Resolução da Terceira prova

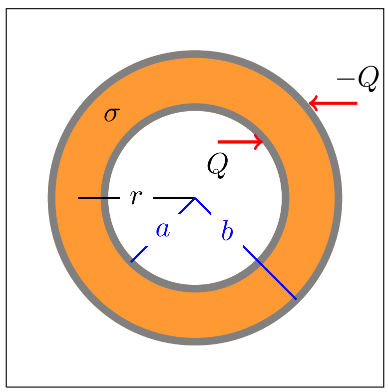
Nícolas André da Costa Morazotti

7 de Maio de 2020

A figura mostra um capacitor esférico, constituído por duas cascas esféricas condutoras concêntricas. A casca interna tem raio a e a externa tem raio b. A região entre as cascas foi preenchida com um material que não afeta o campo elétrico entre as placas, mas conduz eletricidade. Sua condutividade é σ. A capacitância do capacitor é

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}. \tag{1}$$

Como mostra a figura, o capacitor está carregado com carga $Q(t)$, que diminui à medida que o tempo corre.



1. Supondo conhecida a carga $Q(t)$ num dado instante t, calcule a diferença de potencial $V(t)$ entre as cascas;

Para calcular a diferença de potencial, precisamos do campo elétrico. Pela Lei de Gauss, sabemos que tanto para $r < a$ quanto para $r > b$, o campo elétrico é nulo. Na região $a < r < b$,

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}. \tag{3}$$

Veja que o campo aponta na direção radial; assim, o potencial cai ao aumentar r. Então, vamos definir a diferença de potencial $V = V(a) - V(b) > 0$. Escolhendo um caminho radial entre as placas ($d\mathbf{r} = \hat{r}dr$), tal diferença será calculada como

$$V = V(a) - V(b) = -\int_b^a \mathbf{E}.d\mathbf{r} \tag{4}$$

$$V = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2} \tag{5}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)_b^a \tag{6}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{7}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}. \tag{8}$$

Uma maneira mais direta de se calcular a diferença de potencial (provavelmente como era desejado que fosse realizado o exercício, dado que temos a capacitância) é utilizando a equação $C = Q/V$.

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}. \tag{9}$$

2. Supondo conhecida a carga $Q(t)$, encontre a densidade de corrente $j(t)$ a uma distância r do centro, onde $a < r < b$;

Aqui precisamos do campo elétrico de qualquer forma. A Lei de Ohm para densidade de corrente se dá como

$$\mathbf{j}(t) = \sigma\mathbf{E}(t) \tag{10}$$

$$= \sigma\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}. \tag{11}$$

3. Supondo conhecida a carga $Q(t)$, encontre a corrente elétrica $I(t)$ que flui entre as cascas;

Sabemos que a corrente elétrica $I(t)$ é calculada como a integral do fluxo de densidade de corrente $\mathbf{j}(t)$. Orientando uma superfície esférica de raio r para fora, $d\mathbf{S} = \hat{r}r^2 d\Omega$, onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido.

$$I(t) = \int_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} \tag{12}$$

$$= \sigma\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{4\pi}\frac{r^2}{r^2}d\Omega \tag{13}$$

$$= \sigma\frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{14}$$

Veja que poderíamos ter substituído a Lei de Ohm na equação 12, tendo

$$I(t) = \sigma\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}, \tag{15}$$

onde o termo da direita é exatamente o fluxo de campo elétrico que aparece na Lei de Gauss! Sabemos que seu resultado é Q/ε_0, e trocando, temos

$$I(t) = \sigma \frac{Q}{\varepsilon_0}, \tag{16}$$

que é o mesmo resultado obtido integrando de fato a densidade de corrente.

4. Encontre a resistência elétrica do material entre as cascas e calcule o produto RC;

A resistência do material pode ser obtida segundo a Lei de Ohm: $V = RI$.

$$\begin{align} R &= \frac{V}{I} \tag{17} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b-a}{ab} \frac{\varepsilon_0}{\sigma Q} \tag{18} \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{b-a}{ab}. \tag{19} \end{align}$$

Para calcular o produto RC, podemos utilizar duas equações: primeiro, a Lei de Ohm, $V = RI$, e também a expressão que relaciona carga, capacitância e potencial, $Q = CV$. Reescrevendo tais equações, temos

$$R = \frac{V}{I} \quad \text{e} \quad C = \frac{Q}{V}.$$

Calculando o produto,

$$\begin{align} RC &= \frac{V}{I} \frac{Q}{V} \tag{20} \\ &= \frac{\varepsilon_0 Q}{\sigma Q} \tag{21} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\sigma}. \tag{22} \end{align}$$

Para obter RC, não precisamos calcular explicitamente R, tal que poderíamos ter encontrado R fazendo $R = Q/IC$.

5. Conhecida a carga inicial $Q(0) = Q_0$, encontre a carga $Q(t)$, em função do tempo.

Considere a variação de carga da placa positiva: $\dot{Q}(t)$. Veja que a corrente elétrica é gerada justamente pelas cargas que saem da placa. Portanto, $\dot{Q}(t) = -I(t)$. Resolvendo a equação diferencial,

$$\frac{d}{dt}Q(t) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}Q(t) \tag{23}$$

$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}dt \tag{24}$$

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{dQ'}{Q'} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^t dt' \tag{25}$$

$$\ln\left[\frac{Q(t)}{Q_0}\right] = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t \tag{26}$$

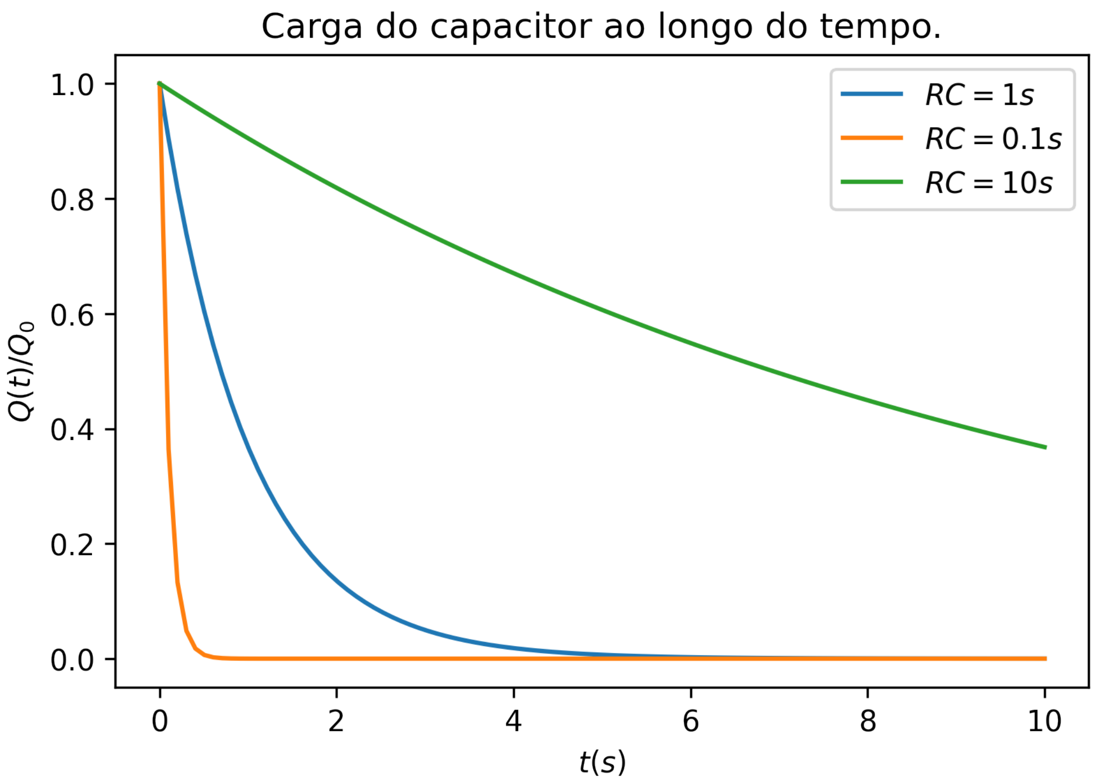
$$Q(t) = Q_0 e^{-\sigma t/\varepsilon_0}. \tag{27}$$

Veja o termo da exponencial: σ/ε_0. Podemos substituí-lo por $1/RC$. O que isso significa? Significa que o produto RC, que é calculado como Q/I e tem unidade de tempo, é um **tempo característico**, que nos diz quanto tempo leva para o capacitor descarregar em $1/e$ (e é a constante da exponencial; para $t = RC$, $Q(t) = Q_0/e$).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *
from matplotlib.pyplot import figure
figure(dpi=300)

RC, q_0, t = symbols("RC q_0 t", real=True,
                                positive=True)
q = q_0 * exp(-t/RC)
qt = lambdify([RC, q_0, t], q, "numpy")

t = np.linspace(0,10,100)
plt.figure(1)
plt.plot(t,qt(1,1,t))
plt.plot(t,qt(1e-1,1,t))
plt.plot(t,qt(1e1,1,t))
plt.legend([r"$RC = 1 s$",
            r"$RC = 0.1 s$",
            r"$RC = 10 s$"])
plt.title("Carga do capacitor ao longo do tempo.")
plt.xlabel(r"$t(s)$")
plt.ylabel(r"$Q(t)/Q_0$")
plt.show()
```



Tal tempo depende **apenas** do material, e não de fatores externos como a tensão ou a corrente, dado que o material preencha completamente o capacitor.