Определения:

• **Машина Тьюринга** определяется кортежем вида $T = (Q, V, *, \blacksquare, S, L, R, q_0, q_f, \delta)$. Здесь Q – конечное множество состояний; V – конечный входной алфавит, $* \notin V$ – маркер начала ленты, $\blacksquare \notin V$ – пустой символ (пробел); $S, L, R \notin V$ – символы направления движения головки; $q_0 \in Q$ – начальное состояние, $q_f \in Q$ – заключительное состояние; δ – функция переходов, являющаяся отображением вида $\delta: Q \times V' \to 2^{\{Q \times V' \times \{S,L,R\}\}}$, где $V' = V \cup \{*, \blacksquare\}$. Значение функции переходов, если оно определено, есть конечное (возможно пустое) множество упорядоченных троек из соответствующего декартова произведения.

• **Конфигурация МТ** – кортеж $C = (q, x, ay)$, где $q \in Q,\ x \in (V')^*,\ a \in V',\ y \in (V')^*$. **Отношение** (непосредственной) **выводимости на множестве конфигураций** – $C = (q, x, ay) \vdash \begin{cases} (r, x, by), \text{если в системе команд есть команда } qa \to rb, S \\ (r, x', cby), \text{если } - " - \ qa \to rb, L;\ x'c = x \neq \lambda \\ (r, xb, dy'),\ -" - qa \to rb, R;\ dy' = y \end{cases}$

• **Вычислимость по Тьюрингу** – вербальная функция $f: V^* \to V^*$ называется вычислимой по Тьюрингу, если может быть построена МТ НАД алфавитом V такая, что $\left(!\,\mathrm{T}_f(x) \Leftrightarrow x \in D(f)\right)$ и $\left(\mathrm{T}_f(x) = f(x)\right)$; где применимость МТ к слову есть $!\,\mathrm{T}(x) \rightleftharpoons (q_0, \lambda, *\,x\blacksquare) \vdash_{\mathrm{T}}^* \left(q_f, \lambda, *\,y\blacksquare\right),\ x, y \in V^*$.

• **Нормальный алгорифм Маркова** – Нормальный алгорифм A в алфавите V задаётся упорядоченной тройкой $A = (V, S, P)$. Здесь S – упорядоченный набор формул подстановок в алфавите V ($u \to v,\ u, v \in V^*,\ \to \notin V$); P – набор, получаемый отметкой в S некоторых формул. S – схема НА, P – заключительные формулы подстановки НА.

• **Процесс работы НА со словом** – пусть слово $x \in V^*$. Процесс работы есть конечная\бесконечная последовательность слов $x = x_0, x_1, \dots x_n, \dots$, такая, что: $\forall i \geq 0\ (A: x_i \vdash x_{i+1})$или$(A: x_i \vdash\!\bullet\ x_{i+1})$, если x_{i+1} определено в последовательности. Считается, что x_{n+1} не определено в последовательности тогда и только тогда, когда $A: x_{n-1} \vdash\!\bullet\ x_n$ либо $A: \sim x_n$ (xn не поддаётся алгоритму)

• **Вычислимость по Маркову** – вербальная функция $f: V^* \to\!. V^*$ называется вычислимой по Маркову, если может быть построен НА A_f НАД алфавитом V такой, что $(\forall x \in V^*)\left(!\,A_f(x) \Leftrightarrow x \in D(f)\ \text{ и }\ A_f(x) = f(x)\right)$. *//→. – точка на самом деле под стрелкой а не справа, и это важно! Не путать с →• и тем более с ⊢•!*

1. *Теорема композиции НА с доказательством.*

~~~ ~~~

• **Теорема**: Каковы бы ни были НА A и B : $V^* \to V^*$ _в_ алфавите V, может быть построен НА C _над_ V так, что $(\forall x \in V^*)\ \left(C(x) \simeq B\left(A(x)\right)\right)$.

Доказательство:

$$C: \begin{cases} (1)\ \ \xi\alpha \to \alpha\xi \\ (2)\ \ \alpha\xi \to \alpha\bar{\xi} \\ (3)\ \ \bar{\xi}\eta \to \overline{\xi\eta} \\ (4)\ \ \bar{\xi}\beta \to \beta\bar{\xi} \\ (5)\ \ \beta\bar{\xi} \to \beta\xi \\ (6)\ \ \xi\bar{\eta} \to \xi\eta \\ (7)\ \ \alpha\beta \to\bullet \\ (8)\ \ \bar{B}_\alpha^\beta \\ (9)\ \ A^\alpha \end{cases}$$

1) Если $V = \{a_1 \dots a_n\}$, то $\bar{V} = \{\overline{a_1} \dots \overline{a_n}\}$, причем $V \cap \bar{V} = \emptyset$.
2) $\alpha, \beta \notin V \cup \bar{V}$, $\xi, \eta \in V$
3) Система A^α получается из системы замыканием A согласно таблице:

$A^\bullet$	A^α
$u \to v$	$u \to v$
$u \to\bullet v$	$u \to \alpha v$

4) Система $\bar{B}_\alpha^\beta$ получается замыканием схемы B согласно таблице:

$B^\bullet$	$\bar{B}_\alpha^\beta$
$u \to v;$ $u \neq \lambda$	$\bar{u} \to \bar{v}$
$\to v$	$\alpha \to \alpha v$
$u \to\bullet v$ $u \neq \lambda$	$\bar{u} \to \beta\bar{v}$
$\to\bullet v$	$\alpha \to \alpha\beta\bar{v}$

I этап: $x \in V^*,\ \ C: x\ \models_{(9)} y_1\alpha y_2$, где $y_1 y_2 = A^\bullet(x)$.
II этап: $y_1\alpha y_2 \models_{(1)} \alpha y_1 y_2 = \alpha y\ \ \left(y = y_1 y_2 = A^\bullet(x)\right)$
III этап: $\alpha y(1) \dots y(m) \vdash_2 \alpha\overline{y(1)}y(2) \dots y(m) \models_2 \alpha\overline{y(1)} \dots \overline{y(m)} = \alpha\bar{y}$
IV этап: $\alpha\bar{y} \models_8 \alpha\bar{z}_1\beta\bar{z}_2,\ z_1 z_2 = z = B^\bullet(y)$
V этап: $\alpha\bar{z}_1\beta\bar{z}_2 \models_4 \alpha\beta\bar{z}$
VI этап: $\alpha\beta\bar{z} \models_{5,6} \alpha\beta z \vdash\!\bullet\ z = B^\bullet(y) = B^\bullet\left(A^\bullet(x)\right) = B\left(A(x)\right)$.

Следовательно, $C(x) \simeq B\left(A(x)\right), C \rightleftharpoons B \bullet A$.
~~~

2. *Эквивалентность НА. Замыкание НА, естественное и формальное распространение НА на более широкий алфавит. Доказать эквивалентность НА и его замыкания.*

~~~ ~~~

• Пусть есть два НА $A, B: V^* \to . V^*$ НАД алфавитом V. Они называются вполне эквивалентными, если $\forall x \in V^* \ (!A(x) \Leftrightarrow !B(x))$ и $(A(x) = B(x))$, т.е. $A(x) \simeq B(x)$ – определены или неопределены одновременно.

• **Замыканием** (схемы) НА A в алфавите V называется $A^\bullet: \begin{cases} \text{Схема A} \\ \to . \end{cases}$, где Схема A: $\begin{cases} u_1 \to [\cdot]v_1 \\ \dots \\ u_n \to [\cdot]v_n \end{cases}$.

Докажем, что A и его замыкание эквивалентны. Пусть $!A(x)$, значит $A: \sim A(x)$ (естественный обрыв) или $A: z \vdash\bullet A(x)$ для некоторого z (на последнем шаге).
В ситуации естественного обрыва: $A^\bullet: \ \vDash A(x) \vdash\bullet A(x)$.
В ситуации последнего шага: $A^\bullet: \ x \vDash z \vdash\bullet A(x)$.
Таким образом, если !A(x), то $!A^\bullet(x)$ и $A(x) = A^\bullet(x)$. Если же $\neg! A(x)$, то очевидно что $\neg! A^\bullet(x)$, т.к. до команды $\to\bullet$ очередь не дойдёт.

• Естественным распространением [A в алфавите V] на более широкий алфавит $V' \supset V$ (V' содержащий V) называется НА [A' в алфавите V'], где схема A' совпадает со схемой A.

Формальным распространением [A в алфавите V] на более широкий алфавит $V' \supset V$ называется НА [A' в алфавите V']
$A': \begin{cases} \xi \to \xi, \ \xi \in V'/V \\ \text{Схема A} \end{cases}$.

3. *Понятие перевода в двухбуквенный алфавит. Формулировка теоремы о переводе.*

~~~ ~~~

• Пусть дан алфавит $V = \{a_1 \dots a_n\}$, $V_\alpha = \{\alpha, \beta\}$; $V_\alpha \cap V = \emptyset$. Определим операцию $[a_i \leftrightharpoons \alpha\beta\beta \dots \beta\alpha = \alpha\beta^i\alpha$. Тогда для слова $x = x(1) \dots x(k) \in V^*$, $[x \rightleftharpoons [x(1) \dots [x(k)$, причем $[\lambda = \lambda$.

• **Теорема**: Каков бы ни был НА $A: \ V^* \to\bullet V^*$ над алфавитом V, может быть построен вполне эквивалентный ему (относительно алфавита V) НА $B: V'^* \to\bullet V'^*$ в алфавите $V \cup V_\alpha$

4. *Определения изображения и записи НА. Примеры. Формулировка теоремы об универсальном НА.*

~~~ ~~~

• Рассмотрим НА A: $\begin{cases} u_1 \to [\cdot]v_1 \\ \dots \\ u_n \to [\cdot]v_n \end{cases}$ в алфавите V. Изображение этого НА есть $A^И \rightleftharpoons u_1\alpha[\beta]v_1\gamma u_2\alpha[\beta]v_2\gamma \dots \gamma u_n\alpha[\beta]v_n$;
$A^И \in V \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Здесь символ α заменяет $\to$, символ β заменяет $\bullet$, а символ γ служит для разделения команд алгорифма.

Пример: НА A: $\begin{cases} \#a \to a\# \\ \#b \to b\# \\ \# \to\bullet aba \\ \to\bullet \end{cases}$. Его изображением будет $A^И = \#\alpha a\#\gamma\#b\alpha b\#\gamma\#\alpha\beta aba\gamma\alpha\#$.

Рассмотрим алфавит $V_0 = \{0,1\}$ и изображение алгорифма A. Если пронумеровать каждый символ из $V \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$, то k-й символ из этого алфавита можно представить как $\underset{k \text{ раз}}{011 \dots 10}$. Записью алгорифма A называют его изображение, в котором каждый символ представлен в данном виде. *//криво, косо, со скрипом, но как-то так*

Пример:для ^ алгоритма, пронумеровав символы как $\begin{matrix} \{a, b, \#, \alpha, \beta, \gamma\} \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \end{matrix}$, запись будет иметь вид 01110 010 011110 010 01110 01111110 …

• **Теорема:** Пусть V – произвольный алгорифм. Может быть построен алгорифм U над алфавитом $V \cup V_0 \cup \{\$\}$ такой, что $\forall a \in V^*$ и для любого НА A в V имеет место $U([\![A]\!]\$x) \simeq A(x)$ *//на самом деле тут не эти скобочки, а «бабочка», ε3.*

5. *Теоремы объединения, разветвления, повторения НА (формулировки). Построение НА, распознающего равенство слов.*

~~~ ~~~

• **Теорема объединения**: Каковы бы ни были НА A и B _в_ V, может быть построен НА C _над_ V такой, что $(\forall x \in V^*) \ (C(x) \simeq A(x)B(x))$. *//соединение*

Теорема разветвления: Для любых НА A, B, C _в_ алфавите V может быть построен НА D _над_ V такой, что $(\forall x \in V^*)$ $(D(x) \simeq A(x), \text{если } C(x) = \lambda)$ и $(D(x) \simeq B(x), \text{если } C(x) \neq \lambda)$.

Теорема повторения: Каковы бы ни были НА A,B _в_ V, может быть построен НА C _над_ V так, что $(\forall x \in V^*)\, !C(x)$ и определено слово $y = C(x)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность слов $x = x_0, x_1, \dots x_m$ такая: если m=0, то y=x и $B(x) \neq \lambda$; если же m>0, то $(\forall i = \overline{0, m-1}) \left((x_{i+1} = A(x_i)) \text{ и } (B(x_i) = \lambda) \text{ и } (B(x_m) \neq \lambda) \right)$, тогда $y = x_m$.

• Алгоритм распознавания равенства слов:
$EQ(x\$y) = \begin{cases} \lambda, x = y \\ u \neq \lambda, \text{иначе} \end{cases}$. $EQ(x\$y) = \lambda \Leftrightarrow x = y$. Тогда алгоритм $EQ \simeq Comp\big(Id(x)\$Inv(y)\big)$, где Id – тождественный алгоритм, Inv – инверсия, $Comp$: $\begin{cases} n\$n \to \$ \\ \$ \to\bullet \end{cases}$.

6. *Определения разрешимого и перечислимого языка. Связь разрешимости и перечислимости. Примеры.. Доказать невозможность разрешающего НА для языка, для которого невозможен полуразрешающий НА.*

~~~ ~~~

• Рассмотрим алфавит V.

Язык $L \subseteq V^*$ называется алгорифмически разрешимым, если может быть построен НА A_L _над_ алфавитом V такой, что: $(\forall x \in V^*)(!A_l(x)$ и $A_L(x) = \lambda \Leftrightarrow x \in L)$. Алгорифм A_l называют *разрешающим* алгорифмом; *полуразрешающим* алгорифмом называют $\widetilde{A_l}$ такой, что $!\widetilde{A_L}(x) \Leftrightarrow x \in L$.

Пример разрешимого языка: $L = \{ww: w \in V^+\}$. Разрешающий его алгорифм может быть построен как $x -> [C] - x1\$x2 -> [EQ] ->$, где алгорифм C делит слово x пополам на слова x1 и x2, а EQ – сравнивает получившиеся половинки.

Язык $L \subseteq V^*$ называется алгорифмически перечислимым, если может быть построен НА N_L _над_ алфавитом $V \cup V_0$ такой, что для любого конструктивного натурального числа (//0 – КНЧ, если n – КНЧ, то n1 – тоже КНЧ) n имеет место применимость $!N_L(n)$ и $N_L(n) \in L$, а также для любого слова $x \in L$ осуществимо КНЧ n такое, что $N_L(n) = x$.

Пример перечислимого языка: язык целых чисел. Алгоритм: нумерация целых чисел в виде $\begin{matrix} \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 4 & 2 & 0 & 1 & 3 & \dots \end{matrix}$

• Любое алгоритмически разрешимое множество алгоритмически перечислимо. Обратное не верно.

• **Теорема**: Если для языка $L \subseteq V^*$ невозможен полуразрешающий НА, то невозможен и разрешающий.

Доказательство: Предположим, что возможен разрешающий и при этом невозможен полуразрешающий НА. По теореме разветвления, построим НА $B_L =_{A_L} (A_L \vee Null)$, где $Null$: $\{\to\bullet$. Следовательно, по построению, $!B_L(x) \Leftrightarrow x \in L$, те. B_L – полуразрешающий НА. Противоречие.

7. *Проблемы применимости и самоприменимости для НА. Доказательство неразрешимости проблемы самоприменимости.*

~~~ ~~~

• Частная проблема применимости: «Можно ли построить НА А _над_ V так, что для фиксированного НА В _в_ V и произвольного слова $x \in V^*$ имеет место: $!A(x)$ и $\big(A(x) = \lambda \Leftrightarrow \neg!B(x)\big)$»

Общая проблема применимости: «можно ли построить НА А _над_ $V \cup V_0$ так, что для произвольного НА В _в_ V и произвольного слова $x \in V^*$ имеет место $!A(\langle B\rangle\$x)$ и $A(\langle B\rangle\$x) = \lambda \Leftrightarrow \neg!B(x)$»

Проблема самоприменимости: «моэет ли быть построен НА А _над_ $V \cup V_0$ так, что для произвольного НА В _в_ V имеет место $!A(\langle B\rangle)$ и $A(\langle B\rangle) = \lambda \Leftrightarrow \neg!B(\langle B\rangle)$».

• **Лемма**: невозможен НА А _в_ алфавите $V \cup V_0$ такой, что для любого В _в_ $V \cup V_0$ $!A(\langle B\rangle) \Leftrightarrow \neg!B(\langle B\rangle)$.

Теорема(1): Невозможен НА А _над_ V0 такой, что $\forall B$ _в_ V_1 $!A(\langle B\rangle) \Leftrightarrow \neg!B(\langle B\rangle)$.

Доказательство: Пусть такой алгорифм А построен. Тогда, по теореме о переводе, может быть построен A_1 в $V_0 \cup \{\alpha,\beta\}$ такой, что $(\forall x \in V_0^*)\big(A_1(x) \simeq A(x)\big)$. Далее, рассмотрим A_1' как естественное распространение A1 на V1. Тогда, $\forall x \in V_0^*$ $A_1'(x) \simeq A_1(x)$.

$!A(\langle B\rangle) \Leftrightarrow \neg!B(\langle B\rangle)$ – отсюда следует, что $!A(\langle B\rangle) \Leftrightarrow !A_1(\langle B\rangle) \Leftrightarrow !A_1'(\langle B\rangle) \Leftrightarrow \neg!B(\langle B\rangle)$ в алфавите $V \cup V_0 \cup \{\alpha,\beta\}$. Таким образом, для алфавита $V' = V \cup \{\alpha,\beta\}$ может быть построен НА A_1' в алфавите $V' \cup V_0$ так, что $\forall B$ в $V' \cup V_0$ имеет место $!A_1'(\langle B\rangle) \Leftrightarrow \neg!B(\langle B\rangle)$. Это невозможно, в силу леммы. Таким образом, каков бы ни был алфавит V, проблема самоприменимости для НА _в_ алфавите $V \cup V_0$ алгоритмически неразрешима.

8. *Доказать алгоритмическую неразрешимость проблемы применимости для НА.*

~~~ ~~~

• **Теорема(2)**: Пусть V – произвольный алфавит. Может быть построен НА В _в_ $V_2 = V_0 \cup \{\alpha,\beta\}$ такой, что невозможен НА А _над_ V_2, для которого для любого слова $x \in V_2^*$ имело бы место $!A(x) \Leftrightarrow \neg!B(x)$.

Доказательство: Определим алгоритм удвоения слова.

$$Double^{\$}: \begin{cases} (1)\ \ \alpha\xi \to \xi\beta\xi\alpha \\ (2)\beta\xi\eta \to \eta\beta\xi \\ (3)\beta\xi\alpha \to \gamma\xi \\ (4)\beta\xi\gamma \to \gamma\xi \qquad \gamma \neq \alpha,\beta \notin V \\ (5)\ \ \ \gamma \to\bullet \$ \\ (6)\ \ \ \alpha \to\bullet \$ \\ (7)\ \ \ \ \ \ \to \alpha \end{cases}$$

По теореме об универсальном НА, построим НА U _над_ V2 так, что для любых слова $y \in V_2^*$ и НА D _в_ V2 имело место $U(\langle D\rangle\$y) \simeq D(y)$.

Далее: построим НА U_1 _над_ V2 так, что $(\forall y \in V_2^*)\big(U_1(y) \simeq U(y\$y)\big)$. Используя композицию, $U_1 = U * Double^{\$}(y)$.

U1 построен _над_ V2. Стало быть, U1 есть НА и _над_ V0, следовательно, по теореме о переводе, можно построить НА U2 _в_ V2 (т.е. в двухбуквенном расширении V0) так, что $(\forall x \in V_0^*)\big(U_2(x) \simeq U_1(x)\big)$. Утверждается, что U2 есть искомый НА B.

Пусть теперь построен А, о котором говорится в условии теоремы. Тогда, для любого НА D _в_ V2, выполняется $!A(\langle D\rangle) \Leftrightarrow \neg!B(\langle D\rangle) \Leftrightarrow \neg!U_2(\langle D\rangle) \Leftrightarrow \neg!U_1(\langle D\rangle) \Leftrightarrow \neg!U(\langle D\rangle\$\langle D\rangle) \Leftrightarrow \neg!D(\langle D\rangle)$. Таким образом, А может быть рассмотрен как НА _в_ М2 – имеем алгорифм, решающий проблему самоприменимости в том же алфавите. Это невозможно, в силу теоремы(1) о неразрешимости проблемы самоприменимости.

9. *Понятие рекурсивной функции.*

~~~ ~~~

• Рекурсивной функцией называется функция вида $\mathbb{N}_0^P \to \mathbb{N}_0$, $P \geq 1$. Множество рекурсивных функций содержит базисные функции а также функции, образованные посредством определенных правил.

Базисные функции: нулевая $(\forall x \in \mathbb{N}_0\ \ \mathbb{O}(x) = 0)$; прибавление 1 $(f(x) = x + 1)$; проекцирующие функции $(U_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \rightleftharpoons x_i)$.

Правила: подстановка; рекурсия; минимизация.