

## Содержание

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1     | Лекция 1 . . . . .  | 2  |
| 1.1   | Расписание и формат обучения . . . . .  | 2  |
| 1.2   | Комментарии к первой лабораторной работе . . . . .  | 2  |
| 1.3   | Погрешности и устойчивость . . . . .  | 2  |
| 1.4   | Модели на основе ОДУ . . . . .  | 3  |
| 1.5   | Явные методы Рунге-Кутта . . . . .  | 3  |
| 1.5.1 | Метод Эйлера ( $p=1$ ) . . . . .  | 4  |
| 1.5.2 | Численный метод Рунге-Кутта ( $p=2$ ) . . . . .   | 4  |
| 1.5.3 | Метод Пикара (приближённый аналитический метод) . . . . .                                       | 5  |
| 2     | Лекция 2 . . . . .  | 6  |
| 2.1   | Геометрическое истолкование полученных результатов . . . . .                                    | 6  |
| 2.2   | Методы Рунге-Кутта 4-го порядка точности . . . . .  | 7  |
| 2.3   | Замечания о методах Рунге-Кутта . . . . .   | 8  |
| 2.4   | Распространение метода Рунге-Кутта 4-го порядка на систему дифференциальных уравнений . . . . . | 8  |
| 2.5   | Применение метода Пикара . . . . .  | 8  |
| 2.6   | Неявный метод Эйлера . . . . .  | 9  |
| 2.7   | Метод Гира . . . . .  | 10 |
| 2.8   | Замечание о многошаговых методах . . . . .  | 10 |
| 3     | Лекция 3 . . . . .  | 11 |
| 3.1   | Методы на основе ОДУ. Краевая задача . . . . .  | 11 |
| 3.2   | Приближённый метод . . . . .  | 11 |
| 3.3   | Метод коллокаций . . . . .  | 12 |
| 3.4   | Метод Галеркина . . . . .   | 12 |
| 3.5   | Интегральный метод наименьших квадратов . . . . .   | 13 |
| 3.6   | Дискретный метод наименьших квадратов . . . . .   | 14 |
| 3.7   | Метод стрельбы (численный) . . . . .  | 14 |
| 4     | Лекция 4 . . . . .  | 15 |
| 4.1   | Особенности метода стрельбы . . . . .   | 15 |
| 4.2   | Лабораторная работа №2 . . . . .  | 15 |
| 4.3   | Задача Коши . . . . .   | 16 |
| 4.4   | Разностный метод. Основные понятия . . . . .  | 16 |
| 4.5   | Решение СЛАУ методом прогонки . . . . .   | 17 |
| 5     | Лекция 5 . . . . .  | 19 |
| 5.1   | ОДУ . . . . .   | 19 |
| 5.2   | Краевая задача . . . . .  | 19 |
| 5.3   | Решение нелинейного уравнения второго порядка . . . . .   | 19 |

# 1 Лекция 1

## 1.1 Расписание и формат обучения

Приём лабораторных:

Среда: 15:40 - 17:15, 237л

17:25 - 19:00 237л

Суббота: 13:50 - 15:25 243л

15:40 - 17:15 243л

Модули:

М1: 5 неделя, минимум 12 баллов, максимум 20 баллов, одна лабораторная

М2: 12 неделя, минимум 12 баллов, максимум 20 баллов, две лабораторные

М3: 17 неделя, минимум 18 баллов, максимум 30 баллов, одна лабораторная

Сдано больше двух лабораторных - автомат на экзамене.

## 1.2 Комментарии к первой лабораторной работе

$$\left\{ u'(x) = x^2 + u^2 u(0) = 0 \right. \quad (1.1)$$

Результат:

- значения для  $x \in [0, x_{max}]$  с заданным шагом  $h$
- приближения Пикара с 1 по 4 порядок
- до второго знака после запятой - точность
- график функции в интервале  $[-x_{max}, x_{max}]$

## 1.3 Погрешности и устойчивость

Погрешности, возникающие при моделировании:

- Погрешность модели
- Погрешность метода
- Погрешность исходных данных
- Погрешность округления

Устойчивость - задача называется устойчивой (корректной), если решение единственно и устойчиво по входным данным. Плохо обусловленная задача:  $\delta y = C \delta x, C \gg 0$

## 1.4 Модели на основе ОДУ

Все дополнительные условия заданы в одной точке - задача Коши.

Все дополнительные условия заданы в разных точках - краевая задача.

Задача Коши:

$$u'(x) = f(x, u)$$

$$u(\xi) = \eta$$

Решением данной задачи является сведение уравнения к производным первого порядка при помощи замены переменных:

$$u^n(x) = f(x, u, u', \dots, u^{n-2}, u^{n-1})$$

$$u^{(k)} = u_k$$

$$\begin{cases} u'_k = u^{(k+1)} = u_{k+1}, 0 \leq k \leq n-2 \\ u'_n = f(x, u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \end{cases} \quad (1.2)$$

$$u_0 \equiv u$$

$$u_k(\xi) = \eta_k, 0 \leq k \leq n-1$$

Методы решения:

- Аналитические
- Приближенно аналитические
- Численные

Для оценки точности численных методов можно использовать правило Рунге, заключающееся в том, что если мы рассчитаем функцию с шагом  $h$  и  $h/2$ , то точность в  $x_i$  будет выражаться как:  $\frac{|y_{i,h} - y_{i,h/2}|}{2^p - 1}$ , где  $p$  - порядок точности.

## 1.5 Явные методы Рунге-Кутты

$$u'(x) = f(x, u)$$

$$u(\xi) = \eta$$

$$a \leq x \leq b$$

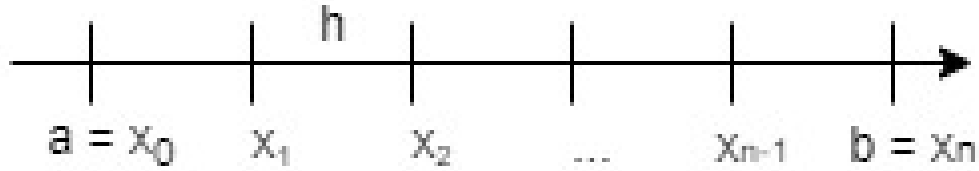


Рисунок 1.1 — Значения на числовой прямой

$$w_N = \{x_i : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N\}$$

$$w_n = \{x_i : x_i = a + ih, i = \overline{0, N}\}$$

$$y_i \rightarrow y(x_i)$$

Сходимость разностного решения к точному на отрезке:

$$\forall x_i \in [a, b] : |y_i - u_i| \rightarrow 0, h \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$$

### 1.5.1 Метод Эйлера (p=1)

$$u_{i+1} = u_i + h_i \cdot u'_i + \frac{h^2}{2!} u''_i + \frac{h^3}{3!} u'''_i + \dots$$

Здесь  $u'_i = u'(x_i); u''_i = u''(x_i) \dots$

$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, u_i)$ , если  $|y_i - u_i| = o(h^2)$ , при  $h \rightarrow 0$ , то метод имеет p-й порядок точности.

### 1.5.2 Численный метод Рунге-Кутты (p=2)

$$u_{i+1} = u_i + h u'_i + \frac{h^2}{2} u''_i + \dots$$

$$u'_i = f_i = f(x_i, u_i)$$

$$u''_i = (u'_i)' = \frac{d}{dx} f = f'_{x_i} + f'_{u_i} \cdot f_i$$

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{h^2}{2} (f'_{x_i} + f'_{y_i} \cdot f_i), (p=2), (2)$$

$$u''_i = \frac{f(x+\gamma h, y+\delta h) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{h^2}{2} \left( \frac{f(x+\gamma h, y+\delta h) - f(x, y)}{\Delta x} \right) = y_i + h [\beta f(x_i, y_i) + \alpha f(x_i + \gamma h, y_i + \delta h)] \quad (3)$$

$$y_{i+1} = y_i + h [\beta f(x_i + y_i) + \alpha (f(x_i, y_i) + f'_x \gamma h + f'_y \delta h)] = y_i + h [(\alpha + \beta) f(x_i, y_i) + \alpha \gamma h f'_x + \alpha \delta h f'_y] \quad (4)$$

Сравним (2) и (4):

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha \delta = \frac{1}{2} f(x_i, y_i) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \gamma = \frac{1}{2\alpha} \\ \delta = \frac{1}{2\alpha} f(x_i, y_i) \end{cases} \quad (1.4)$$

Из (3) видим, что:

$y_{i+1} = y_i + h[(1 - \alpha)f(x_i, y_i) + \alpha f(x_i + \frac{1}{2\alpha}h, y_i + \frac{h}{2\alpha}f(x_i, y_i))]$ , на практике  $\alpha = 1, \alpha = \frac{1}{2}$

### 1.5.3 Метод Пикара (приближённый аналитический метод)

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

$$\frac{du}{dx} = f(x, u(x))$$

$$u(x) = u(\xi) + \int_{\xi}^x f(t, u(t))dt$$

$$y^{(\delta+1)}(x) = u(\xi) + \int_{\xi}^x f(t, y^{(\delta)}(t))dt$$

В лабораторной показать Пикара нужной точности (от 1 до 4).

## 2 Лекция 2

$$y_{n+1} = y_n + h_n[(1 - \alpha)f(x_n, y_n) + \alpha f(x_n + \frac{h_n}{2\alpha}, y_n + \frac{h_n}{2\alpha}f(x_n, y_n))] + O(\max h_n^2)$$

### 2.1 Геометрическое истолкование полученных результатов

Рассмотрим для  $\alpha = 1$ :

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n))$$

$$1) y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n)$$

$$2) y'_n = f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}})$$

$$3) y_{n+1} = y_n + h_n y'_n$$

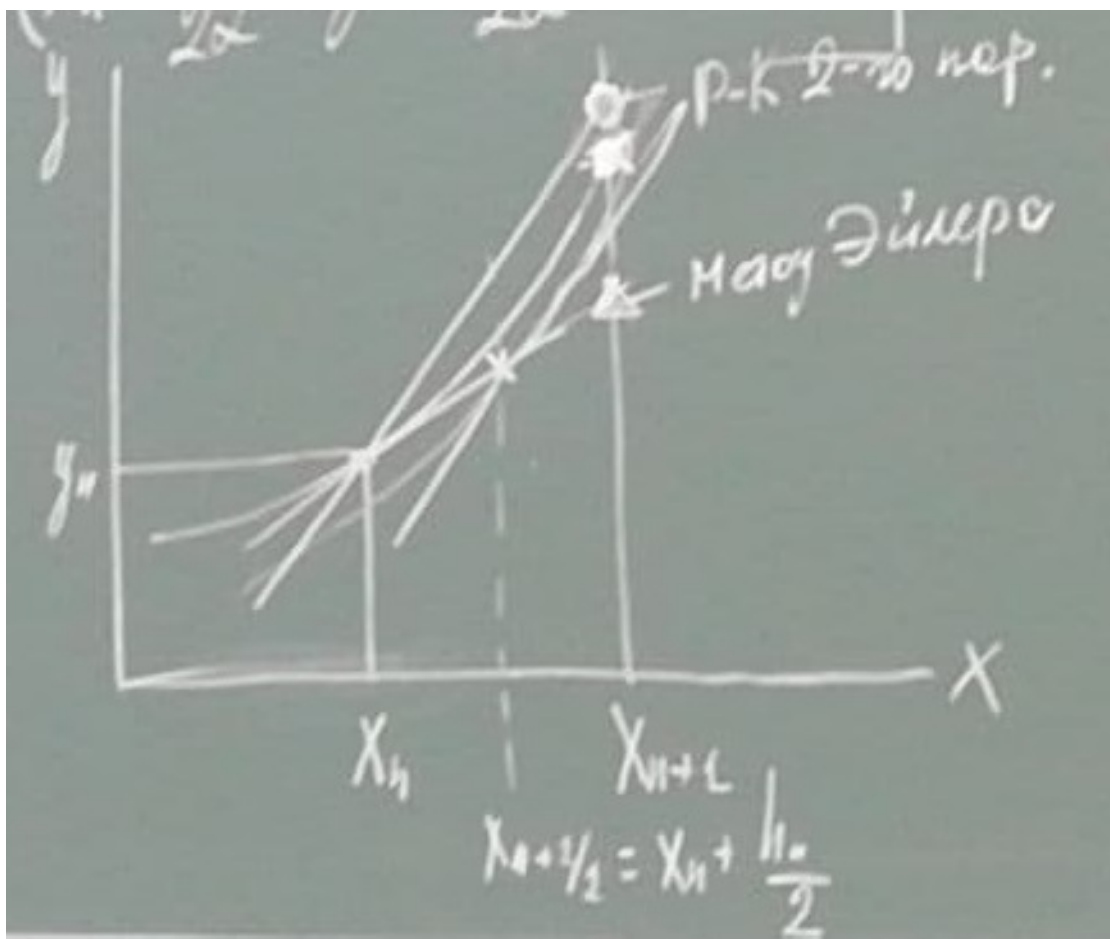


Рисунок 2.1 — Геометрические результаты для  $\alpha = 1$

Рассмотрим для  $\alpha = \frac{1}{2}$ :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2}f(x_n, y_n))]$$

$$1) \overline{y_{n+1}} = y_n + h_n f(x_n, y_n)$$

$$2) y'_{n+1} = f(x_n + h_n, \overline{y_{n+1}})$$

$$3) y'_{cp} = \frac{1}{2}(f(x_n, y_n) + y'_{n+1})$$

$$4) y_{n+1} = y_n + h_n \cdot y'_{cp}$$

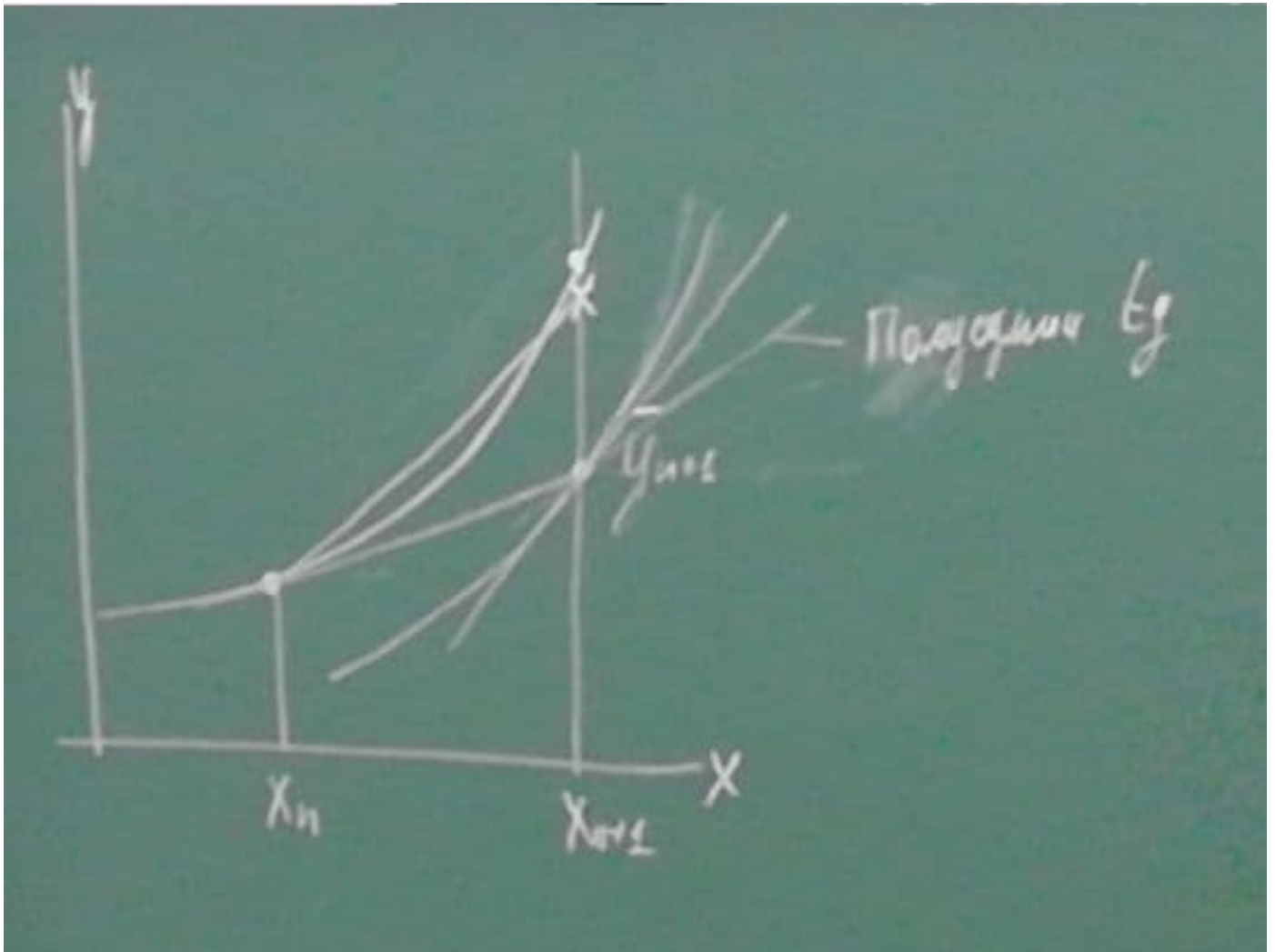


Рисунок 2.2 — Геометрические результаты для  $\alpha = 1/2$

## 2.2 Методы Рунге-Кутты 4-го порядка точности

Формула обеспечивает переход из узла  $n$  в узел  $n + 1$ :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

Посмотрим, как формируется порядок точности в специальном варианте правой части:

$$u'(x) = f(x)$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$$

$$\text{При } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n) + f(x_{n+1}))$$

По методу трапеции:

$$R_{trap} \leq \frac{x_N - x_0}{12} h^2 \cdot \max |f'(x)|$$

Рунге-Кутта 4-го порядка:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (f(x_n) + 4f(x_n + \frac{h}{2}) + f(x_n + h)) - \text{метод Симпсона}$$

$$R_{simp} \leq \frac{x_n - x_0}{190 \cdot 16} h^4 \cdot \max |f^{IV}(x)|, x_0 \leq x \leq x_n$$

### 2.3 Замечания о методах Рунге-Кутта

- 1) методы явные - позволяет за строго зафиксированное количество шагов перейти из одного узла в другой
- 2) позволяет производить расчёты с переменным шагом
- 3) если нужных производных при интегрировании нет, то применение метода Симпсона бессмысленно, т.е. метод трапеции, треугольника и тд.

### 2.4 Распространение метода Рунге-Кутта 4-го порядка на систему дифференциальных уравнений

На примере метода Рунге-Кутта 4-го порядка рассмотрим распространить результат на систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} u' = f(x, u, v) \\ v' = \phi(x, u, v) \\ u(\xi) = \eta_1 \\ v(\xi) = \eta_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$u = y, v = z$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4}{6}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n, z_n), q_1 = h\phi(x_n, y_n, z_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{q_1}{2}), q_2 = h\phi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{q_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{q_2}{2}), q_3 = h\phi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{q_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3, z_n + q_3), q_4 = h\phi(x_n + h, y_n + k_3, z_n + q_3)$$

Способ расчёта выше применяется в вычислениях во второй лабораторной работе.

### 2.5 Применение метода Пикара

Возвращаясь к методу Пикара, сформулируем условие сходимости приближённого решения к точке.



- решение в ограниченной области
- правая часть  $f$  непрерывна
- условия Липшеца:  $a \leq x \leq b, |f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq \mathcal{L}|u_1 - u_2|$

## 2.6 Неявный метод Эйлера

$$u' = f(x, u)$$

В явном методе Эйлера -  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

В неявном методе Эйлера -  $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$  Последствия:

- 1) Решения может не быть, либо может быть несколько
- 2) Для решения уравнения необходимо подобрать метод

Применяется часто, поскольку является устойчивым.

Пример:

$$u' = -\alpha u, \alpha > 0$$

аналитическое решение:  $u(x) = ce^{-\alpha x}$

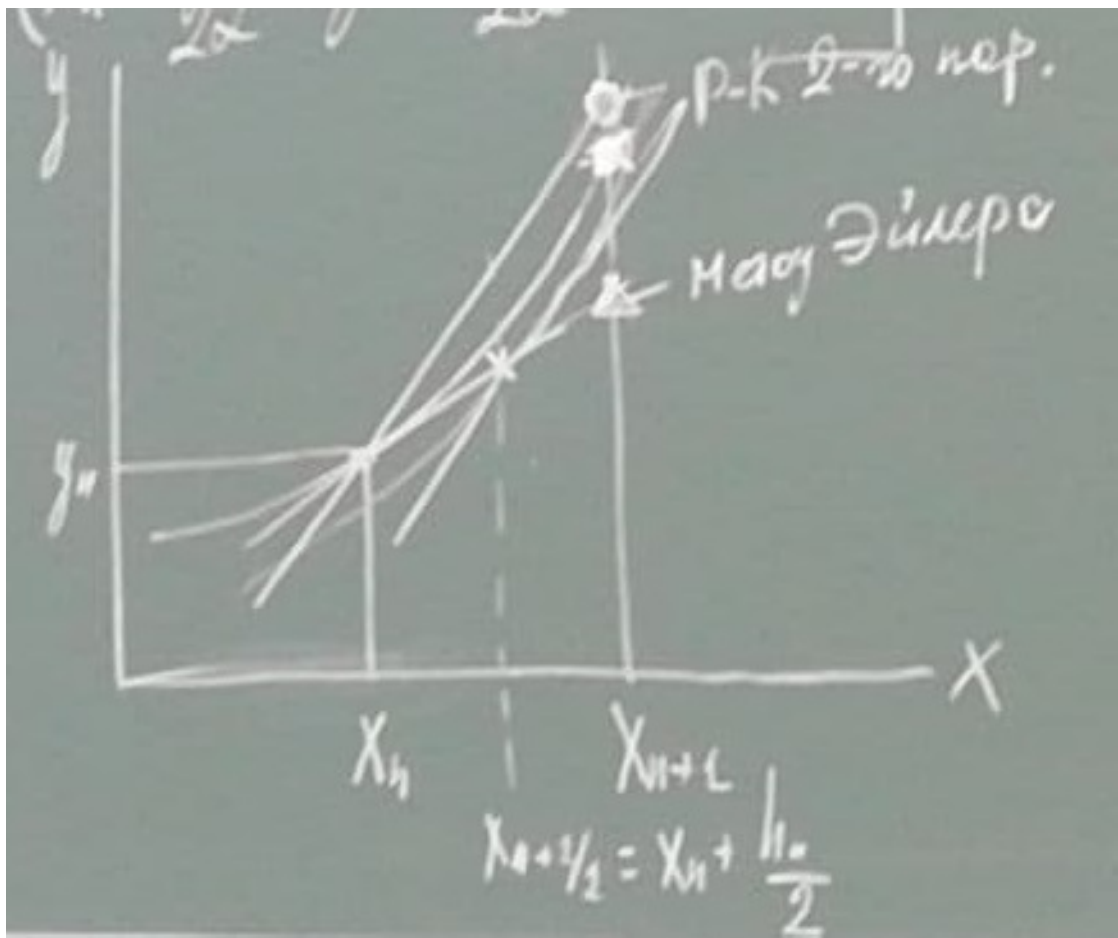


Рисунок 2.3 — Сравнение явного и неявного метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n - \alpha y_n h = y_n(1 - \alpha h), 1 - \alpha h > 0, h < \frac{1}{2}$$

Применение явного метода может привести к расходящимся решениями и имеет ограничения на  $\alpha$ . Чем больше  $\alpha$ , тем больше шаг.

Неявный метод:

$$y_{n+1} = y_n - \alpha y_{n+1} h$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \alpha h} \text{ - ограничений на } h \text{ нет.}$$

В общем виде:

$$\sum_{k=0}^m a_k y_{n-k} = h(f(x_n, y_n))$$

$$m = 1, a_0 = 1, a_1 = -1$$

$$y_n - y_{n-1} = hf(x_n, y_n) \text{ - метод Эйлера.}$$

## 2.7 Метод Гира

При  $m = 2$ :

$$\frac{3}{2}y_n - 2y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} = hf(x_n, y_n) + O(h^2)$$

При  $m = 3$ :

$$\frac{11}{3}y_n - 3y_{n-1} + \frac{3}{2}y_{n-2} - \frac{1}{3}y_{n-3} = hf(x_n, y_n) + O(h^3)$$

Формул более высокого порядка точности не существует. Благоприятны с точки устойчивости решений.

## 2.8 Замечание о многошаговых методах

В многошаговых методах для получения решения в неизвестном узле необходимо знать значения в определённом количестве предыдущих узлов.

### 3 Лекция 3

#### 3.1 Методы на основе ОДУ. Краевая задача

Дифференциальное вторение второго порядка может быть сведено к уравнению певрого порядка. В самом общем виде краевая задача формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} u'_k(x) = f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_n), k = \overline{1, n} \\ \phi_k(\xi_k, u_1(\xi_k), u_2(\xi_k), \dots, u_n(\xi_k)) = 0, k = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.1)$$

Методы решения:

- Аналитические
- Приближённые
- Численные

#### 3.2 Приближённый метод

Все функции от  $x$  - заданные, надо найти  $u$ .

$$\begin{cases} u'(x) + p(x)u'(x) + g(x)u(x) = f(x) \\ \alpha_1 u'(a) + \beta_1 u(a) = y_1 \\ \alpha_2 u'(a) + \beta_2 u(a) = y_2 \\ a \leq x \leq b \end{cases} \quad (3.2)$$

$$Lu = u'(x) + p(x)u'(x) + g(x)u(x)$$

$$l_a u = \alpha_1 u' + \beta_1 u$$

$$l_b u = \alpha_2 u' + \beta_2 u$$

$$\begin{cases} Lu = f(x)(1) \\ l_a u = y_1(2.1) \\ l_b u = y_2(2.2) \end{cases} \quad (3.3)$$

Решение ищем в виде:

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^n C_k u_k(x)$$

$$u_k(x) \rightarrow \begin{cases} L_a u_k = 0 \\ L_b u_k = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = Ly - f(x) = Lu_0(x) + \sum_{k=1}^n C_k Lu_k(x) - f(x)$$

### 3.3 Метод коллокаций

Выбираем множество точек  $x_i, i = 1, \dots, n$

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, i = \overline{1, n}$$

Пример:

$$\begin{cases} u^n + (1 + x^2)u + 1 = 0 \\ u(-1) = 0, u(1) = 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$u_0(x) = 0, u_1(x) = x^{2k-2}(1 - x^2), k = 1, 2, \dots, n$$

Точки коллокации -  $n = 2, x_1 = 0, x_2 = 0.5$

$$y(x) = C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4)$$

$$R(x, C_1, C_2) = 1 - C_1(1 + x^4) + C_2(2 - 11x^2 - x^6)$$

Приравниваем полученное выше выражение к нулю в точках коллокации:

$$x = 0, C_1 - 2C_2 = 1$$

$$x = 0.5, 1.0625C_1 + 0.7656C_2 = 1$$

$$\text{Решение: } C_1 = 0.9568, C_2 = -0.0216$$

$$\text{Окончательное решение: } y(x) = 0.1568(1 - x^2) - 0.0216(x^2 - x^4)$$

Чем больше точек коллокация. тем лучше полученная функция будет совпадать с точным решением.

### 3.4 Метод Галеркина

$u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)$  - система ортогональных линейно-независимых функций,  $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b f(x)u_i(x)dx = 0, i = \overline{1, m} \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\int_a^b R(x, C_1, C_2, \dots, C_n)u_i dx = 0, i = \overline{1, m}$$

$$\int_a^b u_m L u dx + \sum_{k=1}^n C_k \int_a^b u_k L u dx - \int_a^b u_m f(x) dx = 0, m = 1, 2, \dots, n$$

Пример:

$$\begin{cases} u'' + xu' + u = 2x \\ u(x) = 1 \\ u(1) = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$u_0(x) = 1 - x$$

$$u_1(x) = x^k(1 - x), k = 1, 2, \dots, n$$

$$n = 3$$

$$y(x) = (1 - x) + C_1x(1 - x) + C_2x^2(1 - x) + C_3x^3(1 - x)$$

$$R(x, C_1, C_2, C_3) = 1 + 3x + C_1(-2 + 2x - 3x^2) + C_2(2 - 6x + 3x^2 - 4x^4) + C_3(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4)$$

Выполняя процедуру Галёркина, получим систему интегралов от трёх функций:

$$\int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x - x^2)dx = 0$$

$$\int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x^2 - x^3)dx = 0$$

$$\int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x^3 - x^4)dx = 0$$

В результате получим систему из трёх уравнений:

$$133C_1 + 63C_2 + 36C_3 = -70$$

$$140C_1 + 108C_2 + 79C_3 = -98$$

$$264C_1 + 252C_2 + 211C_3 = -210$$

В результате получаем следующие коэффициенты:  $C_1 = -0.209, C_2 = -0.789, C_3 = 0.209$

$$y(x) = (1 - x)(1 - 0.209x - 0.789x^2 + 0.209x^3)$$

### 3.5 Интегральный метод наименьших квадратов

$$\int_a^b \Phi^2(x, C_1, C_2, \dots, C_n)dx \rightarrow \min$$

$$\frac{d\Phi}{dC_2} = 0, \int_a^b 2R(x, C_1, \dots, C_n) \frac{dR}{dC_2} dx = 0, k = 1, 2, \dots, n$$

Пример:

Из метода коллокаций:

$$R(x) = 1 - (1 + x^2)C_2 + (2 - 11x^2 - x^6)C_2$$

$$\frac{1d\Phi}{2dC_1} = - \int_0^1 (1 - (1 + x^2)C_1 + (2 - 11x^2 - x^6)C_2)(1 + x^2)dx = 0$$

$$\frac{1d\Phi}{2dC_2} = - \int_0^1 (1 - (1 + x^4)C_1 + (2 - 11x^2 - x^6)C_2)(2 - 11x^2 - x^6)dx = 0$$

$$\begin{cases} \frac{68}{45}C_1 + \frac{3548}{1155}C_2 = \frac{5}{4} \\ \frac{3548}{1155}C_1 + \frac{63404}{4035}C_2 = \frac{38}{91} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$C_1 = 0.985, C_2 = -0.078$$

$$y(x) = 0.985(1 - x^2) - 0.078(x^2 - x^4)$$

### 3.6 Дискретный метод наименьших квадратов

$$\Phi = \sum_{i=1}^N R^2(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \rightarrow \min$$

Если взять  $N \gg n$ , то метод будет работать. Если взять  $N = n$ , то метод перейдёт в метод коллокаций, надо будет показать в лабе.

### 3.7 Метод стрельбы (численный)

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = f(x, u, v) \quad (3.1) \\ v'(x) = \phi(x, u, v) \quad (3.2) \\ \Xi(u(a), v(a)) = 0 \quad (4) \\ \psi(u(b), v(b)) = 0 \quad (5) \\ a \leq x \leq b \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Берем некое  $u(a) = \xi$ , тогда из (u):

$$\Xi(\xi, u(a)) = 0 \rightarrow v(a) = \gamma(\xi)$$

Сводится к задаче Коши, решаем уравнение численно

Например, если краевое условие - линейное, то  $\alpha_1 u(a) + \beta_1 v(a) = \delta_1, v(a) = \frac{\delta_1 - \alpha_1 \xi}{\beta_1}$

$$\psi(u(b, \xi), v(b, \xi)) = \bar{\psi}(\xi) \neq 0$$

## 4 Лекция 4

### 4.1 Особенности метода стрельбы

Метод стрельбы называется именно так, поскольку мы за счёт подбора условия в одной краевой точки обеспечиваем условие во второй краевой точке.

### 4.2 Лабораторная работа №2

Исходная информация - задана система уравнений:

$$\begin{cases} F = -\frac{c}{3k(r)} \frac{du}{dr} \\ \operatorname{div} F = ck(r)(u_p(r) - u(r)) \\ r = 0, F = 0, r = R, F = m \frac{cu}{2} \end{cases} \quad (4.1)$$

Решение в цилиндрических координатах, неизвестные:  $F(r)$ ,  $u(r)$ .

$F$  - поток, размерность - ватт на сантиметр в квадрате.

$u$  - плотность энергии излучения - джоуль на сантиметр в кубе.

$c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с - скорость света.

$u_p = \frac{3.084 \cdot 10^{-4}}{e^{\frac{4.709 \cdot 10^4}{T}} - 1}$  - равновесная плотность излучения

$k = k_0 \left(\frac{T}{300}\right)^2$  - коэффициент поглощения

$T(r) = (T_w - T_0) \left(\frac{r}{R}\right)^p + T_0$  - температурное поглощение

$T_0, T_w, p$  - заданы

Приведём эти уравнения:

Введём безусловную координату -  $Z = \frac{r}{R}$

Тогда:

$$\begin{cases} F = -\frac{c}{3Rk(r)} \frac{du}{dz}, (1) \\ \frac{1}{R} \frac{1}{Z} \frac{d}{dZ} (ZF) = ck(r)(u_p(r) - u(r)), (2) \\ Z = 0, F = 0, (3) \\ Z = 1, F = m \frac{cu}{2}, (4) \end{cases} \quad (4.2)$$

Исходные данные для отладки:

$k_0 = 0.0008$

$m = 0.786$

$R = 0.35$  см

$T_w = 2000$  K

$T_0 = 10^4$  K

p = диапазон от 4 до 15

Получить:  $u(Z)$  и  $F(Z)$

$$T(Z) = (T_w - T_0)Z^p + T_0$$

$$\frac{1}{RZ}(F + Z \frac{dF}{dZ}) = \frac{1}{R}(\frac{F}{Z} + \frac{dF}{dZ}) = ck(Z)(u_p - u)$$

$$\lim_{Z \rightarrow 0} \frac{F}{2} = \frac{\lim_{Z \rightarrow 0} \frac{dF}{dZ}}{1} = \frac{dF}{dZ}$$

Имеем:

$$\frac{dF}{dZ} = cK[u_p - u] - \frac{1}{R} \frac{F}{Z}$$

$$\frac{dF}{dZ} = cRk[u_p - u]$$

$$Z = 0, F = 0$$

$$Z = 1, F = m \frac{cu}{2} = 0$$

#### 4.3 Задача Коши

$$Z = 0, F(0) = 0$$

$$u(0) = \xi \cdot u_p(0), \xi = 0.01, \dots, 1$$

$$\psi(\xi) = F(\xi) - \frac{mcu(\xi)}{2}$$

Задача - взяв интервал кси обеспечить, чтобы определялось, как полуразность.  $\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$

Вычисляем в цикле, пока  $\left| \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi} \right| < \epsilon, \epsilon = 10^{-4}$

Решение задачи производится при помощи метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности, использованное метода оправдано, поскольку нету разывов в правой части. Вывод оформлять лучше в графиках и если возможно, добавить вывод полученных значений в файл.

#### 4.4 Разностный метод. Основные понятия

$$\begin{cases} u''(x) - p(x)u(x) = f(x), (5) \\ u(a) = c, (6.1) \\ u(b) = d, (6.2) \\ a \leq x \leq b \end{cases} \quad (4.3)$$

Для получения разностной схемы используется прямая разность аппроксимации производной:

$$u_n'' = \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{n^2} - \frac{n^2}{12} u_n^{IV}(\xi), x_{n-1} \leq \xi \leq x_{n+1}, (7)$$

В (7) подставляем (5):

$$\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{n^2} - p_n y_n = f_n, p_n = p(x_n), f_n = f(x_n)$$



$$\begin{cases} y_{n-1} - (2 + h^2 p_n) y_n + y_{n+1} = h^2 f_n, n = 1, 2, \dots, N-1, (I) \\ y_0 = c \\ y_N = d \\ w_h = \{x_n : x_n = a + nh, n = \overline{0, N}\} \end{cases} \quad (4.4)$$

В результате получена СЛАУ. Матрица данной СЛАУ диагональная, поэтому решаем методом прогонки.

#### 4.5 Решение СЛАУ методом прогонки

$$\begin{cases} A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -F_n, (7') \\ K_0 y_0 + M_0 y_1 = P_0 \\ K_N y_{N-1} + M_N y_N = P_N \end{cases} \quad (4.5)$$

$$y_n = \xi_{n+1} y_{n+1} + \nu_{n+1}, (8)$$

$\xi_{n+1}, \nu_{n+1}$  - прогоночные коэффициенты

Запишем:

$$y_{n-1} = \xi_n y_n + \nu_n$$

Подставим в (7'):

$$y_n = \frac{C_n}{B_n - A_n \xi_n} y_{n+1} + \frac{F_n + A_n \nu_n}{B_n - A_n \xi_n}$$

Сравним с (8) Ю видим:

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = \frac{C_n}{B_n - A_n \xi_n}, (9.1) \\ \nu_{n+1} = \frac{F_n + A_n \nu_n}{B_n - A_n \xi_n}, (9.2) \end{cases} \quad (4.6)$$

Алгоритм:

- 1) Прямой ход, по (9) вычисляем  $\xi_n \nu_n$
- 2) Обратный ход, по (8) вычисляем  $y_n$

Начальные значения прогоночных коэффициентов берутся из левого краевого условия:

$$y_0 = -\frac{M_0}{K_0} y_1 + \frac{P_0}{K_0} \rightarrow \xi_1 = -\frac{M_0}{K_0}, \nu_1 = \frac{P_0}{K_0}$$

Значения  $y_N$  находится с использованием правого краевого условия:

$$y_{N-1} = \xi_N y_N + \nu_N$$

$$K_N \xi_N y_N + K_N \nu_N + M_N y_N = P_N$$

$$y_N = \frac{P_N - K_N \nu_N}{K_N \xi_N + M_N}$$

Покажем сходимость разностного решения к точному:  $y_n \rightarrow u(x_n)$

В исходное дифференциальное уравнение подставим точное значение разностного аналога:

$$\frac{u_{n-1}-2u_n+u_{n+1}}{n^2} - \frac{n^2}{12}u^{IV}(\xi) - p_n u_n = f_n$$

$$u_{n-1} - (2 + p_n n^2)u_n + u_{n+1} = f_n + \frac{h^2}{12}u_n^{IV}(\xi), (10)$$

В (I) подставим (10):

$$Z_n = y_n - u_n$$

$$Z_{n-1} - (2 + p_n h^2)Z_n + Z_{n+1} = -\frac{h^4}{12}u^{IV}(\xi)$$

$$(2 + p_n h^2)Z_n = Z_{n-1} + Z_{n+1} + \frac{h^4}{12}u^{IV}(\xi)$$

$$Z_0 = 0$$

$$Z_N = 0$$

Выберем точку  $X_m$ , в которой  $Z_m = \max |Z_n|$

$$(2 + p_m h^2)|Z_m| \leq |Z_{m-1}| + |Z_{m+1}| + \frac{h^2}{12}|u^{IV}(\xi)|$$

$$(2 + p_m h^2)|Z_m| \leq 2|Z_m| + \frac{h^4}{12}|u^{IV}(\xi)|$$

$$p_m h^2 |Z_m| \leq \frac{h^2}{12 p_m} \cdot \max |u^{IV}(\xi)| = o(h^2)$$

При  $h \rightarrow 0, |Z_m| \rightarrow 0, o(h^2)$

## 5 Лекция 5

### 5.1 ОДУ

$$u'(x) = f(x, u)$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, u(t)) dt = (\text{по методу трапеции}) = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})) \rightarrow F(y_{n+1}) = 0, o(h^2)$$

### 5.2 Кравевая задача

Для решения применяется метод прогонки.

$$u''(x) = p(x)u(x) = f(x), p(x) > 0$$

Для устойчивости прогонки должно выполняться это условие (является достаточным, но не является необходимым):  $|B_n| > |A_n| + |C_n|$  - диагональное преобладание.

$$|y_n - u_n| \rightarrow 0, o(h^2) \text{ при } h \rightarrow 0$$

### 5.3 Решение нелинейного уравнения второго порядка

$$u''(x) = f(x, u(x))$$

Разностная схема уравнения:

$$\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} = f(x, y_n)$$

Решение уравнений:

1. Линеаризация (по Ньютону) - в данном уравнении содержится три неизвестных -  $y_{n-1}, y_n, y_{n+1}$ .

$F(y_{n-1}, y_n, y_{n+1})$  - для решения данного уравнения необходимо организовать итерационный процесс. Сначала разлагаем в ряд Тейлора:  $F(y_{n-1}^{(0)}, y_n^{(0)}, y_{n+1}^{(0)}) + \frac{dF}{dy_{n-1}} \Delta y_{n-1}^{(S+1)} + \frac{dF}{dy_n} \Delta y_n^{(S+1)} +$

$$\frac{dF}{dy_{n+1}} \Delta y_{n+1}^{(S+1)} = 0, S - \text{номер итерации.}$$

$$F(y_{n-1}^{(0)}, y_n^{(0)}, y_{n+1}^{(0)}) = y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} - h^2 f(x_n, y_n) = 0$$

$$y_{n-1}^{(S)} - 2y_n^{(S)} + y_{n+1}^{(S)} - h^2 f(x_n, y_n^{(S)}) + \Delta y_{n-1}^{(S+1)} + (2 + h^2 f'_n(x_n, y_n^{(S)})) \Delta y_n^{(S+1)} + \Delta y_{n+1}^{(S+1)} = 0$$

$$\Delta y_{n-1}^{(S+1)} - (2 + h^2 f'_u(x_n, y_n^{(S)})) \Delta y_n^{(S+1)} + \Delta y_{n+1}^{(S+1)} = h^2 f(x_n, y_n^{(S)}) - y_{n-1}^{(S)} + 2y_n^{(S)} - y_{n+1}^{(S)}, (2)$$

$$y_n^{(S+1)} = y_n^{(S)} + \Delta y_n^{(S+1)}$$

$$y_{n-1}^{(S+1)} = y_{n-1}^{(S)} + \Delta y_{n-1}^{(S+1)}$$

$$y_{n+1}^{(S+1)} = y_{n+1}^{(S)} + \Delta y_{n+1}^{(S+1)}$$

$$\max_{0 \leq n \leq N} \left| \frac{\Delta y_n^{(S+1)}}{y_n^{(S+1)}} \right| < \xi$$

2. Простая итерация.

$$y_{n-1}^{(S+1)} - 2y_n^{(S+1)} + y_{n+1}^{(S+1)} = h^2 f(x_n, y_n^{(S)})$$

Сходится, если  $\frac{1}{8}(b-a)^2 M_n < 1$ ,  $M_n = \max_{1 \leq n \leq N-1} |f_u''(x)|$

Сделаем замечание по поводу краевых условий:

$$\begin{cases} u(a) = c \\ u(b) = d \end{cases} \quad (5.1)$$

Это условия первого рода. Второго рода - первые производные.

Условия второго рода -  $\alpha u''(a) + \beta u(a) = \gamma$  - краевое условие третьего рода.

Простейшая аппроксимация:

$$\alpha \frac{y_n - y_0}{h} + \beta y_0 = \gamma, \quad K_0 y_0 + M_0 y_1 = P_1$$

$$K_1 = \beta - \frac{\alpha}{h}$$

$$M_0 = \frac{\alpha}{h}$$

$$P_1 = \gamma$$

$$u_1 = u_0 + h u'_0 + \frac{h^2}{2} u''_0 + o(h^3)$$

$$y_1 = y_0 + h \frac{\gamma - \beta y_0}{\alpha} + \frac{h^2}{2} (f(x_0) + p(x_0) y_0)$$