UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

ANDERSON DE ALENCAR BARROS
EDON BRENDON SOUZA DOS SANTOS
JORGE HENRIQUE COELHO GOMES

PROJETO DE UM CONTROLADOR DE ATRASO E AVANÇO DE FASE PELO MÉTODO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

JUAZEIRO - BA
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

ANDERSON DE ALENCAR BARROS
EDON BRENDON SOUZA DOS SANTOS
JORGE HENRIQUE COELHO GOMES

PROJETO DE UM CONTROLADOR DE ATRASO E AVANÇO DE FASE PELO MÉTODO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Projeto requerido para obtenção de nota parcial na disciplina de Controle I sob a orientação do Prof. Dr. Manoel de Oliveira Santos Sobrinho.

JUAZEIRO - BA

2021

SUMÁRIO

1 CONTROLADOR POR AVANÇO DE FASE

O compensador de fase destina-se a introduzir um avanço de fase do diagrama de resposta em frequência, de forma a aumentar a margem de fase do sistema (MAYA; LEONARDI, 2011). Então busca modificar a curva de resposta em frequência para obter uma ângulo de fase suficiente para compensar o retardo de fase nos componentes do sistema.

Temos a seguinte função da planta:

$$G_p(s) = \frac{19}{s\,(s+12)\,(s+1)}$$

Para este projeto foi requisitado as seguintes especificações,

- Margem de fase (MF) de 45°
- Margem de ganho (MG) que não seja inferior a 12 dB
- Constante de erro estático de velocidade (K_v) de $4\,\mathrm{s}^{-1}$

Inicialmente, foi calculado a margem de fase e a margem de ganho da planta. Posteriormente, é projetado o controlador de forma a atender os requisitos desejados.

1.1 CÁLCULO DA MARGEM DE GANHO

Para encontrarmos o valor da margem de ganho, precisamos definir a frequência de cruzamento de fase, ω_{cf}, ponto onde o gráfico corta o eixo real negativo. Nesse ponto separarmos a parte real da imaginária, já que na frequência ω_{cf}, $\mathrm{Im}\{G_p\} = 0$. Assim segue-se que:

Fazendo $s = j\omega$ na função de transferência da planta, temos

$$\begin{aligned} G_p(j\omega) &= \frac{19}{j\omega\,(j\omega+12)\,(j\omega+1)} \\ &= \frac{19}{j^3\omega^3 + 13\,j^2\omega^2 + 12\,j\omega} \\ &= \frac{19}{-j\omega^3 - 13\,\omega^2 + 12\,j\omega} \\ &= \frac{19}{-13\,\omega^2 + j\omega\,(12-\omega^2)} \end{aligned}$$

Para determinar a margem de ganho, primeiramente, determina-se a frequência de cruzamento de fase ω_{cf} separando a parte real da parte imaginária e fazendo $\mathrm{Im}\{G_p\} = 0$.

$$G_p(j\omega) = \frac{19}{-13\,\omega^2 + j\omega\,(12-\omega^2)} \cdot \frac{-13\,\omega^2 - j\omega\,(12-\omega^2)}{-13\,\omega^2 - j\omega\,(12-\omega^2)}$$
$$G_p(j\omega) = \frac{-247\,\omega - 19j\omega\,(12-\omega^2)}{169\,\omega^4 + \omega^2\,(12-\omega^2)^2}$$

$$\mathrm{Im}\{G_p\} = \frac{-19\,\omega\,(12-\omega^2)}{169\,\omega^4 + \omega^2\,(12-\omega^2)^2} = 0$$

Logo,

$$-19\,\omega\,(12-\omega^2) = 0$$
$$\omega\,(12-\omega^2) = 0$$

Assim,

$$\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \omega^2 = 12$$

Portanto, a frequência de cruzamento de fase é

$$\omega_{cf} = 3.464$$

A margem de ganho é definida como o inverso do módulo de $A(j\omega)$ medido na frequência de cruzamento de fase. Logo, calculando a função da planta para o valor de ω_{cf},

$$G_p(j\omega_{cf}) = \frac{19}{-13\,(3.464)^2 + j(3.464)\,(12-(3.464)^2)}$$
$$G_p(j\omega_{cf}) = -\frac{19}{156}$$
$$G_p(j\omega_{cf}) = -0.122$$

Por fim, temos que a margem de ganho é dada por

$$\mathrm{MG} = \left|\frac{1}{G_p(j\omega_{cf})}\right|$$
$$\mathrm{MG} = \left|\frac{1}{-0.122}\right|$$
$$\mathrm{MG} = 8.197$$

em decibéis,

$$\mathrm{MG} = -20\,\log\bigl|G_p(j\omega_{cf}\bigr| = 18.27\,\mathrm{dB}$$

1.2 CÁLCULO DA MARGEM DE FASE

A margem de fase é o ângulo entre o eixo real negativo e o vetor $A(j\omega)$, na frequência de cruzamento de ganho, ω_{cg}. Nesse ponto o módulo de $A(j\omega)$ é unitário.

A margem de fase é dada por

$$\beta = 180 + \phi$$

Obs: ϕ é o ângulo de $A(j\omega)$ medido no sentido negativo, logo, tem um valor negativo.

Calculada anteriormente, temos que a função da planta para $s = j\omega$,

$$G_p(j\omega) = \frac{19}{-13\,\omega^2 + j\omega\,(12 - \omega^2)}$$

Calculando $\left|G_p(j\omega)\right| = 1$,

$$\frac{|19|}{\left|-13\,\omega^2 + j\omega\,(12 - \omega^2)\right|} = 1$$

$$\frac{|19|}{\sqrt{(-13\,\omega^2)^2 + \omega^2\,(12 - \omega^2)^2}} = 1$$

$$\sqrt{(-13\,\omega^2)^2 + \omega^2\,(12 - \omega^2)^2} = 19$$

$$(-13\,\omega^2)^2 + \omega^2\,(12 - \omega^2)^2 = 19^2$$

$$169\,\omega^4 + \omega^2\,(144 - 24\omega^2 + \omega^4) = 361$$

$$169\,\omega^4 + 144\,\omega^2 - 24\,\omega^4 + \omega^6 = 361$$

$$\omega^6 + 145\,\omega^4 + 144\,\omega^2 - 361 = 0$$

Considerando $x = \omega^2$, temos

$$x^3 + 145\,x^2 + 144\,x - 361 = 0$$

e assim temos as raízes $\{1.154;\ -2.172;\ -143.982\}$

Escolhendo a raiz positiva $x = 1.154$,

$$\omega_{cg} = \sqrt{x} = \sqrt{1.154}$$
$$\omega_{cg} = 1.0742$$

Calculando o ângulo ϕ para a frequência de cruzamento de ganho ω_{cg},

$$G_p(j\omega_{cg}) = \frac{19}{-13\,(1.0742)^2 + j(1.0742)\,(12 - (1.0742)^2)}$$
$$G_p(j\omega_{cg}) = \frac{19}{-13\,(1.0742)^2 + j(1.0742)\,(12 - (1.0742)^2)}$$
$$G_p(j\omega_{cg}) = \frac{19}{-15 + j11.65}$$
$$G_p(j\omega_{cg}) = -0.79 - j0.613$$

Por fim,

$$\phi = \text{arctg}\left(\frac{-0.613}{-0.79}\right) = -142.16^\circ$$

$$\begin{aligned}\beta &= 180^\circ + \phi \\ &= 180 + (-142.16) \\ &= 37.83^\circ\end{aligned}$$

Como $\phi = -142.16^\circ$, tem-se que $\beta = 37.83^\circ$, ou seja, a margem de fase positiva, o que caracteriza um sistema estável.

Portanto, a margem de fase é

$$\text{MF} = 37.83^\circ$$

Conferindo todos os resultados o software matemático MATLAB, temos

```
>> s = tf('s');
Gp = 19/(s * (s + 12) * (s + 1));
[MG, MF, wcf, wcg] = margin(Gp)

MG = 8.2105
MF = 37.8289
wcf = 3.4641
wcg = 1.0744
```

Dessa forma, pode-se perceber valores calculados para a função de transferência da planta estão validados pelo software.

1.3 PROJETANDO O CONTROLADOR POR AVANÇO DE FASE

O controlador de avanço de fase tem a seguinte forma:

$$G_c(s) = \frac{K_c\,(s+\alpha a)}{(s+a)}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Inicialmente, é possível calcular o valor de $K_c\alpha$ através da constante de erro estática fornecida pelas especificações. Sendo $K_v = 4\text{s}^{-1}$. Temos,

$$\begin{aligned}
K_v &= K_c\alpha \lim_{s\to 0} s\,G_p(s)\\
K_v &= K_c\alpha \lim_{s\to 0} s\frac{19}{s\,(s+12)\,(s+1)}\\
K_v &= K_c\alpha\,\frac{19}{12}\\
K_c\alpha &= \frac{4}{1.5833}\\
K_c\alpha &= 2.5264
\end{aligned}$$

Reorganizando os termos da função de malha aberta, obtemos

$$\begin{aligned}
A(s) &= G_c(s)\,G_p(s)\\
&= \frac{K_c\,(s+\alpha a)}{s+a}\,G_p(s)\\
&= \frac{K_c\alpha\,\left(\dfrac{s}{\alpha}+a\right)}{s+a}\,G_p(s)\\
&= \frac{\left(\dfrac{s}{\alpha}+a\right)}{s+a}\,K_c\alpha\,G_p(s)
\end{aligned}$$

Assim, podemos definir

$$G'_c(s) = \frac{\left(\dfrac{s}{\alpha}+a\right)}{s+a} \quad \text{e} \quad G'_p(s) = K_c\alpha\,G_p(s)$$

Calculando $G'_p(j\omega)$,

$$G'_p(j\omega) = K_c\alpha\, G_p(j\omega)$$
$$G'_p(j\omega) = 2.5264 \cdot \frac{19}{-13\omega^2 + j\omega(12-\omega^2)}$$
$$G'_p(j\omega) = \frac{48}{-13\omega^2 + j\omega(12-\omega^2)}$$

Agora resta calcular a margem de ganho e margem de fase de $G_p(j\omega)$. A máxima contribuição de fase que o controlador pode proporcionar, representada por ϕ_m, ocorre numa frequência ω_m. Então a margem de fase deve ser medida na frequência ω_m, ou seja, $\omega_{cg} = \omega_m$. Obtendo a frequência de cruzamento de ganho ω_{cg} calculando $\left|G_p(j\omega)\right| = 1$,

$$\frac{|48|}{\left|-13\,\omega^2 + j\omega\,(12-\omega^2)\right|} = 1$$
$$\frac{|48|}{\sqrt{(-13\,\omega^2)^2 + \omega^2\,(12-\omega^2)^2}} = 1$$
$$\sqrt{(-13\,\omega^2)^2 + \omega^2\,(12-\omega^2)^2} = 48$$
$$(-13\,\omega^2)^2 + \omega^2\,(12-\omega^2)^2 = 48^2$$
$$169\,\omega^4 + \omega^2\,(144 - 24\omega^2 + \omega^4) = 2304$$
$$169\,\omega^4 + 144\,\omega^2 - 24\,\omega^4 + \omega^6 = 2304$$
$$\omega^6 + 145\,\omega^4 + 144\,\omega^2 - 2304 = 0$$

Considerando $x = \omega^2$, temos

$$x^3 + 145\,x^2 + 144\,x - 2304 = 0$$

e assim temos as raízes $\{3.48; -4.59; -143.88\}$

Escolhendo a raiz positiva $x = 3.48$,

$$\omega_{cg} = \sqrt{x} = \sqrt{3.48}$$
$$\omega_{cg} = 1.8655$$

Substituindo ω_{cg},

$$
\begin{aligned}
G_p(j\omega_{cg}) &= \frac{48}{-13\,(1.8655)^2 + j(1.8655)\,(12-(1.8655)^2)}\\
G_p(j\omega_{cg}) &= \frac{48}{-13\,(1.8655)^2 + j(1.8655)\,(12-(1.8655)^2)}\\
G_p(j\omega_{cg}) &= \frac{48}{-45.24 + j15.89}\\
G_p(j\omega_{cg}) &= -0.944 - j0.331
\end{aligned}
$$

O ângulo de fase de $G_p'(j\omega_{cg})$ calculado na frequência ω_{cg} é,

$$\phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{-0.331}{-0.944}\right) = 19.35^\circ$$

Ao implementar uma rede de avanço, a frequência ω_{cg} é aumentada. Esse aumento causa uma redução na margem de fase entre 5° e 12°, que deve ser acrescido ao valor de ϕ_m. Assim é preciso testar os valores e analisar como o sistema se comporta de modo a atingir os requisitos.

Adicionando 5° ao ângulo de fase

$$\phi = 45^\circ - 19.35^\circ + 5^\circ = 30.65^\circ$$

Temos,

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1-\mathrm{sen}\,(\phi)}{1+\mathrm{sen}\,(\phi)}\\
\alpha &= \frac{1-\mathrm{sen}\,(30.65)}{1+\mathrm{sen}\,(30.65)}\\
\alpha &= 0.3247
\end{aligned}
$$

Calculando a contribuição de ganho de $G_c'(j\omega)$,

$$
\begin{aligned}
\left|G_c'(j\omega)\right| &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{0.3247}}\\
&= 1.7550
\end{aligned}
$$

Para o sistema final, tal que $\omega_m = \omega_{cg}$ temos,

$$\left|G_c'(j\omega_m)\,G_p'(j\omega_m)\right| = 1$$

$$\left|G_c'(j\omega_m)\right|\,\left|G_p'(j\omega_m)\right| = 1$$

$$1.7550\left|G_p'(j\omega_m)\right| = 1$$

$$\left|G_p'(j\omega_m)\right| = \frac{1}{1.7550}$$

$$\left|G_p'(j\omega_m)\right| = 0.5698$$

A frequência ω_m pode ser encontrada a partir do módulo de $G_p'(j\omega_{cg})$.

$$\frac{|48|}{\left|-13\,\omega^2 + j\omega\,(12-\omega^2)\right|} = 0.5698$$

$$\frac{|48|}{\sqrt{(-13\,\omega^2)^2 + \omega^2\,(12-\omega^2)^2}} = 0.5698$$

$$\sqrt{(-13\,\omega^2)^2 + \omega^2\,(12-\omega^2)^2} = \frac{48}{0.5698}$$

$$(-13\,\omega^2)^2 + \omega^2\,(12-\omega^2)^2 = \left(\frac{48}{0.5698}\right)^2$$

$$169\,\omega^4 + \omega^2\,(144 - 24\omega^2 + \omega^4) = 7096.39$$

$$169\,\omega^4 + 144\,\omega^2 - 24\,\omega^4 + \omega^6 = 7096.39$$

$$\omega^6 + 145\,\omega^4 + 144\,\omega^2 - 7096.39 = 0$$

Fazendo $x = \omega^2$, encontramos as raízes $\{6.387;\ \ \text{-7.733};\ \ \text{-143.653}\}$. Escolhendo a raiz positiva,

$$\omega_m = \sqrt{6.387} = 2.527$$

Calculando a e K_c, temos

$$a = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}}$$

$$a = \frac{2.527}{\sqrt{0.3247}}$$

$$a = 4.434$$

$$K_c\alpha = 2.5264$$
$$K_c = \frac{2.5264}{\sqrt{0.3247}}$$
$$K_c = 7.78$$

Finalmente, temos a equação do controlador por avanço de fase

$$G_c(s) = \frac{K_c\,(s+\alpha a)}{(s+a)} = \frac{7.78\,(s+1.439)}{s+4.434}$$

E a seguinte função de malha aberta,

$$A(s) = G_c(s)\cdot G_p(s)$$
$$A(s) = \frac{7.78\,(s+1.439)}{s+4.434}\cdot\frac{19}{s\,(s+12)\,(s+1)}$$
$$A(s) = \frac{147,82\,(s+1.439)}{s\,(s+4.434)\,(s+12)\,(s+1)}$$

Conferindo se a função de malha aberta obtida satisfaz os requisitos estabelecidos, usou-se matemático MATLAB,

```
>> s = tf('s');
Gp = 19/(s * (s + 12) * (s + 1));
Gc = (7.78 * (s + 1.439))/(s + 4.434);

A = Gc * Gp;
[MG, MF, wcf, wcg] = margin(A)

MG = 5.0902
MF = 40.3569
wcf = 6.7979
wcg = 2.5272
```

Convertendo a margem de ganho para decibéis, encontramos

$$\mathrm{MG} = -20\,\log\left|\frac{1}{\mathrm{MG}}\right| = -20\,\log\left|\frac{1}{5.0902}\right| = 14.13\,\mathrm{dB}$$

Pode-se perceber que a margem de ganho satisfaz os requisitos especificados acima de 12 dB, porém a margem de fase encontra-se abaixo de 45°. Desse modo, torna-se necessário aumentar o valor do acréscimo ao ângulo de fase.

Adicionando 12° ao ângulo de fase

$$\phi = 45^\circ - 19.35^\circ + 12^\circ = 37.65^\circ$$

Temos,

$$\alpha = \frac{1 - \operatorname{sen}(\phi)}{1 + \operatorname{sen}(\phi)}$$
$$\alpha = \frac{1 - \operatorname{sen}(37.65)}{1 + \operatorname{sen}(37.65)}$$
$$\alpha = 0.24$$

Calculando a contribuição de ganho de $G_c'(j\omega)$,

$$\begin{aligned} \left|G_c'(j\omega)\right| &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0.24}} \\ &= 2.04 \end{aligned}$$

Para o sistema final, tal que $\omega_m = \omega_{cg}$ temos,

$$\begin{aligned} \left|G_c'(j\omega_m)\, G_p'(j\omega_m)\right| &= 1 \\ \left|G_c'(j\omega_m)\right| \left|G_p'(j\omega_m)\right| &= 1 \\ 2.04 \left|G_p'(j\omega_m)\right| &= 1 \\ \left|G_p'(j\omega_m)\right| &= \frac{1}{2.04} \\ \left|G_p'(j\omega_m)\right| &= 0.49 \end{aligned}$$

A frequência ω_m pode ser encontrada a partir do módulo de $G_p'(j\omega_{cg})$.

$$
\begin{aligned}
\frac{|48|}{\left|-13\,\omega^2 + j\omega\,(12-\omega^2)\right|} &= 0.49 \\
\frac{|48|}{\sqrt{(-13\,\omega^2)^2 + \omega^2\,(12-\omega^2)^2}} &= 0.49 \\
\sqrt{(-13\,\omega^2)^2 + \omega^2\,(12-\omega^2)^2} &= \frac{48}{0.49} \\
(-13\,\omega^2)^2 + \omega^2\,(12-\omega^2)^2 &= \left(\frac{48}{0.49}\right)^2 \\
169\,\omega^4 + \omega^2\,(144 - 24\omega^2 + \omega^4) &= 9596.0 \\
169\,\omega^4 + 144\,\omega^2 - 24\,\omega^4 + \omega^6 &= 9596.0 \\
\omega^6 + 145\,\omega^4 + 144\,\omega^2 - 9596.0 &= 0
\end{aligned}
$$

Fazendo $x = \omega^2$, encontramos as raízes $\{$7.474; -8.944; -143.53$\}$. Escolhendo a raiz positiva,

$$\omega_m = \sqrt{7.474} = 2.73$$

Calculando a e K_c, temos

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}} \\
a &= \frac{2.73}{\sqrt{0.24}} \\
a &= 5.57
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_c\alpha &= 2.526 \\
K_c &= \frac{2.526}{\sqrt{0.24}} \\
K_c &= 10.525
\end{aligned}
$$

Finalmente, temos a equação do controlador por avanço de fase

$$G_c(s) = \frac{K_c\,(s + \alpha a)}{(s+a)} = \frac{10.525\,(s+1.34)}{s+5.57}$$

E a seguinte função de malha aberta,

$$
\begin{aligned}
A(s) &= G_c(s) \cdot G_p(s) \\
A(s) &= \frac{10.525\,(s+1.34)}{s+5.57} \cdot \frac{19}{s\,(s+12)\,(s+1)} \\
A(s) &= \frac{199,97\,(s+1.34)}{s\,(s+5.57)\,(s+12)\,(s+1)}
\end{aligned}
$$

Conferindo se a função de malha aberta obtida satisfaz os requisitos estabelecidos, usou-se matemático MATLAB,

```
>> s = tf('s');
Gp = 19/(s * (s + 12) * (s + 1));
Gc = ( 10.525 * (s + 1.34) )/(s + 5.57);
A = Gc * Gp;
[MG, MF, wcf, wcg] = margin(A)

MG = 5.3288
MF = 44.9607
wcf = 7.8091
wcg = 2.7376
```

Convertendo a margem de ganho para decibéis, encontramos

$$
\mathrm{MG} = -20\,\log\left|\frac{1}{\mathrm{MG}}\right| = -20\,\log\left|\frac{1}{5.3288}\right| = 14.532\,\mathrm{dB}
$$

Pode-se perceber que a margem de ganho satisfaz os requisitos especificados acima de 12 dB e margem de fase é 44.96°. Desse modo, pode-se dizer que este último controlador satisfaz os requisitos especificados anteriormente.

2 CONTROLADOR POR ATRASO DE FASE

O compensador por atraso de fase tem como objetivo atenuar a faixa de altas frequências de forma a produzir um sistema com margem de fase suficiente (KATSUHIKO, 2011).

A planta é dada pela função de transferência

$$G_p(s) = \frac{11}{s\,(s+6)}.$$

Esse controlador será desenvolvido conforme as seguintes especificações:

- Margem de fase (MF) de 60°
- Margem de ganho (MG) que não seja inferior a 20 dB
- Erro estático de velocidade (e_v) de 5%

Inicialmente, foi calculado a margem de fase e a margem de ganho da planta. Posteriormente, é projetado o controlador de forma a atender os requisitos desejados.

2.1 CÁLCULO DA MARGEM DE GANHO

A função estudada refere-se a um sistema de segunda ordem, sendo assim, de acordo com a literatura, a margem de ganho para este será **infinita**. Além disso, visto que o diagrama polar para este sistema não cruza o eixo real negativo, é considerado estável.

2.2 CÁLCULO DA MARGEM DE FASE

A margem de fase é dada por

$$\beta = 180 + \phi$$

Seja ϕ o ângulo de $A\{j\omega\}$ na frequência ω_{cg} de forma que o módulo de $A\{j\omega\}$ é unitário. Sendo

$$A(j\omega) = \frac{11}{-\omega^2 + 6\omega j}$$

Calculando $\left|A(j\omega)\right| = 1$,

$$\frac{|11|}{|-\omega^2 + 6\omega j|} = 1$$

$$\frac{|11|}{\sqrt{(-\omega^2)^2 + (6\omega)^2}} = 1$$

$$\sqrt{(-\omega^2)^2 + (6\omega)^2} = 11$$

$$\omega^4 + 36\omega^2 = 11^2$$

$$\omega^4 + 36\omega^2 - 121 = 0$$

Considerando $x = \omega^2$, temos

$$x^2 + 36\,x - 121 = 0$$

e assim temos as raízes $\{-39.0950; 3.0950\}$

Escolhendo a raiz positiva $x = 3.0950$,

$$\omega_{cg} = \sqrt{x} = \sqrt{3.0950}$$
$$\omega_{cg} = 1.7593$$

Calculando o ângulo ϕ para a frequência de cruzamento de ganho ω_{cg},

$$A(j\omega_{cg}) = \frac{11}{-(1.7593)^2 + 6(1.7593)j}$$

$$A(j\omega_{cg}) = \frac{11}{-3.0951 + 10.5558\,j}$$

$$A(j\omega_{cg}) = -0.2814 - 0.9596\,j$$

Por fim,

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-0.9596}{-0.2814}\right) = -106.34^\circ$$

$$\begin{aligned}\beta &= 180^\circ + \phi \\ &= 180 + (-106.34) \\ &= 73.65^\circ\end{aligned}$$

Portanto, a margem de fase é

$$\text{MF} = 73.65°$$

Conferindo os valores pelo software matemático MATLAB, obtemos

```
>> s = tf('s');
Gp = 11 / (s * (s + 6));
[MG, MF, wcf, wcg] = margin(Gp)

MG = Inf
MF = 73.6583
wcf = Inf
wcg = 1.7593
```

Dessa forma, percebe-se que os cálculos estão em harmonia com os resultados do MATLAB.

2.3 PROJETANDO O CONTROLADOR POR ATRASO DE FASE

O compensador a ser encontrado é da seguinte forma

$$G_c(s) = \frac{K_c\,(s + \alpha a)}{(s + a)}, \quad \alpha > 1$$

Inicialmente, é realizada a aplicação do erro de velocidade $e_v = 0.05$, o que nos traz

$$\begin{aligned}
K_v &= \frac{1}{e_v} = \frac{1}{0.05} = 20 \\
K_v &= K_c\alpha \lim_{s \to 0} sG_p(s) \\
K_v &= K_c\alpha \lim_{s \to 0} s\frac{11}{s(s+6)} \\
K_v &= K_c\alpha \frac{11}{6} \\
20 &= K_c\alpha \frac{11}{6} \\
K_c\alpha &= 10.9091
\end{aligned}$$

Reorganizando os termos da função de transferência de malha aberta, obtemos

$$
\begin{aligned}
A(s) &= G_c(s)\, G_p(s) \\
&= \frac{K_c\,(s+\alpha a)}{(s+a)}\, G_p(s) \\
&= \frac{K_c\, a \left(\dfrac{s}{\alpha a}+1\right)}{a\left(\dfrac{s}{a}+1\right)}\, G_p(s) \\
&= \frac{\left(\dfrac{s}{\alpha a}+1\right)}{\dfrac{s}{a}+1}\, K_c\,\alpha\, G_p(s)
\end{aligned}
$$

Tomando $G_c^{'}(s) = \dfrac{\left(\dfrac{a}{\alpha a}+1\right)}{\dfrac{s}{a}+1}$ e $G_p^{'}(s) = K_c\,\alpha\, G_p(s)$, teremos $A(s) = G_c^{'}(s)\, G_p^{'}(s)$.

$$
G_p^{'}(j\omega) = K_c\,\alpha\, G_p(j\omega) \qquad \Rightarrow \qquad G_p^{'}(j\omega) = \frac{120}{j\omega\,(j\omega+6)}
$$

O projeto apresenta como requisito uma margem de fase $\beta = 60°$. Como é de conhecimento, a margem de fase deve ser acrescida de um ângulo de $5°$ a $12°$, de forma a compensar o efeito causado por $G_c^{'}(j\omega)$. Comecemos acrescentando $5°$.

$$
\begin{aligned}
\phi &= \beta - 180° \\
\phi &= 65° - 180° \\
\phi &= -115°
\end{aligned}
$$

Calculemos ω_{cg} sabendo que

$$
\begin{aligned}
G_c^{'}(j\omega) &= \frac{120}{j\omega\,(j\omega+6)} = \frac{120}{(-\omega^2 - j\omega 6)} \\
tg(G_c^{'}(j\omega)) &= 0° - tg^{-1}\left(\frac{6\omega}{-\omega^2}\right) = -115° \\
\frac{6}{-\omega} &= tg(-115°) \\
\frac{6}{\omega} &= 2.144 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{cg} = 2.798
\end{aligned}
$$

O termo αa é calculado como $\alpha a = 0.1\omega_{cg}$, sendo assim, na frequência encontrada deve-se ter

$$|A(j\omega_{cg})| = 1$$
$$|G_c^{'}(j\omega_{cg})G_p^{'}(j\omega_{cg})| = 1$$

O módulo de $G_p^{'}(j\omega_{cg})$ na frequência ω_{cg} é

$$G_p^{'}(j\omega_{cg}) = \frac{120}{j\omega(j\omega+6)}$$
$$|G_p^{'}(j\omega_{cg})| = \frac{120}{\omega\sqrt{(\omega^2+36)}}$$
$$|G_p^{'}(j\omega_{cg})| = \frac{120}{2.798\sqrt{(2.798^2+36)}}$$
$$|G_p^{'}(j\omega_{cg})| = 6.4786$$

Assim, temos que:

$$|G_c^{'}(j\omega_{cg})||G_p^{'}(j\omega_{cg})| = 1$$
$$\left|\frac{\frac{j\omega_{cg}}{\alpha a}+1}{\frac{j\omega_{cg}}{a}+1}\right| = \frac{1}{|G_p^{'}(j\omega_{cg})|}$$
$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\omega_{cg}}{\alpha a}\right)^2+1}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_{cg}}{a}\right)^2+1}} = \frac{1}{|G_p^{'}(j\omega_{cg})|}$$
$$\frac{(10)^2+1}{\left(\frac{\omega_{cg}}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{6.4786^2}$$
$$\left(\frac{\omega_{cg}}{a}\right)^2+1 = 101(41.967)$$
$$a = 0.0430$$

Dado que $\alpha a = 0.1\omega_{cg}$ obtém-se

$$\alpha = \frac{0.2798}{0.0430} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 6.5102$$

E dado que $K_c\alpha = 10.9091$ então, $K_c = 1.6757$.

Finalmente, temos a equação do controlador por atraso de fase

$$G_c(s) = \frac{K_c\,(s+\alpha a)}{(s+a)} = \frac{1.6757(s+0.2798)}{(s+0.0430)}$$

E a função de transferência de malha aberta,

$$A(s) = G_c(s)\cdot G_p(s)$$
$$A(s) = \frac{1.6757(s+0.2798)}{(s+0.0430)}\cdot\frac{11}{s\,(s+6)}$$
$$A(s) = \frac{18.43s+5.157}{s^3+6.043s^2+0.2579s}$$

A verificação pelo MATLAB nos fornece as seguintes informações:

```
>> s = tf('s');
Gp = 11 / (s * (s + 6));
Gc = (1.6757 * (s + 0.2798))/(s + 0.0430);
A = Gc * Gp;
[MG, MF, wcf, wcg] = margin(A)

MG = Inf
MF = 60.1697
wcf = Inf
wcg = 2.7978
```

A margem de ganho infinita condiz com o esperado, visto que o sistema a ser estudado é de segunda ordem. É perceptível que não existe necessidade de aumentar a compensação, pois a margem de fase obtida é bem próxima da desejada, além disso, se aumentarmos ou diminuirmos a compensação, a margem de fase se distanciará mais do requisito e continuaremos com uma margem de ganho infinita.

3 CONCLUSÃO

Para o controlador de avanço de fase as especificações requisitaram um valor de margem de fase de 45°. Primeiramente foi adicionado um ângulo de compensação de 5°, o que resultou em uma margem de fase de 40.3569°, ou seja, fora do ideal desejado pelas especificações. Em seguida, foi adicionado um ângulo de compensação de 12°, resultando uma margem de fase de 44.9607° e uma margem de ganho de 14.532 dB, atendendo os requisitos desejados.

Para o controlador de atraso de fase foi requisitado uma margem de fase de 60° e uma margem de ganho superior a 20 dB. Um ângulo de compensação de 5° foi suficiente para que o controlador atendesse as especificações, resultando em uma margem de fase de 60.1697° e uma margem de ganho infinita.

Portanto, para as funções da planta, tanto para o controlador do avanço de fase e do atraso de fase, foi possível obter controladores que atentem as especificações desejadas.

REFERÊNCIAS

KATSUHIKO, O. Engenharia de controle moderno. **KATSUHIKO Ogata, 5th Ed. 801p**, 2011. Citado na página 15.

MAYA, P. Á.; LEONARDI, F. Controle essencial. **Ed Pearson Prentice Hall**, 2011. Citado na página 3.