

## Содержание

1	Лекция 1 . . . . .	2
1.1	Расписание и формат обучения . . . . .	2
1.2	Комментарии к первой лабораторной работе . . . . .	2
1.3	Погрешности и устойчивость . . . . .	2
1.4	Модели на основе ОДУ . . . . .	3
1.5	Явные методы Рунге-Кутта . . . . .	3
1.5.1	Метод Эйлера ( $p=1$ ) . . . . .	4
1.5.2	Численный метод Рунге-Кутта ( $p=2$ ) . . . . .	4
1.5.3	Метод Пикара (приближённый аналитический метод) . . . . .	5
2	Лекция 2 . . . . .	6
2.1	Геометрическое истолкование полученных результатов . . . . .	6
2.2	Методы Рунге-Кутта 4-го порядка точности . . . . .	7
2.3	Замечания о методах Рунге-Кутта . . . . .	8
2.4	Распространение метода Рунге-Кутта 4-го порядка на систему дифференциальных уравнений . . . . .	8
2.5	Применение метода Пикара . . . . .	8
2.6	Неявный метод Эйлера . . . . .	9
2.7	Метод Гира . . . . .	10
2.8	Замечание о многошаговых методах . . . . .	10
3	Лекция 3 . . . . .	11
3.1	Методы на основе ОДУ. Краевая задача . . . . .	11
3.2	Приближённый метод . . . . .	11
3.3	Метод коллокаций . . . . .	12
3.4	Метод Галеркина . . . . .	12
3.5	Интегральный метод наименьших квадратов . . . . .	13
3.6	Дискретный метод наименьших квадратов . . . . .	14
3.7	Метод стрельбы (численный) . . . . .	14

# 1 Лекция 1

## 1.1 Расписание и формат обучения

Приём лабораторных:

Среда: 15:40 - 17:15, 237л

17:25 - 19:00 237л

Суббота: 13:50 - 15:25 243л

15:40 - 17:15 243л

Модули:

М1: 5 неделя, минимум 12 баллов, максимум 20 баллов, одна лабораторная

М2: 12 неделя, минимум 12 баллов, максимум 20 баллов, две лабораторные

М3: 17 неделя, минимум 18 баллов, максимум 30 баллов, одна лабораторная

Сдано больше двух лабораторных - автомат на экзамене.

## 1.2 Комментарии к первой лабораторной работе

$$\left\{ u'(x) = x^2 + u^2 u(0) = 0 \right. \quad (1.1)$$

Результат:

- значения для  $x \in [0, x_{max}]$  с заданным шагом  $h$
- приближения Пикара с 1 по 4 порядок
- до второго знака после запятой - точность
- график функции в интервале  $[-x_{max}, x_{max}]$

## 1.3 Погрешности и устойчивость

Погрешности, возникающие при моделировании:

- Погрешность модели
- Погрешность метода
- Погрешность исходных данных
- Погрешность округления

Устойчивость - задача называется устойчивой (корректной), если решение единственно и устойчиво по входным данным. Плохо обусловленная задача:  $\delta y = C \delta x, C \gg 0$

## 1.4 Модели на основе ОДУ

Все дополнительные условия заданы в одной точке - задача Коши.

Все дополнительные условия заданы в разных точках - краевая задача.

Задача Коши:

$$u'(x) = f(x, u)$$

$$u(\xi) = \eta$$

Решением данной задачи является сведение уравнения к производным первого порядка при помощи замены переменных:

$$u^n(x) = f(x, u, u', \dots, u^{n-2}, u^{n-1})$$

$$u^{(k)} = u_k$$

$$\begin{cases} u'_k = u^{(k+1)} = u_{k+1}, 0 \leq k \leq n-2 \\ u'_n = f(x, u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \end{cases} \quad (1.2)$$

$$u_0 \equiv u$$

$$u_k(\xi) = \eta_k, 0 \leq k \leq n-1$$

Методы решения:

- Аналитические
- Приближенно аналитические
- Численные

Для оценки точности численных методов можно использовать правило Рунге, заключающееся в том, что если мы рассчитаем функцию с шагом  $h$  и  $h/2$ , то точность в  $x_i$  будет выражаться как:  $\frac{|y_{i,h} - y_{i,h/2}|}{2^p - 1}$ , где  $p$  - порядок точности.

## 1.5 Явные методы Рунге-Кутты

$$u'(x) = f(x, u)$$

$$u(\xi) = \eta$$

$$a \leq x \leq b$$

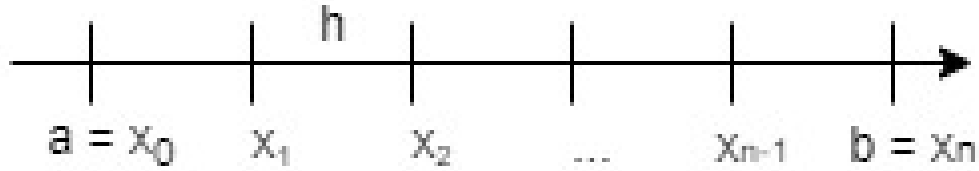


Рисунок 1.1 — Значения на числовой прямой

$$w_N = \{x_i : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N\}$$

$$w_n = \{x_i : x_i = a + ih, i = \overline{0, N}\}$$

$$y_i \rightarrow y(x_i)$$

Сходимость разностного решения к точному на отрезке:

$$\forall x_i \in [a, b] : |y_i - u_i| \rightarrow 0, h \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$$

### 1.5.1 Метод Эйлера (p=1)

$$u_{i+1} = u_i + h_i \cdot u'_i + \frac{h^2}{2!} u''_i + \frac{h^3}{3!} u'''_i + \dots$$

Здесь  $u'_i = u'(x_i); u''_i = u''(x_i) \dots$

$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, u_i)$ , если  $|y_i - u_i| = o(h^2)$ , при  $h \rightarrow 0$ , то метод имеет p-й порядок точности.

### 1.5.2 Численный метод Рунге-Кутты (p=2)

$$u_{i+1} = u_i + h u'_i + \frac{h^2}{2} u''_i + \dots$$

$$u'_i = f_i = f(x_i, u_i)$$

$$u''_i = (u'_i)' = \frac{d}{dx} f = f'_{x_i} + f'_{u_i} \cdot f_i$$

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{h^2}{2} (f'_{x_i} + f'_{y_i} \cdot f_i), (p=2), (2)$$

$$u''_i = \frac{f(x+\gamma h, y+\delta h) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{h^2}{2} \left( \frac{f(x+\gamma h, y+\delta h) - f(x, y)}{\Delta x} \right) = y_i + h [\beta f(x_i, y_i) + \alpha f(x_i + \gamma h, y_i + \delta h)] \quad (3)$$

$$y_{i+1} = y_i + h [\beta f(x_i + y_i) + \alpha (f(x_i, y_i) + f'_x \gamma h + f'_y \delta h)] = y_i + h [(\alpha + \beta) f(x_i, y_i) + \alpha \gamma h f'_x + \alpha \delta h f'_y] \quad (4)$$

Сравним (2) и (4):

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha \delta = \frac{1}{2} f(x_i, y_i) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \gamma = \frac{1}{2\alpha} \\ \delta = \frac{1}{2\alpha} f(x_i, y_i) \end{cases} \quad (1.4)$$

Из (3) видим, что:

$y_{i+1} = y_i + h[(1 - \alpha)f(x_i, y_i) + \alpha f(x_i + \frac{1}{2\alpha}h, y_i + \frac{h}{2\alpha}f(x_i, y_i))]$ , на практике  $\alpha = 1, \alpha = \frac{1}{2}$

### 1.5.3 Метод Пикара (приближённый аналитический метод)

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

$$\frac{du}{dx} = f(x, u(x))$$

$$u(x) = u(\xi) + \int_{\xi}^x f(t, u(t))dt$$

$$y^{(\delta+1)}(x) = u(\xi) + \int_{\xi}^x f(t, y^{(\delta)}(t))dt$$

В лабораторной показать Пикара нужной точности (от 1 до 4).

## 2 Лекция 2

$$y_{n+1} = y_n + h_n[(1 - \alpha)f(x_n, y_n) + \alpha f(x_n + \frac{h_n}{2\alpha}, y_n + \frac{h_n}{2\alpha}f(x_n, y_n))] + O(\max h_n^2)$$

### 2.1 Геометрическое истолкование полученных результатов

Рассмотрим для  $\alpha = 1$ :

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n))$$

$$1) y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n)$$

$$2) y'_n = f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}})$$

$$3) y_{n+1} = y_n + h_n y'_n$$

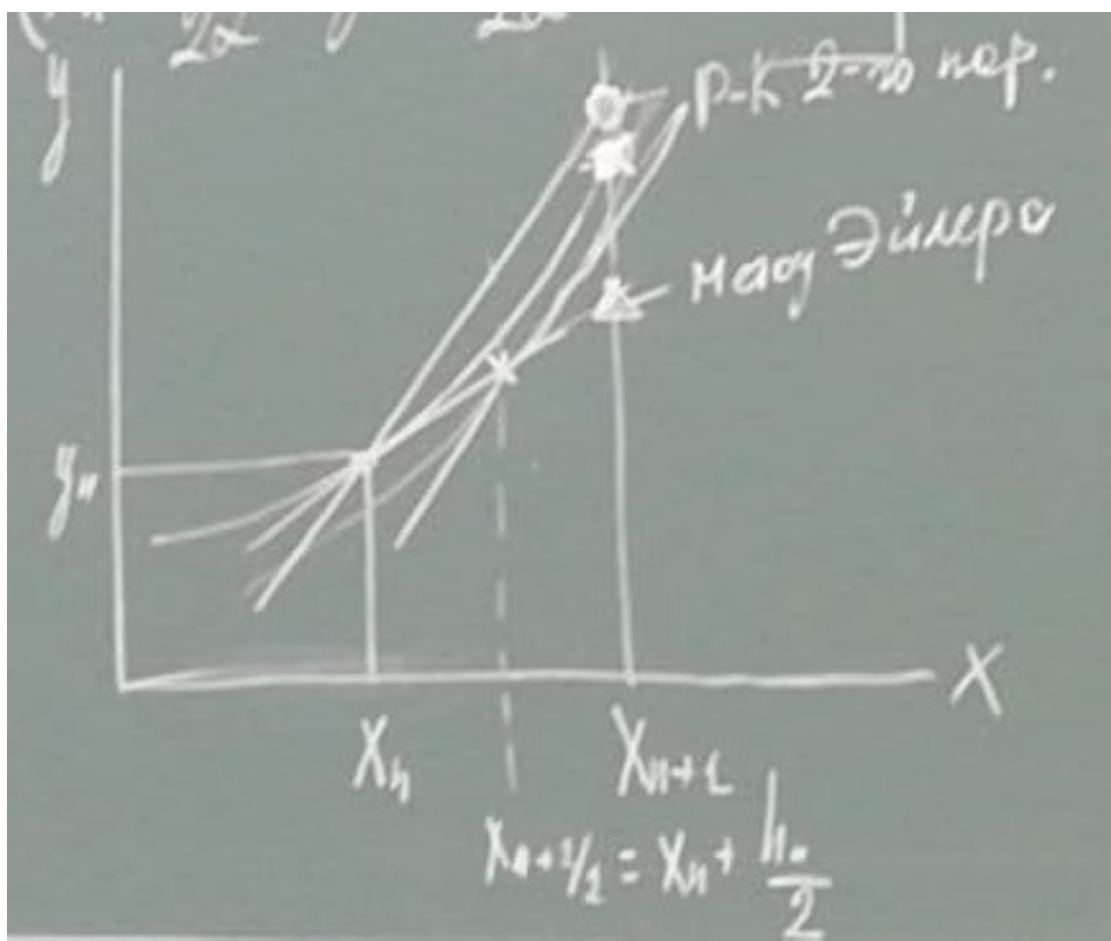


Рисунок 2.1 — Геометрические результаты для  $\alpha = 1$

Рассмотрим для  $\alpha = \frac{1}{2}$ :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n))]$$

$$1) \overline{y_{n+1}} = y_n + h_n f(x_n, y_n)$$

$$2) y'_{n+1} = f(x_n + h_n, \overline{y_{n+1}})$$

$$3) y'_{cp} = \frac{1}{2}(f(x_n, y_n) + y'_{n+1})$$

$$4) y_{n+1} = y_n + h_n \cdot y'_{cp}$$

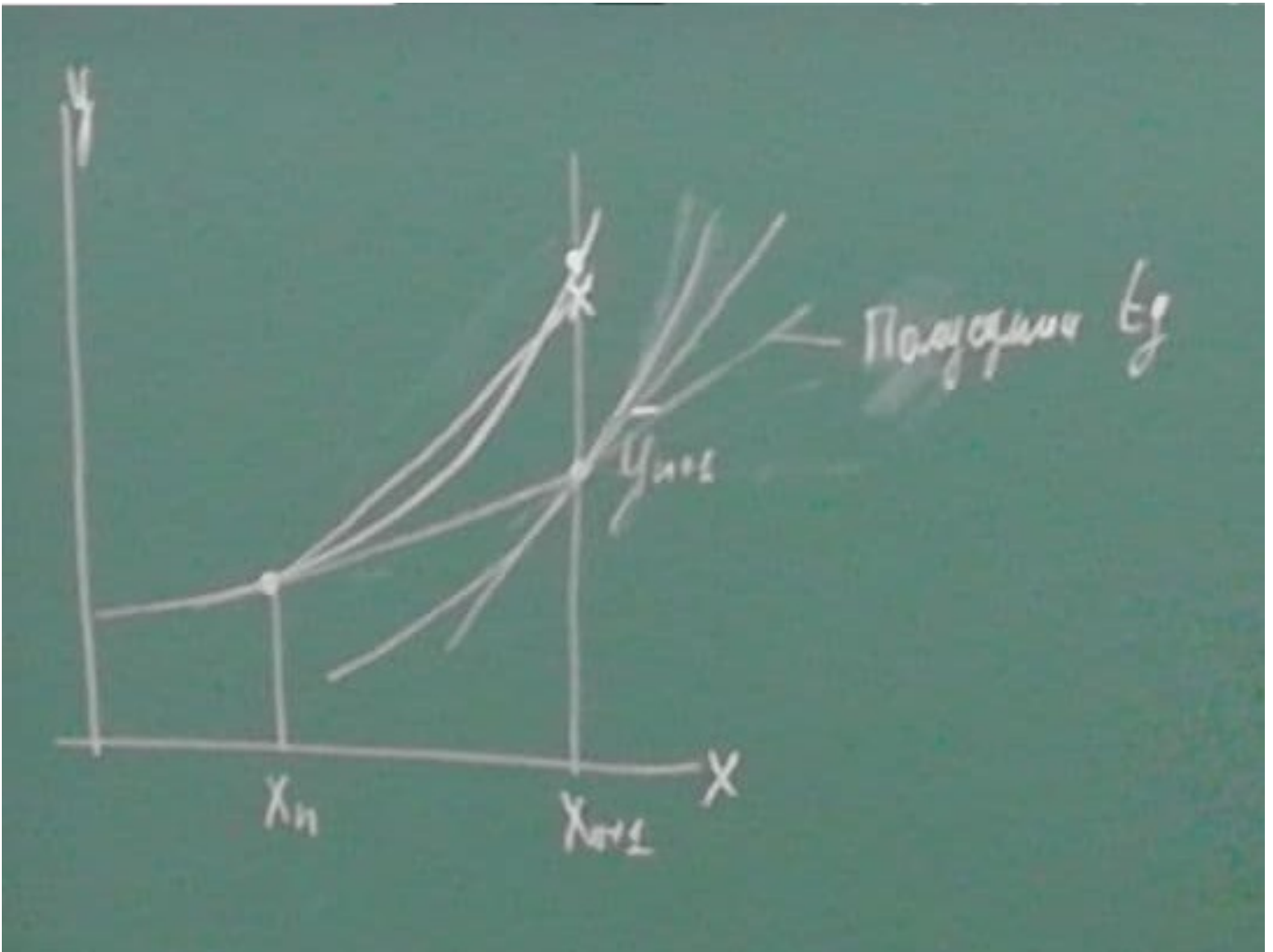


Рисунок 2.2 — Геометрические результаты для  $\alpha = 1/2$

## 2.2 Методы Рунге-Кутты 4-го порядка точности

Формула обеспечивает переход из узла  $n$  в узел  $n + 1$ :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

Посмотрим, как формируется порядок точности в специальном варианте правой части:

$$u'(x) = f(x)$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$$

$$\text{При } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n) + f(x_{n+1}))$$

По методу трапеции:

$$R_{trap} \leq \frac{x_N - x_0}{12} h^2 \cdot \max |f'(x)|$$

Рунге-Кутта 4-го порядка:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (f(x_n) + 4f(x_n + \frac{h}{2}) + f(x_n + h)) - \text{метод Симпсона}$$

$$R_{simp} \leq \frac{x_n - x_0}{190 \cdot 16} h^4 \cdot \max |f^{IV}(x)|, x_0 \leq x \leq x_n$$

### 2.3 Замечания о методах Рунге-Кутта

- 1) методы явные - позволяет за строго зафиксированное количество шагов перейти из одного узла в другой
- 2) позволяет производить расчёты с переменным шагом
- 3) если нужных производных при интегрировании нет, то применение метода Симпсона бессмысленно, т.е. метод трапеции, треугольника и тд.

### 2.4 Распространение метода Рунге-Кутта 4-го порядка на систему дифференциальных уравнений

На примере метода Рунге-Кутта 4-го порядка рассмотрим распространить результат на систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} u' = f(x, u, v) \\ v' = \phi(x, u, v) \\ u(\xi) = \eta_1 \\ v(\xi) = \eta_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$u = y, v = z$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4}{6}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n, z_n), q_1 = h\phi(x_n, y_n, z_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{q_1}{2}), q_2 = h\phi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{q_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{q_2}{2}), q_3 = h\phi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{q_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3, z_n + q_3), q_4 = h\phi(x_n + h, y_n + k_3, z_n + q_3)$$

Способ расчёта выше применяется в вычислениях во второй лабораторной работе.

### 2.5 Применение метода Пикара

Возвращаясь к методу Пикара, сформулируем условие сходимости приближённого решения к точке.



- решение в ограниченной области
- правая часть  $f$  непрерывна
- условия Липшеца:  $a \leq x \leq b, |f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq \mathcal{L}|u_1 - u_2|$

## 2.6 Неявный метод Эйлера

$$u' = f(x, u)$$

В явном методе Эйлера -  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

В неявном методе Эйлера -  $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$  Последствия:

- 1) Решения может не быть, либо может быть несколько
- 2) Для решения уравнения необходимо подобрать метод

Применяется часто, поскольку является устойчивым.

Пример:

$$u' = -\alpha u, \alpha > 0$$

аналитическое решение:  $u(x) = ce^{-\alpha x}$

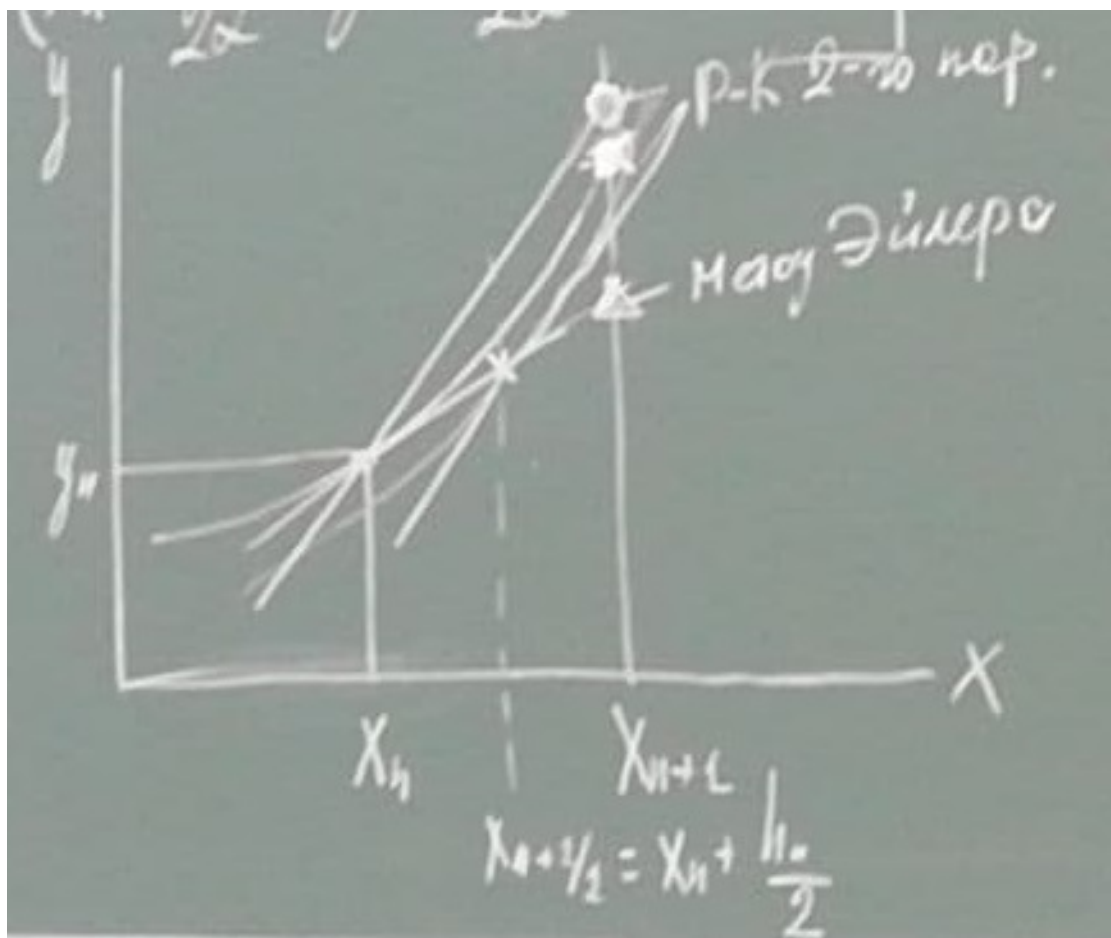


Рисунок 2.3 — Сравнение явного и неявного метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n - \alpha y_n h = y_n(1 - \alpha h), 1 - \alpha h > 0, h < \frac{1}{2}$$

Применение явного метода может привести к расходящимся решениями и имеет ограничения на  $\alpha$ . Чем больше  $\alpha$ , тем больше шаг.

Неявный метод:

$$y_{n+1} = y_n - \alpha y_{n+1} h$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \alpha h} - \text{ограничений на } h \text{ нет.}$$

В общем виде:

$$\sum_{k=0}^m a_k y_{n-k} = h(f(x_n, y_n))$$

$$m = 1, a_0 = 1, a_1 = -1$$

$$y_n - y_{n-1} = hf(x_n, y_n) - \text{метод Эйлера.}$$

## 2.7 Метод Гира

При  $m = 2$ :

$$\frac{3}{2}y_n - 2y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} = hf(x_n, y_n) + O(h^2)$$

При  $m = 3$ :

$$\frac{11}{3}y_n - 3y_{n-1} + \frac{3}{2}y_{n-2} - \frac{1}{3}y_{n-3} = hf(x_n, y_n) + O(h^3)$$

Формул более высокого порядка точности не существует. Благоприятны с точки устойчивости решений.

## 2.8 Замечание о многошаговых методах

В многошаговых методах для получения решения в неизвестном узле необходимо знать значения в определённом количестве предыдущих узлов.

### 3 Лекция 3

#### 3.1 Методы на основе ОДУ. Краевая задача

Дифференциальное уравнение второго порядка может быть сведено к уравнению первого порядка. В самом общем виде краевая задача формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} u'_k(x) = f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_n), k = \overline{1, n} \\ \phi_k(\xi_k, u_1(\xi_k), u_2(\xi_k), \dots, u_n(\xi_k)) = 0, k = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.1)$$

Методы решения:

- Аналитические
- Приближённые
- Численные

#### 3.2 Приближённый метод

Все функции от  $x$  - заданные, надо найти  $u$ .

$$\begin{cases} u'(x) + p(x)u'(x) + g(x)u(x) = f(x) \\ \alpha_1 u'(a) + \beta_1 u(a) = y_1 \\ \alpha_2 u'(a) + \beta_2 u(a) = y_2 \\ a \leq x \leq b \end{cases} \quad (3.2)$$

$$Lu = u'(x) + p(x)u'(x) + g(x)u(x)$$

$$l_a u = \alpha_1 u' + \beta_1 u$$

$$l_b u = \alpha_2 u' + \beta_2 u$$

$$\begin{cases} Lu = f(x) & (1) \\ l_a u = y_1 & (2.1) \\ l_b u = y_2 & (2.2) \end{cases} \quad (3.3)$$

Решение ищем в виде:

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^n C_k u_k(x)$$

$$u_k(x) \rightarrow \begin{cases} L u_k = 0 \\ l_a u_k = 0 \\ l_b u_k = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = Ly - f(x) = Lu_0(x) + \sum_{k=1}^n C_k L u_k(x) - f(x)$$

### 3.3 Метод коллокаций

Выбираем множество точек  $x_i, i = 1, \dots, n$

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, i = \overline{1, n}$$

Пример:

$$\begin{cases} u^n + (1 + x^2)u + 1 = 0 \\ u(-1) = 0, u(1) = 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$u_0(x) = 0, u_1(x) = x^{2k-2}(1 - x^2), k = 1, 2, \dots, n$$

Точки коллокации -  $n = 2, x_1 = 0, x_2 = 0.5$

$$y(x) = C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4)$$

$$R(x, C_1, C_2) = 1 - C_1(1 + x^4) + C_2(2 - 11x^2 - x^6)$$

Приравниваем полученное выше выражение к нулю в точках коллокации:

$$x = 0, C_1 - 2C_2 = 1$$

$$x = 0.5, 1.0625C_1 + 0.7656C_2 = 1$$

$$\text{Решение: } C_1 = 0.9568, C_2 = -0.0216$$

$$\text{Окончательное решение: } y(x) = 0.1568(1 - x^2) - 0.0216(x^2 - x^4)$$

Чем больше точек коллокация. тем лучше полученная функция будет совпадать с точным решением.

### 3.4 Метод Галеркина

$u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)$  - система ортогональных линейно-независимых функций,  $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b f(x)u_i(x)dx = 0, i = \overline{1, m} \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\int_a^b R(x, C_1, C_2, \dots, C_n)u_i dx = 0, i = \overline{1, m}$$

$$\int_a^b u_m L u dx + \sum_{k=1}^n C_k \int_a^b u_k L u dx - \int_a^b u_m f(x) dx = 0, m = 1, 2, \dots, n$$

Пример:

$$\begin{cases} u'' + xu' + u = 2x \\ u(x) = 1 \\ u(1) = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$u_0(x) = 1 - x$$

$$u_1(x) = x^k(1 - x), k = 1, 2, \dots, n$$

$$n = 3$$

$$y(x) = (1 - x) + C_1x(1 - x) + C_2x^2(1 - x) + C_3x^3(1 - x)$$

$$R(x, C_1, C_2, C_3) = 1 + 3x + C_1(-2 + 2x - 3x^2) + C_2(2 - 6x + 3x^2 - 4x^4) + C_3(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4)$$

Выполняя процедуру Галёркина, получим систему интегралов от трёх функций:

$$\int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x - x^2)dx = 0$$

$$\int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x^2 - x^3)dx = 0$$

$$\int_0^1 R(x, C_1, C_2, C_3)(x^3 - x^4)dx = 0$$

В результате получим систему из трёх уравнений:

$$133C_1 + 63C_2 + 36C_3 = -70$$

$$140C_1 + 108C_2 + 79C_3 = -98$$

$$264C_1 + 252C_2 + 211C_3 = -210$$

В результате получаем следующие коэффициенты:  $C_1 = -0.209$ ,  $C_2 = -0.789$ ,  $C_3 = 0.209$

$$y(x) = (1 - x)(1 - 0.209x - 0.789x^2 + 0.209x^3)$$

### 3.5 Интегральный метод наименьших квадратов

$$\int_a^b \Phi^2(x, C_1, C_2, \dots, C_n)dx \rightarrow \min$$

$$\frac{d\Phi}{dC_2} = 0, \int_a^b 2R(x, C_1, \dots, C_n) \frac{dR}{dC_2} dx = 0, k = 1, 2, \dots, n$$

Пример:

Из метода коллокаций:

$$R(x) = 1 - (1 + x^2)C_2 + (2 - 11x^2 - x^6)C_2$$

$$\frac{1d\Phi}{2dC_1} = - \int_0^1 (1 - (1 + x^2)C_1 + (2 - 11x^2 - x^6)C_2)(1 + x^2)dx = 0$$

$$\frac{1d\Phi}{2dC_2} = - \int_0^1 (1 - (1 + x^4)C_1 + (2 - 11x^2 - x^6)C_2)(2 - 11x^2 - x^6)dx = 0$$

$$\begin{cases} \frac{68}{45}C_1 + \frac{3548}{1155}C_2 = \frac{5}{4} \\ \frac{3548}{1155}C_1 + \frac{63404}{4035}C_2 = \frac{38}{91} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$C_1 = 0.985, C_2 = -0.078$$

$$y(x) = 0.985(1 - x^2) - 0.078(x^2 - x^4)$$

### 3.6 Дискретный метод наименьших квадратов

$$\Phi = \sum_{i=1}^N R^2(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \rightarrow \min$$

Если взять  $N \gg n$ , то метод будет работать. Если взять  $N = n$ , то метод перейдёт в метод коллокаций, надо будет показать в лабе.

### 3.7 Метод стрельбы (численный)

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = f(x, u, v) \quad (3.1) \\ v'(x) = \phi(x, u, v) \quad (3.2) \\ \Xi(u(a), v(a)) = 0 \quad (4) \\ \psi(u(b), v(b)) = 0 \quad (5) \\ a \leq x \leq b \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Берем некое  $u(a) = \xi$ , тогда из (u):

$$\Xi(\xi, u(a)) = 0 \rightarrow v(a) = \gamma(\xi)$$

Сводится к задаче Коши, решаем уравнение численно

Например, если краевое условие - линейное, то  $\alpha_1 u(a) + \beta_1 v(a) = \delta_1, v(a) = \frac{\delta_1 - \alpha_1 \xi}{\beta_1}$

$$\psi(u(b, \xi), v(b, \xi)) = \bar{\psi}(\xi) \neq 0$$