Taller Ecuaciones diferenciales

Anderson Rene Gomez Aza

Escuela Tecnológica Instituto Técnico Central (ETITC)

Ecuaciones Diferenciales S7B

Rubén Esteban Escobar Sánchez

30 de octubre 2023

1. punto

Resolver la ecuación diferencial $(\mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{e}^{\frac{y}{x}})dx - (xe^{\frac{y}{x}})dy = 0$ **mediante el método de las ecuaciones homogéneas, cuando** $y(1) = 0$

a) Dar la solución general.

b) Dar la solución particular.

c) Graficar la solución general y particular en geogebra (o cualquier otro software), a modo de comprobación. (insertar la gráfica y el link para acceder a ella).

Solucion.

$(x + ye^{\frac{y}{x}})dx - (xe^{\frac{y}{x}})dy = 0$

$(x + ye^{\frac{y}{x}})dx = (xe^{\frac{y}{x}})dy$

$xdx + ye^{\frac{y}{x}}dx = xe^{\frac{y}{x}}dy$

Averiguamos si es homogenea si f(tx,ty) = tf(x,y)

$txdx + tye^{\frac{y}{x}}dx = txe^{\frac{y}{x}}dy$

$t(xdx + ye^{\frac{y}{x}}dx) = t(xe^{\frac{y}{x}}dy)$

Si es homogenea

Por esto hacemos el cambio de variable por $y = ux$ **=>** $u = \frac{y}{x}$ **=>** $dy = udx + xdu$

Sustituimos en la ecuacion $xdx + ye^{\frac{y}{x}}dx = xe^{\frac{y}{x}}dy$

$xdx + uxe^{\frac{ux}{x}}dx = (xe^{\frac{ux}{x}})(udx + xdu)$

$xdx + uxe^{u}dx = (xe^{u})(udx + xdu)$

$xdx + uxe^{u}dx = uxe^{u}dx + x^2e^{u}du$

$xdx = x^2e^{u}du$

Realizamos variables separables despejando en cada lado

$\frac{xdx}{x^2} = e^{u}du$ **=>** $\frac{dx}{x} = e^{u}du$

Integramos

$\int \frac{dx}{x} = \int e^{u}du$**=>** $ln(x) = e^{u} + c$

Cancelamos a e con logaritmo natural

$ln(ln(x)) = ln(e^u) + ln(c) \Rightarrow ln(ln(x)) = u + ln(c)$

regresamos el cambio de variable $ln(ln(x)) = \frac{y}{x} + ln(c)$

Despejamos a y

$ln(ln(x)) + ln(c) = \frac{y}{x}$

$x(ln(ln(x)) + ln(c)) = y$

$y = xln((ln(x)) + c)$ => **SOLUCIÓN GENERAL (punto 1.a)**

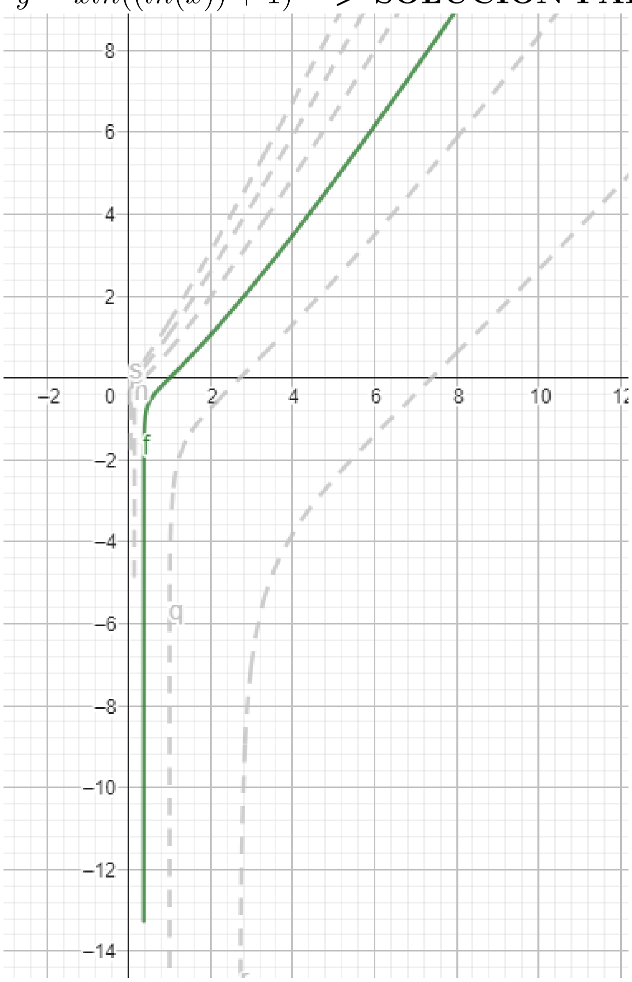
Hallamos la solucion particular encontrando c teniendo $y(1) = 0$

$0 = (1)ln((ln(1)) + c) \Rightarrow 0 = ln(0 + c) \Rightarrow 0 = ln(c)$

$e^0 = e^{ln(c)} \Rightarrow e^0 = c \Rightarrow C = 1$

Reemplazamos a c para obtener la solucion particular

$y = xln((ln(x)) + 1)$ => **SOLUCIÓN PARTICULAR (punto 1.b)**



Link geogebra:

https://www.geogebra.org/calculator/dukdezcx .

2. punto

Resolver la ecuación diferencial $(2xy^2-2y)dx+(3x^2y-4x)dy$ **mediante el factor integrante apropiado.**

a) Dar el factor integrante apropiado.

b) Dar la solución general..

Solucion.

Verificamos si la ecuacion es exacta

$(2xy^2-2y)dx+(3x^2y-4x)dy$

$\frac{\partial M}{\partial y}=4xy-2$ **;** $\frac{\partial N}{\partial x}=6xy-4$

No es exacta encontraremos factor integrante con p(y)

$p(y)=\frac{6xy-4-4xy+2}{2xy^2-2y}=\frac{2xy-2}{2xy^2-2y}=\frac{2xy-2}{y(2xy-2)}=\frac{1}{y}$

ahora el factor integrante $\mu=e^{\int p(y)dy}$

$\mu=e^{\int\frac{1}{y}dy}=e^{ln(y)}=y$ **SOLUCIÓN (punto 2.a)**

Multiplicamos el factor integrante para convertirla en exacta y solucionar

$(y)((2xy^2-2y)dx)+(y)((3x^2y-4x)dy)$

$(2xy^3-2y^2)dx+(3x^2y^2-4xy)dy$

Verificamos si la ecuacion es exacta

$(2xy^3-2y^2)dx+(3x^2y^2-4xy)dy$

$\frac{\partial M}{\partial y}=6xy^2-4y$ **;** $\frac{\partial N}{\partial x}=6xy^2-4y$ **Es exacta**

solucionamos la ecuacion utilizando $f=\int M(x,y)+g(y)$

$f=\int 2xy^3-2y^2+g(y)$

$f=x^2y^3-2xy^2+g(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2-4xy+\frac{dg}{dy}$

Igualamos con N para hallar a g(y)

$N=3x^2y^2-4xy$

$\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2-4xy+\frac{dg}{dy}=N$

$3x^2y^2-4xy+\frac{dg}{dy}=3x^2y^2-4xy$

$\frac{dg}{dy} = 0$

Integramos $\int \frac{dg}{dy} = \int 0$

$g(y) = C$

Lo reemplazamos en f y con esto tenemos la solucion general

$f = x^2y^3 - 2xy^2 + g(y)$

$f = x^2y^3 - 2xy^2 + c$ **SOLUCIÓN GENERAL (punto 2.b)**

3. punto

Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + xsen(x^2y) = xe^{-x^2}cos^2y$ **llevando a cabo un cambio de variable apropiado para transformarla en lineal de primer orden.**

a) Dar la solución general. .

Solucion.

Realizamos un cambio de variable el cual va a ser $v = ycos(y)$ **por lo que** $\frac{dy}{dv} = cos(y) - ysin(y)$. **con esto nuestra ecuación diferencial queda**

$\frac{dv}{dy} + xsen(x^2v) = xe^{-x^2}$

Ahora, podemos usar la notación de la derivada total para expresar $\frac{dv}{dy}$ **como** $\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dy}$ **dado que** $v = ycos(y)$ **podemos derivar v con respecto a x como sigue:**

$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(ycos(y)) = \frac{dy}{dx}cos(y) - ysen(y)\frac{dy}{dx}$

Sustituyendo esto en la ecuación diferencial y dividiendo por con(x) para aislar $\frac{dy}{dx}$ **y obtenemos**

$\frac{dy}{dx} - ysen(y) + xsen(x^2y) = \frac{dv}{dx} = xe^{-x^2}$

Finalmente, tenemos una ecuación diferencial lineal de primer orden en la forma estándar

$\frac{dy}{dx} = ysen(y) + xsen(x^2y) + xe^{-x^2}$

La solución general es la integral de la ecuación resultante.

$y(x) = \int(ysen(y) + xsen(x^2y) + xe^{-x^2})dx + c$

4. punto

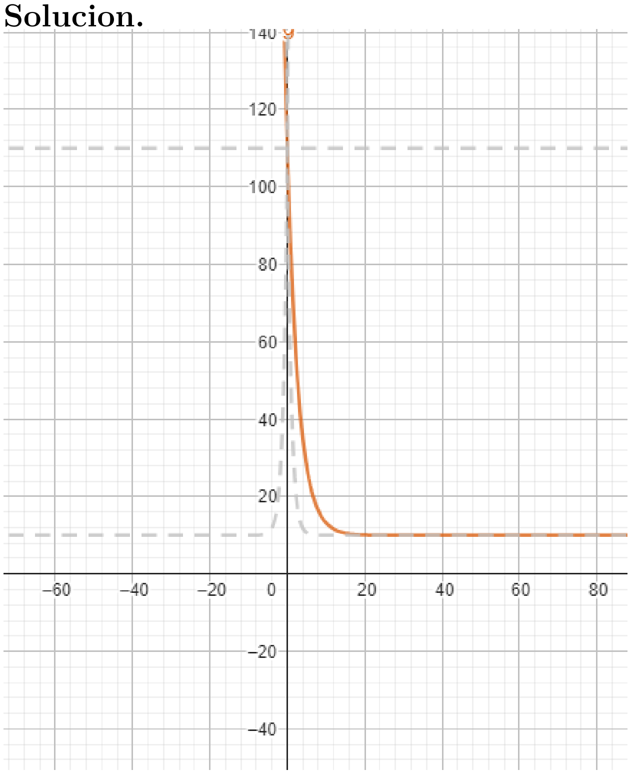
Una masa logra calentarse a 110°C y sufre de una exposición al aire libre a una temperatura de 10°C. Si al transcurrir una hora su temperatura es de 60°C.

a) Encontrar una expresión matemática que determine la temperatura del cuerpo en cualquier momento t.

b) ¿Cuánto tiempo adicional debe transcurrir para que el cuerpo descienda su temperatura a 30 oC?

c) Graficar la solución general y particular en geogebra (o cualquier otro software), a modo de comprobación. (insertar la gráfica y el link para acceder a ella). .

Solucion.



Link geogebra:

https://www.geogebra.org/calculator/mwknr9mu] Datos:

> t = 0 ; T= 110°C

$>$ Ta = 10°C valor constante

$>$ t = 1 hora ; T=60°C

Para solucionar este problema utilizaremos la ley de enfriamiento de newton que nos da la siguiente ecuacion

$\frac{dT}{dt} = -k(T - Ta)$ siendo k una constante igual que Ta

Resolvemos la ecuacion diferencial por variables separables

$\frac{dT}{dt} = -k(T - Ta) => \frac{dT}{(T-Ta)} = -kdt$

$\int \frac{dT}{(T-Ta)} = -k \int dt$

Integracion por sustitucion

$u = T - Ta; du = dT; \int \frac{du}{(u)} = -k \int dt$

$\int \frac{du}{(u)} = -k \int dt => ln(u) = -kt + c$

$ln(T - Ta) = -kt + c => e^{ln(T-Ta)} = e^{-kt+c}$

$T - Ta = e^{-kt}e^{c} => T - Ta = ce^{-kt}$

$T = ce^{-kt} + Ta$

Reemplazamos para obtener c con los datos que tenemos

$T = ce^{-kt} + Ta => 110 = ce^{-k(0)} + 10$

$110 - 10 = ce^{0} => c = 100$

Reemplazamos C en la solución anterior $T = 100e^{-kt} + Ta$

Utilizamos los segundos datos para encontrar k $60 = 100e^{-k(1)} + 10$

$60 - 10 = 100e^{-k} => 50 = 100e^{-k}$

$\frac{50}{100} = e^{-k} => \frac{1}{2} = e^{-k}$

$ln(\frac{1}{2}) = ln(e^{-k}) => ln(1) - ln(2) = -k$

$-ln(2) = -k => k = ln(2)$

$k = ln(2)$

Reemplazamos ahora a k y tenemos la solucion en cualquier momento t

$T = 100e^{-ln(2)t} + 10$ SOLUCIÓN (punto 4.a)

Para solucion punto 4.b tenemos el siguiente dato T=30 $30 = 100e^{-ln(2)t} + 10$

$30 - 10 = 100e^{-ln(2)t}$

$20 = 100e^{-ln(2)t}$

$\frac{20}{100} = e^{-ln(2)t}$

$\frac{1}{5} = e^{-ln(2)t}$

$ln(\frac{1}{5}) = ln(e^{-ln(2)t})$

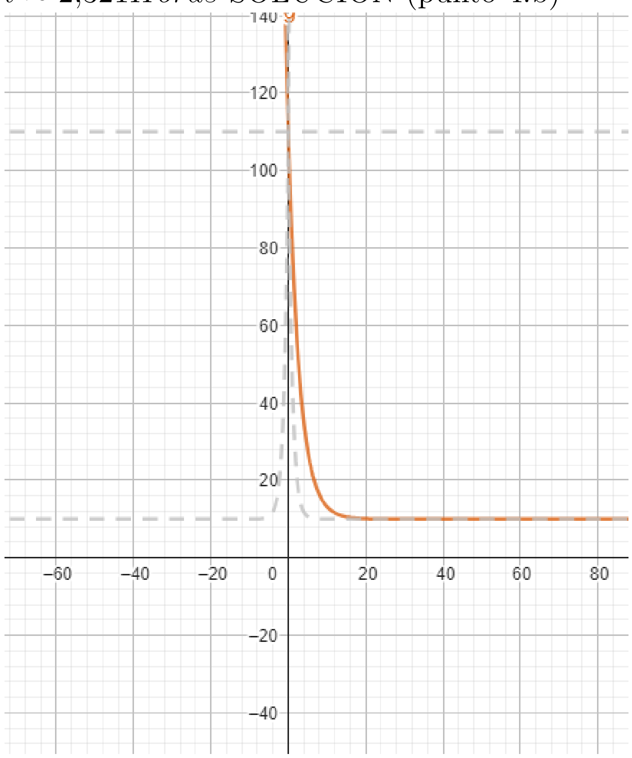
$ln(1) - ln(5) = -ln(2)t$

$-ln(5) = -ln(2)t$

$\frac{-ln(5)}{-ln(2)} = t$

$\frac{ln(5)}{ln(2)} = t$

$t \approx 2{,}321 Horas$ SOLUCIÓN (punto 4.b)



Link geogebra:

https://www.geogebra.org/calculator/mwknr9mu

5. punto

En un tanque que contiene 200 litros de agua, se disuelven 100 gramos de sal y dicho tanque es agitado continuamente. Al mismo tiempo, se introducen en el tanque 5 lts/min de una solución cuya concentración es de 2 gr/lt; del tanque se bombea la solución mezclada al mismo flujo volumétrico.

a) Encontrar una expresión matemática que determine la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento t.

b) ¿Cuál es la cantidad de sal en el tanque pasado mucho tiempo?

c) Graficar la solución general y particular en geogebra (o cualquier otro software), a modo de comprobación. (insertar la gráfica y el link para acceder a ella)..

Solucion.

Hallamos el siguiente punto con la condición inicial A(0) = 100gr y hallar C

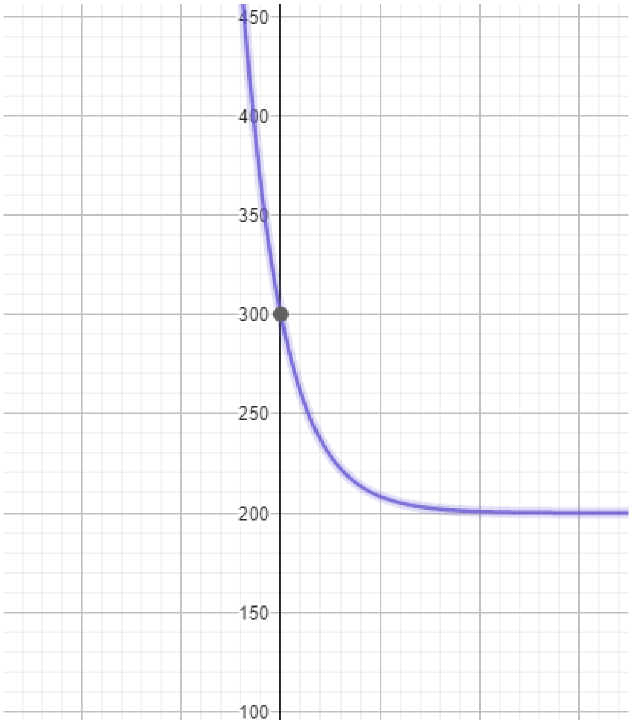
$100 = 200 + ce^{\frac{-0}{20}}$

$100 - 200 = ce^{0}$

$c = -100$

reemplazamos c

$A = 200 - 100e^{\frac{-t}{20}}$ SOLUCIÓN (punto 5.b)



Link geogebra:

https://www.geogebra.org/calculator/xgckbtzr] Datos

> 200 litros agua; 100 gramos sal; 5 lts/min; solucion: 2gr/lt

Utilizamos la siguiente ecuacion que tiene la rapidez entrante y saliente de una solución para hallar lo respectivo

$\frac{dA}{dt} = Ri - Ro$

Siendo Ri = Rapidez entrante => $Ri = 5L/minx2gr/L$

$Ri = 10g/min$

Siendo Ro = Rapidez Saliente => $Ro = 5L/minx\frac{A}{200}2gr/L$

$Ro = 5L/minx\frac{A}{100}gr/L$

$Ro = \frac{A}{20}gr/min$

con esto tenemos la ecuacion y el valor inicial

$\frac{dA}{dt} = 10 - \frac{A}{20}$

$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{20} = 10$

Hallamos factor integrante ya que sabemos que p(x) = 1/20

$\mu = e^{\int p(t)dt} => \mu = e^{\int \frac{1}{20}dt}$

$\mu = e^{\frac{t}{20}}$

Lo multiplicamos con la ecuación

$e^{\frac{t}{20}}\frac{dA}{dt} + e^{\frac{t}{20}}\frac{A}{20} = e^{\frac{t}{20}}10$

Con esto tenemos una solución las cuales encontramos una derivada inversa

$\frac{d}{dt}(e^{\frac{t}{20}}A) = 10e^{\frac{t}{20}}$

$d(e^{\frac{t}{20}}A) = 10e^{\frac{t}{20}}dt$

Resolvemos por variables separables

$\int d(e^{\frac{t}{20}}A) = 10\int e^{\frac{t}{20}}dt$

$e^{\frac{t}{20}}A = 200e^{\frac{t}{20}} + c$

$A = 200 + ce^{\frac{-t}{20}}$ SOLUCION (punto 5.a)

Hallamos el siguiente punto con la condición inicial A(0) = 100gr y hallar C

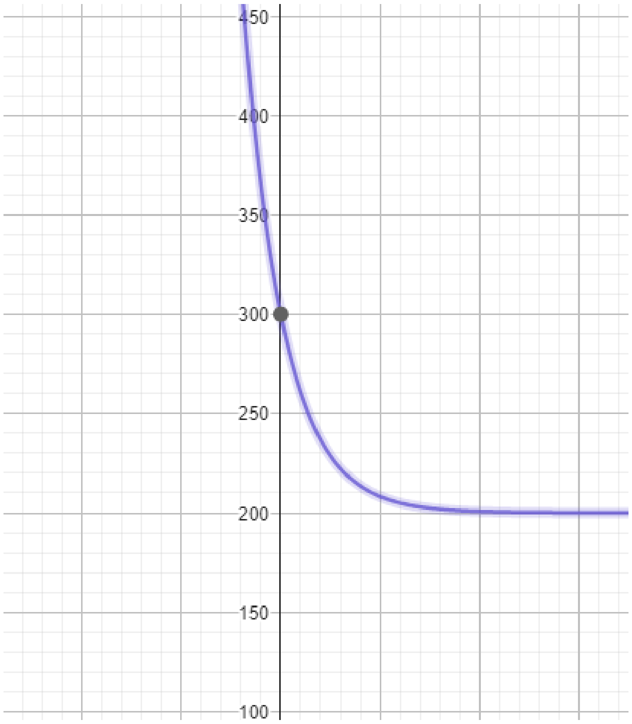
$100 = 200 + ce^{\frac{-0}{20}}$

$100 - 200 = ce^{0}$

$c = -100$

reemplazamos c

$A = 200 - 100e^{\frac{-t}{20}}$ SOLUCIÓN (punto 5.b)



Link geogebra:

https://www.geogebra.org/calculator/xgckbtzr