



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO**

ANDERSON DE ALENCAR BARROS  
EDON BRENDON SOUZA DOS SANTOS  
JORGE HENRIQUE COELHO GOMES

**PROJETO DE UM CONTROLADOR PI e PID**

**JUAZEIRO - BA**

**2021**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO**

ANDERSON DE ALENCAR BARROS  
EDON BRENDON SOUZA DOS SANTOS  
JORGE HENRIQUE COELHO GOMES

**PROJETO DE UM CONTROLADOR PI e PID**

Projeto requerido para obtenção de nota parcial na disciplina de Controle I sob a orientação do Prof. Dr. Manoel de Oliveira Santos Sobrinho.

**JUAZEIRO - BA**

**2021**

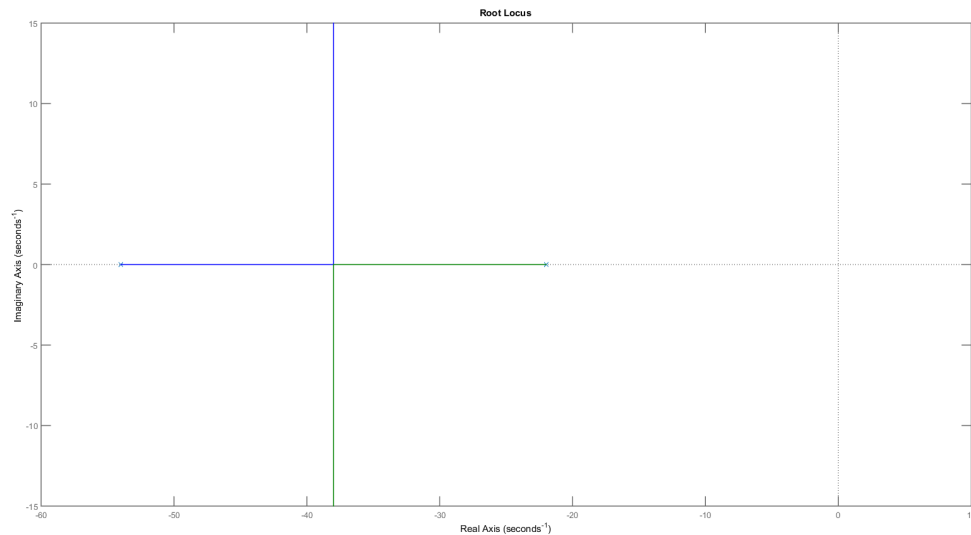
## SUMÁRIO

1	DISCUSSÃO . . . . .	3
2	PROJETANDO UM CONTROLADOR PI . . . . .	5
3	PROJETANDO UM CONTROLADOR PID . . . . .	11
4	CONCLUSÃO . . . . .	15
	REFERÊNCIAS . . . . .	17

## 1 DISCUSSÃO

O projeto consiste no desenvolvimento de um controlador de primeira ordem (PI), que contém um polo e um zero, e um de segunda ordem (PID), que é composto por dois polos e dois zeros para a função da planta abaixo.

$$G_p(s) = \frac{98}{(s + 22)(s + 54)}$$



**Figura 1** – Lugar das Raízes da função da planta

Os controladores devem apresentar as seguintes características:

- Erro de posição nulo
- Sobressinal de 5%
- Tempo de estabelecimento de 0.1 segundos

Com essas características podemos encontrar os polos de malha fechada. Temos o sobressinal e o tempo de estabelecimento,

$$M_p = 5\%$$

$$t_e = 0.1$$

Desse modo,

$$\alpha = \frac{4}{t_e} = 40 \qquad \xi = \frac{|\ln(M_p)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln(M_p)^2}} = 0.69$$

$$\omega_n = \frac{\alpha}{\xi} = 57.96 \qquad \omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} = 41.94$$

Os polos são dados por,

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

Portanto, os polos de malha fechada são,

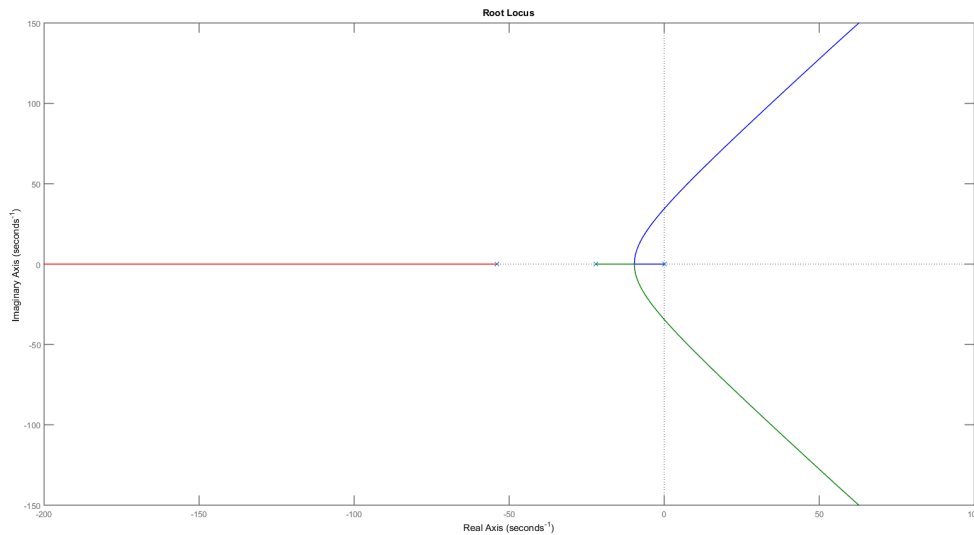
$$s_1 = -40 + j41.94 \qquad s_2 = -40 - j41.94$$

## 2 PROJETANDO UM CONTROLADOR PI

A principal função da ação integral é fazer com que o sistema rastreie o degrau com erro nulo em estado estacionário. Dessa forma, temos que o controlador é definido pela equação abaixo:

$$G_c = \frac{K_c (s - z)}{s}$$

Logo, para projetar o controlador PI é necessário alocar um polo rastreador em  $s = 0$ .



**Figura 2** – Função da planta com polo rastreador

E utilizando a condição de ângulo é possível determinar o valor do zero do controlador ( $z$ ):

$\theta_1$  - ângulo do polo do controlador (rastreador)

$\theta_2$  - ângulo do polo da planta -22

$\theta_3$  - ângulo do polo da planta - 54

$\phi_1$  - ângulo do zero do controlador

Calculando os ângulos, temos

$$\theta_1 = 180 - \arctg\left(\frac{41.94}{40}\right) = 133.63^\circ$$

$$\theta_2 = 180 - \arctg\left(\frac{41.94}{40 - 22}\right) = 113.22^\circ$$

$$\theta_3 = \arctg\left(\frac{41.94}{54 - 40}\right) = 71.54^\circ$$

Calculando  $\phi_1$ ,

$$\begin{aligned}\sum \phi_z - \sum \theta_P &= -180 \\ \phi_1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) &= -180 \\ \phi_1 &= -180 + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \phi_1 &= 138.40^\circ\end{aligned}$$

E calculando  $z$ ,

$$z = -\frac{41.94}{\arctg(138.40)} - 40 = 7.25$$

Como o valor de  $z$  foi alocado no semi plano direito (SPD), temos que o sistema torna-se instável, portanto, faz-se necessário tratar este erro de forma a buscar a estabilidade do sistema. Tendo isso em mente, é possível alocar o valor do zero do controlador próximo ao polo da planta em -22, considerando a incerteza de 10% na planta, assim o novo zero é alocado em -24.2 e a nova função do controlador é dada por:

$$G_c = \frac{K_c (s + 24.2)}{s}$$

Com isso, podemos determinar a função de transferência de malha aberta pela relação

$$A(s) = G_p(s) \cdot G_c(s) = \frac{98 K_c (s + 24.2)}{s (s + 22)(s + 54)}$$

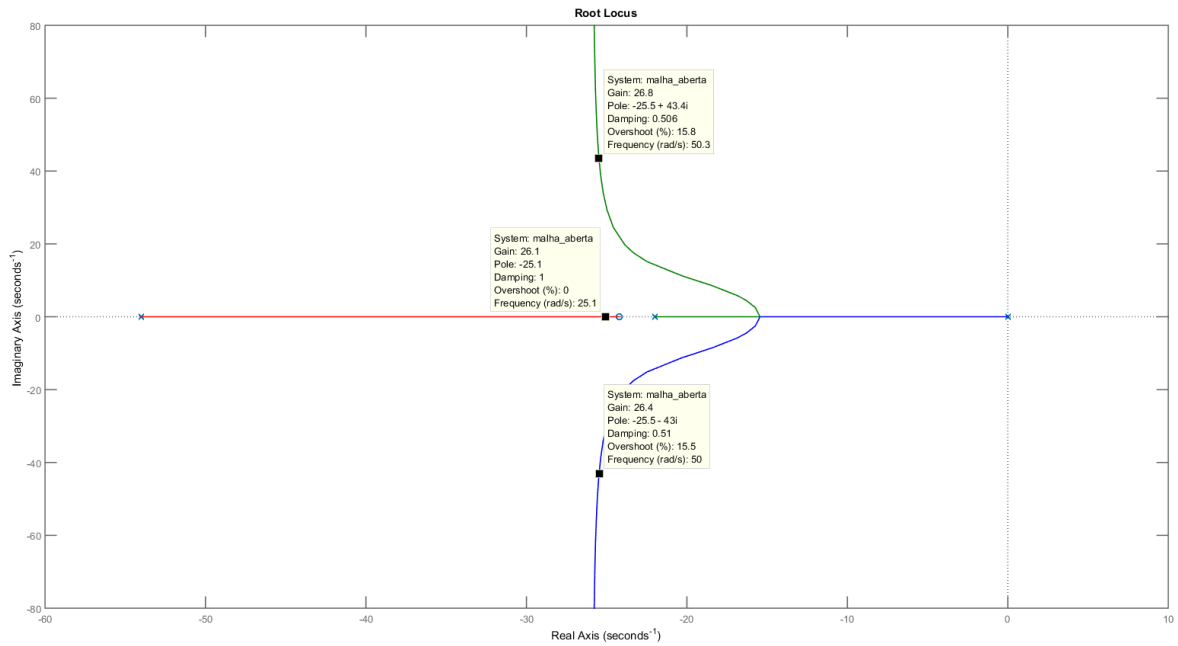
Para o cálculo do  $K_c$  é necessário aplicar a condição de módulo  $|A(s)| = 1$ , o que nos conduz a,

$$\left| \frac{98 K_c (s + 24.2)}{s (s + 22)(s + 54)} \right| = 1$$

$$K_c = \left| \frac{s(s + 22)(s + 54)}{98 (s + 24.2)} \right|$$

$$K_c = 26.63$$

O Lugar das Raízes da malha aberta em função de  $K_c = 26.63$  é mostrado abaixo.



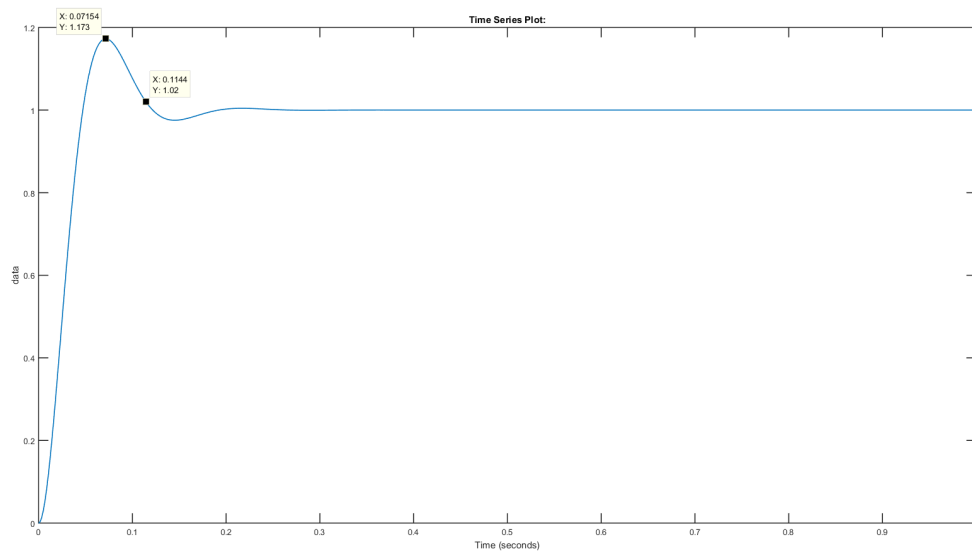
**Figura 3** – Gráfico de lugar das raízes da malha aberta. É possível visualizar os polos de malha fechada.

Logo, a função do controlador PI passa a ser,

$$G_c = \frac{26.63 (s + 24.2)}{s}$$

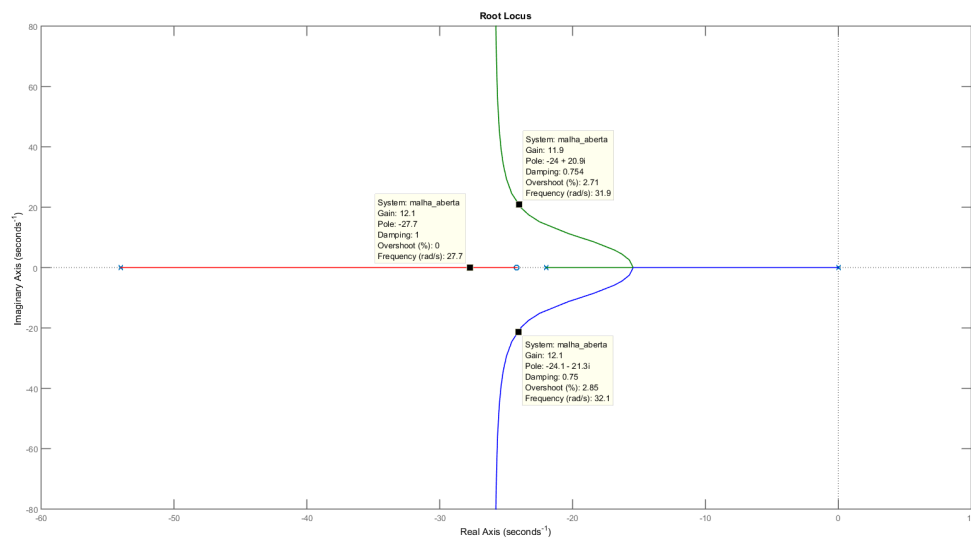
Temos que a resposta ao degrau da malha fechada é,





**Figura 4** – Resposta ao degrau da malha fechada

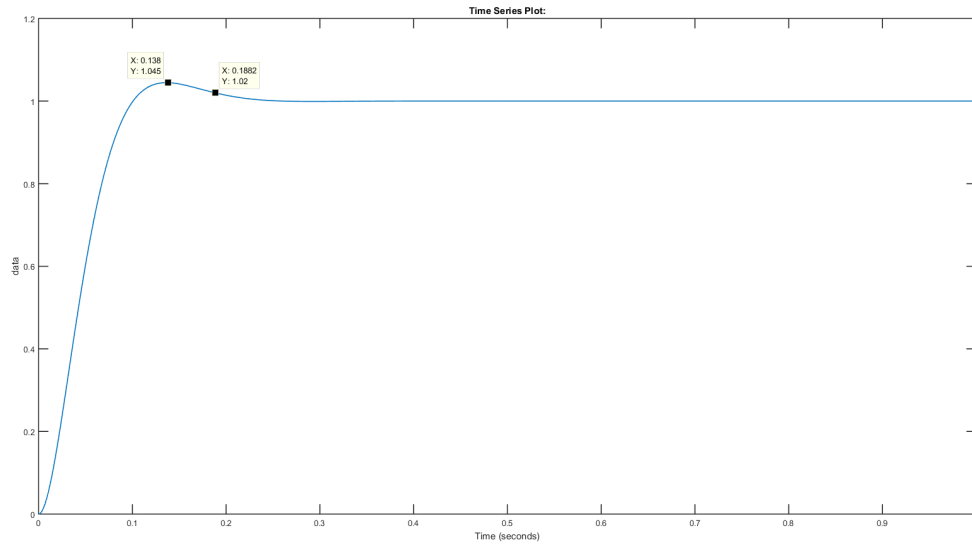
Podemos ver que o sobressinal foi de 17% e o tempo de estabelecimento de 0.11 segundos, ou seja um sobressinal 3 vezes maior do que o desejado. Esse fato é explicado devido ao fator integral acumular erros do passado, e como bem sabemos, o  $K_c$  está intrinsecamente relacionado ao sobressinal, o que faz com que este seja alto para um  $K_c$  também elevado. Desse modo, podemos refinar o nosso controlador para que diminua o valor do sobressinal, ajustando o  $K_c$  para 12, porém sacrificando o tempo de estabelecimento.



**Figura 5** – Lugar das Raízes para a função de transferência de malha aberta.

Assim, é possível visualizar um sobressinal de 4.5% e tempo de estabelecimento de 0.188 segundos. Sendo mais seguro para o sistema um tempo de estabelecimento maior do

que um sobressinal mais alto que pode por em risco a integridade do sistema.



**Figura 6** – Resposta ao degrau para a função de malha fechada para  $K_c = 12$ .

Determinamos o intervalo de  $K_c$  para que o sistema seja estável de acordo com a função de transferência de malha fechada.

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 1188 + 98 K_c & 0 \\ s^2 & 76 & 2371 K_c & 0 \\ s^1 & b_1 & b_2 = 0 & \\ s^0 & c_1 & & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{90288 + 7448 K_c - 2371 K_c}{76}$$

$$b_1 = 66.80 K_c + 1188$$

$$c_1 = 2371 K_c$$

Daí, temos

$$2371 K_c > 0$$

$$K_c > 0$$

$$66.80 K_c + 1188 > 0$$

$$K_c > -17.80$$

Podemos ver que para que o sistema se comporte de  $K_c$  deve ser maior do que zero. O controlador PI comportou de forma estável, todavia não foi capaz de atender os requisitos propostos nas especificações.

### 3 PROJETANDO UM CONTROLADOR PID

Como visto, o controlador PI não é robusto o suficiente para atender as especificações propostas. De forma a buscar um tempo de estabelecimento abaixo ou mais próximo do que é requerido e, além disso, melhorar o desempenho do controlador como um todo, é mostrado o processo da adição derivativa, com o projeto do controlador PID. Esse dispositivo apresenta a seguinte função de transferência.

$$G_c(s) = \frac{K_c (s - z_1) (s - z_2)}{s (s - p)}.$$

Temos que o sistema possui um polo em  $s = 0$ , e assim, o polo  $z_1$  deverá ser alocado próximo ao polo mais lento da planta. Alocaremos o polo  $p$  para 5 vezes o parte real do polo de malha fechada, tal que o valor de  $p$  seja igual a  $-200$ . Além disso, com uma incerteza de 10% na planta, alocaremos o zero  $z_1$  de forma que esteja à esquerda do polo mais lento  $(-22)$ , ou seja, para 24.2.

Pelo critério da condição de ângulo, podemos encontrar o valor do segundo zero  $z_2$ ,

$\theta_1$  - ângulo do polo do controlador (rastreador)

$\theta_2$  - ângulo do polo da planta -22

$\theta_3$  - ângulo do polo da planta -54

$\theta_4$  - ângulo do polo da planta  $p$

$\phi_1$  - ângulo do zero  $z_1$  do controlador

$\phi_2$  - ângulo do zero  $z_2$  do controlador

Calculando os ângulos, temos

$$\theta_1 = 180 - \arctg\left(\frac{41.94}{40}\right) = 133.63^\circ$$

$$\theta_2 = 180 - \arctg\left(\frac{41.94}{40 - 22}\right) = 113.22^\circ$$

$$\theta_3 = \arctg\left(\frac{41.94}{54 - 40}\right) = 71.54^\circ$$

$$\theta_4 = \arctg\left(\frac{41.94}{200 - 40}\right) = 14.69^\circ$$

$$\phi_1 = 180 - \arctg\left(\frac{41.94}{40 - 24.2}\right) = 110.63^\circ$$

Calculando  $\phi_2$ ,

$$\begin{aligned}\sum \phi_z - \sum \theta_P &= -180 \\ (\phi_1 + \phi_2) - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) &= -180 \\ \phi_2 &= -180 + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - \phi_1 \\ \phi_2 &= 42.45^\circ\end{aligned}$$

Calculando  $z_2$ ,

$$z_2 = -\frac{41.94}{\tan(\phi_2)} - \alpha = -85.84$$

Obtemos a função de malha aberta

$$\begin{aligned}A(s) &= G_p(s) \cdot G_c(s) \\ &= \frac{98}{(s+22)(s+54)} \cdot \frac{K_c(s+24.2)(s+85.84)}{s(s+200)} \\ &= \frac{98 K_c (s+24.2)(s+85.84)}{s(s+22)(s+54)(s+200)}\end{aligned}$$

Pela condição de módulo  $|A(s)| = 1$ , podemos calcular o valor de  $K_c$ . Sendo  $s = -40 + j41.94$ ,

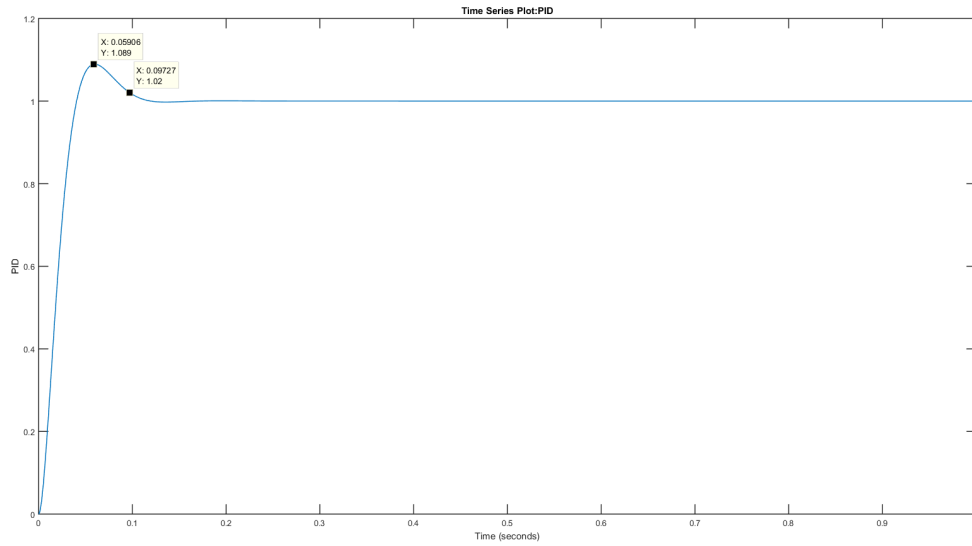
$$\begin{aligned}\left| \frac{98 K_c (s+24.2)(s+85.84)}{s(s+22)(s+54)(s+200)} \right| &= 1 \\ K_c &= \left| \frac{s(s+200)(s+22)(s+54)}{(s-z_1)(s-z_2)} \right| \\ K_c &= \left| \frac{s(s+200)(s+22)(s+54)}{(s+24.2)(s+85.84)} \right| \\ K_c &= 70.89\end{aligned}$$

Portanto,  $G_c(s)$  passa a ser

$$G_c(s) = \frac{70.89 (s+24.2)(s+85.84)}{s(s+200)}.$$

Na Figura 7 é mostrado o gráfico da resposta ao degrau em malha fechada, além disso, é possível perceber o mesmo demonstra alto sobressinal de 8.9% com um tempo de

estabelecimento aceitável, visto que a característica esperada seria de 0.1 segundos e foi encontrado 0.09 segundos, o que nos conduz a realizar nova modificação sobre o polo.



**Figura 7** – Resposta ao degrau da função de malha fechada

Usando o critério de 10%, podemos trazer o zero  $z_2$  para perto do polo da planta, desse modo,  $z_2 = 59.4$ .

Calculando  $K_c$  novamente,

$$K_c = \left| \frac{s(s+p)(s+22)(s+54)}{(s-z_1)(s-z_2)} \right|$$

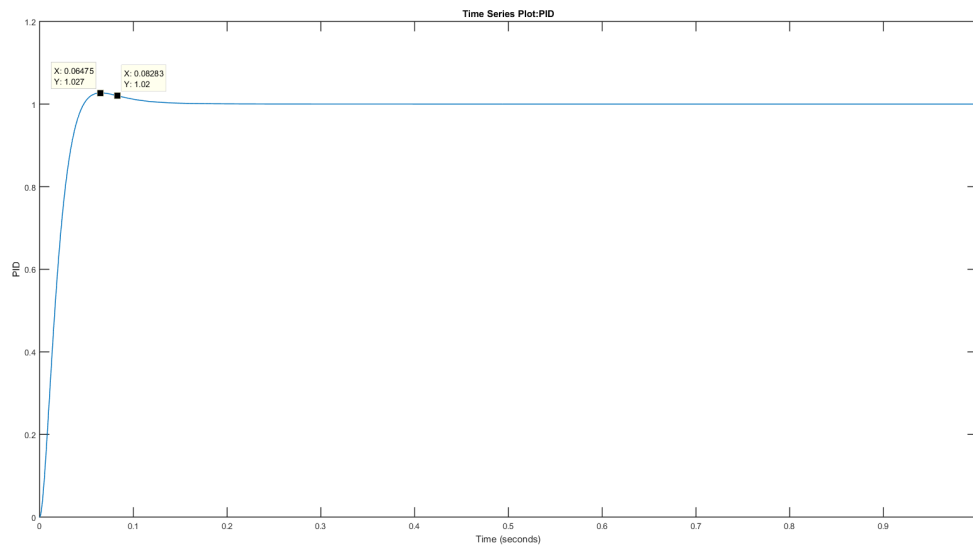
$$K_c = \left| \frac{s(s+200)(s+22)(s+54)}{(s+24.2)(s+59.4)} \right|$$

$$K_c = 95.32$$

Assim, a função do controlador torna-se

$$G_c(s) = \frac{95.32(s+24.2)(s+59.4)}{s(s+200)}.$$

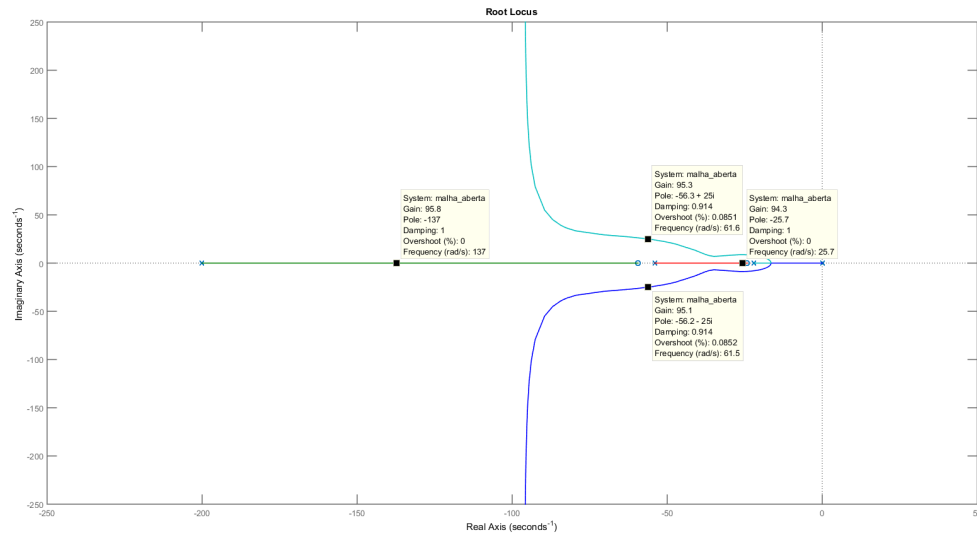
Logo, podemos obter uma nova resposta ao degrau.



**Figura 8** – Resposta ao degrau da a malha fechada para a nova função do controlador

É possível visualizar que o sobressinal foi de 2.7% e que o tempo de estabelecimento foi de 0.08 segundos, ou seja, dentro das especificações requisitadas.

Podemos visualizar o lugar das raízes da malha aberta para este sistema e os polos de malha fechada para  $K_c = 95.32$ .



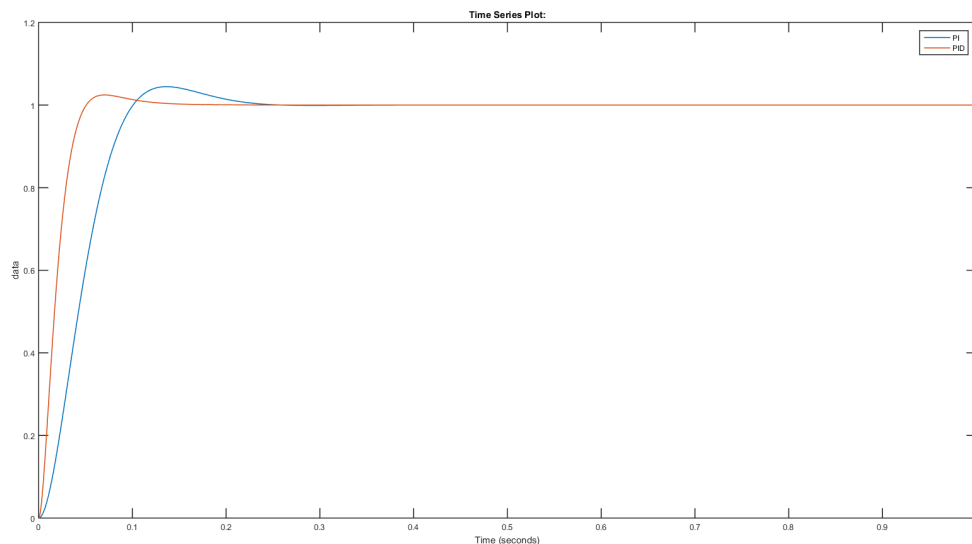
**Figura 9** – Lugar das Raízes para a função de transferência de malha aberta  $A(s)$

Diante de todas as considerações já realizadas, é possível perceber que quanto mais próximo do polo o zero for alocado, melhor será o desempenho para as características do controlador utilizadas.

## 4 CONCLUSÃO

Com base nos resultados obtidos, é possível perceber que o PI não é capaz de satisfazer as especificações desejadas. Foi percebido, inicialmente, uma característica instável do PI, alocando um zero no SPD e devido a isso foi usado o critério dos 10% da planta. Mesmo alocando o zero no SPE, o controlador PI apresentou um sobressinal de 17%. Por fim, diminuindo o valor de  $K_c$  o PI apresentou um desempenho razoável, porém ainda não o que era desejado.

Enquanto que o PID se mostrou muito eficaz em atingir os parâmetros desejados, além de um excelente desempenho, justamente por causa da sua rede de avanço existe uma melhoria no aproveitamento no tempo de estabelecimento, além do zero e polo que são aproveitados do PI.



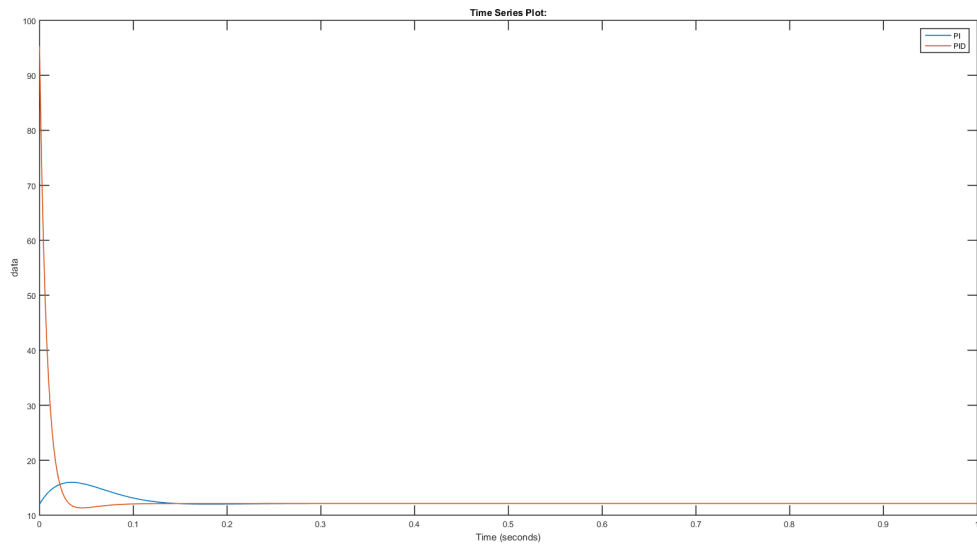
**Figura 10** – Comparação da resposta ao degrau. Em laranja (PID) tem melhor desempenho que o PI (em azul).

Controlador	Sobressinal (%)	Tempo de estabelecimento (segundos)
PI	4.5	0.188
PID	2.7	0.08

Na Figura 11 é mostrada a comparação entre o esforço de controle do PI e do PID. O PID possui um esforço elevado logo no início, para diminuir o erro de forma rápida, mantendo a variável de saída do processo sob controle, sendo possível atingir a referência



em menor tempo e com menos esforço de controle ao longo do tempo. Enquanto o PI trabalha de forma mais linear levando a saída até a referência com curvas mais moderadas.



**Figura 11** – Comparação do esforço de controle entre o PID (em laranja) e o PI (em azul).

## REFERÊNCIAS

KATSUHIKO, O. Engenharia de controle moderno. **KATSUHIKO Ogata, 5th Ed. 801p**, 2011.

MAYA, P. Á.; LEONARDI, F. Controle essencial. **Ed Pearson Prentice Hall**, 2011.