

臺北區 104 學年度第二學期

指定科目第二次模擬考試

數學甲

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全、選修數學甲全

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內畫記，修正時應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，並標明題號。請在規定之欄位以筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正帶（液）。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 單選題及多選題只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到－, ±, 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1) 3 (2) 5 (3) 7 (4) 9 (5) 11，而考生得到的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 $\boxed{3}$ 畫記（注意不是 7），如：

解 答 欄													
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	－	±	
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 5 題為多選題，而考生認為正確的選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡第 5 列的 $\boxed{1}$ 與 $\boxed{3}$ 畫記，如：

5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	－	±	
	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

(二) 選填題的題號是 A, B, C, …，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分

別在答案卡的第 20 列的 $\boxed{-}$ 與第 21 列的 $\boxed{7}$ 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	－	±	
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	－	±	
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

祝考試順利



版權所有・翻印必究

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 74 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 從集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ 中任取相異兩數 a, b ，則 $\log_a b$ 的相異值有多少個？

- (1) 17 個
- (2) 18 個
- (3) 19 個
- (4) 20 個
- (5) 21 個

2. 設 G 為 $\triangle OAB$ 的重心， P 與 Q 分別在 \overline{OA} 、 \overline{OB} 上，且 G, P, Q 三點共線，若 $4\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA}$ ， $\overrightarrow{OQ} = m\overrightarrow{OB}$ ，則 $m = ?$

- (1) $\frac{5}{3}$
- (2) $\frac{3}{5}$
- (3) $\frac{4}{9}$
- (4) $\frac{5}{27}$
- (5) $\frac{27}{5}$

3. 設 A, B 事件為獨立事件且 $P(A)+P(B)=1.2$ ，則 $P(A \cup B)$ 之最小值最接近哪個數值？

- (1) 0.5
- (2) 0.6
- (3) 0.7
- (4) 0.8
- (5) 0.9

二、多選題（占 32 分）

說明：第 4 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 坐標平面上，若直線 $y=ax+b$ (其中 a, b 為實數) 與圓 $(x-2)^2+y^2=1$ 的圖形恰交於一點，亦與圓 $(x+3)^2+y^2=4$ 的圖形恰交於一點。請選出正確的選項。

- (1) a 的所有可能值的和為 0
- (2) b 有可能為 0
- (3) 若 b 為正數，則 a 有可能為正數
- (4) 若 $b > 1$ ，則 $a = -\frac{\sqrt{6}}{12}$
- (5) 若 $b < 1$ ，則 a 的最大值為 $\frac{3}{4}$

5. 已知空間中三平面， $E_1: x-2y+3z=4$ ， $E_2: x+7y-3z=a$ ， $E_3: x+y+bz=3$ 交於一直線 L ，請選出正確的選項。

(1) $a=5$

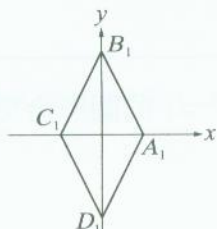
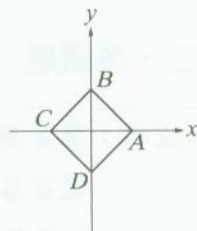
(2) $b=1$

(3) 直線 $L_1: \frac{x}{-5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ ，則 $L_1 \parallel L$

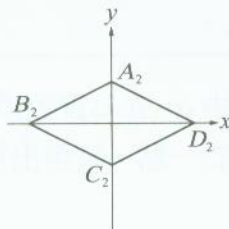
(4) 平面 $E: 3y-2z=3$ ，則 $E \parallel L$

(5) $A(0, 0, 0)$ ， $B(-3, 2, 1)$ ，若 P 為 L 上任一點，則 $\triangle PAB$ 之最小面積為 $\frac{\sqrt{42}}{2}$

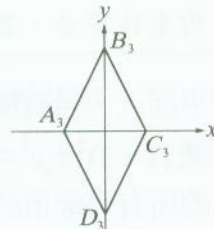
6. 已知正方形 $ABCD$ 的頂點 $A(1, 0)$ ， $B(0, 1)$ ，如右圖。若二階方陣 P 將 $ABCD$ 四點變換成 $A_1B_1C_1D_1$ 四點，其中 $A_1(1, 0)$ ， $B_1(0, 2)$ ，如圖(一)；二階方陣 Q 將 $A_1B_1C_1D_1$ 四點變換成 $A_2B_2C_2D_2$ 四點，其中 $A_2(0, 1)$ ， $B_2(-2, 0)$ ，如圖(二)，二階方陣 R 將 $A_2B_2C_2D_2$ 四點變換成 $A_3B_3C_3D_3$ 四點，其中 $A_3(-1, 0)$ ， $B_3(0, 2)$ ，如圖(三)，設 $M=PQR$ ， $N=RPQ$ 。請選出正確的選項。



圖(一)



圖(二)



圖(三)

(1) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(4) M 可將點 A 變換成點 A_3

(5) N 可將正方形 $ABCD$ 變換成一個面積為 4 平方單位的四邊形

7. 設函數 $f(x)$ 為一個實係數 n 次 ($n \geq 3$) 多項式函數，請選出正確的選項。

- (1) 若 $f'(c)=0$ ，則 $f(x)$ 在 $x=c$ 處有極值
- (2) 若 $f(x)$ 在 $x=c$ 處有極值，則 $f'(c)=0$
- (3) 若 $f''(c)=0$ ，則點 $(c, f(c))$ 為函數圖形 $y=f(x)$ 的反曲點
- (4) 若點 $(c, f(c))$ 為函數圖形 $y=f(x)$ 的反曲點，則 $f''(c)=0$
- (5) 若 $f''(x)>0$ 且 $a<x<b$ ，則在 a, b 之間 $f'(x)$ 為遞增函數

三、選填題 (占 24 分)

說明：1. 第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (8-17) 內。
2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 擲一公正骰子四次，出現點數依次為 a, b, c, d ，則

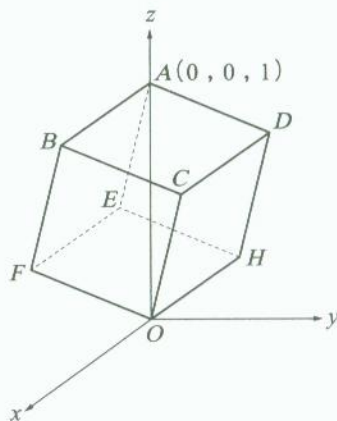
$(a-3)^2 + (b-3)^2 + (c-3)^2 + (d-3)^2 = 4$ 之機率為 $\frac{\textcircled{8}}{\textcircled{9}\textcircled{10}}$ 。(化為最簡分數)

B. 如右圖，空間中，已知正立方體 $ABCD-EFOH$ ，

其中 O 為原點且頂點 A 的坐標為 $(0, 0, 1)$ 。

若 O, C 兩點在平面 BDE 上的投影點為 M, N ，則

\overline{MN} 長為 $\frac{\sqrt{\textcircled{11}}}{\textcircled{12}}$ 。(化為最簡根式)



- C. 慈幼社為籌措活動經費，計劃在園遊會中發售一款 9 宮格刮刮樂 (如右圖所示)，每張的 9 個空格裡有 3 個 6，3 個 7，3 個 8。買家從中任意刮開 3 格(超過 3 格則不予兌獎)，若刮中 3 個相同號碼，則可得獎金為該數字的 100 倍。(例如：刮中 3 個 6，可得獎金 600 元)今此刮刮樂欲訂售價為每張 50 元，則該社團每張刮刮樂獲利的期望值為 ⑬⑭ 元。



- D. $\triangle ABC$ 中， $\sin A = \frac{1}{7}$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， O 為 $\triangle ABC$ 內切圓的圓心，且直線 AO 交 \overline{BC} 於 D ，則 $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\textcircled{15}\sqrt{\textcircled{16}}}{\textcircled{17}}$ 。(化為最簡根式)



第貳部分：非選擇題（占 26 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至予以零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、(1) 若 λ 是方程式 $2x^3 - x^2 - 10x - 6 = 0$ 的一個有理根，試求 $\lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{2x^3 - x^2 - 10x - 6}{x - \lambda}$ 的值。

(6 分)

(2) 若 ω 是方程式 $2x^3 - x^2 - 10x - 6 = 0$ 的一個無理根，且滿足無窮級數

$1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{4}\omega^2 + \cdots + \frac{1}{2^n}\omega^n + \cdots$ 之和為 $\alpha + \beta\omega$ ，其中 α, β 皆為有理數，試求數對 (α, β) 。(7 分)

二、設 $f(x) = \int_0^x (12t^3 + 12t^2 - 24t) dt$ ，試求：

(1) $f(1)$ 的值。(3 分)

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ 的值。(3 分)

(3) $f(x)$ 的最小值。(7 分)