臺北區 106 學年度第二學期
指定科目第二次模擬考試

數學甲

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全、選修數學甲全

考試時間：80 分鐘

作答方式：

- 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液(帶)。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{\text{⑱}}{\text{⑲}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\underset{\square}{3}$ 與第 19 列的 $\underset{\square}{8}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{\text{⑳㉑}}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\underset{\square}{-}$ 與第 21 列的 $\underset{\square}{7}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

祝考試順利

99363403-26

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

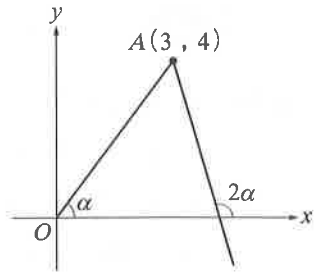
一、單選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $\log f(x)$ 為 x 之一次實係數多項式且 $f(2)=8$，$f(4)=24$，則 $f(6)$ 之值為下列哪一個選項？
   (1) 40
   (2) 48
   (3) 56
   (4) 64
   (5) 72

2. 設甲袋中有 1 號球 1 個、2 號球 2 個、……、9 號球 9 個；而乙袋中有 1 號球 9 個、2 號球 8 個、……、9 號球 1 個。今自兩袋中各隨機選取一球，且每顆球被選取到的機會相等。若此兩球同為 k 號球的機率為 $P(k)$，$k=1$，2，3，……，9，試求當 k 值為多少時機率最大。
   (1) 1
   (2) 3
   (3) 5
   (4) 7
   (5) 9

3. 如右圖，O 為原點，$A(3,4)$，$\overline{OA}$ 與 x 軸正向的交角為 α，試求過 A 點且與 x 軸正向的交角為 2α 之直線方程式為何？



(1) $3x+4y=25$

(2) $4x+3y=24$

(3) $24x-7y=44$

(4) $24x+7y=100$

(5) $7x+24y=117$

4. 近年來臺灣空氣品質問題日趨嚴重，其中又以 PM 2.5 對人體影響最甚(PM 2.5 是指其懸浮微粒「小於或等於 2.5 微米(μm)」的粒子)。故環保局明訂規範，現今流行的路跑活動，若遇活動當天空氣品質 PM 2.5 為「紫爆」等級(屬於第 10 級的狀況，PM 2.5 在每立方公尺有 71 微克以上)，必須立刻停辦路跑活動。某行銷公司將於本週六辦理路跑活動，先前已決議若遇「紫爆」則活動延期至週日，週日再遇「紫爆」此路跑賽事便取消。行銷公司推算，若活動如期舉辦可獲利 10 萬元，週日舉辦獲利僅剩 6 萬元，活動完全取消公司將虧損 2 萬元。已知本週六、日兩天空氣品質 PM 2.5 為「紫爆」的機率皆為 p，則此行銷公司辦理週末路跑活動獲利的期望值為何？(單位：萬元)

(1) $-8p^2-4p+10$

(2) $-8p^2+20p-2$

(3) $4p^2+4p-10$

(4) $-18p-16$

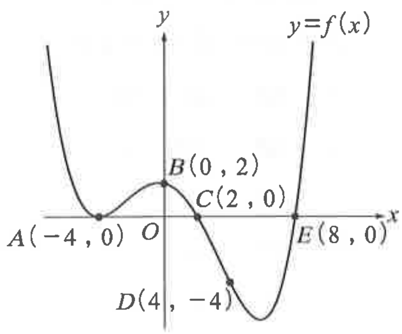
(5) $-6p+10$

二、多選題（占 24 分）

說明：第 5 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 已知 $A(-1,-2,0)$，$B(2,2,1)$，$C(-1,4,3)$，$D(5,6,a)$ 為坐標空間中四點，請選出正確的選項。
(1)若 A，B，C，D 四點共面，則 $a=2$
(2)若四面體 $ABCD$ 的體積為 6，則 $a=4$
(3)若恰有一圓通過 A，B，D 三點，則 $a=3$
(4)若 $\triangle ABD$ 的面積為 10，則 $a=6$
(5)若 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$，則 $a=-50$

6. 已知 $f(x)$ 為四次實係數多項式，且 $y=f(x)$ 的圖形與其通過的五點如右圖所示，請問下列敘述何者正確？
(1)方程式 $f(x)=x$ 有四個相異實根
(2)方程式 $f(x)=1$ 的四根乘積大於 0
(3)不等式 $f(x-1)<0$ 的解為 $1<x<7$
(4)不等式 $f(2x)\geq 0$ 的解為 $x\leq 1$ 或 $x\geq 4$
(5)設 $y=f(x)$ 在 $x=\alpha$ 時有相對極大值，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n=0$



7. 已知函數 $y=f(x)=\sin x+a\cos x$ 的圖形對稱於直線 $x=\dfrac{5\pi}{3}$，其中 a 為實數，試選出正確的選項。

(1) $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2)函數 $y=f(x)$ 的圖形是週期為 2π，振幅為 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 的波狀圖形

(3) $f(x)$ 在 $x=\dfrac{5\pi}{3}$ 時有最大值

(4) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

(5)函數 $y=f(x)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形以 y 軸為基準線，水平方向伸縮 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 倍，並向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 單位得到

三、選填題（占 28 分）

說明：1.第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(8－16)。
2.每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 在所有滿足 $|z-2+i|=1$ 的複數 z 中（$i=\sqrt{-1}$），$|z+1-2i|$ 的最大值為 ⑧$\sqrt{⑨}$＋⑩ 。(化為最簡根式)

B. 某高中辦理班際棒球比賽，一年忠班為了賽前練習，將班上同學分為甲，乙兩隊進行一場友誼賽。比賽過程中出現一個情形：甲隊 3 號球員在一壘板沿西 $30^{\circ}10'$ 北，以 15 公尺／秒的速度跑向距一壘 30 公尺處的二壘，乙隊投手在一壘板南 $60^{\circ}10'$ 西 20 公尺處，他必須要以 ⑪$\sqrt{⑫}$ 公尺／秒的球速將球投向二壘，才能與甲隊 3 號球員同時到達二壘。(不考慮乙隊投手的反應時間)(化為最簡根式)

C. 坐標平面上，已知 $A(2,0)$，$B(0,4)$ 兩點，試求在第一象限中滿足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leq 0$ 之 P 點所形成的區域面積為 ⑬$+\frac{⑭}{⑮}\pi$ 。(化為最簡分數)

D. 已知 $f(x)=3x^2-2x\int_1^2 f(x)dx+1$ 為一實係數多項式，則 $\int_0^1 f(x)dx=$ ⑯ 。

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號(一、二)與子題號((1)、(2)、……)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、在坐標平面上的點序列 (a_1, b_1)，(a_2, b_2)，(a_3, b_3)，……，對所有的 n 為正整數滿足 $(a_{n+1}, b_{n+1})=(\sqrt{3}\,a_n-b_n,\ \sqrt{3}\,b_n+a_n)$。設二階方陣 M 為在坐標平面上定義的線性變換，可將 (a_n, b_n) 映射至 (a_{n+1}, b_{n+1})，則：

(1)試問線性變換矩陣 M 為何？(2 分)

(2)試求矩陣 M 的反矩陣 M^{-1}。(4 分)

(3)若 $(a_{100}, b_{100})=(2^{107}, 2^{108})$，則 a_1+b_1 之值為何？(6 分)

二、已知 $f(x)=x^3-6x$，點 $P(-2, f(-2))$ 在 $y=f(x)$ 的圖形上且直線 L 通過 P 點和 $y=f(x)$ 圖形相切，試求：

(1)直線 L 的方程式。(5 分)

(2)直線 L 與 $y=f(x)$ 圖形所圍成的區域面積。(7 分)

臺北區 106 學年度第二學期

指定科目第二次模擬考試

數學甲參考答案暨詳解

99363415-26

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
答案	(5)	(3)	(4)	(1)	(1)(5)	(2)(4)(5)	(2)(4)		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (5)

　難易度：易

　出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

　目標：能利用一次函數的定義及對數運算性質解決問題

　解析：設 $\log f(x)=ax+b$

　代入 $f(2)=8$，$f(4)=24$ 得 $\begin{cases}\log f(2)=\log 8=2a+b\\ \log f(4)=\log 24=4a+b\end{cases}$

　兩式相減得 $2a=\log 3$，$a=\dfrac{1}{2}\log 3$ 且 $b=2\log 8-\log 24=\log\dfrac{8}{3}$

　綜合以上可知 $\log f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\log 3\right)x+\log\dfrac{8}{3}$

　故 $\log f(6)=\left(\dfrac{1}{2}\log 3\right)\times 6+\log\dfrac{8}{3}=3\log 3+\log\dfrac{8}{3}=\log 72$

　所求 $f(6)=72$，故選(5)。

2. (3)

　難易度：易

　出處：第二冊第三章〈機率〉

　目標：能利用古典機率的定義及性質解決應用問題

　解析：甲、乙袋中均有 $1+2+3+\cdots\cdots+9=45$ 個球

　所以 $P(k)=\dfrac{k}{45}\times\dfrac{(10-k)}{45}=\dfrac{-k^2+10k}{2025}=\dfrac{-(k-5)^2+25}{2025}$

　當 $k=5$ 時，機率有最大值為 $P(5)=\dfrac{25}{2025}=\dfrac{1}{81}$，故選(3)。

3. (4)

　難易度：中

　出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第三冊第一章〈三角〉

　目標：能利用三角函數觀念解決斜率問題

　解析：由題圖可知，$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$

　則所求直線之斜率為 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-\dfrac{24}{7}$

　已知所求直線通過 $A(3,4)$，故直線方程式為 $y-4=-\dfrac{24}{7}(x-3)\Rightarrow 24x+7y=100$

　故選(4)。

4. (1)

　難易度：易

　出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

　目標：能利用期望值概念解決生活問題

　解析：由題目敘述可分為以下三種情形：

　(i)週六如期舉行，機率為 $(1-p)$，獲利 10 萬元

　(ii)週六取消，延至週日舉行，機率為 $p(1-p)$，獲利 6 萬元

　(iii)活動完全取消，機率為 p^2，損失 2 萬元

　故此行銷公司辦理週末路跑活動獲利的期望值為 $(1-p)\times 10+p(1-p)\times 6+p^2\times(-2)=-8p^2-4p+10$(萬元)

　故選(1)。

二、多選題

5. (1)(5)

難易度：易

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：可以釐清空間中向量的關係

解析：(1)○：$\overrightarrow{AB}=(3,4,1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,6,3)$，$\overrightarrow{AD}=(6,8,a)$

因為 A，B，C，D 四點共面，則 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & a \end{vmatrix}=18a-36=0\Rightarrow a=2$

(2)╳：$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & a \end{vmatrix}=18a-36$，則四面體體積為 $\frac{1}{6}|18a-36|=6\Rightarrow a=0$ 或 4

(3)╳：若 A，B，D 三點不共線，則恰有一圓通過 A，B，D 三點

$\overrightarrow{AB}=(3,4,1)$，$\overrightarrow{AD}=(6,8,a)$，$\frac{3}{6}=\frac{4}{8}\neq\frac{1}{a}\Rightarrow a\neq 2$

(4)╳：$\triangle ABD=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{2}\sqrt{(4a-8)^2+(6-3a)^2+0^2}=\frac{1}{2}|5a-10|=10\Rightarrow a=-2$ 或 6

(5)○：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=50+a=0\Rightarrow a=-50$

故選(1)(5)。

6. (2)(4)(5)

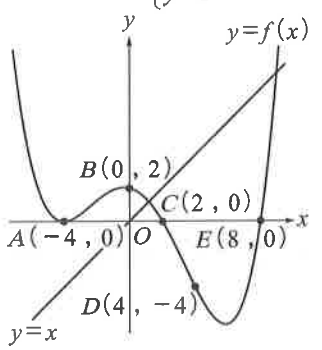
難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉

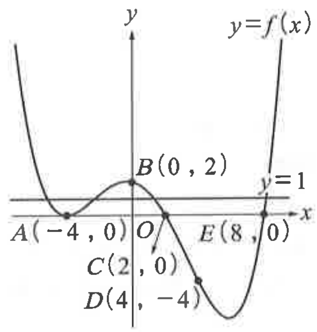
目標：能解決多項式方程式、不等式和函數極限值的問題

解析：(1)╳：由圖(一)可知 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=x \end{cases}$ 恰有兩解，故 $f(x)=x$ 有兩個相異實根

(2)○：由圖(二)可知 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=1 \end{cases}$ 恰有兩負根及兩正根，故 $f(x)=1$ 的四根乘積大於 0



圖(一)



圖(二)

(3)╳：可假設四次實係數多項式 $f(x)=(x+4)(x-2)(x-8)(ax+b)$

由於 $y=f(x)$ 通過 $(0,2)$ 和 $(4,-4)$，代入 $f(x)$ 可得 $\begin{cases} 64b=2 \\ -256a-64b=-4 \end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{128}$，$b=\frac{1}{32}$

則四次實係數多項式 $f(x)=\frac{1}{128}(x+4)^2(x-2)(x-8)$

故 $f(x-1)=\frac{1}{128}(x+3)^2(x-3)(x-9)<0\Rightarrow 3<x<9$

(4)○：$f(2x)=\frac{1}{128}(2x+4)^2(2x-2)(2x-8)\geq 0\Rightarrow x\leq 1$ 或 $x\geq 4$

(5)○：$f'(x)=\frac{1}{64}(x+4)(2x^2-11x-4)$

當 $f'(x)=0\Rightarrow x=-4$ 或 $\frac{11\pm\sqrt{153}}{4}$

則 $\alpha=\frac{11-\sqrt{153}}{4}$ 時 $y=f(x)$ 有相對極大值　$\because -1<\alpha<1$　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n=0$

故選(2)(4)(5)。

7. (2)(4)

難易度：中

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：能理解三角函數圖形與函數間的關係

解析：(1)╳：因為直線 $x=\dfrac{5\pi}{3}$ 通過圖形的最高點或最低點

所以 $\sin\dfrac{5\pi}{3}+a\cos\dfrac{5\pi}{3}=\pm\sqrt{1+a^2}$

$\Rightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}a=\pm\sqrt{1+a^2}$

兩邊平方得 $\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+\dfrac{1}{4}a^2=1+a^2$

即 $3a^2+2\sqrt{3}\,a+1=0\Rightarrow(\sqrt{3}\,a+1)^2=0$

解得 $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2)○：$y=f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，則 $y=f(x)$ 的週期為 2π，振幅為 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(3)╳：$\because f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{3\pi}{2}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore f(x)$ 在 $x=\dfrac{5\pi}{3}$ 時有最小值

(4)○：$\because 0<\dfrac{1}{2}<\dfrac{\pi}{6}\quad \therefore f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

(5)╳：函數 $y=f(x)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形以 x 軸為基準線，鉛直方向伸縮 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 倍，並向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 單位得到

故選(2)(4)。

三、選填題

A. $3\sqrt{2}+1$

難易度：易

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：能解決複數平面的幾何問題

解析：設 $z=x+yi$，x，$y\in R$，得 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$

就幾何意義來說：所有滿足方程式的點 $P(z)$ 所成的圖形為以點 $(2,-1)$ 為圓心，半徑為 1 的圓

而 $|z+1-2i|$ 表點 $(-1,2)$ 與圓上點 $P(z)$ 的距離

故 $|z+1-2i|$ 的最大值為 $3\sqrt{2}+1$。

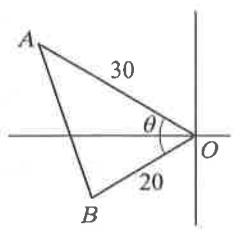
B. $5\sqrt{7}$

難易度：易

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：能利用三角函數觀念解決生活應用問題

解析：設二壘為點 A，一壘為點 O，投手在點 B，$\angle AOB=\theta$



所以 3 號球員需花 2 秒到達二壘

且 $\theta=30^\circ10'+90^\circ-60^\circ10'=60^\circ$

故 $\overline{AB}^2=20^2+30^2-2\times20\times30\times\cos60^\circ$

$=400+900-2\times20\times30\times\dfrac{1}{2}$

$=700$

$\Rightarrow\overline{AB}=10\sqrt{7}$

故投手的球速為 $\dfrac{10\sqrt{7}}{2}=5\sqrt{7}$ (公尺 / 秒)。

C. $4+\dfrac{5\pi}{2}$

難易度：易

出處：第三冊第二章〈圓與直線〉、第三冊第三章〈平面向量〉

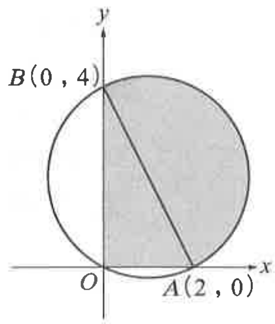
目標：能利用向量內積定義並應用圓的方程式

解析：設 P 點坐標為(x,y)，則 $\overrightarrow{PA}=(2-x,\ -y)$，$\overrightarrow{PB}=(-x,4-y)$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 0\Rightarrow(2-x,\ -y)\cdot(-x,4-y)\le 0$$
$$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4\le 1+4$$
$$\Rightarrow(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$$

P 點所形成的區域如右圖所示，所求面積即為陰影區域面積

故所求面積為 $\dfrac{1}{2}\times4\times2+\dfrac{1}{2}\times5\pi=4+\dfrac{5\pi}{2}$。



D. 0

難易度：易

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：能理解多項式函數的積分運算

解析：令 $\int_1^2 f(x)dx=k\quad\therefore f(x)=3x^2-2kx+1$

$$\int_1^2(3x^2-2kx+1)\,dx=k\Rightarrow(x^3-kx^2+x)\Big|_1^2=k\Rightarrow(8-4k+2)-(1-k+1)=k\Rightarrow k=2$$

$\therefore f(x)=3x^2-4x+1$

故 $\int_0^1 f(x)dx=(x^3-2x^2+x)\Big|_0^1=1-2+1=0$。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$；(2) $\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{1}{4}\\ -\dfrac{1}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4}\end{bmatrix}$；(3) 256

難易度：難

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：了解線性變換的意義

解析：(1)可將關係式寫成矩陣形式

$$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}a_n-b_n\\ a_n+\sqrt{3}b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}\Rightarrow M=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}。$$

(2) $M^{-1}=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{1}{4}\\ -\dfrac{1}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4}\end{bmatrix}$。

(3) $\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}$

且 $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\cos330^\circ & -\sin330^\circ\\ \sin330^\circ & \cos330^\circ\end{bmatrix}$

故 $\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{99}\begin{bmatrix}\cos(330^\circ\times99) & -\sin(330^\circ\times99)\\ \sin(330^\circ\times99) & \cos(330^\circ\times99)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{107}\\ 2^{108}\end{bmatrix}$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{99}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{107}\\ 2^{108}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{108}\times\dfrac{1}{2^{99}}\\ -2^{107}\times\dfrac{1}{2^{99}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}512\\ -256\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow a_1+b_1=512+(-256)=256$。

二、(1) $y=6x+16$；(2) 108

難易度：易

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：能利用多項式函數的積分求面積

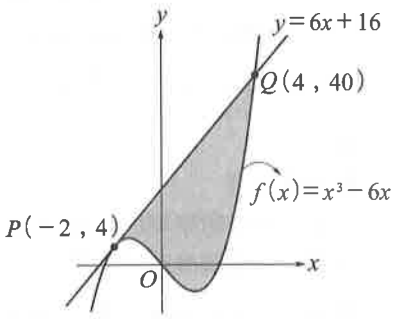
解析：(1) $f(x)=x^3-6x \Rightarrow f(-2)=4$

$f'(x)=3x^2-6 \Rightarrow$ 切線斜率 $m=f'(-2)=6$

則切線 L 之方程式為 $y-4=6(x+2) \Rightarrow y=6x+16$。

(2)解 $\begin{cases} y=x^3-6x \\ y=6x+16 \end{cases}$ 得交點 $(-2,4)$，$(4,40)$

令 Q 點坐標為 $(4,40)$，作圖如右



所求面積為 $\int_{-2}^{4}[(6x+16)-(x^3-6x)]\,dx$

$=\int_{-2}^{4}(-x^3+12x+16)\,dx$

$=\left(-\frac{x^4}{4}+6x^2+16x\right)\Big|_{-2}^{4}$

$=\left(-\frac{256}{4}+96+64\right)-\left(-\frac{16}{4}+24-32\right)=108$。

非選擇題批改原則

一、(1) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$；(2) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$；(3) 256

難易度：難

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：了解線性變換的意義

解析：(1)可將關係式寫成矩陣形式

$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{3}a_n-b_n \\ a_n+\sqrt{3}b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow M=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$。 (2 分)

(2) $M^{-1}=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$。 (4 分)

(3) $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$

且 $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos 330^\circ & -\sin 330^\circ \\ \sin 330^\circ & \cos 330^\circ \end{bmatrix}$ (2 分)

故 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^{99}\begin{bmatrix} \cos(330^\circ\times 99) & -\sin(330^\circ\times 99) \\ \sin(330^\circ\times 99) & \cos(330^\circ\times 99) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{107} \\ 2^{108} \end{bmatrix}$ (2 分)

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{99}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{107} \\ 2^{108} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2^{108}\times\frac{1}{2^{99}} \\ -2^{107}\times\frac{1}{2^{99}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 512 \\ -256 \end{bmatrix}$ (1 分)

$\Rightarrow a_1+b_1=512+(-256)=256$。 (1 分)

二、(1) $y=6x+16$；(2) 108

難易度：易

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：能利用多項式函數的積分求面積

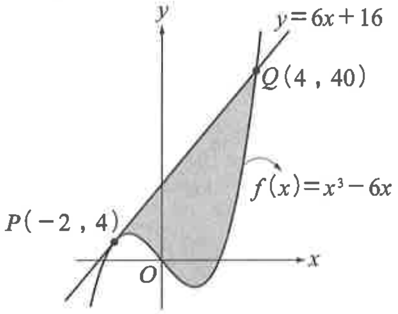
解析：(1) $f(x)=x^3-6x \Rightarrow f(-2)=4$　(1 分)

$f'(x)=3x^2-6 \Rightarrow$ 切線斜率 $m=f'(-2)=6$　(2 分)

則切線 L 之方程式為 $y-4=6(x+2) \Rightarrow y=6x+16$。　(2 分)

(2)解 $\begin{cases} y=x^3-6x \\ y=6x+16 \end{cases}$ 得交點 $(-2,4)$，$(4,40)$　(2 分)

令 Q 點坐標為 $(4,40)$，作圖如下



所求面積為 $\int_{-2}^{4}[(6x+16)-(x^3-6x)]\,dx=\int_{-2}^{4}(-x^3+12x+16)\,dx$　(2 分)

$=\left(-\dfrac{x^4}{4}+6x^2+16x\right)\Bigg|_{-2}^{4}$

$=\left(-\dfrac{256}{4}+96+64\right)-\left(-\dfrac{16}{4}+24-32\right)=108$。　(3 分)