UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física de São Carlos

Projeto 3: Metodos Básicos Integro-Diferenciais

Anderson Araujo de Oliveira 11371311

2020

1 QA

1.1 Valores analíticos

Nessa parte do projeto iremos calcular aproximação da derivada no ponto x=1 para derivadas de ordem 1,2 e 3, $f(x) = sinh(2x)sin(\frac{x}{4})$, vamos utilizar a regra do produto para derivar até terceira ordem.

$$\frac{df(x)}{dx} = h'(x)g(x) + h(x)g'(x) \tag{1}$$

Derivada de primeira ordem

$$\frac{d(sinh(2x)sin(\frac{x}{4}))}{dx} = \frac{1}{4}cos(\frac{x}{4})sinh(2x) + 2sin(\frac{x}{4})cosh(2x) \tag{2}$$

Derivada de segunda ordem

$$\frac{d\frac{1}{4}cos(\frac{x}{4})sinh(2x) + 2sin(\frac{x}{4})cosh(2x)}{dx} = \frac{63}{14}cin(\frac{x}{4})sinh(2x) + cos(\frac{x}{4})cosh(2x) \tag{3}$$

Derivada de terceira ordem

$$\frac{d\frac{63}{14}cin(\frac{x}{4})sinh(2x) + cos(\frac{x}{4})cosh(2x)}{dx} = \frac{191}{64}cos(\frac{x}{4})sinh(2x) + \frac{61}{8}sin(\frac{x}{4})cosh(2x) \tag{4}$$

1.2 Diferenciação numérica

Vamos obter uma aproximação para derivadas usando série de taylor.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{x+1} - x_i)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(x_{x+1} - x_i)^3 + ... \tag{5}$$

Para obter a primeira aproximação das derivadas vamos utilizar serie de taylor até 1°ordem que chamamos de derivada para frente.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{x+1} - x_i)^2 \tag{6}$$

Se isolamos o $f'(x_i)$ da equação (6) e consideramos a derivada de 2°ordem como erro.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} \tag{7}$$

se utilizamos a mesma ideia da anterior, mas dessa vez para série de taylor $f(x_{i-1})$chegamos na derivada de traz

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_x - x_{i-1})^2 \tag{8}$$

assim isolando $f'(x_i)$ chegamos na derivada de traz simétrica.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} \tag{9}$$

Para a aproximação derivada de 3 pontos vamos utilizar á série de taylor até 2° ordem

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_x - x_{i-1})^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}(x_x - x_{i-1})^3 \tag{10}$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{x+1} - x_i)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(x_{x+1} - x_i)^3 \tag{11}$$

subtraindo (10) pela (11), considerando $(x_i - x_{i-1}) \cong (x_{i+1} - x_i) = h$.

$$f(x_{i+1}) - f(x_{x-1}) = 2f'(x_i)h \tag{12}$$

O erro de trucamento é:

$$E = \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 \tag{13}$$

isolando $f'(x_i)$ da (12), cchegamos na derivada aproximada de 3 pontos

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \tag{14}$$

1.3 Resultados

Como vemos nas figuras (1 e 2) que os resultados que tem uma precisão alta chegam a esse valores com h ainda grande na casa de 10^{-3}, quanto os desvios que uma precisão menor seu valor máximo de precisão fica entorno de 10^{-7}.

h	sim 3 pontos	p/ frente 2 p	p/ traz 2 p	sim 5 pontos	2ª sim 5 pontos	3ª anti-simétrica 5
0.500000000000	0.782662746066	1.238528286026	2.803853778158	0.2236662989702	0.161631239086	6.567261163621
0.200000002980	0.118479987805	0.613356106707	0.850316082316	0.0050876718210	0.003796549515	0.950512474174
0.100000001490	0.029385529584	0.331273524818	0.390044583987	0.0003126231557	0.000234380996	0.234255195730
0.050000000745	0.007331790353	0.172344483565	0.187008064270	0.0000194560580	0.000014603786	0.058354942333
0.009999999776	0.000293085024	0.035600429610	0.036186599657	0.0000000310873	0.000000023344	0.002331530563
0.004999999888	0.000073269799	0.017872835620	0.018019375218	0.0000000019429	0.000000001460	0.000582861791
0.001000000047	0.000002930774	0.003586248840	0.003592110387	0.0000000000031	0.000000000040	0.000023248294
0.000500000024	0.000000732693	0.001793856462	0.001795321848	0.0000000000003	0.000000001123	0.000006428418
0.000099999997	0.000000029308	0.000358888455	0.000358947070	0.0000000000002	0.000000006103	0.000021369003
0.000049999999	0.000000007327	0.000179451554	0.000179466208	0.0000000000001	0.000000015177	0.000034142153
0.000010000000	0.000000000300	0.000035891474	0.000035892074	0.0000000000097	0.000000654658	0.154133109649
0.000001000000	0.000000000031	0.000003589098	0.000003589160	0.0000000000314	0.000134392892	17.584635917259
0.000000100000	0.000000000494	0.000000359096	0.000000358108	0.0000000005864	0.009090395766	55493.564649214451
0.000000010000	0.000000001780	0.000000040638	0.000000037078	0.0000000017802	0.778243030138	17.584635917259

derivada de 1° ordem 2.7400917441721711 derivada de 2° ordem 7.1783554097211972 derivada de 3° ordem 17.584635917258847

Figura 1: Desvio

h	sim 3 pontos	p/ frente 2 p	p/ traz 2 p	sim 5 pontos	2ª sim 5 pontos	3ª anti-simétrica 5
0.500000000000	3.522754490239	1.501563458147	5.543945522331	2.5164254452019	7.016724170635	24.151897080880
0.200000002980	2.858571731977	2.126735637465	3.590407826489	2.7350040723512	7.174558860206	18.535148391433
0.100000001490	2.769477273757	2.408818219354	3.130136328159	2.7397791210165	7.178121028725	17.818891112989
0.050000000745	2.747423534525	2.567747260608	2.927099808442	2.7400722881142	7.178340805935	17.642990859592
0.009999999776	2.740384829196	2.704491314562	2.776278343830	2.7400917130848	7.178355386377	17.586967447822
0.004999999888	2.740165013971	2.722218908552	2.758111119390	2.7400917422293	7.178355408261	17.585218779050
0.001000000047	2.740094674946	2.736505495332	2.743683854560	2.7400917441691	7.178355409681	17.584659165553
0.000500000024	2.740092476865	2.738297887711	2.741887066020	2.7400917441719	7.178355408598	17.584642345677
0.000099999997	2.740091773480	2.739732855717	2.740450691243	2.7400917441719	7.178355403619	17.584657286262
0.000049999999	2.740091751499	2.739912292618	2.740271210380	2.7400917441720	7.178355424898	17.584601775106
0.000010000000	2.740091744472	2.740055852699	2.740127636246	2.7400917441818	7.178354755063	17.430502807610
0.000001000000	2.740091744204	2.740088155075	2.740095333333	2.7400917442036	7.178221016829	0.000000000000
0.000000100000	2.740091743678	2.740091385076	2.740092102280	2.7400917435857	7.169265013955	55511.149285131709
0.000000010000	2.740091742392	2.740091703534	2.740091781250	2.7400917423920	7.956598439859	0.000000000000

derivada de 1° ordem 2.7400917441721711 derivada de 2° ordem 7.1783554097211972 derivada de 3° ordem 17.584635917258847

Figura 2: Aproximação

Na tabela abaixo vemos o valores mais adequados para h para cada derivada simétrica.

	simétrica 3 pontos	p/frente 2 pontos	p/traz 2 pontos	simétrica 5 pontos	2° simétrica 5 pontos	3° anti-simétrica 5 pontos
h	0.000001	0.000000001	0.00000001	0.00005	0.0005	0.0005

Tabela 1: h mais apropriado para cada derivada

2 QB

Na parte B iremos calcular integral usando metodos de aproximações de uma curva de $f(x)$ onde $f(x) = e^{\frac{x}{2}}cos(\pi x)$, através dos metodos de trapézio, simpsons e de bode.

2.1 Valor analítico

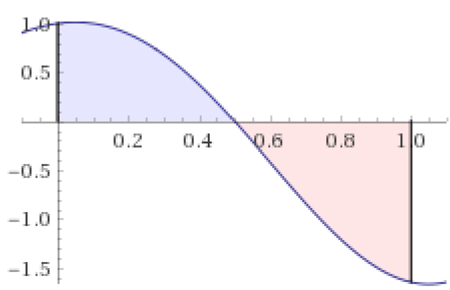

Figura 3: Curva de f(x),fonte: WolframAlpha

Para comparação ao valor real vamos obter o valor analítico da integral de f(x)

$$\int_0^1 e^{\frac{x}{2}}cos(\pi x)dx \tag{15}$$

Vamos achar primitiva e calcular nos extremos, vamos utilizar integração por partes

$$\int e^{\frac{x}{2}}cos(\pi x)dx = 2e^{\frac{x}{2}}cos(\pi x) - 2\pi \int e^{\frac{x}{2}}sin(\pi x) \tag{16}$$

usando novamente integração por partes

$$\int e^{\frac{x}{2}}cos(\pi x)dx = 2e^{\frac{x}{2}}cos(\pi x) + 4\pi e^{\frac{x}{2}}sin(\pi x) - 4\pi^2 \int e^{\frac{x}{2}}cos(\pi x) \tag{17}$$

isolando a integral, chegamos em

$$(1 + 4\pi^2) \int e^{\frac{x}{2}}cos(\pi x)dx = 2e^{\frac{x}{2}}cos(\pi x) + 4\pi e^{\frac{x}{2}}sin(\pi x) \tag{18}$$

$$\int e^{\frac{x}{2}} cos(\pi x) dx = \frac{2e^{\frac{x}{2}} cos(\pi x) + 4\pi e^{\frac{x}{2}} sin(\pi x)}{(1+4\pi^2)} \tag{19}$$

Calculando nos extremos

$$[\frac{2e^{\frac{x}{2}} cos(\pi x) + 4\pi e^{\frac{x}{2}} sin(\pi x)}{(1+4\pi^2)}]_0^1 = -\frac{2+2\sqrt{e}}{1+4\pi^2} = -0.13087079 \tag{20}$$

2.2 Regra do trapézio

Para o regra do trapézio se pegamos os dois pontos extremos a e b , pegassemos o tamanho desse intervalo (b-a) e calculássemos como se fosse um trapézio $A = \frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{2}$,Teriamos uma aproximação grosseira dessa curva.

Com intuito de melhorar a aproximação dividimos os intervalos em N vezes e calculamos a área dos trapézios assim se somamos essas partições que fizemos chegamos em uma área mais aproximada da curva, chamando $\alpha = \frac{b-a}{N}$podemos escrever a soma desse jeito $\sum_{i=0}^{N} \frac{(f(i\alpha)-f(i\alpha+\alpha))(\alpha)}{2}$,portanto podemos aumentar cada vez mais precisão aumentando o valor de N fazendo a partições ficarem cada vez menor.

2.3 Regra de Simpson

Como vimos na regra do trapézio viamos aproximações em sub-intervalos atravês de um polinómio 1° grau, assim podemos fazer uma aproximação melhor usando um polinômio de 2°grau, mas para isso precisaremos um ponto adicional. $\frac{(f(a)+4f(a+h)+f(b))(a-b)}{3}$

Assim se dividimos novamente os intervalos e somamos todos chegamos em uma expressão que se aproxima do valor exato.

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{(f(i\alpha) + 4f(i\alpha + \alpha) + f(i\alpha + 2\alpha))\alpha}{3} \tag{21}$$

2.4 Regra de Bode e Regra de simpson3/8

Se aumentamos as quantidades de pontos chegamos na regra de bode e de simpsons3/8.

Regra de Simpson3/8

$$\frac{(f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2*h) + f(b))3h}{8} \tag{22}$$

Regra de Bode

$$\frac{(7f(a) + 32f(a+h) + 12f(a+2h) + 32f(a+3h) + f(a+4h))2h}{45} \tag{23}$$

2.5 Resultados

Percebemos que na figuras(3 e 4) abaixo quanto menor o valor de h mais preciso chegamos ao valor dá integral, mas vemos que no metodo do bode e de simpsins3/8 a uma variação nos valores que dever causada pelos pontos flutuação que ocorrem em dupla precisão.

N	h	trapezio	simpson	bode
4	0.250000000000000	-0.137984493985051	-.129919219421723436	-.131372486597614690
8	0.125000000000000	-0.132608480982492	-.130816476648305979	-.130876293796744814
16	0.062500000000000	-0.131302723469967	-.130867470965792349	-.130870870586958149
32	0.031250000000000	-0.130978619537853	-.130870584893814645	-.130870792489016091
64	0.015625000000000	-0.130897738679151	-.130870778392917109	-.130870791292857364
128	0.007812500000000	-0.130877527521670	-.130870790469175990	-.130870791274259907
256	0.003906250000000	-0.130872475298170	-.130870791223669847	-.130870791273969694
512	0.001953125000000	-0.130871212277659	-.130870791270821574	-.130870791273965281
1024	0.000976562500000	-0.130870896524742	-.130870791273768911	-.130870791273965004
2048	0.000488281250000	-0.130870817586650	-.130870791273952541	-.130870791273964726
4096	0.000244140625000	-0.130870797852135	-.130870791273963893	-.130870791273965337

N	h	simpsons3/8
9	0.111111111111111	-0.130793157626483
27	0.037037037037037	-0.130869872016770
81	0.012345679012346	-0.130870779976969
243	0.004115226337449	-0.130870791134568
729	0.001371742112483	-0.130870791272241
2187	0.000457247370828	-0.130870791273940
6561	0.000152415790276	-0.130870791274004

valor analitico da integral -0.13087079127396511

Figura 4: Desvios integrais

N	h	trapezio	simpson	bode
4	0.250000000000000	0.007113702711085	0.000951571852241678	0.000501695323649576
8	0.125000000000000	0.001737689708527	0.000054314625659135	0.000005502522779699
16	0.062500000000000	0.000431932196002	0.000003320308172766	0.000000079312993034
32	0.031250000000000	0.000107828263888	0.000000206380150469	0.000000001215050976
64	0.015625000000000	0.000026947405186	0.000000012881048006	0.000000000018892249
128	0.007812500000000	0.000006736247705	0.000000000804789124	0.000000000000294792
256	0.003906250000000	0.000001684024205	0.000000000050295268	0.000000000000004580
512	0.001953125000000	0.000000421003694	0.000000000003143541	0.000000000000000167
1024	0.000976562500000	0.000000105250777	0.000000000000196204	0.000000000000000111
2048	0.000488281250000	0.000000026312685	0.000000000000012573	0.000000000000000389
4096	0.000244140625000	0.000000006578170	0.000000000000001221	0.000000000000000222

N	h	simpsons3/8
9	0.111111111111111	0.000077633647482
27	0.037037037037037	0.000000919257195
81	0.012345679012346	0.000000011296997
243	0.004115226337449	0.000000000139397
729	0.001371742112483	0.000000000001724
2187	0.000457247370828	0.000000000000025
6561	0.000152415790276	0.000000000000038

valor analitico da integral -0.13087079127396511

Figura 5: integrais

3 QC

3.1 Método de Newton-Raphson

intepretação geometrica Seja uma dada função f(x).Para tanto, escolhemos uma aproximação incial x_1 e computamos.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{24}$$

Geometricamente, o ponto x_2 é a interseção da reta tangente ao gráfico da função f(x) no ponto $x = x_1$ com o eixo das abscissas.

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + (f(x_1) \tag{25}$$

Assim, a interseção desta reta com o eixo das abscissas(y=0) ocorre quando

$$f'(x_1)(x - x_1) + (f(x_1) = 0 \tag{26}$$

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{27}$$

3.2 Método de secante

Enquanto, o metodo de newton está relacionada ás retas tangentes ao gráfico da função f(x), o metodo dsa secantes,como o próprio nome indica, está relacionado ás retas secantes.

Seja f(x) e as aproximações x_1 e x_2 do zero x desta função.A iteração do método das secantes fornece:

$$x_3 = x_2 f(x_2) \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \tag{28}$$

De fato, x é o ponto de interseção da reta secante ao gráfico de f(x) pelo pontos x e x com eixo dsa abscissas. com efeito, a equação desta reta secante é:

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2) + f(x_2) \tag{29}$$

Esta reta intercepta o eixo dsa abscissas no ponto x tal que y=0 isto é:

$$0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2) + f(x_2) \tag{30}$$

$$x = x_2 - f(x_2) \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \tag{31}$$

3.3 Resultados

Como vemos na figura abaixo vemos que o metodo de newton-rapson foi eficaz para encontrar as raizes do que de secante que preciso até 5° iteração para encontrar boa partes das raizes, enquanto o de newton-raphson precisou 4°iteração para achar todas as raizes, mas como o busca direta caia direto na raiz, portanto para raizes inteiras busca direta é mais eficaz.

```
 busca direta
||   interações |            1|          Raiz|-4.000000000000000||
||   interações |            1|          Raiz|-1.000000000000000||
||   interações |            1|          Raiz| 5.000000000000000||
 intervalo da primeira raiz:  -4.5000000000000000       -3.5000000000000000
 intervalo da segunda  raiz:  -1.5000000000000000      -0.50000000000000000
 intervalo da terceira raiz:   4.5000000000000000        5.5000000000000000
 metodo de newton-raphson
||   interações |            1|          Raiz|-4.081761006289308||
||   interações |            2|          Raiz|-4.002805554263706||
||   interações |            3|          Raiz|-4.000003491208351||
||   interações |            4|          Raiz|-4.000000000005417||
||   interações |            1|          Raiz|-0.929824561403509||
||   interações |            2|          Raiz|-0.999234902077440||
||   interações |            3|          Raiz|-0.999999902512144||
||   interações |            4|          Raiz|-0.999999999999998||
||   interações |            1|          Raiz| 5.088050314465409||
||   interações |            2|          Raiz| 5.002076389888234||
||   interações |            3|          Raiz| 5.000001196560695||
||   interações |            4|          Raiz| 5.000000000000397||
 metodo da secante
||   interações |            1|          Raiz|-3.889908256880734||
||   interações |            2|          Raiz|-4.031354540126046||
||   interações |            3|          Raiz|-3.998421215094958||
||   interações |            4|          Raiz|-3.999978233294788||
||   interações |            5|          Raiz|-4.000000015282142||
||   interações |            6|          Raiz|-3.999999999999853||
||   interações |            1|          Raiz|-1.042253521126761||
||   interações |            2|          Raiz|-1.002805764901254||
||   interações |            3|          Raiz|-0.999979790399993||
||   interações |            4|          Raiz|-1.000000009463737||
||   interações |            5|          Raiz|-1.000000000000032||
||   interações |            1|          Raiz| 4.930875576036867||
||   interações |            2|          Raiz| 4.991211342219774||
||   interações |            3|          Raiz| 5.000171572393890||
||   interações |            4|          Raiz| 4.999999580378164||
||   interações |            5|          Raiz| 4.999999999980002||
```

Figura 6: Raizes

Valores exatos da raizes $r_1 = -4, r_2 = -1$ e $r_3 = 5$