

臺北區 108 學年度第二學期
指定科目第一次模擬考試

數學甲

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全、選修數學甲(上)

考試時間：80 分鐘

作答方式：• 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。

• 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液(帶)。

• 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。

• 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{8}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{8}$ 畫記，如：

18	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\blacksquare}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$
19	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\blacksquare}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\frac{-7}{50}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{50}$ 畫記，如：

20	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\blacksquare}$	$\frac{\pm}{\square}$
21	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\blacksquare}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$

祝考試順利



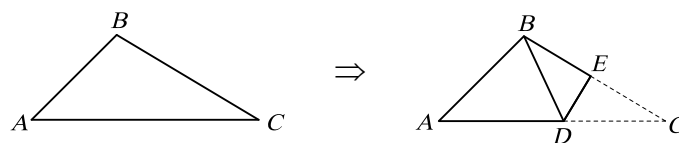
版權所有・翻印必究

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

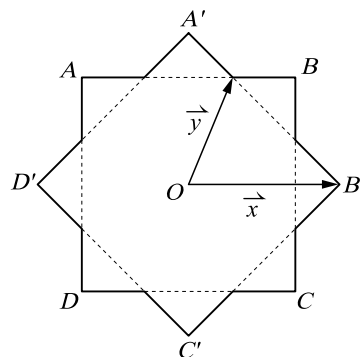
1. 設 a 為實數，經二階方陣 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 所定義的線性變換，將坐標平面上的直線 $L: x-2y=1$ 變換成另一條直線 L' ，若 L 與 L' 互相垂直，則 a 的值為下列哪一個選項？
- (1) -3
(2) -1
(3) 0
(4) 1
(5) 3
2. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=2$ ， $\overline{BC}=3$ ， $\overline{CA}=4$ ，今將 \overline{BC} 對摺，恰使得 B 、 C 兩點重合，得摺痕 \overline{DE} 與 \overline{CA} 交於 D ，如圖所示。試問 $\cos \angle ABD$ 之值為下列哪一個選項？



- (1) $\frac{1}{4}$
(2) $\frac{\sqrt{15}}{8}$
(3) $\frac{1}{2}$
(4) $\frac{17}{32}$
(5) $\frac{7}{8}$

3. 如圖所示。將正方形 $ABCD$ 以中心點 O 為旋轉中心，順時針旋轉 45° 得另一正方形 $A'B'C'D'$ ，然後扣除內部 8 條線段(虛線部分)後可以形成一個正八角星(共 16 個頂點)，其中 \vec{x} 、 \vec{y} 分別為點 O 到兩個頂點的向量。若將點 O 到正八角星 16 個頂點的向量都改寫成 $a\vec{x} + b\vec{y}$ 的形式，試問滿足 $1 < a - b < 2$ 的向量有幾個？

- (1) 2
(2) 3
(3) 4
(4) 5
(5) 6



4. 在複數平面上，設 O 為原點，令點 A 、 B 所對應的複數分別為 z_1 、 z_2 ，若 $|z_1 - 3| = 1$ ， $z_2 = (1 + i)z_1$ ，則 $\triangle OAB$ 面積的值不可能為下列哪一個選項？

- (1) 2
(2) 4
(3) 6
(4) 8
(5) 10

二、多選題（占 40 分）

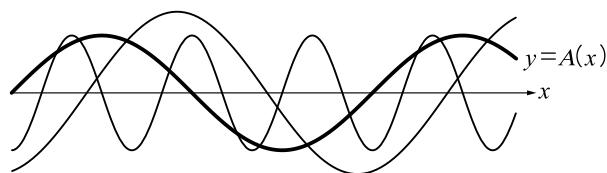
說明：第 5 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 已知 $a=10^{\sqrt{7}}$ ， $b=7^{\sqrt{10}}$ 。試選出正確的選項。

($\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ ， $\sqrt{7} \approx 2.65$ ， $\sqrt{10} \approx 3.16$)

- (1) $a < 500$
- (2) $b < 500$
- (3) $a > b$
- (4) a^{10} 是一個 27 位數
- (5) $b^{\sqrt{10}}$ 的首位數字為 3

6. 將 $y=f_1(x)=\sin x - \cos x$ 、 $y=f_2(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 、 $y=f_3(x)=\sin 3x$ 的函數圖形繪於同一坐標平面上，三個函數圖形與 x 軸的相關位置如圖所示。



試選出正確的選項。

- (1) 圖中標示為 $y=A(x)$ 的圖形，所代表的函數為 $y=f_2(x)$
- (2) 此三個函數圖形中振幅最大為 $\sqrt{2}$
- (3) 令函數 $y=f_2(x)$ 與 $y=f_3(x)$ 的(最小正)週期分別為 P_2 、 P_3 ，則 $3P_2=P_3$
- (4) 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍中， $y=f_2(x)$ 與 $y=f_3(x)$ 的函數圖形共有 6 個交點
- (5) 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍中， $|f_1(x)-f_2(x)|$ 的最大值為 $\sqrt{2}+1$

7. 袋子裡裝有大小規格相同的 2 顆白球與 1 顆紅球，今從袋中隨機抽出一球，記錄球的顏色後放回袋中，稱為一次。若連續進行 n 次(n 為任意正整數)，假設出現偶數次白球的機率為 $P(n)$ ，奇數次白球的機率為 $Q(n)$ 。試選出正確的選項。

(1) $P(n) + Q(n) = 1$

(2) $P(2) - Q(2) = \frac{1}{3}$

(3) $P(3) - Q(3) = \frac{1}{27}$

(4) $P(4) - Q(4) = \frac{1}{81}$

(5) $P(2020) < \frac{1}{2}$

8. 在坐標平面上，設圓 $\Gamma: x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ 的圓心為 C ，已知由直線 $L: 3x - 4y + 18 = 0$ 上一點 P 向圓 Γ 可作兩條切線 L_1 與 L_2 ，且直線 L 恰為 L_1 與 L_2 其中一夾角的角平分線。試選出正確的選項。

(1) 直線 L 與圓 Γ 不相交

(2) 直線 PC 與直線 L 互相垂直

(3) 直線 L_1 與直線 L_2 互相垂直

(4) P 點的坐標為 $(-3, 2)$

(5) 若圓 Γ 上任一點關於直線 $ax - by - 15 = 0$ 的對稱點均仍然在圓 Γ 上，則 $a + b = 0$

9. 給定空間中平面 $E: 2x - y - 3z = 2$ 與直線 $L_1: x - 1 = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$ 、 $L_2: x - 2 = \frac{y+1}{k} = z - 1$ (其中 $k \neq 0$)。試選出正確的選項。
- (1) 平面 E 與直線 L_1 恰交於一點
 - (2) 存在實數 k ，使得直線 L_2 垂直平面 E
 - (3) 存在實數 k ，使得直線 L_2 與平面 E 沒有交點
 - (4) 存在實數 k ，使得直線 L_1 與直線 L_2 的公垂線垂直平面 E
 - (5) 存在實數 k ，使得直線 L_1 與直線 L_2 有交點

三、選填題 (占 12 分)

說明：1. 第 A 至 B 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(10—13)。
2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 在實數線上，有一動點 A 每次移動 1 個單位，且往左與往右的機率相等。今對動點 A 進行觀察，若 A 從坐標為 1 處開始移動，總共移動三次，計算 A 在這三次移動所停的坐標數字總和，則數字總和的期望值為 ⑩。

- B. 空間中有 \vec{a} 、 \vec{b} 兩個非零向量。已知 $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ 且向量 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 平分 \vec{a} 與 \vec{b} 的夾角。若 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 4$ ，則 $|\vec{b}| = \frac{\textcircled{11}\sqrt{\textcircled{12}}}{\textcircled{13}}$ 。(化為最簡根式)

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、(3)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、在坐標平面上，已知 $A = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$ 是以直線 L 為鏡射軸的鏡射矩陣，若對於平面上任

一點 P ，設 Q 為 P 點經 A 變換後所對應的點。試回答下列問題：

- (1) 試求 x 軸經 A 變換後的直線方程式。(3 分)
- (2) 試求鏡射軸 L 的直線方程式。(4 分)
- (3) 若 P 為圖形 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 上的一個動點，試求 \overline{PQ} 的最大值。(4 分)

二、用 12 根鋼條架構出一個正六面體的裝置藝術，並在其底面裝上不透明的灰色面板 $OADC$ 。今將其斜立在公園的平地上，如圖所示。為了穩固此裝置藝術，除了將 O 點落在地面上，還在 A 、 B 、 C 、 D 四處各架上一根垂直地面的鐵柱，分別為 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 與 $\overline{DD'}$ 。已知此正六面體的邊長為 7 公尺，且 $\overline{AA'}$ 的長為 2 公尺， $\overline{CC'}$ 的長為 3 公尺。試回答下列問題：

- (1) 試問鐵柱 $\overline{DD'}$ 的長為多少公尺？(3 分)
- (2) 試問地面上的平行四邊形 $OA'D'C'$ 的面積為多少平方公尺？(5 分)
- (3) 試問鐵柱 $\overline{BB'}$ 的長為多少公尺？(5 分)

