Introdução à expansão de caos polinomial

Propagação de incertezas

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{M}(\boldsymbol{X})$$

Propagação de incertezas

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{M}(\boldsymbol{X})$$

$$Var[Y] < \infty$$

Expansão em série

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{M}(\boldsymbol{X})$$

$Var[Y] < \infty \therefore$ Espaço de Hilbert

Expansão em série

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{M}(\boldsymbol{X}) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j Z_j$$

$$Var[Y] < \infty \therefore \text{Espaço de Hilbert}$$

Metamodelagem - Por que fazer isso?

MODELO ORIGINAL

- Leva horas para rodar

EXPANSÃO EM CAOS POLINOMIAL

- É capaz de rodar, com precisão considerável, cerca de 1 milhão de análises em segundos.

Expansão em série

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{j=0}^{\infty} y_j Z_j$$

Base

Coordenadas ou Coeficientes

Espaço de Hilbert

- Espaço dotado de **conceito geométricos** como distância, ângulos e assim por diante;

Espaço de Hilbert

- Espaço dotado de **conceito geométricos** como distância, ângulos e assim por diante;
- Normalmente, diz-se que esse tipo de espaço é dotado de **produto interno**, que é definido como:

$$\langle \pi_k, \pi_l \rangle_w = \int_{D_f} \pi_k(x)\, \pi_l(x) w(x)\, dx$$

Espaço de Hilbert

- Espaço dotado de **conceito geométricos** como distância, ângulos e assim por diante;
- Normalmente, diz-se que esse tipo de espaço é dotado de **produto interno**, que é definido como:

$$\langle \pi_k, \pi_l \rangle_w = \int_{D_f} \pi_k(x)\, \pi_l(x)\, w(x)\, dx$$

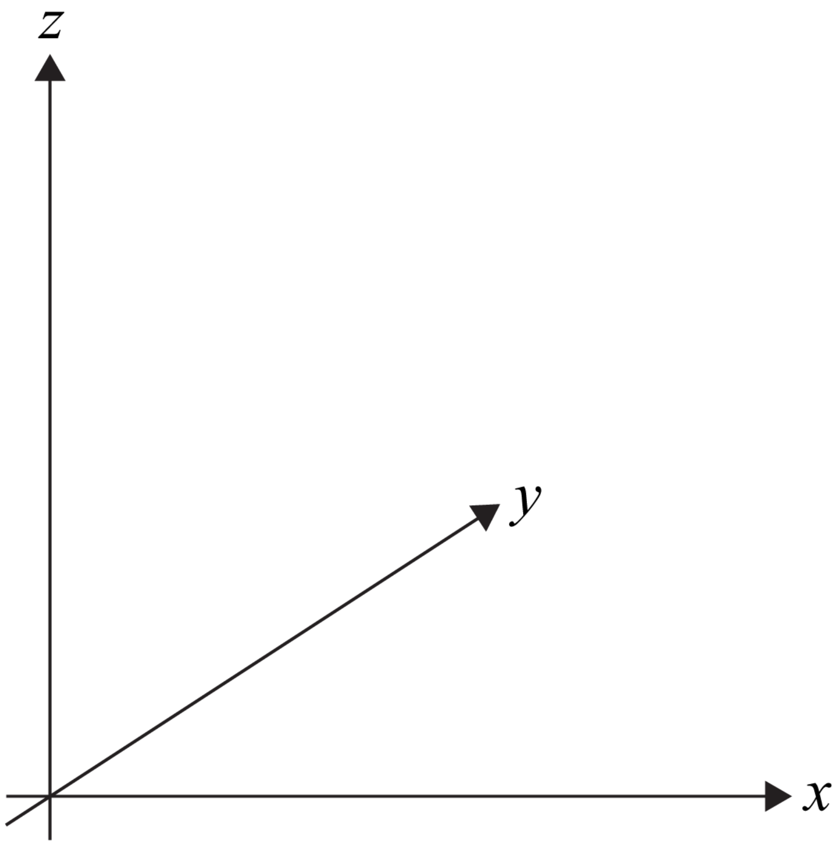
Espaço de Hilbert

- Espaço dotado de **conceito geométricos** como distância, ângulos e assim por diante;
- Normalmente, diz-se que esse tipo de espaço é dotado de **produto interno**, que é definido como:

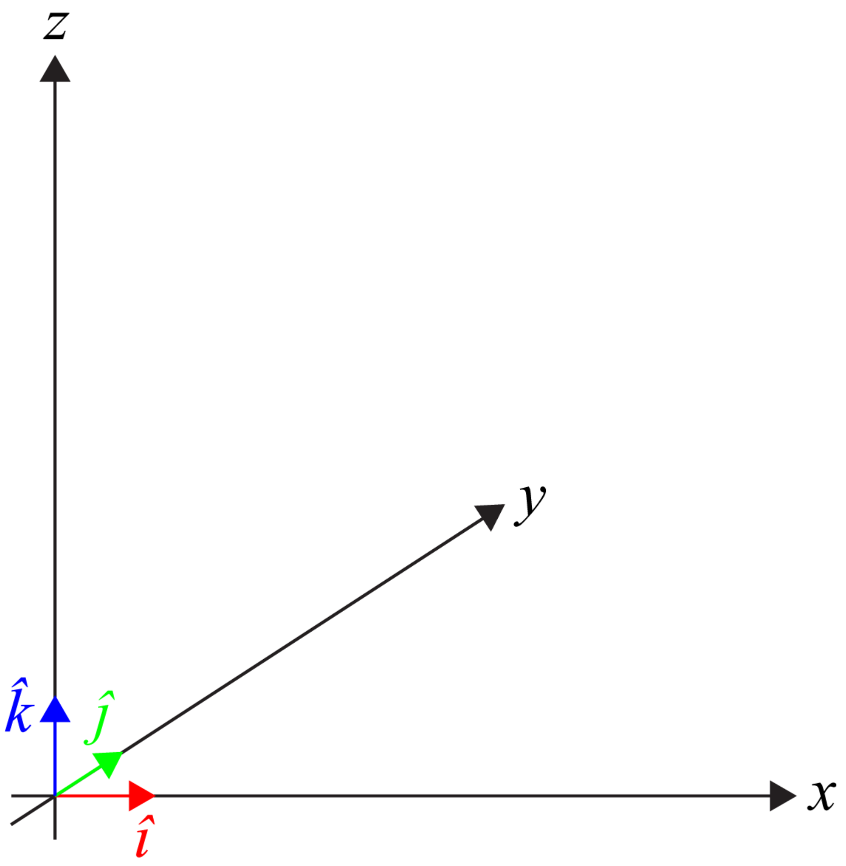
$$\langle \pi_k, \pi_l \rangle_w = \int_{D_f} \pi_k(x)\, \pi_l(x) w(x)\, dx$$

- Os elementos deste espaço abstrato são normalmente chamados de **vetores**, o que nos leva a uma analogia proveitosa!

Base - $\mathbb{R}^n$



Base - $\mathbb{R}^n$



- Ortogonais entre si:

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$$

- Comprimento unitário;

Base - $\mathcal{H}^{\mathrm{n}}$

- Ortogonais entre si:

$$\langle \pi_k, \pi_l \rangle_w = \int_{D_f} \pi_k(x)\, \pi_l(x) w(x)\, dx$$

Base - $\mathcal{H}^{\mathrm{n}}$

- Ortogonais entre si:

$$\langle \pi_k, \pi_l \rangle_w = \int_{D_f} \pi_k(x)\, \pi_l(x)\, w(x)\, dx$$

PDF

Base - $\mathcal{H}^{\mathrm{n}}$

- Ortogonais entre si:

$$\langle \pi_k, \pi_l \rangle_w = \int_{D_f} \pi_k(x)\, \pi_l(x)\, w(x)\, dx$$

PDF

- Bases já conhecidas!

Base - $\mathcal{H}^{n}$

Type of variable	Distribution	Orthogonal polynomials	Hilbertian basis $\psi_k(x)$
Uniform	$\mathbf{1}_{]-1,1[}(x)/2$	Legendre $P_k(x)$	$P_k(x)/\sqrt{\frac{1}{2k+1}}$
Gaussian	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$	Hermite $H_{e_k}(x)$	$H_{e_k}(x)/\sqrt{k!}$
Gamma	$x^a\, e^{-x}\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$	Laguerre $L_k^a(x)$	$L_k^a(x)/\sqrt{\frac{\Gamma(k+a+1)}{k!}}$
Beta	$\mathbf{1}_{]-1,1[}(x)\,\frac{(1-x)^a(1+x)^b}{B(a)\,B(b)}$	Jacobi $J_k^{a,b}(x)$	$J_k^{a,b}(x)/\mathfrak{J}_{a,b,k}$

$$\mathfrak{J}^2_{a,b,k} = \frac{2^{a+b+1}}{2k+a+b+1}\frac{\Gamma(k+a+1)\Gamma(k+b+1)}{\Gamma(k+a+b+1)\Gamma(k+1)}$$

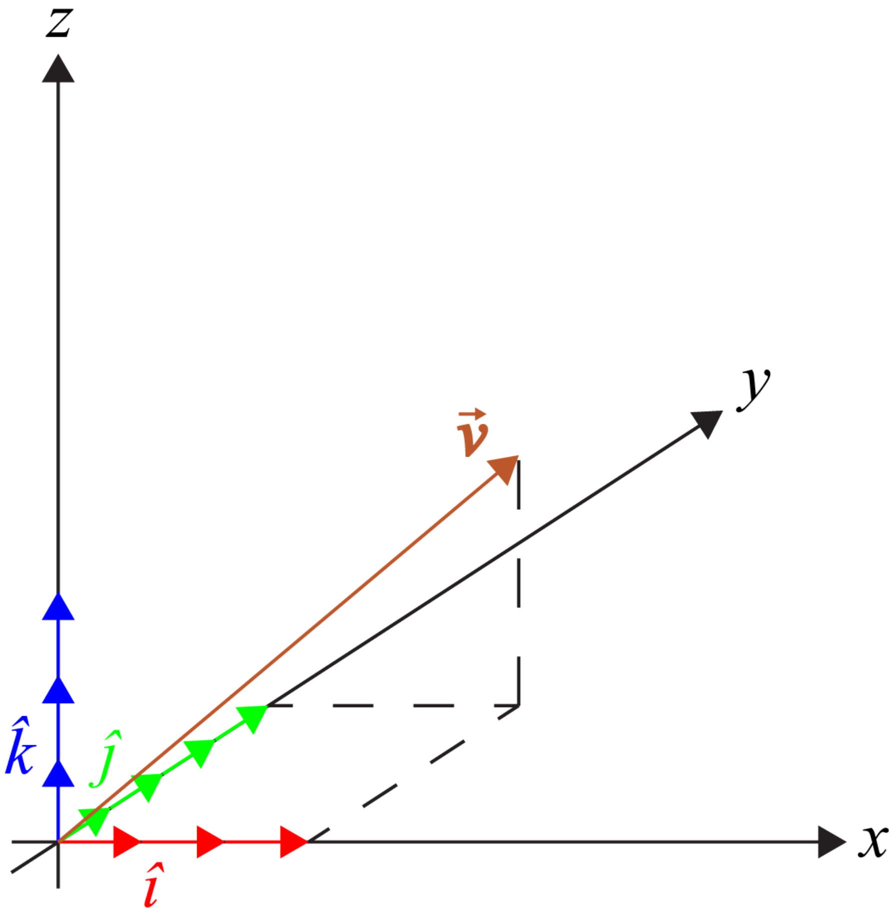
Base - $\mathcal{H}^n$

Type of variable	Distribution	Orthogonal polynomials	Hilbertian basis $\psi_k(x)$
Uniform	$\mathbf{1}_{]-1,1[}(x)/2$	Legendre $P_k(x)$	$P_k(x)/\sqrt{\frac{1}{2k+1}}$
Gaussian	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$	Hermite $H_{e_k}(x)$	$H_{e_k}(x)/\sqrt{k!}$
Gamma	$x^a\, e^{-x}\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$	Laguerre $L_k^a(x)$	$L_k^a(x)/\sqrt{\frac{\Gamma(k+a+1)}{k!}}$
Beta	$\mathbf{1}_{]-1,1[}(x)\,\frac{(1-x)^a(1+x)^b}{B(a)\,B(b)}$	Jacobi $J_k^{a,b}(x)$	$J_k^{a,b}(x)/\mathfrak{J}_{a,b,k}$
		$\mathfrak{J}_{a,b,k}^2 = \frac{2^{a+b+1}}{2k+a+b+1}\frac{\Gamma(k+a+1)\Gamma(k+b+1)}{\Gamma(k+a+b+1)\Gamma(k+1)}$	

Base - $\mathcal{H}^{n}$

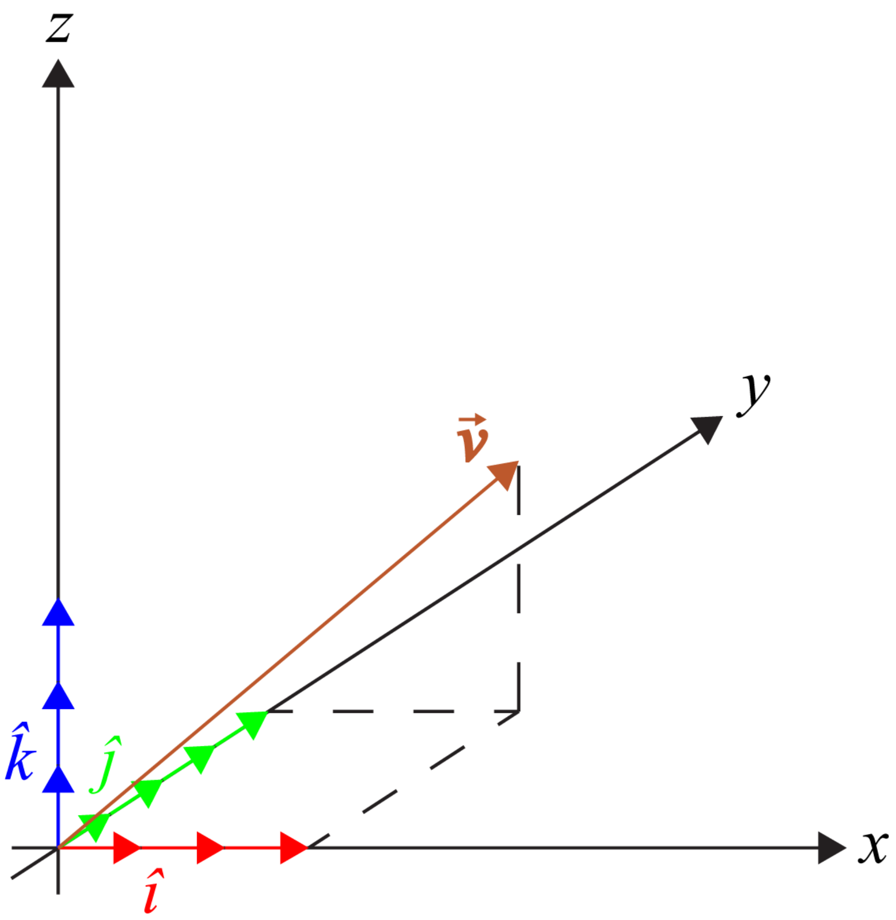
Type of variable	Distribution	Orthogonal polynomials	Hilbertian basis $\psi_k(x)$
Uniform	$\mathbf{1}_{]-1,1[}(x)/2$	Legendre $P_k(x)$	$P_k(x)/\sqrt{\frac{1}{2k+1}}$
Gaussian	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$	Hermite $H_{e_k}(x)$	$H_{e_k}(x)/\sqrt{k!}$
Gamma	$x^a\, e^{-x}\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$	Laguerre $L_k^a(x)$	$L_k^a(x)/\sqrt{\frac{\Gamma(k+a+1)}{k!}}$
Beta	$\mathbf{1}_{]-1,1[}(x)\,\frac{(1-x)^a(1+x)^b}{B(a)\,B(b)}$	Jacobi $J_k^{a,b}(x)$	$J_k^{a,b}(x)/\mathfrak{J}_{a,b,k}$
		$\mathfrak{J}^2_{a,b,k} = \frac{2^{a+b+1}}{2k+a+b+1}\frac{\Gamma(k+a+1)\Gamma(k+b+1)}{\Gamma(k+a+b+1)\Gamma(k+1)}$	

Coordenadas ou Coeficientes - $\mathbb{R}^n$



$$\vec{v} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

Coordenadas ou Coeficientes - $\mathbb{R}^n$



$$\vec{v} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

Produto interno!

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{\imath}$$

$$v_y = \vec{v} \cdot \vec{\jmath}$$

$$v_z = \vec{v} \cdot \vec{k}$$

Coordenadas ou Coeficientes - $\mathcal{H}^{\mathrm{n}}$

$$y_\alpha = \int_{\mathrm{D}_x} \mathcal{M}(x)\, \psi_\alpha(x) f_x(x)\, dx$$

Coeficientes: Métodos de Projeção

$$y_\alpha = \int_{\mathrm{D}_x} \mathcal{M}(x)\, \psi_\alpha(x) f_x(x)\, dx$$

Solução por integração numérica

- Simulação de Monte Carlo;
- Quadratura Gaussiana;

Truncagem

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{M}(\boldsymbol{X}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} y_\alpha \psi_\alpha \approx \sum_{\alpha=0}^{N} y_\alpha \psi_\alpha$$

Truncagem

TRUNCAGEM PADRÃO

O valor máximo de N, nessa situação, é dado por:

$$N = \binom{M+p}{p}$$

TRUNCAGEM HIPERBÓLICA (q-NORM)

Essa situação escolhe todos os índices α que satisfaçam $\|\alpha\|_q \leq p$, onde:

$$\|\alpha\|_q = \left(\sum_{i=1}^{M} \alpha_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Truncagem

TRUNCAGEM PADRÃO

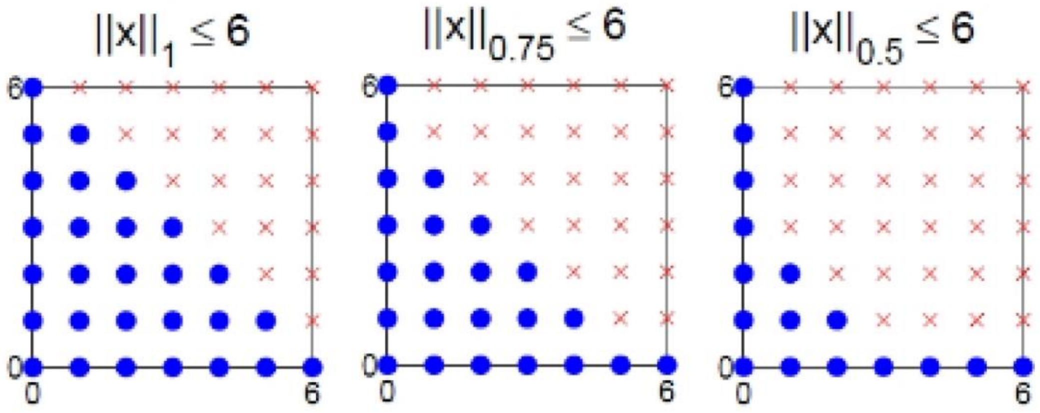
O valor máximo de N, nessa situação, é dado por:

$$N = \binom{M+p}{p}$$

TRUNCAGEM HIPERBÓLICA (q-NORM)

Essa situação escolhe todos os índices α que satisfaçam $\|\alpha\|_q \leq p$, onde:

$$\|\alpha\|_q = \left(\sum_{i=1}^{M} \alpha_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$



Coeficientes: Métodos de regressão

$$\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{PC}} = \sum_{\alpha=0}^{N} y_\alpha \psi_\alpha$$

- Mínimos quadrados;
- Minimização de resíduo;
- Validação cruzada;

Propriedade da expansão

$$y_\alpha = \int_{\Omega_x} \mathcal{M}(x)\, \psi_\alpha(x) f_x(x)\, dx$$

$$y_0 = \int_{\Omega_x} \mathcal{M}(x)\, f_x(x)\, dx$$

Propriedade da expansão

$$Var[Y^{PC}] = E[(Y^{PC} - y_0)^2]$$

$$Var[Y^{PC}] = E\left[\left(\sum_{\alpha=0}^{N} y_\alpha \psi_\alpha - y_0\right)^2\right]$$

$$Var[Y^{PC}] = \sum_{\alpha=1}^{N} y_\alpha^2$$