臺中市立高級中等學校

106 學年度指定科目第四次聯合複習考試

考試日期：107 年 4 月 26~27 日

數學甲

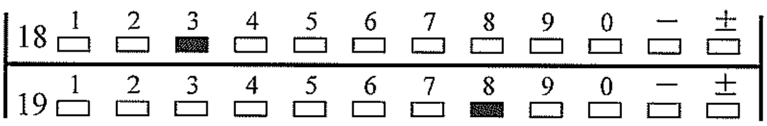
—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

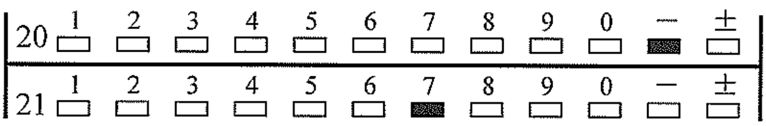
作答方式：
- 選擇（塡）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選塡題作答說明：選塡題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式塡答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\text{⑱}}{\text{⑲}}$，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\text{⑳㉑}}{50}$，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：



第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 78 分)

一、單選題(占 18 分)

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $f(x)$ 爲一實係數多項式函數，滿足：

   I. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3+\sqrt{2}}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-4$；

   II. $f(x)$ 在 $x=\alpha$、$x=\beta$ 有極值，其中 $\alpha<\beta$，且兩點 $(\alpha,f(\alpha))$，$(\beta,f(\beta))$ 對稱於點 $(1,\gamma)$。

   則下列選項何者正確？

   (1) $\alpha=-1$

   (2) $\beta=4$

   (3) $\gamma=6$

   (4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2h)-f(h)}{h}=12$

   (5) 若過點 $(1,\gamma)$ 且與 $y=f(x)$ 相切之切線與 x 軸正向之交角爲 θ，則 $\tan\theta=-4$

2. 由地面上共線三點 A、B、C 測得一塔頂 P 的仰角分別爲 θ_1、θ_2、θ_3。已知塔底 Q 與 A、B、C 不共線，且 $\overline{AQ}=100$ 公尺，$\overline{CQ}=400$ 公尺，$\overline{AB}=\overline{BC}=150\sqrt{2}$ 公尺，則下列選項何者正確？

   (1) $\overline{BQ}=250$ 公尺

   (2) θ_1、θ_2、θ_3 成等差數列

   (3) $\cos\angle APC<0$

   (4) $\cot\theta_1$、$\cot\theta_2$、$\cot\theta_3$ 成等差數列

   (5) $\tan\theta_1$、$\tan\theta_2$、$\tan\theta_3$ 成等比數列

3. 設 $a=\sqrt{3}\sin 20°+\cos 20°$，$b=\sec 80°-\sqrt{3}\csc 80°$，$c$ 爲 $|\sin x|+|\cos x|$的最大值，且 e 爲 $f(x)=5\sin x-12\cos x$ ($0\leq x\leq \pi$)的最大值，此時 x 爲 d，則下列選項各數值中何者最小？

(1) $(\frac{1}{2})^e$

(2) $\tan d$

(3) $(\frac{1}{2})^c$

(4) $\log_{64}\frac{1}{b}$

(5) a

二、多選題(占 32 分)

說明：第 4 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 空間中三向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$。

若 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 & \alpha & \beta \\ \alpha & 9 & -3 \\ \beta & -3 & 4 \end{bmatrix}$，其中 α,β 皆爲實數，則下列敘述哪些正確？

(1) 向量 $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 的夾角爲 $150°$

(2) 向量 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{c}$ 平分 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 的夾角

(3) $|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}|=3$

(4) 當 $\alpha=\beta=0$ 時，則 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 三向量所展成的四面體體積爲 $4\sqrt{3}$

(5) 三向量 $3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 、 $-2\overrightarrow{c}$ 及 $\overrightarrow{b}-4\overrightarrow{c}$ 所展成的平行六面體體積的最大值爲 $72\sqrt{3}$

5. 設點 $A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$，…，$A_n(x_n, y_n)$，滿足下列線性變化：

$\begin{cases} x_n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x_{n-1} + \dfrac{1}{3}y_{n-1} \\ y_n = \dfrac{-1}{3}x_{n-1} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}y_{n-1} \end{cases}$，$n \geq 2$，$n$ 爲正整數，且 $A_1(x_1, y_1)$ 爲 x 軸上的點 $(3, 0)$。

設二階方陣 T 滿足 $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$，令 O 爲原點，$\overline{OA_n}$ 表示原點 O 與點 A_n 連線的長度，S_{n-1} 表 $\Delta OA_{n-1}A_n$ 的面積，則下列敘述哪些正確？

(1) $T^{-1} = \dfrac{4}{9}\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{-1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$

(2) $\dfrac{\overline{OA_n}}{\overline{OA_{n-1}}} = \dfrac{4}{9}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{27}{10}$

(4) 二階行列式值 $\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix}$ 的絕對值為 $\dfrac{128}{243}$

(5) 令 $M = 3T$，則 $65(M + M^7 + M^{13} + M^{19} + M^{25}) = aM$，則實數 a 的整數部分爲 9 位數

6. 在複數平面上，描繪出 $Z^{10}=-16+16\sqrt{3}i$ 的各根所在位置，依逆時針順序連接各點形成一個正十邊形 S，則下列敘述何者正確？(已知 $\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$， $\cos 36°=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$)

(1) 有 2 個根在第二象限

(2) S 的面積大於 6

(3) S 的周長爲 $20\sqrt{2}\sin 36°$

(4) 若 z 爲 $Z^{10}=-16+16\sqrt{3}i$ 的其中一根，則 $z+\sqrt{2}i$ 的主輻角一定比 $z-\sqrt{2}$ 的主輻角小

(5) 從所有複數根中，任取相異兩根令爲 w_1, w_2，則 $|w_1-w_2|\le\sqrt{5-\sqrt{5}}$ 的機率爲 $\dfrac{17}{45}$

7. 空間坐標中，設兩直線 $L_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{3-z}{-2}$、$L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+2}{2}$，平面 $E:2x-y=6$。若 A 點在 L_1 上，B、C 兩點在 L_2 上，且 $\triangle ABC$ 爲正三角形。設有一束雷射光線沿著直線 L_1 射向平面 E，經反射後的直線爲 L_3，請選出正確的選項。

(1) 直線 L_1 與平面 E 交於一點 P，則 P 點的 z 坐標值爲 -7

(2) 直線 L_2 與平面 E 平行

(3) 若 $\triangle ABC$ 有最小面積時，A 點坐標爲 $(1,2,1)$

(4) $\triangle ABC$ 的最小面積爲 $3\sqrt{3}$

(5) 直線 L_3 的方向向量平行於向量 $(6,17,-10)$

三、選填題(占28分)

說明：1. 第 A 至 D 題為選填題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（8–19）。
2. 每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 袋中有大小材質均相同的七顆球，其球上編號分別為$1,2,3,\cdots,7$，若隨機從袋中取出四個球，球號為x,y,z,w，其中$x<y<z<w$，且隨機變數Y的取值為y，期望值為$E(Y)$，則$E(Y)=\dfrac{⑧⑨}{⑩}$。(化為最簡分數)

B. 令多項式$4(x+1)^{n+1}$除以$(3x-2)^n$所得的餘式為多項式$r_n(x)$，則$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n r_n(1)-r_n(0)}{3(-4)^{n+1}+3^{n-2}}=$ $\dfrac{⑪⑫}{⑬}$。(化為最簡分數)

C.　若 a 為實數，設一圓方程式為 $C:x^2+y^2+2(a+2)x-2(a+3)y+3a^2+2=0$，且 A,B 為圓 C 與直線 $x+y=1$ 之兩交點。若坐標平面上有一點 $P(9,2)$，則 $\triangle ABP$ 面積的最大值為 ⑭⑮$\sqrt{⑯}$。(化為最簡根式)

D.　已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & x+3 \\ 3 & x+2 & x+1 \\ x+2 & x+3 & 1 \end{vmatrix}$，設方程式 $f(x-5)=0$ 的有理根為 α，方程式 $f(x^2-1)=0$ 的正實根為 β，若有一四角錐，其底面是邊長為 α 的正方形，側稜之稜長為 β，則相鄰兩側面所夾之二面角 θ 之餘弦值為 $\dfrac{⑰\sqrt{⑱}}{⑲}$。(化為最簡根式)

－－－－－－－以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷－－－－－－－

第貳部分：非選擇題(占 22 分)

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、設 $\triangle ABC$ 是邊長為 1 的正三角形，線段 $\overline{BC}$ 上有 n 等分點，沿點 B 到點 C 的方向，依次為點 P_1、P_2、…、P_{n-1}，其中 $n\geq 2$，並令向量內積的和

$S_n=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}+\overrightarrow{AP_2}\cdot\overrightarrow{AP_3}+\cdots+\overrightarrow{AP_{n-1}}\cdot\overrightarrow{AC}$

(1) 試以 n 表示向量內積 $\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}$。(3 分)

(2) 求 S_n 的值(以 n 表示)。(5 分)

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}$。(2 分)

二、設 $f(x)=ax^2+bx+c$ 為二次實係數多項式，若 α,β 為 $f(x)=0$ 之二實根，且 $\alpha<\beta$。而 $g(x)$ 是領導係數為 -1 的三次實係數多項式，且 $g'(\alpha)=g'(\beta)=0$，則：

(1) 試證：$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx=\dfrac{a}{6}(\alpha-\beta)^3$。(4 分)

(2) 若函數 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 有極值為 -9，且 $y=f(x)$ 與 x 軸所圍成的封閉區域面積為 36，試求二次函數 $f(x)$。(4 分)

(3) 承(2)，若函數 $y=g(x)$ 的圖形通過坐標原點，且函數 $y=g(x)$ 在區間 $[-1,0]$ 與 x 軸圍成的圖形為 $\mathfrak{R}$。若將 $\mathfrak{R}$ 繞 x 軸旋轉一圈，試求所得到的旋轉體體積。(4 分)

臺中市立高級中等學校106學年度指定科目第四次聯合模擬考試

數學甲考科解析

考試日期：107年4月26~27日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	5	2	25	34	14	34	1	6	5	－	2	3	3
15	16	17	18	19									
0	2	－	2	2									

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3+\sqrt{2}}=1$ $\therefore$ 可設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-4 \Rightarrow 0=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=c$

且 $-4=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=b$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2-4x$，$f'(x)=3x^2+2ax-4$，$f''(x)=6x+2a$

由條件(II)可知：$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ 且 $(1,\gamma)$ 爲 $f(x)$ 的反曲點

$\therefore 0=f''(1)=6+2a \Rightarrow a=-3$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2-4x$，$f'(x)=3x^2-6x-4$

(1)(2) $\because \alpha,\beta$ 爲 $f'(x)=0$ 之兩根

$\Rightarrow \alpha=\dfrac{3-\sqrt{21}}{3}$，$\beta=\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}$ $\therefore$ 選項(1)(2)錯誤

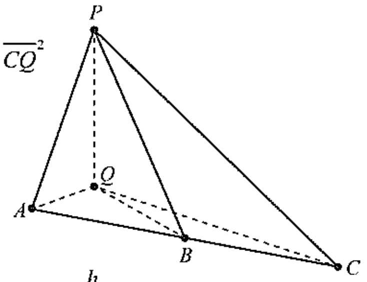
(3) $\gamma=f(1)=1-3-4=-6$ $\therefore$ 選項(3)錯誤

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2h)-f(h)}{h}=(-3)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2h)-f(h)}{-2h-h}=(-3)f'(0)=12$

$\therefore$ 選項(4)正確

(5) $\tan\theta=f'(1)=3-6-4=-7$ $\therefore$ 選項(5)錯誤

2. (1) 由中線定理可知：



$2(\overline{AB}^2+\overline{BQ}^2)=\overline{AQ}^2+\overline{CQ}^2$

$\Rightarrow \overline{BQ}=200$

$\therefore$ 選項(1)錯誤

(2)(5) 令 $\overline{PQ}=h$

$\Rightarrow \tan\theta_1=\dfrac{h}{100}$，

$\tan\theta_2=\dfrac{h}{200}$，$\tan\theta_3=\dfrac{h}{400}$

$\Rightarrow \tan\theta_1$，$\tan\theta_2$，$\tan\theta_3$ 成等比

$\because \tan 2\theta_2=\dfrac{2\tan\theta_2}{1-\tan^2\theta_2}=\dfrac{400h}{40000-h^2}$

$\tan(\theta_1+\theta_3)=\dfrac{\tan\theta_1+\tan\theta_3}{1-\tan\theta_1\tan\theta_3}=\dfrac{500h}{40000-h^2}$

$\therefore \tan 2\theta_2\neq\tan(\theta_1+\theta_3)\Rightarrow 2\theta_2\neq\theta_1+\theta_3$

$\therefore \theta_1,\theta_2,\theta_3$ 不爲等差數列 $\therefore$ 選項(2)錯誤，選項(5)正確

(3) $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=(\overline{AQ}^2+\overline{PQ}^2)+(\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2)=170000+2h^2$

且 $\overline{AC}^2=(300\sqrt{2})^2=180000$

$\because 2h^2$ 與 10000 的大小關係未定

$\therefore \overline{AP}^2+\overline{CP}^2$ 與 $\overline{AC}^2$ 的大小關係不確定

$\Rightarrow \angle APC$ 可能爲鈍角或銳角或直角

$\Rightarrow \cos\angle APC$ 未必小於 0

(4) $\because \cot\theta_1=\dfrac{100}{h}$，$\cot\theta_2=\dfrac{200}{h}$，$\cot\theta_3=\dfrac{400}{h}$

$\Rightarrow (\cot\theta_2)^2=(\cot\theta_1)(\cot\theta_3)$

$\therefore \cot\theta_1$，$\cot\theta_2$，$\cot\theta_3$ 成等比 $\Rightarrow$ 選項(4)錯誤

3. (I) $a=\sqrt{3}\sin 20^\circ+\cos 20^\circ=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ+\dfrac{1}{2}\cos 20^\circ)$

$=2(\cos 30^\circ\sin 20^\circ+\sin 30^\circ\cos 20^\circ)$

$=2\sin 50^\circ>2\sin 30^\circ=1$

(II) $b=\sec 80^\circ-\sqrt{3}\csc 80^\circ=\dfrac{1}{\cos 80^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ}$

$=\dfrac{\sin 80^\circ-\sqrt{3}\cos 80^\circ}{\cos 80^\circ\sin 80^\circ}=\dfrac{2(\frac{1}{2}\sin 80^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 80^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 160^\circ}$

$=\dfrac{2(\cos 60^\circ\sin 80^\circ-\sin 60^\circ\cos 80^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 160^\circ}=\dfrac{2\sin(80^\circ-60^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}=4$

$\therefore \log_{64}\dfrac{1}{b}=\log_{64}\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}$

(III) $\because g(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的週期爲 $\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ 只需考慮 $g(x)$ 在閉區間 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 的極值

$\Rightarrow g(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$

$\because 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi}{4}\le x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3\pi}{4}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\le 1$

$\Rightarrow 1\le g(x)\le\sqrt{2}$

$\therefore c=\sqrt{2}\Rightarrow 0<(\dfrac{1}{2})^c<(\dfrac{1}{2})^0=1$

(IV) $f(x)=5\sin x-12\cos x=13(\dfrac{5}{13}\sin x-\dfrac{12}{13}\cos x)=13\sin(x-\alpha)$，

其中 $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$，$\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$

$\because 0\le x\le\pi\Rightarrow-\alpha\le x-\alpha\le\pi-\alpha\Rightarrow-\sin\alpha\le\sin(x-\alpha)\le 1$

$\Rightarrow-\dfrac{12}{13}\le\sin(x-\alpha)\le 1\Rightarrow-12\le f(x)\le 13$

$\therefore$ 當 $\sin(x-\alpha)=1\Rightarrow x-\alpha=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ 時，

$f(x)$ 有最大値 $13=e$

$\therefore d=\alpha+\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\tan d=-\cot\alpha=-\dfrac{5}{12}<-\dfrac{1}{3}=\log_{64}\dfrac{1}{b}<0$

且 $(\dfrac{1}{2})^e=(\dfrac{1}{2})^{13}>0$

$\therefore$ 由(I)(II)(III)(IV)可知：

$-\dfrac{5}{12}<-\dfrac{1}{3}<0<(\dfrac{1}{2})^{13}<(\dfrac{1}{2})^{\sqrt{2}}<1<2\sin 50^\circ$

$\Rightarrow \tan d<\log_{64}\dfrac{1}{b}<(\dfrac{1}{2})^e<(\dfrac{1}{2})^c<a$

故答案爲選項(2)

二、多選題

4. 由矩陣乘法的定義可知：

$$\begin{cases}16=a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\overrightarrow{a}|^2\\ 9=b_1^2+b_2^2+b_3^2=|\overrightarrow{b}|^2\\ 4=c_1^2+c_2^2+c_3^2=|\overrightarrow{c}|^2\\ -3=b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|\overrightarrow{a}|=4\\ |\overrightarrow{b}|=3\\ |\overrightarrow{c}|=2\\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=-3\end{cases}$$

(1) 設 $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 的夾角爲 θ，

則 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|}=\dfrac{-3}{3\times2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta=120^\circ$

$\therefore$ 選項(1)錯誤

(2) $\because|\overrightarrow{a}|=4=|2\overrightarrow{c}|$ $\therefore\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{c}$ 會平分 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 的夾角

$\therefore$ 選項(2)正確

(3) $\because\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 的夾角爲 120°

$\therefore|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\sin120^\circ=3\times2\times\dfrac{\sqrt3}{2}=3\sqrt3$

$\therefore$ 選項(3)錯誤

(4) 當 $\alpha=\beta=0$，表 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ 且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$，

即 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ 且 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$

$\therefore\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 所展成的四面體體積爲

$\dfrac{1}{6}\times|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}|\times|\overrightarrow{a}|=\dfrac{1}{6}\times3\sqrt3\times4=2\sqrt3$

$\therefore$ 選項(4)錯誤

(5) $V=\left|\begin{vmatrix}3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\\ -2\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}-4\overrightarrow{c}\end{vmatrix}\right|=2\cdot\left|\begin{vmatrix}3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\\ \overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}-4\overrightarrow{c}\end{vmatrix}\right|=2\cdot\left|\begin{vmatrix}3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\\ \overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}\end{vmatrix}\right|$

$=2\cdot\left|\begin{vmatrix}3\overrightarrow{a}\\ \overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}\end{vmatrix}\right|=2\cdot3\cdot\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{a}\\ \overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}\end{vmatrix}\right|=6\cdot\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{a}\\ \overrightarrow{b}\\ \overrightarrow{c}\end{vmatrix}\right|$

又 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 展成的平行六面體體積最大値產生在

$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ 且 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$ 時，即 $\alpha=\beta=0$ 時

故所求體積最大値爲

$6\times|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}|\times|\overrightarrow{a}|=6\times3\sqrt3\times4=72\sqrt3$

$\therefore$ 選項(5)正確

故選(2)(5)

5. $\because\begin{cases}x_n=\dfrac{\sqrt3}{3}x_{n-1}+\dfrac{1}{3}y_{n-1}\\ y_n=\dfrac{-1}{3}x_{n-1}+\dfrac{\sqrt3}{3}y_{n-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{-1}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{bmatrix}$

$\therefore T=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{-1}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\end{bmatrix}$

(1) $\because\det T=\dfrac{4}{9}$ $\therefore T^{-1}=\dfrac{9}{4}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{-1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\end{bmatrix}$

$\therefore$ 選項(1)錯誤

(2) $\because T=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{-1}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\end{bmatrix}=\dfrac{2}{3}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt3}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2}&\frac{\sqrt3}{2}\end{bmatrix}=\dfrac{2}{3}\begin{bmatrix}\cos(-30^\circ)&-\sin(-30^\circ)\\ \sin(-30^\circ)&\cos(-30^\circ)\end{bmatrix}$

$\therefore$ 點 A_n = 將點 A_{n-1} 繞原點順時針旋轉 30° 後再將其與原點的距離伸縮爲原來的 $\dfrac{2}{3}$ 倍

$\therefore\dfrac{\overline{OA_n}}{\overline{OA_{n-1}}}=\dfrac{2}{3}$ 且 $S_{n-1}=\dfrac{1}{2}\overline{OA_{n-1}}\times\overline{OA_n}\times\sin30^\circ$

$\therefore$ 選項(2)錯誤

(3) $\because\dfrac{S_n}{S_{n-1}}=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{OA_n}\times\overline{OA_{n+1}}\times\sin30^\circ}{\frac{1}{2}\overline{OA_{n-1}}\times\overline{OA_n}\times\sin30^\circ}=\dfrac{\overline{OA_n}}{\overline{OA_{n-1}}}\times\dfrac{\overline{OA_{n+1}}}{\overline{OA_n}}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$，

$\forall n\ge2$ 且 $S_1=\dfrac{1}{2}\overline{OA_1}\times\overline{OA_2}\times\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}\overline{OA_1}\times\dfrac{2}{3}\overline{OA_1}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\frac{3}{2}}{1-\frac{4}{9}}=\dfrac{27}{10}$ $\therefore$ 選項(3)正確

(4) $\because$ 向量 $\overrightarrow{OA_{n-1}}$ 與 $\overrightarrow{OA_n}$ 的夾角爲 30° 且 $\overline{OA_n}=\dfrac{2}{3}\overline{OA_{n-1}}$

$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{OA_3}$ 與 $\overrightarrow{OA_6}$ 的夾角爲 90° 且 $\overline{OA_3}=(\dfrac{2}{3})^2\overline{OA_1}=\dfrac{4}{3}$，

$\overline{OA_6}=(\dfrac{2}{3})^5\overline{OA_1}=\dfrac{32}{81}$

$\Rightarrow\left|\begin{vmatrix}x_3&y_3\\ x_6&y_6\end{vmatrix}\right|=$ 由向量 $\overrightarrow{OA_3}$ 與 $\overrightarrow{OA_6}$ 所圍的平行四邊形面積

$=\overline{OA_3}\times\overline{OA_6}\times\sin90^\circ=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{32}{81}=\dfrac{128}{243}$

$\therefore$ 選項(4)正確

(5) $\because T^6=(\dfrac{2}{3})^6\begin{bmatrix}\cos(-30^\circ\times6)&-\sin(-30^\circ\times6)\\ \sin(-30^\circ\times6)&\cos(-30^\circ\times6)\end{bmatrix}$

$=(\dfrac{2}{3})^6\begin{bmatrix}-1&0\\ 0&-1\end{bmatrix}=-(\dfrac{2}{3})^6I_2$

$\therefore M^6=3^6T^6=-64I_2\Rightarrow M^7=M^6\cdot M=-64M$

$\therefore M^{13}=M^6\cdot M^7=(-64)^2M$，$M^{19}=M^6\cdot M^{13}=(-64)^3M$，

$M^{25}=M^6\cdot M^{19}=(-64)^4M$

$\therefore65(M+M^7+M^{13}+M^{19}+M^{25})$

$=65[1+(-64)+(-64)^2+(-64)^3+(-64)^4]M$

$=65\times\dfrac{1\cdot[1-(-64)^5]}{1-(-64)}M=(1+2^{30})M\Rightarrow a=1+2^{30}$

$\because\log2^{30}=30\log2\fallingdotseq9.03\Rightarrow\log2^{30}$ 的首數 $=9$

$\therefore2^{30}$ 爲 10 位數 $\Rightarrow a$ 爲 10 位數 $\therefore$ 選項(5)錯誤

故選(3)(4)

6. $\because Z^{10}=-16+16\sqrt3i=32(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt3}{2}i)=2^5(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)$

$\therefore-16+16\sqrt3i$ 的十次方根爲

$Z_k=\sqrt2[\cos(12^\circ+36^\circ k)+i\sin(12^\circ+36^\circ k)]$，$k=0,1,2,\ldots,9$

$\Rightarrow Z_k$ 的主幅角爲 $12^\circ+36^\circ k$ 且 $|Z_k|=\sqrt2$

(1) $k=0,1,2\Leftrightarrow Z_k\in\mathrm{I}$

$k=3,4\Leftrightarrow Z_k\in\mathrm{II}$

$k=5,6,7\Leftrightarrow Z_k\in\mathrm{III}$

$k=8,9\Leftrightarrow Z_k\in\mathrm{IV}$

$\therefore$ 選項(1)正確

(2) $\because \overline{OZ_k}=\sqrt{2}$ 且 $\angle Z_kOZ_{k+1}=36^\circ=\angle Z_9OZ_0$ ， $k=0,1,2\ldots,8$

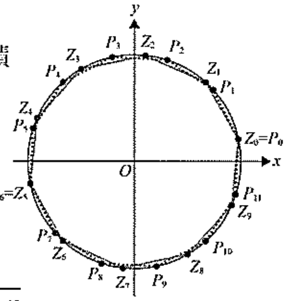
$\therefore$ 正十邊形 $Z_0Z_1\cdots Z_9$ 的面積

$<$ 正十二邊形 $Z_0P_1\cdots P_{11}$ 的面積

$=12\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin 30^\circ$

$=6$

$\therefore$ 選項(2)錯誤



(3) 正十邊形的周長

$=10\overline{Z_1Z_2}$

$=10\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 36^\circ}$

$=10\sqrt{4-4\cos 36^\circ}=20\sqrt{1-\cos 36^\circ}$

$=20\sqrt{2\sin^2 18^\circ}=20\sqrt{2}\sin 18^\circ$ $\quad\therefore$ 選項(3)錯誤

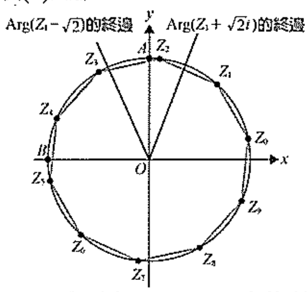
(4) 令 $A(0,\sqrt{2})$ ， $B(-\sqrt{2},0)$ ，則

$Arg(Z_k+\sqrt{2}i)=$ 向量 $\overrightarrow{OZ_k}+\overrightarrow{OA}$ 與正 x 軸的夾角

$Arg(Z_k-\sqrt{2})=$ 向量 $\overrightarrow{OZ_k}+\overrightarrow{OB}$ 與正 x 軸的夾角

$\therefore Arg(Z_k+\sqrt{2}i)<Arg(Z_k-\sqrt{2})$ ， $\forall k=0,1,\ldots,9$

$\therefore$ 選項(4)正確



(5) 設 Q_1，Q_2 分別表示 w_1， w_2 在複數平面上所對應到的點

且 $\angle Q_1OQ_2=36^\circ\cdot k$ ， $k=1,2,\ldots,5$

由餘弦定理可知：

$|w_1-w_2|=\overline{Q_1Q_2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 36k^\circ}$

$\le\sqrt{5-\sqrt{5}}$

$\Rightarrow 4-4\cos 36k^\circ\le 5-\sqrt{5}$

$\Rightarrow \cos 36k^\circ\ge\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}=\sin 18^\circ=\cos 72^\circ\Rightarrow k=1,2$

① $k=1\Rightarrow(w_1,w_2)$ 可能爲 $(Z_k,Z_{k+1}),k=0,1,\ldots,8$

與 (Z_9,Z_0) 共 10 種可能

② $k=2\Rightarrow(w_1,w_2)$ 可能爲 $(Z_k,Z_{k+2}),k=0,1,\ldots,7$

與 $(Z_8,Z_0),(Z_9,Z_1)$ 共 10 種可能

$\therefore$ 所求機率爲 $\dfrac{10\times 2}{C_2^{10}}=\dfrac{4}{9}$ $\quad\therefore$ 選項(5)錯誤。故選(1)(4)

7\. 設 L_1 參數式： $\begin{cases}x=3+2t\\ y=5+3t\\ z=3+2t\end{cases}$ ， $t\in\mathbb{R}$ ，

L_2 參數式： $\begin{cases}x=1+s\\ y=-4+2s\\ z=-2+2s\end{cases}$ ， $s\in\mathbb{R}$

(1) 設 P 點坐標 $(3+2t,5+3t,3+2t)$ 代入平面 E 得：

$(6+4t)-(5+3t)=6\Rightarrow t=5$

$\therefore P$ 點坐標爲 $(13,20,13)\Rightarrow z$ 坐標爲 13 $\quad\therefore$ 選項(1)錯誤

(2) L_2 的方向向量 $\overrightarrow{\ell_2}=(1,2,2)$ ，

平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n}=(2,-1,0)\Rightarrow\overrightarrow{\ell_2}\cdot\overrightarrow{n}=0$

且 L_2 上一點 $(1,-4,-2)$ 代入平面 E，

得： $2\cdot 1-(-4)=6$ (合)，故 L_2 落在平面 E 上

$\therefore$ 選項(2)錯誤

(3) $\triangle ABC$ 有最小面積時，A 點爲公垂線與 L_1 之交點，

設 $A(3+2t,5+3t,3+2t)$ ，

且令公垂線與 L_2 的交點爲 $Q(1+s,-4+2s,-2+2s)$ ，

$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{\ell_1}=0\\ \overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{\ell_2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(s-2t-2,2s-3t-9,2s-2t-5)\cdot(2,3,2)=0\\ (s-2t-2,2s-3t-9,2s-2t-5)\cdot(1,2,2)=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}12s-17t=41\\ 9s-12t=30\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s=2\\ t=-1\end{cases}$

$\therefore$ 將 $t=-1$ 代入得 A 點坐標爲 $(1,2,1)$ $\quad\therefore$ 選項(3)正確

(4) 承(3)，將 $s=2$ 代入 L_2 得公垂線與 L_2 的交點爲 $H(3,0,2)$

則 $\overline{AH}$ 爲 $\triangle ABC$ 有最小面積的高，且 $\overline{AH}=3$

$\therefore$ 邊長 $=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times 3=2\sqrt{3}$ $\quad\therefore$ 最小面積 $=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot 3}{2}=3\sqrt{3}$

(5) 設 L_1 上一點 $(3,5,3)$ 對 E 作垂直線 L' 參數式爲

$(3+2r,5-r,3)$ 代入 E 得： $6+4r-5+r=6\Rightarrow r=1$ ，

故垂足爲 $(5,4,3)$ ，對稱點爲

$2\times(5,4,3)-(3,5,3)=(7,3,3)$

則點 $(7,3,3)$ 與 $P(13,20,13)$ 的連線即爲 L_3

且 $(7,3,3)$ 與 P 所形成向量爲(6,17,10)

$\therefore L_3$ 方向向量平行於(6,17,10) $\quad\therefore$ 選項(5)錯誤

故選(3)(4)

三、選填題

A.

Y	2	3	4	5
p_Y	$\dfrac{C_1^1C_2^5}{C_4^7}$	$\dfrac{C_1^2C_2^4}{C_4^7}$	$\dfrac{C_1^3C_2^3}{C_4^7}$	$\dfrac{C_1^4C_2^2}{C_4^7}$

$\Rightarrow$

Y	2	3	4	5
p_Y	$\dfrac{10}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{9}{35}$	$\dfrac{4}{35}$

$E(Y)=2\times\dfrac{10}{35}+3\times\dfrac{12}{35}+4\times\dfrac{9}{35}+5\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{20+36+36+20}{35}=\dfrac{112}{35}=\dfrac{16}{5}$

B. 設 $4(x+1)^{n+1}=(\dfrac{4}{3^n}x+c)(3x-2)^n+r_n(x)$ ，

令 $x=1$ 代入

$\Rightarrow 4\cdot 2^{n+1}=(\dfrac{4}{3^n}+c)+r_n(1)$ $\quad\Rightarrow r_n(1)=8\cdot 2^n-4\cdot(\dfrac{1}{3})^n-c$ ，

$\Rightarrow$ 左右同乘 $(-2)^n$ ： $(-2)^n r_n(1)=8\cdot(-2)^n\cdot 2^n-4\cdot(-2)^n\cdot(\dfrac{1}{3})^n-c\cdot(-2)^n$

$\Rightarrow$ 得： $\boxed{(-2)^n r_n(1)=8\cdot(-4)^n-4\cdot(\dfrac{-2}{3})^n-c\cdot(-2)^n}$

令 $x=0$ 代入 $\Rightarrow 4=(-2)^n c+r_n(0)$ ，得： $\boxed{r_n(0)=4-c\cdot(-2)^n}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n r_n(1)-r_n(0)}{3(-4)^{n+1}+3^{n-2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8\cdot(-4)^n-4(\frac{-2}{3})^n-4}{3(-4)^{n+1}+3^{n-2}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8-4(\frac{1}{6})^n-4(-\frac{1}{4})^n}{-12+\frac{1}{9}(-\frac{3}{4})^n}=-\dfrac{8}{12}=-\dfrac{2}{3}$

C. 圓 $C:x^2+y^2+2(a+2)x-2(a+3)y+3a^2+2=0$

$\Leftrightarrow(x+(a+2))^2+(y-(a+3))^2=-a^2+10a+11=-(a-5)^2+36\le 36$

$\therefore$ 圓心 $O(-a-2,a+3)\in L:x+y=1$ 且最大半徑爲 6

$\Rightarrow\overline{AB}$ 爲圓 C 的一直徑 $\Rightarrow d(P,\overline{AB})=d(P,L)=\dfrac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

$\therefore\triangle ABP$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot d(P,\overline{AB})=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\times$ (圓 C 的直徑)

$\le\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\times 12=30\sqrt{2}$

D. 將三階行列式第二行、第三行均乘以 1 加至第一行：

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x+6 & 2 & x+3\\ 2x+6 & x+2 & x+1\\ 2x+6 & x+3 & 1\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow f(x)=(2x+6)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & x+3\\ 1 & x+2 & x+1\\ 1 & x+3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(2x+6)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & x+3\\ 0 & x & -2\\ 0 & x+1 & -x-2\end{vmatrix}=(2x+6)\begin{vmatrix}x & -2\\ x+1 & -x-2\end{vmatrix}$$

$$=(2x+6)\cdot[x(-x-2)-(x+1)(-2)]=2(x+3)(-x^2+2)$$

令 $f(x)=0\Rightarrow 2(x+3)(-x^2+2)=0\Rightarrow x=-3$ 或 $x=\pm\sqrt{2}$

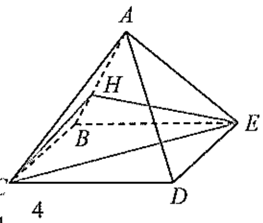
(1) $f(x-5)=0\Rightarrow x-5=-3$ 或 $\pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow x=2$ 或 $x=5\pm\sqrt{2}$，有理根為 2 $\quad\therefore\alpha=2$

(2) $f(x^2-1)=0\Rightarrow x^2-1=-3$ 或 $\pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow x^2=-2$ 或 $1\pm\sqrt{2}$ (負不合)，正實根為 $\sqrt{\sqrt{2}+1}$

$\therefore\beta=\sqrt{\sqrt{2}+1}$



如右圖，設 C、E 分別對 $\overline{AB}$ 作垂足於 H，令 $\overline{CH}=\overline{EH}=h$，

且 $\overline{CE}=2\sqrt{2}$

二面角 $\theta=\angle CHE$

$$\Rightarrow\cos\theta=\frac{h^2+h^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot h\cdot h}=\frac{2h^2-8}{2h^2}=1-\frac{4}{h^2}$$

又 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AC}=\overline{AB}=\beta=\sqrt{\sqrt{2}+1}$，$\overline{BC}=\alpha=2$，

$$\cos\angle CAB=\frac{\beta^2+\beta^2-\alpha^2}{2\cdot\beta\cdot\beta}=\frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}+1)-4}{2\cdot(\sqrt{\sqrt{2}+1})\cdot(\sqrt{\sqrt{2}+1})}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1},$$

$$\sin\angle CAB=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{4\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+1}$$

$$\therefore h=\overline{CH}=\overline{AC}\cdot\sin\angle CAB=\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{4\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}}$$

$$\therefore h^2=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\quad 所求為\ \cos\theta=1-\frac{4}{h^2}=1-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\dfrac{2n^2-3n+4}{2n^2}$ (2) $\dfrac{5n^2-2}{6n}$ (3) $\dfrac{5}{6}$

【詳解】

(1) $\because\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times1\times\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore$ 由內分點公式可知：

$$\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}=(\frac{n-1}{n}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{n}\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{n-2}{n}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{n}\overrightarrow{AC})\ (1\ 分)$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{2(n-1)+(n-2)}{n^2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{n^2-\frac{3}{2}n+2}{n^2}=\frac{2n^2-3n+4}{2n^2}\ (2\ 分)$$

(2) 設 $B=P_0$，$C=P_n$，由內分點公式可知：

$$\overrightarrow{AP_k}\cdot\overrightarrow{AP_{k+1}}=(\frac{n-k}{n}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{n}\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{n-k-1}{n}\overrightarrow{AB}+\frac{k+1}{n}\overrightarrow{AC})$$

$$=\frac{(n-k)(n-k-1)+k(k+1)}{n^2}+\frac{(n-k)(k+1)+k(n-k-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{(n^2-\frac{n}{2})+k^2-(n-1)k}{n^2}\ (2\ 分)$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{AP_k}\cdot\overrightarrow{AP_{k+1}}=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(n^2-\frac{n}{2})+\sum_{k=0}^{n-1}k^2-(n-1)\sum_{k=0}^{n-1}k\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}[n(n^2-\frac{n}{2})+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-(n-1)\cdot\frac{n(n-1)}{2}]$$

$$=\frac{1}{n}\left(n^2-\frac{n}{2}+\frac{2n^2-3n+1}{6}-\frac{n^2-2n+1}{2}\right)=\frac{5n^2-2}{6n}\ (3\ 分)$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{5n^2-2}{6n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-2}{6n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{2}{n^2}}{6}=\frac{5}{6}$

(2 分)

二、(1) 見詳解 (2) $f(x)=x^2-4x-5$ (3) $\dfrac{1167}{35}\pi$

【詳解】

(1) $\because\alpha,\beta$ 為 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 之二根

$\therefore f(x)=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ (1 分)

左式 $=\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=a\int_\alpha^\beta\left(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right)dx$

$$=a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{(\alpha+\beta)}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta\ (1\ 分)$$

$$=a\left[\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cdot(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta\cdot(\beta-\alpha)\right]\ (1\ 分)$$

$$=\frac{a}{6}\cdot(\beta-\alpha)\left[2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\right]$$

$$=\frac{a}{6}\cdot(\beta-\alpha)\left(2\beta^2+2\alpha\beta+2\alpha^2-3\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2+6\alpha\beta\right)$$

$$=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)\cdot\left[-(\alpha-\beta)^2\right]$$

$$=\frac{a}{6}(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)^2=\frac{a}{6}(\alpha-\beta)^3=右式，故得證(1\ 分)$$

(2) $\because$ 二次函數的極值為 $-9<0$，且與 x 軸可圍成封閉區域

$\therefore y=f(x)$ 應為開口向上的二次函數，頂點為 $(2,-9)$，且與 x 軸交於 $(2+k,0)$、$(2-k,0)$，$k>0$

[此時，$\alpha=2-k$，$\beta=2+k$]

$\because$ 頂點為 $(2,-9)$

$\therefore f(x)=a(x-2)^2-9$ (1 分) $=ax^2-4ax+4a-9\cdots$(I)

$\because$ 與 x 軸交於 $(2+k,0),(2-k,0)$

$\therefore f(x)=a[x-(2+k)][x-(2-k)]\cdots$(II) (1 分)

比較(I)(II)的常數項得：$4a-9=a\cdot(2+k)(2-k)$

$\Rightarrow 4a-9=4a-ak^2\Rightarrow ak^2=9\cdots$(III)

又 $\because$ 與 x 軸圍成區域面積為 36

$\therefore f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 的定積分值為 -36

即 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=-36\Rightarrow\frac{a}{6}(\alpha-\beta)^3=-36$ (1 分)

$\displaystyle\Rightarrow\frac{a}{6}[(2-k)-(2+k)]^3=-36\Rightarrow\frac{-4ak^3}{3}=-36\Rightarrow ak^3=27\cdots$(IV)

由 $\dfrac{\text{(IV)}}{\text{(III)}}$ 可得：$k=3$，代入(III)得：$a=1$

$\therefore f(x)=1\cdot(x-5)(x+1)=x^2-4x-5$ (1 分)

(3) $\because\deg g(x)=3$，且 $g'(\alpha)=g'(\beta)=f(\alpha)=f(\beta)=0$

$\therefore g'(x)=\ell\cdot f(x)$ (1 分)

故 $g'(x)=\ell(x^2-4x-5)\Rightarrow g(x)=\dfrac{\ell}{3}x^3-2\ell x^2-5\ell x+d$，

又 $g(x)$ 領導係數 $=-1$ $\quad\therefore\ell=-3$

且 $g(0)=0$ $\quad\therefore g(x)=-x^3+6x^2+15x$ (1 分)

$$\therefore 所求=\int_{-1}^0\pi[g(x)]^2\,dx=\pi\int_{-1}^0(-x^3+6x^2+15x)^2\,dx$$

$$=\pi\int_{-1}^0(x^6-12x^5+6x^4+180x^3+225x^2)\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{7}x^7-2x^6+\frac{6}{5}x^5+45x^4+75x^3\right)\Bigg|_{-1}^0\pi$$

$$=-\left(\frac{-1}{7}-2-\frac{6}{5}+45-75\right)\pi=\frac{1167}{35}\pi\ (2\ 分)$$