



# 臺北區 110 學年度第二學期

## 分科測驗第二次模擬考試

### 數學甲考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊、數學A 第三～四冊、選修數學甲(全)

考試時間：80 分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響考生成績並傷及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是  $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1

列的  $\frac{3}{8}$  與第 18-2 列的  $\frac{8}{8}$  劃記，如：

18-1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
18-2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若答案格式是  $\frac{\textcircled{19-1} \textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的  $\frac{-}{50}$  與第

19-2 列的  $\frac{7}{50}$  劃記，如：

19-1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19-2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有  $n$  個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有  $n$  個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯  $k$  個選項者，得該題  $\frac{n-2k}{n}$  的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

- 選填題每題有  $n$  個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

### 祝考試順利



版權所有・翻印必究

## 第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

### 一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 平面上，兩條筆直的公路交於原點  $O(0, 0)$ ， $t$  為觀測時間(單位：小時)。當  $t=0$  時，甲車在其中一條公路上位於點  $A(-30, 40)$  (單位：公里)，正以每小時 50 公里的速度，朝原點行駛；同時乙車在另一條公路，位於點  $B(-20, 0)$  以每小時 60 公里的速度朝原點行駛。假設在未來一小時內，兩車前進的方向與速度一直維持不變，且當  $t=a$  時，甲、乙兩車直線距離最接近，試選出正確的選項。

- (1)  $0.28 < a < 0.33$
- (2)  $0.33 < a < 0.38$
- (3)  $0.38 < a < 0.43$
- (4)  $0.43 < a < 0.48$
- (5)  $0.48 < a < 0.53$

2. 設實數函數  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ ，關於函數的極限，試選出正確的選項。

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在
- (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{|x|}$  存在
- (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$  存在
- (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^2$  不存在
- (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot f(x))$  不存在

3. 小明的冰箱中有 3 顆相同的巧克力及 3 個相同的布丁，共 6 個點心。小明決定在下星期五天內(星期一到星期五)把點心吃完，從星期一起每天至少吃一個點心，直到冰箱內的巧克力及布丁吃完為止。星期一的第一個點心從冰箱隨機選擇一個點心，吃完後，小明接著再隨機選下一個點心，可繼續吃或等到隔天第一個吃，若選擇隔天再吃，當日就不再吃點心，剩下的點心都採用這個原則；不過，若星期五當天如果還有點心剩下兩個以上，則吃完第一個點心後，剩下的隨機一個一個依序吃完。

例如：三天吃完→

巧	布	巧
---	---	---

布
---

布	巧
---	---

，或五天吃完→

巧
---

巧
---

布
---

布
---

布	巧
---	---

。根據這個原則，小明點心吃完不同的順序方法有幾種？

- (1) 31 種
- (2) 32 種
- (3) 160 種
- (4) 620 種
- (5) 640 種

## 二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 已知方程式  $x^3 + x = 2$  有一個實根、兩個虛根，則  $x^2 + x$  的值可能是下列哪些選項？
- (1) -2
  - (2) -1
  - (3) 0
  - (4) 1
  - (5) 2

5. 甲準備相同的白球與紅球各 3 顆及兩個箱子，讓玩家乙將所有的球任意分配至兩箱子中，但不能有箱子沒有分配到球(即兩箱皆至少有一顆球)。接著由甲隨機選擇一個箱子，再讓乙從這個箱子裡任意取出一球。假設甲選擇箱子的機率均為  $\frac{1}{2}$ ，乙從箱中取出每一個球的機率皆相等，試選出正確的選項。(注意：下列選項的機率，皆為乙分配後的條件下之條件機率)

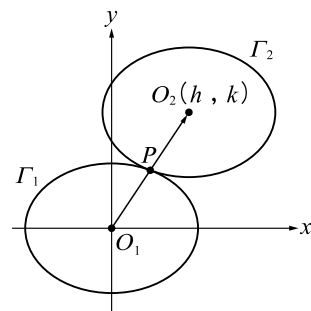
- (1) 因為紅球占一半，不論乙如何分配，乙拿到紅球機率恆為  $\frac{1}{2}$
- (2) 乙的所有分配方法中，乙拿到紅球機率的最大值為  $\frac{7}{10}$
- (3) 乙的所有分配方法中，乙拿到紅球機率的最小值為  $\frac{1}{2}$
- (4) 若乙分配兩箱球數相等，則乙拿到紅球的機率為  $\frac{1}{2}$
- (5) 若乙分配兩箱紅球數不相等，則乙從紅球多的箱子取出紅球的機率大於另一箱

6. 已知在  $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} < a < 1$  時，正實數  $x$  的方程式  $x^x = a$  恰有兩個相異正實數解  $\left( \text{其中 } \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0.69 \right)$ 。

若正實數  $x$  滿足指數方程式  $x^{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{4}$ ，則下列哪些選項可能是  $x$  的解？

- (1)  $\frac{1}{2}$
- (2)  $\frac{1}{4}$
- (3)  $\frac{1}{16}$
- (4)  $\frac{1}{64}$
- (5)  $\frac{1}{256}$
7. 平面上有三點  $P(1, -1)$ 、 $A(-10, -3)$ 、 $B(x, y)$  與直線  $L: 2x - y = 18$ ，其中點  $B$  在直線  $L$  上。若  $\overline{AB}$  的中垂線(垂直平分線)會通過  $P$  點，則點  $B$  坐標可能是下列哪些選項？
- (1)  $(3, -12)$
- (2)  $(5, -8)$
- (3)  $(7, -4)$
- (4)  $(9, 0)$
- (5)  $(11, 4)$

8. 平面上橢圓  $\Gamma_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  的圖形沿著向量  $\vec{v} = (h, k)$  方向平移，其中  $h > 0$ 、 $k > 0$ 。平移後的橢圓方程式為  $\Gamma_2: \frac{(x-h)^2}{16} + \frac{(y-k)^2}{9} = 1$ ，令  $O_1(0, 0)$ 、 $O_2(h, k)$  分別為橢圓  $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_2$  的中心點。已知兩橢圓圖形恰相交於一點  $P(4 \cos \theta, 3 \sin \theta)$  且  $P$  在兩中心點線段  $\overline{O_1O_2}$  上，兩中心點距離為  $\frac{4\sqrt{65}}{5}$ ，如右圖所示，試選出正確的選項。



- (1)  $O_2$  坐標為  $(8 \cos \theta, 6 \sin \theta)$   
 (2)  $\overline{PO_1} = \overline{PO_2}$   
 (3)  $\overline{O_1P}$  與  $x$  軸正向夾角為  $\theta$   
 (4) 向量  $(2, 3) \parallel \vec{v}$   
 (5) 向量  $(7, 11) \parallel \vec{v}$

### 三、選填題（占 18 分）

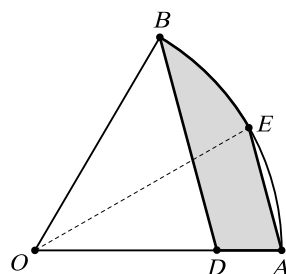
說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 令鏡射矩陣  $M = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ ，若  $M$  將坐標平面上的點  $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$  變換至點  $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ，則角  $\theta$  的餘

弦值  $(\cos \theta)$  為  $\frac{\textcircled{9-1}}{\textcircled{9-2} \textcircled{9-3}}$ 。(化為最簡分數)

10. 平面上有一扇形  $AOB$  如右圖所示，其中點  $D$  在  $\overline{OA}$  上、點  $E$  在弧  $\widehat{AB}$  上，半徑  $\overline{OA} = \overline{OE} = \overline{OB} = 2\sqrt{3}$ 、 $\angle AOE = \angle EOB = 30^\circ$ ，且  $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ 。圖中由  $\overline{AE}$ 、 $\widehat{EB}$ 、 $\overline{BD}$  與  $\overline{DA}$  圍成的灰色區域面積為

$\pi - \textcircled{10-1} + \textcircled{10-2} \sqrt{\textcircled{10-3}}$ 。(化為最簡根式)



11. 已知  $z_1 = 9 + ai$ ， $z_2 = -6 + bi$  為兩個相異複數，其中  $a, b$  為實數， $i = \sqrt{-1}$ 。若

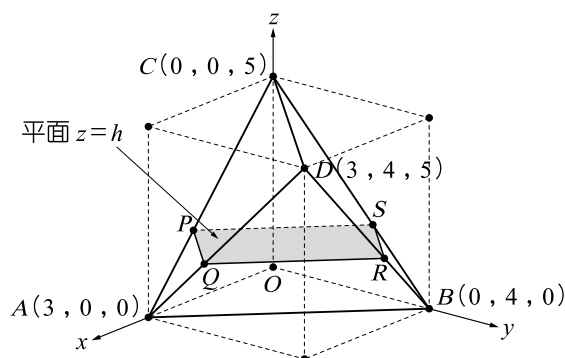
$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{5} + \frac{3}{10}i$ ，則  $|z_1| = \sqrt{\textcircled{11-1} \textcircled{11-2} \textcircled{11-3} \textcircled{11-4}}$ 。(化為最簡根式)

## 第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

### 12－14 題為題組

空間中有一長方體，其中 4 個頂點  $A(3, 0, 0)$ 、 $B(0, 4, 0)$ 、 $C(0, 0, 5)$ 、 $D(3, 4, 5)$  組成一個四面體，且平行  $xy$  平面的平面  $z=h$  ( $0 < h < 5$ ) 與此四面體截出一個四邊形  $PQRS$ ，如右圖所示。



12.  $\overrightarrow{AB}$  與  $\overrightarrow{CD}$  的夾角餘弦值為何？(單選題，3 分)

- (1)  $-\frac{7}{25}$
- (2)  $-\frac{3}{5}$
- (3) 0
- (4)  $\frac{3}{5}$
- (5)  $\frac{7}{25}$

13. 四邊形  $PQRS$  可能是下列哪些圖形？(多選題，3 分)

- (1) 正方形
- (2) 非正方形的矩形
- (3) 菱形
- (4) 非平行四邊形的梯形
- (5) 非菱形的平行四邊形

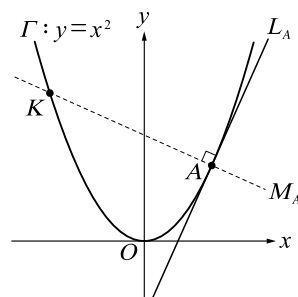
14. (1) 令多項式  $A(h)$  為平面  $z=h$  ( $0 < h < 5$ ) 上的四邊形  $PQRS$  面積，試寫出多項式  $A(h)$  (以  $h$  的數學式表示)。(非選擇題，3 分)

(2) 兩平行平面  $z=\frac{5}{3}$ 、 $z=\frac{10}{3}$  把四面體分割成三個多面體，則中間(以  $z$  軸的方向區分)多面體的體積是多少？(非選擇題，3 分)

15 – 17 題為題組

平面上拋物線  $\Gamma: y=x^2$ ，在拋物線上有一點  $A(a, a^2)$ ，其中  $a>0$ 。

令  $\Gamma$  上過點  $A$  的切線為  $L_A$ ，直線  $M_A$  為通過點  $A$  且與切線垂直的法線 ( $L_A \perp M_A$ )，點  $K(k, k^2)$  (其中  $k \neq a$ ) 為法線  $M_A$  與拋物線  $\Gamma$  異於  $A$  的交點，如右圖所示：



15. 若  $a$  為任意正實數，則實數  $k$  的值可能在下列哪些區間？(多選題，4 分)

- (1)  $(-\infty, -\sqrt{2})$
- (2)  $[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$
- (3)  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- (4)  $[\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
- (5)  $(\sqrt{2}, \infty)$

16. 若點  $B(b, b^2)$  (其中  $b \neq k$ ) 為拋物線上異於  $A$  的一點，且其法線  $L_B$  也通過點  $K$ ，則  $ab = ?$  (單選題，3 分)

- (1)  $-\frac{1}{4}$
- (2)  $-\frac{1}{2}$
- (3) 1
- (4)  $\frac{1}{2}$
- (5)  $\frac{1}{4}$

17. 承 16. 題，若  $\triangle ABK$  為等腰三角形且  $\overline{AB} = \overline{AK}$ ，則：

- (1) 以  $a$  的數學式表示  $\overline{BK}$  的中點坐標。(非選擇題，2 分)
- (2) 實數  $a^2$  之值為何？(非選擇題，3 分)

## 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r$  ( $r \neq 1$ ) 的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$   
 $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$   
 $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

4.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ；標準差  $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$

6. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ,

相關係數  $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n \sigma_X \sigma_Y}$

最適直線(迴歸直線)方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 角錐體積  $= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$

8. 自然常數  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828$

9. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

10. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$