Resolução da Quinta prova

Nícolas André da Costa Morazotti

22 de julho de 2020

1 Primeira Questão

O circuito na figura 1 está no regime estacionário, com a chave aberta. Fecha-se a chave no instante $t = 0$.

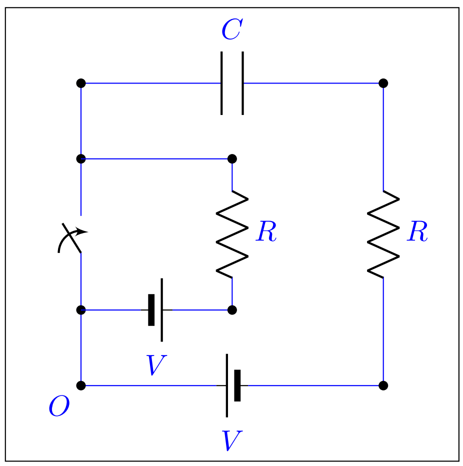


Figura 1: Questão 1.

(a) Encontre a equação diferencial que descreve a carga Q no capacitor a partir de $t = 0$.

No regime estacionário, a carga do capacitor não varia. Com a chave aberta, podemos obter a carga em função do tempo utilizando as Leis de Kirchoff. Começando por O, andamos no circuito em sentido horário.

$$V - R\dot{Q} - \frac{Q}{C} - R\dot{Q} + V = 0 \tag{1}$$

$$\dot{Q} + \frac{Q}{2RC} = \frac{V}{R}. \tag{2}$$

No regime estacionário, $\dot{Q} \to 0$. Assim,

$$Q_{estacionario} = 2CV. \tag{3}$$

Tal carga, ao fechar a chave, é a carga inicial do capacitor. Quando fechamos a chave, a parte com uma bateria e uma resistência do circuito é desconsiderada, pois a chave se torna um curto e não oferece resistência à corrente. Concluímos que

$$-\frac{Q}{C} - R\dot{Q} + V = 0 \tag{4}$$

$$R\dot{Q} + \frac{1}{C}(Q - CV) = 0. \tag{5}$$

(A questão pedia até a equação diferencial acima.) Com a substituição $z = Q - CV$, $\dot{z} = \dot{Q}$. Temos

$$\dot{z} + \frac{z}{RC} = 0 \tag{6}$$

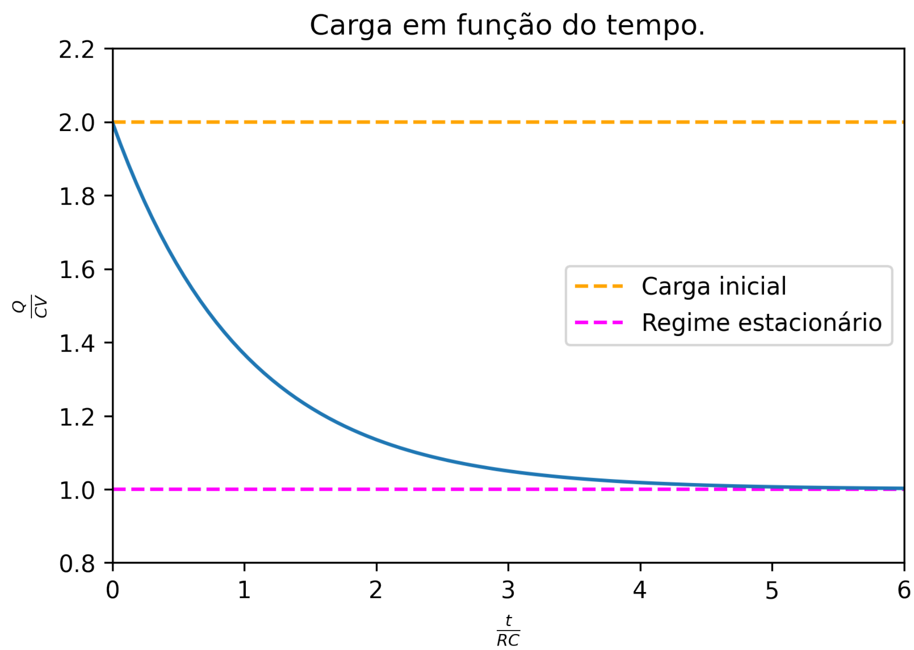
$$z = \alpha e^{-t/RC} \tag{7}$$

$$Q = CV + \alpha e^{-t/RC}. \tag{8}$$

Em $t = 0$, a carga é, como calculado anteriormente, $Q(0) = 2CV$. Assim,

$$Q = CV(1 + e^{-t/RC}). \tag{9}$$

(b) Esboce em gráfico a carga Q no capacitor em função do tempo t. No eixo vertical, indique as cargas em $t = 0$ e no novo regime estacionário, que se estabelecerá muito tempo após a chave ser fechada. No eixo horizontal, indique a escala de tempo.



2 Segunda Questão

O solenoide da figura 2 está inicialmente no vácuo. Ele tem N espiras enroladas em um comprimento l. O raio de cada espira é a. Como mostra a figura, se você posicionar os dedos longos da mão direita no sentido em que as espiras estão enroladas, seu polegar apontará para cima. O solenoide está imerso num campo uniforme **H**, produzido por uma fonte que não aparece na figura. O campo varia com o tempo de acordo com a expressão

$$H = H_0 \sin(\omega t), \tag{10}$$

onde H_0 é uma constante.

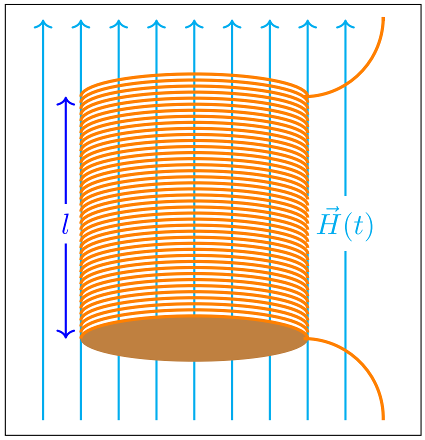


Figura 2: Questão 2.

(a) Identifique a polaridade da força eletromotriz induzida no solenoide, no instante $t = 0$. Para isso, escolha uma das seguintes alternativas:

1. O terminal de cima é positivo, e o de baixo, negativo;
2. O terminal de cima é negativo, e o de baixo, positivo;
3. A força eletromotriz é nula.

Vamos definir, por simplicidade, o campo **H** como estando na direção $\hat{z}$. No instante $t = 0$, o campo está aumentando, aumentando o fluxo de campo magnético através do solenoide. Assim, a resposta do solenoide é gerar um campo contrário a este aumento. O campo gerado deve ser para baixo, tal que a corrente deve seguir no sentido oposto ao sentido que as espiras se enrolam.

Considere agora o circuito com o solenoide da figura conectado a uma resistência. Para que a corrente circule de cima para baixo no solenoide, ela deve correr de baixo para cima no resistor. Como há queda de potencial no resistor, seu polo inferior é positivo e seu polo superior é negativo, assim como os polos do solenoide. Opção 2.

(b) Calcule a força eletromotriz $\mathcal{E}(t)$ induzida no solenoide;

A força eletromotriz induzida $\mathcal{E}$ pode ser calculada como

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{11}$$

$$= -\pi a^2 N \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

$$= -\mu_0 \pi a^2 N \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \tag{13}$$

$$= -\mu_0 \pi a^2 N H_0 \omega \cos(\omega t). \tag{14}$$

(c) Calcule o módulo da derivada $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ do potencial vetor em um ponto numa das espiras do solenoide;

Podemos escolher um $\mathbf{A}$ qualquer que corresponda ao campo magnético $\mathbf{B} = \hat{z}\mu_0 H_0 \sin(\omega t)$. Considere então o campo $\mathbf{A} = \mu_0 H_0 \sin(\omega t) x\hat{y}$. Seu rotacional é dado por

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{A} &= \hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right) && (15)\\
&= \hat{z}\frac{\partial A_y}{\partial x} && (16)\\
&= \mu_0 H_0 \sin(\omega t)\hat{z}. && (17)
\end{aligned}$$

Ou seja, nossa escolha de $\mathbf{A}$ é uma boa escolha. O módulo de $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \mu_0 H_0 \omega \cos(\omega t) && (18)\\
&= -\frac{\mathcal{E}}{N\pi a^2}, && (19)
\end{aligned}$$

que é o esperado.

(d) Se o mesmo sistema for imerso numa atmosfera de oxigênio, que é paramagnético, a amplitude da força eletromotriz

1. Manterá o valor que tinha no vácuo;
2. Aumentará;
3. Diminuirá.

O paramagnetismo aumenta a intensidade do campo magnético no interior do solenoide. Isso significa que as variações do campo são mais intensas e portanto as forças eletromotrizes também. Opção 2.