Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программная инженерия»

Лабораторная работа № 6

Тема Построение и реализация алгоритмов численного дифференцирования.

Студент Бугаенко Андрей Павлович

Группа **ИУ7-45Б**

Оценка (баллы)

Преподаватель Градов В.М.

Москва.
2020 г

Цель работы:

Получение навыков построения алгоритма вычисления производных от сеточных функций.

Задание:

Задана табличная (сеточная) функция. Имеется информация, что закономерность, представленная этой таблицей, может быть описана формулой

$$y = \frac{a_0 x}{a_1 + a_2 x},$$

параметры функции неизвестны **и определять их не нужно**.

x	y	1	2	3	4	5
1	0.571					
2	0.889					
3	1.091					
4	1.231					
5	1.333					
6	1.412					

Вычислить первые разностные производные от функции и занести их в столбцы (1)-(4) таблицы:

1 - односторонняя разностная производная ,

2 - центральная разностная производная,

3- 2-я формула Рунге с использованием односторонней производной,

4 - введены выравнивающие переменные.

В столбец 5 занести вторую разностную производную.

Результаты работы программы:

Заполненная таблица с краткими комментариями по поводу использованных формул и их точности

Результаты работы:

n	x_n	y_n	1	2	3	4	5
0	**1**	**0.571**	0.318	0.376	0.376	0.408	-0.116
1	**2**	**0.889**	0.202	0.260	0.233	0.247	-0.166
2	**3**	**1.091**	0.140	0.171	0.159	0.165	-0.062
3	**4**	**1.231**	0.102	0.121	0.113	0.118	-0.038
4	**5**	**1.333**	0.079	0.090	0.083	0.089	-0.023
5	**6**	**1.412**	0.079	0.067	0.068	0.089	-0.023

Односторонняя разностная производная – вычисляем первые разностные производные для первых пяти точек. Последняя производная вычисляется с помощью формулы левой разностной производной. Первый порядок точности.

Центральная разностная производная – Для нахождения крайних точек были использованы следующие формулы нахождения разностной производной второго порядка точности:

$$y'_0=\frac{-y_2+4y_1-3y_0}{2h}$$

$$y'_5=\frac{3y_5-4y_4+y_3}{2h}$$

2-я формула Рунге с использованием односторонней производной – выведем формулы повышения точности правой разностной производной:

$$y'_n=\frac{y_{n+1}-y_n}{h}+O(h),\ \ p=1$$

$$\Phi(h)=\frac{y_{n+1}-y_n}{h}$$

$$\Phi(mh)=\frac{y_{n+m}-y_n}{mh}\ \ \rightarrow\ \ \Phi(2h)=\frac{y_{n+2}-y_n}{2h}$$

$$y'_n=\Phi(h)+\frac{\Phi(h)-\Phi(mh)}{m^p-1}+O(h^{p+1})$$

$$y'_n=2\Phi(h)-\Phi(2h)+O(h^2)$$

$$y'_n=\frac{2y_{n+1}-2y_n}{h}-\frac{y_{n+2}-y_n}{2h}+O(h^2)=\frac{-y_{n+2}+4y_{n+1}-3y_n}{2h}+O(h^2)$$

Аналогично для левой разностной производной:

$$y'_n=\frac{3y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}}{2h}+O(h^2)$$

При построении используем формулу правой разностной производной для заполнения всех узлов кроме двух последних.

С использованием выравнивающих переменных – с помощью замены превратим исходную зависимость в линейное выражение.

$$y = \frac{a_0 x}{a_1 + a_2 x}$$

$$\xi(x) = \frac{1}{x}, \quad \eta(y) = \frac{1}{y}$$

$$a_0 \eta = a_1 \xi + a_2$$

Затем выразим производную функции в новых переменных:

$$d\xi = -\frac{dx}{x^2}, \quad d\eta = -\frac{dy}{y^2} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}\frac{d\eta}{d\xi}$$

Производная может быть без потери точности представлена своим разностным аналогом за счёт того, что у нас линейная зависимость:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta_{n+1} - \eta_n}{\xi_{n+1} - \xi_n} = \frac{\dfrac{1}{y_{n+1}} - \dfrac{1}{y_n}}{\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}} = \frac{(y_n - y_{n+1})}{y_n y_{n+1}} \frac{x_n x_{n+1}}{(x_n - x_{n+1})}$$

Получаем выражение для вычисления значений производной исходной функции:

$$y'_n = \frac{y_n}{x_n} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \frac{(y_n - y_{n+1})}{(x_n - x_{n+1})}$$

2-я разностная производная - Воспользуемся простыми формулами, в которых для начального и конечного узлов порядок точности будет равен единице, тогда как для всех остальных будет равен двум.

Для первого узла:

$$y''_0 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + O(h)$$

Для остальных узлов:

$$y''_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Для последнего узла:

$$y''_n = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} + O(h)$$

Контрольные вопросы:

1. Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для первой разностной производной y'_N в крайнем правом узле x_N.

Воспользуемся разложениями в ряды Тейлора для узлов y_{N-1} и y_{N-2}:

$$y_{N-1} = y_N - h\,y'_N + \frac{h^2}{2} y''_N + O(h^3)$$
$$y_{N-2} = y_N - 2h\,y'_N + 2h^2 y''_N + O(h^3)$$

Избавимся от слагаемых второй степени:

$$4\,y_{N-1} - y_{N-2} = 3\,y_N - 2h\,y'_N + O(h^3)$$

И выразим искомое значение разностной производной:

$$y'_N = \frac{3\,y_N - 4\,y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} + O(h^2)$$

2. Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для второй разностной производной y''_0 в крайнем левом узле x_0.

Снова воспользуемся разложениями в ряды Тейлора:

$$y_1 = y_0 + h\,y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + O(h^3)$$
$$y_2 = y_0 + 2h\,y'_0 + 2h^2 y''_0 + O(h^3)$$

Выразим первую разностную производную с порядком точности O(h):

$$2\,y_1 - y_2 = y_0 - h^2 y''_0 + O(h^3) \quad \rightarrow \quad y''_0 = \frac{y_2 - 2\,y_1 + y_0}{h^2} + O(h)$$

Теперь используем 2-ую формулу Рунге для повышения степени точности формулы:

$$y''_0 = \frac{y_2 - 2\,y_1 + y_0}{h^2} + O(h)$$

$$\Phi(h) = \frac{y_2 - 2\,y_1 + y_0}{h^2}, \quad \Phi(mh) = \frac{y_{2m} - 2\,y_m + y_0}{(mh)^2} \quad \rightarrow \quad \Phi(2h) = \frac{y_4 - 2\,y_2 + y_0}{4\,h^2}$$

$$y''_0 = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})$$
$$y''_0 = 2\Phi(h) - \Phi(2h) + O(h^2)$$

$$y''_0 = \frac{2y_2 - 4\,y_1 + 2\,y_0}{h^2} - \frac{y_4 - 2\,y_2 + y_0}{4\,h^2} + O(h^2) = \frac{-y_4 + 10\,y_2 - 8\,y_1 + 7\,y_0}{4\,h^2} + O(h^2)$$

3. Используя 2-ую формулу Рунге, дать вывод выражения (9) из Лекции №7 для первой производной y'_0 в левом крайнем узле

$$y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2).$$

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h), \quad p = 1$$

$$\Phi(h) = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad \Phi(2h) = \frac{y_2 - y_0}{2h}$$

$$y'_0 = 2\Phi(h) - \Phi(2h) + O(h^2)$$

$$y'_0 = \frac{2y_1 - 2y_0}{h} - \frac{y_2 - y_0}{2h} + O(h^2) = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} + O(h^2)$$

4. Любым способом из Лекций №7, 8 получить формулу порядка точности $O(h^3)$ для первой разностной производной y'_0 в крайнем левом узле x_0.

Вопользуемся 2-ой формулой Рунге для выражение полученного в предыдущем пункте:

$$y'_0 = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} + O(h^2), \quad p = 2$$

$$\Phi(h) = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}, \quad \Phi(2h) = \frac{-y_4 + 4y_2 - 3y_0}{4h}$$

$$y'_0 = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})$$

$$y'_0 = \frac{4\Phi(h) - \Phi(2h)}{3} + O(h^3)$$

$$y'_0 = \frac{y_4 - 12y_2 + 16y_1 - 3y_0}{12h} + O(h^3)$$