Resolução da Quarta prova

Nícolas André da Costa Morazotti

26 de Maio de 2020

1 Primeira questão

A figura 1 mostra um capacitor formado por um par de placas metálicas planas paralelas, com área A, separadas pela distância $2d$. A placa superior está carregada com carga $+Q$, e a inferior, com carga $-Q$. Inserem-se, então, entre as placas, dois blocos dielétricos de mesmo tamanho, verticalmente superpostos. Juntos, os dois blocos preenchem totalmente o espaço entre as placas. O bloco superior tem susceptibilidade dielétrica $\chi_a = 1$, enquanto o inferior tem susceptibilidade dielétrica $\chi_b = 3$.

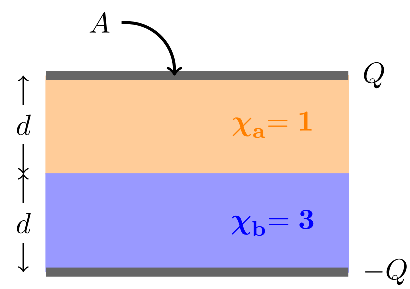

Figura 1: Questão 1.

(a) Determine o campo elétrico em cada material;

O campo elétrico pode ser encontrado obtendo-se $\mathbf{D}$, pois

$$\mathbf{D} = \kappa\mathbf{E} = (\chi + 1)\mathbf{E}. \tag{1}$$

O campo $\mathbf{D}$ é, claramente, o campo de um capacitor no vácuo; i. e., $\mathbf{D} = -\hat{z}\frac{Q}{A\varepsilon_0}$, para z orientado para baixo. Então, o campo elétrico nas regiões a e b é

$$\mathbf{E}(a) = -\hat{z}\frac{Q}{(\chi_a + 1)A\varepsilon_0} \tag{2}$$

$$= -\hat{z}\frac{Q}{2A\varepsilon_0} \tag{3}$$

$$\mathbf{E}(b) = -\hat{z}\frac{Q}{(\chi_b + 1)A\varepsilon_0} \tag{4}$$

$$= -\hat{z}\frac{Q}{4A\varepsilon_0}. \tag{5}$$

(b) Encontre a capacitância após a inserção dos dielétricos e compare com a capacitância antes da inserção;

A capacitância antes da inserção é dada por $C = A\varepsilon_0/2d$. Após a inserção, podemos considerar que o capacitor é uma associação em série de dois capacitores (como demonstrado na lista 4) de espessura d, cada um deles com capacitância $C_i = (\chi_i + 1)A\varepsilon_0/d$. A associação em série nos diz que a capacitância resultante pode ser calculada como

$$\frac{1}{\tilde{C}} = \frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b} \tag{6}$$

$$= \frac{d}{A\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\chi_a + 1} + \frac{1}{\chi_b + 1}\right) \tag{7}$$

$$= \frac{d}{A\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \tag{8}$$

$$= \frac{3d}{4A\varepsilon_0} \tag{9}$$

$$\tilde{C} = \frac{4A\varepsilon_0}{3d} \tag{10}$$

$$= \frac{8}{3}C. \tag{11}$$

Como sabemos o campo elétrico, poderíamos ter calculado a capacitância utilizando $V_i = E_i d$, somando as diferenças de potencial e calculando Q/V.

(c) Encontre a energia armazenada no capacitor após a inserção dos dielétricos;

Para calcular a energia, podemos lançar mão da expressão

$$U = \frac{Q^2}{2\tilde{C}} \tag{12}$$

$$= \frac{3Q^2 d}{8A\varepsilon_0}. \tag{13}$$

(d) Encontre a densidade superficial σ_p de carga de polarização na superfície entre os dois dielétricos.

Para encontrar a densidade superficial σ_p, vamos utilizar a "lei de Gauss"para o campo de polarização:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_p. \tag{14}$$

A figura 2 mostra qual a superfície de integração que utilizaremos para encontrar a densidade de carga. Ao tomarmos a altura do cilindro $h \to 0$, podemos desprezar efeitos de fluxo através da lateral do cilindro, necessitando calcular apenas o fluxo através das tampas, de área S. A tampa em a é orientada em $\hat{z}$ e a tampa em b é orientada em $-\hat{z}$. Ao integrar a equação 14, temos

$$\mathbf{P}_a \cdot \hat{z}S + \mathbf{P}_b \cdot (-\hat{z})S = -\sigma_p S. \tag{15}$$

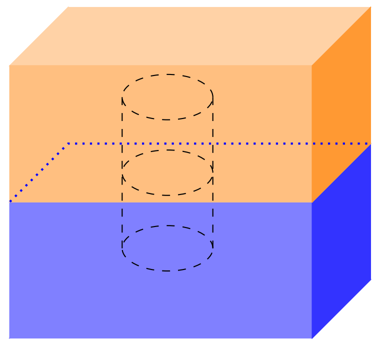

Figura 2: Superfície gaussiana do item (d).

Utilizando a expressão $\mathbf{P}_i = \varepsilon_0 \chi_i \mathbf{E}_i$, temos enfim

$$\begin{aligned}
\sigma_p &= -\varepsilon_0 \chi_a E_a(-\hat{z} \cdot \hat{z}) - \varepsilon_0 \chi_b E_b(-\hat{z} \cdot -\hat{z}) && (16)\\
&= +\varepsilon_0 1 \cdot \frac{Q}{2A\varepsilon_0} - \varepsilon_0 3 \cdot \frac{Q}{4A\varepsilon_0} && (17)\\
&= +\frac{2Q}{4A} - \frac{3Q}{4A} && (18)\\
&= -\frac{Q}{4A}. && (19)
\end{aligned}$$

2 Segunda questão

Um elétron com velocidade inicial $\mathbf{v} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y})$ penetra numa região do espaço em que o campo magnético é uniforme, dado pela expressão $\mathbf{B} = \frac{B_0}{\sqrt{2}}(\hat{y} + \hat{z})$.

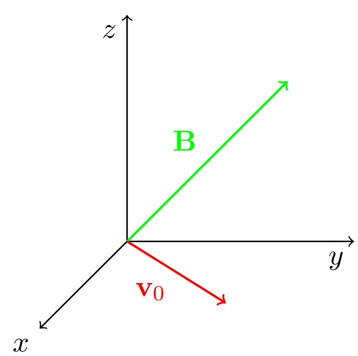

Figura 3: Questão 2.

(a) Copie o desenho na figura 3 e mostre a trajetória que o elétron seguirá. O desenho não precisa ser quantitativamente correto, mas deve indicar o sentido em que o elétron se move ao longo da trajetória.

Veja a figura 4. Não consegui desenhar aqui, mas isto é uma hélice ao redor da direção de **B**.

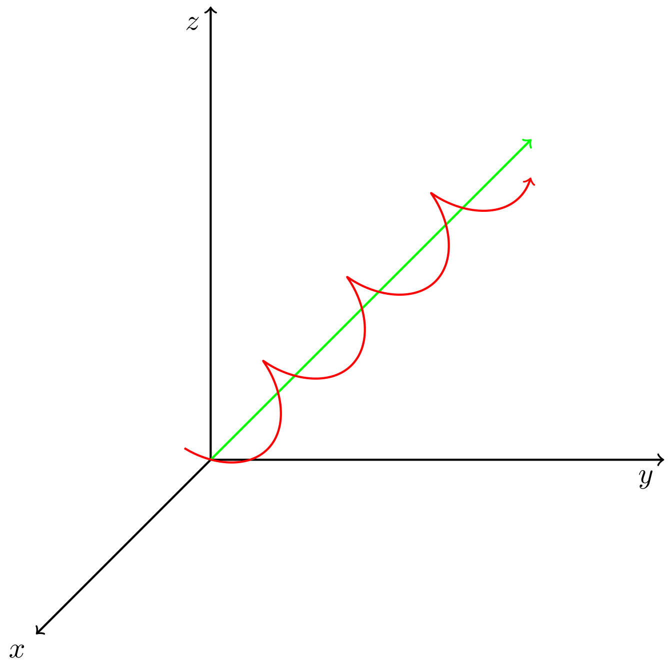

Figura 4: Solução do item (a) da questão 2.

(b) Explique com palavras como determinou o sentido.

Determinamos o sentido da hélice que o elétron descreve sabendo que deve ser o mesmo sentido do campo magnético; do contrário, haveria força magnética nessa direção e então o movimento (em tal direção) não seria uniforme. Além disso, não importa se é um elétron ou um próton, uma vez que não há forças nessa direção para distinguí-lo. A diferença de movimento se dá apenas no sentido (horário ou anti-horário) descrito pela hélice.