臺北區 103 學年度第二學期
指定科目第二次模擬考試試題

數學甲

－作答注意事項－

考試時間：80 分鐘

作答方式：• 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。

• 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。

• 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。

• 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、單選題(占 24 分)

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $\overline{AB}=2$，以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓上有動點 P，記 $\overline{AB}$ 的中點為 O，$\angle PAO=\theta$。從點 B 向直線 $\overleftrightarrow{OP}$ 做垂線，垂足記為 M，且 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，ΔOBM 的面積記為 S_1，ΔABP 的面積記為 S_2，則下列何者<u>錯誤</u>？

   (1) $\overline{BM}=\sin\theta$
   (2) $\overline{OM}=\cos 2\theta$
   (3) $S_1=\frac{1}{4}\sin 4\theta$
   (4) $S_2=\sin 2\theta$
   (5) ΔOBP 面積 $=\Delta AOP$ 面積

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$ 的極限值為：

   (1) 不存在
   (2) 0
   (3) 1
   (4) 2
   (5) 3

3. 某雜貨店爲歡慶周年慶舉辨「憑運氣，得金幣」活動，活動於周年慶期間每天中午十二點舉行。活動採現場報名，每天只有五個名額，以報名順序當作參加者進行順序。活動辦法如下：排在第 n 個的參加者可以投擲一公正的硬幣 n 次，若投擲結果正面次數不小於 $\frac{n}{2}$，則可得金幣一枚。請問參加者應排在第幾個得到金幣的機率最大？

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

(5) 5

4. 各公司業務員的獎金會跟他的成交業績相關，假設某公司有三種產品，公司給業務員的獎金制度爲產品成交金額的百分之五。甲業務員在公司往年的成交比率如下表：

產品	價格	成交	交易失敗
A	100 萬	60%	40%
B	120 萬	30%	70%
C	150 萬	10%	90%

若今天甲業務員接待了一個客戶，此客戶想要購買一個產品，且他挑選各產品的機會均等。請問甲業務員的獎金期望值爲多少？

(1) 37 萬元

(2) 5.55 萬元

(3) 4.32 萬元

(4) 1.85 萬元

(5) 1.44 萬元

二、多選題（占40分）

說明：第5題至第9題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得8分；答錯1個選項者，得4.8分；答錯2個選項者，得1.6分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 下列各聯立方程式皆代表空間中三平面的關係，請問哪些選項可將空間恰好分割成6塊區域？

(1) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 2x-3y+z=1 \\ 3x-y-z=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x-y+2z=5 \\ 6x-2y+4z=10 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ 2x+y+z=7 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+5z=2 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ x+3y+7z=3 \end{cases}$

6. 已知兩方程式 Γ：$x^2+y^2+2mx-my+m-1=0$，L：$2x-y+1=0$，則下列敘述哪些正確？

(1) 不論 m 爲任何實數，方程式 Γ 的圖形恆爲一圓

(2) 圖形 Γ 的最小面積爲 $\frac{16}{5}\pi$

(3) 不論 m 爲任何實數，方程式 Γ 與 L 的圖形恆有兩個交點

(4) 不論 m 爲任何實數，方程式 L 的圖形被方程式 Γ 的圖形所截出的線段爲一定值

(5) 存在實數 m，使得圖形 L 爲圖形 Γ 的切線

7. 設$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$是空間中三個不共平面的非零向量，則下列敘述哪些正確？

(1) $\vec{a}$在$\vec{a}\times\vec{b}$上的正射影為$\vec{0}$

(2) 當$\vec{a}//\vec{b}$時，$\vec{a}\cdot\vec{b}$有最大值

(3) $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

(4) 若$|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|\neq 0$，則$\vec{a}\perp\vec{c}$且$\vec{b}\perp\vec{c}$

(5) $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$之最大值發生在$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$三向量兩兩互相垂直時

8. $f(x)$及$g(x)$為實係數多項式，則下列敘述哪些正確？

(1) $f(x)g(x)$的係數和$=f(1)g(1)$

(2) 已知$f(g(x))=0$至少有一實根，則$f(x)$與$g(x)$的次數均不可為偶數

(3) 對任何複數形如$a+bi$，a、b是實數，$f(g(a+bi))+f(g(a-bi))$必為實數

(4) 已知$f(x)$除以(x^2+x+1)之餘式為$ax+b$，$g(x)$除以(x^2+x+1)之餘式為$bx+a$，a、b是實數，則$f(x)g(x)$除以(x^2+x+1)之餘式不一定為一次式

(5) 已知$F(x)=f(x)g(x)$，$G(x)=[f(x)]^2+[g(x)]^2$，若$F(a)F(b)<0$，則$G(x)=0$在a與b之間至少有一實根

9. 下列有關方程式根的敘述哪些正確？
(1) 方程式 $\sin x+\cos x=1$，在 $0\le x\le 2\pi$ 之間有兩個實根
(2) 方程式 $\sin x=\dfrac{x}{10\pi}$ 所有實根的和為 0
(3) 方程式 $\tan x+\cot x=1$，有無窮多個實根
(4) 方程式 $\tan x=x$ 有無窮多個正根，由小到大為 $x_1, x_2, x_3, \cdots$，則 $x_{104}-x_{103}>\pi$
(5) 方程式 $\sec x+\csc x=0$，在 $-2\pi<x<2\pi$ 之間有兩個實根

三、選填題（占 12 分）

說明：1. 第 A 題與第 B 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(10～14)。
2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 直線 L 的斜率為 2，且與 Γ_1：$y=\log_2 x$ 的圖形相交於 A 點，與 Γ_2：$y=\log_4 x$ 的圖形相交於 B 點，若線段 $\overline{AB}$ 的長度為 $\sqrt{5}$，且 A、B 兩點均在第一象限，則 A 點的 x 坐標為 ⑩+⑪$\sqrt{⑫}$ 。

B. 複數平面上三點 P、Q、R 對應三個複數 Z_1、Z_2、Z_3，且 $|Z_1|=\sqrt{2}$，$|Z_2|=\sqrt{5}$，$|Z_3|=3$，若原點 O 為 ΔPQR 的重心，則 $\overline{Z_2}\cdot Z_3$ 的實部為 ⑬⑭ 。

－－－－－－－以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷－－－－－－

第貳部分：非選擇題(占24分)

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、設函數 $f(x)$ 滿足 $\int_2^x f(t)dt = 2x^3 - 6x + a - 1$

(1) 求 a 之值。(4分)

(2) 求函數 $f(x)$。(4分)

(3) 求由 $y = f(x)$ 與 x 軸所圍成的區域繞 x 軸旋轉所得之立體體積。(4分)

二、(1) 若複數平面上，$A(x, y)$ 所對應的複數為 $z = x + yi$，對於正整數 m，若 $(x+yi)(1+\sqrt{3}i)^m = r(x+yi)$，其中 r 為正實數，求正整數 m 的最小值。(4分)

(2) 對於正整數 n，設 $(1+\sqrt{3}i)^n = a_n + ib_n$，其中 $i = \sqrt{-1}$ 且 a_n、b_n 為實數，恆等式 $(1+\sqrt{3}i)^{n+1} = (1+\sqrt{3}i)^n \times (1+\sqrt{3}i)$ 可推得 a_n、b_n 會滿足乘法矩陣 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，試求矩陣 T。(3分)

(3) 承題(2)，若矩陣 T 在平面上定義成線性變換，將矩陣 T 寫成以下兩個矩陣相乘：$T = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，其中 k 為正實數、$0° \le \theta < 360°$，求 k 和 θ。(5分)