臺中區國立高級中學 102 學年度
大學入學第三次指定科目聯合模擬考

數學甲

考試日期：103 年 3 月 5~6 日

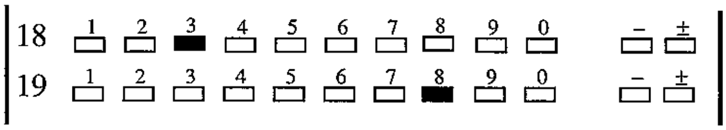
—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

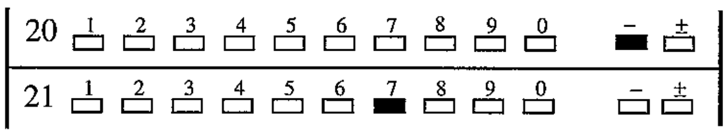
作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：



第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、單選題(占 24 分)

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（塡）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 某海防中心的東方 4 海浬處有甲、乙兩艘船相會後，甲船以每小時 4 海浬的速度往正北方航行，乙船以每小時 1 海浬的速度往正南方航行，試求多少小時後，海防中心、甲船、乙船三個位置點，恰形成一個直角三角形？

   (1) 1
   (2) 1.5
   (3) 2
   (4) 2.5
   (5) 3

2. 求方程式 $x^2-2=\dfrac{1}{2^{|x|}}$ 有幾個相異實根？

   (1) 1
   (2) 2
   (3) 3
   (4) 4
   (5) 0

3. 已知 $i=\sqrt{-1}$，假設 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，若 $w=3+2i+z$，試求 $|w|$ 的最小值？

   (1) $\sqrt{13}-1$
   (2) $\sqrt{13}+1$
   (3) $2\sqrt{6}$
   (4) $\sqrt{14}$
   (5) $\sqrt{14}-1$

4. 空間坐標系中，由 $0\le x\le 2$，$0\le y\le 2$，$0\le z\le 4$ 的範圍所圍成的立體圖形 V，現有一個平面 E：$x+y+2z=k$ 可將 V 之體積平分，試求 k 之值？

(1) 6

(2) -7

(3) 8

(4) 12

(5) $\frac{9}{2}$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 5 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 坐標平面上，兩向量 $\overrightarrow{a}=(1,3)$，$\overrightarrow{b}=(6,-2)$，則下列選項中的向量，何者可平分 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角？

(1) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$

(2) $\overrightarrow{a}+\frac{\overrightarrow{b}}{2}$

(3) $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$

(4) $(2,1)$

(5) $(-2,-1)$

6. 關於多項式與多項式方程式的敘述，請問下列哪些選項是正確的？

(1) 若 p 是整數，則 $3x+1$ 絕對不是 $4x^2+px+3$ 的因式

(2) 若 p 是整數，則 $2x+3$ 整除 $4x^2+px+3$

(3) 若 p、q 都是整數，且方程式 $x^3+px^2+qx+5=0$ 有「有理根」，則此有理根必爲整數

(4) 若 $f(x)$ 是三次整係數多項式函數，且方程式 $f(x)=0$ 有虛根，則此方程式必定同時有「有理根」

(5) 若 $f(x)$ 是三次實係數多項式函數，且 $f(1+\sqrt{2}i)=0$，若 $a,b\in R$，且 $f(a)<0$，$f(b)>0$，則 $f(b+2)>0$

7. 在空間中有兩直線 $L_1:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=-1\end{cases},t\in R$ 與 $L_2:\begin{cases}x+y=1\\2x+y+z=1\end{cases}$，試問下列哪些選項是正確的？

(1) L_2 平行於平面 $x-y-z+3=0$

(2) L_2 通過點 $(2,-1,-2)$

(3) L_1 與 L_2 有交點

(4) L_2 垂直於平面 $3x+2y+z+3=0$

(5) 以 L_1 爲軸，將 L_2 繞其旋轉一圈得到的平面爲 $x+y-1=0$

8. 下列哪些選項可決定唯一的三角形 ABC？

(1) $\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=3$，$\angle B=30°$

(2) $\overline{BC}=1$，$\overline{AB}=2$，$\angle A=30°$

(3) $\overline{AB}=3$，$\sin A=\sin B=\sin C=\dfrac{1}{3}$

(4) $\overline{BC}=3$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=30°$

(5) $\overline{BC}=3$，$\angle A=38°$，$\angle B=64°$

9. 複數平面上有一邊長為 2 的正方形區域 K，中心在原點 0，$\overline{AB}$平行實軸，如圖所示，假設 $z_k=(\frac{1}{2})^k(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3})$，$k\in Z$。試問下列哪些複數會落在區域 K 內部(含邊界)？

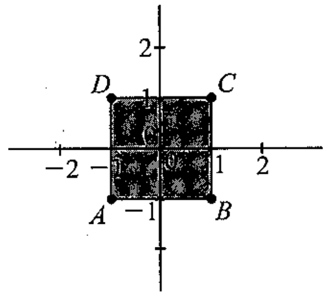
(1) z_1

(2) z_{-1}

(3) z_1+z_{-1}

(4) $z_1\cdot z_{-1}$

(5) $2013z_{10}$



三、選填題（占12分）

說明：1. 第 A 題與第 B 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(10～15)。

2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 丟一顆不公正的四面體骰子，上面的點數分別為 1、2、3、4，出現的機率分布如下表所示：

點數	1	2	3	4
機率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	a	b

若丟擲二次的點數和之期望值為 $\frac{141}{30}$，試求 $b=\frac{⑩⑪}{⑫⑬}$(化為最簡分數)

B. 平面上，有一圓：$x^2+y^2-8x+6y+16=0$，若此圓上有 n 個點到直線 $L：x+y+1=0$的距離是整數值，且這 n 個點到直線 L 的距離之總和為 m，則 $n+m=$ ⑭⑮

－－－－－－－以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷－－－－－－－

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、任意將 5 張編號分別爲 1、2、3、4、5 的卡片排成一列，試計算以下的機率：

(1) 偶數號不相鄰的機率是多少？(4 分)

(2) 恰有兩張卡片所排的位置由左而右數來與卡片上的編號相同的機率爲多少？(4 分)

(3) 在偶數號不相鄰的條件下，排成的五位數恰爲 4 的倍數之機率是多少？(4 分)

二、坐標平面上，某個線性變換將 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 變換到 $P'(\cos\theta,0)$，將 $Q(-\sin\theta,\cos\theta)$ 變換到 $Q'(0,\cos\theta)$，現用二階方陣 A 代表這個線性變換：

(1) 求 A 的行列式值？(4 分)

(2) 假設 k 爲非零實數，I_2 是二階單位方陣，試求使得 $A^3=kI_2$ 的最小正角 θ？(用弧度表示)(4 分)

(3) 承(2)，此時 k 值爲何？(4 分)

臺中區國立高級中學102學年度大學入學第三次指定科目聯合模擬考

數學甲考科解析

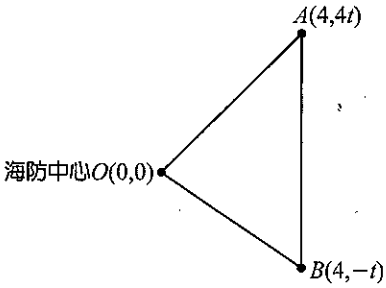
考試日期：103年3月5~6日

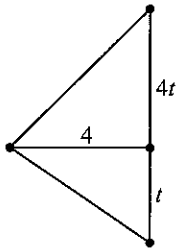
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	2	1	1	24	13	235	245	14	1	3	6	0	3	4

第壹部分：選擇題

一、單選題

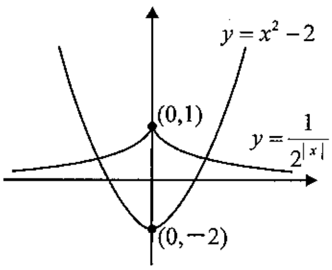
1. 令海防中心原點 O
甲船在 t 時的位置為
$A(4,4t)$
乙船在 t 時的位置為
$B(4,-t)$
因
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=16-4t^2=0$
得 $t=2$
另解



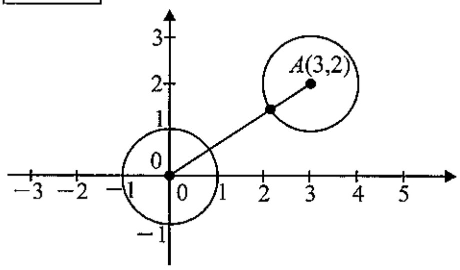


由母子相似定理
$4^2=4t^2\Rightarrow t=2$，故選(3)

2. 作圖：$\begin{cases} y=x^2-2 \\ y=\dfrac{1}{2^{|x|}} \end{cases}$
交點個數為實根個數
有2交點，故選(2)



3. $w=3+2i+z=3+2i+\cos\theta+i\sin\theta=(3+\cos\theta)+i(2+\sin\theta)$
$|w|=\sqrt{(3+\cos\theta)^2+(2+\sin\theta)^2}=\sqrt{14+6\cos\theta+4\sin\theta}$
$=\sqrt{14+\sqrt{52}\sin(\theta+\alpha)}\geq\sqrt{14-\sqrt{52}}=\sqrt{14-2\sqrt{13}}=\sqrt{13}-1$
故選(1)
$\boxed{\text{幾何意義}}$



$z=\cos\theta+i\sin\theta$ 表示 z 為圓心在原點的單位圓上動點，$w=3+2i+z$ 表示將 z 點向右平移3單位，上移2單位得到 w，亦即 w 在圓心 $3+2i$ 的單位圓上動點，$|w|$ 表示到原點距離，因此最小值為 $\overline{AO}-r=\sqrt{3^2+2^2}-1=\sqrt{13}-1$

4. V 的圖形為一個長方體，若平面要平分該體積，則平面 E 恰通過該長方體的中心 O 坐標 $(1,1,2)$
代入 E，可得 $1+1+2\times2=k\Rightarrow k=6$，故選(1)

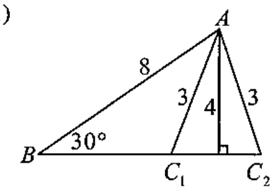
二、多選題

5. 本題中，$|\vec{a}|=\sqrt{10}$，$|\vec{b}|=2\sqrt{10}$
若 $\vec{c}$ 平分 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角，則 $\vec{c}=t(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|})$ 且 $t>0$
故平分夾角的向量 $=t(\vec{a}+\dfrac{\vec{b}}{2})$ 且 $t>0$
因此(2)可以選
(4) $(2,1)=\dfrac{1}{4}(2\vec{a}+\vec{b})$ 因此可選
(5) $(-2,-1)=-\dfrac{1}{4}(2\vec{a}+\vec{b})$ 因此不可選，故選(2)(4)

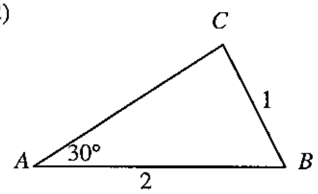
6. (1) $3|4$ 不成立，由牛頓定理知 $3x+1$ 無法整除 $4x^2+px+3$
(2) 只是有可能，未必成立
(3) 由牛頓定理知，有理根可能為 ±1、±5
(4) 未必。例如 $x^3+2=0$ 就不具有理根
(5) $f(x)=0$ 恰有一實根，此實根在 a 與 b 之間，但不知 a 與 b 的大小順序因此不能選，故選(1)(3)

7. $L_1:\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=-1 \end{cases}, t\in R$，方向向量 $\overrightarrow{\ell_1}=(1,1,0)$
$L_2:\begin{cases} x=1+s \\ y=-s \\ z=-1-s \end{cases}, s\in R$，方向向量 $\overrightarrow{\ell_2}=(1,-1,-1)$
(1) 若平行，則滿足 $\overrightarrow{\ell_2}\perp$ 平面法向量 $(1,-1,-1)$，但沒有，故不能選
(2) $s=1$ 得此點
(3) 交點是 $(1,0,-1)$
(4) 若垂直，則滿足 $\overrightarrow{\ell_2}$ // 平面法向量 $(3,2,1)$，但沒有，故不能選
(5) 因為 $\overrightarrow{\ell_1}\perp\overrightarrow{\ell_2}$ 則旋轉後得到以 $\overrightarrow{\ell_1}$ 為法向量且通過交點 $(1,0,-1)$ 的平面：$1(x-1)+1(y-0)=0$，故選(2)(3)(5)

8. (1)



如圖，C 可能在 C_1 或 C_2，因此可決定兩個三角形
(2)



根據正弦定理：$\dfrac{1}{\sin30^\circ}=\dfrac{2}{\sin C}$ 因此 $\angle C=90^\circ$
因此三角形是唯一的
(3) ① 若 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 都是銳角，且因 $\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin A,\sin B,\sin C<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
則 $\angle A,\angle B,\angle C<60^\circ$，無法構成 ΔABC
② 若 $\angle A$ 是鈍角，$\angle B$、$\angle C$ 是銳角
則 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cdot\cos C+\cos B\cdot\sin C$

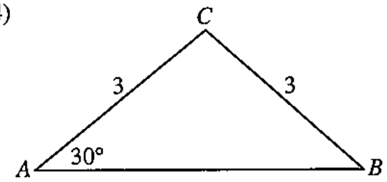
$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}+\frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{8}}{9}\neq\frac{1}{3}$

因此與 $\sin A=\frac{1}{3}$ 矛盾，亦無法形成 ΔABC

$\boxed{\text{另解}}$：因 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$，故 ΔABC 是正 Δ

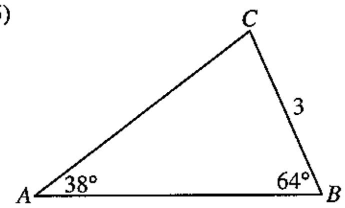
與 $\sin A=\frac{1}{3}$ 矛盾

(4)



如圖，$\angle B=30°$，因此是唯一的等腰三角形

(5)



根據正弦定理：

$$\frac{3}{\sin 38°}=\frac{\overline{AC}}{\sin 64°}=\frac{\overline{AB}}{\sin(180°-38°-64°)}$$

因此三角形是唯一的

$\boxed{\text{另解}}$：由 AAS 性質可決定唯一的三角形 ABC，故選(2)(4)(5)

9. (1) $z_1=(\frac{1}{2})(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$ 包含於 K

(2) $z_{-1}=(\frac{1}{2})^{-1}(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3})=2(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3})$

$=2(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=1-\sqrt{3}i$

虛部 $-\sqrt{3}<-1$ 故不在 K 內

(3) $z_1+z_{-1}=(\frac{1}{2})(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})+2(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3})$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+2(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{5}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}i$

實部 $\frac{5}{4}>1$ 故不在區域 K 之內

(4) $z_1z_{-1}=(\frac{1}{2})(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\times 2(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3})$

$=\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{-\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{-\pi}{3})=\cos 0+i\sin 0=1$

(5) $2013z_{10}=2013(\frac{1}{2})^{10}(\cos\frac{10}{3}\pi+i\sin\frac{10}{3}\pi)$

$=\frac{2013}{1024}(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})=\frac{2013}{1024}(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{-2013}{2048}-\frac{2013}{2048}\sqrt{3}i$

$\because \frac{2013}{2048}\sqrt{3}>1$ 故不在區域 K 內，故選(1)(4)

三、選填題

A. 丟擲一次的點數期望值為 $\frac{141}{30}\div 2=\frac{141}{60}$

機率和 $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+a+b=1\Rightarrow a+b=\frac{7}{15}\cdots①$

丟一次期望值 $\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{5}\times2+3a+4b=\frac{141}{60}\Rightarrow 3a+4b=\frac{97}{60}\cdots②$

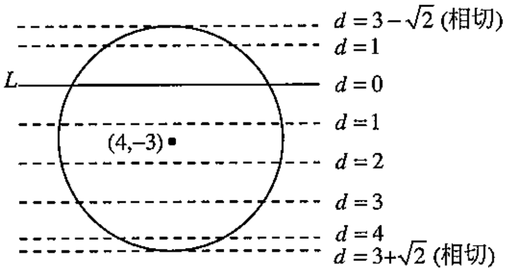
由①②可解出 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{13}{60}$

B. 圓：$(x-4)^2+(y+3)^2=9$

$d(\text{圓心},L)=\frac{|4-3+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

因此圓上點到 L 的整數值距離 $d=0$、1、2、3、4

如圖共有 12 個點到 L 為整數值



距離和 $=1\times4+(0+2+3+4)\times2=22$

因此 $n+m=12+22=34$

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\frac{3}{5}$；(2) $\frac{1}{6}$；(3) $\frac{1}{4}$

詳解：

(1) $_\wedge$奇$_\wedge$奇$_\wedge$奇$_\wedge$：$\frac{3!\cdot4\cdot3}{5!}=\frac{3}{5}$

(2) $\frac{C_3^5\cdot 3\text{張錯排}}{5!}=\frac{C_3^5\cdot(3!-3\times2!+3\times1!-1\times0!)}{5!}=\frac{10\times2}{5!}=\frac{1}{6}$

(3) 4 的倍數且偶數號不相鄰 _ _ _12　_ _ _32　_ _ _52

所求 $=\frac{\text{偶數號不相鄰且是4的倍數}}{\text{偶數號不相鄰}}=\frac{3!\cdot3}{3!\cdot4\cdot3}=\frac{1}{4}$

二、(1) $\cos^2\theta$；(2) $\theta=\frac{\pi}{3}$；(3) $k=-\frac{1}{8}$

詳解：

(1) 根據條件 $A\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ 0\end{bmatrix}$；$A\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \cos\theta\end{bmatrix}$

可合併為 $A\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^{-1}$

$=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta\end{bmatrix}$ $\left(\begin{array}{c}\text{化簡為此式也可}\\ \cos\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\end{array}\right)$ $\cdots$(2分)

$\det(A)=\begin{vmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta\end{vmatrix}=\cos^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\cos^2\theta\cdots\cdots$(2 分)

(2) 由(1)知

$A=\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

$A^3=\cos^3\theta\begin{bmatrix}\cos3\theta & \sin3\theta\\ -\sin3\theta & \cos3\theta\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore \sin3\theta=0\cdots\cdots$(2 分)

$\therefore 3\theta=n\pi\Rightarrow\theta=\frac{n\pi}{3}$，$n\in Z$

故最小正角 $\theta=\frac{\pi}{3}\cdots\cdots$(2 分)

(3) $A^3=(\frac{1}{2})^3\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$k=-\frac{1}{8}$