

臺北區 110 學年度第二學期

分科測驗第一次模擬考試

數學甲考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊、數學 A 第三～四冊、選修數學甲(上)極限與函數

考試時間：80 分鐘

作答方式：

- 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液(帶)。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響考生成績並傷及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1

列的 $\frac{3}{8}$ 與第 18-2 列的 $\frac{8}{3}$ 畫記，如：

18-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
18-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1} \textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 $\frac{-7}{50}$ 與第

19-2 列的 $\frac{7}{50}$ 畫記，如：

19-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利



版權所有 · 翻印必究

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 試在下列選項中選出最符合此圖形的函數？

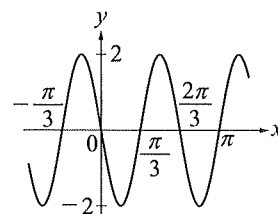
(1) $y = 2 \sin 3x$

(2) $y = -2 \sin \frac{x}{3}$

(3) $y = -3 \sin 2x$

(4) $y = 2 \cos \left(3x + \frac{\pi}{2} \right)$

(5) $y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$



2. x, y 為正實數，則下列哪一個不等式恆成立？

(1) $x^{100} > 2^x$

(2) $x^{\log x} \geq 1$

(3) $10^x + \log x \geq 0$

(4) $\log x \cdot \log y \geq \log x + \log y$

(5) $2^x \cdot 2^y \geq 2^x + 2^y$

3. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足下列關係： $a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n$ ， $n \geq 1$ 且 $a_1 < 0 < a_2$ ，則下列選項何者正確？

(1) $\frac{a_2}{2} < a_5$

(2) $\frac{a_3}{2} < a_5$

(3) $a_5 < \frac{a_1 + a_3}{2}$

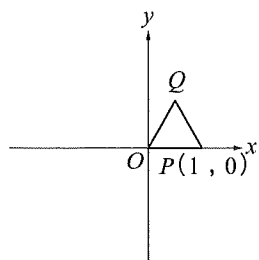
(4) $a_5 < \frac{a_2 + a_3}{2}$

(5) $a_5 < \frac{a_3 + a_4}{2}$

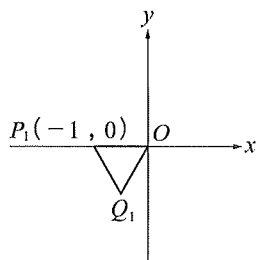
二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

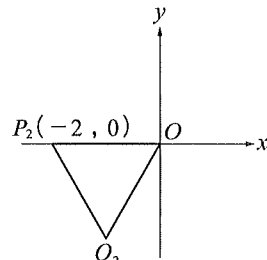
4. 已知邊長 1 的正三角形 OPQ ，與兩個二階方陣 M 與 N 。而二階方陣 M 將(圖一)的 O 、 P 、 Q 三點依序變換成(圖二)的 O 、 P_1 、 Q_1 ，再經二階方陣 N 變換成(圖三)的 O 、 P_2 、 Q_2 ，其中變換後的三角形 OP_1Q_1 和三角形 OP_2Q_2 二者都是正三角形。試問下列選項哪些正確？



(圖一)



(圖二)



(圖三)

(1) 若 Q 點坐標 (x_1, y_1) ，則 $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

(2) $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(4) $\triangle OP_2Q_2$ 再經過 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 變換後面積保持不變

(5) 選項(4)中的矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 所產生的線性變換是沿 x 軸方向推移 y 坐標的 3 倍

5. 快篩是了解新冠肺炎是否感染的快速方法，若某地區盛行率低於 5 % 的情況下，建議不適合全體用快篩檢驗。現在假設 A 區的盛行率為 $\frac{18}{10000}$ ，全體施行新冠肺炎快篩檢驗，篩檢 1 萬人結果如下：

	患有新冠肺炎	未患新冠肺炎	合計
快篩陽性	14	100	114
快篩陰性	4	9882	9886
合計	18	9982	10000

由此結果得知，此區陽性預測值低、偽陽性率高，陰性預測值高、偽陰性率低。

名詞解釋：

盛行率：患有新冠肺炎的人口比例。

陽性預測值：快篩呈陽性反應的受檢者中，患有新冠肺炎的人所占的百分比。

偽陽性率：快篩呈陽性反應的受檢者中，未患新冠肺炎的人所占的百分比。

陰性預測值：快篩呈陰性反應的受檢者中，未患新冠肺炎的人所占的百分比。

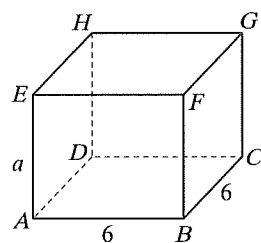
偽陰性率：快篩呈陰性反應的受檢者中，患有新冠肺炎的人所占的百分比。

試問下列敘述何者正確？

- (1) 由題意得知，此區不適合用快篩檢驗
- (2) 此次篩檢結果的陽性預測值介於 12 % ~ 13 %
- (3) 此次篩檢結果的偽陽性率介於 87 % ~ 88 %
- (4) 如果已知檢驗結果為陰性，那麼沒有患病的機率小於 99 %
- (5) 如果已知沒有患病，卻驗出陽性的機率約為 1 %

6. 右圖為一長方體， $\overline{AB} = \overline{BC} = 6$ ， $\overline{AE} = a$ 。若 P 在 \overline{AC} 上， $\overline{AP} : \overline{PC} = 1 : 2$ ，且 $\overline{PH} \perp \overline{PF}$ 。則下列敘述何者正確？

- (1) $a = 4$
- (2) 此長方體體積為 144
- (3) 由 \overrightarrow{PH} 、 \overrightarrow{PF} 、 \overrightarrow{PC} 所決定的平行六面體體積為 192
- (4) $\triangle CPH$ 面積 $= 12\sqrt{2}$
- (5) 直線 \overleftrightarrow{PC} 垂直平面 HPF



7. 已知函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - a}{x - 3}, & \text{當 } x \neq 3 \text{ 時} \\ m, & \text{當 } x = 3 \text{ 時} \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + b}{x + 7}, & \text{當 } x \neq -7 \text{ 時} \\ n, & \text{當 } x = -7 \text{ 時} \end{cases}$, 其中 $a, b, m, n \in R$,

下列敘述何者正確？

(1) 無論 a, m 為何值, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = m$

(2) 無論 b, n 為何值, $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = g(5)$

(3) 當 $a = 9, b = 49$ 時, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 10$

(4) 當 $a = 9, b = 49$ 時, $\lim_{x \rightarrow t} f(x) + \lim_{x \rightarrow t} g(x) = 10$, 其中 $t \in R$

(5) 若 $a = 9, b = 49$, 且 $f(x)$ 與 $g(x)$ 皆為連續函數, 則 $m + n = 20$

8. 設三次函數 $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 7$, 令 $g(x) = f(x + a) - b$, 已知 $g(x)$ 對稱於原點, 則下列選項哪些是正確的？

(1) $\frac{g(3) + g(-3)}{2} = 0$

(2) $(a, b) = (2, 4)$

(3) x 值愈來愈大, 則 $f(x)$ 值愈來愈小

(4) $f(2.01)$ 計算到小數點後第二位(四捨五入)的近似值為 5.03

(5) $f(x)$ 在 $x = 2$ 附近的局部特徵圖形近似於 $y = 3x - 1$

三、選填題 (占 18 分)

說明：第 9 題至第 11 題, 每題 6 分。

9. 在物理學的幾何光學中, 我們用兩個參數 x, θ 來描述一道光束。今有射入的光束 x_1, θ_1 , 和經介質轉換射出的光束 x_2, θ_2 , 滿足 $\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$, 其中 $\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 為該介質的光線轉換矩陣。已知: $x_2 = 1 + \pi, \theta_2 = \frac{\pi}{4}, d = 4$, 則數對 $(x_1, \theta_1) =$ $\left(\textcircled{9-1}, -\frac{\pi}{\textcircled{9-2}} \right)$ 。

10. 已知坐標平面的原點為 O 點，且圓 $C: x^2 + y^2 = 2$ 和直線 $L: y = mx + k$ 相交於 A 、 B 兩點，其中 m 、 k 為實數。設 L 與 x 軸正向的夾角為 60° ，且 $\angle AOB = 90^\circ$ ，則實數 $k = \frac{\textcircled{10-1} \textcircled{10-2}}{\textcircled{10-1} \textcircled{10-2}}$ 。

11. 直角坐標平面上，原點為 O ，已知 $A(1, 2)$ ，令 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ， $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ ，且 $\vec{p} \perp (\vec{a} - \vec{p})$ ，則 $|\vec{p}| \times |\vec{a} - \vec{p}|$ 的最大值為 $\frac{\textcircled{11-1}}{\textcircled{11-2}}$ 。(化為最簡分數)

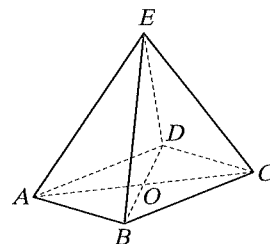
第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12 — 14 題為題組

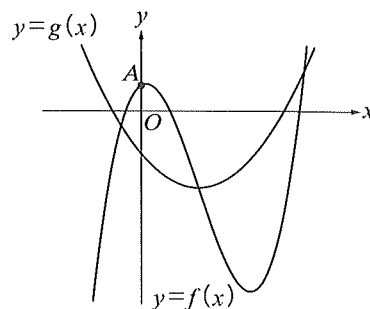
空間中有一個四面體，如右圖。已知底面 $ABCD$ 為平行四邊形，對角線的交點為 O 點，且 \overline{OE} 垂直底面 $ABCD$ ，試求下列各小題。

12. 若點 $A(-1, -3, 0)$ ，向量 $\vec{AB} = (2, 0, 1)$ ， $\vec{AD} = (2, 1, 2)$ ，試求 O 點的坐標。(3 分)
13. 承 12.，試求平行四邊形 $ABCD$ 的面積。(4 分)
14. 承 13.，設 \overline{OE} 長度之值為平行四邊形 $ABCD$ 面積之值的 2 倍，且頂點 E 的 z 坐標大於 0，試求 E 的坐標。(5 分)



15 – 17 題為題組

三次多項式 $f(x)$ 與 $g(x) = x^2 - 4x - 5$ 的圖形如右所示，其中 $f(x)$ 的最高次項係數為 1。假設 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得餘式為 $r(x) = mx + k$ ，已知 $r(-1) + r(5) = 2f(2)$ ，且 $y = f(x)$ 圖形與 y 軸交於 A 點。試回答下列問題：



15. 如題圖所示，關於 k 值，下列何者正確？(單選題，3 分)

- (1) $f(0) < g(0) < k$
- (2) $f(0) < k < g(0)$
- (3) $k < g(0) < f(0)$
- (4) $g(0) < k < f(0)$
- (5) $g(0) < f(0) < k$

16. 若 $y = r(x)$ 圖形與 y 軸交於 B 點，試求 \overline{AB} 長度。(4 分)

17. 當 $f(x)$ 在 A 點處的一次近似為 $y = 2x + 3$ ，試求：

- (1) $r(x)$ 。(3 分)
- (2) $f(x)$ 在 $(4, f(4))$ 處的一次近似。(2 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$,

$$\text{算術平均數 } \mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; \text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$$

6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,

$$\text{相關係數 } r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n \sigma_X \sigma_Y}$$

$$\text{最適直線(迴歸直線)方程式 } y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

$$\sin 23^\circ \approx 0.40, \sin 37^\circ \approx 0.60, \sin 53^\circ \approx 0.80, \cos 23^\circ \approx 0.92, \cos 37^\circ \approx 0.80, \cos 53^\circ \approx 0.60$$

8. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$