臺中市立高級中等學校

105 學年度指定科目第四次聯合模擬考試

考試日期：106 年 4 月 27~28 日

數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{18}{19}$，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{20\,21}{50}$，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、單選題(占 24 分)

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. $a,b,c,k\in R$，$f(x)=ax^2+bx+c$，已知 $f'(3)=0$ 且 $f''(x)>0$，則使 $f(k)\geq f(6)$ 之 k 的範圍為下列何者？

(1) k 為任意實數

(2) $k\geq 3$

(3) $k\leq -3$ 或 $k\geq 3$

(4) $k\leq 0$ 或 $k\geq 6$

(5) $-6\leq k\leq 6$

2. z_1、z_2 均為複數，$|z_1|=|z_2|=1$ 且 z_1、z_2 之主幅角分別為 $\frac{\pi}{6}$ 及 $\frac{7\pi}{12}$，則 $(z_1+z_2)^3$ 之主幅角最靠近下列何者？

(1) $\frac{\pi}{4}$

(2) $\frac{\pi}{2}$

(3) $\frac{2\pi}{3}$

(4) $\frac{7\pi}{6}$

(5) $\frac{7\pi}{4}$

3. 已知箱子中有 9 顆不同顏色但大小一樣的球，每顆球被取出的機會均相等，小臻臻與小叡叡分別喜歡其中的粉色球、黑色球。今約定由小臻臻先取球，取後不放回。試問在兩人至少有一人取到自己喜歡的球之下，小臻臻與小叡叡都取到自己喜歡的色球機率爲何？

(1) $\frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) $\frac{1}{5}$

(4) $\frac{1}{10}$

(5) $\frac{1}{15}$

4. 在空間坐標中，已知三點 $A(1,2,3)$，$B(3,6,-1)$，$C(1,3,4)$。若動點 P 滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}$，則 $\overline{PC}$ 最小值爲？

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

(5) 5

二、多選題(占24分)

說明：第5題至第7題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得8分；答錯1個選項者，得4.8分；答錯2個選項者，得1.6分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. $n\in N$，下列無窮級數，哪些爲收斂級數？

(1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

(2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$

(3) $1-2+4-8+\cdots\cdots+(-2)^{n-1}+\cdots$

(4) $\frac{5-4}{5+4}+\frac{5^2-4^2}{5^2+4^2}+\frac{5^3-4^3}{5^3+4^3}+\cdots\cdots+\frac{5^n-4^n}{5^n+4^n}+\cdots$

(5) $(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\cdots\cdots+(a_n-a_{n+1})+\cdots$

6. 若二階方陣M所代表的線性變換可以將平面上的直線$L: x-\sqrt{3}y=0$上的點變換到$L_1: \sqrt{3}x-y=0$上，則下列哪些選項是正確的？

(1) M定義的線性變換可以是旋轉變換

(2) M定義的線性變換可以是鏡射變換

(3) $M=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$

(4) $M=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

(5) $M=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

7. $k \in R$，$f(x)=x^3+4x^2-3x+k=0$，下列哪些正確？
(1) $k=-14$時，$f(x)=0$有兩個負有理根，一個正有理根
(2) $k=3$時，$f(x)=0$沒有有理根
(3) $k=14$時，$f(x)=0$恰有一個實根
(4) $k=1$時，$f(x)=0$沒有實根
(5) $k=-1$時，$f(x)=0$有兩個負實根，一個正實根

三、選填題(占 28 分)

說明：1. 第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(8–18)。 2. 每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 在 ΔABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=2\angle B$。若 $\overline{AD}$ 平分 $\angle A$ 且與 $\overline{BC}$ 交於 D，試求 $\overline{AD}=\dfrac{⑧\sqrt{⑨}}{⑩}$。

B. 在坐標平面上，已知 $A(1,2)$，$B(9,8)$，若點 $P(x,y)$ 在直線 $L:3x+4y=k$ 上，$k\in N$，則使 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 之 P 點共有 ⑪⑫⑬ 個。

C. 過年時欣爸為了增加趣味性，在麵包超人夾娃娃機的所有六個娃娃中隨機放入寫有 0 元，0 元，50 元，100 元，500 元，1000 元的紙條，遊戲規則是每人只有二次機會，若第一次夾中 0 元，則下次夾中的金額會減為原本的一半；若第一次夾中非 0 的金額，則所得錢數為二次所夾的總和。已知小臻臻的技術純熟，每夾必中，則小臻臻玩遊戲可獲得金額的期望值 = ⑭⑮⑯ 。

D. $k\in R$，在坐標平面上，點 $A(4,1)$ 且 P、Q 兩點分別為直線 $L：x+y=k$ 與 $y=2^x$ 及 $y=\log_2 x$ 之交點，求 $\overline{AP}+\overline{AQ}$ 之最小值 = ⑰$\sqrt{⑱}$ 。

－－－－－－－以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷－－－－－－－

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

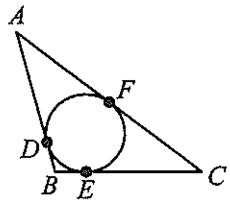
說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、如圖(1)，ΔABC 之三邊長 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=8$，I 爲內心，D 爲 $\overline{AB}$ 跟內切圓的切點。

(1) 求內切圓半徑 r？(3 分)

(2) 求 $\overline{DA}$ 長？(3 分)

(3) 利用「將 $\overrightarrow{IA}$ 表成 $\overrightarrow{ID}$ 及 $\overrightarrow{DA}$ 的線性組合，$\overrightarrow{IB}$ 表成 $\overrightarrow{ID}$ 及 $\overrightarrow{DB}$ 的線性組合」，求出 $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=$？(6 分)



圖(1)

二、已知 $f(x)$ 爲一實係數多項式。

(1) 若 $f''(x)=6x+4$，則 $f(x)$ 是幾次多項式？(2 分)最高次項的係數爲？(2 分)

(2) 承(1)，若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-8}{x-1}=3$，則 $f(x)=$？(3 分)

(3) 承(2)，求 $\int_0^1 f(x)dx=$？(5 分)

臺中市立高級中等學校 105 學年度指定科目第四次聯合模擬考試

數學甲考科解析

考試日期：106 年 4 月 27~28 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	4	5	3	2	12	235	5	6	4	1	0	0	4	9
16	17	18												
5	3	2												

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 因爲 $f''(x)=2a>0$ 且 $f'(3)=0$，所以 $y=f(x)$ 爲開口向上且對稱軸爲 $x=3$ 之拋物線，所以 $f(0)=f(6)$
由 $f(k)\ge f(6)\Rightarrow k\le 0$ 或 $k\ge 6$，故選(4)

2. 原點 O、z_1、z_2 跟 (z_1+z_2) 形成一個菱形，所以 (z_1+z_2) 之主幅角 $=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{9\pi}{24}$，因此 $(z_1+z_2)^3$ 之主幅角 $=\dfrac{9\pi}{8}$
故選(4)

3. 令 $P(A)$ 爲小臻臻取到粉色球的機率，$P(B)$ 爲小叡叡取到黑色球的機率 $P(A\cup B)=P(A\cap B')+P(A'\cap B)+P(A\cap B)$
$=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{7}{8}+\dfrac{7}{9}\times\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}\times\dfrac{1}{8}$
$P(A\cap B\mid A\cup B)=\dfrac{\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}}{\frac{1}{9}\times\frac{7}{8}+\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}}=\dfrac{1}{15}$，故選(5)

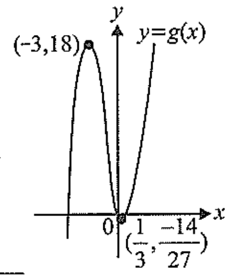
4. $\because \overline{PA}=\overline{PB}$，$\therefore P$ 在 $\overline{AB}$ 的中垂面上，可得中垂面方程式 $E：x+2y-2z=8$
$\overline{PC}$ 最小値 $=d(C,E)=\dfrac{|1+2\times3-2\times4-8|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3$，故選(3)

二、多選題

5. (1) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots=\infty$
(2)(3) 無窮等比級數收斂 $\Leftrightarrow -1<$ 公比 <1
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-4^n}{5^n+4^n}=1\ne 0$，所以級數發散
(5) 不一定。若 $\langle a_n\rangle$ 收斂
則 $(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\cdots\cdots+(a_n-a_{n+1})+\cdots$
$=a_1-\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$
故選(2)

6. $\because L：x-\sqrt{3}y=0$ 與 $L_1：\sqrt{3}x-y=0$ 交於原點且與 x 軸正向分別夾一角度爲 30°、60°
$\therefore L$ 可以對直線 $y=x$ 作對稱，也可以對原點逆時針旋轉 $30^\circ\Rightarrow M$ 可以爲鏡射矩陣 $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，也可以爲旋轉矩陣 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$，且 $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$
$\because M$ 有兩種可能，$\therefore$(4)(5)不能選，只能選(1)(2)

7. (1) $f(x)=x^3+4x^2-3x-14=0$ 由牛頓定理知
$f(x)=(x+2)(x^2+2x-7)=0\Rightarrow x=-2,-1\pm2\sqrt{2}$
(2) $f(x)=x^3+4x^2-3x+3=0$，但 $f(\pm1)\ne0$ 且 $f(\pm3)\ne0$
所以 $f(x)=0$ 沒有有理根
(3)(4)(5) $f(x)=x^3+4x^2-3x+k=0\Rightarrow x^3+4x^2-3x=-k$
令 $y=g(x)=x^3+4x^2-3x$
則 $g'(x)=3x^2+8x-3=(3x-1)(x+3)$
$g(-3)=18$，$g(\frac{1}{3})=\dfrac{-14}{27}$
所以 $y=g(x)=x^3+4x^2-3x$ 之圖形如右
故選(2)(3)(5)



三、選填題

A. 令 $\angle B=\theta=\angle BAD$，$\overline{BD}=\overline{AD}=5x$，$\overline{CD}=3x$
在 ΔABC 與 ΔABD 中，分別可得 $\cos\theta=\dfrac{5^2+(8x)^2-3^2}{2\times5\times8x}$
$\cos\theta=\dfrac{5^2+(5x)^2-(5x)^2}{2\times5\times5x}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{6}}{4}\Rightarrow\overline{AD}=5x=\dfrac{5\sqrt{6}}{4}$

B. 因 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$
所以 P 點必在以 $\overline{AB}$ 爲直徑之圓 $C：(x-5)^2+(y-5)^2=25$ 上
又 L 跟圓 C 有交點，則 $\dfrac{|15+20-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}\le5\Rightarrow|35-k|\le25$
$\Rightarrow k=10,11,12,\cdots\cdots,60\Rightarrow P$ 點共有 100 個

C. 可能獲得金額要分兩種情形：一種是沒有夾到 0 元，一種是有夾到 0 元
如果沒有夾到 0 元，可得到
$(1000+500),(1000+100),(1000+50),(500+100),(500+50)$,
$(100+50)$ 六種情形，但順序可互換，所以可得期望值是
$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{5}\times2\times((1000+500)+(1000+100)+(1000+50)+(500+100)$
$+(500+50)+(100+50))=330$
如果有夾到 0 元，可分爲第一次 0 元與第二次 0 元情形
$\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2}\times((0+1000)+(0+500)+(0+100)+(0+50))$
$+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{5}\times((1000+0)+(500+0)+(100+0)+(50+0))=165$
所以期望值爲 $330+165=495$ 元

D. $A(4,1)$ 關於 $y=x$ 之對稱點爲 $A'(1,4)$，則 $\overline{AQ}=\overline{A'P}$
所以 $\overline{AP}+\overline{AQ}=\overline{AP}+\overline{A'P}\ge\overline{AA'}=3\sqrt{2}$

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\dfrac{4}{3}$ (2) 4 (3) $\dfrac{-20}{9}$

【詳解】

(1) $\Delta=rs\Rightarrow\dfrac{8\times3}{2}=r(\dfrac{5+5+8}{2})\Rightarrow r=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}$

(2) $\overline{DA}=s-\overline{BC}=\dfrac{5+5+8}{2}-5=4$

(3) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DB})$
$=|\overrightarrow{ID}|^2+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=r^2+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=(\frac{4}{3})^2-1\times4=\dfrac{-20}{9}$

(第(3)小題若非用題目指定的方式求解，但答案正確給 2 分)

二、(1) $f(x)$ 爲三次多項式且最高次項的係數爲 1
(2) x^3+2x^2-4x+9

(3) $\frac{95}{12}$

【詳解】

(1) $\because f''(x)=6x+4$，$\therefore f'(x)=3x^2+4x+a$

$\Rightarrow f(x)=x^3+2x^2+ax+b$

可得 $f(x)$ 爲三次多項式且最高次項的係數爲 1

(2) $\because \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-8}{x-1}=3$，$\therefore f'(1)=3$，且 $f(1)=8$

$\Rightarrow \begin{cases} f'(1)=3+4+a=3 \\ f(1)=1+2+a+b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=9 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=x^3+2x^2-4x+9$

(3) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^3+2x^2-4x+9)dx$

$=(\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-2x^2+9)\Big|_0^1=\frac{95}{12}$