臺中市立高級中等學校

109 學年度指定科目第二次聯合複習考試

考試日期：110 年 3 月 4~5 日

數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 77 分）

一、單選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 平面上有兩點 $A(\log_2 3, \log_3 4)$，$B(\log_2 6, \log_3 24)$，過原點 O 作一直線 L 平行 $\overline{AB}$，若由直線 L，x 軸及直線 $x=2$，三直線所圍成之三角形的面積為 S。關於面積 S 值的範圍，試選出正確的選項。（$\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$）

(1) $1 < S < 1.5$

(2) $1.5 < S < 2$

(3) $2 < S < 2.5$

(4) $2.5 < S < 3$

(5) $3 < S < 3.5$

2. 若 $\sin A + \cos A = \tan A$，其中 $0 < A < \dfrac{\pi}{2}$。關於 A 值的可能範圍，試選出正確的選項。

(1) $0 < A < \dfrac{\pi}{6}$

(2) $\dfrac{\pi}{6} < A < \dfrac{\pi}{5}$

(3) $\dfrac{\pi}{5} < A < \dfrac{\pi}{4}$

(4) $\dfrac{\pi}{4} < A < \dfrac{\pi}{3}$

(5) $\dfrac{\pi}{3} < A < \dfrac{\pi}{2}$

3. 設 O 為複數平面的原點，複數 $z_1=2\sin\theta+i\cos\theta$，其中 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$。在複數平面上對應向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，以 O 為旋轉中心，將 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按逆時針方向旋轉 $\dfrac{\pi}{4}$ 後得到向量 $\overrightarrow{OZ_2}$，若 $\overrightarrow{OZ_2}$ 對應的複數為 $z_2=|z_2|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，則 $\tan\varphi$ 應為下列哪一個選項？

(1) $\dfrac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}$

(2) $\dfrac{2\tan\theta-1}{2\tan\theta+1}$

(3) $\dfrac{1-2\tan\theta}{1+2\tan\theta}$

(4) $\dfrac{1+2\tan\theta}{1-2\tan\theta}$

(5) $\dfrac{1}{2\tan\theta+1}$

4. 如圖(1)，在直角梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}\perp\overline{AD}$，$\overline{AB}\,/\!/\,\overline{DC}$，$\overline{AB}=2$，$\overline{AD}=\overline{DC}=1$，圖(1)中圓弧所在圓的圓心為點 C，半徑為 $\dfrac{1}{2}$，且點 P 在圖中陰影部分（包括邊界）運動。若 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{BC}$，其中 α,β 皆為實數，則 $4\alpha-\beta$ 的最大值為下列哪一個選項？

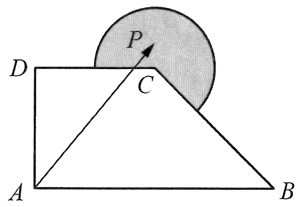
(1) $3-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(2) $3+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(3) 2

(4) $3+\sqrt{5}$

(5) $3+\dfrac{\sqrt{17}}{2}$



圖(1)

二、多選題（占 32 分）

說明：第 5 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 設兩多項式 $f(x)=2x^4+3x^3+5x^2+x-6$，$g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，且 $f(x+2)=g(x)$。試選出正確的選項。
   (1) $f(x)$ 除以 $(2x^2+x)$ 的商式為 x^2-x+2
   (2) $g(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為 -5
   (3) $f(x)=3x$ 恰有一個實根
   (4) $e=72$
   (5) $a+c+e=145$

6. 空間坐標系中，已知兩點 $A(4,-3,9)$，$B(2,1,5)$ 在平面 E：$x-2y+2z+5=0$ 的同側，且 P 為平面 E 上的動點。試選出正確的選項。
   (1) 過 A，B 中點且平行平面 E 的平面方程式為 $x-2y+2z+19=0$
   (2) 內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 恆為一定值
   (3) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AP}$ 的夾角恆小於 $90°$
   (4) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}$ 不可能為零向量
   (5) 滿足 $\triangle ABP$ 的面積為 15 的所有點 P 所成的圖形為一圓

7. 有紅藍兩粒質地均勻的正方體形狀骰子，紅色骰子的點數有兩個面是 8，四個面是 2，藍色骰子的點數有三個面是 7，三個面是 1，甲乙兩人各取一顆骰子分別隨機投擲一次，所得點數較大者獲勝。設紅色骰子投擲一次出現點數的期望值 E_1，藍色骰子投擲一次出現點數的期望值 E_2。試選出正確的選項。

(1) 投擲藍色骰子者獲勝的機率小於 $\dfrac{1}{2}$

(2) 投擲紅色骰子者獲勝的機率大於 $\dfrac{1}{2}$

(3) $E_1=5$

(4) $E_2=4$

(5) $E_1>E_2$

8. 設 $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$且 $A=aB+I$（a 為實數，$a\neq 0$）。試選出正確的選項。

(1) 矩陣 A 的行列式有最小值

(2) 若 $P=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$滿足 $P=AP$，則 $2x-y=0$

(3) 若矩陣 A 表對直線 $L：y=mx$ 之鏡射矩陣，則 $a=\dfrac{2}{5}$

(4) 若矩陣 A 表對直線 $L：y=mx$ 之鏡射矩陣，則 $m=\dfrac{1}{2}$

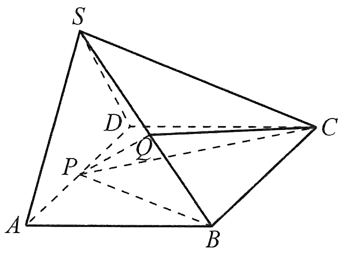
(5) 存在正整數 a 使得 $A^2=\mathrm{I}+2040B$

三、選填題（占21分）

說明：1. 第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（9–15）。
2. 每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 a 為實數，若直線 $L: ax+y+3a-\sqrt{3}=0$ 與圓 $x^2+y^2=12$ 交於 A,B 兩點，過 A,B 分別做 L 的垂線與 x 軸交於 C,D 兩點，若 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$，則 $\overline{CD}=$ ＿⑨＿。

B. 如圖(2)，已知四角錐 $S-ABCD$ 中，$\triangle SAD$ 是邊長為 a 的正三角形，平面 SAD 垂直平面 $ABCD$，四邊形 $ABCD$ 為菱形，$\angle DAB=60°$，P 為 $\overline{AD}$ 的中點，Q 為 $\overline{SB}$ 的中點。若平面 PBC 與平面 PQC 的夾角為 θ，則 $\sin\theta$ 的值為 $\dfrac{\sqrt{⑩⑪}}{⑫⑬}$。



圖(2)

C. 在 $\triangle ABC$ 中，a, b, c 分別為 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的對邊，若向量 $\overrightarrow{m}=(a,2b-c)$ 平行向量 $\overrightarrow{n}=(\cos A,\cos C)$，則 $\tan 2A=$ ＿$⑭\sqrt{⑮}$＿。

－－－以下第貳部分的非選擇題，必須在答案卷面作答－－－

第貳部分：非選擇題（占 23 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

一、在△ABC 中，$\angle A, \angle B, \angle C$的對邊分別為 a, b, c，已知 $2(\tan A+\tan B)=\dfrac{\tan A}{\cos B}+\dfrac{\tan B}{\cos A}$。

(1) 證明：$a+b=2c$。(5 分)

(2) 求 $\cos C$的最小值。(5 分)

(3) 求 $\cos C$為最小值時，$\angle C$的度數。(2 分)

二、某創投公司擬資助三家新創企業，現聘請兩位專家獨立對每家新創企業所提的方案進行評審。假設評審結果為通過或不通過，且其機率均為 $\dfrac{1}{2}$。創投公司對於企業的資助條件如下：若某家企業獲得兩個通過，則資助 1000 萬元；若只得到一個通過，則資助 500 萬元；若未獲得任何一個通過，則不予資助。令 X 表示該公司資助三家企業金額的總和。試求

(1) X之機率分布。(8 分)

(2) $E(X)$。(3 分)

臺中市立高級中等學校 109 學年度指定科目第二次聯合複習考試

數學甲考科解析

考試日期：110 年 3 月 4~5 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4	1	2	45	235	124	45	4	7	7	1	1	—	3

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 直線 L 斜率 $m=\dfrac{\log_3 24-\log_3 4}{\log_2 6-\log_2 3}=\dfrac{\log_3 6}{\log_2 2}=1+\log_3 2$，

$L：y=(1+\log_3 2)x$，

$S=2\times\left[\dfrac{2(1+\log_3 2)}{2}\right]=2(1+\log_3 2)=2+\dfrac{\log 4}{\log 3}$

$=2+\dfrac{0.6020}{0.4771}=3+\dfrac{1249}{4771}<3\dfrac{1}{2}$，

所以 $3<S<3.5$，故選(5)。

2. 因為 $0<A<\dfrac{\pi}{2}$，$\tan A=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin(A+\dfrac{\pi}{4})$，

所以 $1<\tan A\le\sqrt{2}$。

① 因為 $\tan A>1$，排除(1)(2)(3)選項。

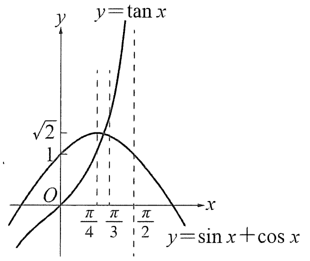
② 因為 $\dfrac{\pi}{4}<A<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 1<\tan A<\sqrt{3}$，(4)有可能成立。

③ 因為 $\dfrac{\pi}{3}<A<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\tan A>\sqrt{3}$，排除(5)選項。

故選(4)。

（事實上，$\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}-\tan\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}-1>0$，

$\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<0$）



3. $z_2=z_1(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})=(2\sin\theta+i\cos\theta)\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(2\sin\theta+2i\sin\theta+i\cos\theta-\cos\theta)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}[(2\sin\theta-\cos\theta)+i(2\sin\theta+\cos\theta)]$

$=|z_2|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，

所以 $\tan\varphi=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\dfrac{2\sin\theta+\cos\theta}{2\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}$，

故選(1)。

<另解>

設 $z_1=|z_1|(\cos\alpha+i\sin\alpha)=2\sin\theta+i\cos\theta$，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

則 $z_2=|z_2|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|z_1|[\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})+i\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})]$，

所以 $\tan\varphi=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\dfrac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}{\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

$=\dfrac{2\sin\theta+\cos\theta}{2\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}$。

故選(1)。

4. 以 A 為坐標原點建立直角坐標，

設 $P(x,y)$，$A(0,0)$，$B(2,0)$，$D(0,2)$，$C(1,1)$

$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{BC}=\alpha(2,0)+\beta(-1,1)$

$\Rightarrow(x,y)=(2\alpha-\beta,\beta)\Rightarrow(\alpha,\beta)=(\dfrac{x+y}{2},y)$

令 $k=4\alpha-\beta=2x+y$

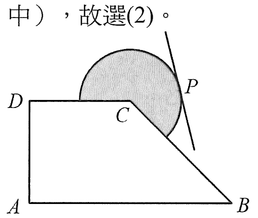
目標函數 k 為直線 $L：y=-2x+k$ 的 y 軸截距，

$L：2x+y-k=0$，

$d(C,L)=\dfrac{|2+1-k|}{\sqrt{5}}\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow 3+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\ge k\ge 3-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

（此最小值的 P 點不在圖中陰影部分無須參酌）

故當直線與圓相切取得最大值 $3+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$（此時點 P 在陰影部分中），故選(2)。



。

二、多選題

5. (1) ×：$f(x)=2x^4+3x^3+5x^2+x-6$

$=(2x^2+x)(x^2+x+2)-x-6$

$\Rightarrow$ 商式為 x^2+x+2。

(2) ×：$g(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為 $g(-1)=f(1)=5$。

(3) ×：因為 $f(x)=2x^4+3x^3+5x^2+x-6=3x$，

所以 $2x^4+3x^3+5x^2-2x-6$

$=(x+1)(2x^3+x^2+4x-6)=0$。

$\Rightarrow 2x^3+x^2+4x-6$ 為三次實係數多項式必有一個實根（異於 -1）

$\Rightarrow f(x)=3x$ 至少有兩個實根。

(4) ○：$g(0)=f(2)=72=e$。

(5) ○：因為 $g(1)=f(3)=a+b+c+d+e=285$，

$g(-1)=f(1)=a-b+c-d+e=5$，

所以 $a+c+e=\dfrac{g(1)+g(-1)}{2}=\dfrac{285+5}{2}=145$。

故選(4)(5)。

6. $\overrightarrow{BA}=(2,-4,4)\,//\,\overrightarrow{n}=(1,-2,2)$，所以 $\overrightarrow{AB}\perp$ 平面 E，

設 A，B 兩點在平面 E 共同的垂足點為 K。

(1) ×：過 $\overline{AB}$ 中點 $M(3,-1,7)$ 且平行平面 E 的平面方程式為 $x-2y+2z-19=0$。

(2) ○ (3) ○：因為 $d(A,E)=\dfrac{33}{3}>5=d(B,E)$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB$，

$=\overline{AB}\times d(A,E)>0$

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 恆為一定值，且 $\angle PAB<90°$。

(4) ×：當 $P=K$ 時 $\overrightarrow{AP}\,//\,\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{0}$。

(5) ○：因為 $\overline{AB}=6$，所以△ABP 的高為 5，

所有點 P 所成的圖形為在平面 E 上以 K 為圓心且半徑為 5 的圓。

故選(2)(3)(5)。

7. (1) ○：投擲藍色骰子者獲勝的機率為

$\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ 。

(2) ○：投擲紅色骰子者獲勝的機率為 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$

（或 $\frac{2}{6}\times\frac{6}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3}\times1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$ ）。

(3) × (4) ○ (5) ×：$E_1=8\times\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3}=4$，

$E_2=7\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=4$。

故選(1)(2)(4)。

8. $A=aB+I=\begin{bmatrix} a+1 & -2a \\ -2a & 4a+1 \end{bmatrix}$，

$\det(A)=(a+1)(4a+1)-(-2a)(-2a)=5a+1$

(1) ×：矩陣 A 的行列式為 $5a+1$ 沒有最小值。

(2) ×：$P=AP=(aB+I)P=aBP+P \Rightarrow aBP=O$，

因 $a\neq0 \Rightarrow BP=O \Rightarrow x-2y=0$。

(3) × (4) ○：若矩陣 A 表對直線 L：$y=mx$ 之鏡射矩陣，

$A=\begin{bmatrix} a+1 & -2a \\ -2a & 4a+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$，

則 $(a+1)+(4a+1)=0$

$\Rightarrow a=-\frac{2}{5}$，$A=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$，

所以 $m=\tan\frac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{\frac{4}{5}}{1+\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$ 。

(5) ○：$B^2=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}=5B$

$A^2=(I+aB)^2=I+2aB+a^2B^2=I+(5a^2+2a)B$

$5a^2+2a-2040=0 \Rightarrow (a-20)(5a+102)=0$

存在正整數 $a=20$ 使得 $A^2=I+2040B$，

故選(4)(5)。

三、選填題

A. 圓半徑 $r=2\sqrt{3}$，設圓心 $O(0,0)$ 到弦 $\overline{AB}$ 的距離為 d，

根據直線與圓相交弦長公式有 $\overline{AB}=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3}$，

得 $d=3$，

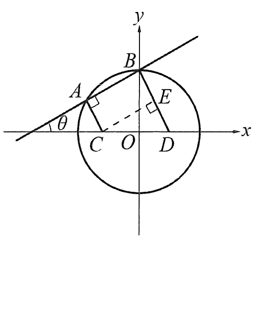
因此圓心 $O(0,0)$ 到直線 L 的距離 $d=\dfrac{|3a-\sqrt{3}|}{\sqrt{a^2+1}}=3$，

解得 $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，因此 L 的方程式為 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$，

所以直線 L 的斜角 θ 為 $30°$。

如下圖所示，過點 C 作 $\overline{CE}\perp\overline{BD}$ 於點 E，

則 $\overline{CD}=\dfrac{\overline{CE}}{\cos30°}=\dfrac{\overline{AB}}{\cos30°}=4$ 。



＜另解＞

如下圖，直線：L：$ax+y+3a-\sqrt{3}=0$，

知直線 L 過定點 $A(-3,\sqrt{3})$，

又 $\overline{AB}=2\sqrt{3}=r=\overline{OA}=\overline{OB}$，所以△$OAB$ 為正三角形。

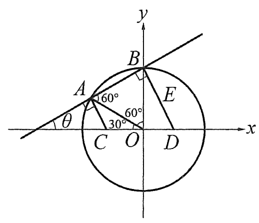
因為 $A(-3,\sqrt{3})$，所以 $\angle AOC=30°$。

因為△OAB 為正三角形，得 $\angle AOB=60°$，又 $\angle AOC=30°$，

所以 B 點在 y 軸上，得 $B(0,2\sqrt{3})$。

直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的斜率 $m=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{0-(-3)}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

得直線 L 的斜角 θ 為 $30°$，則 $\overline{CD}=\dfrac{\overline{AB}}{\cos30°}=4$ 。



B. 因為 $\angle DAB=60°$，△DAB 為正三角形，所以 $\overline{BP}\perp\overline{AD}$ 。

以 P 為坐標原點，$\overleftrightarrow{PA}$ 為 x 軸，$\overleftrightarrow{PB}$ 為 y 軸，

$\overleftrightarrow{PS}$ 為 z 軸建立空間直角坐標系，

則 $S(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}a)$, $B(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$, $C(-a,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$,

$Q(0,\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{\sqrt{3}}{4}a)$，

平面 PBC 與平面 PQC 的夾角 θ 可由兩平面的法向量來求出，

平面 PBC 為 xy 平面，法向量為 $\overrightarrow{m}=(0,0,1)$，

設 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$ 為平面 PQC 的一個法向量，

由 $\overrightarrow{n}$ 平行 $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PC}=-\frac{\sqrt{3}}{8}a^2(\sqrt{3},2,-2)$，

取 $\overrightarrow{n}=(\sqrt{3},2,-2)$，

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{m}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{11}\times1}=\dfrac{-2}{\sqrt{11}}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{\sqrt{77}}{11}$ 。

C. 因為 $\overrightarrow{m}$ 平行 $\overrightarrow{n}$，所以 $a:(2b-c)=\cos A:\cos C$

$\Rightarrow(2b-c)\cos A=a\cos C$

$\Rightarrow 2b\cos A=c\cos A+a\cos C$

$=c\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\times\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=b$

$\Rightarrow \cos A=\frac{1}{2}$ 。

因為 $0<\angle A<\pi$，所以 $\angle A=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\tan2A=-\sqrt{3}$ 。

第貳部分：非選擇題

一、(1) 見解析；(2) $\frac{1}{2}$；(3) $60°$。

【詳解】

(1) $2\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}\right)=\dfrac{\sin A}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin B}{\cos A\cos B}$

$\Rightarrow 2(\sin A\cos B+\cos A\sin B)=\sin A+\sin B$

$\Rightarrow 2\sin(A+B)=\sin A+\sin B$，(2 分)

又因為 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，

可得 $2\sin C=\sin A+\sin B$，

再由正弦定理得 $2c=a+b$，故得證。(3 分)

(2)(3) 由(1)可知$c=\dfrac{a+b}{2}$，

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{2ab}$$

$$=\frac{3(a^2+b^2)-2ab}{8ab}\ (2\text{ 分})$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-\frac{1}{4}\geq\frac{3}{8}\left(2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}\right)-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\text{，(3 分)}$$

當$a=b$時，等號成立，故$\cos C$的最小值為$\dfrac{1}{2}$，

此時$\angle C=60°$。(2 分)

二、(1) 見解析；(2) 1500 (萬元)。

【詳解】

(1) 機率分布如下表：

X	0	500 萬	1000 萬	1500 萬	2000 萬	2500 萬	3000 萬
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

(7 分，錯一個P扣 1 分，扣完為止)

由題意可知，獲得 2 個通過、1 個通過、0 個通過的機率分別為$\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$(1 分)。

$P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$；

$P(X=500)=C_1^3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{64}$；

$P(X=1000)=C_2^3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+C_1^3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{15}{64}$；

$P(X=1500)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+C_1^3\times\frac{1}{2}\times C_1^2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{20}{64}$；

$P(X=2000)=C_2^3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+C_2^3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{15}{64}$；

$P(X=2500)=C_2^3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{64}$；

$P(X=3000)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$。

(2) $E(X)=0\times\frac{1}{64}+500\times\frac{6}{64}+1000\times\frac{15}{64}+1500\times\frac{20}{64}+$

$2000\times\frac{15}{64}+2500\times\frac{6}{64}+3000\times\frac{1}{64}$

$=1500$（萬元）。(3 分)

<另解>

設Y視為 6 次評審中通過的次數，

則Y~二項分配$B(6,\frac{1}{2})$，令$X=500$ 萬$\times Y$

因為$E(Y)=np=6\times\frac{1}{2}=3$，

所以$E(X)=500$ 萬$\times E(Y)=500$ 萬$\times 3=1500$ 萬。(3 分)