

**INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Anderson Araujo de Oliveira

Dois elétrons interagindo em um campo magnético uniforme:
comparação de soluções analíticas particulares e soluções
numéricas gerais

São Carlos
2022

Anderson Araujo de Oliveira

Dois elétrons interagindo em um campo magnético uniforme:
comparação de soluções analíticas particulares e soluções
numéricas gerais

Trabalho de Conclusão de Curso - Monografia
apresentada ao curso de graduação em Física
no Instituto de Física de São Carlos, Universi-
dade de São Paulo, como requisito para a ob-
tenção do título de *Bacharel em Física Compu-
tacional*.

Orientador: Prof. Dr. Hai Guoqiang

São Carlos
2022

Resumo

Neste projeto de conclusão de curso, estudamos os estados quânticos de dois elétrons em um sistema bidimensional sujeito a um campo magnético externo perpendicular e com interação Coulombiana entre os elétrons. Resolvemos numericamente a equação Schrodinger do problema. Obtemos numericamente os espectros de energia e as funções de onda dos estados quânticos de dois elétrons. Os resultados obtidas de cálculos numéricos são comparados com os de “soluções quase-exatas” obtidas analiticamente para valores particulares do campo magnético.

Palavras-chave:Quântica, Elétron, Sistema bidimensional

Sumário

1	Introdução	3
2	Métodos	4
2.1	Estado de um elétron em um campo magnético	4
2.2	Dois elétrons interagentes em um campo magnético	5
2.2.1	Soluções Quase exatas	6
2.2.2	Soluções Numérica	7
3	Resultados	8
3.1	Soluções quase-exata	8
3.2	Soluções Numérica	10
3.3	Comparação das soluções	14
4	Conclusão	18

1 Introdução

O sistema bidimensional de diversos elétrons em um campo magnético tem contribuído significativamente na área de matéria condensada e mecânica quântica. Ambos os efeitos Hall quântico inteiro e fracionário foram descobertos neste sistema. A maioria das teorias sobre o sistema bidimensional de múltiplos elétrons em campo magnético são baseadas nas propriedades de um único elétron com níveis de Landau e as interações Coulombianas de elétron-elétron são tratadas como uma perturbação.(1, 2, 3) Recentemente, propusemos um conceito de sub níveis de Landau de estados de pares de elétrons bidimensionais. Os estados de pares de elétrons são induzidos pelo campo magnético externo com interação entre os elétrons. Sua existência é devido à dependência orbital das interações eletrônicas em um sistema de muitos elétrons e é relevante no efeito Hall quântico fracionário.(4)

Problemas de dois corpos comumente tem uma solução analítica, devido à força de elétron-elétron Coulombiana de repulsão não tem uma solução analítica para todas as condições, esse tema foi estudado por diversos autores (2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12) nas últimas décadas abordando o tema de diversas formas.

Investigaremos nesse trabalho esse problema fazendo ligações entre as soluções. Teremos soluções analíticas particulares, que chamaremos de quase-exata, e uma solução numérica. Utilizando a solução 'quase-exata' para orientar a solução numérica, obteremos uma caracterização da função de onda e seu espectro de energia.

2 Métodos

Devemos primeiramente resolver o estado de um elétron em um campo magnético para podermos desenvolver a solução de dois elétrons. Consideramos o campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$, ou seja, um campo magnético uniforme na direção z perpendicular ao plano bidimensional.

2.1 Estado de um elétron em um campo magnético

Para elétron com carga $-e$ e massa m^* no plano x - y , sujeito a um campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$, a Hamiltoniana será da seguinte forma em unidade de CGS

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left(-\nabla^2 - \frac{iq}{c} \nabla \cdot \vec{A} - \frac{iq}{c} \vec{A} \cdot \nabla + \frac{q^2}{c^2} \vec{A}^2 \right) \quad (1)$$

Definimos o potencial vetor, será usado o Gauge simétrico e terá o seguinte formato $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y\hat{x} + x\hat{y})$. Para qualquer orientação que campo magnético que respeite a relação $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ a física é invariante em relação ao Gauge. Mudando o sistema de coordenadas cartesianas para polares $(r, \phi) = (x, y)$. O sistema de unidade será $l_b = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$ como distância (o tamanho magnético), onde $\omega_c = \frac{eB}{m^*c}$ frequência (frequência do ciclotron) energia é $\hbar\omega_c$ por unidade. Utilizaremos $m^* = B = c = e = 1$. A Hamiltoniana ficará da seguinte forma:

$$H\psi = \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) - i \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{r^2}{4} \psi \right) = E\psi \quad (2)$$

Usando o método de separação de função para encontrar a solução, a função de onda será o produto de duas funções independentes $\psi(\phi, r) = \Phi(\phi)R(r)$. O operador de momento angular comuta com a Hamiltoniana, portanto, as autoenergias são compatíveis $[L_z, H] = 0$, o que significa que podemos encontrar uma solução para parte angular da função de onda, onde $L_z = \frac{-i\partial}{\partial \phi}$

$$\Phi(\phi) = \frac{e^{m\phi i}}{\sqrt{2\pi}} \quad (3)$$

Onde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, substituindo (3) na equação (2) e cancelando a função angular, só sobrá somente a coordenada radial para resolver na função de onda

$$\left(-\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2} R(r) + mR(r) + \frac{r^2 R(r)}{4} \right) = 2ER(r) \quad (4)$$

Mudaremos o sistema de coordenadas para $x = \frac{r^2}{2}$

$$\left(-2x \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial R(x)}{\partial x} + \frac{m^2 x^{-1}}{2} R(x) + m R(x) + \frac{x R(x)}{2} \right) = 2E R(x) \quad (5)$$

Podemos realizar uma análise assintótica nos limites de forma que $R(\infty) = R(0) = 0$, a função de onda na parte radial terá seguinte forma fazendo a análise $R(x) = x^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{x}{2}} U(x)$, chegamos em:

$$-2x \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + (2x - 2k - 2) \frac{\partial U(x)}{\partial x} + U(x) \left(k - \frac{k^2}{2} x^{-1} + 1 + \frac{m^2}{2} x^{-1} + m - 2E \right) = 0 \quad (6)$$

Análise assintótica que usamos anteriormente o $k > 0$ e $k = m$ para quando $R(0) = 0$, portanto, temos o deve ser $k = |m|$, a equação diferencial fica da seguinte forma

$$x \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + (|m| + 1 - x) \frac{\partial U(x)}{\partial x} - \frac{1}{2} (|m| + 1 + m - 2E) U(x) = 0 \quad (7)$$

A solução de $U(x)$ será os polinômios associados de Laguerre $U(x) = L_n^{|m|}(x)$, onde $n = |m| + 1 + m - 2E$.

A energia será reescrita da seguinte forma:

$$E = \frac{(|m| + 1 + m)}{2} + n \quad (8)$$

Assim obtivemos as autoenergias da função de onda. Normalizando a função e retornando para o sistema de coordenadas original $x = \frac{r^2}{2}$

$$R_{nm}^s(r) = \sqrt{\frac{n!}{(n + |m|)!}} \left(\frac{r^2}{2} \right)^{\frac{|m|}{2}} e^{-\frac{r^2}{4}} L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{2} \right) \quad (9)$$

Juntando as duas soluções, chegamos na função de onda para o estado de um elétron em um campo magnético

$$\Psi_{nm}^s(r, \phi) = \sqrt{\frac{n!}{(n + |m|)!}} \left(\frac{r^2}{2} \right)^{\frac{|m|}{2}} e^{-\frac{r^2}{4}} L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{2} \right) \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (10)$$

2.2 Dois elétrons interagentes em um campo magnético

Consideramos os elétrons sem spin ($H_{spin} = 0$) com as mesmas condições no estado de um elétron, além da interação elétron-elétron coulombiana. A Hamiltoniana do sistema corresponderá as duas hamiltonianas do estado de um elétron com a interação elétron-elétron sendo $\gamma_b = \frac{\epsilon_0 l_B}{\epsilon_\infty a_B}$, onde ϵ_0 e ϵ_∞ respectivamente, as constantes do dielétrico de baixa

e alta frequência e $a_B = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2}$ (raio de Bohr)

$$H_T(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = H_s(\vec{r}_1) + H_s(\vec{r}_2) + \frac{\gamma_b}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (11)$$

Reescrevendo o sistema de coordenadas para o centro de massa (\vec{R}_{cm}) e distância relativa (\vec{r}_{rel}) entre os elétrons, encontraremos duas hamiltonianas independentes para cada coordenada, sendo a seguinte transformação

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{\sqrt{2}} \quad (12)$$

$$\vec{r}_{rel} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\sqrt{2}} \quad (13)$$

Com a mudança de coordenadas obtemos a seguinte Hamiltoniana

$$H_T(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = H_{cm}(\vec{R}_{cm}) + H_{rel}(\vec{r}_{rel}) \quad (14)$$

Onde cada Hamiltoniana é escrita da seguinte forma:

$$H_{cm}(\vec{R}_{cm}) = \frac{1}{2}(-i\vec{\nabla}_{cm} + \frac{1}{2}\hat{z} \times \vec{R}_{cm})^2 \quad (15)$$

$$H_{rel}(\vec{r}_{rel}) = \frac{1}{2}(-i\vec{\nabla}_{rel} + \frac{1}{2}\hat{z} \times \vec{r}_{rel})^2 + \frac{\gamma_b}{|\vec{r}_{rel}|} \quad (16)$$

A solução para a Hamiltoniana do centro de massa é idêntica à solução para o estado de um elétron ($R_{nm}^s(\vec{r})$). A Hamiltoniana para posição relativa terá um termo a mais. Utilizaremos a seguinte notação $\vec{r}_{rel} = \vec{r}$

$$\left(-\frac{\partial^2 R_{nm}^s(r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial R_{nm}^s(r)}{\partial r} + \left(\frac{m^2}{r} + m + \frac{r^2}{4} + \frac{\gamma_b}{r} \right) R_{nm}^s(r) \right) = 2E R_{nm}^s(r) \quad (17)$$

Não existe uma solução analítica atualmente conhecida para a equação 17, outras soluções (2, 3) foram estudadas por outros autores, porém considerando outras interações. Estudaremos a interação de dois elétrons procurando uma solução analítica particular para valores específicos de γ_b .

2.2.1 Soluções Quase exatas

Começaremos supondo que nossa parte radial será escrita da seguinte forma e obter o valor γ_b , por uma relação da própria função

$$R(r) = r^{|m|} e^{\frac{-r^2}{4}} p(r) = r^{|m|} e^{\frac{-r^2}{4}} \sum_{n=0} a_n r^n \quad (18)$$

Reescrevendo a equação 17 com a substituição da equação 18

$$r \frac{\partial^2 P(r)}{\partial r^2} + (2|m| + 1 - r^2) \frac{\partial P(r)}{\partial r} + 2(E^{rel} r - \gamma_b) P(r) = 0 \quad (19)$$

Considerando $a_0 \neq 0$ uma constante de normalização, chegamos nas seguintes relações de recorrência para as constantes

$$a_1 = \frac{2\gamma_b}{2|m| + 1} a_0 \quad (20)$$

$$(n - 2E^{rel} - 2)a_{(n-2)} + 2\gamma_b a_{(n-1)} = (n^2 + 2|m|n)a_{(n)} \quad (21)$$

Considerando $a_{n_p+2} = a_{n_p+1} = 0$, obtemos que $E^{rel} = \frac{n_p}{2}$. Podemos usar as relações de recorrência para encontrar os valores específico de γ_b , para $n \geq 2$. Os coeficientes convergem e param no $(n_p - 1)^\circ$ coeficiente

$$p_{n_p}(r) = \sum_{n=0}^{n_p-1} a_n r^n \quad (22)$$

2.2.2 Soluções Numérica

Propomos como base para solução numérica a função de onda de um elétron ($\gamma_b = 0$)

$$R_{nm}^{rel}(r) = \sum_{n'} a_{nn'} R_{n'm}^s(r) \quad (23)$$

Reescrevamos mais a frente a Hamiltoniana de dois elétrons para podermos utilizar a relação encontrada da função do estado de um elétron dentro de um campo magnético com o intuito de encontrar uma relação entre as autoenergias e as autofunções desse novo sistema.

3 Resultados

Será calculado primeiramente a função de onda quase-exata, encontraremos os valores específicos γ_b .

3.1 Soluções quase-exata

Calculemos os valores de γ_b para os n_p de 1 à 4.

Temos que $n_p = 0$, e $n_p = 1$, o $\gamma_b = 0$, não temos que relações entre os coeficientes.

Para $n_p = 2$, temos as seguintes relações $E^{rel} = 1$

$$\begin{aligned} 2\gamma_b a_1 &= a_0 \\ a_1 &= \frac{2\gamma_b a_0}{(2|m| + 1)} \end{aligned} \quad (24)$$

Usando todas essas relações e isolando γ_b , chegamos que:

$$\gamma_b = \frac{\sqrt{2|m| + 1}}{2} \quad (25)$$

Para $n_p = 3$ temos as seguintes relações, temos que a $E^{rel} = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} 2\gamma_b a_2 &= a_1 \\ a_2(2|m| + 2)2 &= 2\gamma_b a_1 - 2a_0 \\ \frac{2|m| + 1}{2\gamma_b} a_1 &= a_0 \end{aligned} \quad (26)$$

Usando todas essas relações e isolando γ_b , chegamos que:

$$\gamma_b = \sqrt{\frac{(4|m| + 3)}{2}} \quad (27)$$

Para $n_p = 4$ temos as seguintes relações, temos que a $E^{rel} = 2$

$$\begin{aligned} 2\gamma_b a_3 &= a_2 \\ (2|m| + 3)3a_3 &= 2\gamma_b a_2 - 2a_1 \\ (2|m| + 2)2a_2 &= 2\gamma_b a_1 - 3a_0 \\ \frac{2|m| + 1}{2\gamma_b} a_1 &= a_0 \end{aligned} \quad (28)$$

Usando todas essas relações e isolando γ_b , chegamos que:

$$\gamma_b = \sqrt{\frac{5 + 5|m| \pm \sqrt{73 + 64|m|(2 + |m|)}}{2}} \quad (29)$$

Foi considerado $a_0 \neq 0$ sendo uma constante de normalização, usando as relações 20 e a 21 para encontrar os outros coeficientes da função quasi-exata

$$R(r) = r^{|m|} e^{\frac{-r^2}{4}} \sum_{n=0}^{n_p-1} a_n r^n \quad (30)$$

Podemos encontrar a_0 Normalizando a função de onda $n_p = 0$

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r dr = \int_0^\infty r^{2|m|} e^{\frac{-r^2}{2}} a_0^2 r = 1 \quad (31)$$

Obtemos:

$$a_0 = \left(\sqrt{2^{|m|} \Gamma(|m|)} \right)^{-1} \quad (32)$$

Normalizando a função de onda $n_p = 1$

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r dr = \int_0^\infty r^{2|m|} e^{\frac{-r^2}{2}} a_0^2 \left(1 + \frac{r}{2\gamma_b} \right)^2 r = 1 \quad (33)$$

Obtemos:

$$a_0 = \left(\sqrt{2^{|m|} \Gamma(|m|) + \frac{2 \cdot 2^{|m|+\frac{1}{2}} \Gamma(|m| + \frac{3}{2})}{2\gamma_b} + \frac{2^{|m|+1} \Gamma(|m| + 1)}{4\gamma_b^2}} \right)^{-1} \quad (34)$$

Calculado a normalização e usando a relação de recorrência para encontrar os outros coeficientes. As funções de onda para o quase-exata que obtemos para $n_p = 2$ e $n_p = 3$

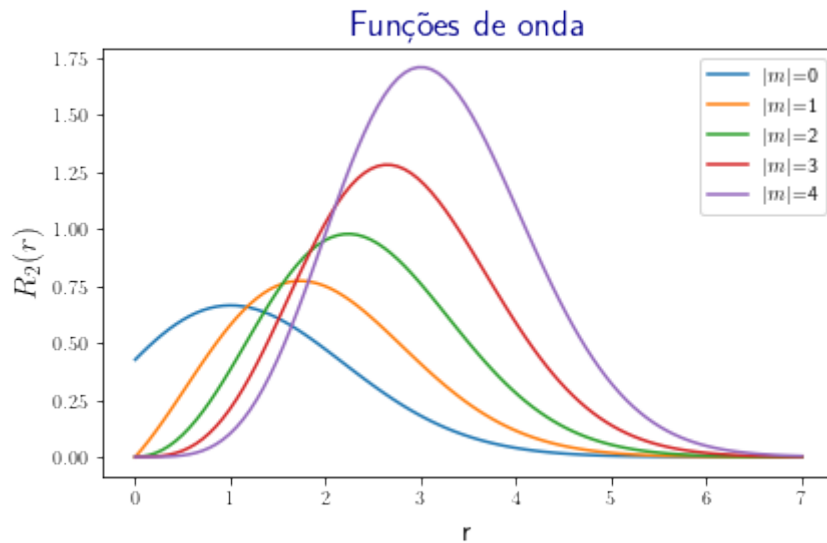


Figura 1: Função de onda radial quase-exata $n_p = 2$

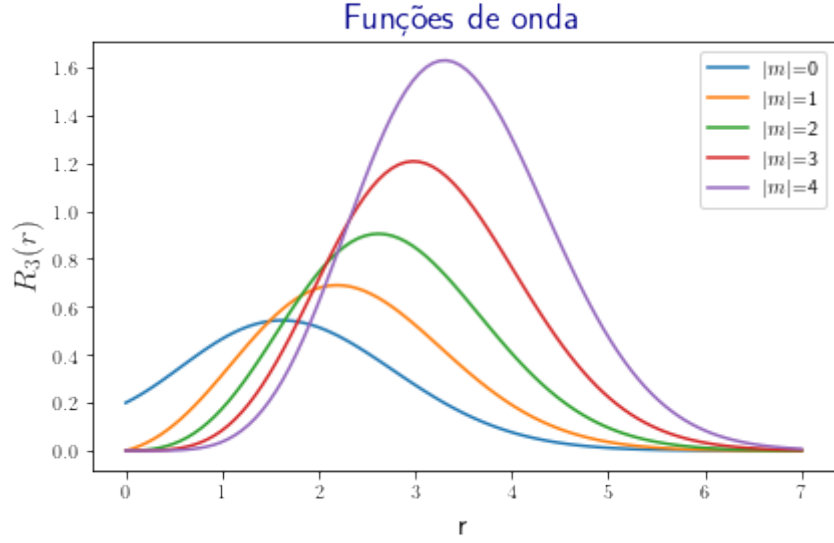


Figura 2: Função de onda radial quase-exata $n_p = 3$

3.2 Soluções Numérica

Podemos reescrever a Hamiltoniana de forma que possamos utilizar as autoenergias de um elétron para quando calculamos numericamente

$$H_r = \frac{1}{2} \left(-i\nabla_r + \frac{1}{2} \hat{z} \times \vec{r} \right)^2 + \frac{\gamma_b}{|r|} = H_s + \frac{\gamma_b}{|r|} \quad (35)$$

$$\left(H_s + \frac{\gamma_b}{|r|} \right) \sum_{n'} a_{nn'} R_{n'm}^s(r) = \sum_{n'} a_{nn'} \left(E_s + \frac{\gamma_b}{|r|} \right) R_{n'm}^s(r) = E^{rel} R_{n'm}^s(r) \quad (36)$$

Multiplicando por R_{nm}^s (função de onda do estado de um elétron) e usando a operação de bracket, chegamos na seguinte relação

$$\sum_{n'} a_{nn'} ((E_{nm}^s - E_{n'm}^{rel}) \langle n, m | n', m \rangle + \langle n, m | \frac{\gamma_b}{|r|} | n', m \rangle) = 0 \quad (37)$$

Devemos calcular a seguinte integral

$$\langle n, m | \frac{\gamma_b}{|r|} | n', m \rangle = \gamma_b \int_0^\infty R_{n'm}^s \left(\frac{r^2}{2} \right) R_{nm}^s \left(\frac{r^2}{2} \right) dr \quad (38)$$

Abrindo a função R_{nm}^s , chegamos na seguinte integral

$$\gamma_b \int_0^\infty \sqrt{\frac{n!n'!}{(n+|m|)!(n'+|m|)!}} \left(\left(\frac{r^2}{2} \right)^{\frac{|m|}{2}} e^{-\frac{r^2}{4}} \right)^2 L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{2} \right) L_{n'}^{|m|} \left(\frac{r^2}{2} \right) dr \quad (39)$$

Os polinômios associados de Laguerre é definido da seguinte forma

$$L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{2} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n + |m|)! r^{2k}}{(n - k)! (|m| + k)! k! 2^k} \quad (40)$$

Podemos elaborar a seguinte mudança de variável $x = \frac{r^2}{2}$ e $dx = r dr$, portanto $r = \sqrt{2x}$ e $\frac{dx}{\sqrt{2x}} = dr$

$$\int_0^\infty \frac{x^{|m|-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} e^{-x} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{(n + |m|)! x^j}{(n - j)! (|m| + j)! j!} \sum_{i=0}^{n'} (-1)^i \frac{(n' + |m|)! x^i}{(n' - i)! (|m| + i)! i!} dx \quad (41)$$

Usando a definição da função gama

$$\int_0^\infty x^{n+1} e^{-x} dx = \Gamma(n) \quad (42)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n'} (-1)^{i+j} \frac{(n + |m|)! \Gamma(i + |m| + \frac{1}{2} + j)}{(n - j)! (|m| + j)! j!} \frac{(n' + |m|)!}{(n' - i)! (|m| + i)! i!} \quad (43)$$

Assim podemos encontrar os autovetores e autovalores da seguinte matriz

$$\langle n, m | \frac{\gamma_b}{|r_r|} | n', m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n'} (-1)^{i+j} \frac{(n + |m|)! \Gamma(i + |m| + \frac{1}{2} + j) (n' + |m|)!}{(n - j)! (|m| + j)! j! (n' - i)! (|m| + i)! i!} \quad (44)$$

Esse é o comportamento da matriz que obtemos.

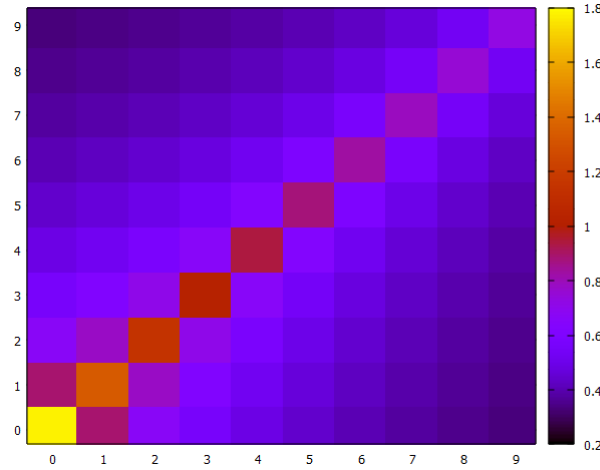


Figura 3: Matriz da equação 44 para m=0

Sabemos como o espectro de energia se comporta para a solução numérica, portanto, unificamos com os γ_b obtidos pela solução quase-exata e chegamos nos seguintes pontos no espectro.

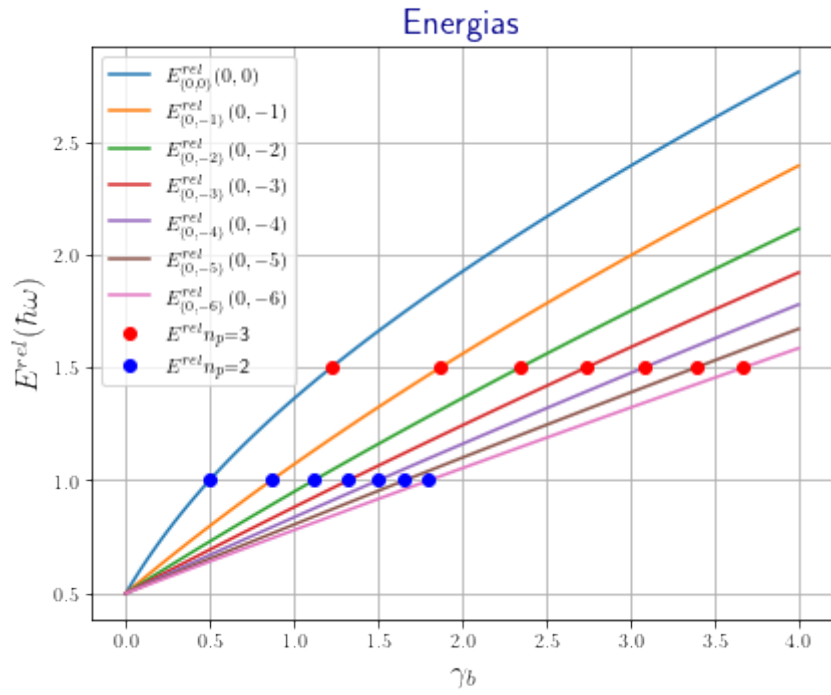


Figura 4: Espectro de energia do estado fundamental($n=0$) da solução numérica, m variando de 0 até -7, os γ_b específicos de $n_p = 2$ e $n_p = 3$ é respectivamente a equação 25 e 27

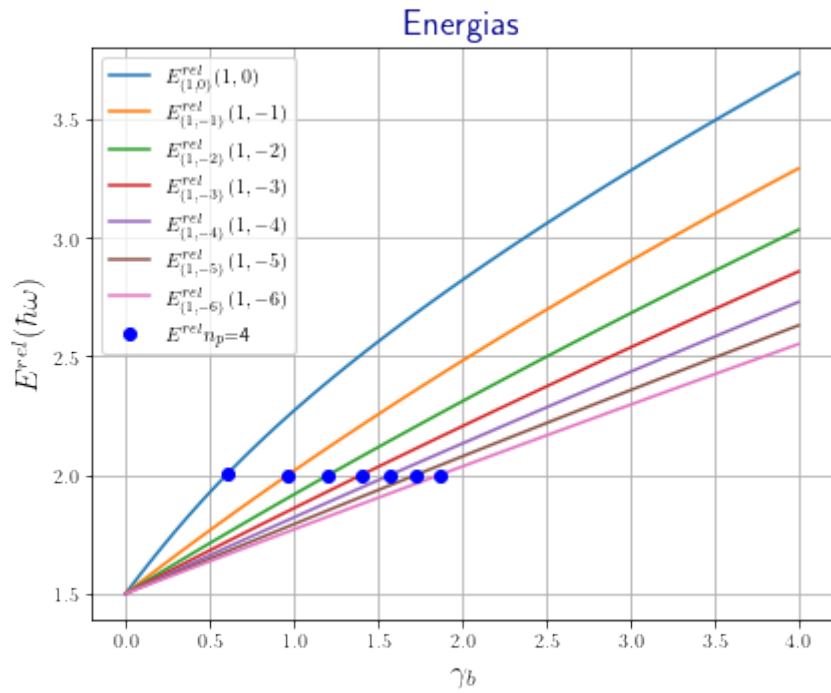


Figura 5: Espectro de energia para o estado $n=1$ da solução numérica, m variando de 0 até -7, o γ_b é definido pela equação 29

Resultado que obtemos substituindo γ_b específico da solução quase-exata no espectro

de energia da solução numérica coincidem com o valor esperado da $E^{rel} = \frac{n_p}{2}$. A função de onda da solução numérica se comporta da seguinte forma.

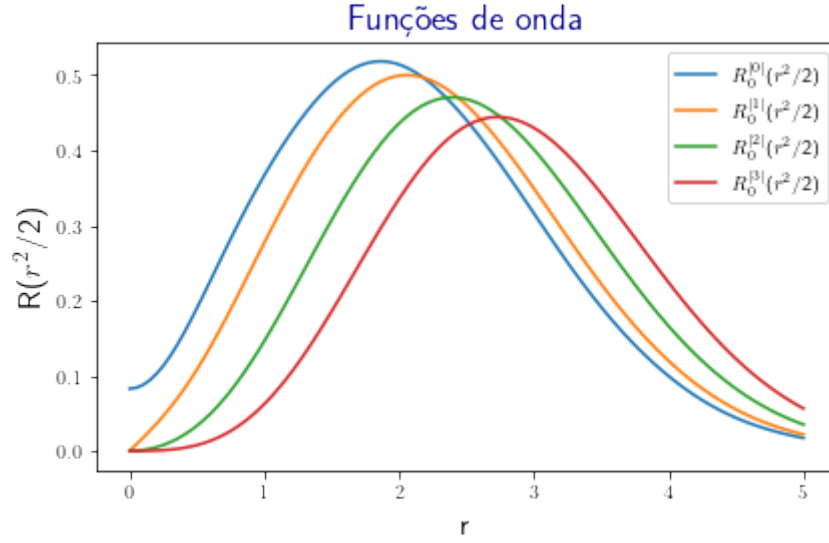


Figura 6: Função de onda obtida numericamente para $n=0$ para γ_b definido na equação 25

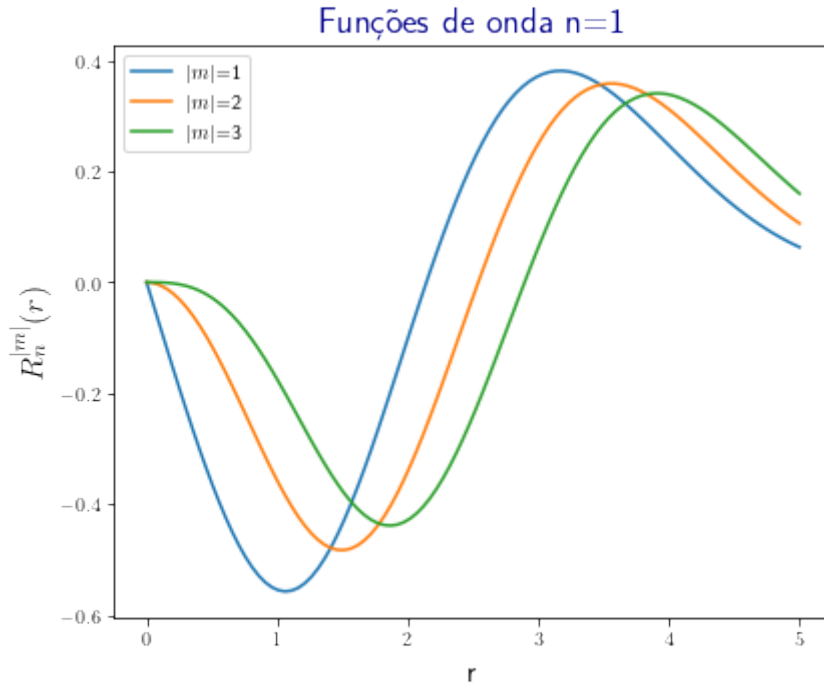


Figura 7: Função de onda obtida numericamente para $n=1$ para γ_b definido na equação 25

3.3 Comparação das soluções

Podemos realizar a comparação entre as soluções, numérica, e a quase-exata, investigaremos para a parte polinomial da função de onda, onde é esperado que, para os valores específicos de γ_b , as soluções devem ser próximas.

$$h_n^{[m]} \left(\frac{r^2}{2} \right) = \sum_{n'} a_{nn'}^{(m)} \sqrt{\frac{n'!(n+|m|)!}{n!(n'+|m|)!}} L_{n'}^{[m]} \left(\frac{r^2}{2} \right) \quad (45)$$

Analisaremos o comportamento da equação 45 com a 22 para os γ_b específicos do n_p 2 à 4 tomando $m=0$ para quando definimos o γ_b .

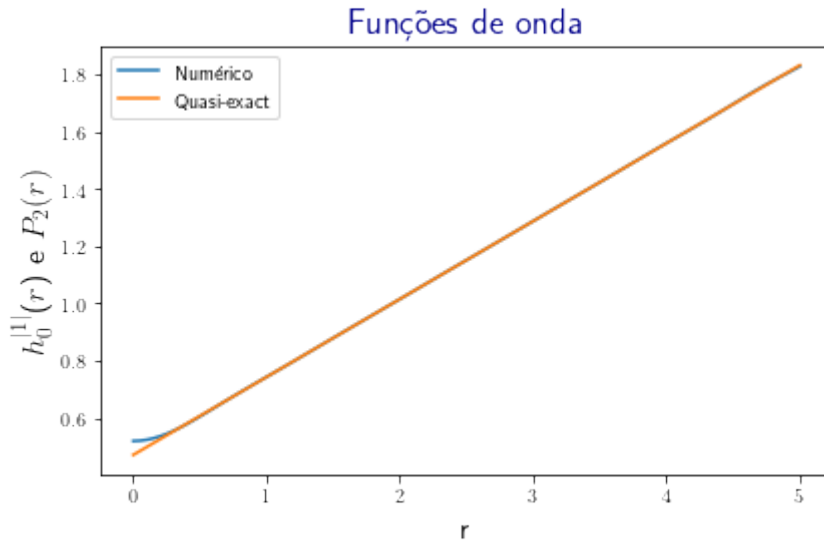


Figura 8: Funções de onda para γ_b do $n_p = 2$, equação 25

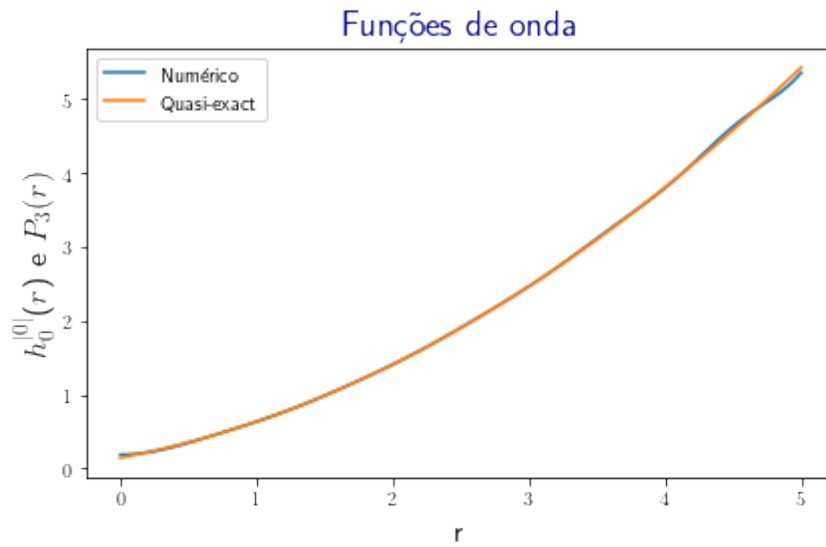


Figura 9: Funções de onda para γ_b do $n_p = 3$, equação 27

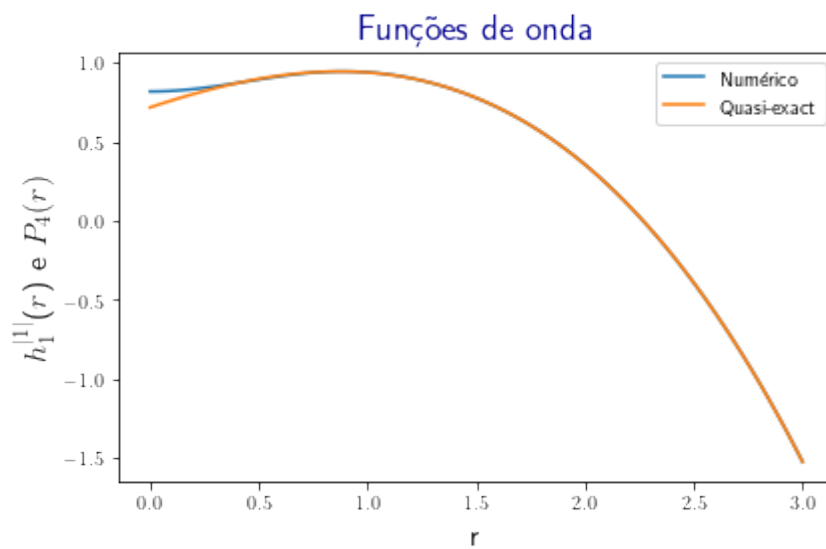


Figura 10: Funções de onda para γ_b do $n_p = 4$, equação 29

Os polinômios de ambas as soluções coincidem numa região próxima à origem. Sabemos que a equação 45 é a soma de polinômios que crescem $x^{2n'}$, portanto um erro entre os polinômios começa aparecer quanto maior for distância da origem.

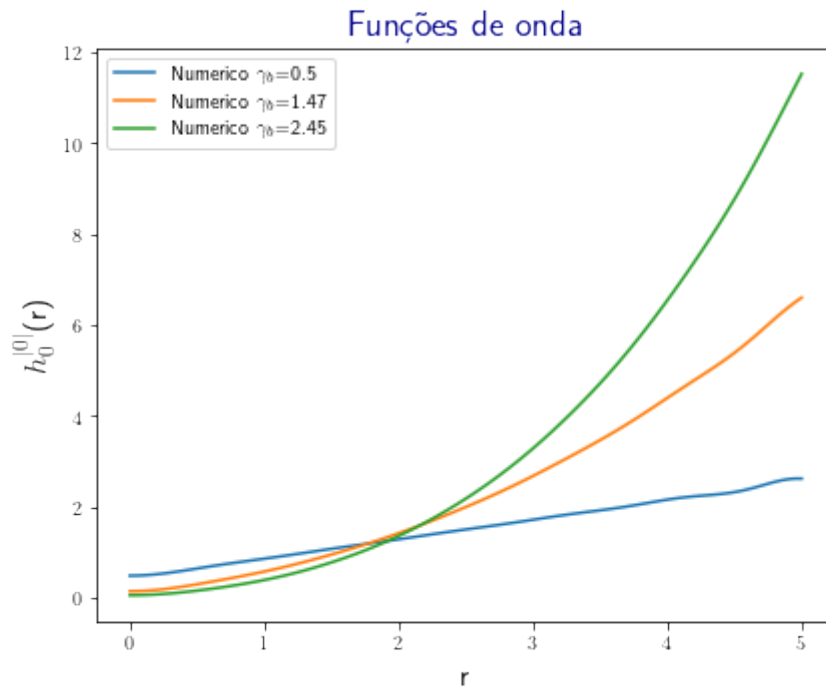


Figura 11: Evolução da função de onda com mudança do parâmetro de γ_b função de onda no estado fundamental $n=0$

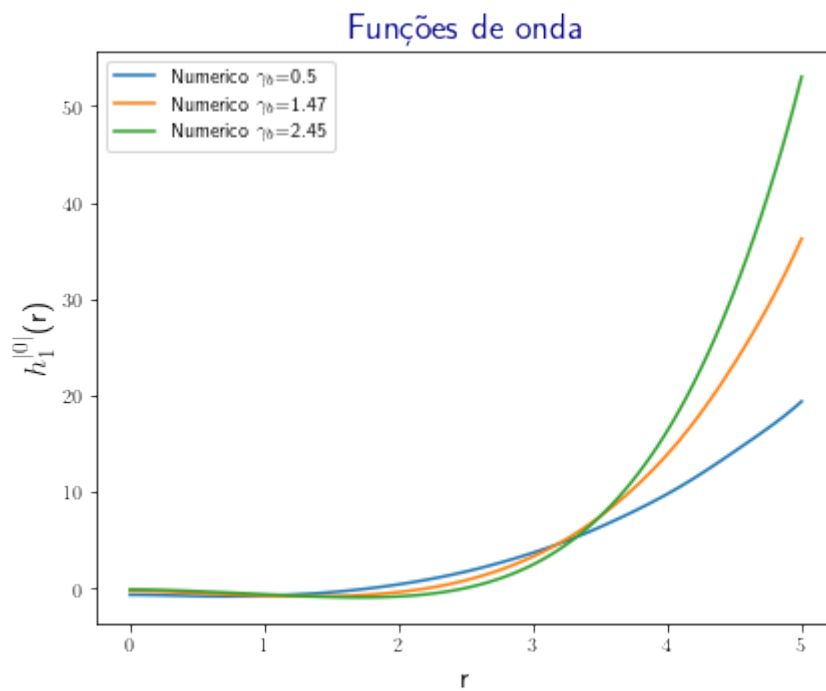


Figura 12: Evolução da função de onda com mudança do parâmetro de γ_b função de onda no estado $n=1$

Comparação total entre as funções de onda nos valores específicos de γ_b .

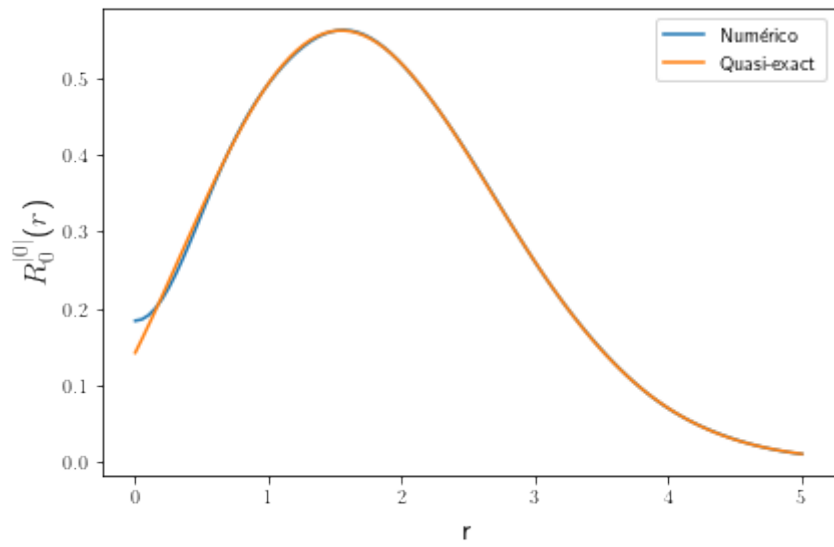


Figura 13: função de onda para $n=0$, $m=0$ para $\gamma_b=1,224$

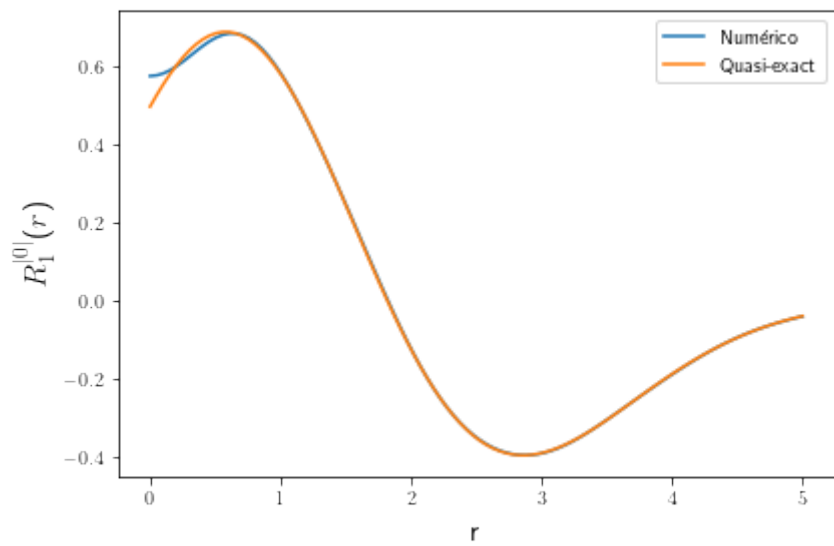


Figura 14: função de onda para $n=0$, $m=0$ para $\gamma_b=0,603$

4 Conclusão

A relação entre as duas soluções mostrou ser frutífera para sistematizar a solução numérica para compreender os resultados obtidos do estado de dois elétrons interagentes em um campo magnético. Os polinômios da função de onda da parte radial se apresentaram similares na região próxima à origem. Após certo ponto, os polinômios de grau maior começa a predominar. Observamos na figura 13 e na 14 uma imprecisão computacional na origem entre os métodos.

Ao encontrar os valores específicos de γ_b no método quase-exata, observamos a influência no número quântico $|m|$ da função de onda na parte angular da equação 3 no valor de γ_b como mostra as equações 25, 27, e 29. Os valores de energias que obtemos na solução quase-exata $E^{rel} = \frac{n_p}{2}$ coincidiram com resultados do espectro de energia da solução numérica para os pontos específicos, onde esse número só altera o formato da função de onda.

Utilizar a solução do estado de um elétron como base para solução desse novo sistema que analisamos mostrou ser positiva nos resultados obtidos para solução numérica, coincidindo os resultados das funções de onda e do espectro de energia nos pontos γ_b da solução quase-exata. As comparações abrirão um caminho para aproximar as funções de onda de dois elétrons em interação com uma função simples em qualquer campo magnético.

Referências

- 1 TONG, D. *Lectures on the Quantum Hall Effect*. [S.l.]: arXiv, 2016.
- 2 MYRHEIM, J.; HALVORSEN, E.; VERçIN, A. Two anyons with coulomb interaction in a magnetic field. *Physics Letters B*, v. 278, n. 1, p. 171–174, 1992. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939290729N>>.
- 3 TAUT, M. Two electrons in a homogeneous magnetic field: particular analytical solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 27, n. 3, p. 1045, 1994.
- 4 HAI, G. Q. Sub-landau levels of magnetics-filed-induced two-dimensional electron pairs. unpublished.
- 5 ESCOBAR-RUIZ, M. A.; TURBINER, A. V. Two charges on a plane in a magnetic field: Special trajectories. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 54, n. 2, p. 022901, feb 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063%2F1.4792478>>.
- 6 TURBINER, A. V.; ESCOBAR-RUIZ, M. A. Two charges on a plane in a magnetic field: hidden algebra, (particular) integrability, polynomial eigenfunctions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 46, n. 29, p. 295204, jul 2013. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/46/29/295204>>.
- 7 TURBINER, A. Quasi-exactly-solvable problems andsl (2) algebra. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 118, n. 3, p. 467–474, 1988.
- 8 RALKO, A.; TRUONG, T. On exact singular wave functions of two identical particles. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 29, n. 2, p. 335–338, 2002.
- 9 TRUONG, T.; BAZZALI, D. Exact low-lying states of two interacting equally charged particles in a magnetic field. *Physics Letters A*, v. 269, n. 2, p. 186–193, 2000. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960100002498>>.
- 10 TAUT, M. Special analytical solutions of the schrödinger equation for two and three electrons in a magnetic field and ad hoc generalizations to n particles. *Journal of Physics: Condensed Matter*, IOP Publishing, v. 12, n. 15, p. 3689, 2000.
- 11 KANDEMIR, B. Two interacting electrons in a uniform magnetic field and a parabolic potential: The general closed-form solution. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 46, n. 3, p. 032110, 2005.
- 12 KANDEMIR, B. S. Variational study of two-electron quantum dots. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 72, p. 165350, Oct 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.72.165350>>.