2\cdot 9}{99\cdot 2} = -\dfrac{1}{11}$. □

Задача 6.4. Бросают 2 игральные кости. Случайные величины $X = \begin{cases} 1, & \text{если сумма выпавших очков четна,} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$ $Y = \begin{cases} 1, & \text{если произведение выпавших очков четно,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$
Найти $\rho(X,Y)$.

Решение. Нам важно не выпавшее число, а только его четность. Все возможные случаи запишем в виде таблицы ("Ч" — выпало четное число, "НЧ" — выпало нечетное число):

на I кости	на II кости	вероятность	
Ч	Ч	$(3/6)\cdot(3/6) = 1/4$	$X=1, Y=1$
Ч	НЧ	$(3/6)\cdot(3/6) = 1/4$	$X=0, Y=1$
НЧ	Ч	$(3/6)\cdot(3/6) = 1/4$	$X=0, Y=1$
НЧ	НЧ	$(3/6)\cdot(3/6) = 1/4$	$X=1, Y=0$

Тогда $MX = MX^2 = \dfrac{1}{2}$, $DX = \dfrac{1}{4}$, $MY = MY^2 = \dfrac{3}{4}$, $DY = \dfrac{9}{16}$, $M(XY) = \dfrac{1}{4}$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{8} = -\dfrac{1}{8}$, $\rho(X,Y) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. □

Задача 6.5. Пусть X, Y, U, V — случайные величины, которые равны
X — количеству свадеб в течение одного месяца; Y — количеству детей, рожденных в течение одного месяца; U — количеству купленных бутылок шампанского в течение одного месяца; V — средней производительности труда в течение одного месяца.
Были найдены корреляция $\rho(X,Y) = 0.7$ и зависимости $U = 100+3X$, $V = 1-0.5Y$. Найти корреляцию между количеством купленных бутылок шампанского и средней производительностью труда в течение месяца.

Решение. Воспользуемся свойствами ковариации: $\mathrm{Cov}(U,V) = \mathrm{Cov}(100+3X, 1-0.5Y) = \mathrm{Cov}(100,1) + \mathrm{Cov}(100,-0.5Y) + \mathrm{Cov}(3X,1) + \mathrm{Cov}(3X,-0.5Y) = 0+0+0-3\cdot 0.5\mathrm{Cov}(X,Y) = -1.5\mathrm{Cov}(X,Y)$, и свойствами дисперсии: $DU\cdot DV = D(100+3X)D(1-0.5Y) = 9DX\cdot 0.25DY$, откуда $\sqrt{DU\cdot DV} = 1.5\sqrt{DX\cdot DY}$. Поэтому $\rho(U,V) = \dfrac{-1.5\mathrm{Cov}(X,Y)}{1.5\sqrt{DX\cdot DY}} = -\rho(X,Y) = -0.7$. □

Матрица ковариаций случайных величин $X_1,\dots,X_n$ — матрица, состоящая из попарных ковариаций этих случайных величин:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X_1,X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \dots & \mathrm{Cov}(X_1,X_n) \\ \vdots & & & \\ \mathrm{Cov}(X_n,X_1) & \mathrm{Cov}(X_n,X_2) & \dots & \mathrm{Cov}(X_n,X_n) \end{pmatrix}$$

Здесь по диагонали стоят $\mathrm{Cov}(X_i,X_i) = M(X_iX_i) - MX_iMX_i = DX_i$, т.е. дисперсии.
Аналогично определяется **матрица корреляций**. В ней по диагонали стоят $\rho(X_i,X_i) = 1$.

Задача 6.6. Построить матрицы ковариаций и корреляций для задач 6.2-6.4.

Решение. Построим эти матрицы для задачи 6.2а).
Матрица ковариаций: $\begin{pmatrix} DX & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(Y,X) & DY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.24 & -0.06 \\ -0.06 & 0.24 \end{pmatrix}$

Матрица корреляций: $\begin{pmatrix} 1 & \rho(X,Y) \\ \rho(Y,X) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.25 \\ -0.25 & 1 \end{pmatrix}$

Для остальных задач аналогично. □

Задача 6.7. В депутатском гараже стоят 9 Мерседесов и 1 Запорожец. В гараж один за другим приходят 3 депутата. Случайная величина $X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-му депутату дадут Мерседес,} \\ 0, & \text{если ему дадут Запорожец.} \end{cases}$

Постоить матрицы ковариаций и корреляций случайных величин X_1, X_2, X_3.

Решение. Все возможные случаи запишем в виде таблицы ("М" — депутату достался Мерседес, "З" — депутату достался Запорожец):

I депутат	II депутат	III депутат	вероятность	
М	М	М	$(9/10)\cdot(8/9)\cdot(7/8) = 0.7$	$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1$
М	М	З	$(9/10)\cdot(8/9)\cdot(1/8) = 0.1$	$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0$
М	З	М	$(9/10)\cdot(1/9)\cdot(8/8) = 0.1$	$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1$
З	М	М	$(1/10)\cdot(9/9)\cdot(8/8) = 0.1$	$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1$

Тогда $MX_1 = MX_2 = MX_3 = MX_1^2 = MX_2^2 = MX_3^2 = 0.9$, $DX_1 = DX_2 = DX_3 = 0.9 - 0.81 = 0.09$, $M(X_1X_2) = M(X_1X_3) = M(X_2X_3) = 0.8$, $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathrm{Cov}(X_1,X_3) = \mathrm{Cov}(X_2,X_3) = 0.8 - 0.81 = -0.01$, $\rho(X_1,X_2) = \rho(X_1,X_3) = \rho(X_2,X_3) = -\dfrac{0.01}{0.09} = -\dfrac{1}{9}$.

Матрица ковариаций: $\begin{pmatrix} 0.09 & -0.01 & -0.01 \\ -0.01 & 0.09 & -0.01 \\ -0.01 & -0.01 & 0.09 \end{pmatrix}$ Матрица корреляций: $\begin{pmatrix} 1 & -1/9 & -1/9 \\ -1/9 & 1 & -1/9 \\ -1/9 & -1/9 & 1 \end{pmatrix}$ □

Задача 6.8. Крупная компания стремится монополизировать рынок, пытаясь купить одну за другой три фирмы через подставных лиц. Известно, что владельцы первой фирмы согласятся ее продать с вероятностью 0.1, второй фирмы — с вероятностью 0.5, третьей фирмы — с вероятностью 0.3.

Случайная величина $X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я фирма куплена,} \\ 0, & \text{иначе .} \end{cases}$

1) Построить матрицу корреляций величин X_1, X_2, X_3.

2) Та же задача, но у крупной компании есть деньги для покупки только двух фирм.

Решение. a) Из условия видно, что фирмы покупаются независимо друг от друга, поэтому $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathrm{Cov}(X_1,X_3) = \mathrm{Cov}(X_2,X_3) = 0 = \rho(X_1,X_2) = \rho(X_1,X_3) = \rho(X_2,X_3)$. Для построения матрицы ковариации нужны дисперсии. $MX_1 = 0\cdot P(X_1 = 0) + 1\cdot P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1) = P\{\text{первая фирма куплена}\} = 0.1$, $MX_1^2 = 0.1$, $DX_1 = 0.1 - 0.01 = 0.09$. Точно так же получим $MX_2 = 0.5 = MX_2^2$, $DX_2 = 0.25$, $MX_3 = 0.3 = MX_3^2$, $DX_3 = 0.21$. Матрица ковариаций: $\begin{pmatrix} 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.21 \end{pmatrix}$ Матрица корреляций: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Для первых двух фирм все по-прежнему и $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = 0 = \rho(X_1,X_2)$. Но теперь уже покупка третьей фирмы зависит от покупки первых двух, поскольку все три фирмы куплены быть не могут. $MX_3 = MX_3^2 = P(X_3 = 1) = P\{\text{куплена только одна из фирм I и II}\}P\{\text{куплена III фирма}\} = (1 - 0.1\cdot 0.5)\cdot 0.3 = 0.285$, $DX_3 \approx 0.204$.

$M(X_1X_3) = P\{\text{I и III фирмы куплены, II нет}\} = 0.1\cdot 0.5\cdot 0.3 = 0.015$,

$M(X_2X_3) = P\{\text{II и III фирмы куплены, I нет}\} = 0.9\cdot 0.5\cdot 0.3 = 0.135$,

$\mathrm{Cov}(X_1,X_3) = 0.015 - 0.285\cdot 0.1 \approx -0.014$, $\mathrm{Cov}(X_2,X_3) = 0.135 - 0.285\cdot 0.5 = -0.0075$,

$\rho(X_1,X_3) \approx -0.103$, $\rho(X_2,X_3) \approx -0.033$.

Матрица ковариаций: $\begin{pmatrix} 0.09 & 0 & -0.014 \\ 0 & 0.25 & -0.0075 \\ -0.014 & -0.0075 & 0.204 \end{pmatrix}$ Матрица корреляций:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.103 \\ 0 & 1 & -0.033 \\ -0.103 & -0.033 & 1 \end{pmatrix}$ □