

Содержание

1	Лекция 1	2
1.1	Расписание и формат обучения	2
1.2	Комментарии к первой лабораторной работе	2
1.3	Погрешности и устойчивость	2
1.4	Модели на основе ОДУ	3
1.5	Явные методы Рунге-Кутта	3
1.5.1	Метод Эйлера ($p=1$)	4
1.5.2	Численный метод Рунге-Кутта ($p=2$)	4
1.5.3	Метод Пикара (приближённый аналитический метод)	4
2	Лекция 2	6
2.1	Геометрическое истолкование полученных результатов	6
2.2	Методы Рунге-Кутта 4-го порядка точности	7
2.3	Замечания о методах Рунге-Кутта	8
2.4	Распространение метода Рунге-Кутта 4-го порядка на систему дифференциальных уравнений	8
2.5	Применение метода Пикара	8
2.6	Неявный метод Эйлера	9
2.7	Метод Гира	10
2.8	Замечание о многошаговых методах	10
2.9	Метод Адамса, 4-х шаговый, ($p=4$)	10

1 Лекция 1

1.1 Расписание и формат обучения

Приём лабораторных:

Среда: 15:40 - 17:15, 237л

17:25 - 19:00 237л

Суббота: 13:50 - 15:25 243л

15:40 - 17:15 243л

Модули:

М1: 5 неделя, минимум 12 баллов, максимум 20 баллов, одна лабораторная

М2: 12 неделя, минимум 12 баллов, максимум 20 баллов, две лабораторные

М3: 17 неделя, минимум 18 баллов, максимум 30 баллов, одна лабораторная

Сдано больше двух лабораторных - автомат на экзамене.

1.2 Комментарии к первой лабораторной работе

$$\left\{ u'(x) = x^2 + u^2 u(0) = 0 \right. \quad (1.1)$$

Результат:

- значения для $x \in [0, x_{max}]$ с заданным шагом h
- приближения Пикара с 1 по 4 порядок
- до второго знака после запятой - точность
- график функции в интервале $[-x_{max}, x_{max}]$

1.3 Погрешности и устойчивость

Погрешности, возникающие при моделировании:

- Погрешность модели
- Погрешность метода
- Погрешность исходных данных
- Погрешность округления

Устойчивость - задача называется устойчивой (корректной), если решение единственно и устойчиво по входным данным. Плохо обусловленная задача: $\delta y = C \delta x, C \gg 0$

1.4 Модели на основе ОДУ

Все дополнительные условия заданы в одной точке - задача Коши.

Все дополнительные условия заданы в разных точках - краевая задача.

Задача Коши:

$$u'(x) = f(x, u)$$

$$u(\xi) = \eta$$

Решением данной задачи является сведение уравнения к производным первого порядка при помощи замены переменных:

$$u^n(x) = f(x, u, u', \dots, u^{n-2}, u^{n-1})$$

$$u^{(k)} = u_k$$

$$\begin{cases} u'_k = u^{(k+1)} = u_{k+1}, 0 \leq k \leq n-2 \\ u'_n = f(x, u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \end{cases} \quad (1.2)$$

$$u_0 \equiv u$$

$$u_k(\xi) = \eta_k, 0 \leq k \leq n-1$$

Методы решения:

- Аналитические
- Приближенно аналитические
- Численные

1.5 Явные методы Рунге-Кутты

$$u'(x) = f(x, u)$$

$$u(\xi) = \eta$$

$$a \leq x \leq b$$

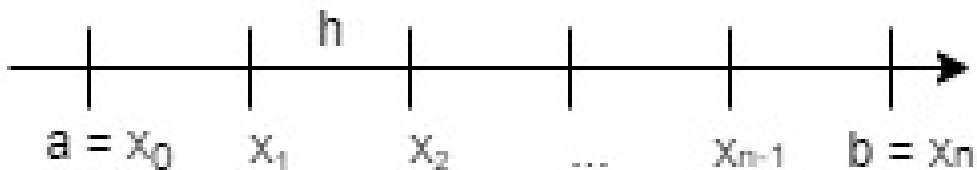


Рисунок 1.1 — Значения на числовой прямой

$$w_N = \{x_i : a = x_0 < x_1 \dots < x_N\}$$

$$w_n = \{x_i : x_i = a + ih, i = \overline{0, N}\}$$

$$y_i \rightarrow y(x_i)$$

Сходимость разностного решения к точному на отрезке:

$$\forall x_i \in [a, b] : |y_i - u_i| \rightarrow 0, h \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$$

1.5.1 Метод Эйлера (p=1)

$$u_{i+1} = u_i + h_i \cdot u'_i + \frac{h^2}{2!} u''_i + \frac{h^3}{3!} u'''_i + \dots$$

здесь $u'_i = u'(x_i)$; $u''_i = u''(x_i) \dots$

$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, u_i)$, если $|y_i - u_i| = o(h^2)$, при $h \rightarrow 0$, то метод имеет p-й порядок точности.

1.5.2 Численный метод Рунге-Кутты (p=2)

$$u_{i+1} = u_i + h u'_i + \frac{h^2}{2} u''_i + \dots$$

$$u'_i = f_i = f(x_i, u_i)$$

$$u''_i = (u'_i)' = \frac{d}{dx} f = f'_{x_i} + f'_{u_i} \cdot f_i$$

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{h^2}{2} (f'_{x_i} + f'_{y_i} \cdot f_i), (p=2), (2)$$

$$u''_i = \frac{f(x+\gamma h, y+\delta h) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{f(x+\gamma h, y+\delta h) - f(x, y)}{\Delta x} \right) = y_i + h [\beta f(x_i, y_i) + \alpha f(x_i + \gamma h, y_i + \delta h)] \quad (3)$$

$$y_{i+1} = y_i + h [\beta f(x_i + y_i) + \alpha (f(x_i, y_i) + f'_x \gamma h + f'_y \delta h)] = y_i + h [(\alpha + \beta) f(x_i, y_i) + \alpha \gamma h f'_x + \alpha \delta h f'_y] \quad (4)$$

Сравним (2) и (4):

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha \delta = \frac{1}{2} f(x_i, y_i) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \gamma = \frac{1}{2\alpha} \\ \delta = \frac{1}{2\alpha} f(x_i, y_i) \end{cases} \quad (1.4)$$

Из (3) видим, что:

$$y_{i+1} = y_i + h [(1 - \alpha) f(x_i, y_i) + \alpha f(x_i + \frac{1}{2\alpha} h, y_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, y_i))], \text{ на практике } \alpha = 1, \alpha = \frac{1}{2}$$

1.5.3 Метод Пикара (приближённый аналитический метод)

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

$$\frac{du}{dx} = f(x, u(x))$$

$$u(x) = u(\xi) + \int_{\xi}^x f(t, u(t)) dt$$

$$y^{(\delta+1)}(x) = u(\xi) + \int_{\xi}^x f(t, y^{(\delta)}(t)) dt$$

В лабораторной показать Пикара нужной точности (от 1 до 4).

2 Лекция 2

$$y_{n+1} = y_n + h_n[(1 - \alpha)f(x_n, y_n) + \alpha f(x_n + \frac{h_n}{2\alpha}, y_n + \frac{h_n}{2\alpha}f(x_n, y_n))] + O(\max h_n^2)$$

2.1 Геометрическое истолкование полученных результатов

Рассмотрим для $\alpha = 1$:

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n))$$

$$1) y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n)$$

$$2) y'_n = f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}})$$

$$3) y_{n+1} = y_n + h_n y'_n$$

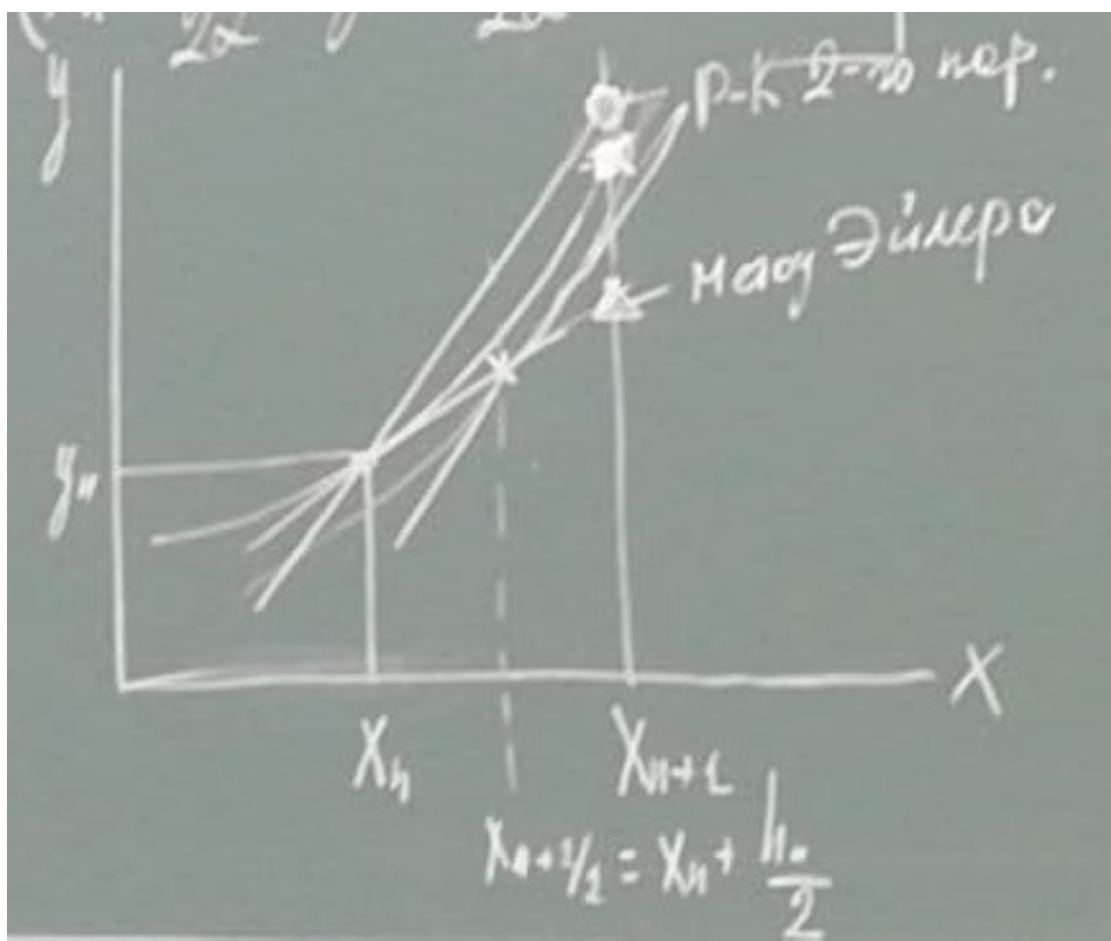


Рисунок 2.1 — Геометрические результаты для $\alpha = 1$

Рассмотрим для $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2}f(x_n, y_n))]$$

$$1) \overline{y_{n+1}} = y_n + h_n f(x_n, y_n)$$

$$2) y'_{n+1} = f(x_n + h_n, \overline{y_{n+1}})$$

$$3) y'_{cp} = \frac{1}{2}(f(x_n, y_n) + y'_{n+1})$$

$$4) y_{n+1} = y_n + h_n \cdot y'_{cp}$$

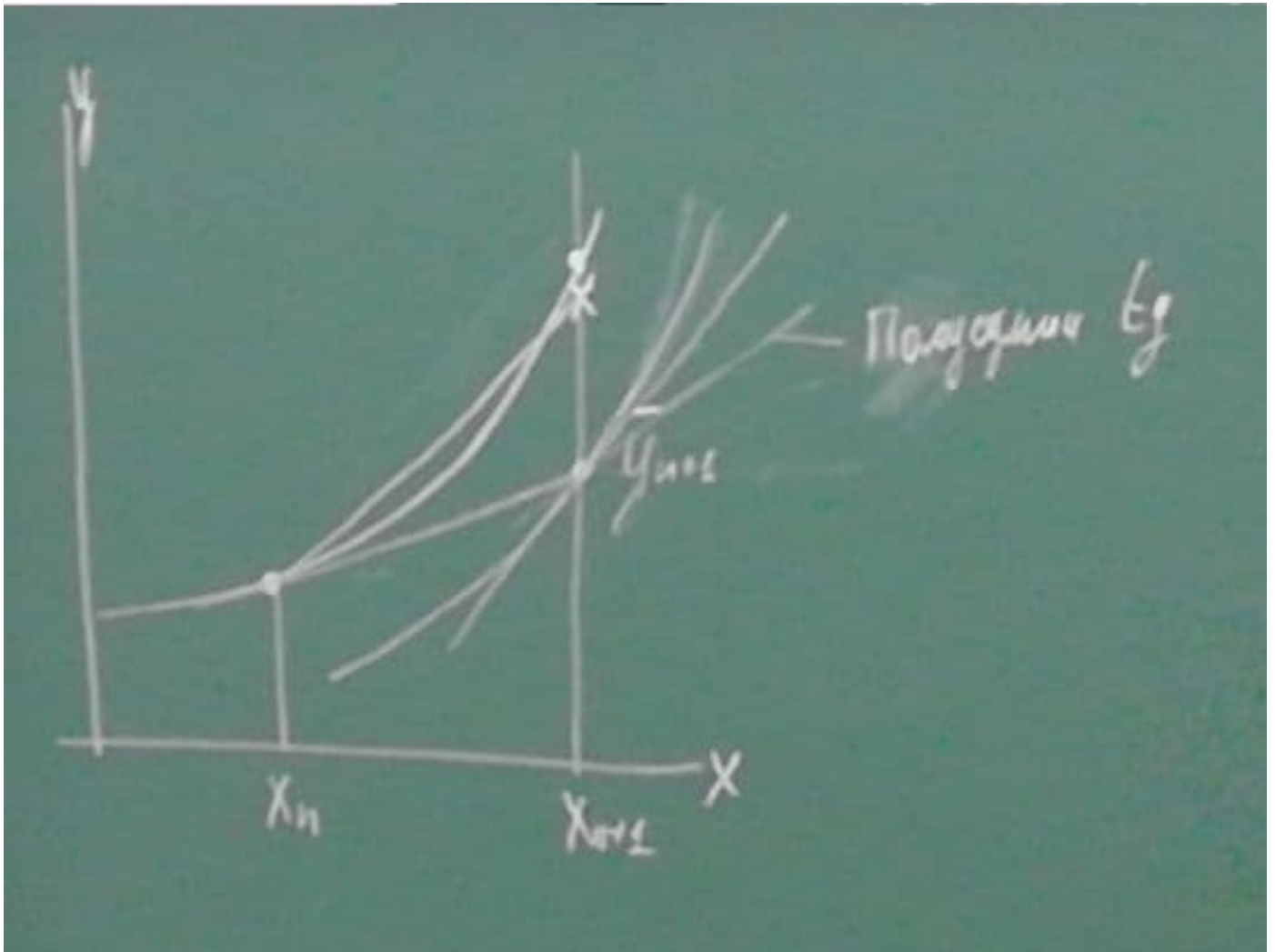


Рисунок 2.2 — Геометрические результаты для $\alpha = 1/2$

2.2 Методы Рунге-Кутты 4-го порядка точности

Формула обеспечивает переход из узла n в узел $n + 1$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

Посмотрим, как формируется порядок точности в специальном варианте правой части:

$$u'(x) = f(x)$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$$

$$\text{При } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n) + f(x_{n+1}))$$

По методу трапеции:

$$R_{trap} \leq \frac{x_N - x_0}{12} h^2 \cdot \max |f'(x)|$$

Рунге-Кутта 4-го порядка:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (f(x_n) + 4f(x_n + \frac{h}{2}) + f(x_n + h)) - \text{метод Симпсона}$$

$$R_{simp} \leq \frac{x_n - x_0}{190 \cdot 16} h^4 \cdot \max |f^{IV}(x)|, x_0 \leq x \leq x_n$$

2.3 Замечания о методах Рунге-Кутта

- 1) методы явные - позволяет за строго зафиксированное количество шагов перейти из одного узла в другой
- 2) позволяет производить расчёты с переменным шагом
- 3) если нужных производных при интегрировании нет, то применение метода Симпсона бессмысленно, т.е. метод трапеции, треугольника и тд.

2.4 Распространение метода Рунге-Кутта 4-го порядка на систему дифференциальных уравнений

На примере метода Рунге-Кутта 4-го порядка рассмотрим распространить результат на систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} u' = f(x, u, v) \\ v' = \phi(x, u, v) \\ u(\xi) = \eta_1 \\ v(\xi) = \eta_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$u = y, v = z$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4}{6}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n, z_n), q_1 = h\phi(x_n, y_n, z_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{q_1}{2}), q_2 = h\phi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{q_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{q_2}{2}), q_3 = h\phi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{q_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3, z_n + q_3), q_4 = h\phi(x_n + h, y_n + k_3, z_n + q_3)$$

Способ расчёта выше применяется в вычислениях во второй лабораторной работе.

2.5 Применение метода Пикара

Возвращаясь к методу Пикара, сформулируем условие сходимости приближённого решения к точке.

- решение в ограниченной области
- правая часть f непрерывна
- условия Липшеца: $a \leq x \leq b, |f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq \mathcal{L}|u_1 - u_2|$

2.6 Неявный метод Эйлера

$$u' = f(x, u)$$

В явном методе Эйлера - $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

В неявном методе Эйлера - $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ Последствия:

- 1) Решения может не быть, либо может быть несколько
- 2) Для решения уравнения необходимо подобрать метод

Применяется часто, поскольку является устойчивым.

Пример:

$$u' = -\alpha u, \alpha > 0$$

аналитическое решение: $u(x) = ce^{-\alpha x}$

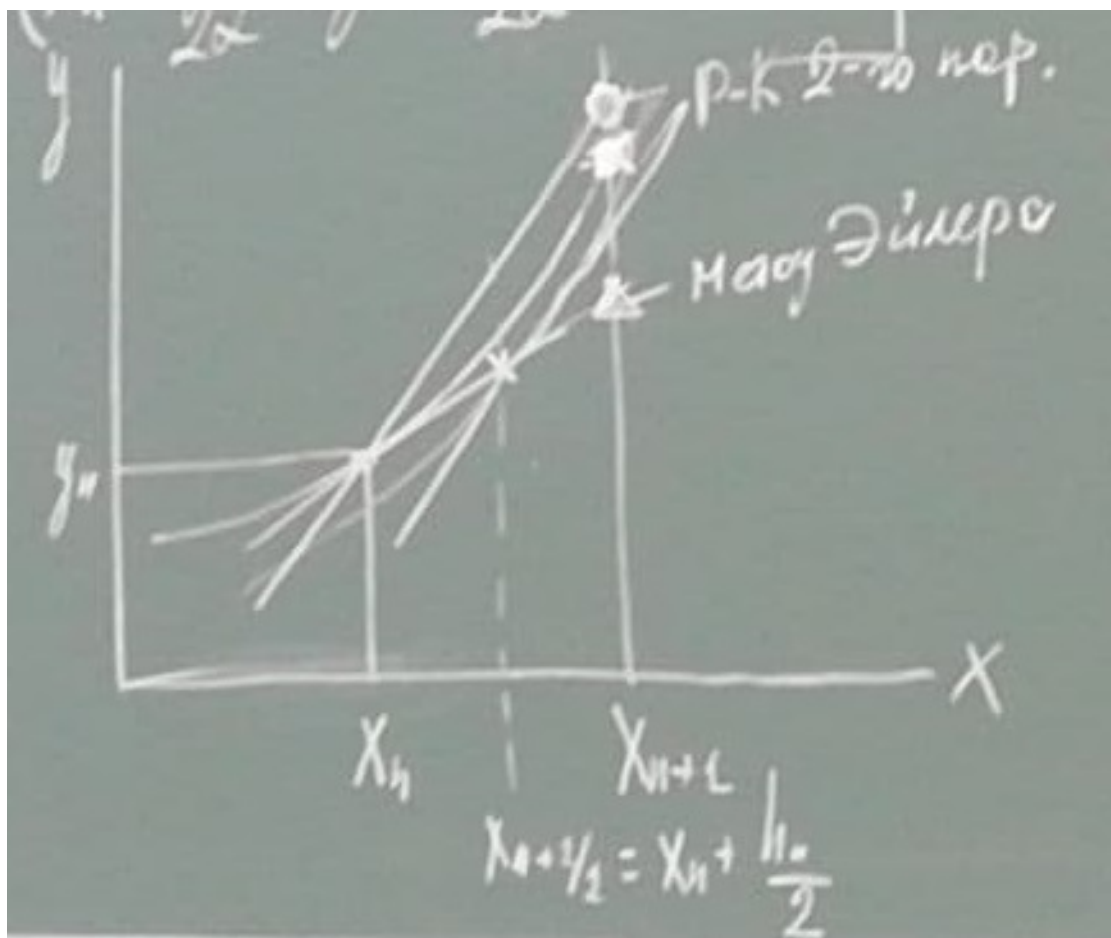


Рисунок 2.3 — Сравнение явного и неявного метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n - \alpha y_n h = y_n(1 - \alpha h), 1 - \alpha h > 0, h < \frac{1}{2}$$

Применение явного метода может привести к расходящимся решениями и имеет ограничения на α . Чем больше α , тем больше шаг.

Неявный метод:

$$y_{n+1} = y_n - \alpha y_{n+1} h$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \alpha h} - \text{ограничений на } h \text{ нет.}$$

В общем виде:

$$\sum_{k=0}^m a_k y_{n-k} = h(f(x_n, y_n))$$

$$m = 1, a_0 = 1, a_1 = -1$$

$$y_n - y_{n-1} = hf(x_n, y_n) - \text{метод Эйлера.}$$

2.7 Метод Гира

При $m = 2$:

$$\frac{3}{2}y_n - 2y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} = hf(x_n, y_n) + O(h^2)$$

При $m = 3$:

$$\frac{11}{3}y_n - 3y_{n-1} + \frac{3}{2}y_{n-2} - \frac{1}{3}y_{n-3} = hf(x_n, y_n) + O(h^3)$$

Формул более высокого порядка точности не существует. Благоприятны с точки устойчивости решений.

2.8 Замечание о многошаговых методах

В многошаговых методах для получения решения в неизвестном узле необходимо знать значения в определённом количестве предыдущих узлов.

2.9 Метод Адамса, 4-х шаговый, (p=4)