UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física de São Carlos

Projeto 3:EQUAÇÕES DE ONDAS - II

Anderson Araujo de Oliveira 11371311

2020

Conteúdo

1 Teoria e código

1.1 Teoria

Suponhamos duas funções senoidal, e com uma extremidades fixas, sendo essa x(0,t)=0 .

$$y(x,t) = f(x-ct) + h(x+ct) \tag{1}$$

Quando a onda está na extremidade vemos que existe uma igualdade entre as duas onda.

$$0 = f(x-ct) + h(x+ct) \longrightarrow f(x-ct) = -h(-x-ct) \tag{2}$$

$$y(x,t) = h(x-ct) - h(-x-ct) \tag{3}$$

Esse resultado mostra, que quando chegamos na extremidade da corda a uma onda vindo sentido contrário, porém sendo negativa, mas é isso que é esperado quando a extremidade é fica, já que é isso que vimos que no projeto anterior, porém, esse resultado pode ficar mais interessante, como citamos mais acima, a onda tem comportamento senoidal, logo, podemos reescrever $h(x-ct) = e^{iw(t-x/c)}$

$$y(x,t) = e^{iwt}(e^{-iw\frac{x}{c}} - e^{iw\frac{x}{c}}) \tag{4}$$

Assim, podemos obtemos a seguinte expressão.

$$y = -2ie^{i\omega t}\sin\omega\frac{x}{c} \tag{5}$$

Podemos, ver que esse modelo que para lugares específicos a onda em diferentes tempos a nessa posição ela sempre será nula, $\sin\frac{\omega x}{c} = 0$, para valores que $x = \frac{nc\pi}{\omega}, n \in Z$, onde esses pontos são chamados de nodos.Entre quaisquer dois nodos sucessivos, todo ponto se movimenta para cima e para baixo de forma senoidal, mas o padrão do movimento permanece fixo no espaço.Se for possível encontrar um padrão de movimento cuja propriedade seja que em qualquer ponto o objeto se move de maneira perfeitamente senoidal, e que todos os pontos se movem com a mesma frequência, então temos o que é chamado um modo.

Com essa propriedade acima, é possível trabalhar melhor com onda confinada, onde as duas extremidades estejam fixas, para x=0 e x=L, a onda terá um certo comportamento senoidal $\sin(\frac{\omega L}{c}) = 0$,podemos definir a extremidade da seguinte maneira.

$$\frac{\omega L}{c} = n\pi \tag{6}$$

omega poderá ser fornecido da seguinte maneira maneira.

$$\omega = \frac{cn\pi}{L} \tag{7}$$

Portanto descobrimos que o movimento de uma onda confinada, se movimenta de forma senoidal, mas apenas em certas frequências, não portanto quão complicado seja o sistema, sempre ocorre que há padrões de movimento que têm dependência no tempo com uma onda senoidal, mas com frequências que são propriedades do sistema em particular e da natureza das suas extremidades(podendo ser livre e fixas).Para o primeiro modo dessa corda temos que $\lambda = 2L$, a frequência angula $\omega = 2\pi c$,e a frequência é $f = \frac{\pi c}{L}$.Para o seguinte o modo $\Lambda = L$, tanto a frequência e frequência angular aumenta duas vezes mais, para os modos seguintes 1,2,3...,n, esse padrão continua.Qualquer movimento pode ser analisado supondo-se que ele é a soma dos movimentos de todos os diferentes modos, combinados com amplitudes e fases apropriadas

1.2 Projeto

.

Vamos agora falar do projeto, iremos analisar o espectro potencial da função de uma onda Gaussiana, onde fixamos um único ponto($\frac{L}{4}$) da corda para ver o movimento em vários tempos diferentes, para isso utilizamos o código que fizemos no projeto passado para geral o movimento da gaussiana, após, colocamos em um vetor todo o movimento da onda em decorrer do tempo, com isso colocamos os dados obtidos na transformada de fourier, portanto, extraímos o espectro de potências da função.

1.3 Código

```
program analise
  implicit real*8(a-h,o-z)
  real*8 ::imag1
  real*8, dimension(50000) :: valor
  real*8, dimension(11000,20010)::y
!condi  es iniciais
!======onda=========
write(*,*)"Digite o valor que vai multiplicar L"
read(*,*)x
write(*,*)"Digite 1 para a extremidade seja livre, 0 para extremidade fixa"
read(*,*)borda
L=1.0d0
r=1.0d0
dt=0.001d0/300d0
do i=2,1000!colocando todos os pontos y(x,0)
    y(i,2)=exp(-(i*0.001d0-L*x)**2/(L/30.0d0)**2)!
    y(i,1)=y(i,2)
enddo
    r=1
do n=2,10000
    do i=2,1000
    if(borda==0)then
     y(1000,n)=0
     y(1000,n+1)=0
```

```fortran
    endif
     y(2,n)=0
     y(2,n+1)=0
     if(1001==i+1)then!para caso valor 1+i seja no contorno 1001, pegar o valor anterior
            y(i+1,n)=y(i,n)
            y(i,n+1)=2.0d0*(1.0d0-r**2)*y(i,n)+(r**2.0d0)*(y(i+1,n)+y(i-1,n))-y(i,n-1)
      else if(1==i-1)then!para caso valor i-1 seja no contorno 1001, pegar o valor anterior
            y(i-1,n)=y(i,n)
            y(i,n+1)=2.0d0*(1.0d0-r**2)*y(i,n)+(r**2.0d0)*(y(i+1,n)+y(i-1,n))-y(i,n-1)
      else
            y(i,n+1)=2.0d0*(1.0d0-r**2)*y(i,n)+(r**2.0d0)*(y(i+1,n)+y(i-1,n))-y(i,n-1)
      end if
    enddo
enddo
do n=1,10000!passar tudo para um vetor
    valor(n)=y(250,n)
    write(2,*)n,y(250,n)
enddo
!======transformada de fourier=====
pi=dacos(-1.0d0)
  do k=1,10000
    real1=0
    imag1=0
    !soma de fourier
    do j=1,10000
      real1=real1+valor(j)*dcos(2d0*pi*j*k/10000d0)
      imag1=imag1+valor(j)*dsin(2d0*pi*j*k/10000d0)
    enddo
    p=(real1)**2+(imag1)**2
    !saida de dados
    write(4,*)k/(10000*dt),p
    write(1,*)k/(10000*dt),real1
    write(3,*)k/(10000*dt),imag1
  enddo
end program
```

2 Parte A

Nessas partes deste projeto, iremos verificar quais frequências então presente no espectro de potências, para encontrar as frequências normais, que compõem a função de onda, nas imagem abaixo podemos ver quais frequências então composta no função.

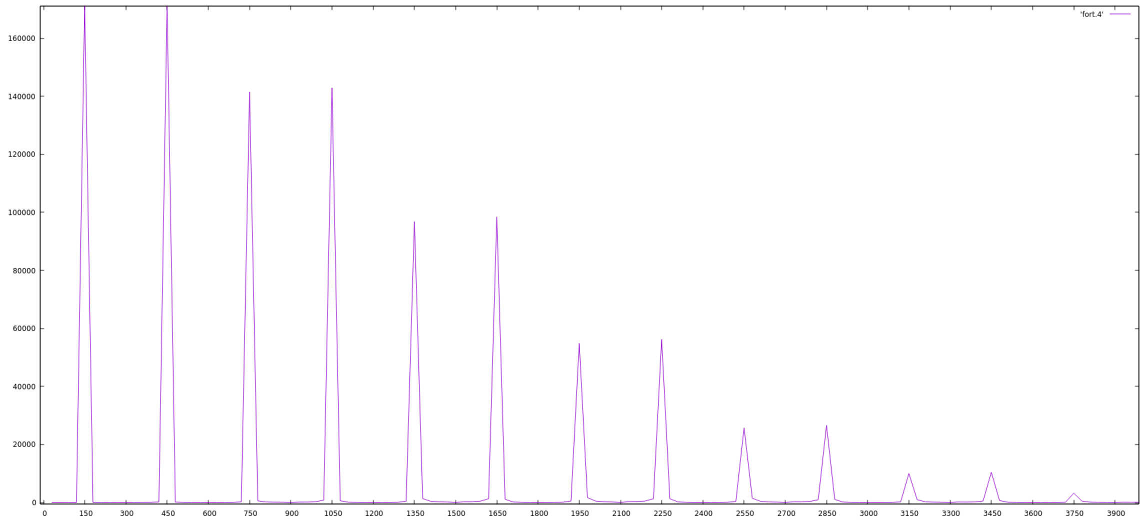

Figura 1: Transformada de fourier para quando $x_0 = \frac{L}{2}$

Vemos que na figura 1, os modos que companham a onda são as $f = (1 + 2n)150Hz$, indo até o valor de 3750Hz.

3 Parte B

Vemos ao deslocar a origem da onda Gaussiana, vemos que os modos também são alteradas, conseguindo um padrão frequência diferente no espectro de potências.

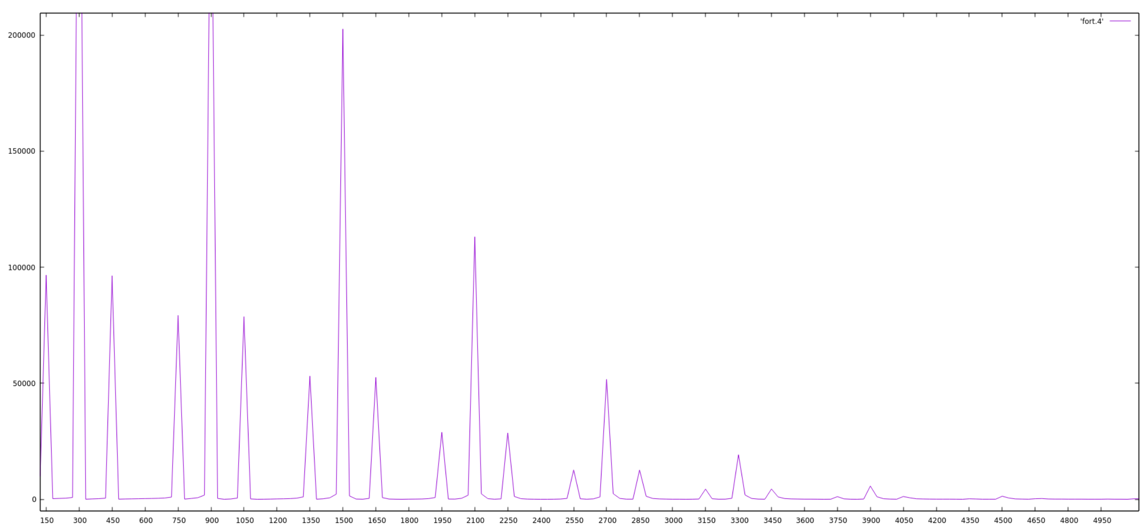

Figura 2: Transformada de fourier para quando $x_0 = \frac{L}{4}$

Vemos que as onda presentes no gráfico, seguem o seguinte padrão, $f_1 = (4n + 1) \cdot 150Hz$,$f_2 = (4n + 2) \cdot 150Hz$,$f_3 = (4n + 3) \cdot 150Hz$, onde sempre a três picos de ondas e um intervalo.

4 Parte C

Os modos presentes, nessa parte seguem um padrão mais complexo comparado as parte anteriores, porém, seguem um padrão que as frequências mais baixas tem amplitudes maiores, que as modos mais alto que frequências mais baixas.

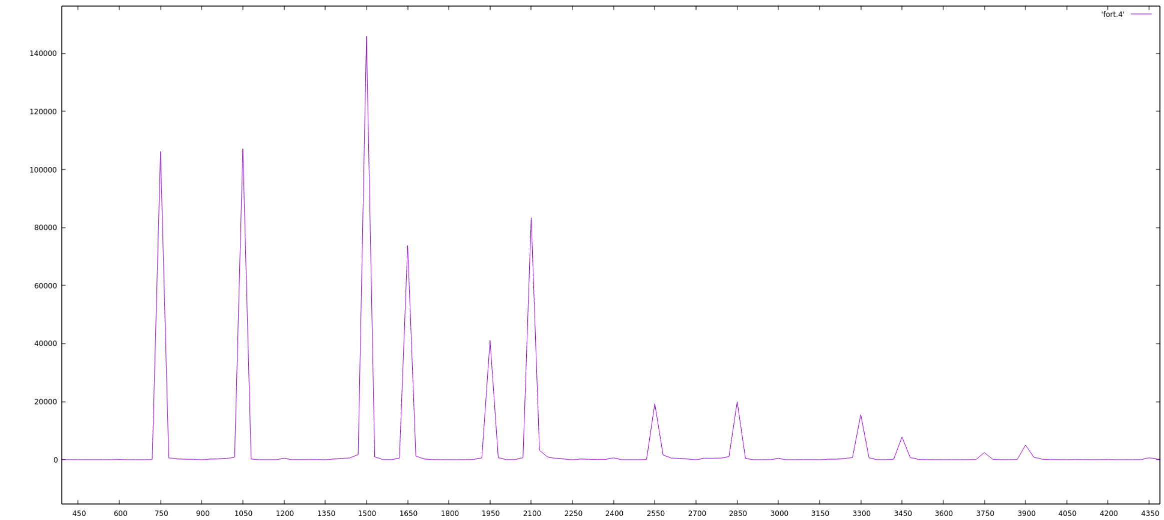

Figura 3: Transformada de fourier para quando $x_0 = \frac{L}{3}$

5 Parte D

Nessa parte o padrão de frequências entres os modos, teve semelhanças a da parte B, mas as amplitudes dos modos foram maiores entre o intervalo 750Hz e 2250Hz, tendo seu pico em 1500Hz.

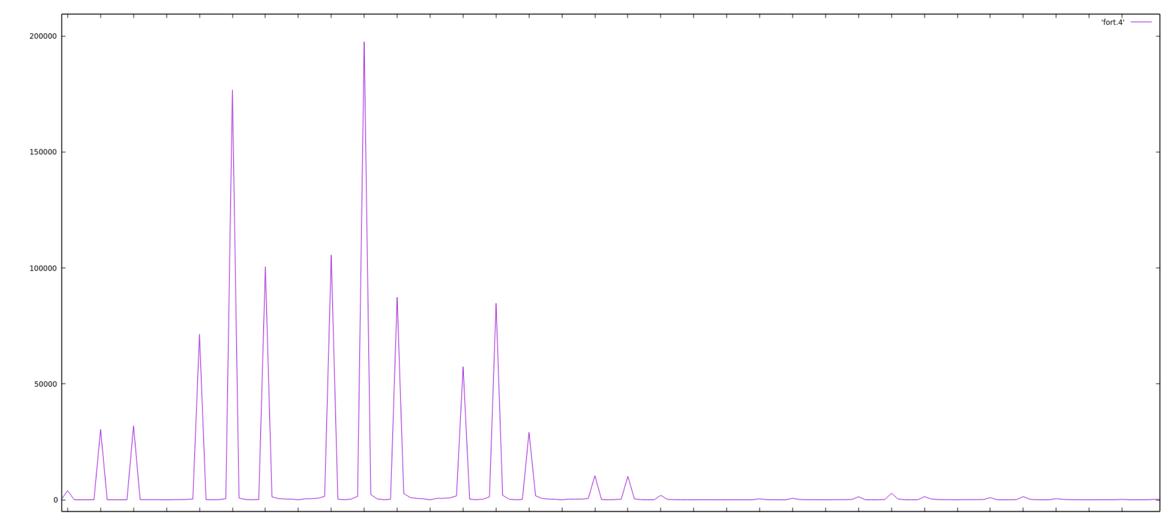

Figura 4: Transformada de fourier para quando $x_0 = \frac{L}{20}$

6 Resultados

Os modos que vimos nas, transformadas de fourier são as ondas que compõem a função de onda, essa propriedade que descobrimos que alguns tipos de sinais, podem ser descritos como seus respectivos modos, essa ideia traz, uma ferramenta bem poderosa, a série de fourier, onde podemos descrever um sinal como sendo soma de seno e cosseno.

$$f(t) = a_0 + \Sigma_{i=0}^{\infty}(a_n cos(t) + b_n sen(n\omega t)) \quad (8)$$

Com essa ferramente conseguimos construir qualquer tipo de função periódica sendo soma de seno e cosseno.

7 Parte E

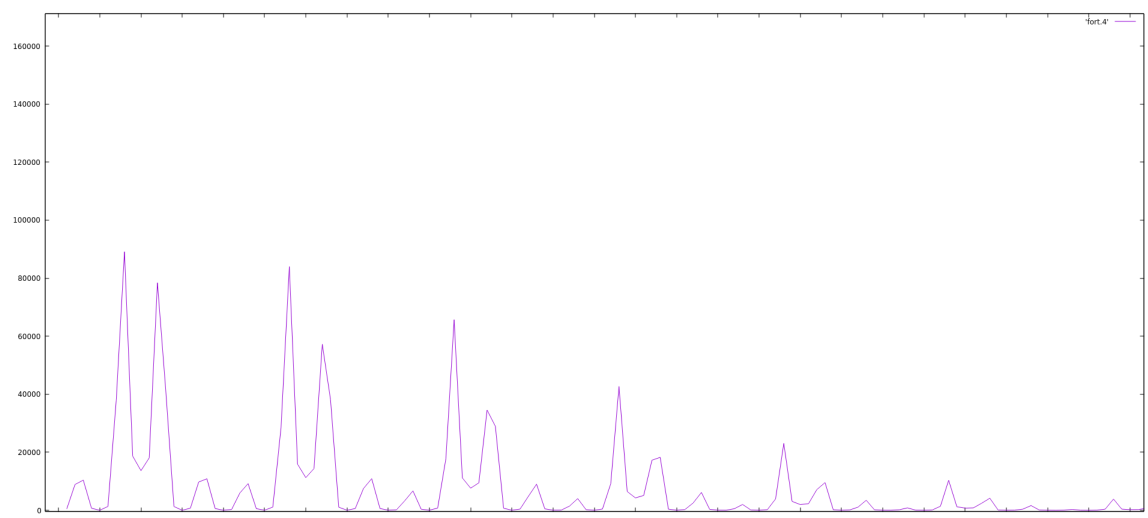

Figura 5: Transformada de fourier para quando $x_0 = \frac{L}{2}$ e uma das extremidades é livre

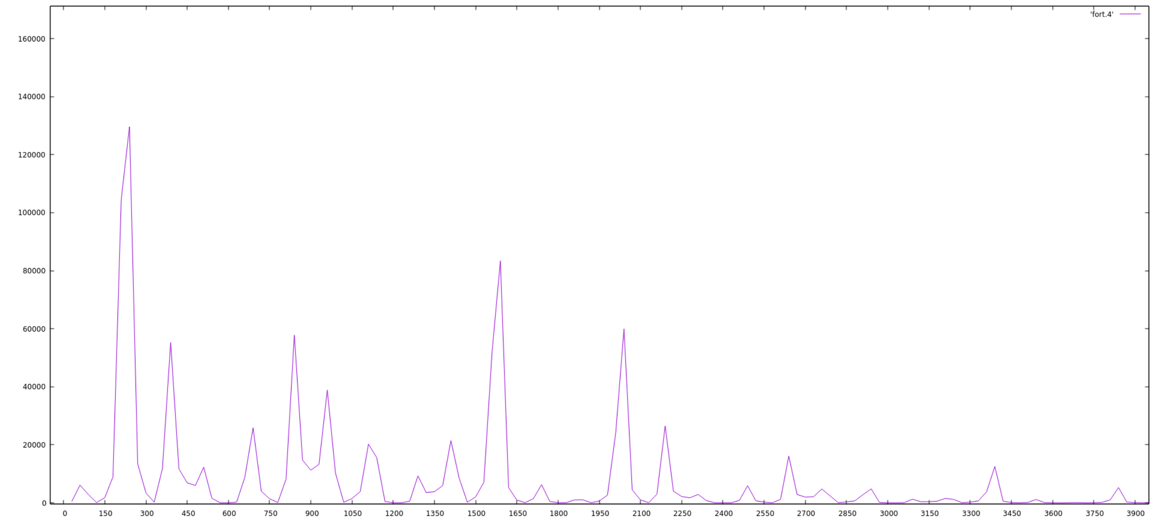

Figura 6: Transformada de fourier para quando $x_0 = \frac{L}{3}$ e uma das extremidades é livre

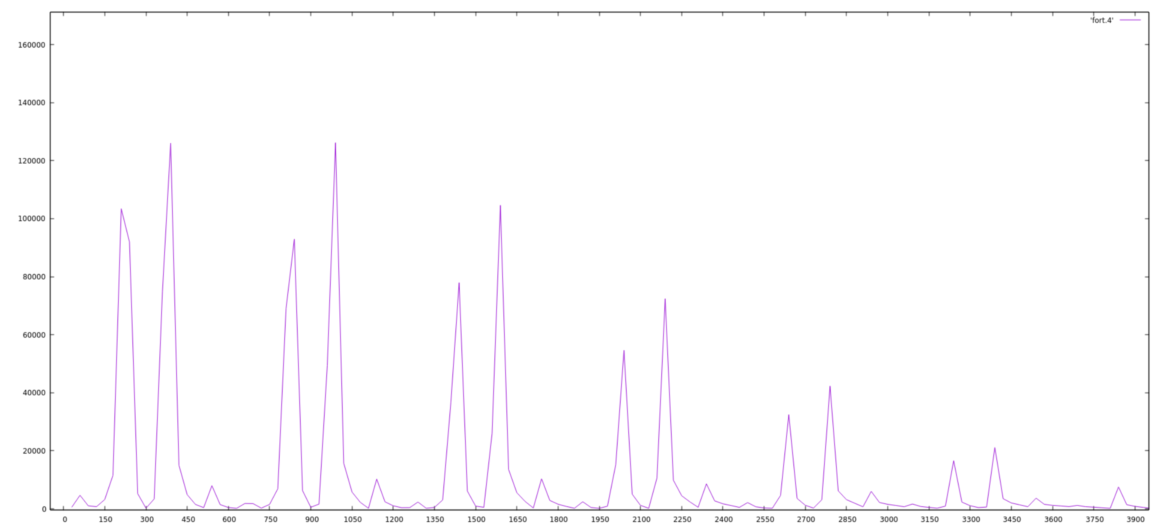

Figura 7: Transformada de fourier para quando $x_0 = \frac{L}{4}$ e uma das extremidades é livre

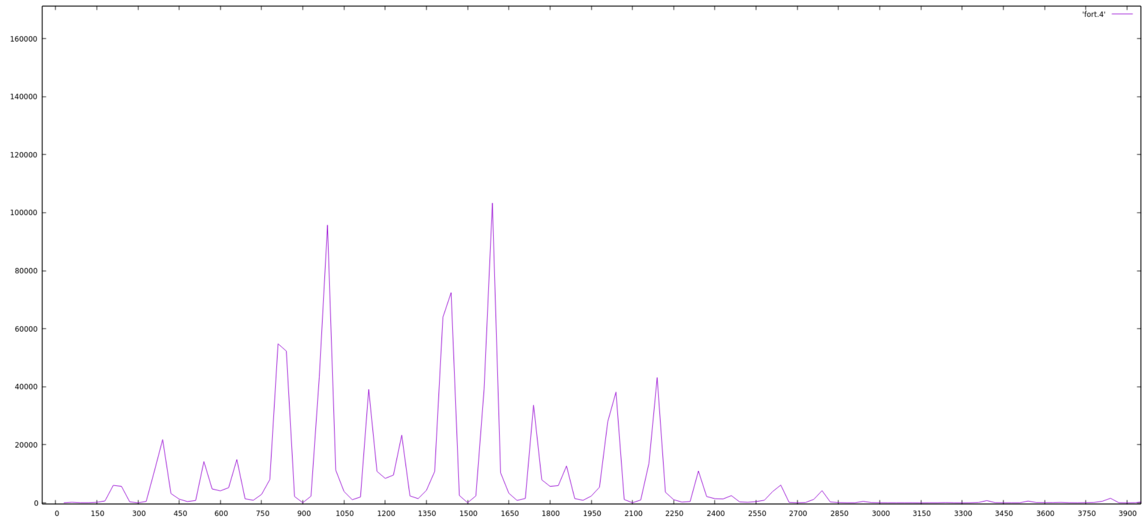

Figura 8: Transformada de fourier para quando $x_0 = \frac{L}{20}$ e uma das extremidades é livre

Como vimos na parte da teoria, as extremidades influenciam no comportamento do modos, assim quando deixamos uma das extremidades livre, a frequência dos modos alteram, como podemos ver nas Transformadas acima.Como função está deslocada por mais 75Hz, vemos que esse deslocamento é que faz a função não ser nula no ponto y(L)=0.

Referências

[1] N. J. Giordano, *Computational Physics*.

[2] R. P. Feynman, *Lições de Física de Feynman*, vol. 1.