Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт

по лабораторной работе №1

Название «Гистограмма и эмпирическая функция распределения»

Дисциплина «Математическая статистика»

Студент ИУ7-65Б _______________ Бугаенко А.П.
(подпись, дата) (Фамилия И.О.)

Преподователь _______________ Андреева Т.В.
(подпись, дата) (Фамилия И.О.)

Москва, 2022

1 Цели и задачи работы

Цель работы — построение гистограммы и эмпирической функции распределения. Задачи работы:

1) Для выборки объёма n из генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ:

   а) вычисление максимального значения M_{max} и минимального значения M_{min}

   б) размаха R выборки

   в) вычисление оценок $\hat{\mu}$ и S^2 и математического ожидания MX и дисперсии DX

   г) группировку значений выборки в $m = [log_2 n] + 2$ интервала

   д) построение на одной координатной плоскости гистограммы и графика функции плотности распределения вероятностей нормальной случайной величины в математическим ожиданием $\hat{\mu}$ и дисперсией S^2

   е) построение в другой координатной плоскости графика эмпирической фукнции распределения и функции распределения нормальной случайной величины с математическим ожиданием $\hat{\mu}$ и дисперсией S^2

2) Провести вычисления и построить графики для выборки из индивидуального варианта

2 Теоретическая часть

2.1 Необходимые формулы

Пусть $(x_1, ..., x_n)$ - некая случайная выборка.

M_{max}, M_{min} вычисляются соответственно как $max(x_1, ..., x_n), min(x_1, ..., x_n)$ - максимальное и минимальное значение выборки.

Размах вычисляется как $R = M_{max} - M_{min}$.

Оценка $\hat{\mu}$ для математического ожидания MX вычисляется как $\hat{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Оценка S^2 для дисперсии (несмещённая) вычисляется как $S^2(\overrightarrow{X_n}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$.

2.2 Эмпирическая плотность и гистограмма

Пусть есть выборка $\overline{x}$, тогда эмпирическая плотность распределения $\overline{x}$ задаётся как:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n_i}{n\Delta}, x \in J_i, i = \overline{1, m}, \\ 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

В данной формуле: $J_i, i = \overline{1, m}$ - полуинтервал из $J = [min(x_1, ..., x_n), max(x_i, x_n))$, при этом все интервалы, кроме последнего не содержат правую границу;

m - количество полуинтервалов;

Δ - длина полуинтервала $J_i, i = \overline{1, m}$, равная $\Delta = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{m} = \frac{|J|}{m}$;

n_i - количество элементов выборки в полуинтервале $J_i, i = \overline{1, m}$;

n - количество элементов в выборке.

График эмпирической функции распределения называют гистограммой.

2.3 Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения, отвечающей выборке $\overrightarrow{x}$ называют функцию $F_n : R \to R$, $F_n(x) = \frac{n(x, \overrightarrow{x})}{n}$, где $n(x, \overrightarrow{x})$ - количество элементов выборки $\overrightarrow{x}$, которые меньше x.

3 Практическая часть

3.1 Листинг программы

```
disp("Lab 1")
# Выборка
x_unsorted = [-0.23 -1.03 -4.11 -0.65 -2.58 -0.79 -1.53 -0.18 -2.79 -1.97 -2.21
    -1.59 -0.22 -3.18 -1.18 -1.42 -1.29 -2.22 -0.82 -1.87 -2.30 -0.94 -0.74 -2.45
    -1.40 -2.09 -0.68 0.02 -1.80 -2.25 -1.19 -2.17 -1.89 -1.14 -1.50 -1.76 -0.69
    -2.21 -1.65 -1.51 -2.11 -2.24 -0.72 0.94 -0.67 -2.44 -2.27 -1.33 -3.03 -0.42
    -2.86 -2.00 -1.37 -1.90 -2.80 -0.89 -2.04 -1.66 -0.14 -2.79 -0.21 -1.29 -2.81
    -0.29 -1.55 -0.45 -1.16 -3.96 -3.77 -3.36 -1.81 0.13 -2.61 -3.69 -3.00 -2.61
    -0.74 -0.41 -0.78 -1.49 -1.89 -1.24 -0.00 -2.72 -1.69 -1.25 -1.59 0.20 -1.08
    -2.42 -3.14 -2.54 -2.09 -2.51 -2.65 -2.42 -1.30 -0.65 1.40 -2.33 -1.97 -0.54
    -1.13 -2.04 0.77 -1.03 -1.55 -1.47 -0.09 -2.11 -2.08 -1.79 -1.36 -1.92 -3.04
    -1.08 -1.67 -2.11 -1.99 -1.64];

x = sort(x_unsorted);

# Максимальное значение
M_max = max(x);
printf("Mmax: %f\n", M_max);

# Минимальное значение
M_min = min(x);
printf("Mmin: %f\n", M_min);

# Размах выборки
R_x = M_max - M_min;
printf("R: %f\n", R_x);

# Оценка матожидания
u_x = (1/numel(x))*sum(x);
printf("u: %f\n", u_x);

# Несмещённая оценка дисперсии
val = 0;
for i = 1:numel(x)
  val +=(x(i) - u_x)*(x(i) - u_x);
endfor
S_2_x = val*(1/(numel(x) - 1));
printf("S square: %f\n", S_2_x);

# Нахождение количества интервалов
m = floor(log2(numel(x))) + 2;
printf("m: %f\n", m);

```

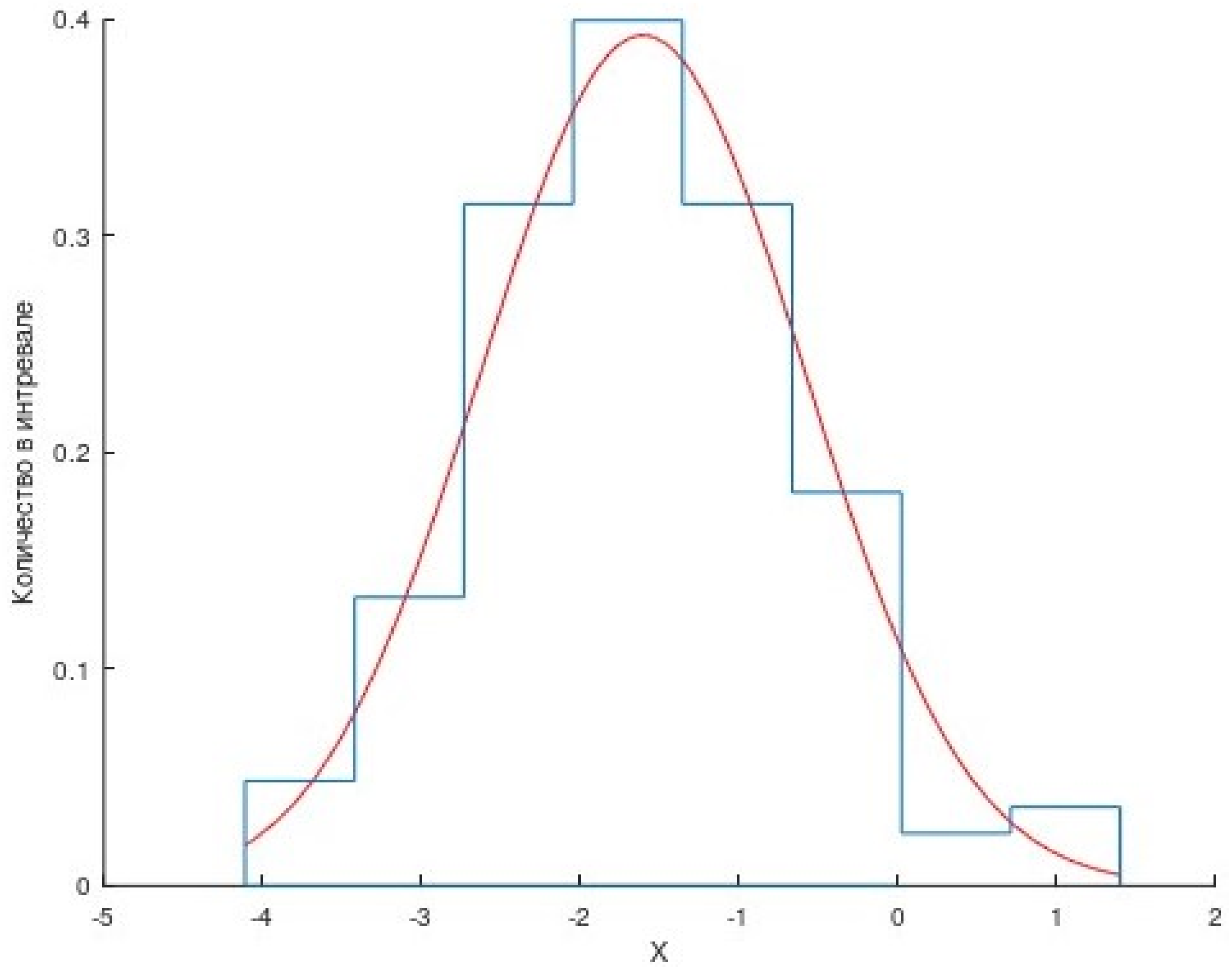
```
# Разбиение выборки на m интервалов от min до max
intervals = [];
pos = M_min;
for i = 1:(m + 1)
  intervals(i) = pos;
  pos += R_x/m;
endfor

eps = 1e-6;

count = [];
j = 1;
for i = 1:(m - 1)
  cnt = 0;
  for j = 1:numel(x)
    if (intervals(i) < x(j) || abs(intervals(i) - x(j)) < eps) && x(j) < intervals(i + 1)
      cnt += 1;
    endif
  endfor
  count(i) = cnt;
endfor

cnt = 0;
for j = 1:numel(x)
  if (intervals(m) < x(j) || abs(intervals(i) - x(j)) < eps) && (x(j) < intervals(m + 1) || abs(intervals(m + 1) - x(j)) < eps)
    cnt += 1;
  endif
endfor
count(m) = cnt;

# Вывод интервалов и количества элементов в интервале
printf("Интервалы и количества значений в этих интервалах при m = %d\n", m);
for i = 1:(m - 1)
  printf("[%f %f) - %d\n", intervals(i), intervals(i + 1), count(i));
endfor
printf("[%f %f] - %d\n", intervals(m), intervals(m + 1), count(m));

function draw_hist(x, J, count, R, m)
  n = numel(x);
  delta = R/m;
  xes = zeros(1, m + 2);
  xes(1) = 0;
  for i = 2:(m + 1)
    xes(i) = count(i - 1) / (n * delta);
  endfor
```

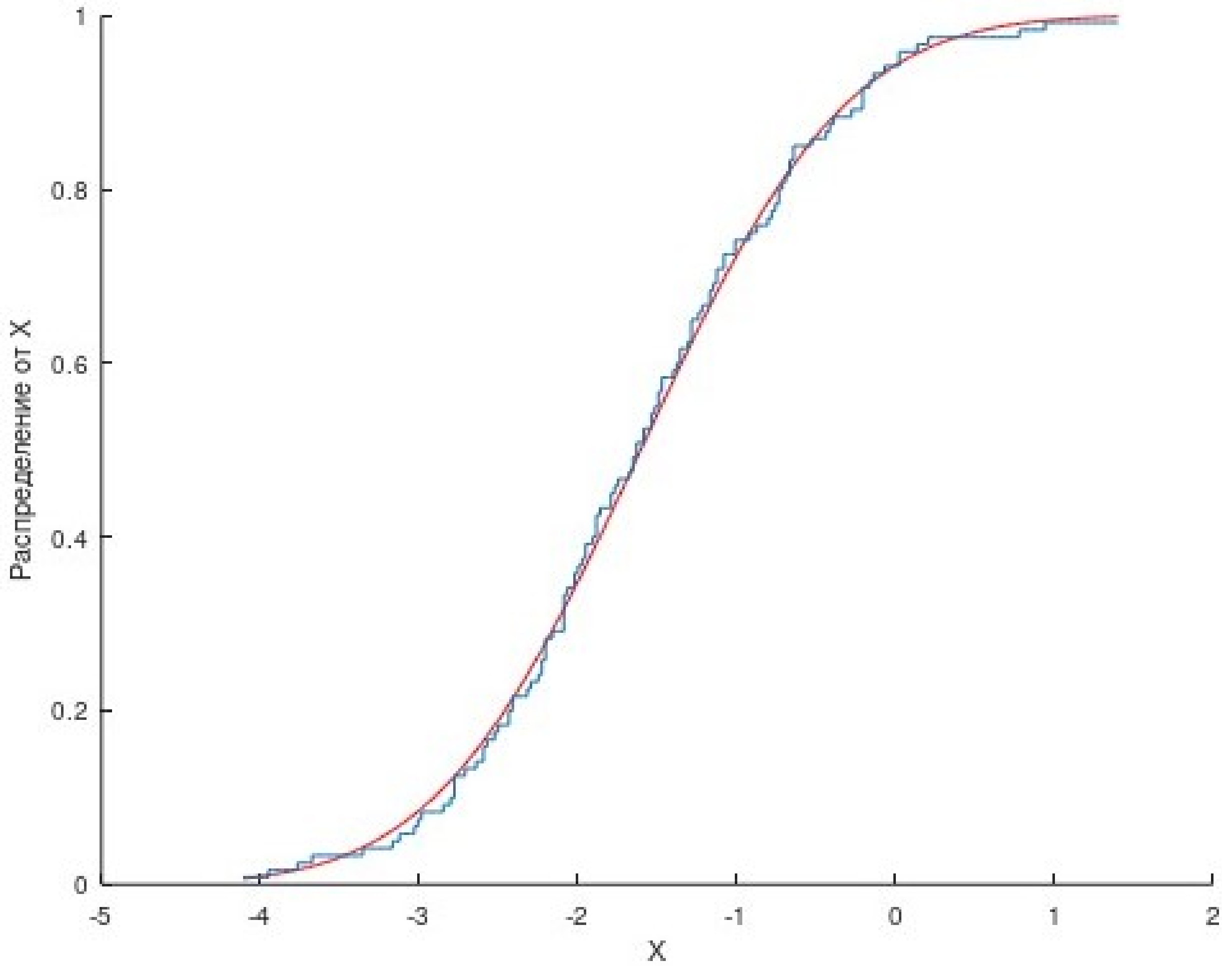
```
  J = [0 J];
  stairs(J, xes);
endfunction

function f(x, mx, dx, m, R)
  delta = R/m;
  step = delta/30;
  sigma = sqrt(dx);
  x_n = min(x):step:max(x);
  y = normpdf(x_n, mx, sigma);
  plot(x_n, y, 'r');
endfunction

function F(x, mx, dx, m, R)
  delta = R/m;
  step = delta/30;
  x_n = min(x):step:max(x);
  y = 1/2 * (1 + erf((x_n - mx) / sqrt(2 * dx)));
  plot(x_n, y, 'r');
endfunction

function drawDist(x, m, R)
  delta = R/m;
  step = delta/30;
  x_n = min(x):step:max(x);
  res = empirical_cdf(x_n, x); # эмпирическая интегральная функция распределения
  stairs(x_n, res);
endfunction

# Функции
figure;
hold on;
f(x, u_x, S_2_x, m, R_x);
draw_hist(x, intervals, count, R_x, m);
xlabel('X')
ylabel('Количество в интревале')
hold off;

figure;
hold on;
F(x, u_x, S_2_x, m, R_x);
drawDist(x, m, R_x);
xlabel('X')
ylabel('Распределение от X')
hold off;
```

3.2 Результаты работы для выборки по варианту

Вариант выборки - 1. Вывод программы:

```
Lab 1
Mmax: 1.400000
Mmin: −4.110000
R: 5.510000
u: −1.604583
S square: 1.034091
m: 8.000000
Интервалы и количества значений в этих интервалах при m = 8
[−4.110000 −3.421250) − 4
[−3.421250 −2.732500) − 11
[−2.732500 −2.043750) − 26
[−2.043750 −1.355000) − 33
[−1.355000 −0.666250) − 26
[−0.666250 0.022500) − 15
[0.022500 0.711250) − 2
[0.711250 1.400000] − 3
```




Распределение от X
X
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2