臺北區 107 學年度第二學期
指定科目第一次模擬考試

數學甲

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全、選修數學甲(上)

考試時間：80 分鐘

作答方式：
- 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液(帶)。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\underset{\square}{3}$ 與第 19 列的 $\underset{\square}{8}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\underset{\square}{-}$ 與第 21 列的 $\underset{\square}{7}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

祝考試順利

99363303-27

107-B3

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $0<\theta<\pi$，若 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}24 \\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15 \\ 20\end{bmatrix}$，關於 θ 值，請選出正確的選項。

   (1) $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$
   (2) $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2\pi}{3}$
   (3) $\frac{2\pi}{3}<\theta<\frac{3\pi}{4}$
   (4) $\frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{6}$
   (5) $\frac{5\pi}{6}<\theta<\pi$

2. 關於方程式 $5\sqrt{3}\sin x+5\cos x=x$ 的實根個數，請選出正確的選項。

   (1) 9
   (2) 8
   (3) 7
   (4) 6
   (5) 5

3. 設 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 是兩個相異的非零向量，已知 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\neq 0$，請問下列選項中哪一個條件會使得「對於任意的實數 t，$|\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}|\geq|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$ 恆成立」？

(1) $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$

(2) $\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$

(3) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$

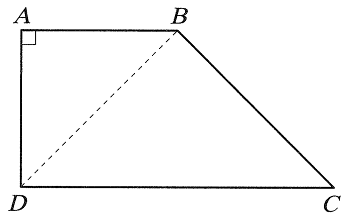
(4) $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$

(5) $\overrightarrow{b}\perp(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$

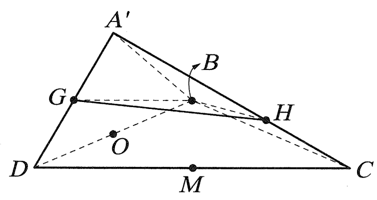
二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 如圖㈠，梯形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，$\angle BAD=90^\circ$，且 $\overline{AB}=\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{CD}$。如圖㈡，將 $\triangle ABD$ 沿 $\overline{BD}$ 折起，使得平面 $A'BD$ 垂直平面 BCD。設 O 為 $\overline{BD}$ 的中點，G 為 $\overline{A'D}$ 的中點，M 為 $\overline{CD}$ 的中點，點 H 在 $\overline{A'C}$ 上，且滿足 $\overline{A'H}=2\overline{HC}$。請選出正確的選項。



圖㈠



圖㈡

(1) $\overline{A'O}$ 垂直平面 BCD

(2) $\overline{OM}$ 垂直平面 $A'BD$

(3) $\overline{OM}$ 平行平面 BGH

(4) $\overline{DC}$ 平行平面 BGH

(5)可在 $\overline{BC}$ 上找到一點 E，使得 $\overline{DE}$ 平行平面 BGH

5. 設 x，y 為實數，關於下列選項中的敘述，請選出正確的選項。

(1)若函數 $y=f(x+2)$ 的圖形過點 $(-1, 3)$，則函數 $y=f(x)$ 的圖形關於 y 軸對稱的圖形一定過點 $(-1, 3)$

(2)在同一坐標系中，兩函數 $y=f(x-2)$ 與 $y=f(-x+2)$ 的圖形對稱於直線 $x=2$

(3)滿足條件 $f(x+2)+f(2-x)=4$ 的函數 $y=f(x)$ 的圖形對稱於點 $(2, 2)$

(4)若 $f(x)=x^2-3x+2$，則方程式 $f(f(x))=0$ 有四個相異的實根

(5)若方程式 $f(f(x))=x$ 有實根，則方程式 $f(x)=x$ 也有實根

6. 阿忠身上有 1 枚硬幣，但不知其真偽，經過捷運站時阿忠想將此枚硬幣投入悠遊卡加值機加值以減輕口袋重量，假設每次加值成功與否不互相影響，且加值失敗則退還原硬幣。若此硬幣是偽幣的機率為 $\frac{1}{8}$ ，真幣的機率為 $\frac{7}{8}$ ；而偽幣投入加值機後加值成功的機率為 $\frac{1}{10}$ ，真幣投入加值機後加值成功的機率為 $\frac{9}{10}$ ，請選出正確的選項。

(1)阿忠投幣 1 次就加值成功的機率為 0.8

(2)阿忠投幣 2 次才加值成功的機率為 0.16

(3)阿忠需投幣 3 次(含)以上才能將此硬幣加值成功的機率為 0.04

(4)若阿忠投幣 1 次就加值成功，則此硬幣是真幣的機率大於 0.95

(5)若阿忠投幣 2 次都加值失敗，則此硬幣是偽幣的機率大於 0.95

7. 在空間中，設四個相異的非零向量 $\overrightarrow{v}$ ，$\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b}$ ，$\overrightarrow{c}$ ，且任三個向量皆不共平面，請選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}$ 必不相等

(2) $|\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})|^2=|\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})|^2=|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2$

(3) $\overrightarrow{v}$ 在 $\overrightarrow{c}$ 上的正射影長為 $\dfrac{|\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{c}|}{|\overrightarrow{c}|}$

(4)若 $\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b}$ ，$\overrightarrow{c}$ 兩兩垂直，則 $|\overrightarrow{v}|^2=\left(\dfrac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}\right)^2+\left(\dfrac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}\right)^2+\left(\dfrac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|}\right)^2$

(5)若 $|\overrightarrow{v}|^2=\left(\dfrac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}\right)^2+\left(\dfrac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}\right)^2+\left(\dfrac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|}\right)^2$ ，則 $\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b}$ ，$\overrightarrow{c}$ 兩兩垂直

8. 空間坐標中，在 xy 平面上有一圓 C，已知其圓心為 $O(0,0,0)$且半徑為 1，設直線 L 為過圓 C 上一點 $P(\cos\theta,\sin\theta,0)$的切線，其中 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 。另有一平面 E：$6x+3y+2z=0$，請選出正確的選項。

(1)切線 L 的方程式為 $(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$

(2)切線 L 與 x、y 軸所圍成的三角形面積最小值是 1

(3)當 $\tan\theta=2$ 時，切線 L 與平面 E 平行

(4)當切線 L 與平面 E 平行時，切線 L 與平面 E 的距離為 $\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$

(5)必存在切線 L 與平面 E 垂直

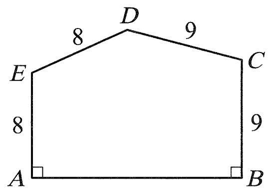
三、選填題（占 18 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(9－15)。 2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 已知實數 a，b 且 3×1 階的矩陣 E 滿足 $\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}+E$ 與 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}\cdot E=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，則數對 $(a\,,b)=$ ___(⑨ , ⑩⑪)___ 。

B. 設 z 為複數，若 z 為方程式 $x^5+x^4+1=0$ 的根，則滿足 $|z|=1$ 的所有根之和為 ___⑫⑬___ 。

C. 如右圖，在五邊形 $ABCDE$ 中，已知 $\overline{AE}=\overline{ED}=8$，$\overline{BC}=\overline{CD}=9$，$\angle A=\angle B=90^\circ$，則 $\triangle ABD$ 之外接圓半徑為 ___$⑭\sqrt{⑮}$___ 。(化為最簡根式)



第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、數字狂利用電腦算出 3^{1000} 的每一位數字如下(共 7 列數字，前 6 列的每一列皆有 70 個數字)，

1322070819480806636890455259752144365965422032752148167664920368226828
5973467048995407783138506080619639097776968725823559509545821006189118
6534272525795367402762022519832080387801477422896484127439040011758861
8041128947815623094438061566173054086674490506178125480344405547054397
0388958174653682549161362208302685637785822902284163983078878969185564
0408489893760937324217184635993869551676501894058810906042608967143886
4102814350385648747165832010614366132173102768902855220001

試回答下列問題：

(1) 請利用以上結果證明 $0.477 < \log 3 < 0.478$。(4 分)

(2) 某日數字狂想要測試新電腦的性能，要電腦算出 3 的 100000 次方並列印在 A4 紙上，若一張 A4 紙的兩面恰好可印 1000 個數字，那數字狂最少要用幾張 A4 紙才夠列印 3 的 100000 次方的每一位數字？(6 分)

二、某夜市的遊戲攤位，其遊戲規則如下：遊戲箱子內有 1 號、2 號、3 號、……、16 號球各一顆。假設每球被抽到的機會均等，由箱中任抽兩球，若兩球的號碼在右邊的看板上同行或同列，則可以得到球號相對應的金額獎金，否則沒有獎金。例如：若抽到在同一行的 2 號球與 6 號球，則可得 $2+6=8$ 元，若抽到 2 號球與 5 號球，則沒有獎金。小樺現參加該遊戲且只玩一次，試問：

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(1) 小樺得 12 元的機率為何？(4 分)

(2) 小樺得 0 元的機率為何？(4 分)

(3) 小樺所得獎金的期望值為何？(6 分)

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
答案	(2)	(3)	(5)	(1)(2)	(1)(2)(3)(4)	(1)(4)	(1)(2)(3)(4)	(2)(4)	

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (2)

難易度：易

出處：第三冊第三章〈平面向量〉、第四冊第三章〈矩陣〉

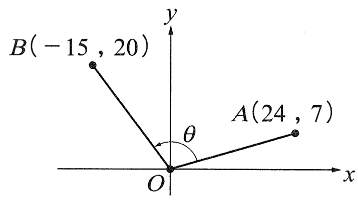
目標：矩陣乘法的幾何性質解讀與向量內積的應用

解析：因為$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$是一個以原點 O 為中心，逆時針旋轉 θ 角的旋轉變換矩陣

所以關於矩陣乘法$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}24\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15\\ 20\end{bmatrix}$的幾何性質是

點 $A(24, 7)$ 以原點 O 為中心，逆時針旋轉 θ 角到點 $B(-15, 20)$

如右圖所示



因此 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$

$=\dfrac{(24, 7)\cdot(-15, 20)}{\sqrt{24^2+7^2}\sqrt{(-15)^2+20^2}}$

$=\dfrac{-220}{625}=\dfrac{-44}{125}$

又因為$-\dfrac{1}{2}<\cos\theta<0$，所以$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$

故選(2)。

〈另解〉

由$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}24\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15\\ 20\end{bmatrix}$可得$\begin{cases}24\cos\theta-7\sin\theta=-15\\ 24\sin\theta+7\cos\theta=20\end{cases}$

解聯立得 $\sin\theta=\dfrac{117}{125}$，$\cos\theta=-\dfrac{44}{125}$

又因為$-\dfrac{1}{2}<\cos\theta<0$，所以$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$

故選(2)。

2. (3)

難易度：易

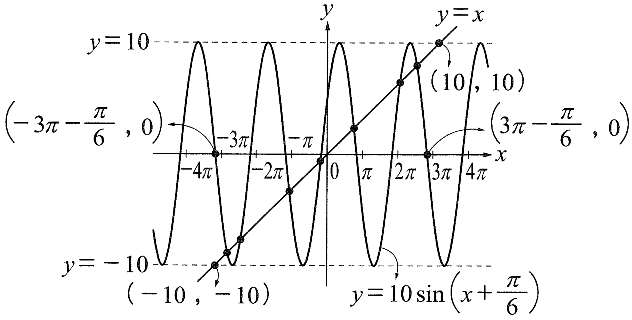
出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：三角函數的圖形

解析：方程式 $5\sqrt{3}\sin x+5\cos x=x$ 的實根個數

即是函數 $y=5\sqrt{3}\sin x+5\cos x=10\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的圖形與直線 $y=x$ 的交點個數

由下圖可知兩圖形有 7 個交點，故選(3)。



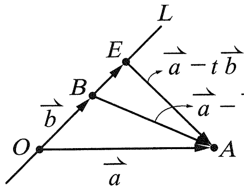
3. (5)

難易度：易

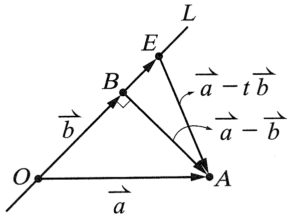
出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量運算的幾何意涵

解析：設 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ ，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ ，$t\vec{b}=\overrightarrow{OE}$ ，其中點 E 是 $\vec{b}$ 所在直線 L 上的動點



圖㈠



圖㈡

可知 $|\vec{a}-t\vec{b}|\geq|\vec{a}-\vec{b}|$ 等價於 $\overline{AE}\geq\overline{AB}$

由圖㈠可知若 $\overline{AB}$ 沒有垂直 L 時，存在實數 t 使得 $\overline{AE}<\overline{AB}$

因此，當 $\overline{AB}\perp L$ 時，$\overline{AE}\geq\overline{AB}$ 恆成立，如圖㈡，即 $\vec{b}\perp(\vec{a}-\vec{b})$

故選(5)。

二、多選題

4. (1)(2)

難易度：中

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：空間概念與空間向量的應用

解析：(1) ○：因為 $\overline{A'B}=\overline{A'D}$ ，O 為 $\overline{BD}$ 的中點，所以 $\overline{A'O}\perp\overline{BD}$

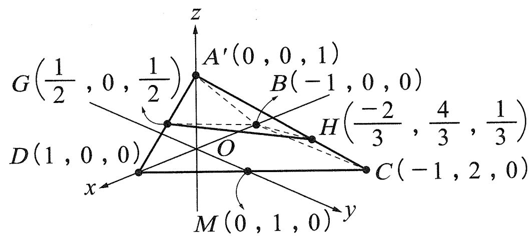
又平面 $A'BD$ 垂直平面 BCD，且平面 $A'BD$ 與平面 BCD 的交線為 $\overline{BD}$

所以 $\overline{A'O}$ 垂直平面 BCD

(2) ○：因為 $\angle CBD=90^\circ$，且 O 為 $\overline{BD}$ 的中點，M 為 $\overline{CD}$ 的中點，則 $\overline{OM}\perp\overline{BD}$

又平面 $A'BD$ 垂直平面 BCD，所以 $\overline{OM}$ 垂直平面 $A'BD$

(3) ╳：因為 $\overline{A'O}$ 、$\overline{OM}$ 、$\overline{BD}$ 兩兩垂直，分別以射線 OD、OM、OA' 為 x 軸、y 軸、z 軸的正方向，建立空間直角坐標系，如右圖



設 $O(0,0,0)$，$D(1,0,0)$，$M(0,1,0)$，$A'(0,0,1)$，

$B(-1,0,0)$，$G\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$C(-1,2,0)$，

$H\left(\frac{-2}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$

可得 $\overrightarrow{BG}=\left(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ ，$\overrightarrow{BH}=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$

利用 $\overrightarrow{BG}$ 與 $\overrightarrow{BH}$ 的外積 $\overrightarrow{BG}\times\overrightarrow{BH}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},2\right)//(2,1,-6)$

可取 $(2,1,-6)$ 為平面 BGH 之一法向量

因為 $(2,1,-6)$ 不垂直 $\overrightarrow{OM}$ ，所以 $\overline{OM}$ 不平行平面 BGH

(4) ╳：承(3)，$(2,1,-6)$ 不垂直 $\overrightarrow{DC}=(-2,2,0)$，所以 $\overline{DC}$ 不平行平面 BGH

(5) ╳：假設在 $\overline{BC}$ 上存在一點 E，使得 $\overline{DE}$ 平行平面 BGH

設 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}=\lambda(0,2,0)$

所以 $\overrightarrow{DE}=(-2,2\lambda,0)$，其中 $0<\lambda\leq1$

因此 $\overrightarrow{DE}\cdot(2,1,-6)=(-2,2\lambda,0)\cdot(2,1,-6)=0$，得 $\lambda=2$

這與 $0<\lambda\leq1$ 矛盾

所以在 $\overline{BC}$ 上不存在點 E，使得 $\overline{DE}$ 平行平面 BGH

故選(1)(2)。

5. (1)(2)(3)(4)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：函數圖形與方程式的根

解析：(1) ○：因為函數 $y=f(x+2)$ 的圖形過點 $(-1,3)$，可知 $f(1)=3$

因此函數 $y=f(-x)$ 的圖形亦過點 $(-1,3)$

(2) ○：因為 $f(x-2)=f(-(4-x)+2)$

如果點 (x,y) 在函數 $y=f(x-2)$ 的圖形上

則點 (x,y) 關於直線 $x=2$ 的對稱點 $(4-x,y)$ 亦在函數 $y=f(-x+2)$ 的圖形上

(3) ○：由 $f(x+2)+f(2-x)=4$，可得 $f(x)+f(4-x)=4$，即 $4-f(x)=f(4-x)$

如果點 (x,y) 在函數 $y=f(x)$ 的圖形上，則點 (x,y) 關於點 $(2,2)$ 的對稱點 $(4-x,4-y)$ 亦在函數 $y=f(x)$ 的圖形上

(4) ○：因為 $f(f(x))=(x^2-3x+2)^2-3(x^2-3x+2)+2=x^4-6x^3+10x^2-3x=x(x-3)(x^2-3x+1)$

所以 $f(f(x))=0$ 有四個相異的實根

(5) ╳：不一定成立，例如：$f(x)=\begin{cases}-1\text{，若 } x\geq 0\\ 1\text{，若 } x<0\end{cases}$

故選(1)(2)(3)(4)。

6. (1)(4)

難易度：中

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：在真實生活中，能思考並計算機率與條件機率

解析：(1) ○：$\frac{1}{8}\times\frac{1}{10}+\frac{7}{8}\times\frac{9}{10}=0.8$

(2) ╳：應為 $\frac{1}{8}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{7}{8}\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=0.09$

(3) ╳：應為 $\frac{1}{8}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2+\frac{7}{8}\times\left(\frac{1}{10}\right)^2=0.11$

(4) ○：$\dfrac{\frac{7}{8}\times\frac{9}{10}}{\frac{1}{8}\times\frac{1}{10}+\frac{7}{8}\times\frac{9}{10}}=\frac{63}{64}=0.98\cdots\cdots>0.95$

(5) ╳：應為 $\dfrac{\frac{1}{8}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2}{\frac{1}{8}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2+\frac{7}{8}\times\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{81}{88}=0.92\cdots\cdots<0.95$

故選(1)(4)。

7. (1)(2)(3)(4)

難易度：中

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：熟悉外積與正射影向量之涵義，能思考一些常見命題的逆敘述

解析：(1) ○：因為 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 不共平面，所以 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}$ 必不相等

(2) ○：考慮相對應之平行四邊形面積

(3) ○：由正射影向量公式即可得

(4) ○：不失一般性可設 $\overrightarrow{v}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{a}=(a,0,0)$，$\overrightarrow{b}=(0,b,0)$，$\overrightarrow{c}=(0,0,c)$ 代入即可得證

(5) ╳：不一定，反例可取 $\overrightarrow{v}=(1,\sqrt{2}+1,1)$，$\overrightarrow{a}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{b}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{c}=(0,0,1)$

故選(1)(2)(3)(4)。

8. (2)(4)

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：過圓上一點的切線方程式、空間中平面與直線的相交

解析：(1) ╳：因為圓 C 在 xy 平面上，所以可用平面坐標的概念求算

此時過圓 C：$x^2+y^2=1$ 上一點 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 的切線方程式為 $(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$

因此，在空間坐標上，此切線 L 的方程式為 $\begin{cases}(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1\\ z=0\end{cases}$

(2) ○：切線 L 分別與 x、y 軸交於點 $A\left(\dfrac{1}{\cos\theta}, 0, 0\right)$、點 $B\left(0, \dfrac{1}{\sin\theta}, 0\right)$

而所圍成的三角形面積為 $\dfrac{1}{2}\times\left|\dfrac{1}{\cos\theta}\right|\times\left|\dfrac{1}{\sin\theta}\right|=\left|\dfrac{1}{\sin 2\theta}\right|\geq 1$

因為 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以等號成立在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，可知三角形面積的最小值為 1

(3) ╳：由(2)可得 L 的方向向量 $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{1}{\cos\theta}, \dfrac{1}{\sin\theta}, 0\right) \parallel (\sin\theta, -\cos\theta, 0)$

不妨取 $\overrightarrow{u}=(\sin\theta, -\cos\theta, 0)$ 作為 L 的方向向量，又平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n}=(6, 3, 2)$

若 L 與 E 平行，則 $(\sin\theta, -\cos\theta, 0)\cdot(6, 3, 2)=0$，得 $6\sin\theta-3\cos\theta=0$，此時 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$

(4) ○：由(3)知 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$，又 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，有 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，可得切點 $P\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$

則 L 與 E 的距離 $d(L, E)=d(P, E)=\dfrac{\left|6\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}+3\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2\times 0\right|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$

(5) ╳：若 L 與 E 垂直，則 $(\sin\theta, -\cos\theta, 0) \parallel (6, 3, 2)$

即 $\dfrac{\sin\theta}{6}=\dfrac{-\cos\theta}{3}=\dfrac{0}{2}=0$

得 $\sin\theta=\cos\theta=0$，θ 顯然無實數解

因此不存在切線 L 與平面 E 垂直

故選(2)(4)。

三、選填題

A. $(5, -3)$

難易度：易

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：熟悉矩陣運算，並銜接將來線性代數對於迴歸直線的解釋

解析：將 $E=\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ 代入 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}\cdot E=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

可得 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3&3\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}$

故 $a=5$，$b=-3$

故數對 $(a, b)=(5, -3)$。

B. -1

難易度：中

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：複數的幾何意涵

解析：原方程式等價於 $x^4(x+1)=-1$，設 z 是滿足條件的根

因為 $|z|=1$，可得 $|z+1|=1$

所以所有絕對值為 1 的複數根，在複數平面上只可能是以 $(0, 0)$ 為圓心、1 為半徑的圓與以 $(-1, 0)$ 為圓心、1 為半徑的圓的交點所對應的數

解得 $z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

因此 x^5+x^4+1 可分解為 $(x^2+x+1)(x^3-x+1)$

經檢驗這兩個複數都是原方程式的根，且不是重根，於是可得所有絕對值為 1 的根的和為 -1。

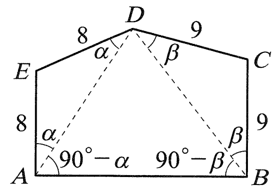
C. $6\sqrt{2}$

難易度：中

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：在動態圖形中，活用正弦定理，餘角關係以及基本邊角關係

解析：假設$\angle EAD=\alpha$，$\angle CBD=\beta$，$\triangle ABD$ 之外接圓半徑為 R



則 $\overline{AD}=2\times8\times\cos\alpha$，$\overline{BD}=2\times9\times\cos\beta$

由正弦定理，可得 $\begin{cases}\dfrac{2\times8\times\cos\alpha}{\sin(90^\circ-\beta)}=2R\\ \dfrac{2\times9\times\cos\beta}{\sin(90^\circ-\alpha)}=2R\end{cases}$

兩式相乘即得 $2^2\times8\times9=2^2\times R^2$

故 $R=6\sqrt{2}$ 。

第貳部分：非選擇題

一、⑴略；⑵ 48 張

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：具備指對數基礎概念與解讀計算機的素養

解析：⑴因為 3^{1000} 是 478 位數，且 $10^{477}<3^{1000}<10^{478}$

不等式同取 log 後可得 $477<\log 3^{1000}<478$

故 $0.477<\log 3<0.478$。

⑵因為 $\log 3^{100000}=100000\log 3$ 介於 47700 與 47800 之間

因此 3^{100000} 至少是 47701 位數，至多是 47800 位數

又每張 A4 紙最多可印 1000 個數字，所以最少要 48 張 A4 紙才夠印。

二、⑴$\dfrac{1}{40}$ ；⑵$\dfrac{3}{5}$ ；⑶$\dfrac{34}{5}$ 元

難易度：中

出處：第二冊第三章〈機率〉、選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：能了解期望值的意義

解析：⑴同行或同列且和為 12 的組合有三種：$2+10=4+8=5+7=12$

故小樺得 12 元的機率 $P=\dfrac{3}{C^{16}_2}=\dfrac{1}{40}$ 。

⑵任抽兩球會同行的機率為 $P(\text{同行})=\dfrac{C^4_1\times C^4_2}{C^{16}_2}=\dfrac{24}{120}=\dfrac{1}{5}$

任抽兩球會同列的機率與同行的機率相同

因此小樺得 0 元的機率 $P=1-[P(\text{同行})+P(\text{同列})]$

$=1-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}$ 。

⑶每個格子內金額的獎金被獲得的機會均等，其機率為 $\dfrac{C^2_1\times C^3_1}{C^{16}_2}=\dfrac{6}{120}=\dfrac{1}{20}$

則小樺玩一次所得獎金的期望值為 $(1+2+\cdots\cdots+16)\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{34}{5}$(元)。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、⑴略；⑵ 48 張

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：具備指對數基礎概念與解讀計算機的素養

解析：⑴因為 3^{1000} 是 478 位數　(1 分)，且 $10^{477}<3^{1000}<10^{478}$　(1 分)

不等式同取 log 後可得 $477<\log 3^{1000}<478$　(1 分)

故 $0.477<\log 3<0.478$。　(1 分)

⑵因為 $\log 3^{100000}=100000\log 3$ 介於 47700 與 47800 之間

因此 3^{100000} 至少是 47701 位數，至多是 47800 位數　(3 分)

又每張 A4 紙最多可印 1000 個數字，所以最少要 48 張 A4 紙才夠印。　(3 分)

二、⑴$\dfrac{1}{40}$；⑵$\dfrac{3}{5}$；⑶$\dfrac{34}{5}$元

難易度：中

出處：第二冊第三章〈機率〉、選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：能了解期望值的意義

解析：⑴同行或同列且和為 12 的組合有三種：$2+10=4+8=5+7=12$　(1 分)

故小樺得 12 元的機率 $P=\dfrac{3}{C_2^{16}}=\dfrac{1}{40}$。　(3 分)

⑵任抽兩球會同行的機率為 $P(\text{同行})=\dfrac{C_1^4\times C_2^4}{C_2^{16}}=\dfrac{24}{120}=\dfrac{1}{5}$

任抽兩球會同列的機率與同行的機率相同　(2 分)

因此小樺得 0 元的機率 $P=1-〔P(\text{同行})+P(\text{同列})〕$

$$=1-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$。　(2 分)

⑶每個格子內金額的獎金被獲得的機會均等，其機率為 $\dfrac{C_1^2\times C_1^3}{C_2^{16}}=\dfrac{6}{120}=\dfrac{1}{20}$　(3 分)

則小樺玩一次所得獎金的期望值為 $(1+2+\cdots\cdots+16)\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{34}{5}$(元)。　(3 分)