臺中市立高級中等學校

105 學年度指定科目第三次聯合模擬考試

考試日期：106 年 3 月 1~2 日

數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、單選題(占 24 分)

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 在複數平面上

(a) 以三個複數 0、8、 $(1+\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi)$ 爲頂點的三角形面積爲 p

(b) 以 $4+4\sqrt{3}i$ 的三次方根爲三個頂點的三角形面積爲 q

(c) 設複數 z_1、 z_2 滿足 $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$ 且 $\frac{z_1}{z_2}=i$，以 0、 z_1、 z_2 爲頂點的三角形面積爲 r

下列選項何者正確？

(1) $p<q<r$

(2) $q<p<r$

(3) $r<q<p$

(4) $q<r<p$

(5) $p<r<q$

2. 設圓 C_1：$(x+1)^2+(y-6)^2=5$，過圓 C_1 外一點 $P(2,7)$ 射出一斜率爲正的雷射光線 L_1 與圓 C_1 相切。當 L_1 碰到 x 軸後依光學原理(入射角＝反射角)產生反射光線 L_2，若圓 C_2：$(x+2)^2+(y-4)^2=5$ 分別與 L_1 交 a 個點、與 L_2 交 b 個點，則 $a+b$ 之值爲？

(1) 0

(2) 1

(3) 2

(4) 3

(5) 4

3. 圖(1)爲正四角錐台的展開圖，展開圖中 $ABCD$ 爲正方形及四個全等的等腰梯形，$\overline{AB}=6$、$\overline{AE}=\overline{BF}=5$、$\overline{EF}=2$，則正四角錐台中，$\overline{EF}$ 所在的直線與 $\overline{CD}$ 所在的直線的距離爲？

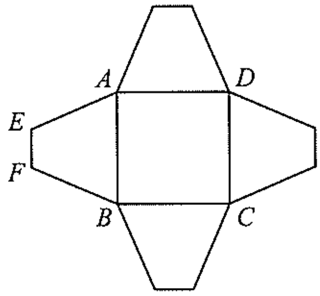
(1) $\sqrt{38}$

(2) $\sqrt{37}$

(3) $\sqrt{35}$

(4) $\sqrt{34}$

(5) $\sqrt{33}$



圖(1)

4. 函數 $f(x)=a\sin(bx)$（$a>0$ 且 $b>0$）的圖形中，若取相鄰的兩個最高點及一個最低點，可形成正三角形，則 ab 之值最接近下列哪一個數？（$\sqrt{2}\approx1.414$、$\sqrt{3}\approx1.732$、$\sqrt{5}\approx2.236$、$\pi\approx3.14$）

(1) 2.6

(2) 2.7

(3) 2.8

(4) 2.9

(5) 3.0

二、多選題(占24分)

說明：第5題至第7題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得8分；答錯1個選項者，得4.8分；答錯2個選項者，得1.6分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 在空間坐標系中，有兩歪斜線 $L_1: x=y=z+k$ 、 $L_2: \frac{x}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$ 及一平面 $E: ax+y-2z=2$。已知 L_1 為平面 E 上的一條直線，且平面 F 為平面 E 以直線 L_1 為中心軸旋轉 θ 角所得的平面($0<\theta<\frac{\pi}{2}$)，其中平面 F 與直線 L_2 不相交，則下列哪些選項是正確的？

(1) $k=-1$

(2) $a=1$

(3) 直線 L_2 與平面 E 交一點，且此點坐標值皆為整數

(4) $\cos\theta$ 之值為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) 直線 L_2 與平面 F 的距離為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

6. $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 為空間中三個非零且兩兩不平行的向量，設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ，下列哪些選項是正確的？

(1) $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|\leq|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|$

(2) 若 $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|<\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$，則 $\theta>45°$

(3) 必存在實數 x、 y，使 $\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$

(4) 若 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=0$，則 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{b}=0$

(5) 若 $|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot|\overrightarrow{c}|$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$

7. 若三平面$\begin{cases} E_1：a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ E_2：a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ E_3：a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$將空間分割成六個區域，已知 $d_1d_2d_3\neq 0$，且點 $P(1,1,1)$都在此三平面上，則下列哪些選項是正確的？

(1) 方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$恰一組解

(2) 行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+d_3 \end{vmatrix}$之值必為 0

(3) 方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$中的三個平面也將空間分成六個區域

(4) 若$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$為方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$的解，則$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$為$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$的解

(5) 若$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$為方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$的解，則$\begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$為方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=a_1+b_1+2c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=a_2+b_2+2c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=a_3+b_3+2c_3 \end{cases}$的解

三、選填題(占 28 分)

說明：1. 第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(8–21)。 2. 每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 若 $2(x+9)^4-17(x+9)^3+10(x+9)^2-19(x+9)-5=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，則 $a-b+c-d+e$ 之值為 ⑧⑨⑩。

B. 已知函數 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x, x\le 0\\ \log_2(x+4), x>0\end{cases}$，若 $f(a)\ge 8$，則 a 的取值範圍為 $a\le$ ⑪⑫ 或 $a\ge$ ⑬⑭⑮。

C. ΔABC中，$\cos B<0$，已知ΔABC的外心到A的距離爲$\sqrt{65}$，到$\overline{AB}$的距離爲 8，到$\overline{BC}$的距離爲 7，則$\overline{AC}$的長爲$\dfrac{⑯}{⑰}\sqrt{⑱⑲}$。

D. 在一個大福袋中，共裝有 30 個小福袋，其中小福袋有甲、乙、丙三種類別，而丙類小福袋占有 5 個。已知甲類的每個小福袋有 3 個白球、2 個黑球、1 個紅球；乙類的每個小福袋有 1 個白球、3 個黑球、2 個紅球；丙類的每個小福袋有 2 個白球、1 個黑球、3 個紅球。今先從大福袋中任抽出一個小福袋，再從小福袋中一次抽取出兩球。在已知此兩球爲 1 個黑球 1 個白球的條件下，這兩球是從甲類中被抽出來的機率爲$\dfrac{9}{13}$，則大福袋中共有 ⑳㉑ 個甲類小福袋。

－－－－－－－以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷－－－－－－－

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、一袋中有N個球，其中有K個相同的紅球，其他皆爲相同的白球，自袋中隨機抽取n個球，現有兩種取球方式：

方法①：一次取一球，每次取完後放回，共抽n個球。

方法②：一次抽取n個球。

設隨機變數X爲抽出的n個球中，紅球的個數，其中$n \le K$且$n \le N-K$。求下列各小題：

(1) 方法①及方法②中，隨機變數X的機率質量函數分別爲$f(x)$與$g(x)$，求$f(x)$與$g(x)$。(可用C_k^n, P_k^n, n^m等符號表示)(各 2 分，共 4 分)

(2) 若依方法①的方式取球，則當$(n,K,N)=(6,12,18)$時，取出紅球個數的期望值爲何？(4 分)

(3) 已知等式$C_k^{p+q}=C_0^pC_k^q+C_1^pC_{k-1}^q+C_2^pC_{k-2}^q+\cdots+C_k^pC_0^q$對於任意滿足$k \le p$且$k \le q$的正整數$k$恆成立，請根據此恆等式與(1)中的$g(x)$證明：方法②中，隨機變數$X$的期望值爲$n\times\dfrac{K}{N}$。
(提示：當m、k爲正整數時，$k\cdot C_k^m=k\cdot\dfrac{m!}{k!(m-k)!}=m\cdot\dfrac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!}=m\cdot C_{k-1}^{m-1}$)(5 分)

二、(1) 求以直線$L: x-2y=0$爲鏡射軸的鏡射矩陣。(5 分)

(2) 已知a、b、c、d皆爲實數，若a、b滿足$|a|+|b-2|=3$，且c、d滿足$\begin{cases}5c=3a+4b\\5d=4a-3b\end{cases}$，求$(a-c)^2+(b-d)^2$的最大值。(6 分)

臺中市立高級中等學校105學年度指定科目第三次聯合模擬考試

數學甲考科解析

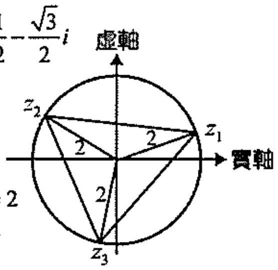
考試日期：106年3月1~2日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4	5	2	234	145	234	–	2	9	–	3	2	5	2
16	17	18	19	20	21									
6	5	6	5	1	5									

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (*a*) 因 $z=1+\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$



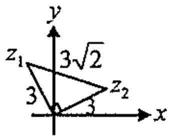
故 $p=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

(*b*) 因 $z^3=4+4\sqrt{3}i$

$=8(\cos 60°+i\sin 60°)\Rightarrow |z|=\sqrt[3]{8}=2$

故 $q=(\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 120°)\times 3=3\sqrt{3}$

(*c*) 由 $z_1=z_2 i=z_2(\cos 90°+i\sin 90°)$，可知複數 z_1 的位置是由 z_2 經旋轉 $90°$ 且保持與原點距離不變而得到，又 $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$ 表示 z_1 與 z_2 的距離為 $3\sqrt{2}$



故 $r=\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$

$\therefore p<r<q$，故選(5)

2. 設圓 C_1 之圓心為 $O_1(-1,6)$

切線 L_1：$y=m(x-2)+7\Rightarrow mx-y-2m+7=0$

由 $d(O_1,L_1)=\frac{|-m-6-2m+7|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$

可得正切線斜率為 $m=2$

故切線為 L_1：$2x-y+3=0$，其與 x 軸交於 $A(-\frac{3}{2},0)$

而反射光線 L_2 依光學原理(入射角＝反射角)

其斜率為 $m=-2$，且過 A 點

故 L_2：$2x+y+3=0$，設圓 C_2 之圓心為 $O_2(-2,4)$

則由 $d(O_2,L_1)=\frac{|-4-4+3|}{\sqrt{2^2+1}}=\sqrt{5}$ (C_2 與 L_1 相切)

且 $d(O_2,L_2)=\frac{|-4+4+3|}{\sqrt{2^2+1}}<\sqrt{5}$ (C_2 與 L_2 相割)

故圓 C_2 與 L_1、L_2 共有 3 個交點，故選(4)

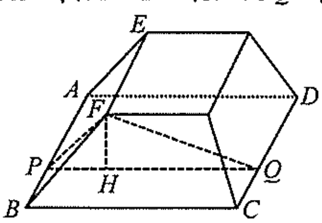
3. 下圖中，過 F 作 $\overline{FH}$ 垂直平面 $ABCD$ 於 H 點

再過 H 作 $\overline{PQ}$ 分別垂直 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 於 P 點、Q 點

並連接 $\overline{FP}$、$\overline{FQ}$

由已知 $\overline{PH}=\overline{BP}=2$、$\overline{HQ}=4$、$\overline{PF}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

$\overline{FH}=\sqrt{\sqrt{21}^2-2^2}=\sqrt{17}\Rightarrow\overline{FQ}=\sqrt{\sqrt{17}^2+4^2}=\sqrt{33}$，故選(5)



4. 依題意，知(兩倍振幅)：($\frac{1}{2}$週期)$=\sqrt{3}:1$

又振幅為 a、週期為 $\frac{2\pi}{b}\Rightarrow(2a):(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{b})=\sqrt{3}:1$

$\Rightarrow 2a=\frac{\sqrt{3}\pi}{b}\Rightarrow ab=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\approx 2.72069$，故選(2)

二、多選題

5. (1) $\because L_1$ 為平面 E 上的一條直線

$\Rightarrow(0,0,-k)$ 代入 $ax+y-2z=2$，得 $k=1$

(2) $\because$ 直線 L_1 在平面 E 上

$\Rightarrow\overrightarrow{f_1}\perp\overrightarrow{n_1}\Rightarrow(1,1,1)\cdot(a,1,-2)=0\Rightarrow a=1$

(3) 設直線 L_2 與平面 E 交於 $P(-t,-2+2t,1-t)$ 代入 $x+y-2z=2$，得 $t=2\Rightarrow$ 直線 L_2 與平面 E 交於 $(-2,2,-1)$

(4) 取直線 L_1、L_2 之方向量分別為 $\overrightarrow{f_1}=(1,1,1)$、$\overrightarrow{f_2}=(-1,2,-1)$ 及平面 E 之法向量為 $\overrightarrow{n_1}=(1,1,-2)$，並設平面 F 之法向量 $\overrightarrow{n_2}$，又平面 F 與直線 L_2 不相交 $\Rightarrow F\,//\,L_2$ 且直線 L_1 在平面 F 上 $\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{f_1}\times\overrightarrow{f_2}=(-3,0,3)$

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=|\frac{(1,1,-2)\cdot(-3,0,3)}{\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) 平面 F 之法向量取 $(1,0,-1)$

且點 $(0,0,-1)$ 在平面 F 上 $\Rightarrow$ 平面 F 方程式為 $x-z-1=0$

取直線 L_2 上的一點 $(0,-2,1)$

直線 L_2 與平面 F 的距離為 $\frac{|0+0-1-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

故選(2)(3)(4)

6. (1) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

(2) $|\vec{a}\times\vec{b}|<\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow 0<|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta<|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$

$\Rightarrow\tan\theta<1$，$0°<\theta<45°$

(3) 當 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 不共面時，不存在實數 x、y，使 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$

(4) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0\Rightarrow\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面 $\Rightarrow(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

(5) $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ 表示由 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所張的平行六面體體積

當 $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|$ 表示由 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所張的平行六面體為長方體 $\Rightarrow\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 兩兩互相垂直 $\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

故此題應選(1)(4)(5)

7. (1) 三平面將空間分割成六個區域，且點 $P(1,1,1)$ 都在此三平面 $\Rightarrow$ 三個相異平面交一直線

所以 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ 無限多組解

(2) 方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ 無限多組解

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1+d_1\\a_2&b_2&c_2+d_2\\a_3&b_3&c_3+d_3\end{vmatrix}=0$$

(3) 方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0\\a_2x+b_2y+c_2z=0\\a_3x+b_3y+c_3z=0\end{cases}$ 與方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$

三個平面對應平行

且方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ 有 $(0,0,0)$ 的解

又 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow$ 方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ 的三個平面交一直線

$\therefore$ 三個平面也將空間分成六個區域

(4) $(-1,2,1)$ 爲方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ 的解

又 $(0,0,0)$ 也爲其解

$\Rightarrow$ 方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 的所有解爲

$(1-t,1+2t,1+t)$，$t\in R$

當 $t=-1$ 時，有一解爲 $(2,-1,0)$

(5) $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=a_1+b_1+2c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=a_2+b_2+2c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=a_3+b_3+2c_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1(x-1)+b_1(y-1)+c_1(z-2)=0 \\ a_2(x-1)+b_2(y-1)+c_2(z-2)=0 \\ a_3(x-1)+b_3(y-1)+c_3(z-2)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 方程組 $\begin{cases} a_1(x-1)+b_1(y-1)+c_1(z-2)=0 \\ a_2(x-1)+b_2(y-1)+c_2(z-2)=0 \\ a_3(x-1)+b_3(y-1)+c_3(z-2)=0 \end{cases}$ 的三個平面是將

方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ 的三個平面同時平移 $(1,1,2)$ 而得

$\Rightarrow$ 方程組 $\begin{cases} a_1(x-1)+b_1(y-1)+c_1(z-2)=0 \\ a_2(x-1)+b_2(y-1)+c_2(z-2)=0 \\ a_3(x-1)+b_3(y-1)+c_3(z-2)=0 \end{cases}$ 的解爲

$(1-t,1+2t,2+t)$

$\therefore (0,3,2)$ 不是方程組 $\begin{cases} a_1(x-1)+b_1(y-1)+c_1(z-2)=0 \\ a_2(x-1)+b_2(y-1)+c_2(z-2)=0 \\ a_3(x-1)+b_3(y-1)+c_3(z-2)=0 \end{cases}$ 的解

故此題應選(2)(3)(4)

三、選填題

A. $x=-1$ 代入 $2(x+9)^4-17(x+9)^3+10(x+9)^2-19(x+9)-5$

$=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

得 $2\cdot(-1+9)^4-17\cdot(-1+9)^3+10\cdot(-1+9)^2-19\cdot(-1+9)-5$

$=a(-1)^4+b(-1)^3+c(-1)^2+d(-1)+e$

$\Rightarrow a-b+c-d+e=2\cdot8^4-17\cdot8^3+10\cdot8^2-19\cdot8-5$

設 $f(x)=2x^4-17x^3+10x^2-19x-5$

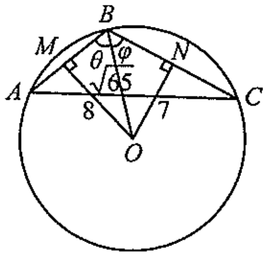
$\therefore a-b+c-d+e=f(8)=f(x)\div(x-8)$ 之餘式 $=-29$

B. (1) $a\le0$ 時，則 $(\frac{1}{2})^a\ge8\Rightarrow2^{-a}\ge2^3\Rightarrow a\le-3$

(2) $a>0$ 時，則 $\log_2(a+4)\ge8\Rightarrow a+4\ge2^8\Rightarrow a\ge252$

$\therefore a$ 的取值範圍爲 $a\le-3$ 或 $a\ge252$

C. $\cos B<0\Rightarrow B$ 爲鈍角



如右圖，$\overline{OB}=\overline{OA}=\sqrt{65}$

$\overline{BM}=\sqrt{65-64}=1$

$\overline{BN}=\sqrt{65-49}=4$

設 $\angle OBM=\theta$，$\angle OBN=\varphi$

則 $\sin B=\sin(\theta+\varphi)$

$=\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi$

$=\frac{8}{\sqrt{65}}\times\frac{4}{\sqrt{65}}+\frac{1}{\sqrt{65}}\times\frac{7}{\sqrt{65}}=\frac{3}{5}$

由正弦定理知 $\overline{AC}=2R\sin B=2\sqrt{65}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\sqrt{65}$

D. A_1：抽到甲類小福袋的事件

A_2：抽到乙類小福袋的事件

A_3：抽到丙類小福袋的事件

B：抽到 1 黑球及 1 白球的事件

已知 $P(A_3)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$，另設 $P(A_1)=x$

則 $P(A_2)=1-\frac{1}{6}-x=\frac{5}{6}-x$，則依題意

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$=\frac{x\cdot\frac{C_1^3C_1^2}{C_2^6}}{x\cdot\frac{C_1^3C_1^2}{C_2^6}+(\frac{5}{6}-x)\cdot\frac{C_1^1C_1^3}{C_2^6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{C_1^2C_1^1}{C_2^6}}$$

$$=\frac{x\cdot\frac{6}{15}}{x\cdot\frac{6}{15}+(\frac{5}{6}-x)\cdot\frac{3}{15}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{15}}=\frac{9}{13}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

故得甲類小福袋個數爲 $30\times\frac{1}{2}=15$ 個

第貳部分：非選擇題

一、(1) 方法①爲每次取後放回，隨機變數 X 之機率分布爲

x	0	1	2	…	n
$P(X=x)$	$(1-\frac{K}{N})^n$	$C_1^n(\frac{K}{N})(1-\frac{K}{N})^{n-1}$	$C_2^n(\frac{K}{N})^2(1-\frac{K}{N})^{n-2}$	…	$(\frac{K}{N})^n$

機率質量函數

$f(x)=P(X=x)=C_x^n(\frac{K}{N})^x(1-\frac{K}{N})^{n-x}$，$x=0,1,2,\cdots,n$

方法②爲同時取(每次取後不放回)，隨機變數 X 之機率分布爲

x	0	1	2	…	n
$P(X=x)$	$\frac{C_0^KC_n^{N-K}}{C_n^N}$	$\frac{C_1^KC_{n-1}^{N-K}}{C_n^N}$	$\frac{C_2^KC_{n-2}^{N-K}}{C_n^N}$	…	$\frac{C_n^KC_0^{N-K}}{C_n^N}$

機率質量函數

$g(x)=P(X=x)=\frac{C_x^KC_{n-x}^{N-K}}{C_n^N}$，$x=0,1,2,\cdots,n$

(2) 方法①中，當 $(n,K,N)=(6,12,18)$ 時

隨機變數 $X\sim Bin(6,\frac{12}{18})$，故期望值 $E(X)=6\times\frac{12}{18}=4$

(3) $E(X)=\sum_{x=0}^{n}x\cdot g(x)=\sum_{x=0}^{n}x\cdot\frac{C_x^KC_{n-x}^{N-K}}{C_n^N}$ (1 分)

$=\frac{1}{C_n^N}\sum_{x=0}^{n}x\cdot\frac{K!}{x!\cdot(K-x)!}\cdot C_{n-x}^{N-K}$

$=\frac{K}{C_n^N}\sum_{x=1}^{n}\frac{(K-1)!}{(x-1)!\cdot(K-x)!}\cdot C_{n-x}^{N-K}=\frac{K}{C_n^N}\sum_{x=1}^{n}C_{x-1}^{K-1}\cdot C_{n-x}^{N-K}$ (2 分)

$=\dfrac{K}{C_n^N}(C_0^{K-1}C_{n-1}^{N-K}+C_1^{K-1}C_{n-2}^{N-K}+C_2^{K-1}C_{n-3}^{N-K}+\cdots+C_{n-1}^{K-1}C_0^{N-K})$

$=\dfrac{K}{C_n^N}\cdot C_{n-1}^{K-1+N-K}=K\times\dfrac{n!(N-n)!}{N!}\times\dfrac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}$

$=n\times\dfrac{K}{N}$ (2 分)

二、(1) 設 θ 爲鏡射軸 L 的斜角 $\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{1}{2}(0°<\theta<45°)$ (1 分)

$\Rightarrow \tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow \sin 2\theta=\dfrac{4}{5}$ 、 $\cos 2\theta=\dfrac{3}{5}$ (2 分)

$\Rightarrow$ 鏡射矩陣 $=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$ (2 分)

(2) $\begin{cases}5c=3a+4b\\ 5d=4a-3b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{3}{5}a+\frac{4}{5}b\\ d=\frac{4}{5}a-\frac{3}{5}b\end{cases}$

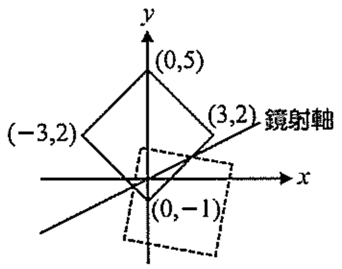
$\Rightarrow\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ (2 分)

此關係表示在坐標平面上 (a,b) 經矩陣 $A=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$ 變換爲 (c,d)，由(1)知矩陣 A 是以直線 L：$x-2y=0$ 爲鏡射軸的鏡射矩陣，又 a 、 b 滿足 $|a|+|b-2|=3$，表示 (a,b) 在以 $(0,-1)$ 、 $(3,2)$ 、 $(0,5)$ 、 $(-3,2)$ 爲頂點的四邊形的邊界上，如下圖，其中以 $(0,5)$ 與鏡射軸距離最遠，又 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 表示點 (a,b) 與鏡射點 (c,d) 的距離平方，

$(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最大值 (2 分)

$=[2\cdot(\text{點}(0,5)\text{到}x-2y=0\text{的距離})]^2$

$=(2\cdot\dfrac{|0-2\cdot 5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}})^2=80$ (2 分)



[另解] $c=\dfrac{3}{5}a+\dfrac{4}{5}b$，$d=\dfrac{4}{5}a-\dfrac{3}{5}b$

$(a-c)^2+(b-d)^2=(a-\dfrac{3}{5}a-\dfrac{4}{5}b)^2+(b-\dfrac{4}{5}a+\dfrac{3}{5}b)^2$

$=\dfrac{4}{25}(a-2b)^2+\dfrac{16}{25}(a-2b)^2=\dfrac{4}{5}(a-2b)^2$ (2 分)

	$a-2b$
$(0,5)$	-10
$(-3,2)$	-5
$(0,-1)$	2
$(3,2)$	1

(2 分)

$\therefore$ 最大值爲 $\dfrac{4}{5}(-10)^2=80$ (2 分)