

數學甲

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設平面上三點 $A(-1, -2)$ 、 $B(-2, 3)$ 、 $C(2, 0)$ ，若線段 \overline{AB} 與線段 \overline{AC} 在直線 $L: y = mx$ 上的投影長相等，則 m 的值為何？
 - (1) 2
 - (2) $\frac{1}{2}$
 - (3) $-\frac{3}{4}$
 - (4) $\frac{4}{3}$
 - (5) $\frac{3}{4}$

2. 同時丟擲三顆公正的骰子，若擲出的三個點數會形成「鈍角三角形」三個邊長的機率為 p 。關於 p 值的範圍，試選出正確的選項。
 - (1) $p < \frac{1}{8}$
 - (2) $\frac{1}{8} \leq p < \frac{1}{7}$
 - (3) $\frac{1}{7} \leq p < \frac{1}{6}$
 - (4) $\frac{1}{6} \leq p < \frac{1}{5}$
 - (5) $\frac{1}{5} \leq p < \frac{1}{4}$

3. 一矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 - \log_a b & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ ，其中 $\log_a b$ 有意義，則下列敘述何者可能發生？

- (1) 此矩陣沒有乘法反矩陣
- (2) 此矩陣可表示為繞原點旋轉一個有向角 θ 的旋轉矩陣
- (3) 此矩陣可表示為對一條過原點且傾斜角為 θ 的對稱軸對稱的鏡射矩陣
- (4) 此矩陣可表示為以原點為中心伸縮 r 倍的伸縮矩陣，其中 $r \in \mathbb{R}$
- (5) $\det(A) = -2$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 在坐標平面上，給定一直線 $L: y=k$ (k 為實數) 和兩方程式 $\Gamma_1: y=2^{|x|}$ 、 $\Gamma_2: y=\log_2 |x|$ 的圖形。試選出正確的選項。

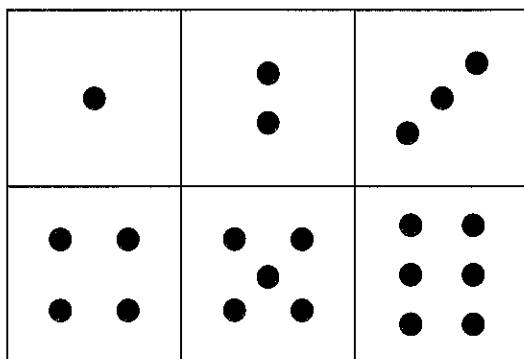
- (1) Γ_1 的圖形對稱 y 軸
- (2) Γ_1 和 Γ_2 的圖形對稱直線 $y=x$
- (3) 當 L 和 Γ_1 相交於兩點，且兩點的距離為 5，則 k 小於 6
- (4) 當 $k=\frac{3}{2}$ 時， L 和 Γ_2 的兩個交點的距離小於 6
- (5) 設 P 、 Q 分別為 Γ_1 、 Γ_2 上的動點，則 \overline{PQ} 距離的最小值為 $\sqrt{2}$

5. 已知 a, b 為實數，試問有關極限 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2 - (2a+b)x + 2b}{x-3}$ 的敘述下列何者正確？

- (1) 若 $a=0$ 且 $b=0$ ，則極限存在
- (2) 若極限不存在，則 $a=0$
- (3) 若極限存在，則 $3b=a$
- (4) 若極限存在，則極限值為 a
- (5) 若極限存在且 $f(x) = \frac{ax^2 - (2a+b)x + 2b}{x-3}$ ，則 $f(x)$ 在 $x=2$ 的切線斜率為 a

6. 每逢過年時間，亮亮最期待的事就是在領完壓歲錢後，阿公總會呼喚叔叔伯伯們一起上桌，玩一種骰子遊戲。遊戲規則為：

- a. 在一張海報紙上畫上六格，依序畫上骰子的六種點數。
- b. 莊家在骰盅裡放入三顆骰子，玩家則在海報紙上的六格中隨意放入投注金額。
- c. 三顆骰子搖出幾個玩家投注的點數，則玩家除了投注金額可以保留之外，還可得到幾倍的獎勵；若是搖出的骰子沒有出現投注的點數，則莊家把投注的金額收走。



例如，亮亮在一點放下 20 元，莊家搖出了 1，1，4，這三個點數，則亮亮就拿回自己的 20 元，並且莊家會再給亮亮 40 元；若是莊家搖出 2，3，4，則亮亮投注的 20 元就會被收走，以此類推。亮亮每局會在某一格中放下 20 元，在亮亮玩了幾局之後，發現叔叔每次下注都不是只下一格，而是會在一局中在不同的兩格中放下 10 元。這時亮亮想到學校教的機率與期望值，就在旁邊算了幾種情形得到幾個結論，試選出正確的選項？

- (1) 三顆骰子搖出點數為 1，1，4 這種情形的機率為 $\frac{1}{72}$
- (2) 若以亮亮一次下一格，每格下 20 元的下法，則亮亮一次可以賺 20 元的機率為 $\frac{1}{36}$
- (3) 若以亮亮一次下一格，每格下 20 元的下法，期望值算出來小於 -1 元
- (4) 若以叔叔一次下不同兩格，每格下 10 元的下法，則叔叔一次可以賺 20 元的機率為 $\frac{1}{9}$
- (5) 若以叔叔一次下不同兩格，每格下 10 元的下法，則期望值與亮亮一次下一格，每格下 20 元的下法的期望值相同

7. 有一圓其圓心為 O ，且直徑 \overline{AB} 為 10 單位。已知 C 點、 D 點皆在 \overline{AB} 上，且分別距離 A 點、 B 點皆 4 單位，又 P 點為圓周上任一點。試選出正確選項。

- (1) $|\overline{PC} - \overline{PD}|$ 的最大值為 2
- (2) $\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 52$
- (3) $\overline{PC} + \overline{PD}$ 的最大值為 $2\sqrt{26}$
- (4) $\overline{PC} + \overline{PD}$ 的最小值為 10
- (5) 當 $\overline{PC} + \overline{PD}$ 有最小值時， $\triangle PCD$ 是直角三角形

8. 已知集合 $Z = \{z \mid |z-1|=1, z \text{ 是複數}\}$ 及集合 $W = \{w \mid w=iz, z \in Z\}$ ， $i = \sqrt{-1}$ ，針對集合 Z 和集合 W 中的所有複數 z 和 w ，請問下列哪些選項正確？

- (1) 複數 z 在複數平面上所形成的圖形是一圓
- (2) 複數 z 和複數 w 在複數平面上，其圖形交集所圍成的區域面積大於 $\frac{1}{2}$
- (3) $|z-w|$ 的最大值是 $2\sqrt{2}$
- (4) $|z+w|$ 的最大值是 $2\sqrt{2}$
- (5) 當 z, w 為非零複數，且 $|z-w|=|z+w|$ ，則 $\frac{w}{z}$ 的主幅角為 $\frac{\pi}{2}$

三、選填題（占 18 分）

說明：1. 第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(9—18)。
2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 坐標空間中，平面 $E: x+y+z=4$ 為一面鏡子，一道光線經過點 $A(2, 3, 5)$ 入射至平面 E 反

射，而反射線通過點 $B(3, -2, 6)$ ，若入射線與反射線的夾角為 θ ，則 $\sin \theta = \frac{\textcircled{9}\textcircled{10}\sqrt{\textcircled{11}}}{\textcircled{12}\textcircled{13}}$ 。

(化為最簡根式)

B. 有甲、乙兩個袋子，甲袋內裝有 1 個紅球 2 個白球，乙袋內裝有 2 個白球，每一個袋子內的每一顆球被取到的機會都相同。同時從甲、乙兩個袋子中各取一個球交換，這樣稱為一次操作，令第 n 次操作後紅球在甲袋中的機率為 p_n ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}}$ 。(化為最簡分數)

C. 有一正三角形 ABC 木板，邊長為 6，以 \overline{AB} 邊斜靠在牆壁上，牆角為 O 點，形成一個直角三角形 OAB ， $\angle AOB = 90^\circ$ ， A 點在地面上， B 點在牆上，以 B 點作與地面平行之直線交

\overline{AC} 於 D 點，已知 $\overline{CD} = 2$ ，試求 $\cos \angle BAO = \frac{\textcircled{16}\sqrt{\textcircled{17}}}{\textcircled{18}}$ 。(化為最簡根式)

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、已知稜長為 6 的正四面體 $OABC$ 中，頂點 A 在平面 $\triangle OBC$ 的投影點為 M ；頂點 B 在平面 $\triangle OCA$ 的投影點為 N ；頂點 C 在平面 $\triangle OAB$ 的投影點為 H ，試求：

(1) \overline{MN} 。(3 分)

(2) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}$ 。(4 分)

(3) 四面體 $OMNH$ 的體積。(5 分)

二、(1) 在坐標平面上，已知函數 $y=x^4-x^3-3x^2+3x$ 的圖形和直線 $L: y=mx-m$ 有 4 個相異交點，求實數 m 的範圍。(6 分)

(2) 若 $m>0$ 且函數 $y=x^4-x^3-3x^2+3x$ 的圖形和直線 $L: y=mx-m$ 相切，求此時 $y=x^4-x^3-3x^2+3x$ 的圖形和直線 L 所圍成的區域面積為何？(6 分)