1. Что называют:

Случайное испытание – эксперимент, исход которого нельзя определить однозначно условиями проведения опыта.

Элементарное событие (элементарный исход) – любой простейший (т. е. неделимый в условиях данного опыта) исход опыта. Элементарные события являются взаимоисключающими.

Пространство элементарных событий (исходов) – множество всех элементарных исходов.

Случайным событием называют любой набор элементарных исходов, т. е. произвольное подмножество пространства элементарных исходов.

2. Дайте определение вероятности по Лапласу (комбинаторное определение).

Вероятностью события A называют отношение числа N_A благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу N равновозможных элементарных исходов, т. е. $P(A) = N_A / N$. Данное определение вероятности события принято называть классическим определением вероятности.

Свойства: 1) $P(A) \geq 0$; 2) для достоверного события $P(\Omega) = 1$; 3) если события A и B несовместны (AB = $\varnothing$), то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

3. Дайте геометрическое определение вероятности. Что общего между геометрическим определением вероятности и определением вероятности по Лапласу?

Вероятностью события A называют число P(A), равное отношению меры множества A к мере множества Ω: $P(A) = \mu(A)/\mu(\Omega)$. Геометрическая вероятность сохраняет свойства вероятности *P(A)* в условиях классической схемы. Обобщает классическое на случай бесконечного множества элементарных исходов Ω тогда, когда представляет собой подмножество пространства R, R^2,R^n.

4. Дайте аксиоматическое (по Колмогорову) определение вероятности.

Пусть каждому событию A (т. е. подмножеству A пространства элементарных исходов Ω) поставлено в соответствие число P(A). Числовую функцию P называют вероятностью (или вероятностной мерой), если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1) аксиома неотрицательности: $P(A) \geq 0$
2) аксиома нормированности: $P(\Omega) = 1$
3) расширенная аксиома сложения: для любых попарно несовместных событий $A_1,\ldots,A_n,\ldots$ справедливо равенство: $P(A_1+\ldots+A_n+\ldots) = P(A_1)+\ldots+P(A_n)+\ldots$

Значение P(A) называют вероятностью события A.

5. Используя аксиоматическое (по Колмогорову) определение вероятности, докажите утверждения.

Вероятность удовлетворяет следующим свойствам:

1. Вероятность противоположного события: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. *Вероятность невозможного события: $P(\varnothing) = 0$*
3. *Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$*
4. Вероятность заключена между 0 и 1: $0 \leq P(A) \leq 1$
5. *Вероятность объединения двух событий:* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
6. Вероятность объединения любого конечного числа событий:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) -$$
$$-P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \ldots - P(A_{n-1}A_n) + P(A_1A_2A_3) + \ldots + (-1)^n P(A_1A_2 \ldots A_n)$$

Доказательство.

Поскольку $\Omega = A + \overline{A}$, то, согласно расширенной аксиоме сложения, $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$, откуда с учетом аксиомы нормированности получаем утв. 1. Утв. 2 вытекает из равенства $A = A + \varnothing$ и расширенной аксиомы сложения. Пусть $A \subset B$. Тогда $B = A + (B \backslash A)$. В соответствии с расширенной аксиомой сложения $P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$. Отсюда и из аксиомы неотриц. приходим к утв. 3. В частности, так как всегда $A \subset \Omega$, то с учетом аксиомы неотриц. получаем утв. 4. Поскольку $A \cup B = A + (B \setminus A)$, $B = (B \setminus A)$, то, используя расширенную аксиому сложения, находим $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$ и $P(B) = P(B \setminus A) + P(AB)$. Подставляя в первое из последних двух равенств вероятность P(B\A), выраженную из второго равенства, приходим к утв. 5. Утв. 6 можно доказать с помощью метода матем. индукции. Так, для трех событий A, B и C:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A(B \cup C)) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB \cup AC) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$$

6. Дайте определение условной вероятности. Как связаны условная и безусловная вероятности? Что понимают под теоремой умножения вероятностей?

Условной вероятностью события А при условии (наступлении) события В называют отношение вероятности пересечения событий А и В к вероятности события В: $P(A \mid B) = P(AB)/P(B)$. При этом предполагают, что $P(B) \neq 0$. Условная вероятность P(A|B) обладает всеми свойствами безусловной вероятности P(A)(Доказать аксиомы для условной вероятности). Смысл заключ. в том что условная вероятность есть безусловная вероятность, заданная в новом пространстве элементарных исходов, совпадающем с событием В.

Теорема умножения вероятностей. Пусть событие $A=A_1A_2\ldots A_n$ (т. е. А – пересечение событий $A_1, A_2,\ldots, A_n$) и P(A)>0. Тогда справедливо равенство: $P(A) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1A_2) \ldots P(A_n|A_1A_2,,,A_{n-1})$, называемое формулой умножения вероятностей. $P(A_n \mid A_1A_2...A_{n-1}) = P(A_1A_2...A_n)/P(A_1A_2...A_{n-1})$

7. Дайте определение:

События А и В, имеющие ненулевую вероятность, называют ***независимыми***, если условная вероятность А при условии В совпадает с безусловной вероятностью А или если условная вероятность В при условии А совпадает с безусловной вероятностью В, т. е. P(A|B) = P(A) или P(B|A) = P(B). В противном случае события А и В называют зависимыми. ***События зависимы тогда и только тогда, когда*** $P(AB) = P(A)P(B)$ ***(по формуле умножения).***

Предположим, что в результате опыта может произойти одно из n событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) они являются попарно несовместными, т. е. $H_iH_j = \varnothing$ при $i \neq j$
2) их объединение есть достоверное событие: $H_1 \cup ... \cup H_n = \Omega$.

События $H_1, \ldots, H_n$ называются гипотезами. Если события удовлетворяют второму из этих условий, то их совокупность называют ***полной группой событий***. Гипотезы – это попарно несовместные события, образующие полную группу событий.

8. Выведите формулу полной вероятности.

Пусть для некоторого события А и гипотез $H_1, \ldots, H_n$ известны $P(H_1), \ldots, P(H_n)$, которые положительны, и $P(A|H_1),\ldots, P(A|H_n)$. Тогда безусловную вероятность P(A) определяют по формуле: $P(A) = P(H_1)P(A|H_1)+\ldots+P(H_n)P(A|H_n)$, которую называют **формулой полной вероятности**.

Доказательство. Представим событие А в виде: $A=A\Omega=A(H_1+\ldots+H_n)=AH_1+\ldots+AH_n$. С учетом того, что события AH_i несовместны для i=1…n, имеем: $P(A)=P(AH_1)+\ldots+P(AH_n)$. В соответствии с формулой умножения вероятностей получаем: $P(AH_1)=P(H_1)P(A|H_1)$, … , $P(AH_n)=P(H_n)P(A|H_n)$. Поэтому $P(A) = P(H_1)P(A|H_1)+\ldots+P(H_n)P(A|H_n)$.

9. Получите формулу Байеса.

Пусть для некоторого события А, P(A)>0, и гипотез $H_1, \ldots, H_n$ известны $P(H_1), \ldots, P(H_n)$ ($P(H_i)>0$, i=1…n) и $P(A|H_1), \ldots, P(A|H_n)$. Тогда условная вероятность P(Hi|A), i=1…n, гипотезы Hi при условии события А определяется ***формулой Байеса***: $P(H_i \mid A) = \dfrac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(H_1)P(A \mid H_1)+...+P(H_n)P(A \mid H_n)}$.

Доказательство. Согласно определению условной вероятности (см. вопрос 6), $P(H_i \mid A) = P(AH_i)/P(A)$. Выражая теперь по формуле умножения вероятностей $P(AH_i)$ через $P(A|H_i)$ и $P(H_i)$, получаем $P(AH_i)=P(H_i)P(A|H_i)$. Поэтому $P(H_i \mid A) = \dfrac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)}$. Подставляя вместо вероятности P(A) ее значение, вычисленное в соответствии с формулой полной вероятности (см. вопрос 8), приходим к утверждению теоремы.

10. Дайте определение независимых испытаний. Что понимают под схемой Бернулли?

Независимые испытания – вероятность успеха в k-м испытании не зависит от исходов всех испытаний до k-го.

Схемой Бернулли (или последовательностью независимых одинаковых испытаний, или биномиальной схемой испытаний) называют последовательность испытаний, удовлетворяющую следующим условиям:

1) при каждом испытании различают лишь два исхода: «успех» (появление события А) и «неудача»(появление события $\overline{A}$)
2) испытания являются независимыми
3) вероятность успеха во всех испытаниях постоянна и равна P(A) = p. Вероятность неудачи обозначим q=1-p.

11. Докажите, что при n испытаниях по схеме Бернулли вероятность P_{nm} того, что ровно m из них будут успешными, определяется равенством: $P_{nm} = C_n^m \cdot p^m (1-p)^{n-m}$**.**

Доказательство. Пространство элементарных исходов Ω состоит из 2^n исходов, каждый из которых отождествляется с определенной последовательностью УНН...У. Каждому элементарному исходу ω=УННУ…УН можно поставить в соответствие вероятность P(ω) = P(УНН...У). В силу независимости испытаний события У, Н, Н,..., У являются независимыми, поэтому по теореме умножения вероятностей имеем: $P(\omega) = p^i q^{n-i}$, если успех имел место i раз. Событие A_m происходит всякий раз, когда реализуется элементарный исход ω, в котором i=m. Вероятность любого такого элементарного исхода равна $p^m q^{n-m}$. Число таких исходов совпадает с числом способов, которыми можно расставить m букв «У» на n местах, не учитывая порядок, в котором их расставляют. Число таких способов равно C_n^m. Так как A_m есть объединение (сумма) всех указанных элементарных исходов, то окончательно получаем для вероятности $P(A_m) = P_{nm}$ данную в условии формулу.

12. Проводятся n испытаний по схеме Бернулли и $P_{nm} = C_n^m \cdot p^m (1-p)^{n-m}$. Докажите, что:

1. $\sum_{m=0}^{n} P_{nm} = 1$

2. $\sum_{m=m_1+1}^{m_2} P_{nm}$ - вероятность того, что число успешных испытаний ($A_к$) не превосходит $m_2 \le n$, но больше m_1,

где $0 \le m_1 < m_2 \le n$.

1. $\sum_{m=0}^{n} P_{nm} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$; 2. $p\{m_1 < \xi \le m_2\} = \sum_{m=m\ +1}^{m_2} p\{\xi = m\} = P_{nm}$

Второе следует из того что события $A_к$ несовместны при разных к. В частном случае $P(1 \le m) = 1 - q^n$ - хотя бы один успех.

13. Дайте определение скалярной случайной величины, сформулируйте и докажите основные свойства ее функции распределения.

Случайной величиной называется числовая величина, значение которой зависит от того, какой именно элементарный исход произошел в результате эксперимента.

Скалярную функцию X(ω), заданную на пространстве элементарных исходов, называют ***случайной величиной,*** если для любого $x \in R$ $\{\omega: X(\omega) < x\}$ – множество элементарных исходов, для которых $X(\omega)<x$ является событием.

Функцией распределения (вероятностей) случайной величины X называют функцию F(x), значение которой в точке x равно вероятности события {X<x}, т. е. события, состоящего из тех и только тех элементарных исходов ω, для которых $X(\omega)<x$: $F(x)=P\{X<x\}$. Обычно говорят, что значение функции распределения в точке x равно вероятности того, что случайная величина X примет значение, меньшее x.

Функция распределения удовлетворяет следующим свойствам:

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1<x_2$ (F(x) – неубывающая функция)
3. $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0; F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
4. $P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$
5. $F(x) = F(x-0)$, где $F(x-0) = \lim_{y\to x-0} F(y)$ (F(x) – непрерывная слева функция)

Доказательство. Поскольку значение функции распределения в любой точке x является вероятностью, то из свойства 4 вероятности (см. вопрос 5) вытекает утв. 1. Если $x_1<x_2$, то событие $\{X<x_1\}$ включено в событие $\{X<x_2\}$ и, согласно свойству 3, $P\{X < x_1\} \le P\{X < x_2\}$, т. е. в соответствии с определением функции распределения выполнено утв. 2. Пусть $x_1,\ldots, x_n,\ldots$ - любая возрастающая посл-ть чисел, стремящаяся к +∞. Событие $\{X<+\infty\}$, с одной стороны, является достоверным, а с другой стороны представляет собой объединение событий $\{X<x_n\}$. Отсюда в силу аксиомы непрерывности следует второе равенство в утв. 3. Аналогично доказывается и первое равенство. Событие $\{X<x_2\}$ при $x_1<x_2$ представляет собой объединение двух непересекающихся событий: $\{X<x_1\}$ – случайная величина X приняла значение, меньшее x_1, и $\{x_1 \le X < x_2\}$ - случайная величина X приняла значение, лежащее в промежутке $[x_1, x_2)$. Поэтому в соответствии с аксиомой сложения получаем утв. 4. Наконец, пусть $x_1,\ldots,x_n,\ldots$ - любая возрастающая посл-ть чисел, стремящаяся к x. Событие $\{X<x_n\}$ является объединением событий $\{X<x_n\}$. Снова воспользовавшись аксиомой непрерывности, приходим к утв. 5.

14. Что называют дискретной случайной величиной? Сформулируйте и докажите утверждение о виде функции распределения дискретной случайной величины.

Случайную величину X называют ***дискретной***, если множество ее возможных значений конечно или счетно.

Рядом распределения (вероятностей) дискретной случайной величины X называют таблицу, состоящую из двух строк: в верхней строке перечислены все возможные значения случайной величины, а в нижней – вероятности $p_i=P\{X=x_i\}$ того, что случайная величина примет эти значения.

Функция распределения дискретной случайной величины является кусочно-постоянной функцией, принимающей на промежутке $(-\infty, x_1]$ значение 0, на промежутках $(x_i, x_{i+1}]$, $1\le i<n$, - значения $p_1+\ldots+p_i$ и на промежутке $(x_n, +\infty)$ – значение 1.

Доказательство. Пусть X – дискретная случайная величина, заданная своим рядом распределения, причем значения $x_1,\ldots, x_n$ расположены в порядке возрастания. Тогда для всех $x\le x_1$ событие $\{X<x\}$ является невозможным и поэтому в соответствии с определением функции распределения $F(x)=0$. Если $x_1<x\le x_2$, то событие $\{X<x\}$ состоит из тех и только тех элементарных исходов ω, для которых $X(\omega)=x_1$, и, следовательно, $F(x)=p_1$. Аналогично при $x_2<x\le x_3$ событие $\{X<x\}$ состоит из элементарных исходов ω, для которых либо $X(\omega)=x_1$, либо $X(\omega)=x_2$, т.е. $\{X<x\}=\{X=x_1\}+\{X=x_2\}$, а следовательно, $F(x)=p_1+p_2$ и т. д. Наконец, при $x>x_n$ событие $\{X<x\}$ достоверно и $F(x)=1$.

15. Дайте определение непрерывной скалярной случайной величины и сформулируйте основные свойства ее плотности распределения вероятностей.

Непрерывной называют случайную величину X, функцию распределения которой F(x) можно представить в виде: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(y)dy$. Функцию p(x) называют плотностью распределения (вероятностей) случайной величины X.

$p(x)=F'(x)$. Функцию распределения F(x) называют *интегральным законом распределения* случайной величины, а плотность распределения p(x) – *дифференциальным законом распределения* той же случайной величины.

Плотность распределения обладает следующими ***свойствами***:

1. $p(x)\ge 0$
2. $P\{x_1\le X<x_2\}=\int\limits_{x_1}^{x_2}p(x)dx$
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$
4. $P\{x\le X<x+\Delta x\}\approx p(x)\Delta x$
5. $P\{X=x\}=0$

Доказательство:

1) Функция F(x) является неубывающей, поэтому $p(x)=F'(x)>=0$.
2) $P(x_1\le X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int\limits_{-\infty}^{x_2}p(x)dx-\int\limits_{-\infty}^{x_1}p(x)dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}p(x)dx$
3) В частности, если $x_1=-\infty, x_2=+\infty$, то событие $\{-\infty<x<\infty\}$ является достоверным.
4) $P\{x\le X<x+\Delta x\}=F(x+\Delta x)-F(x)=\Delta F(x)\approx dF(x)=F'(x)\Delta x=p(x)\Delta x$
5) Функция распределения – непрерывна, поэтому $P\{X=x\}=0=F(x)-F(x)$

16. Что называют функцией Лапласа и какими свойствами она обладает?

$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-y^2/2}dy$ **-** интеграл (функция) Лапласа – функция стандартного нормального (гауссова) распределения (m=0, σ=1).

$\varphi_{m,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $(-\infty<m<+\infty, \sigma>0)$ – плотность нормального распределения.

$\Phi_{m,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$ - функция нормального распределения.

$$P\{a<x<b\}=\int_a^b \varphi_{m,\sigma}(y)dy=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}dy=\left|x=\frac{y-m}{\sigma}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma}\varphi(x)dx=\Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

$$\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\left|\begin{matrix}t=-s\\ dt=-ds\end{matrix}\right|=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}}ds=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}ds=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}ds-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}}ds=1-\Phi(x)$$

X_p – квантилью стандартного нормального распределения уровня p.

$X_{1-p}= -X_p$ Док-во: $1-p=\Phi(x_{1-p})=1-\Phi(-x_{1-p}) \Rightarrow \Phi(-x_{1-p})=p \Rightarrow -X_{1-p}=X_p$

17. Дайте определение обобщенной плотности распределения вероятностей дискретной скалярной случайной величины и приведите аргументы для обоснования его корректности.??????

18. Выведите понятие n-мерного случайного вектора и сформулируйте основные свойства его функции распределения.

Совокупность случайных величин $X_1=X_1(\omega)$, …, $X_n=X_n(\omega)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, B, P), называют ***многомерной (n-мерной) случайной величиной***, или ***n-мерным случайным вектором***. При этом сами случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называют координатами случайного вектора.

Функцией распределения (вероятностей) $F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ называют функцию, значение которой в точке $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ равно вероятности совместного осуществления (пересечения) событий $\{X_1<x_1\}, \ldots, \{X_n<x_n\}$, т.е. $F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1<x_1, \ldots, X_n<x_n\}$.

В частности, при n=2 имеем двумерную функцию распределения.

Свойства двумерной функции распределения:

1. $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$
2. $F(x_1, x_2)$ – неубывающая функция по каждому из аргументов x_1, x_2
3. $F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$
4. $F(+\infty, +\infty) = 1$
5. $P\{a_1 \le X_1 \le b_1, a_2 \le X_2 \le b_2\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$
6. $F(x_1, x_2)$ – непрерывная слева в любой точке $(x_1, x_2) \in R^2$ по каждому из аргументов x_1, x_2 функция
7. $F_{X_1, X_2}(x, +\infty) = F_{X_1}(x)$, $F_{X_1, X_2}(+\infty, x) = F_{X_2}(x)$

Доказательство:

1) $F(x_1,x_2)=P\{X_1<x_1, X_2<x_2\} \Rightarrow 0 \le F(x_1,x_2) \le 1$
2) $\forall x_1<y_1 \to \{X_1<x_1, X_2<x_2\} \subset \{X_1<y_1, X_2<x_2\} \Rightarrow P\{X_1<x_1, X_2<x_2\} \le P\{X_1<y_1, X_2<x_2\} \Rightarrow$
$\Rightarrow F(x_1,x_2) \le F(y_1,x_2)$
3) События $\{X_1<-\infty\}$ и $\{X_2<-\infty\}$ являются невозможными, а пересечение невозможного события с любым событием также невозможное событие, вероятность которого равна нулю
4) События $\{X_1<+\infty\}$ и $\{X_2<+\infty\}$ так же,как и их пересечение, являются достоверными, вероятность которых равна единице
5) Сами
6) (пусть $x_1,\ldots,x_n,\ldots$ - любая возрастающая посл-ть чисел, стремящаяся к x. Событие $\{X<x_n\}$ является объединением событий $\{X<x_n\}$. Снова воспользовавшись аксиомой непрерывности, приходим к утв)
7) Событие $\{X_1<+\infty\}$ является достоверным, поэтому $\{X_1<+\infty\} \cap \{X_2<x_2\}$

19. Что называют дискретным случайным вектором? Сформулируйте и докажите утверждение о виде функции распределения дискретного случайного вектора.

Двумерную случайную величину (X, Y) называют дискретной, если каждая из случайных величин X и Y является дискретной, т.е. если множество их возможных значений конечно или счетно.

$p_{ij} = P\{X=x_i, Y=y_j\}$ – вероятность совместного осуществления событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$. Совместная функция распределения получается суммированием pij по всем значениям i и j, для которых $x_i<x$, $y_j<y$, т. е.

$F(x,y)=\sum_{\substack{i:x_i<x\\ j:y_j<y}} p_{ij}$. Доказательство следует из доказательства для одномерной случайной величины.

20. Дайте определение непрерывного случайного вектора. Сформулируйте и докажите основные свойства его плотности распределения вероятностей.

Непрерывной двумерной случайной величиной (X, Y) называют такую двумерную случайную величину (X, Y), совместную функцию распределения которой $F(x_1, x_2) = P\{X<x_1, Y<x_2\}$ можно представить в виде

сходящегося несобственного интеграла: $F(x_1,x_2)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2}p(y_1,y_2)dy_1dy_2$. Функцию $p(x_1, x_2) = p_{X,Y}(x_1, x_2)$ называют совместной (двумерной) плотностью распределения случайных величин X и Y, или плотностью распределения случайного вектора (X, Y). $p(x_1,x_2)=\dfrac{\partial F^2(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{\partial F^2(x_1,x_2)}{\partial x_2\partial x_1}$.

Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. $p(x1, x2) \ge 0$
2. $P\{a_1 < X < b_1, a_2 < Y < b_2\}=\int\limits_{a_1}^{b_1}dx_1\int\limits_{a_2}^{b_2}p(x_1,x_2)dx_2$
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x_1,x_2)dx_1dx_2=1$
4. $P\{x_1<X<x_1+\Delta x_1, x_2<Y<x_2+\Delta x_2\}\approx p(x_1,x_2)\Delta x_1\Delta x_2$
5. $P\{X=x_1, Y=x_2\}=0$
6. $P\{(X;Y)\in D\}=\iint\limits_D p(x_1,x_2)dx_1dx_2$
7. $p_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{X,Y}(x,y)dy$ 8. $p_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{X,Y}(x,y)dx$

Доказательство. Свойства 1 – 5 аналогичны свойствам одномерной плотности распределения. Свойство 6 является обобщением свойства 2. Докажем утверждения 7 и 8. Из свойства 7 двумерной функции распределения (см. вопрос 18) и определения двумерной плотности распределения вытекает:

$$F_X(x)=F_{X,Y}(x,+\infty)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{X,Y}(y_1,y_2)dy_2, \qquad F_Y(y)=F_{X,Y}(+\infty,y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{X,Y}(y_1,y_2)dy_1,$$

откуда, дифференцируя интегралы по переменному верхнему пределу и учитывая, что $p(x)=F'(x)$, получаем утверждение 7 для одномерных плотностей распределения $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ случайных величин X и Y.

21. Что понимают под функцией случайных величин? Сформулируйте и решите задачу о нахождении закона распределения функции случайных величин (общий случай).

Случайную величину Y, которая каждому элементарному исходу ω ставит с соответствие число Y(ω) = Y(X(ω)), называют ***функцией Y(X) (скалярной) от скалярной случайной величины X***. Функция Y = Y(X) от дискретной случайной величины также является дискретной случайной величиной, поскольку она не может принимать больше значений, чем случайная величина X. Функция Y = Y(X) от непрерывной случайной величины X может быть как непрерывной, так и дискретной.

Сформулируем ***правило определения функции распределения*** $F_Y(y)$ по заданной плотности распределения $p_X(x)$. $F_Y(y)$ - вероятность события {Y<y}, состоящая из тех элементарных исходов ω, для которых Y(X(ω)) < y. Для этих же элементарных исходов ω случайная величина X(ω) будет принимать свои возможные значения на некоторой совокупности $\{\Delta_k\}$, k=1,2,…, непересекающихся промежутков числовой прямой R, т. е. событие {Y(X(ω)) < y} эквивалентно событию $\bigcup\limits_k\{X(\omega)\in\Delta_k\}$, и, следовательно, по расширенной аксиоме сложения вероятностей $F_Y(y)=P\{Y(X(\omega))<y\}=\sum\limits_k P\{X(\omega_k)\in\Delta_k\}$. Зная плотность распределения $p_X(x)$ случайной величины X, имеем: $P\{X(\omega)\in\Delta_k\}=\int\limits_{\Delta_k}p_X(x)dx$, а следовательно, учитывая свойство аддитивности определенного интеграла, получаем: $F_Y(y)=\sum\limits_k\int\limits_{\Delta_k}p_X(x)dx=\int\limits_{\Delta}p_X(x)dx, \Delta=\bigcup\limits_k\Delta_k$, где сумма может быть и бесконечной. Поскольку совокупность промежутков $\{\Delta_k\}$ определена как множество тех значений случайной величины X(ω), для которых Y(X(ω)) < y, то для множества $\Delta=\bigcup\limits_k\Delta_k$, по которому ведется интегрирование, принято обозначение: Y(x) < y. Окончательно получаем: $F_Y(y)=\int\limits_{Y(x)<y}p_X(x)dx$.

23. Дайте определение независимых случайных величин. Каким основным свойством обладает совместный закон распределения независимых случайных величин?

Независимые случайные величины – по значению одной случайной величины нельзя судить о значении другой.

Случайные величины X и Y называются независимыми, если совместная функция распределения $F_{YX}(x,y)$ является произведением одномерных функций распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$: $F_{YX}(x,y)= F_X(x)F_Y(y)$.

Случайную величину $Y = Y(X_1, X_2) = Y(X_1(\omega), X_2(\omega))$ называют функцией (скалярной) от двумерной случайной величины. $p_{ij} = P\{X_1=x_{1i}, X_2=x_{2j}\}$. Функция распределения: $F_Y(y) = \iint\limits_{Y(x_1,x_2)<y} p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2$.

Если X_1 и X_2 независимые случайные величины, т. е. $p_{X1,X2}(x_1, x_2) = p_{X1}(x_1)\, p_{X2}(x_2)$, а случайная величина $Y=X_1+X_2$. Тогда $Y(x_1, x_2) = x_1+x_2$, по формуле функции распределения находим: $F_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{X_2}(y-x_1)p_{X_1}(x_1)dx_1$. Плотность распределения суммы X_1 и X_2: $p_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{X_2}(y-x)p_{X_1}(x)dx$. В этом случае говорят, что плотность распределения случайной величины Y является *сверткой* (композицией) плотностей распределения слагаемых X_1 и X_2. Соотношение условно записывается в виде: $p_Y = p_{X2} * p_{X!}$.

24. Что называют математическим ожиданием скалярной функции случайных величин? Сформулируйте и докажите основные свойства математического ожидания.

Математическим ожиданием (средним значением) MX дискретной случайной величины X называют сумму произведений значений x_i случайной величины и вероятностей $p_i = P\{X=x_i\}$, с которыми случайная величина принимает эти значения: $\sum_i x_i p_i$. При этом, если множество возможных значений случайной величины счетно, предполагается, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < +\infty$. В противном случае говорят, что MX не существует.

Математическим ожиданием (средним значением) MX непрерывной случайной величины называют интеграл $MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$. При этом предполагается, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x)dx < +\infty$.

Пусть Y(X) – функция от случайной величины $\Rightarrow$

$$\Rightarrow MY = MY(X) = \sum_{i=1}^{\infty} Y(x_i)p_i\,;\; MY = MY(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y(x)p(x)dx\,;$$

$$MY = MY(X_1, X_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y(x,y)p_{X_1,X_2}(x,y)dxdy$$

Для функций случайных величин математическое ожидание вычисляется аналогично.

Математическое ожидание удовлетворяет следующим ***свойствам***:

1. Если случайная величина X принимает всего одно значение с вероятностью 1, то MC=C.
2. M(aX+b) = aMX+b, где a, b – постоянные
3. $M(X_1+X_2) = MX_1+MX_2$
4. $M(X_1X_2) = MX_1MX_2$ для независимых случайных величин.

Доказательство состоит в раскрытии сумм и интегралов.

25. Что называют дисперсией скалярной случайной величины? Сформулируйте и докажите основные свойства дисперсии.

Дисперсией DX(второй центральный момент) случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее среднего значения, т. е. $DX = M(X-MX)^2$.

$$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 p_i \quad,\; DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-MX)^2 p(x)dx.$$

Дисперсия удовлетворяет следующим ***свойствам***:

1. Если случайная величина X принимает всего одно значение C, то DC=0
2. $D(aX+b) = a^2DX$
3. $DX = MX^2-(MX)^2$
4. D(X+Y) = DX + DY для независимых случайных величин.

Доказательство опирается на свойства математического ожидания.

26. Дайте определение ковариации двух скалярных случайных величин. Сформулируйте и докажите основные свойства ковариации.

Ковариацией (корреляционным моментом) $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$ случайных величин X_1, X_2 называют математическое ожидание произведения случайных величин $\overset{o}{X}_1 = X_1 - MX_1, \overset{o}{X}_2 = X_2 - MX_2$:

$$\mathrm{cov}(X1, X2) = M(\overset{o}{X}_1 \overset{o}{X}_2) = M((X_1 - MX_1)(X_2 - MX_2)).$$

Для дискретных случайных величин X_1, X_2: $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \sum\limits_{i,j} (x_i - MX_1)(y_j - MX_2)p_{ij}$.

Для непрерывных случайных величин X_1, X_2: $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x_1 - MX_1)(x_2 - MX_2)\,p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$.

$D(X+Y) = DX+DY+2\operatorname{cov}(X, Y)$.

Ковариация имеет следующие ***свойства***:

1. $\operatorname{cov}(X, X) = DX$
2. $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$ для независимых случайных величин X_1 и X_2
3. Если $Y_i = a_iX_i+b_i$, $i=1,2$, то $\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) = a_1a_2\operatorname{cov}(X_1, X_2)$
4. $-\sqrt{DX_1DX_2} \le \operatorname{cov}(X_1, X_2) \le \sqrt{DX_1DX_2}$
5. $|\operatorname{cov}(X_1, X_2)| = \sqrt{DX_1DX_2}$ для линейно зависимых X_1 и X_2: $X_2 = aX_1+b$
6. $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = M(X_1X_2) - MX_1\,MX_2$.

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из очевидного соотношения: $\operatorname{cov}(X, X) = M(X-MX)^2$. Если случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми и имеют математические ожидания, то $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = M((X_1-MX_1)(X_2-MX_2) = (M(X_1-MX_2))(M(X_2-MX_2))$, откуда приходим к утверждению 2. Пусть $Y_1 = a_1X_1+b_1$, $Y_2 = a_2X_2+b_2$. Тогда $\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) = M((Y_1-MY_1)(Y_2-MY_2)) = M((a_1X_1+b_1-a_1MX_1-b_1)(a_2X_2+b_2-a_2MX_2-b_2)) = M(a_1a_2(X_1-MX_1)(X_2-MX_2))$. Поэтому справедливо утверждение 3. Рассмотрим дисперсию случайной величины $Y_x = xX_1-X_2$, где x – произвольное число. В силу свойств дисперсии и свойства 3 ковариации $DY_x = D(xX_1)+2\operatorname{cov}(xX_1,-X_2)+D(-X_2) = x^2DX_1-2x\operatorname{cov}(X_1, X_2)+DX_2$. Дисперсия DY_x, как функции от x, представляет собой квадратный трехчлен. Но дисперсия любой случайной величины не может быть меньше нуля, а это означает, что дискриминант $D = (2\operatorname{cov}(X_1, X_2))^2-4DX_1DX_2$ квадратного трехчлена DY_x является неположительным, т. е. имеет место утверждение 4. Далее, пусть выполнено равенство 5. Значит дискриминант равен нулю, и уравнение $DY_x = 0$ имеет решение, которое обозначим a. Тогда случайная величина $Y_a = aX_1-X_2$ принимает всего одно значение (допустим, b), и, следовательно, $X_2 = aX_1+b$. Наоборот, пусть выполнено $X_2 = aX_1+b$. Тогда в соответствии со свойством 1 дисперсии $DY_x = 0$, а значит дискриминант является неотрицательным. Поскольку при доказательстве свойства 4 было показано, что этот дискриминант неположителен, то он равен нулю, откуда следует $|\operatorname{cov}(X_1, X_2)| = \sqrt{DX_1DX_2}$. Утверждение 6 получается раскрытием скобок в формуле ковариации и использованием свойств математического ожидания.

27. Что понимают под коэффициентом корреляции двух скалярных случайных величин? Сформулируйте и докажите основные свойства коэффициента корреляции.

Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называют число $\rho = \rho(X, Y)$, определяемое равенством (предполагается, что $DX>0$ и $DY>0$): $\rho = \operatorname{cov}(X,Y)/\sqrt{DX \cdot DY}$.

Коэффициент корреляции имеет следующие ***свойства***:

1. $\rho(X, X) = 1$
2. Если случайные величины X и Y являются независимыми (и существуют $DX>0$ и $DY>0$), то $\rho(X, Y) = 0$.
3. $\rho(a_1X_1+b_1, a_2X_2+b_2) = \pm\rho(X_1, X_2)$. При этом знак плюс нужно брать в том случае, когда a_1 и a_2 имеют одинаковые знаки, минус – разные.
4. $-1 \le \rho(X, Y) \le 1$
5. $|\rho(X, Y)| = 1$ тогда и только тогда, когда случайные величины X и Y линейно зависимы.

Доказательство следует из свойств ковариации.

28. Дайте определение ковариационной матрицы случайного вектора. Сформулируйте и докажите основные свойства ковариационной матрицы.

Матрицей ковариаций (ковариационной матрицей) случайного вектора $\vec{X}$ называют матрицу $\sum = (\sigma_{ij}) = (\operatorname{cov}(X_i, X_j))$, состоящую из ковариаций случайных величин X_i и X_j.

Свойства матрицы ковариаций.

1. Матрица ковариаций является симметрической.
2. Пусть m-мерный случайный вектор $\vec{Y} = (Y_1,...,Y_m)$ получен из n-мерного случайного вектора $\vec{X} = (X_1,...,X_n)$ с помощью линейного преобразования B, т. е. $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}$. Тогда матрица ковариаций $\sum_{\vec{Y}}$ случайного вектора $\vec{Y} = (Y_1,...,Y_m)$ связана с матрицей ковариаций $\sum_{\vec{X}}$ случайного вектора $\vec{X} = (X_1,...,X_n)$ соотношением $\sum_{\vec{Y}} = B^T \sum_{\vec{X}} B$.
3. Матрица ковариаций $\sum$ является неотрицательно определенной, т. е. $\vec{b}\sum\vec{b}^T \ge 0$ для всех векторов $\vec{b}$.

Доказательство. Утверждение 1 следует из определения матрицы ковариаций. Пусть матрица B линейного преобразования $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}$ имеет вид $B = (b_{ij})$. Вычислим ковариацию случайных величин Y_i и Y_j:

$\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) = M(\overset{o}{Y_i}\overset{o}{Y_j}) = M(\sum_{k=1}^{n}\overset{o}{X}_k b_{ki}\sum_{l=1}^{n}\overset{o}{X}_l b_{lj}) = \sum_{k,l=1}^{n} M(\overset{o}{X}_k b_{ki}\overset{o}{X}_l b_{lj}) = \sum_{k,l=1}^{n} b_{ki}\operatorname{cov}(X_k, X_l) b_{lj}$. Записывая последнее равенство в матричной форме, получаем утверждение 2. Для доказательства утверждения 3 рассмотрим скалярную случайную величину $Y = \vec{X}\vec{b}^T$. В случае скалярной случайной величины Y ее дисперсия $DY = \sum_Y$, и поэтому в соответствии с утверждением 2 имеем: $DY = \sum_Y = \vec{b}\sum\vec{b}^T$, откуда в силу неотрицательности дисперсии получаем утверждение 3.

29. Что понимают под условным законом распределения? Докажите равенство $f(x_1 \mid x_2) = f_\xi(x_1, x_2) / f_{\xi_2}(x_2)$, где $\xi = |\xi_1, \xi_2|^T$ - непрерывный случайный вектор.

Для двумерной дискретной случайной величины (X, Y) ***условной вероятностью*** $\pi_{ij}, i = 1...n, j = 1...m$, того, что случайная величина X примет значение x_i при условии Y = y_j, называют условную вероятность события {X=x_i} при условии события {Y=y_j}, т. е. $\pi_{ij} = P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{Yj}}$. Набор вероятностей π_{ij} характеризует ***условное распределение*** дискретной случайной величины X при условии Y = y_j.

Условная функция распределения непрерывной случайной величины: $F_X(x \mid Y = x) = \frac{1}{p_Y(y)}\int_{-\infty}^{x} p(u, y)du$.

Условная плотность распределения непрерывной случайной величины: $p_X(x \mid Y = y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$. Эти понятия называют ***условными законами распределения***.

$$F_\xi(x \mid \eta = y) = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{P\{\xi < x, y \le \eta < y + \Delta y\}}{P\{y \le \eta < y + \Delta y\}} = \frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y}^{y+\Delta y} f(s,t)dsdt}{\int_{y}^{y+\Delta y} f(x,t)dt} = \frac{\frac{1}{\Delta y}\int_{y}^{y+\Delta y}\int_{-\infty}^{x} f(s,t)dsdt}{\frac{1}{\Delta y}\int_{y}^{y+\Delta y} f(x,t)dt} \xrightarrow{\Delta y \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x} f(s,y)ds}{f(x,y)};$$

$$F_\xi(x \mid \eta = y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(s,y)ds}{f_\eta(y)} = \int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_\eta(y)}ds \Rightarrow f_\xi(s \mid \eta = y) = \frac{f(s,y)}{f_\eta(y)} \ge 0$$

30. Дайте определение условного математического ожидания и докажите его основное свойство.

Условным математическим ожиданием M(X|Y) дискретной случайной величины X относительно дискретной случайной величины Y называют функцию M(X|Y) = g(Y) от случайной величины Y, где область определения функции g(y) совпадает с множеством значений y_1, …, y_m случайной величины Y, а каждому значению y_j аргумента y поставлено в соответствие число g(y_j) = M(X|y_j). Для непрерывной величины $M(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x \mid \eta = y)dx$

Для дискретной - $M(X \mid Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{p_{ij}}{p_{Yj}}$

Свойства условного математического ожидания:

1. M(c|Y) ≡ c
2. M(aX+b|Y) = aM(X|Y)+b
3. M(X_1+X_2|Y) = M(X_1|Y)+M(X_2|Y)
4. Пусть случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми при условии, что случайная величина Y приняла любое конкретное значение. Тогда M(X_1X_2|Y) = M(X_1|Y) M(X_2|Y).
5. MX = M(M(X|Y))
6. Пусть u(X) и v(Y) – функции от случайных величин X и Y. Тогда M(u(X)v(Y)|Y) = v(Y) M(u(X)|Y)
7. Если X и Y – независимые случайные величины, то M(X|Y) ≡ MX.

Доказательство:

1),2),3)-опираются на свойства интеграла и суммы (как для безусловного).

4)--????

5) $M(M(X \mid Y)) = \sum_{j=1}^{m} M(X \mid y_j)p_{Yj} = \sum_{j=1}^{m} p_{Yj}\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{p_{ij}}{p_{Yj}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} = MX$

6) $M(u(X)v(Y)\mid y_j)=\sum_{i=1}^{n}u(x_i)v(y_j)\dfrac{p_{ij}}{p_{Yj}}=v(y_j)\sum_{i=1}^{n}u(x_i)\dfrac{p_{ij}}{p_{Yj}}=v(y_j)M(u(X)\mid y_j)$

7) $M(X\mid y_j)=\sum_{i=1}^{n}x_i\dfrac{p_{ij}}{p_{Yj}}=\sum_{i=1}^{n}x_i\dfrac{p_{Xi}p_{Yj}}{p_{Yj}}=\sum_{i=1}^{n}x_i p_{Xi}=M(X)$

31. Что понимают под законом больших чисел и что является его основным содержанием? Докажите неравенства Чебышева.

Первое неравенство Чебышева. Для каждой неотрицательной случайной величины X, имеющей математическое ожидание MX, при любом ε>0 справедливо соотношение: $P\{X\ge\varepsilon\}\le MX/\varepsilon$.

Доказательство проведем для непрерывной случайной величины X с плотностью распределения p(x). Поскольку случайная величина X является неотрицательной, то $MX=\int_0^{+\infty}xp(x)dx$. Так как подынтегральное выражение неотрицательно, то при уменьшении области интегрирования интеграл может только уменьшиться. Поэтому $MX=\int_0^{\varepsilon}xp(x)dx+\int_{\varepsilon}^{+\infty}xp(x)dx\ge\int_{\varepsilon}^{+\infty}xp(x)dx$. Заменяя в подынтегральном выражении сомножитель x на ε, имеем: $\int_{\varepsilon}^{+\infty}xp(x)dx\ge\varepsilon\int_{\varepsilon}^{+\infty}p(x)dx$. Последний интеграл представляет собой вероятность события X ≥ ε, и, значит, MX ≥ εP{X≥ε}, откуда и вытекает первое неравенство Чебышева. Для дискретной случайной величины интеграл заменяется суммой.

Второе неравенство Чебышева. Для каждой случайной величины X, имеющей дисперсию $DX=\sigma^2$, при любом ε>0 справедливо: $p\{|X-MX|\ge\varepsilon\}\le\sigma^2/\varepsilon^2$.

Доказательство. Воспользуемся первым неравенством Чебышева. Применяя к случайной величине $Y=(X-MX)^2$ это неравенство, в котором ε заменено на ε^2, получаем: $P\{|X-MX|\ge\varepsilon\}=P\{(X-MX)^2\ge\varepsilon^2\}=P\{Y\ge\varepsilon^2\}\le\dfrac{MY}{\varepsilon^2}=\dfrac{DX}{\varepsilon^2}=\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$, что и доказывает второе неравенство Чебышева.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - последовательность случайных величин, имеющих математические ожидания $m_i=MX_i$. Последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ случайных величин удовлетворяет ***закону больших чисел (слабому)***, если для любого ε>0: $P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i\right|\ge\varepsilon\right\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Иными словами, выполнение закона больших чисел отражает предельную устойчивость средних арифметических случайных величин: при большом числе испытаний они практически перестают быть случайными и совпадают со своими средними значениями.

32. Сформулируйте и докажите теорему Чебышева и теорему Бернулли.

Теорема Чебышева (закон больших чисел в форме Чебышева). Если последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимых случайных величин такова, что существуют $MX_i=m_i$ и $DX_i=\sigma_i^2$, причем дисперсии σ_i^2 ограничены в совокупности (т. е. $\sigma_i^2\le C<+\infty$), то для последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ выполнен закон больших чисел.

Доказательство. Теорема является элементарным следствием второго неравенства Чебышева. Действительно, в силу свойств математического ожидания и дисперсии: $M\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i$; $D\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\le\dfrac{Cn}{n^2}=\dfrac{C}{n}$. Применяя теперь второе неравенство Чебышева к случайным величинам $Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, получаем для любого ε>0: $P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i\right|\ge\varepsilon\right\}\le\dfrac{C}{n\varepsilon^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Т.е. выполняется закон больших чисел.

Теорема Бернулли (закон больших чисел в форме Бернулли). Пусть проводится n испытаний по схеме Бернулли и Y_n – общее число успехов в n испытаниях. Тогда наблюденная частота успехов $r_n=Y_n/n$ сходится по вероятности к вероятности p успеха в одном испытании, т. е. для любого ε>0 $P\{|r_n-p|\ge\varepsilon\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Доказательство. Обозначим X_i число успехов в i-м испытании Бернулли. Тогда частоту успехов в n испытаниях можно определить в виде $r_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, причем $MX_i=p$ и $DX_i=pq$. Отсюда и вытекает утверждение теоремы(ссылка на следствие из теоремы Чебышева: $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow[n\to\infty]{P}m$).

33. Сформулируйте центральную предельную теорему. Сформулируйте и докажите теорему Муавра-Лапласа.

Центральная предельная теорема. Пусть X_1, X_2, …, X_n, … - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $MX_n=m$, $DX_n=\sigma^2$. Тогда $P\left\{\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Обозначим S_n суммарное число успехов в n испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи q=1-p. Тогда с ростом n последовательность функций распределения случайных величин $(S_n - np)/\sqrt{npq}$ сходится к функции стандартного нормального распределения, т. е. $P\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(x)$. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Доказательство. Пусть Xi – число успехов в i-м испытании. Тогда $MX_i=p$, $DX_i=pq$. Представляя S_n в виде $S_n=X_1+X_2+\ldots+X_n$ и используя центральную предельную теорему, приходим к утверждению теоремы.

34. Пусть $k(\omega)$ – число успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли и n – велико.

Докажите, что в этом случае $P\left(\left|\frac{k(\omega)}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$, **где p – вероятность «успеха» в каждом отдельном испытании.**

Д-во:

$$P\{\left|\frac{k(\omega)}{n} - p\right| < \varepsilon\} = P\{-\varepsilon < \frac{k(\omega)}{n} - p < \varepsilon\} = P\{-\varepsilon < \frac{k(\omega) - np}{n} < \varepsilon\} =$$

$$= P\{\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} < \frac{k(\omega) - np}{\sqrt{npq}} < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\} = \Phi(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}) - \Phi(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}) = 2\Phi(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}) - 1 = 2\Phi_0(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}})$$