

Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos – IFSC
PROGRAMA UNIFICADO DE BOLSAS DE ESTUDO PARA
ESTUDANTES DE GRADUAÇÃO

Relatório de Iniciação científica
Cálculo e análise dos potenciais de interações dos elétrons em níveis
de Landau num sistema bidimensional em campo magnético

Bolsista: Anderson Araujo de Oliveira N^o11371311
Orientador: Prof. Dr. Guo-Qiang Hai

Agosto
2023

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Objetivos	2
3	Métodos	3
3.1	Solução para estado de um elétron em campo magnético	4
3.2	Soluções para o estado de dois elétrons	7
3.2.1	Solução quase exata	8
3.2.2	Solução numérica	9
4	Resultados	9
4.1	Solução quase exata	9
4.2	Solução Numérica	12
4.3	Comparação dos métodos	15
4.4	Determinação da função de onda e suas características	16
5	Conclusão	19
6	Referência	20

1 Introdução

O sistema bidimensional de elétrons em um campo magnético tem contribuído significativamente na área da matéria condensada e da mecânica quântica. Ambos os efeitos Hall quântico inteiro e fracionário foram descobertos neste sistema.

A maioria das teorias sobre o sistema bidimensional de muitos elétrons em campo magnético é baseada nas propriedades um único elétron com níveis de Landau e as interações Coulombianas de elétron-elétron são tratadas como uma perturbação [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11].

Recentemente, propusemos um conceito de subníveis de Landau de estados de pares de elétrons bidimensionais. Os estados de par de elétrons são induzidos pelo campo magnético externo com interação entre os elétrons. Sua existência se deve à dependência orbital das interações eletrônicas em um sistema de muitos elétrons e é relevante no efeito Hall quântico fracionário[12].

2 Objetivos

- Estudar o estado de um e dois elétrons dentro campo magnético de um sistema bidimensional;
- Investigar as propriedades de dois elétrons interagentes em um campo magnético e a importância da interação de Coulomb;
- Calcular analiticamente e numericamente a equação de Schrödinger dos dois elétrons dentro de um campo magnético;
- Solução quase exata para valores específicos do campo magnético, comparando com os valores numéricos;
- Caracterizar a função de onda obtida por solução numérica e unificar os resultados com a solução quase exata analítica.

3 Métodos

Neste estudo, focaremos no estado de um elétron e utilizaremos esse conhecimento para desenvolver o estado de dois elétrons em um campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$. Esse campo magnético é uniforme e está orientado perpendicularmente ao plano bidimensional onde os elétrons se encontram. Para simplificar a análise, usaremos coordenadas polares.

A função de onda para o estado de um elétron pode ser dividida em duas partes: uma parte angular, e uma parte radial, que varia em função da posição do elétron. Através comutatividade do operador momento angular, podemos definir a parte angular da função de onda. Para reescrever a parte radial da função de onda, utilizaremos o método de Frobenius, o que nos permitirá obter uma solução através dos polinômios associados de Laguerre.

Agora, passando ao estado de dois elétrons, abordaremos o problema de duas maneiras diferentes. A primeira será uma solução particular chamada de quase exata, na qual investigaremos suas propriedades e caracterizaremos sua função de onda. Esse método quase exata nos permitirá encontrar os autovalores(energias) do sistema de dois elétrons e determinar uma função de onda particular. A segunda abordagem será a solução numérica, em que utilizaremos a solução do estado de um elétron como ponto de partida para obter a função de onda do sistema de dois elétrons. Dessa forma, nosso estudo abrangerá a análise e desenvolvimento de ambos os estados de elétrons, seja por meio dos métodos, quase exata e o numérico.

Poderemos obter uma função de onda para o estado de dois elétrons utilizando a solução numérica, assim caracterizando uma função analítica. Além disso, encontrar outras métricas como valor esperado e o pico da densidade de probabilidade do estado de dois elétrons.

3.1 Solução para estado de um elétron em campo magnético

Para elétron com carga $-e$ e massa m^* no plano x-y e sujeito a um campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$, a Hamiltoniana será da seguinte forma em unidade de CGS.

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \quad (1)$$

Para definir o potencial de vetor, será usado o Gauge simétrico e terá o seguinte formato $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y\hat{x} + x\hat{y})$. Do campo magnético que atenda a seguinte relação $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$, nesse caso a física é invariante em relação à escolha do potencial vetor. O Hamiltoniano terá o seguinte formato.

$$H = \frac{1}{2m} \left(-\nabla^2 - \frac{iq}{c} \nabla \cdot \vec{A} - \frac{iq}{c} \vec{A} \cdot \nabla + \frac{q^2}{c^2} \vec{A}^2 \right) \quad (2)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(- \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{iqBy}{c} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{iqBx}{c} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(qB)^2}{c^2 4} (x^2 + y^2) \right) \quad (3)$$

Conseguimos escrever a Hamiltoniana da seguinte forma, mudando o sistema de coordenadas cartesianas para polares $(r, \phi) = (x, y)$. O sistema de unidade será $l_b = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$ como distância (O tamanho magnético), onde $\omega_c = \frac{eB}{m^*c}$ frequência (frequência do ciclotron) energia é $\hbar\omega_c$ por unidade.

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{4} \quad (4)$$

$$H\psi = \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) - i \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{r^2}{4} \psi \right) = E\psi \quad (5)$$

Usando o método de separação de variável para encontrar a solução, a função de onda será o produto de duas funções independentes $\psi(\phi, r) = \Phi(\phi)R(r)$. O operador de momento angular comuta com a Hamiltoniana e os autovalores são compatíveis $[L_z, H] = 0$, o que significa que podemos encontrar uma solução para parte angular da função de onda, onde

$$L_z = \frac{-i\partial}{\partial\phi}.$$

$$\Phi(\phi) = \frac{e^{m\phi i}}{\sqrt{2\pi}} \quad (6)$$

Onde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, substituindo (6) na equação (5) sobrar  somente a coordenada radial para resolver.

$$\left(-\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2} R(r) + mR(r) + \frac{r^2 R(r)}{4} \right) = 2ER(r) \quad (7)$$

Mudaremos o sistema de coordenadas para $x = \frac{r^2}{2}$.

$$\left(-2x \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial R(x)}{\partial x} + \frac{m^2 x^{-1}}{2} R(x) + mR(x) + \frac{xR(x)}{2} \right) = 2ER(x) \quad (8)$$

Utilizando o método de Frobenius para reescrever $R(x) = x^{\frac{k}{2}} e^{\frac{-x}{2}} U(x)$.

$$\left(-2x \frac{\partial^2 (x^{\frac{k}{2}} e^{\frac{-x}{2}} U(x))}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial (x^{\frac{k}{2}} e^{\frac{-x}{2}} U(x))}{\partial x} + \left(\frac{m^2 x^{-1}}{2} + \frac{mx}{2} \right) x^{\frac{k}{2}} e^{\frac{-x}{2}} U(x) \right) = 2Ex^{\frac{k}{2}} e^{\frac{-x}{2}} U(x) \quad (9)$$

Abrindo a derivada primeira:

$$\frac{\partial (x^{\frac{|m|}{2}} e^{\frac{-x}{2}} U(x))}{\partial x} = \frac{k}{2} x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} U(x) - x^{\frac{k}{2}} \frac{e^{\frac{-x}{2}}}{2} U(x) + x^{\frac{k}{2}} e^{\frac{-x}{2}} \frac{\partial U(x)}{\partial x} \quad (10)$$

A segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 (x^{\frac{|m|}{2}} e^{\frac{-x}{2}} U(x))}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left\{ \frac{k}{2} x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} U(x) \right\} + \left\{ -x^{\frac{k}{2}} \frac{e^{\frac{-x}{2}}}{2} U(x) \right\} + \left\{ x^{\frac{k}{2}} e^{\frac{-x}{2}} \frac{\partial U(x)}{\partial x} \right\} \right) \quad (11)$$

Abrindo as derivadas da equação (9) com as relações acima e manipulando, chegamos em:

$$-2x \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + (2x - 2k - 2) \frac{\partial U(x)}{\partial x} + U(x) \left(k - \frac{k^2}{2} x^{-1} + 1 + \frac{m^2 x^{-1}}{2} + m - 2E \right) = 0 \quad (12)$$

O método de Frobenius muda a forma da função para satisfazer as seguintes condições: $x \rightarrow 0$ a função deve $R(0) \rightarrow 0$, por consequência $k > 0$, outra relação é que k deve ser um valor que seja compatível com os autovalores do momento angular, deste modo $k = |m|$ para ser sempre positivo, e a última condição $x \rightarrow \infty$, a função $R(\infty) \rightarrow 0$.

$$x \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + (|m| + 1 - x) \frac{\partial U(x)}{\partial x} - \frac{1}{2}(|m| + 1 + m - 2E)U(x) = 0 \quad (13)$$

A solução de $U(x)$ será os polinômios associados de Laguerre $U(x) = L_n^{|m|}(x)$, desta maneira precisaremos reescrever a equação diferencial, onde $n = |m| + 1 + m - 2E$.

$$x \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + (|m| + 1 - x) \frac{\partial U(x)}{\partial x} + nU(x) = x \frac{\partial^2 L_n^{|m|}(x)}{\partial x^2} + (|m| + 1 - x) \frac{\partial L_n^{|m|}(x)}{\partial x} + nL_n^{|m|}(x) = 0 \quad (14)$$

A energia será reescrita da seguinte forma:

$$E = \frac{(|m| + 1 + m)}{2} + n \quad (15)$$

Com unidade teremos:

$$E = \hbar\omega_c \left(\frac{(|m| + 1 + m)}{2} + n \right) \quad (16)$$

Assim obtivemos outra quantização, dessa vez para a parte radial. Normalizando a função e voltando para as antigas coordenadas, onde $x = \frac{r^2}{2}$.

$$R(r) = \sqrt{\frac{n!}{(n + |m|)!}} \left(\frac{r^2}{2} \right)^{\frac{|m|}{2}} e^{-\frac{r^2}{4}} L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{2} \right) \quad (17)$$

Juntando as duas soluções, chegamos na função de onda.

$$\Psi(r, \phi) = \sqrt{\frac{n!}{(n + |m|)!}} \left(\frac{r^2}{2} \right)^{\frac{|m|}{2}} e^{-\frac{r^2}{4}} L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{2} \right) \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (18)$$

3.2 Soluções para o estado de dois elétrons

Consideramos os elétrons sem spin, restritos a duas dimensões e submetidos a um campo magnético. Ao abordar o sistema com dois elétrons, a Hamiltoniana desse sistema será obtida somando os Hamiltonianos de cada elétron individualmente, além de incluir a interação coulombiana entre os dois elétrons.

$$H_T(r_1, r_2) = H_s(r_1) + H_s(r_2) + \frac{\gamma_b}{|r_1 - r_2|} \quad (19)$$

Reescrevendo o sistema de coordenadas para o centro de massa (R_{cm}) e distância relativa (r_{rel}) entre os elétrons, encontraremos duas hamiltonianas independentes para cada coordenada, sendo a seguinte transformação.

$$R_{cm} = \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{2}} \quad (20)$$

$$r_{rel} = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{2}} \quad (21)$$

Com a mudança de coordenadas obtemos a seguinte Hamiltoniana.

$$H_T(r_1, r_2) = H_{cm}(R_{cm}) + H_{rel}(r_{rel}) \quad (22)$$

Onde cada H:

$$H_{cm}(R_{cm}) = \frac{1}{2}(-i\nabla_{cm} + \frac{1}{2}\hat{z} \times \vec{R}_{cm})^2 \quad (23)$$

$$H_{rel}(r_{rel}) = \frac{1}{2}(-i\nabla_{rel} + \frac{1}{2}\hat{z} \times \vec{r}_{rel})^2 + \frac{\gamma_b}{|r_{rel}|} \quad (24)$$

A solução para a função de onda do centro de massa é idêntica à solução para a função de onda de elétron. A Hamiltoniana para posição relativa terá um termo a mais. Utilizaremos

a seguinte notação $r_{rel} = r$.

$$\left(-\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left(\frac{m^2}{r} + m + \frac{r^2}{4} + \frac{\gamma_b}{r} \right) R(r) \right) = 2ER(r) \quad (25)$$

3.2.1 Solução quase exata

Atualmente, não há uma solução analítica conhecida para a equação 25. No entanto, foram encontradas outras soluções ao explorar o mesmo sistema, mas considerando outros potenciais dentro da hamiltoniana, como, por exemplo $\frac{\omega_0 r^2}{2}$.

Dessa forma, exploraremos outros métodos para encontrar uma solução, focando em estudar um método que nos permita obter pontos específicos de uma solução. Para isso, começaremos supondo que nossa resposta será escrita da seguinte forma:

$$R(r) = r^{|m|} e^{\frac{-r^2}{4}} p(r) \quad (26)$$

Reescrevendo a equação 25

$$r \frac{\partial^2 P(r)}{\partial r^2} + (2|m| + 1 - r^2) \frac{\partial P(r)}{\partial r} + 2(E_r r - \gamma_b) P(r) = 0 \quad (27)$$

A solução quase exata como:

$$p(r) = \sum a_n r^n \quad (28)$$

Considerando $a_0 \neq 0$ uma constante de normalização, chegamos nas seguintes relações de recorrência das constantes de $p(r)$

$$a_1 = \frac{2\gamma_b}{2|m| + 1} a_0 \quad (29)$$

$$(n - 2E_r - 2)a_{n-2} + 2\gamma_b a_{(n-1)} = (n^2 + 2|m|n)a_{(n)} \quad (30)$$

Para $n \geq 2$. Os coeficientes convergem, podemos colocar valor para cortar o polinômio no n_p ° coeficiente

$$p_{n_p}(r) = \sum_{n=0}^{n_p} a_n r^n \quad (31)$$

Considerando $a_{n_p+2} = a_{n_p+1} = 0$, obtemos que $E_r = \frac{n_p}{2}$. Podemos usar as relações de recorrência e quantizar a interação colombiana γ_b

3.2.2 Solução numérica

Encontremos a solução para as energias e os autoestados usando a função de onda de um elétron como base ($\gamma_b = 0$)

$$R_{nm}^{rel}(x) = \sum_{n'} a_{nn'} R_{n'm}^s(x) \quad (32)$$

Chegamos na seguinte igualdade e devemos encontrar as autoenergias e os autovetores

$$H_{rel} R_{n'm}^{rel} = H_{rel} \sum_{n'} a_{nn'} R_{n'm}^s(x) = E_{rel} \sum_{n'} a_{nn'} R_{n'm}^s(x) \quad (33)$$

Reescreveremos a Hamiltoniana de dois elétrons para podermos utilizar a relação encontrada para a função de estado de um elétron dentro de um campo magnético. Nosso objetivo é encontrar uma relação entre as autoenergias e as autofunções do sistema de dois elétrons.

4 Resultados

Primeiramente, calcularemos a função de onda particular (quase exata) para o sistema de dois elétrons em campo magnético. Através dessa função de onda, conseguiremos encontrar as autoenergias para orientar nossa análise ao calcular a função de onda numérica.

4.1 Solução quase exata

Calculemos para n_p indo de 1 à 4, os autovalores.

Temos que $n_p = 0$, $\gamma_b = 0$.

Para $n_p = 1$ temos as seguintes relações.

$$\begin{aligned} 2\gamma_b a_1 &= a_0 \\ a_1 &= \frac{2\gamma_b a_0}{(2|m| + 1)} \end{aligned} \tag{34}$$

Usando todas essas relações e isolando γ_b , chegamos que:

$$\gamma_b = \frac{\sqrt{2|m| + 1}}{2} \tag{35}$$

Para $n_p = 2$ temos as seguintes relações.

$$\begin{aligned} E_r &= 1 \\ \frac{2|m| + 1}{2\gamma_b} a_1 &= a_0 \\ \gamma_b a_2 &= a_1 \\ a_2(2|m| + 2)2 &= 2\gamma_b a_1 - 2a_0 \end{aligned} \tag{36}$$

Usando todas essas relações e isolando γ_b , chegamos que:

$$\sqrt{\frac{(4|m| + 3)}{2}} = \gamma_b \tag{37}$$

Para $n_p = 3$ temos as seguintes relações.

$$\begin{aligned} 2\gamma_b a_3 &= a_2 \\ (2|m| + 3)3a_3 &= 2\gamma_b a_2 - 2a_1 \\ (2|m| + 2)2a_2 &= 2\gamma_b a_1 - 3a_0 \\ \frac{2|m| + 1}{2\gamma_b} a_1 &= a_0 \end{aligned} \tag{38}$$

Usando todas essas relações e isolando γ_b , chegamos que:

$$\gamma_b = \frac{1}{2} \sqrt{5 + 5|m| \pm \frac{\sqrt{73 + 64|m|(2 + |m|)}}{2}} \quad (39)$$

Foi considerado $a_0 \neq 0$ sendo uma constante de normalização, usando as relações 29 e a 30 para encontrar os outros coeficientes

$$R(r) = r^{|m|} e^{\frac{-r^2}{4}} \sum_{n=0}^{n_p} a_n r^n \quad (40)$$

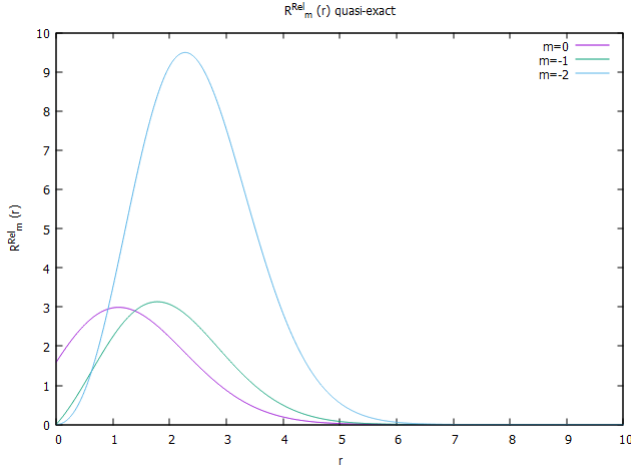
Normalizando a função de onda $n_p = 0$

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 dr = \int_0^\infty r^{|m|^2} e^{\frac{-r^2}{2}} a_0^2 = 1 \quad (41)$$

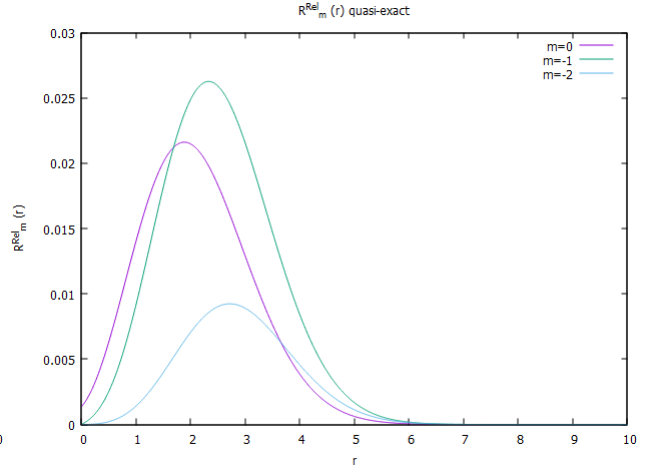
Chegamos que:

$$a_0 = \sqrt{2^{|m|-\frac{1}{2}} \Gamma\left(|m| + \frac{1}{2}\right)} \quad (42)$$

Podemos encontrar as seguintes funções de onda.



(a) Função de onda radial quase exata $n_p = 1$



(b) Função de onda radial quase exata $n_p = 2$

4.2 Solução Numérica

Podemos reescrever a hamiltoniana de forma que utilizemos as autofunções de um elétron.

$$H_{rel} = \frac{1}{2}(-i\nabla_{rel} + \frac{1}{2}\hat{z} \times \vec{r}_{rel})^2 + \frac{\gamma_b}{|r_{rel}|} = H_s + \frac{\gamma_b}{|r_{rel}|} \quad (43)$$

$$(H_s + \frac{\gamma_b}{|r_{rel}|}) \sum_{n'} a_{nn'} R_{n'm}^s(r_{rel}) = E_{rel} R_{n'm}^s(r_{rel}) \quad (44)$$

$$\sum_{n'} a_{nn'} (E_s + \frac{\gamma_b}{|r_{rel}|}) R_{n'm}^s(r_{rel}) = E_{rel} R_{n'm}^s(r_{rel}) \quad (45)$$

Multiplicando por R_{nm} e usando a notação de Dirac, chegamos na seguinte relação.

$$\sum_{n'} a_{nn'} ((E_{nm}^s - E_{n'm}^{rel}) \langle n, m | n', m \rangle + \langle n, m | \frac{\gamma_b}{|r_{rel}|} | n', m \rangle = 0 \quad (46)$$

Devemos calcular a seguinte integral.

$$\langle n, m | \frac{\gamma_b}{|r_{rel}|} | n', m \rangle = \gamma_b \int_0^\infty R_{n'm}^s(x) R_{nm}^s(x) dx \quad (47)$$

Abrindo a função R_{nm}

$$R_{nm}^s(r) = \sqrt{\frac{n!}{(n+|m|)!}} \left(\frac{r^2}{2}\right)^{\frac{|m|}{2}} e^{\frac{-r^2}{4}} L_n^{|m|}\left(\frac{r^2}{2}\right) \quad (48)$$

Chegamos na seguinte integral, lembrando que $x = \frac{r^2}{2}$

$$\gamma_b \int_0^\infty R_{nm}^s(r) R_{n'm}^s(r) dr = \gamma_b \int_0^\infty \sqrt{\frac{n!}{(n+|m|)!}} \sqrt{\frac{n'!}{(n'+|m|)!}} \left(\left(\frac{r^2}{2}\right)^{\frac{|m|}{2}} e^{\frac{-r^2}{4}}\right)^2 L_n^{|m|}\left(\frac{r^2}{2}\right) L_{n'}^{|m|}\left(\frac{r^2}{2}\right) dr \quad (49)$$

Podemos usar como definição de uma somatória

$$L_n^{|m|}\left(\frac{r^2}{2}\right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+|m|)! r^{2k}}{(n-k)! (|m|+k)! k! 2^k} \quad (50)$$

Podemos elaborar a seguinte mudança de variável $x = \frac{r^2}{2}$ e $dx = r dr$, portanto $r = \sqrt{2x}$ e $\frac{dx}{\sqrt{2x}} = dr$

$$\int_0^\infty \frac{r^{2|m|}}{2^{|m|}} e^{-\frac{r^2}{2}} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{(n+|m|)! r^{2j}}{(n-j)! (|m|+j)! j! 2^j} \sum_{i=0}^{n'} (-1)^i \frac{(n'+|m|)! r^{2i}}{(n'-i)! (|m|+i)! i! 2^i} dr \quad (51)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{|m|-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} e^{-x} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{(n+|m|)! x^j}{(n-j)! (|m|+j)! j!} \sum_{i=0}^{n'} (-1)^i \frac{(n'+|m|)! x^i}{(n'-i)! (|m|+i)! i!} dx \quad (52)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{|m|-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} e^{-x} L_n^{|m|}(x) L_{n'}^{|m|}(x) dx \quad (53)$$

Usando a definição da função gama

$$\int_0^\infty x^{n+1} e^{-x} dx = \Gamma(n) \quad (54)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n'} (-1)^{i+j} \left(\frac{(n+|m|)! x^{(i+|m|-\frac{1}{2}+i)} e^{-x}}{(n-j)! (|m|+j)! j!} \right) \left(\frac{(n'+|m|)!}{(n'-i)! (|m|+i)! i!} \right) dx \quad (55)$$

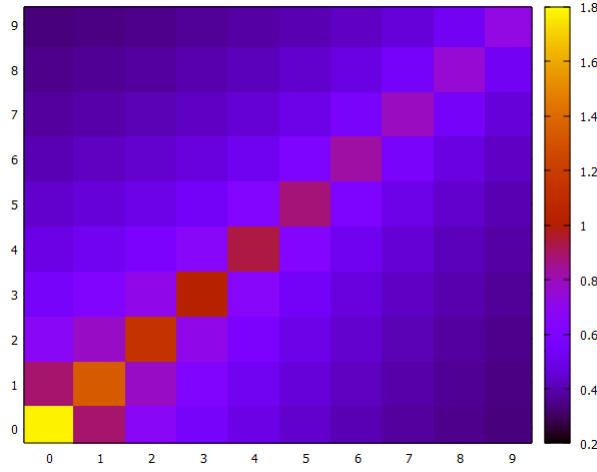
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n'} (-1)^{i+j} \left(\frac{(n+|m|)! \int_0^\infty x^{(i+|m|-\frac{1}{2}+i)} e^{-x} dx}{(n-j)! (|m|+j)! j!} \right) \left(\frac{(n'+|m|)!}{(n'-i)! (|m|+i)! i!} \right) \quad (56)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n'} (-1)^{i+j} \left(\frac{(n+|m|)! \Gamma(i+|m|+\frac{1}{2}+j)}{(n-j)! (|m|+j)! j!} \right) \left(\frac{(n'+|m|)!}{(n'-i)! (|m|+i)! i!} \right) \quad (57)$$

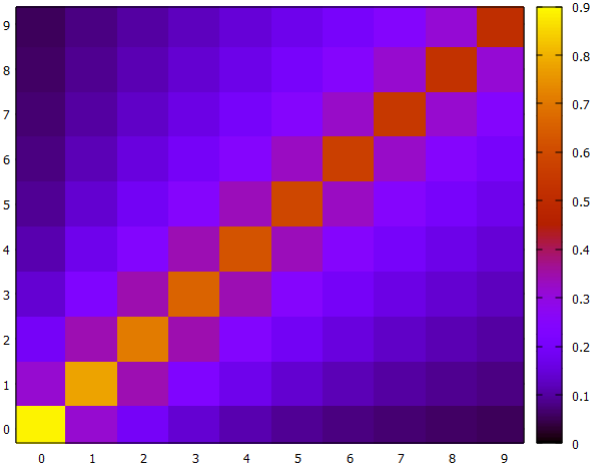
Assim podemos encontrar as autofunções e os autovalores da seguinte matriz

$$\langle n, m | \frac{\gamma_b}{|r_{rel}|} | n', m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n'} (-1)^{i+j} \left(\frac{(n+|m|)! \Gamma(i+|m|+\frac{1}{2}+j) (n'+|m|)!}{(n-j)! (|m|+j)! j! (n'-i)! (|m|+i)! i!} \right) \quad (58)$$

Considerando um sistema com $n=10$ e $n'=10$, para m variando 0 até 3, chegamos na seguinte matriz.

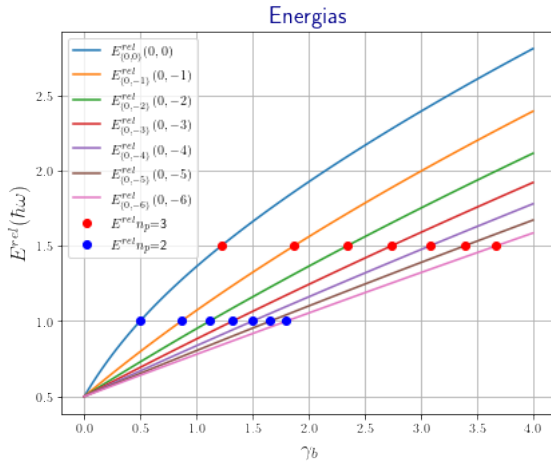


(a) Matriz da equação 58 para $m=0$

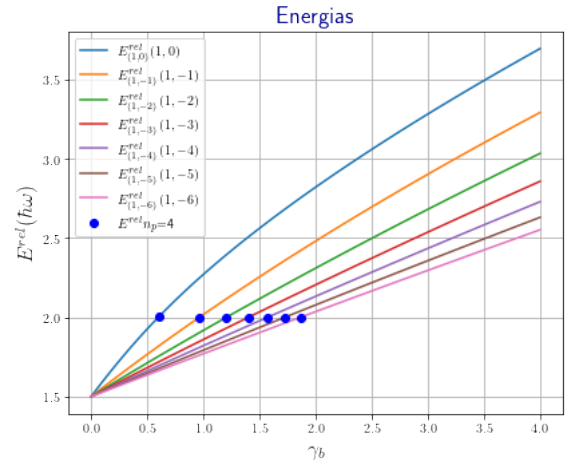


(b) Matriz da equação 58 para $m=1$

Sabemos como o espectro de energia se comporta para solução numérica, portanto, unificamos com os autoestados obtidos pelo método quase exato e chegamos nos seguintes pontos no espectro

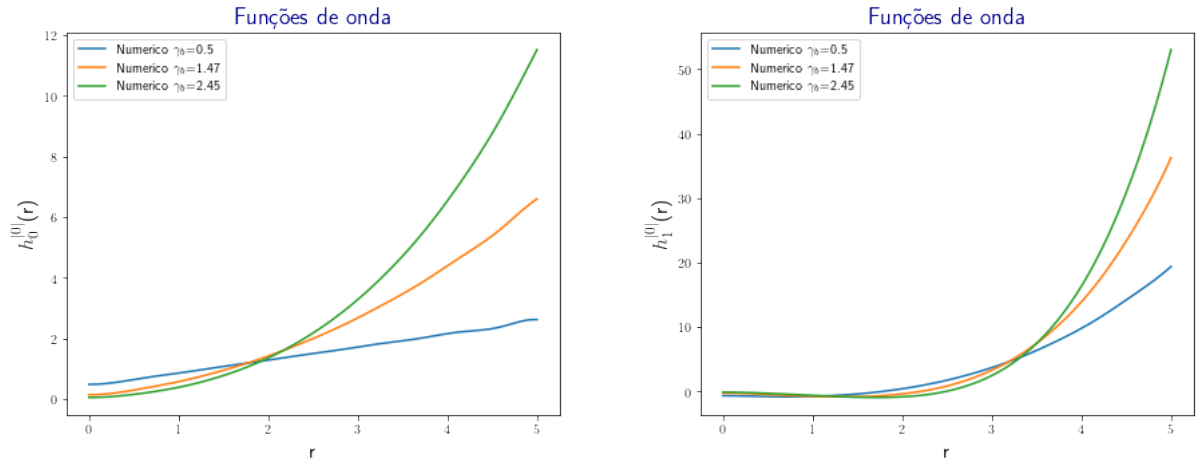


(a) Níveis de energia para $n=0$ onde os pontos indicam os autovalores analíticos



(b) Níveis de energia para $n=1$ onde os pontos indicam os autovalores analíticos

A função de onda obtida numericamente



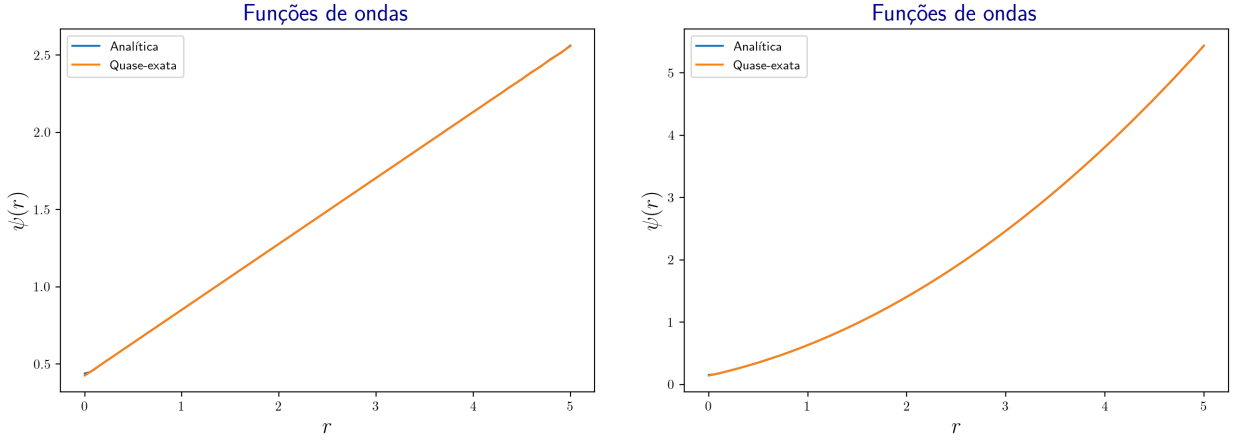
(a) Função de onda obtida numericamente para $n=0$ (b) Função de onda obtida numericamente para $n=1$

4.3 Comparação dos métodos

Podemos realizar a comparação entre as soluções, numérica, e a quase exata, investigaremos para a parte polinomial da função de onda, onde é esperado que, para os valores específicos de γ_b , as soluções devem ser próximas

$$h_n^{[m]} \left(\frac{r^2}{2} \right) = \sum_{n'} a_{nn'}^{(m)} \sqrt{\frac{n'!(n+|m|)!}{n!(n'+|m|)!}} L_{n'}^{[m]} \left(\frac{r^2}{2} \right) \quad (59)$$

Analisaremos o comportamento da equação 59 com a 31 para os γ_b específicos do n_p 2 à 4 tomando $m=0$ para quando definimos o γ_b



(a) Funções de onda para γ_b do $n_p = 1$, equação 35 (b) Funções de onda para γ_b do $n_p = 2$, equação 37

Os polinômios de ambas as soluções coincidem numa região próxima à origem. Sabemos que a equação 59 é a soma de polinômios que crescem $x^{2n'}$, portanto, um erro entre os polinômios começa aparecer quanto maior for distância da origem.

4.4 Determinação da função de onda e suas características

Procuramos uma solução analítica em função γ_b para os coeficientes da parte polinomial da função de onda. Variamos o valor de γ_b de $\frac{1}{2}$ até $\sqrt{\frac{3}{2}}$ sendo esses valores γ_b para $n_p=2$ e 3, $|m|=0$.

$$g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (60)$$

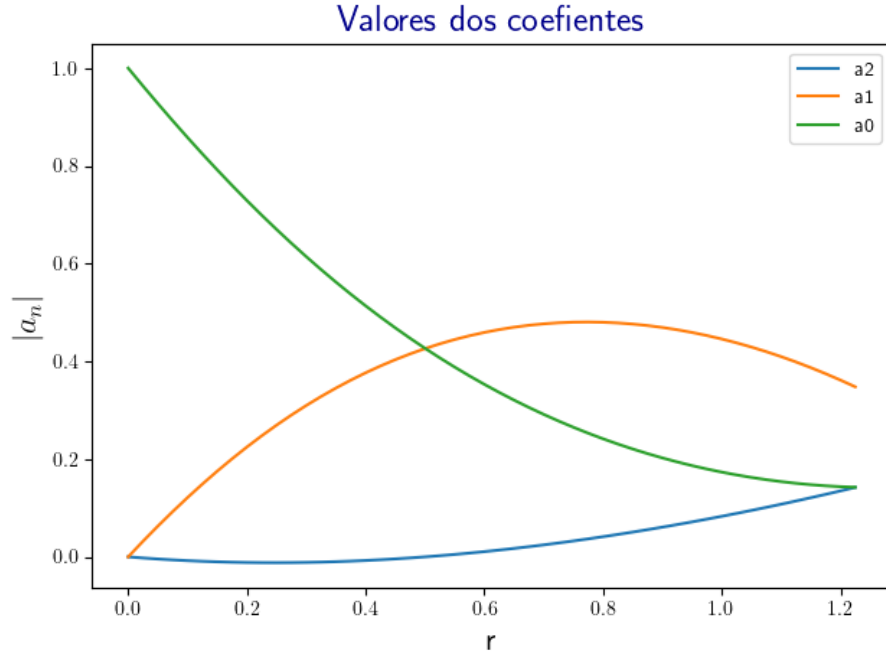


Figura 6: Mostra a evolução dos parâmetros em função γ_b na forma 60

Supondo que a relação entre os coeficientes e o γ_b é a seguinte função $a_n(\gamma_b) = a\gamma_b^2 + b\gamma_b + c$, obtivemos os seguintes coeficientes.

a_n	a	c	b
a_2	0,155	-0,071	-0,002
a_1	-0,769	1,208	0,010
a_0	0,605	-1,428	0,992

Tabela 1: Tabela de coeficientes

Através das funções de ondas numéricas conseguimos obter aspectos a densidade de probabilidade e o valor esperado para distância relativa para qualquer γ_b .

Valor de máxima densidade de probabilidade

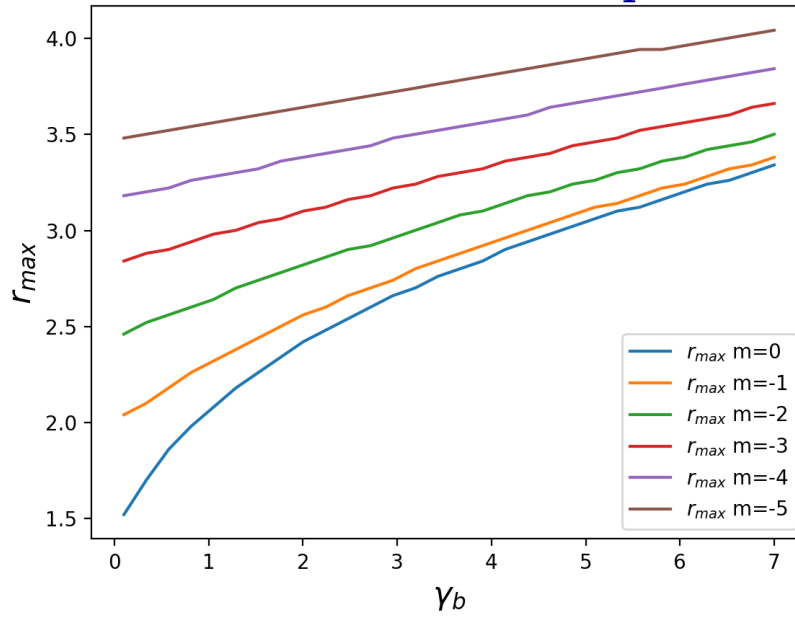


Figura 7: Valores onde densidade de probabilidade é máxima

Valor esperado da distância relativa

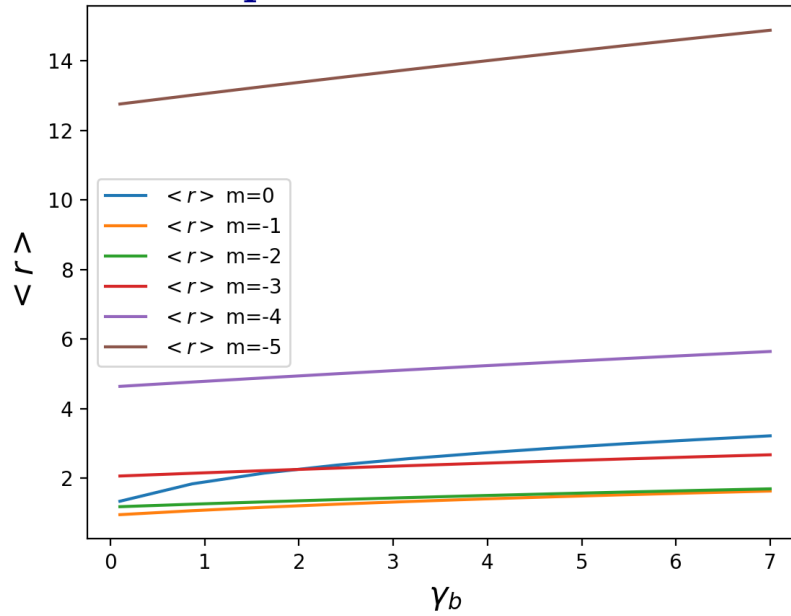


Figura 8: Valor esperado da distância relativa

5 Conclusão

A relação entre as duas abordagens revelou sua eficácia em estruturar a solução numérica, interessar-se compreender os resultados provenientes do estado de dois elétrons interagindo em um campo magnético. Os polinômios que descrevem a parte radial da função de onda exibem semelhanças notáveis na proximidade da origem. Entretanto, após uma determinada distância, os polinômios de ordem superior começam a dominar.

Ao examinarmos os valores específicos de γ_b utilizando o método quase exato, observamos a influência do número quântico $|m|$ na parte angular da equação 6 nos resultados de γ_b , conforme evidenciado pelas equações 35, 37. Os valores das energias derivados da solução quase exata, $E^{rel} = \frac{n_p}{2}$, coincidem com os resultados espectrais da solução numérica para os pontos específicos. Nesses pontos, a alteração desse número quântico molda apenas a forma da função de onda.

A utilização do estado de um elétron como base para abordar esse novo sistema demonstrou ser altamente proveitosa na solução numérica. As correspondências entre as funções de onda e o espectro de energia nos pontos γ_b da solução quase exata corroboram essa afirmação. Essas análises comparativas pavimentam o caminho para uma aproximação das funções de onda de dois elétrons interagindo, simplificando-as em um contexto de campo magnético variável.

Uma vez que a estrutura da função de onda é esboçada, torna-se possível caracterizar o estado dos dois elétrons e estabelecer uma correlação entre os coeficientes que compõem a parte polinomial, variando em relação ao parâmetro γ_b , visando encontrar uma relação. O pico máximo da densidade de probabilidade adota uma forma previsível nesse sistema. O valor de $|m|$ está intrinsecamente ligado ao momento angular, de modo que quanto maior esse valor, maior é a tendência dos elétrons se afastarem do centro. Notavelmente, o valor médio da distância relativa apresenta uma anomalia no estado em que $|m| = 0$. Nesse contexto, os valores ultrapassam aqueles observados nos estados em que $|m| \leq 3$.

6 Referência

- [1] David Tong. Lectures on the quantum hall effect, 2016.
- [2] M. Taut. Two electrons in a homogeneous magnetic field: particular analytical solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 27(3):1045, 1994.
- [3] J. Myrheim, E. Halvorsen, and A. Verçin. Two anyons with coulomb interaction in a magnetic field. *Physics Letters B*, 278(1):171–174, 1992.
- [4] M. A. Escobar-Ruiz and A. V. Turbiner. Two charges on a plane in a magnetic field: Special trajectories. *Journal of Mathematical Physics*, 54(2):022901, feb 2013.
- [5] A V Turbiner and M A Escobar-Ruiz. Two charges on a plane in a magnetic field: hidden algebra, (particular) integrability, polynomial eigenfunctions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(29):295204, jul 2013.
- [6] AV Turbiner. Quasi-exactly-solvable problems andsl (2) algebra. *Communications in Mathematical Physics*, 118(3):467–474, 1988.
- [7] A Ralko and TT Truong. On exact singular wave functions of two identical particles. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 29(2):335–338, 2002.
- [8] T.T. Truong and D. Bazzali. Exact low-lying states of two interacting equally charged particles in a magnetic field. *Physics Letters A*, 269(2):186–193, 2000.
- [9] M Taut. Special analytical solutions of the schrödinger equation for two and three electrons in a magnetic field and ad hoc generalizations to n particles. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 12(15):3689, 2000.

- [10] BS Kandemir. Two interacting electrons in a uniform magnetic field and a parabolic potential: The general closed-form solution. *Journal of mathematical physics*, 46(3):032110, 2005.
- [11] B. S. Kandemir. Variational study of two-electron quantum dots. *Phys. Rev. B*, 72:165350, Oct 2005.
- [12] G. Q. Hai. Sub-landau levels of magnetic-field-induced two-dimensional electron pairs.