1.1.5. Интерполяция сплайнами

При увеличении степени полинома погрешность интерполяции далеко не всегда стремится к нулю. Из-за того, что коэффициенты полинома при больших степенях вычисляются с большой погрешностью, точность расчета может значительно ухудшиться. Поэтому большую популярность имеют методы аппроксимации на основе гладких кусочно-полиномиальных функций, которые в каждом интервале аргумента имеют невысокую степен, обычно до трех. Функции подобного рода называются сплайнами. Например, линейный сплайн – это ломаная линия, проходящая по точкам.

Рассмотрим кубический сплайн. Это интерполяционный полином третьей степени, который непрерывен вместе со своими первыми и вторыми производными во всей области задания табличной функции. На участке между каждой парой соседних точек имеет кубический полином вида:

$$\psi(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \qquad (1.10)$$

$$x_{i-1} \le x \le x_i, 0 \le i \le N.$$

В узлах значения многочлена и интерполируемой функции совпадают:

$$\psi(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i, \qquad (1.11)$$

$$\psi(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3, \qquad (1.12)$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}, 1 \le i \le N.$$

Число таких уравнений меньше числа неизвестных в два раза. Недостающие уравнения получают, приравнивая во внутренних узлах первые и вторые производные, вычисляемые по коэффициентам на соседних участках:

$$\psi'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$$

$$\psi''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}), \quad x_{i-1} \le x \le x_i,$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, \qquad (1.13)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i,\ 1 \le i \le N - 1. \tag{1.14}$$

Недостающие условия можно получить, полагая, например, что вторая производная равна нулю на концах участка интерполирования:

$$\psi''(x_0) = 0, c_1 = 0, \tag{1.15}$$

$$\psi''(x_N) = 0, c_N + 3d_N h_N = 0, \tag{1.16}$$

Уравнения (1.11)-(1.16) позволяют определить все $4N$ неизвестных коэффициентов: $a_i, b_i, c_i, d_i (1 \le i \le N)$.

Решение полученной системы уравнений можно сильно упростить, если привести ее к специальному виду.

Из (1.11) находятся сразу все коэффициенты a_i. Из (1.14) и (1.16) следует

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad 1 \le i \le N - 1. \tag{1.17}$$

$$d_N = -\frac{c_N}{3h_N} \tag{1.18}$$

Исключим из (1.12) d_i с помощью (1.17), получим:

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - h_i \frac{c_{i+1} - 2c_i}{3}, \quad 1 \le i \le N - 1. \tag{1.19}$$

Из (1.12) и (1.18):

$$b_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - h_N \frac{2c_N}{3} \tag{1.20}$$

Исключим теперь из (1.13) величины b_i и b_{i+1} с учетом (1.19), наращивая во втором случае индекс на 1, а величину d_i - с учетом (1.17). В результате получим систему уравнений для определения коэффициентов c_i:

$$c_1 = 0,$$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right), 2 \le i \le N-1 \qquad (1.21)$$

$$c_{N+1} = 0.$$

После нахождения коэффициентов c_i остальные коэффициенты определяют по следующим формулам:

$$a_i = y_{i-1}, 1 \le i \le N,$$

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - h_i \frac{c_{i+1} - 2c_i}{3}, \quad 1 \le i \le N-1,$$

$$b_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - h_N \frac{2c_N}{3},$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad 1 \le i \le N-1,$$

$$d_N = -\frac{c_N}{3h_N}.$$

Осталось выяснить, как решать систему (1.21). Матрица этой системы трехдиагональна, т.е. все ее элементы равны нулю, кроме тех, которые находятся на главной и двух соседних диагоналях. Такие системы удобно решать методом прогонки. Суть метода в следующем.

Применение метода исключения Гаусса для решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей приводит к тому, что система уравнений преобразуется к виду, когда в каждом уравнении содержится только два неизвестных, и при обратном ходе одно из этих неизвестных выражается через другое. Поэтому применительно к (1.21) можно записать:

$$c_i = \xi_{i+1} c_{i+1} + \eta_{i+1}, \qquad (1.22)$$

где ξ_{i+1}, η_{i+1} - некоторые, не известные пока прогоночные коэффициенты;

$$c_{i-1} = \xi_i c_i + \eta_i .$$

Подставляя последнее выражение в (1.21) и преобразуя, получим

$$c_i = -\frac{h_i}{h_{i-1}\xi_i + 2(h_{i-1} + h_i)} c_{i+1} + \frac{f_i - h_{i-1}\eta_i}{h_{i-1}\xi_i + 2(h_{i-1} + h_i)}. \qquad (1.23)$$

Сравнивая (1.22) и (1.23), получим

$$\xi_{i+1} = -\frac{h_i}{h_{i-1}\xi_i + 2(h_{i-1} + h_i)}, \eta_{i+1} = \frac{f_i - h_{i-1}\eta_i}{h_{i-1}\xi_i + 2(h_{i-1} + h_i)}. \qquad (1.24)$$

В этих формулах введено обозначение

$$f_i = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right) .$$

Из условия $c_1 = 0,$ следует $\xi_2 = 0, \eta_2 = 0$.

Теперь алгоритм решения (1.21) выглядит следующим образом. По формулам (1.24) при известных ξ_2, η_2 , равных нулю, вычисляют прогоночные коэффициенты ξ_{i+1}, η_{i+1} $(2 \le i \le N)$ (прямой ход). Затем по формулам (1.22) при условии $c_{N+1} = 0$ определяют все $\mathbf{c}_{\mathbf{i}}$ (обратный ход).

1.2. МНОГОМЕРНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

В различных приложениях широко используют двумерные и трехмерные таблицы. Например, теплофизические свойства различных веществ зависят от температуры и давления, а оптические характеристики - еще и от длины волны излучения.

При многомерной интерполяции из-за громоздкости таблиц необходимо брать достаточно большие шаги по аргументам, т.е. сетка узлов, на которой строят таблицу, получается довольно грубой. Поэтому особенно выгодно вводить преобразование переменных $\eta=\eta(y)$, $\xi=\xi(x)$, $\varphi=\varphi(z)$, подбирая подходящие формулы. При удачном выборе таких формул можно использовать в новых переменных интерполяционный полином невысокой степени.

Осуществляя многомерную интерполяцию, следует помнить, что расположение узлов не может быть произвольным. Например, при интерполяции полиномом первой степени $P_1(x,y)$ узлы не должны лежать на одной прямой в плоскости. Проверять условия подобного типа достаточно сложно, поэтому на практике целесообразно строить регулярные сетки, как правило, прямоугольные и равномерные, когда узлы являются точками пересечения двух взаимно перпендикулярных систем параллельных прямых. На этой сетке проводят простую последовательную интерполяцию: сначала по строкам, а затем по столбцам.

Покажем, как строится алгоритм на примере интерполяции двумерной табличной функции $z=f(x,y)$. Задаются степени интерполяционных полиномов по двум координатам n_x, n_y и значения аргументов x, y. Вначале проводится интерполяцию, например, по x. При этом выполняется n_y+1 одномерных интерполяций при выбранных значениях y_j, $j=0,1,..n_y$, и вычисляются значения функции $f(x,y_j)$, $j=0,1,..n_y$. А затем по полученным значениям функции, привязанным теперь к y_j, совершается одна интерполяция по y.

Точно так же, используя алгоритм двумерной интерполяции, строят алгоритм трехмерной интерполяции, на базе которого, в свою очередь, разрабатывается алгоритм интерполяции функции четырех переменных и т.д.

При последовательной интерполяции завышается степень интерполяционного полинома. При треугольной конфигурации расположения узлов степень многочлена будет минимальной. Многочлен n-й степени в форме Ньютона для двумерной интерполяции в этом случае можно представить как обобщение одномерного варианта записи:

$$P_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} z(x_0,\dots,x_i,y_0,\dots,y_j)\prod_{p=0}^{i-1}(x-x_p)\prod_{q=0}^{j-1}(y-y_q)\ .$$

(1.27)

Пример 1.4. Записать многочлен Ньютона первой и второй степени для двумерной интерполяции функции $z=z(x,y)$.

Из (1.27) получаем:

$$P_1(x,y)=z(x_0,y_0)+z(x_0,y_0,y_1)(y-y_0)+z(x_0,x_1,y_0)(x-x_0),$$

$$z(x_0,y_0,y_1)=\frac{z(x_0,y_0)-z(x_0,y_1)}{y_0-y_1}, z(x_0,x_1,y_0)=\frac{z(x_0,y_0)-z(x_1,y_0)}{x_0-x_1}$$

$$P_2(x,y)=z(x_0,y_0)+z(x_0,y_0,y_1)(y-y_0)+$$
$$+z(x_0,y_0,y_1,y_2)(y-y_0)(y-y_1)+z(x_0,x_1,y_0)(x-x_0)+$$
$$+z(x_0,x_1,y_0,y_1)(x-x_0)(y-y_0)+z(x_0,x_1,x_2,y_0)(x-x_0)(x-x_1).$$

В ряде случаев приходится все-таки использовать нерегулярные сетки. Тогда, ограничиваясь интерполяционным полиномом первой степени, имеем $z=a+bx+cy$, и его коэффициенты находят по трем узлам, выбираемым в окрестности точки интерполяции:

$$z_i=a+bx_i+cy_i,\ 0\le i\le 2$$, здесь i - номер узла.

Точно так же можно использовать полином второй степени

$$z_i=a+bx_i+cy_i+d\,x_i^2+gy_i^2+h\,x_iy_i\ ,\ 0\le i\le 5.$$

Понятно, что выбираются 6 узлов, ближайших к точке интерполяции.