臺中區國立高級中學104學年度
指定科目第二次聯合模擬考

數學甲

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全、選修數學甲（全）

考試時間：80分鐘

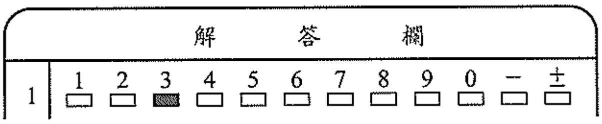
作答方式：第壹部分請用2B鉛筆在答案卡之「解答欄」內畫記，修正時應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，並標明題號。請在規定之欄位以筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正帶（液）。

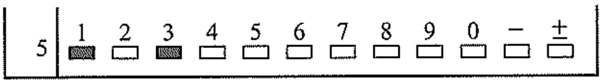
第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 單選題及多選題只用1，2，3，4，5等五個格子，而不需要用到－，±，以及6，7，8，9，0等格子。

例：若第1題為單選題，選項為(1) 3　(2) 5　(3) 7　(4) 9　(5) 11，而考生得到的答案為7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第1列的 $\underset{\square}{3}$ 畫記（注意不是7），如：

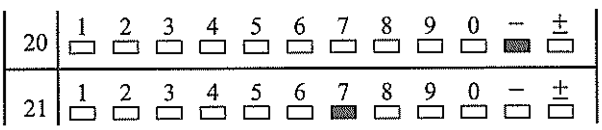


例：若第5題為多選題，而考生認為正確的選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡第5列的 $\underset{\square}{1}$ 與 $\underset{\square}{3}$ 畫記，如：



(二) 選填題的題號是A.，B.，C.，…，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。

例：若第C.題的答案格式是 $\frac{⑳㉑}{50}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第20列的 $\underset{\square}{-}$ 與第21列的 $\underset{\square}{7}$ 畫記，如：



祝考試順利

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（24 分）

說明：第 1.題至第 4.題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 園遊會中有一遊戲為投擲兩顆公正的正八面體骰子，每顆各面的點數皆為 1 點至 8 點，每顆都以靜止時朝上那一面的點數當作擲出的點數，當擲出的兩個點數相同或為連續數(例如：4 點與 5 點)時遊戲就結束，否則就繼續下一次投擲。若主辦單位希望每一位玩者投擲的次數不超過 n 次(含恰好投擲 n 次)的機率大於 0.95，則此 n 之最小值為何？
(已知 $\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，$\log 7 \approx 0.8451$)
(1) 6
(2) 8
(3) 10
(4) 12
(5) 14

2. 滿足行列不等式 $\begin{vmatrix} \log x^2-2 & -2 & -2 \\ -1 & \log x^2-3 & -1 \\ 2 & 4 & \log x^2+2 \end{vmatrix} \leq 0$ 的整數 x 共有幾個？
(1) 13
(2) 14
(3) 15
(4) 16
(5) 17

3. 已知 $r \neq 0$，使得無窮等比級數 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ 之值收斂，且極限值為 7 的整數 a 有幾個？

(1) 10 個

(2) 11 個

(3) 12 個

(4) 13 個

(5) 14 個

4. 坐標平面上過點 $A(1, 2)$ 可以向圓 Γ：$x^2+y^2+2x-4y+k-2=0$ 引出兩條切線，其中 k 為整數，請選出正確的選項。

(1)滿足上式的 k 有 5 個

(2)所有滿足上式的 k 的總和是 15

(3)所有滿足上式的 k 中，最小的是 5

(4)所有滿足上式的 k 的平均是 6

(5)所有滿足上式的 k 中，奇數與偶數的個數相同

二、多選題（40 分）

說明：第 5. 題至第 9. 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，畫記在答案卡之「解答欄」。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

5. 對於正整數 n，設 $(1+2i)^n=a_n+ib_n$，其中 $i=\sqrt{-1}$ 且 a_n、b_n 為實數。從恆等式 $(1+2i)^{n+1}=(1+2i)^n(1+2i)$ 可推得 a_n、b_n 會滿足矩陣乘法 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，已知原點 O 與 P、Q 形成一個邊長為 2 的正$\triangle OPQ$，其中 P 點在 x 軸正向，Q 點在第一象限，若矩陣 T 所定義的線性變換，將平面上 P、Q 兩點分別映射到點 P'、Q'，請選出下列正確的選項。
(1)$\triangle OP'Q'$ 亦為正三角形
(2) P' 與 Q' 兩點分別在第一象限與第二象限
(3)$\triangle OPQ'$ 的面積為 $2+\sqrt{3}$
(4)原點 O 到直線 $\overleftrightarrow{P'Q'}$ 的距離為 $2\sqrt{15}$
(5)$\triangle OP'Q'$ 的重心坐標為 $\left(1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, 2+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

6. 已知函數 $f(x)=2\sin x\cos x-2\sin^2 x+1$，則下列敘述哪些正確？
(1) $f(x)$的最小正週期為 π
(2) $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)$
(3) $y=f(x)$ 是將 $y=\sqrt{2}\sin 2x$ 的圖形向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$
(4) $f(x)$ 在區間 $\left[\dfrac{\pi}{24},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 之最大值為 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$
(5) $f(x)$ 在區間 $\left[\dfrac{\pi}{24},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 之最小值為 1

7. 已知 n 與 m 均為大於 1 的正整數，設箱中有 n 支籤，其中只有一支中獎籤。現在從箱中隨機抽出一支，取後放回，這樣連續操作 m 次。定義：$X_i=\begin{cases}1\text{ , 第 } i \text{ 次中籤}\\0\text{ , 第 } i \text{ 次不中籤}\end{cases}$ $(1\le i\le m)$，隨機變數 $X=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_m$，則下列敘述哪些正確？

(1) $X=k$ 的機率 $P(X=k)=\dfrac{m!}{(m-k)!\,k!\,n^k}$ (其中 $0\le k\le m$，k 為整數)

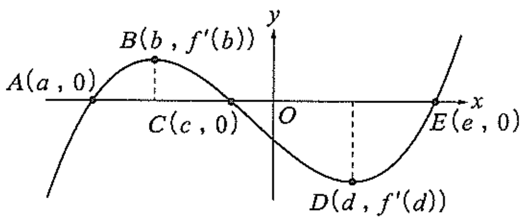
(2) X 的變異數 $Var(X)=\dfrac{m(n-1)}{n^2}$

(3) X^2 的期望值 $E(X^2)=\dfrac{m^2+(n-1)m}{n^2}$

(4)使得 $Var(X)>2$ 成立的最少次數 $m=2n+3$

(5)使得 $E(X^2)>2$ 成立的最少次數 $m=n+1$

8. 右圖為 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 的圖形，即 $y=f'(x)$，其中 O 為原點，a、c、e 為 $y=f'(x)$ 與 x 軸交點的 x 坐標，$f'(b)$ 為極大值，$f'(d)$ 為極小值，則下列有關函數 $f(x)$ 的敘述哪些正確？



(1)當 $a<x<b$ 及 $d<x<e$ 時，$f(x)$ 為遞增，且當 $b<x<d$ 時，$f(x)$ 為遞減

(2)當 $a<x<c$ 及 $x>e$ 時，$f(x)$ 為遞增，且當 $x<a$ 與 $c<x<e$ 時，$f(x)$ 為遞減

(3)當 $a<x<b$ 及 $d<x<e$ 時，$f(x)$ 的圖形凹口向上，且當 $b<x<d$ 時，$f(x)$ 的圖形凹口向下

(4) $(b\,,f(b))$ 與 $(d\,,f(d))$ 兩點皆為函數 $y=f(x)$ 圖形之反曲點

(5) $f(a)$ 與 $f(e)$ 為函數 $y=f(x)$ 之極大值，$f(c)$ 為函數 $y=f(x)$ 之極小值

9. 設多項式 $f(x)$ 為 n 次多項式(其中 $n \geq 3$)，若以 $(x-a)(x-b)$、$(x-b)(x-c)$、$(x-c)(x-a)$ 除 $f(x)$ 所得的餘式分別為 $2x+3$、$3x-1$、$x+1$，則下列選項哪些是正確？

(1) $a-b+c=-3$

(2) $f(a)=-1$

(3) $(x-a)(x-b)$ 除 $(x^2+x-1)f(x)$ 之餘式為 $7x+11$

(4) $(x-a)(x-b)(x-c)$除 $f(x)$ 的餘式為 $\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$

(5)若 $n=3$，$f(2)=\frac{1}{3}$，則 $f(3)=\frac{11}{3}$

三、選填題（12 分）

說明：第 A. 題至第 B. 題為選填題。將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（10－16）內。每一題完全答對得 6 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 平原上有 A、B、C 三個小鎮，坐標分別為 $A(-1,-5)$，$B(4,10)$，$C(-10,8)$，現要在平原上新闢若干條筆直的公路，若希望每一條公路與此三個小鎮的距離都相同(但不同公路與小鎮的距離可能不同)，則由這些新闢公路所圍成的區域面積為 ⑩⑪ 。

B. 設 $f(x)=x^2+\int_0^1 xf(t)dt+\int_{-1}^2 f(t)dt$，則 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{⑫⑬⑭}{⑮⑯}$。(化成最簡分數)

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題計算題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。<u>務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆</u>。每題配分標於題末。

一、(1) 試求方程式 $z^3=-1$ 的虛根(以極式的型式表示)？(4 分)

(2) 承(1)，複數平面上，若複數 z 為 $z^3=-1$ 的虛根，點 P 為 $|z'-(1+i)|=2$ 上任一點，點 Q 的複數表示法為 $z'z$，點 R 的複數表示法為 $z'z^2$，試求△PQR 面積的最大值。(8 分)

二、設曲線 $y=x^3-5x+2$ 與 $y=ax$ 恰有兩個交點，則：

(1) 實數 $a=$？(6 分)

(2) 由上述兩曲線所圍成的區域面積為何？(6 分)

臺中區國立高級中學104學年度

指定科目第二次聯合模擬考

數學甲參考答案暨詳解

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(2)	(4)	(3)	(2)	(1)(2)(3)(5)	(1)(2)(5)	(2)(3)(5)	(2)(3)(4)	(2)(4)

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (2)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：機率性質與對數的運算

解析：每次投擲，兩顆骰子點數相同或為連續數(即遊戲結束)之機率為 $\dfrac{8+7\times 2}{8^2}=\dfrac{11}{32}$

故可以繼續下一次投擲之機率為 $1-\dfrac{11}{32}=\dfrac{21}{32}$

依題意可得 $1-\left(\dfrac{21}{32}\right)^n>0.95\Rightarrow\left(\dfrac{21}{32}\right)^n<1-0.95=0.05=\dfrac{1}{20}$

取對數得 $n(\log 21-\log 32)<-\log 20$

$$\Rightarrow n>\frac{\log 20}{\log 32-\log 21}=\frac{\log(10\times 2)}{\log 2^5-\log(3\times 7)}$$

$$\approx\frac{1+0.3010}{5\times 0.3010-(0.4771+0.8451)}$$

$$=\frac{1.3010}{1.5050-1.3222}=\frac{1.3010}{0.1828}\approx 7.12$$

得 n 至少為 8

故選(2)。

2. (4)

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：三階行列式的運算性質

解析：

$$\begin{vmatrix}\log x^2-2 & -2 & -2\\ -1 & \log x^2-3 & -1\\ 2 & 4 & \log x^2+2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times 1\\ \\ \end{matrix}\times 1\quad\le 0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}\log x^2-1 & \log x^2-1 & \log x^2-1\\ -1 & \log x^2-3 & -1\\ 2 & 4 & \log x^2+2\end{vmatrix}\le 0$$

$$\times(-1)\qquad \times(-1)$$

$$\Rightarrow(\log x^2-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & \log x^2-3 & -1\\ 2 & 4 & \log x^2+2\end{vmatrix}\le 0$$

$$\Rightarrow(\log x^2-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & \log x^2-2 & 0\\ 2 & 2 & \log x^2\end{vmatrix}\le 0$$

$\Rightarrow(\log x^2-1)\,[(\log x^2)^2-2(\log x^2)]\le 0$

$\Rightarrow(\log x^2)(\log x^2-1)(\log x^2-2)\le 0$

$\Rightarrow 1\le\log x^2\le 2$ 或 $\log x^2\le 0\Rightarrow 10\le x^2\le 100$ 或 $x^2\le 1$

$\because x\in Z$，$x\neq 0$

$\therefore x=\pm 1$、± 4、± 5、± 6、± 7、± 8、± 9、± 10，共 16 個

故選(4)。

3. (3)

出處：選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉

目標：無窮等比級數的收斂

解析：若無窮等比級數 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ 之值收斂，則其和為 $\dfrac{a}{1-r}=7\Rightarrow r=\dfrac{7-a}{7}$

其中 $-1<r<1$，$r\neq 0\Rightarrow\begin{cases}-1<\dfrac{7-a}{7}<1\Rightarrow -7<7-a<7\Rightarrow 0<a<14\\ a\neq 7\end{cases}$

$\Rightarrow a=1\sim 6$，$8\sim 13$，共 12 個整數

故選(3)。

4. (2)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：圓與切線的關係

解析：點 A 在圓 Γ 外部 $\Rightarrow A(1,2)$ 代入 Γ 得 $1^2+2^2+2\times 1-4\times 2+k-2>0$

$\Rightarrow k>3$ ……………①

又 $\Gamma:(x+1)^2+(y-2)^2=-k+7>0$

$\Rightarrow k<7$ ……………②

由①、②知，$3<k<7\Rightarrow k=4$，5，6

故選(2)。

二、多選題

5. (1)(2)(3)(5)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：平面上的線性變換與旋轉矩陣

解析：$a_{n+1}+ib_{n+1}=(a_n+ib_n)(1+2i)=a_n-2b_n+(2a_n+b_n)i$

$$\begin{cases}a_{n+1}=a_n-2b_n\\ b_{n+1}=2a_n+b_n\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\ 2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}=\sqrt{5}\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}\text{，其中}\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ \sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}\Rightarrow\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

T 在平面上定義的線性變換即為伸縮為 $\sqrt{5}$ 倍，旋轉 θ，其中 $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$P(2,0)$，$Q(1,\sqrt{3})$，$\triangle OPQ$ 的重心 $G\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(1) ○：正$\triangle OPQ$ 經過伸縮旋轉$\triangle OP'Q'$ 亦為正三角形且邊長為 $2\sqrt{5}$

(2) ○：$\because\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore P'$ 與 Q' 兩點分別在第一象限與第二象限

(3) ○：$\begin{bmatrix}1&-2\\ 2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2\sqrt{3}\\ 2+\sqrt{3}\end{bmatrix}$，$Q'(1-2\sqrt{3}\ ,\ 2+\sqrt{3})$

$\triangle OPQ'$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2&0\\ 1-2\sqrt{3}&2+\sqrt{3}\end{vmatrix}\right|=2+\sqrt{3}$

(4) ╳：原點 O 到 $\overleftrightarrow{P'Q'}$ 的距離即為正$\triangle OP'Q'$ 的高$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{5}=\sqrt{15}$

(5) ○：$\triangle OP'Q'$ 的重心即為$\triangle OPQ$ 的重心 $G\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 變換而得

$$\therefore\begin{bmatrix}1&-2\\ 2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\\ 2+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$$

故選(1)(2)(3)(5)。

6. (1)(2)(5)

出處：第三冊第一章〈三角〉、選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：三角函數的週期與平移

解析：$f(x)=\sin 2x-2\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}+1=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin 2x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos 2x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

(1)○：$f(x)$ 的最小正週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(2)○：$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)$

(3)╳：$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)\right]$，為向左平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 之結果

(4)╳：$\because \dfrac{\pi}{24}\le x\le\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\dfrac{\pi}{3}\le 2x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3\pi}{4}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1\Rightarrow 1\le\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$

故最大值為 $\sqrt{2}$

(5)○：同(4)，最小值為 1

故選(1)(2)(5)。

7. (2)(3)(5)

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計II〉

目標：期望值與變異數

解析：(1)╳：$P(X=k)=C_k^m\left(\dfrac{1}{n}\right)^k\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{m-k}=\dfrac{m!\,(n-1)^{m-k}}{(m-k)!\,k!\,n^m}$

(2)○：$Var(X)=m\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{m(n-1)}{n^2}$

(3)○：$E(X)=m\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{m}{n}$

$\Rightarrow E(X^2)=(E(X))^2+Var(X)=\left(\dfrac{m}{n}\right)^2+\dfrac{m(n-1)}{n^2}=\dfrac{m^2+(n-1)m}{n^2}$

(4)╳：$\because \dfrac{m(n-1)}{n^2}>2\Leftrightarrow m(n-1)>2n^2$

當 $m=2n+3$ 時，$m(n-1)=(2n+3)(n-1)=2n^2+n-3$ 不一定大於 $2n^2$ ($n=2$ 為反例)

(5)○：$\because \dfrac{m^2+(n-1)m}{n^2}>2\Leftrightarrow m^2+(n-1)m>2n^2$

當 $m\le n$ 時，$m^2+(n-1)m\le n^2+(n-1)n<n^2+n^2=2n^2$

當 $m=n+1$ 時，$m^2+(n-1)m=2n^2+2n>2n^2$

故選(2)(3)(5)。

8. (2)(3)(4)

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：函數圖形的判定與函數極值

解析：(1)(2)(3) ①當 $a<x<c$ 及 $x>e$ 時，$y=f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 為遞增

當 $c<x<e$ 及 $x<a$ 時，$y=f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 為遞減

②當 $a<x<b$ 與 $d<x<e$ 時，$y=f'(x)$ 遞增，即 $y=f''(x)>0\Rightarrow f(x)$ 的圖形凹口向上

當 $b<x<d$ 時，$y=f'(x)$ 遞減，即 $y=f''(x)<0\Rightarrow f(x)$ 的圖形凹口向下

(4) $f'(b)$ 為極大值$\Rightarrow f''(b)=0$ 且 $f''(x)$ 在兩側變號

$f'(d)$ 為極小值$\Rightarrow f''(d)=0$ 且 $f''(x)$ 在兩側變號

故 $(b,f(b))$與 $(d,f(d))$ 兩點皆為函數 $y=f(x)$ 圖形之反曲點

(5) $y=f'(x)$ 在 $x=a$ 及 $x=e$ 兩側由負變正，即 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 及 $x=e$ 兩側由遞減變遞增

故 $f(a)$ 與 $f(e)$ 為函數 $y=f(x)$ 之極小值

$y=f'(x)$ 在 $x=c$ 兩側由正變負，即 $y=f(x)$ 在 $x=c$ 兩側由遞增變遞減，故 $f(c)$ 為函數 $y=f(x)$ 之極大值

故選(2)(3)(4)。

9. (2)(4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：餘式定理的性質

解析：令 $f(x)=(x-a)(x-b)q_1(x)+2x+3$

$=(x-b)(x-c)q_2(x)+3x-1$

$=(x-c)(x-a)q_3(x)+x+1$

(1) ╳：$\begin{cases} f(a)=2a+3=a+1 \cdots\cdots ① \\ f(b)=2b+3=3b-1 \cdots\cdots ② \\ f(c)=3c-1=c+1 \cdots\cdots ③ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \\ c=1 \end{cases}$

$\therefore a-b+c=(-2)-4+1=-5$

(2) ○：由①知 $f(a)=(-2)+1=-1$

(3) ╳：$f(x)=(x+2)(x-4)q_1(x)+2x+3$

$\Rightarrow (x^2+x-1)f(x)=(x^2+x-1)(x+2)(x-4)q_1(x)+(x^2+x-1)(2x+3)$

$\because (x^2+x-1)(2x+3)=(x+2)(x-4)(2x+9)+35x+69$

∴餘式為 $35x+69$

(4) ○：設 $f(x)=(x+2)(x-4)(x-1)q(x)+m(x+2)(x-4)+2x+3$

由③知 $f(1)=2 \Rightarrow -9m+5=2$

$\Rightarrow m=\frac{1}{3}$

∴所求為 $\frac{1}{3}(x+2)(x-4)+2x+3=\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$

(5) ╳：若 $n=3$

由(4)知 $f(x)=k(x+2)(x-4)(x-1)+\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$

$\because f(2)=-8k+\frac{13}{3}=\frac{1}{3} \Rightarrow k=\frac{1}{2}$

$\therefore f(3)=\frac{1}{2}\times(-10)+\frac{22}{3}$

$=\frac{7}{3}$

故選(2)(4)。

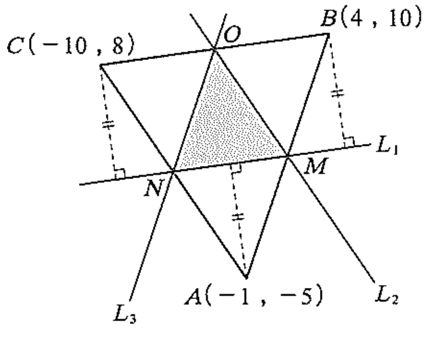
三、選填題

A. 25

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：面積與二階行列式

解析：作圖如右，畫出△ABC



令 L_1 為過 $\overline{AB}$ 中點 M 與 $\overline{AC}$ 中點 N 之直線

則可得 $d(A, L_1)=d(B, L_1)=d(C, L_1)=\frac{1}{2}d(A, \overleftrightarrow{BC})$

即 L_1 為與 A，B，C 三小鎮皆等距的一條公路

同理，可得 L_2 與 L_3 亦為與 A、B、C 三小鎮皆等距的公路，

此三公路所圍成的區域即為△MNO，

其面積為△ABC 面積的 $\frac{1}{4}$

由 $\overrightarrow{AB}=(5, 15)$，$\overrightarrow{AC}=(-9, 13)$ 可得

△ABC 面積為 $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ -9 & 13 \end{vmatrix}\right|=100$

故所求為 $\frac{1}{4}\times 100=25$。

B. $\frac{-14}{15}$

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：微積分基本定理與定積分的性質

解析：令 $A=\int_0^1 f(t)dt$ ，$B=\int_{-1}^2 f(t)dt$

則 $f(x)=x^2+Ax+B$

$$\therefore A=\int_0^1(t^2+At+B)dt=\left(\frac{t^3}{3}+\frac{A}{2}t^2+Bt\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{A}{2}+B$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2}-B=\frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$B=\int_{-1}^2(t^2+At+B)dt=\left(\frac{t^3}{3}+\frac{A}{2}t^2+Bt\right)\Big|_{-1}^2$$

$$=\frac{3A}{2}+3B+3$$

$$\Rightarrow \frac{3A}{2}+2B=-3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

由①、②得 $A=-\frac{14}{15}$ ，$B=-\frac{4}{5}\Rightarrow f(x)=x^2-\frac{14}{15}x-\frac{4}{5}$

$$\therefore \int_0^1\left(x^2-\frac{14}{15}x-\frac{4}{5}\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{15}x^2-\frac{4}{5}x\right)\Big|_0^1=\frac{-14}{15}$$ 。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ 或 $\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$ ；(2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}+\sqrt{6}$

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：複數平面與棣美弗定理

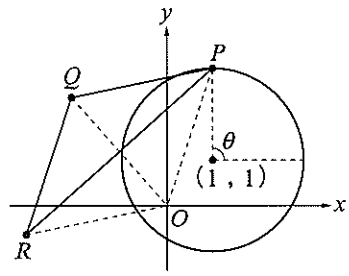
解析：(1) $z^3=\cos\pi+i\sin\pi$

$\Rightarrow z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ ，$\cos\pi+i\sin\pi$ (不合)，$\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$

故 $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ 或 $\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$

(2) $|z'-(1+i)|=2$ 表圓心 $(1, 1)$，半徑為 2 之圓

利用極坐標，可令 $P(1+2\cos\theta, 1+2\sin\theta)$



①若 $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

Q 點為將 P 點繞原點 O 逆時針旋轉 $\frac{\pi}{3}$

R 點為將 Q 點繞原點 O 逆時針旋轉 $\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}$ 且 $\angle POQ=\angle QOR=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \triangle POQ$，$\triangle QOR$ 均為正三角形 $\Rightarrow \angle PQR=\frac{2\pi}{3}$

又 $\overline{OP}^2=(1+2\cos\theta)^2+(1+2\sin\theta)^2$

$=6+4(\sin\theta+\cos\theta)$

$=6+4\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$\leq 6+4\sqrt{2}$

$\therefore \triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{QR}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\leq\frac{1}{2}\cdot(6+4\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\sqrt{6}$

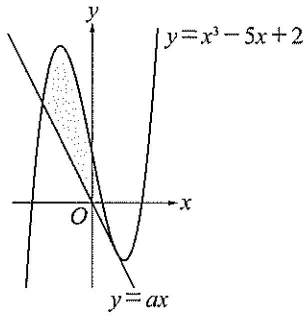
②若 $z=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$ 表繞原點 O 順時針旋轉 $\frac{\pi}{3}$ ，其結果亦同

二、(1) -2；(2) $\dfrac{27}{4}$

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：定積分及其應用

解析：(1) 設 $f(x)=x^3-5x+2$



$\because y=f(x)$ 與 $y=ax$ 恰有兩個交點，故必有一交點為切點，如右圖所示

令切點坐標為 $(t\,,\,t^3-5t+2)$

$\Rightarrow f'(t)=3t^2-5=a$ 且 $t^3-5t+2=at$

$\Rightarrow 3t^2-5=\dfrac{t^3-5t+2}{t}$

$\Rightarrow t^3=1 \Rightarrow t=1 \Rightarrow a=-2$。

(2) $f(x)-ax=x^3-5x+2+2x=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)=0$

故 $x=-2$ 或 1

$\therefore$所求面積$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx=\left(\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-2}^{1}=\dfrac{27}{4}$。