臺北區 106 學年度第二學期
指定科目第一次模擬考試

數學甲

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全、選修數學甲(上)

考試時間：80 分鐘

作答方式：
- 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液(帶)。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

祝考試順利

99363303-26

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 80 分）

一、單選題（占 28 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 7 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設甲、乙、丙三人投籃命中率分別為 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{3}$，且每人及每次投籃結果均互不影響，若每人各投籃 2 次，則三人總共投中 2 次之機率為何？
(1) $\frac{189}{576}$
(2) $\frac{191}{576}$
(3) $\frac{193}{576}$
(4) $\frac{195}{576}$
(5) $\frac{197}{576}$

2. 若 $[x]$ 表示小於或等於實數 x 的最大整數值，則 $[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots\cdots+[\log 2017]$ 之值為何？
(1) 4000
(2) 4590
(3) 4898
(4) 4944
(5) 5000

3. 已知 $i=\sqrt{-1}$，試求 $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2018}=$ ？

(1) 1

(2) -1

(3) i

(4) $-i$

(5) 0

4. 已知空間中一直線 L： $\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-6}{4}$，則下列哪一條直線與直線 L 互為歪斜線？

(1) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-4}$

(2) $\dfrac{x}{-6}=\dfrac{y+9}{4}=\dfrac{z-2}{8}$

(3) $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-8}{-1}=z-3$

(4) $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-13}{3}$

(5) $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z+9}{4}$

二、多選題（占 24 分）

說明：第 5 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 請選出正確的選項。

(1)兩個非零向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 必符合：$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|\le|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$

(2)兩個非零向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 必符合：$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2\ge|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2$

(3) $(|\overrightarrow{b}|\overrightarrow{a}+|\overrightarrow{a}|\overrightarrow{b})$ 之向量可以平分 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 兩向量之夾角

(4) $\left(\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}+\dfrac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}\right)$ 之向量可以平分 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 兩向量之夾角

(5)已知 a，b，c，d 為實數，若二階行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=4$，則 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge 16$

6. 設 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos 2x}$，$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos 2x}$，而 $h(x)=f(x)+g(x)$，對於 x 為實數，則下列選項哪些正確？

(1) $y=f(x)$ 之週期為 π

(2) $y=g(x)$ 之週期為 $\dfrac{\pi}{2}$

(3) $y=h(x)$ 之週期為 $\dfrac{\pi}{2}$

(4) $y=f(x)$ 之極大值為 1

(5) $y=h(x)$ 之極小值為 0

7. 請選出正確的選項。

(1)整係數 n 次多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$，$n$ 為正整數，若 $a\mid a_n$ 且 $b\mid a_0$，則 $(ax-b)\mid f(x)$

(2)若實係數多項式 $f(x)$ 的最高次數為 5 次，則 $f(x)=0$ 至少有一個實根

(3)設 a，b 皆為實數，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

(4)設 z 為複數，而 $\bar{z}$ 為 z 的共軛複數，則 $z\times\bar{z}=|\bar{z}|^2$

(5)若實係數多項式方程式 $f(x)=0$，x 在 $a<x<b$ 之間恰找到 4 個實根，則 $f(a)f(b)<0$

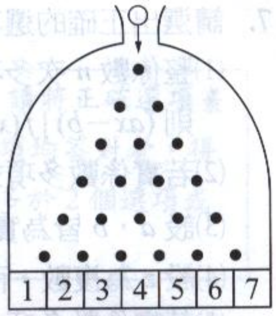
三、選填題（占 28 分）

說明：1.第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(8－19)。 2.每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

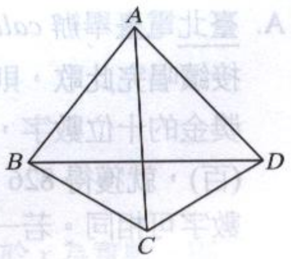
A. 臺北電臺舉辦 *call in* 接唱活動，規則為在主持人唱完某首歌的前三句內，*call in* 民眾若能接續唱完此歌，則可按三次電子鈕得獎金：第一次按出現獎金的個位數字，第二次按出現獎金的十位數字，第三次則為百位數字。例如聽眾三次按出的數字依序是 6 (個)、2 (十)、8 (百)，就獲得 826 元，其中電子鈕是由 0，1，2，……，9 中的數字所產生，且三次按出的數字可相同。若一位聽眾已接唱成功，試求其獲得獎金的期望值是 ___⑧⑨⑩___ 元。(四捨五入至個位數)

B. 設 $O(0,0)$，$A(2,0)$，$B(0,4)$，$C(0,1)$ 為坐標平面上四點，過 C 點作一直線 L 使其平分 $\triangle OAB$ 之面積，則直線 L 的方程式為 ___x⑪⑫y⑬⑭$=0$___ 。

C. 在士林夜市的彈珠臺遊戲機，由上方落下的彈珠，會撞擊到釘柱而隨機的向左或向右落下又繼續撞擊下一層。如右圖，最後會落到下方編號 1 ～ 7 的格子中，若彈珠每次向左或向右落下的機率相等，則彈珠落到 1 ～ 7 號的格子內，出現的最大機率為 $\dfrac{⑮}{⑯⑰}$ 。(化為最簡分數)



D. 如右圖，四面體 $ABCD$ 中，底面△BCD 為邊長 6 的正三角形，而 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=9$，則直線 AB 與直線 CD 的距離為 $\sqrt{⑱⑲}$ 。



第貳部分：非選擇題（占 20 分）

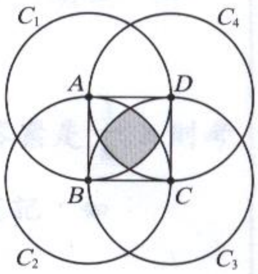
說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、設二次曲線 Γ：$4x^2+y^2-6y+5=0$，以矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ -a & 1\end{bmatrix}$ 對 Γ 作線性變換得 Γ'，即 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，其中 a 為實數，$(x, y)\in\Gamma$，$(x', y')\in\Gamma'$，則：

(1) 當 Γ' 與 x 軸相切時，$a=$？(7 分)

(2) 承(1)，試求切點坐標？(3 分)

二、如右圖，$P(x, y)$ 為圓 C_1：$x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 上的動點，而連接 C_1，C_2，C_3，C_4 四個相同大小圓的圓心 A，B，C，D 為一正方形，試求：



(1) 陰影處圓弧圍成圖形的面積。(5 分)

(2) $|x-2y|$ 的最大值與最小值。(5 分)

臺北區 106 學年度第二學期

指定科目第一次模擬考試

數學甲參考答案暨詳解

99363315-26

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
答案	(3)	(4)	(4)	(3)	(1)(3)(4)(5)	(1)(3)(4)	(2)(4)		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

難易度：易

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：獨立事件

解析：先求每人投籃一次

三人均未投中的機率為 $p_0=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}$

三人共投中 1 次的機率為 $p_1=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{11}{24}$

三人共投中 2 次的機率為 $p_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

則所求機率 $p=p_0\times p_2+p_2\times p_0+p_1\times p_1$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{11}{24}\times\frac{11}{24}$

$=\frac{193}{576}$

故選(3)。

2. (4)

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數函數

解析：$1\le x\le 2017$，$x\in N$

$1\le x<10\Rightarrow 0\le \log x<1\Rightarrow[\log x]=0$，9 個

$10\le x<10^2\Rightarrow 1\le \log x<2\Rightarrow[\log x]=1$，90 個

$10^2\le x<10^3\Rightarrow 2\le \log x<3\Rightarrow[\log x]=2$，900 個

$10^3\le x\le 2017\Rightarrow 3\le \log x<4\Rightarrow[\log x]=3$，$2017-1000+1=1018$ 個

$\therefore[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots\cdots+[\log 2017]$

$=0\times 9+1\times 90+2\times 900+3\times 1018=4944$

故選(4)。

3. (4)

難易度：中

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：複數的幾何意涵

解析：$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2018}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2018}=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2018}$

$=\cos\left(-\frac{2018}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2018}{4}\pi\right)$

$=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$=0+(-1)\times i$

$=-i$

故選(4)。

4. (3)

難易度：中偏易

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：空間中直線的關係(平行、重合與歪斜)

解析：(1)╳：方向向量成比例，但 L 上一點 $(-3,-7,6)$ 不在(1)上，兩者為平行關係

(2)╳：方向向量成比例，且 L 上一點 $(-3,-7,6)$ 代入(2)合，兩者為重合關係

(3)○：方向向量不成比例，則不平行，將 L 與(3)改為參數式

$$L:\begin{cases}x=-3-3t\cdots\cdots①\\ y=-7+2t\cdots\cdots②\\ z=6+4t\cdots\cdots\cdots③\end{cases},t\in R,(3):\begin{cases}x=3+3s\cdots\cdots④\\ y=8-s\cdots\cdots⑤\\ z=3+s\ \cdots\cdots⑥\end{cases},s\in R$$

解 $\begin{cases}-3-3t=3+3s\\ -7+2t=8-s\end{cases}$，得 $t=17$，$s=-19$，代入③與⑥不相等，則為歪斜

(4)╳：同(3)方法：方向向量不成比例，則不平行

$$L:\begin{cases}x=-3-3t\cdots\cdots①\\ y=-7+2t\cdots\cdots②\\ z=6+4t\cdots\cdots\cdots③\end{cases},t\in R,(4):\begin{cases}x=-4+2k\cdots\cdots⑦\\ y=-3+2k\cdots\cdots⑧\\ z=13+3k\cdots\cdots\cdots⑨\end{cases},k\in R$$

解 $\begin{cases}-3-3t=-4+2k\\ -7+2t=-3+2k\end{cases}$，得 $t=1$，$k=-1$，代入③與⑨合，則交於一點 $(-6,-5,10)$

(5)╳：方向向量相同，但 L 上一點 $(-3,-7,6)$ 不在(5)上，兩者為平行關係

故選(3)。

二、多選題

5. (1)(3)(4)(5)

難易度：中偏難

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量的概念與向量的內積、柯西不等式

解析：(1)○：$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\cos\theta|\le|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$

(2)╳：$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta+|\overrightarrow{b}|^2$

若 $\cos\theta<0$ 時，則 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2\le|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2$ 與題意不合

(3)(4)○：向量 $r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}$ 只要符合：① $r>0$，$s>0$，② $|r\overrightarrow{a}|=|s\overrightarrow{b}|$

即可使 $r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}$ 平分 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 所夾的角

(5)○：由柯西不等式：$(a^2+b^2)[d^2+(-c)^2]\ge(ad-bc)^2$

$\Rightarrow(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge4^2=16$

故選(1)(3)(4)(5)。

6. (1)(3)(4)

難易度：中

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：三角函數的性質與圖形、三角函數的應用

解析：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos2x}=\sqrt{\dfrac{1-\cos2x}{2}}=|\sin x|$

$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos2x}=\sqrt{\dfrac{1+\cos2x}{2}}=|\cos x|$

則 $h(x)=f(x)+g(x)=|\sin x|+|\cos x|$，$x\in R$

(1)○：$y=f(x)$ 之週期為 π

(2)╳：$y=g(x)$ 之週期為 π

(3)○：$y=h(x)$ 之週期為 $\dfrac{\pi}{2}$

(4)○：$y=f(x)$ 之極大值為 1

(5)╳：$y=h(x)$ 之極小值為 1

故選(1)(3)(4)。

7. (2)(4)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：一次因式檢驗法、勘根定理、複數

解析：(1) ╳：一次因式檢驗法的逆敘述不一定成立

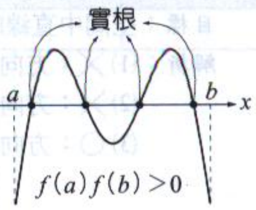
(2) ○

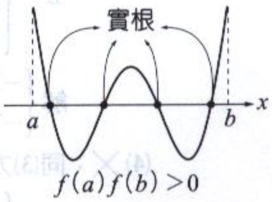
(3) ╳：當 $a<0$，$b<0$ 時，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

(4) ○：設複數 $z=a+bi$，a，$b\in R$，則 $z\times\bar{z}=a^2+b^2=|\bar{z}|^2$

(5) ╳：若 $f(x)=0$ 在 a，b 之間恰找到 4 個實根，則亦可能 $f(a)f(b)>0$

如右圖所示





故選(2)(4)。

三、選填題

A. 500

難易度：中偏易

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：期望值

解析：按出的號碼是由 000，001，……，999 共有 1000 個相異數值所組成

每個號碼出現的機率皆為 $\frac{1}{1000}$

設 X 為通過接唱完成獲得的獎金

則獎金金額期望值為 $E(X)=\frac{1}{1000}(1+2+3+\cdots\cdots+999)=499.5\approx 500$ (元)。

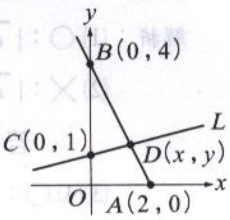
B. $x-4y+4=0$

難易度：中偏易

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：直線方程式

解析：如右圖，設 D 點為直線 L 與 $\overline{AB}$ 的交點



則 $\triangle BCD=\frac{1}{2}\triangle BOA\Rightarrow\frac{1}{2}\times 3\times x=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 4\right)\Rightarrow x=\frac{4}{3}$

則 $D\left(\frac{4}{3},y\right)$ 且 $D\in\overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{AB}$：$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$，將 D 代入 $\Rightarrow y=\frac{4}{3}$，即 $D\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$

$\therefore$ 直線 L 的方程式為 $x-4y+4=0$。

C. $\frac{5}{16}$

難易度：中偏易

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：重複試驗的機率

解析：彈珠每次向右、向左的機率皆為 $\frac{1}{2}$

落到 1 號與 7 號格子的機率為：$C_0^6\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

落到 2 號與 6 號格子的機率為：$C_1^6\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$

落到 3 號與 5 號格子的機率為：$C_2^6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$

落到 4 號格子機率為：$C_3^6\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$ 最大

則出現的最大機率為 $\frac{5}{16}$。

D. $\sqrt{23}$

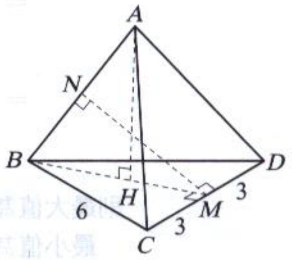
難易度：中偏易

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：空間概念

解析：作 $\overline{CD}$ 中點為 M，再作 $\overline{MN}\perp\overline{AB}$

則 $\overline{MN}\perp\overline{CD}$，且 $\overline{MN}$ 為所求



$\overline{BM}=3\sqrt{3}$，$\overline{BH}=\dfrac{2}{3}\overline{BM}=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{81-12}=\sqrt{69}$

$\triangle ABM=\dfrac{1}{2}\times\overline{BM}\times\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{MN}$

$\Rightarrow 3\sqrt{3}\times\sqrt{69}=9\times\overline{MN}$

$\therefore \overline{MN}=\sqrt{23}$。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\pm\sqrt{5}$；(2) $(\pm2\sqrt{5}\ ,0)$

難易度：中偏難

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣的線性變換、反矩陣

解析：(1) $\because \begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&a\\-a&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1+a^2}&\dfrac{-a}{1+a^2}\\\dfrac{a}{1+a^2}&\dfrac{1}{1+a^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{1+a^2}(x'-ay')$，$y=\dfrac{1}{1+a^2}(ax'+y')$

將上式代入 Γ：$4x^2+y^2-6y+5=0$ 且令 $y'=0$

得 $\dfrac{4+a^2}{(1+a^2)^2}(x')^2-\dfrac{6a}{1+a^2}(x')+5=0$

$\because \Gamma'$ 與 x 軸相切，則判別式為 0

$\therefore\left(\dfrac{-6a}{1+a^2}\right)^2-4\times\dfrac{4+a^2}{(1+a^2)^2}\times5=0\Rightarrow a^2=5\Rightarrow a=\pm\sqrt{5}$。

(2) $a=\pm\sqrt{5}$ 代入 $\left(-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(1+a^2)^2}{4+a^2}\times\left(-\dfrac{6a}{1+a^2}\right),\ 0\right)$

得 $(\pm2\sqrt{5}\ ,0)$。

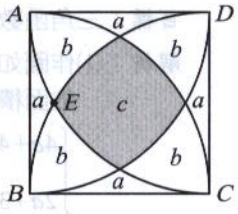
二、(1) $4-4\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi$；(2)最大值為 $4+2\sqrt{5}$，最小值為 0

難易度：中偏難

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：三角函數的應用、三角函數的疊合

解析：(1)作圖如右，設面積為 a、b、c，$\overline{AD}=2$



依面積列式：

$$\begin{cases}4a+4b+c=2^2=4 & \cdots\cdots① \\ 2a+3b+c=\dfrac{1}{4}\times\pi\times2^2=\pi & \cdots\cdots② \\ a+2b+c=\dfrac{1}{6}\text{圓面積}\times2-\triangle CDE\text{面積} & \end{cases}$$

$=\dfrac{1}{6}\times\pi\times2^2\times2-\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}$

$=\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\cdots\cdots③$

解①、②、③得 $c=4-4\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi$。

(2) $x^2+y^2-4x+2y+1=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=4$

則圓參數式 $\begin{cases} x=2+2\cos\theta \\ y=-1+2\sin\theta \end{cases}$，$0 \leq \theta < 2\pi$

$|x-2y| = |(2+2\cos\theta)-2(-1+2\sin\theta)|$

$= |2\cos\theta-4\sin+4|$

$= |2\sqrt{5}\cos(\theta+\alpha)+4|$，其中 $\begin{cases} \sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

則最大值為 $|2\sqrt{5}+4|=4+2\sqrt{5}$

最小值為 0。

北模 B3 數學考科非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\pm\sqrt{5}$；(2) $(\pm 2\sqrt{5}\ ,0)$

難易度：中偏難

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣的線性變換、反矩陣

解析：(1)$\because \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & \dfrac{-a}{1+a^2} \\ \dfrac{a}{1+a^2} & \dfrac{1}{1+a^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ (2 分)

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{1+a^2}(x'-ay')$，$y=\dfrac{1}{1+a^2}(ax'+y')$

將上式代入 Γ：$4x^2+y^2-6y+5=0$ 且令 $y'=0$

得 $\dfrac{4+a^2}{(1+a^2)^2}(x')^2-\dfrac{6a}{1+a^2}(x')+5=0$ (2 分)

$\because \Gamma'$ 與 x 軸相切，則判別式為 0

$\therefore \left(\dfrac{-6a}{1+a^2}\right)^2-4\times\dfrac{4+a^2}{(1+a^2)^2}\times 5=0$ (2 分)

$\Rightarrow a^2=5 \Rightarrow a=\pm\sqrt{5}$。 (1 分)

(2) $a=\pm\sqrt{5}$ 代入 $\left(-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(1+a^2)^2}{4+a^2}\times\left(-\dfrac{6a}{1+a^2}\right),\ 0\right)$ (2 分)

得 $(\pm 2\sqrt{5}\ ,0)$。 (1 分)

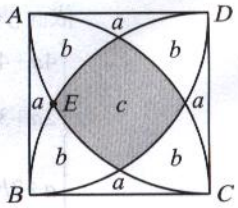
二、(1) $4-4\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi$；(2)最大值為 $4+2\sqrt{5}$，最小值為 0

難易度：中偏難

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：三角函數的應用、三角函數的疊合

解析：(1)作圖如右，設面積為 a、b、c，$\overline{AD}=2$



依面積列式：

$\begin{cases} 4a+4b+c=2^2=4 \quad \cdots\cdots ① \quad (1\text{ 分}) \\ 2a+3b+c=\dfrac{1}{4}\times\pi\times 2^2=\pi \quad \cdots\cdots ② \quad (1\text{ 分}) \\ a+2b+c=\dfrac{1}{6}\text{圓面積}\times 2-\triangle CDE\text{面積} \end{cases}$

$=\dfrac{1}{6}\times\pi\times 2^2\times 2-\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}$

$=\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3} \cdots\cdots ③$ (2 分)

解①、②、③得 $c=4-4\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi$。 (1 分)

(2) $x^2+y^2-4x+2y+1=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=4$

則圓參數式 $\begin{cases} x=2+2\cos\theta \\ y=-1+2\sin\theta \end{cases}$，$0 \leq \theta < 2\pi$　(2 分)

$$\begin{aligned} |x-2y| &= |(2+2\cos\theta)-2(-1+2\sin\theta)| \\ &= |2\cos\theta-4\sin\theta+4| \\ &= |2\sqrt{5}\cos(\theta+\alpha)+4| \text{，其中} \begin{cases} \sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{aligned}$$
(2 分)

則最大值為 $|2\sqrt{5}+4|=4+2\sqrt{5}$

最小值為 0。　(1 分)