1. Случайные события

1.1. Определение пространства элементарных исходов, примеры. Понятие события (нестрогое), следствие события, невозможное и достоверное событие, примеры. Операции над событиями. Сформулировать классическое определение вероятности и доказать его следствия.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно предугадать. Этот результат называют **элементарным исходом** случайного эксперимента. Предполагается, что элементарный исход неделим. **Пространством элементарных исходов** Ω случайного эксперимента называют множество всех возможных элементарных исходов данного эксперимента.
Событием называют любое подмножество множества Ω. Считается, что произошло событие А, если элементарный исход эксперимента входит в подмножество А.
Событие А называют **следствием события** В, если наступление события В влечет за собой наступление А. (то есть В является подмножеством А). **Невозможное событие** - пустое множество, **достоверное** - Ω.
Операции над событиями:
- Сумма $A + B = A \cup B$или
- Произведение $AB = A \cap B$ и
- Разность $A \backslash B$, A и $B \subseteq \Omega$ (A\B = A * ¬B)
- Противоположное событие $\neg A = \Omega \backslash A$

Классическое определение вероятности:
- Пусть Ω конеччно ($|\Omega| = N < \infty$)
- по условиям случайного эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход другим (то есть исходы равновозможны)
- Определено событие $A \in \Omega$, $|A| = N_a$.

Тогда Вероятностью осуществления события А называют число P(A) = Na/N.
Свойства вероятности, следствия из определения:
1) P(A) >= 0, так как Na >= 0, N > 0 (P(A) = Na/N)
2) P(Ω) = 1, так как P(Ω) = |Ω|/|Ω|= 1
3) Если А и В несовместны, то P(A+B) = P(A) + P(B)
   |A + B| = (|A∪B|) = |A| + |B| - |A∩B| = P(A) + P(B) - 0.
   $P(A + B) = \frac{|A+B|}{N} = \frac{|A|+|B|}{N} = \frac{|A|}{N} + \frac{|B|}{N} = P(A) + P(B)$.

Примеры. Подбрасывание кубика - случайный эксперимент. На кубике выпало 1 - элементарный исход. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $A = \{\text{на кубике выпало четное число}\}$- событие. $A = \{2, 4, 6\}$. Событие $B = \{\text{на кубике выпало } 4\} = \{4\}$- является следствием события А. На кубике выпало значение от 1 до 6 включительно - достоверное событие. На кубике выпало 8 - невозможное событие. Вероятность события А $P(A) = Na/N = 3/6 = 0.5$.

1.2. Определение пространства элементарных исходов, примеры. Понятие события (нестрогое). Сформулировать геометрическое и статистическое определения вероятности. Достоинства и недостатки этих определений.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно предугадать. Этот результат называют **элементарным исходом** случайного эксперимента.

Предполагается, что элементарный исход неделим. **Пространством элементарных исходов** Ω случайного эксперимента называют множество всех возможных элементарных исходов данного эксперимента. **Пример**: подбрасывание кубика - случайный эксперимент. На кубике выпало 1 - элементарный исход. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Событием называют любое подмножество множества Ω. Считается, что произошло событие А, если элементарный исход эксперимента входит в подмножество А.

Геометрическое определение вероятности

Обобщение классического определения на случай бесконечного пространства элементарных исходов. Пусть $\Omega \in R^n$, мера множества $\mu(\Omega)$ конечна (для n = 1, $\mu - \text{длина}$, 2- площадь, 3 - объем....), возможность принадлежности исхода эксперимента некоторому событию пропорциональна мере этого события и не зависит от формы и расположения внутри. Тогда вероятностью осуществления события А называют число $P(A) = \mu(A)/\mu(\Omega)$.

Достоинство: бесконечное пространство элементарных исходов. **Недостаток**: не учитывает возможность того, что некоторые области могут быть более предпочтительны, чем другие той же меры. **Пример:** задача о встрече

Статическое определение вероятности

Пусть Ω- пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента. $A \subseteq \Omega$ - событие, связанное с этим экспериментом. Этот случайный эксперимент произведен N раз, при этом событие А произошло Na раз. Тогда статистической вероятностью осуществления события А называют эмпирический предел $P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{Na}{N}$

Достоинство: Ω любое, нет ограничения на равновозможность элементарных исходов. **Недостатки**: никакой эксперимент невозможно осуществить бесконечное число раз; - с точки зрения математики это определение является архаизмом, так как не дает достаточной базы для развития теории.

1.3. Определение пространства элементарных исходов, примеры. Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать простейшие свойства сигма-алгебры. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно предугадать. Этот результат называют **элементарным исходом** случайного эксперимента. Предполагается, что элементарный исход неделим. **Пространством элементарных исходов** Ω случайного эксперимента называют множество всех возможных элементарных исходов данного эксперимента. **Пример**: подбрасывание кубика - случайный эксперимент. На кубике выпало 1 - элементарный исход. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Пусть Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента, β- набор подмножеств мнножества Ω. Тогдаβназывается **сигма-алгеброй** событий ,если

1) $\beta \neq \varnothing$
2) $A \in \beta => \neg A \in \beta$
3) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \beta => A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots \in \beta$

Свойства:

1) $\Omega \in \beta$; ($\beta \neq \varnothing => \exists A \in \beta => \neg A \in \beta => A + \neg A \in \beta => \Omega \in \beta$).

2) $\varnothing \in \beta$; ($\Omega \in \beta => \neg\Omega \in \beta => \varnothing \in \beta$).
3) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \beta => A_1 * A_2 * \dots * A_n * \dots \in \beta$

(закон Деморгана $A, B \in \beta => \neg A, \neg B \in \beta => \neg A + \neg B \in \beta => \neg(A * B) \in \beta => A * B \in \beta$)

4) $A, B \in \beta => A \backslash B \in \beta$ (A\B = A * ¬B)

Аксиоматическое определение вероятности
Пусть Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента. B - σ-алгебра на Ω.
Вероятностью (вероятностной мерой) называется отображение
P: $B \rightarrow R$ (событие из B -> число), обладающее следующими свойствами

1) Для любого A P(A)>= 0 (аксиома неотрицательности)
2) P(Ω) = 1 (аксиома нормированности)
3) Если A1, A2, ... , An, ... ,принадлежащие B,попарно несовместные события, то P(A1 + A2 + ... + An + ...) = P(A1) + P(A2) + ... + P(An) + ... (расширенная аксиома сложения)

1.4. Определение пространства элементарных исходов, примеры. Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности и доказать простейшие свойства вероятности.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно предугадать. Этот результат называют **элементарным исходом** случайного эксперимента. Предполагается, что элементарный исход неделим. **Пространством элементарных исходов** Ω случайного эксперимента называют множество всех возможных элементарных исходов данного эксперимента. **Пример**: подбрасывание кубика - случайный эксперимент. На кубике выпало 1 - элементарный исход. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Пусть Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента, β-набор подмножеств мнножества Ω. Тогдаβназывается **сигма-алгеброй** событий ,если

1) $\beta \neq \varnothing$
2) $A \in \beta => \neg A \in \beta$
3) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \beta => A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots \in \beta$

Аксиоматическое определение вероятности
Пусть Ω - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента. β-σ-алгебра на Ω.
Вероятностью (вероятностной мерой) называется отображение
P: $\beta \rightarrow R$ (событие из β-> число), обладающее следующими свойствами

1) $\forall A \in \beta \, P(A) \geq 0$(аксиома неотрицательности)
2) P(Ω) = 1 (аксиома нормированности)
3) Если A1, A2, ... , An, ... ,принадлежащие B,попарно несовместные события, то P(A1 + A2 + ... + An + ...) = P(A1) + P(A2) + ... + P(An) + ... (расширенная аксиома сложения)

Свойства:

$P(\neg A) = 1 - P(A)$	$A + \neg A = \Omega \Rightarrow \neg A = \Omega - A$; $A * \neg A = \varnothing \Rightarrow P(A + \neg A) = P(A) + P(\neg A) = P($

$P(\varnothing) = 0$	$P(\varnothing) = P(\neg\Omega) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$
$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B);$	$B = A + (B\backslash A)$ они несовместны $\Rightarrow P(B) = P(A) + P(B\backslash A); \Rightarrow P(B\backslash A) \ge 0$
$\forall A \in \beta\ 0 \le P(A) \le 1$	Из аксиомы 1 $0 \le P(A)$ Из св. 3 и акс. 2 $A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \le P(\Omega) \Rightarrow P(A) \le 1$
$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A$	$A + B = A + (B\backslash A)$ они несовместны $\Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B\backslash A)$ $B = B\backslash A + AB$ они несовместны $\Rightarrow P(B) = P(B\backslash A) + P(AB) \Rightarrow P(B\backslash A) = P(B) - P(A$
Для любого конечного набора событий $A_i \in \beta$ справедливо $P(A1 + A2 + ... + An) =$ $= \sum_{1\le i\le n} P(Ai) - \sum_{1\le i1\le i2\le n} P(Ai1 * A$ $+ ... + (-1)^{n+1} P(Ai * ... * An)$	формула включений исключений; Является обобщением свойства 5 на случай N событий.

1.5. Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что при фиксированном событии B условная вероятность P(A|B) обладает всеми свойствами безусловной вероятности.

Пусть (Ω, β, P) – вероятностное пространство. **Условной вероятностью** осуществления события A при условии, что произошло событие B, называется число P(A|B) = P(A*B) / P(B), где P(B) ≠ 0. Удовлетворяет трем условиям безусловной вероятности

Свойства:

$P(\neg A\vert B) = 1 - P(A\vert B)$	
$P(\varnothing\ \vert B) = 0$	
Если $A_1 \subseteq A_2$, то $P(A_1\vert B) \le P(A_2\vert B)$	
$0 \le P(A\vert B) \le 1$	
$P(A_1 + A_2\vert B) = P(A_1\vert B) + P(A_2\vert B) - P(A1 * A2\vert B)$	
Для любого конечного набора событий Ai $P(A_1 + ... + A_n\vert B) = \sum_{1\le i1\le n} P(A_{i1}\vert B) - \sum_{1\le i1<i2\le n} P(A_{i1}A_{i2}\vert B)$ $+ (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n\vert B)$	

1.6. Сформулировать определение условной вероятности. Доказать теорему (формулу) умножения вероятностей. Привести пример использования этой формулы.

Пусть (Ω, β, P) - вероятностное множество. Тогда условной вероятностью осуществления события А, при условии что произошло событие В называют число P(A|B) = P(AB)/P(B)
Формула умножения для двух событий.
A1, A2 - события связанные со случайным экспериментом. P(A1) > 0. Тогда P(A1*A2) = P(A2|A1) * P(A1).
P(A1) != 0; P(A2|A1) = P(A1*A2) / P(A1)
Формула для n событий
P(A1*A2*...*An|B) = P(A1) * P(A2|A1) * P(A3|A2*A1) * ... * P(An|An-1*...*A2*A1))
Итерационно переносим по одному событию через | доказывая что условная вероятность определена, то есть P(..) > 0

1.7. Сформулировать определение пары независимых событий. Доказать критерий независимости двух событий. Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Обосновать связь этих свойств.

Парой независимых событий называют пару событий A и B, если P(AB) = P(A) * P(B)
Критерий независимости событий. 1) P(A) != 0; A и B независимые <=> P(B|A) = P(B).
=> P(B|A) = P(AB) / P(A) = P(A) * P(B) / P(A) = P(B)
<= P(AB) = P(A) * P(B|A) = P(A) * P(B)

События A1, .. An называются попарно независимыми, если для любых i, j (i != j) Ai, Aj независимые

События A1, .. An называются независимыми в совокупности, если для k от 2 до n при любых i таких что i1 < .. < ik справедливо P(Ai1*...*Aik) = P(Ai1) * ... * P(Aik)
P(Ai1, Ai2) = P(Ai1) * P(Ai2) i1 < i2 k = 2
P(Ai1, Ai2, Ai3) = P(Ai1) * P(Ai2) * P(Ai3) i1 < i2< i3 k = 3 ...

Если они независимы в совокупности, они независимы попарно
Обратное неверно
Задача про тетрайдер.

1.8. Сформулировать определение полной группы событий. Доказать теоремы о формуле полной вероятности и о формуле Байеса. Понятия априорной и апостериорной вероятностей.

События Hi составляют полную группу если
Их сумма равна пространству элементарных исходов
Вероятность каждого из них больше нуля
Они попарно несовместны

Формула полной вероятности.
P(A) = сумма P(A|Hi)*P(Hi)
Докво
P(A) = P(A*O) = P(A*(H1 + ... + Hn)) = P(AH1 + AH2 + ... + AHn) = сумма P(AHi) = сумма P(Hi)*P(A|Hi)

Формула байеса P(Hi|A) = P(AHi) / P(A)
Числитель как формула умножения
Знаменатель как формула о полной группе

P(Hi) - априорная известна до начала эксперимента
P(Hi|A) - апостериорная - становится известна после

1.9. Сформулировать определение схемы испытаний Бернулли. Доказать формулу для вычисления вероятности реализации ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Доказать следствия этой формулы.

Испытание Бернулли - случайный эксперимент, который имеет 2 элементарных исхода - успех и неуспех. Серия из n экспериментов, в которых вероятность получения успеха одинакова. Можно записать кортежем длины n, где 0 означает неуспех, а единица успех. Каждому кортежу соответствует набор позиций, в которых получен успех. Количество таких наборов C из N по k.
Вероятность получить k успехов, и n-k неуспехов равна P(“успех”)^k * (1 - P(“успех”))^(n - k). События попарно независимые.

Случилось от k1 до k2 успехов. Сумма по всем K от k1 до k2.
Случился хоть один успех. P() = 1 - P(“неуспех”)

2. Случайные величины

2.1. Сформулировать определение случайной величины и функции распределения вероятностей случайной величины. Доказать свойства функции распределения.
2.2. Сформулировать определения случайной величины и функции распределения случайной величины. Сформулировать определения дискретной и непрерывной случайной величины. Доказать свойства плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.
2.3. Сформулировать определение нормальной случайной величины, указать геометрический смысл параметров. Понятие стандартного нормального закона. Доказать формулу для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в интервал.
2.4. Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Сформулировать свойства функции распределения двумерного случайного вектора. Доказать предельные свойства.
2.5. Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Сформулировать свойства функции распределения двумерного случайного вектора. Доказать формулу для вычисления P {a1 6 X1 < b1, a2 6 X2 < b2}.

2.6. Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Сформулировать определение непрерывного случайного вектора и доказать свойства плотности распределения вероятностей для двумерного случайного вектора.
2.7. Сформулировать определение пары независимых случайных величин. Доказать свойства независимых случайных величин. Понятия попарно независимых случайных величин и случайных величин, независимых в совокупности.
2.8. Понятие условного распределения случайной величины. Сформулировать определение условного ряда распределения компоненты двумерного дискретного случайного вектора. Привести рассуждения, приводящие к такому определению. Сформулировать определение условной плотности распределения компоненты двумерного непрерывного случайного вектора. Сформулировать критерии независимости случайных величин в терминах условных распределений.
2.9. Понятие функции скалярной случайной величины. Доказать теорему о формуле для вычисления плотности fY (y) случайной величины Y = ϕ(X), если X – непрерывная случайная величина, а ϕ – монотонная непрерывно дифференцируемая функция. Сформулировать аналогичную теорему для кусочно-монотонной функции ϕ.
2.10. Понятие скалярной функции случайного вектора. Обосновать формулу для вычисления функции распределения случайной величины Y , функционально зависящей от случайных величин X1 и X2, если (X1, X2) – непрерывный случайный вектор. Доказать теорему о формуле свертки.
2.11. Сформулировать определение математического ожидания для дискретной и непрерывной случайных величин. Механический смысл математического ожидания. Доказать свойства математического ожидания. Записать формулы для вычисления математического ожидания функции случайной величины и случайного вектора.
2.12. Сформулировать определение дисперсии случайной величины. Механический смысл дисперсии. Доказать свойства дисперсии. Понятие среднеквадратичного отклонения случайной величины.
2.13. Сформулировать определение математического ожидания и дисперсии. Записать законы распределения биномиальной, пуассоновской, равномерной, экспоненциальной и нормальной случайной величин. Найти математические ожидания и дисперсии этих случайных величин.
2.14. Сформулировать определение ковариации и записать формулы для ее вычисления в случае дискретного и непрерывного случайных векторов. Доказать свойства ковариации.
2.15. Сформулировать определение ковариации и коэффициента корреляции случайных величин. Сформулировать свойства коэффициента корреляции. Сформулировать определения независимых и некоррелированных случайных величин, указать связь между этими свойствами. Понятия ковариационной и корреляционной матриц. Записать свойства ковариационной матрицы.
2.16. Понятие n-мерного нормального распределения. Сформулировать основные свойства многомерного нормального распределения.