臺北區 105 學年度第二學期
指定科目第二次模擬考試

數學甲

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全、選修數學甲全

考試時間：80 分鐘

作答方式：
- 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液(帶)。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

祝考試順利

99363403-25

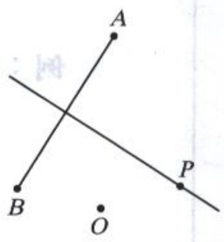
第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 77 分）

一、單選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 方程式 $\log(x+1)-\sin x=0$ 有多少個相異的實根？
   (1) 3 個
   (2) 4 個
   (3) 5 個
   (4) 6 個
   (5) 7 個

2. 如右圖，設 O、A、B 是平面上不共線三點，且 P 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上任意一點，若 $|\overrightarrow{OA}|=8$，$|\overrightarrow{OB}|=4$，則 $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$ 之值為下列哪一個選項？



   (1) 12
   (2) 24
   (3) 32
   (4) 48
   (5) 64

3. 設 a、b 為實數。若直線 L：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 通過一點 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$0\leq\alpha<2\pi$，則下列選項何者正確？

(1) $a+b\geq 1$

(2) $a^2+b^2\leq 1$

(3) $a^2+b^2\geq 1$

(4) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\leq 1$

(5) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geq 1$

4. 利用定積分的幾何意義計算 $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(x^2\sin x+\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)dx$ 的值為下列哪一個選項？

(1) $\dfrac{1}{2}\pi$

(2) $\dfrac{2}{3}\pi$

(3) $\dfrac{5}{6}\pi$

(4) π

(5) 2π

二、多選題（占 32 分）

說明：第 5 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 重複投擲一枚不均勻的硬幣 18 次，若以 P_k 表示其中恰好出現 k 次正面的機率，且經計算得 $\log_2\left(\dfrac{P_0}{P_{18}}\right)=36$。請選出正確的選項。
(1)此硬幣出現正面的機率 $p=\dfrac{1}{5}$
(2) P_0、P_1、P_2、……、P_{18} 的平均值是 $\dfrac{1}{5}$
(3)投擲此硬幣 18 次，出現正面次數的期望值為 $\dfrac{18}{5}$ 次
(4) P_0、P_1、P_2、……、P_{18} 中的最大值是 P_4
(5)在連續擲出 17 次反面後，此硬幣於第 18 次投擲出現正面的機率為 P_1

6. 若 $f(x)=12x^3+(6a+1)x^2-(a^2+3a+3)x+6$ 為一個整係數多項式，且方程式 $f(x^2)=0$ 有二個絕對值小於 1 的有理根。請選出正確的選項。
(1)若 k 為方程式 $f(x^2)=0$ 的根，則 k^2 為方程式 $f(x)=0$ 的根
(2)方程式 $f(x^2)=0$ 恰有 4 個實根
(3)若 $x=\dfrac{q}{p}$ 為方程式 $f(x)=0$ 的有理根，其中 p、q 皆為整數，則 $p\mid 12$ 且 $q\mid 6$
(4) a 為完全平方數
(5)方程式 $f(x)=0$ 恰有 1 個有理根

7. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，其中 a、b、c、d 均為實數，$X_0=\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$、$X_1=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$、$X_2=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$、$X_3=\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$。請選出正確的選項。

(1)若 $ad-bc=0$，且 $abcd\neq 0$，X_0 為坐標平面上之一點，則 AX_0 必落在斜率為 $\dfrac{c}{a}$ 且通過原點的直線上

(2)若 $ad-bc=0$，且 $abcd\neq 0$，則滿足方程式 $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 的所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 必落在斜率為 $-\dfrac{a}{c}$ 且通過原點的直線上

(3)若 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$，$X_0$ 為坐標平面上之一點，則 AX_0 為 X_0 在直線 $y=2x$ 上之投影

(4)若 $ad-bc\neq 0$，且 X_1、X_2、X_3 為坐標平面上不共線之相異三點，則 AX_1、AX_2、AX_3 三點亦不共線

(5)若坐標平面上任一點 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 皆可依序先由二階方陣 A 變換、再經方陣 $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 變換至 $\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$，則矩陣 A 為鏡射矩陣

8. 已知複數平面上 O 為原點，三相異點 A、B、C 所對應之複數分別為 z_1、z_2、z_3，且 $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|=\sqrt{3}$。請選出正確的選項。

(1)若 $|z_1+z_2-z_3|=1$，則 $2\leq|z_3|\leq 4$

(2) $z_1^6-z_2^6=0$

(3) $z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0$

(4) $|1-z_1|^2+|1-z_2|^2$ 的最小值為 2

(5)若 D 點所對應之複數為 $2z_2-z_1$，則 $\overline{OA}\perp\overline{OD}$

三、選填題（占 21 分）

說明：1. 第A至C題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(9－14)。 2. 每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 投擲一顆公正的骰子(六個面的點數分別為 1、2、3、4、5、6 且每面出現的機會均等)兩次，設第一次與第二次所得到的點數分別為 p、q。請問：在 p、q 中至少有一數為 5 的條件下，方程式 $x^2+px+q=0$ 有實根的機率為 $\dfrac{⑨}{⑩⑪}$。(化為最簡分數)

B. 坐標平面上，直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ 與函數 $y=\csc\left(\dfrac{2}{3}x+\pi\right)+1$ 的圖形在 y 軸右側的交點由左而右依序為 A_1、A_2、A_3、……。若以 x_k 表示點 A_k 的 x 坐標，並定義數列 $\langle c_n\rangle=\langle x_{n+1}-x_n\rangle$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=$ $\dfrac{⑫}{⑬}\pi$。(化為最簡分數)

C. 設 $f(x)$為可微分函數，若 $f(1)=2$ 且 $f'(1)=1$，則 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2f(1)-f(x^3)}{x-1}=$ ⑭。

第貳部分：非選擇題（占 23 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號(一、二)與子題號((1)、(2)、……)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、若實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x)=x^4-4x^3-x^2+x+\int_k^x f(t)\,dt$，

(1) 試求 $\deg f(x)$。(4 分)
(2) 試求 $f(x)$。(2 分)
(3) 若 $k<0$，試求 k 之值。(3 分)
(4) 試計算 $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$ 之值。(3 分)

二、已知平面 E 為包含直線 L：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{-y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 的平面中與點 $P(3\,,\,-2\,,2)$ 距離最遠者。

若 F 為包含直線 L 的平面，且 $d(P\,,F)=\dfrac{1}{\sqrt{7}}d(P\,,E)$，試計算下列各題：

(1) 若 $\overrightarrow{n}=(a\,,1\,,b)$ 為平面 E 的法向量，試求數對 $(a\,,b)$。(3 分)
(2) 若平面 E 與平面 F 的銳夾角為 θ，試求 $\tan\theta$ 之值。(2 分)
(3) 試求平面 F 的方程式。(6 分)