Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт

по лабораторной работе №3

Название «Метод наименьших квадратов»

Дисциплина «Математическая статистика»

Студент ИУ7-65Б (подпись, дата) Бугаенко А.П. (Фамилия И.О.)

Преподователь (подпись, дата) Андреева Т.В. (Фамилия И.О.)

Москва, 2022

1 Цели и задачи работы

Цель работы — аппроксимация неизвестной зависимости параболой. Содержание работы:

1) Для выборки $(y_i, t_i), = \overline{1;n}$, реализовать в виде программы на ЭВМ:

   а) вычисление МНК-оценки вектора $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ (в программе обозначатеся как theta) параметров модели $y = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2$;

   б) вычисление среднеквадратичного отклонения $\delta = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - y(t_i))^2}$ (в программе обозначается как delta) полученной модели от результатов наблюдений;

   в) построение на одном графике системы точек $(y_i, t_i), i = \overline{1;n}$ и графика функции $y = y(t), t \in [t_{(1)}; t_{(n)}]$ (для полученной оценки вектора θ).

2) провести необходимые вычисления и построить соответствующие графики для выборки из индивидуального варианта.

2 Теоретическая часть

2.1 Постановка задачи аппроксимации неизвестной зависимости по результатам наблюдений

Пусть имеются результаты n наблюдений:

$$\begin{cases} y_1 = \Phi(x_1) + \xi_1 \\ ... \\ y_n = \Phi(x_n) + \xi_n \end{cases} \tag{2.1}$$

где:
$y_1, ..., y_n$ - n реализаций Y;
$\xi_1, ..., \xi_n$ - n реализаций ξ;
$x_1, ..., x_n$ - известные значения.

Задача аппроксимации - требуется на основе этих данных подобрать функцию $\hat{\Phi}$ так, чтобы она наилучшим образом аппроксимировала неизвестную функцию Φ.

2.2 Понятие МНК-оценки параметров линейной модели

В качестве функции $\hat{\Phi}$ используется функция следующего вида:
$\hat{\Phi}(x) = \theta_1\psi_1(x) + ... + \theta_p\psi_p(x)$, где: $\psi_1 ... \psi_p$ - известные функции.

Параметры $\theta_1, ..., \theta_p$ подбираются таким образом, чтобы $\hat{\Phi}(x)$ наилучшим образом аппроксимировала $\Phi(x)$. С учётом предположения о виде функции $\hat{\Phi}$ результат наблюдений можно записать в виде:
$y_i = \theta_1\psi_1(x_i) + ... + \theta_p\psi_p(x_i) + \xi_i, i = \overline{(}1; n)$
В матричном виде:
$\overrightarrow{y} = \varepsilon\overrightarrow{\theta} + \overrightarrow{\xi}$, где:

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_2(x_1) & \cdots & \psi_p(x_1) \\ \psi_1(x_2) & \psi_2(x_2) & \cdots & \psi_p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(x_n) & \psi_2(x_n) & \cdots & \psi_p(x_n) \end{pmatrix}, \qquad \vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Задача заключается в подборе $\overrightarrow{\theta}$. При этом предполагается, что систематические ошибки отсутствуют ($M\xi = 0$) и $\xi\tilde{N}(0, \sigma^2)$.

Оценка $\overrightarrow{\theta}$ вектора $\overrightarrow{\theta}$ называется оценкой, полученный по методу МНК (метода наименьших квадратов), если $\overrightarrow{\theta}$ минимизирует функцию $S(\overrightarrow{\theta}) = |y - \varepsilon\overrightarrow{\theta}|^2$.

2.3 Формулы для вычисления МНК-оценки параметров модели

Для данной работы МНК-оценка вектора $\vec{\theta}$ имеет вид:
$\hat{\vec{\theta}} = (\varepsilon^T \varepsilon)^{-1} \cdot \varepsilon^T \vec{y}$

Так как $y = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2$, то:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 \end{pmatrix}$$

Среднеквадратическое отклонение полученной модели от результатов наблюдений будет вычисляться как:
$\delta = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - y(t_i)^2)^2}$, где:
y_i - реальное значение
$y(t_i)$ - предсказанное значение.

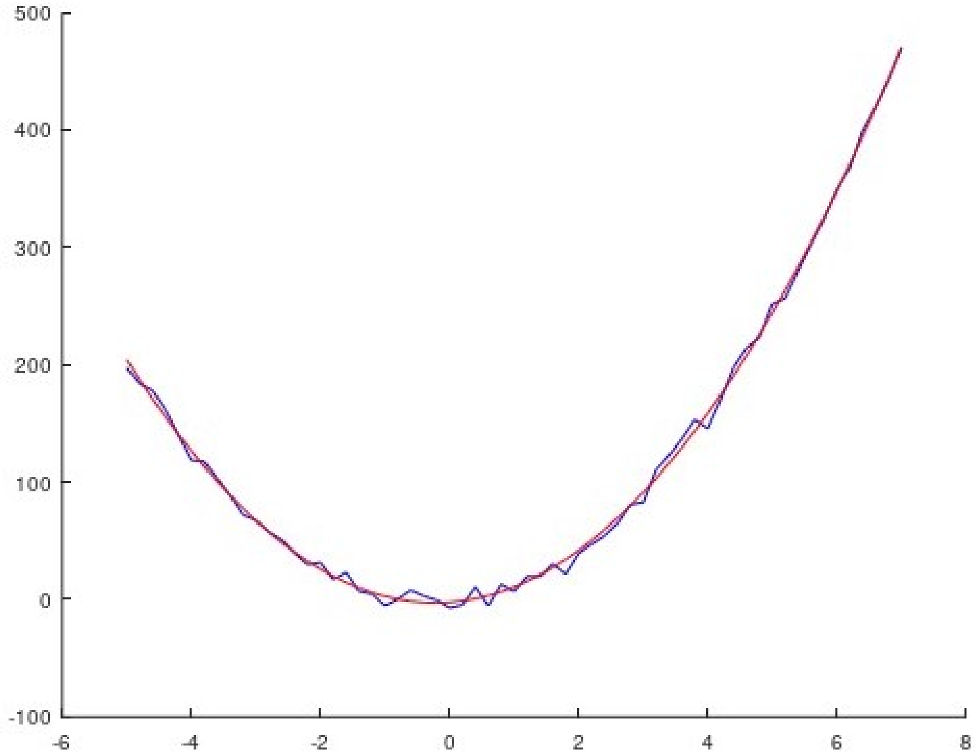
3 Практическая часть

3.1 Результаты работы для выборки по варианту

```
Lab 3
theta =

  -2.2797
   3.9880
   9.0604

delta = 43.398
```



3.2 Листинг программы

```
disp("Lab 3")
pkg load statistics

T=[-5.00,-4.80,-4.60,-4.40,-4.20,-4.00,-3.80,-3.60,-3.40,-3.20,-3.00,
-2.80,-2.60,-2.40,-2.20,-2.00,-1.80,-1.60,-1.40,-1.20,-1.00,-0.80,-0.60,
-0.40,-0.20,0.00,0.20,0.40,0.60,0.80,1.00,1.20,1.40,1.60,1.80,2.00,2.20,
2.40,2.60,2.80,3.00,3.20,3.40,3.60,3.80,4.00,4.20,4.40,4.60,4.80,5.00,
5.20,5.40,5.60,5.80,6.00,6.20,6.40,6.60,6.80,7.00];

Y=[197.43,183.86,178.27,161.81,140.28,118.66,117.68,103.34,88.89,
72.14,67.75,57.64,51.03,39.72,29.88,31.69,17.22,23.26,7.05,4.66,-5.12,
0.40,7.94,2.95,-0.36,-7.17,-4.61,10.91,-5.12,13.11,7.01,19.83,19.63,30.48,
21.92,39.36,47.14,54.18,64.60,80.99,82.72,110.69,122.67,137.00,153.09,
145.66,170.25,197.83,214.42,222.67,251.72,256.63,280.05,302.21,323.86,
349.56,367.37,399.31,419.74,442.23,470.16];

function Psi = psiMat(T)
  n = numel(T);
  p = 3;
  Psi = zeros(n, p);
  for i = 1:n
    Psi(i, 1) = 1;
    Psi(i, 2) = T(i);
    Psi(i, 3) = T(i) * T(i);
  endfor
endfunction

function delta = calcDelta(y, y_new)
  n = numel(y);
  sum = 0;
  for i = 1:n
    sum = sum + (y(i) - y_new(i)) * (y(i) - y_new(i));
  endfor
  delta = sqrt(sum);
endfunction

psiMatrix = psiMat(T);
theta = (psiMatrix' * psiMatrix) \ (psiMatrix' * Y');
disp(theta);

n = numel(Y);
y = zeros(1, n);
for i =  1:n
  y(i) = theta(1) + theta(2) * T(i) + theta(3) * T(i) * T(i);
endfor
```

```

delta = calcDelta(Y, y);
delta

figure();
hold on;
plot(T, Y, 'b');
plot(T, y, 'r');
hold off;
```