Observables y Medidas

Luis Daniel Benavides Navarro

24-03-2020

Observables

- Los observables de un sistema se representan por operadores hermitianos.

- El resultado de una Observación es siempre un valor propio del operador hermitiano

- Para un sistema dado, con un observable Ω y preparado en el estado $|\psi\rangle$ el valor esperado al preparar el experimento y observar Ω varias veces será $\langle\psi|\Omega|\psi\rangle$

- Los observables no conmutan, es decir el orden de observación importa.

- Si el conmutador de dos observable no es cero, hay un límite en nuestra capacidad de medirlos simultáneamente.

Matrices Hermitianas

- **Postulado.** A cada observable físico le corresponde una matriz hermitiana.

- **Definición Matriz Hermitiana.** Una matriz $n \times n$ se denomina hermitiana si $A^\dagger = A$. En otras palabras:

$$A[j,k] = \overline{A[k,j]}$$

Valores observados

- **Postulado.** Los valores propios de un observable hermitiano Ω asociado con un observable físico son los únicos valores que el observable puede tomar al medirlo en un estado dado. Los vectores propios forman una base para el espacio vectorial de estados.

- Vector propio y valor propio: $\Omega V = cV$

Sistema 1: partícula en una línea

$$
\begin{array}{cccccc}
x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet
\end{array}
$$

$$|\psi\rangle = c_0|x_0\rangle + c_1|x_1\rangle + c_2|x_2\rangle + \ldots + c_{n-1}|x_{n-1}\rangle$$

Observable de posición

$x_0 \qquad x_1 \qquad x_2 \qquad x_3 \; \dots \; x_{n-1}$

$\bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \; \cdots \; \bullet$

$$P(|x_i\rangle) = x_i|x_i\rangle$$

$$|\psi\rangle = c_0|x_0\rangle + c_1|x_1\rangle + c_2|x_2\rangle + \ldots + c_{n-1}|x_{n-1}\rangle$$

$$P = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$P(|\psi\rangle) = \sum_{i=0}^{n} x_i c_i |x_i\rangle$$

Observable de momento

$$x_0 \qquad x_1 \qquad x_2 \qquad x_3 \quad \cdots \quad x_{n-1}$$

$$\bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \quad \cdots \quad \bullet$$

$$|\psi\rangle = c_0|x_0\rangle + c_1|x_1\rangle + c_2|x_2\rangle + \ldots + c_{n-1}|x_{n-1}\rangle$$

$$M(|\psi\rangle) = -i * \hbar * \frac{|\psi(x + \delta x)\rangle - |\psi(x)\rangle}{\delta x}$$

Observables de spin

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Combinando observables

Multiplicar por escalar y sumar

- Podemos multiplicar por escalar y obtener un observable
- Podemos sumar y obtener un observable

Multiplicar?

- Problema es que la multiplicación de matrices no es conmutativa
- En general el producto de dos matrices hermitianas no es necesariamente hermitiano

El conmutador

- Para ser conmutable
  - $\langle \Omega_1 * \Omega_2 \phi, \psi \rangle = \langle \Omega_2 \phi, \Omega_1 \psi \rangle = \langle \phi, \Omega_2 * \Omega_1 \psi \rangle$
- $[\Omega_1, \Omega_2] = \Omega_1 * \Omega_2 - \Omega_2 * \Omega_1$

Valor Esperado

- Los operadores hermitianos se comportan bien con respecto al producto interno
  - $\langle \Omega\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \Omega\psi \rangle$
- $\langle \Omega\psi, \psi \rangle$ es un número real y lo denotaremos $\langle \Omega \rangle_\psi$
- **Postulado.** $\langle \Omega \rangle_\psi$ es el valor esperado de observar Ω repetidamente en un sistema preparado con el mismo estado $|\psi\rangle$. Es decir representa el promedio de los valores obtenidos al repetir el experimento varias veces.

Varianza y el operador delta

- Una varianza baja nos indica que la mayoría de los valores propios están cerca a la media. Es decir la mayoría de los valores observados.
- Una varianza alta nos indica que los valores están esparcidos lejos de la media
- Antes de calcular la varianza concretamente introduzcamos el operador delta
  - $\Delta_\psi(\Omega) = \Omega - \langle \Omega \rangle_\psi I$
- Varianza
  - $Var_\psi(\Omega) = \langle \Delta_\psi(\Omega) * \Delta_\psi(\Omega) \rangle_\psi$

Ejemplo

$$\Omega = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad |\psi\rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Supongamos que $\langle \Omega \rangle_\psi = \langle \psi | \Omega \, | \, \psi \rangle = \langle \psi, \Omega\psi \rangle = \mu$

$$\Delta_\psi(\Omega) = \Omega - \langle \Omega \rangle_\psi I \; = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \mu & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \mu \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\Omega = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad |\psi\rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Supongamos que $\langle \Omega \rangle_\psi = \langle \psi | \Omega \,|\, \psi \rangle = \langle \psi, \Omega \psi \rangle = \mu$

$$\Delta_\psi(\Omega) = \Omega - \langle \Omega \rangle_\psi I \;= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \mu & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \mu \end{bmatrix}$$

$$\Delta_\psi(\Omega) * \Delta_\psi(\Omega) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \mu & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \mu \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \lambda_1 - \mu & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_1 - \mu)^2 & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - \mu)^2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\Omega = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad |\psi\rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Supongamos que $\langle \Omega \rangle_\psi = \langle \psi | \Omega \, | \, \psi \rangle = \langle \psi, \Omega \psi \rangle = \mu$

$$\Delta_\psi(\Omega) = \Omega - \langle \Omega \rangle_\psi I = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \mu & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \mu \end{bmatrix}$$

$$\Delta_\psi(\Omega) * \Delta_\psi(\Omega) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \mu & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \mu \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \lambda_1 - \mu & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_1 - \mu)^2 & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - \mu)^2 \end{bmatrix}$$

$$Var_\psi(\Omega) = \langle \Delta_\psi(\Omega) * \Delta_\psi(\Omega) \rangle_\psi = \begin{bmatrix} \overline{c_1}, \overline{c_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda_1 - \mu)^2 & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - \mu)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$= |\, c_1 \,|^2 \times (\lambda_1 - \mu)^2 + |\, c_2 \,|^2 \times (\lambda_2 - \mu)^2$$

Ejemplo II (ej. 4.2.12) - Spin

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad |\psi\rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Supongamos que $\langle \Omega \rangle_\psi = \langle \psi | \Omega \, | \psi \rangle = \langle \psi, \Omega\psi \rangle = \mu$

$$\Delta_\psi(S_z) = S_z - \langle S_z \rangle_\psi I = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} - \mu & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} - \mu \end{bmatrix}$$

$$\Delta_\psi(S_z) * \Delta_\psi(Sz) = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} - \mu & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} - \mu \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} - \mu & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} - \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{\hbar}{2} - \mu)^2 & 0 \\ 0 & (\frac{\hbar}{2} + \mu)^2 \end{bmatrix}$$

$$Var_\psi(S_z) = \langle \Delta_\psi(S_z) * \Delta_\psi(S_z) \rangle_\psi = [\overline{c_1}, \overline{c_2}] \begin{bmatrix} (\frac{\hbar}{2} - \mu)^2 & 0 \\ 0 & (\frac{\hbar}{2} + \mu)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = [\overline{c_1}, \overline{c_2}] \begin{bmatrix} c_1(\frac{\hbar}{2} - \mu)^2 \\ c_2(\frac{\hbar}{2} + \mu)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \overline{c_1} \times c_1 \times (\frac{\hbar}{2} - \mu)^2 + \overline{c_2} \times c_2 \times (\frac{\hbar}{2} + \mu)^2 = |\, c_1 |^2 \times (\frac{\hbar}{2} - \mu)^2 + |\, c_2 |^2 \times (\frac{\hbar}{2} + \mu)^2$$

Ejemplo II (ej. 4.2.12) - Spin -slide 2

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \qquad |\psi\rangle = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\langle\Omega\rangle_\psi = \langle\psi|\Omega\,|\,\psi\rangle = \langle\psi, \Omega\psi\rangle = \mu = \frac{\hbar}{2}(\,|\,c_1\,|^2 - |\,c_2\,|^2\,)$$

$$Var_\psi(S_z) = \langle\Delta_\psi(S_z) * \Delta_\psi(S_z)\rangle_\psi = \underline{|\,c_1\,|^2 \times (\frac{\hbar}{2} - \mu)^2 + |\,c_2\,|^2 \times (\frac{\hbar}{2} + \mu)^2}$$

$$= (\frac{\hbar}{2})^2 + (\frac{\hbar}{2})^2 = \frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4} = \boxed{\frac{\hbar^2}{2}}$$

Principio de incertidumbre de Heisemberg

- **Teorema.** El producto de las varianzas de dos operadores hermitianos arbitrarios en un estado dado es siempre mayor o igual a un cuarto del cuadrado del valor esperado del conmutador.

$$Var_\psi(\Omega_1) \times Var_\psi(\Omega_2) \geq \frac{1}{4} |\langle[\Omega_1, \Omega_2]\rangle_\psi|^2$$

- Si el conmutador es 0, es decir los observables con conmutables, no existe límite para la precisión con la que se pueden medir los dos observables simultáneamente.

Medidas

Medidas

- El observable define la pregunta que le podemos hacer al sistema
- La medida es el acto de hacer una observación en un sistema se denomina medida

Estado después de una medida

- **Postulado 1**
  - Suponga un sistema dado con un observable Ω y preparado en el estado $|\psi\rangle$.
  - Suponga que usted realiza la medida de el Ω y obtiene el valor λ
  - El estado después de la medida será siempre el **vector propio correspondiente a λ**
    - (Recordatorio: si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $AV = \lambda . V$, entonces λ es un valor propio y V es el vector propio de λ)

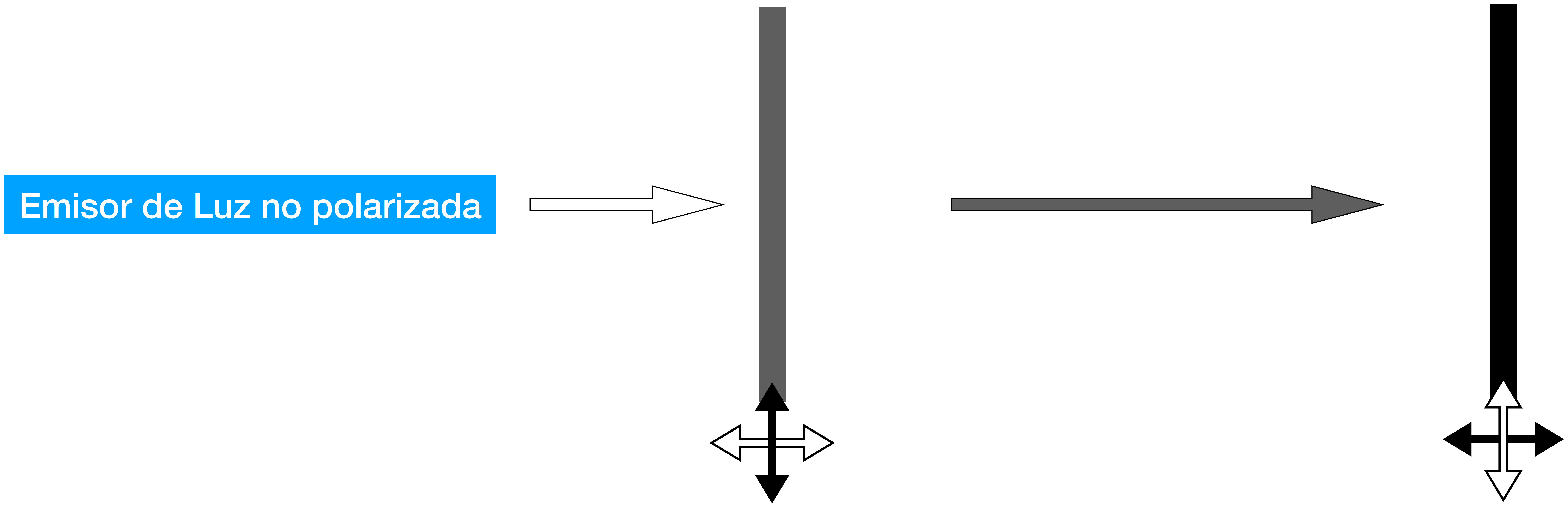
Probabilidad de transición

- Suponga un sistema dado con un observable Ω y preparado en el estado $|\psi\rangle$.
- $|e\rangle$ es un vector propio de Ω
- La probabilidad de transitar de $|\psi\rangle$ a $|e\rangle$ está dada por:
  - $|\langle e|\psi\rangle|^2$

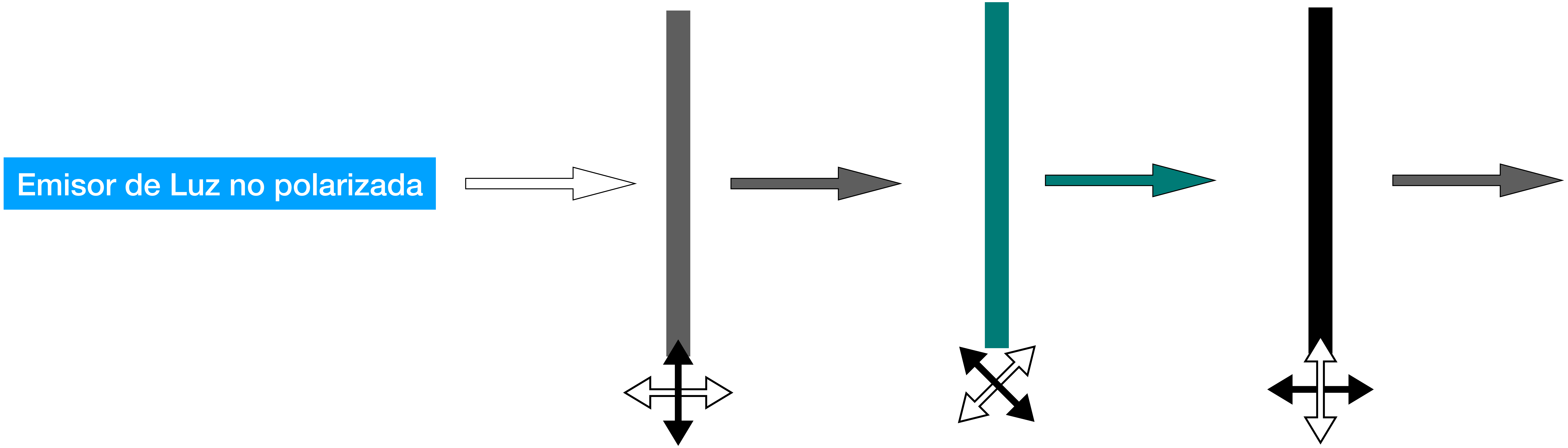
Valor esperado

- El valor esperado es la media de la distribución de probabilidad
  - Suponga un sistema dado con un observable Ω y preparado en el estado $|\psi\rangle$ y se mide el observable Ω
  - Si usted repite el experimento muchas veces la media de la observación tenderá al valor esperado.
  - Es decir tiende a $\langle\psi|\Omega|\psi\rangle = \langle\Omega\rangle_\psi$

Simple experimento de medidas



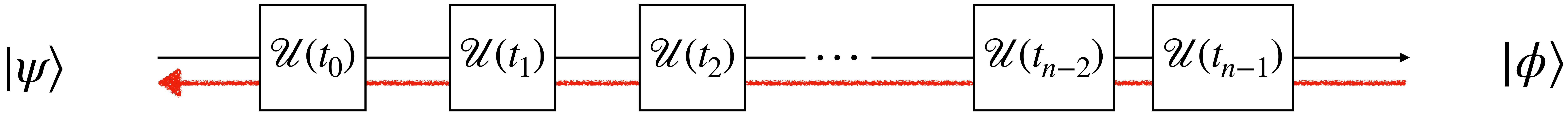
Simple experimento de medidas



Dinámica del sistema

- La dinámica del sistema está dada por transformaciones unitarias (Matrices unitarias)

- Las transformaciones unitarias son invertibles. Por lo tanto, la dinámica de un sistema cerrado se puede revertir en el tiempo.



$$|\psi\rangle = \mathcal{U}(t_0)^\dagger \mathcal{U}(t_1)^\dagger \dots \mathcal{U}(t_{n-3})^\dagger \mathcal{U}(t_{n-2})^\dagger \mathcal{U}(t_{n-1})^\dagger |\phi\rangle$$

$$\mathcal{U}(t_0)|\psi\rangle \qquad \vdots$$

$$\mathcal{U}(t_1)\mathcal{U}(t_0)|\psi\rangle \qquad \mathcal{U}(t_{n-3})^\dagger \mathcal{U}(t_{n-2})^\dagger \mathcal{U}(t_{n-1})^\dagger |\phi\rangle$$

$$\mathcal{U}(t_2)\mathcal{U}(t_1)\mathcal{U}(t_0)|\psi\rangle \qquad \mathcal{U}(t_{n-2})^\dagger \mathcal{U}(t_{n-1})^\dagger |\phi\rangle$$

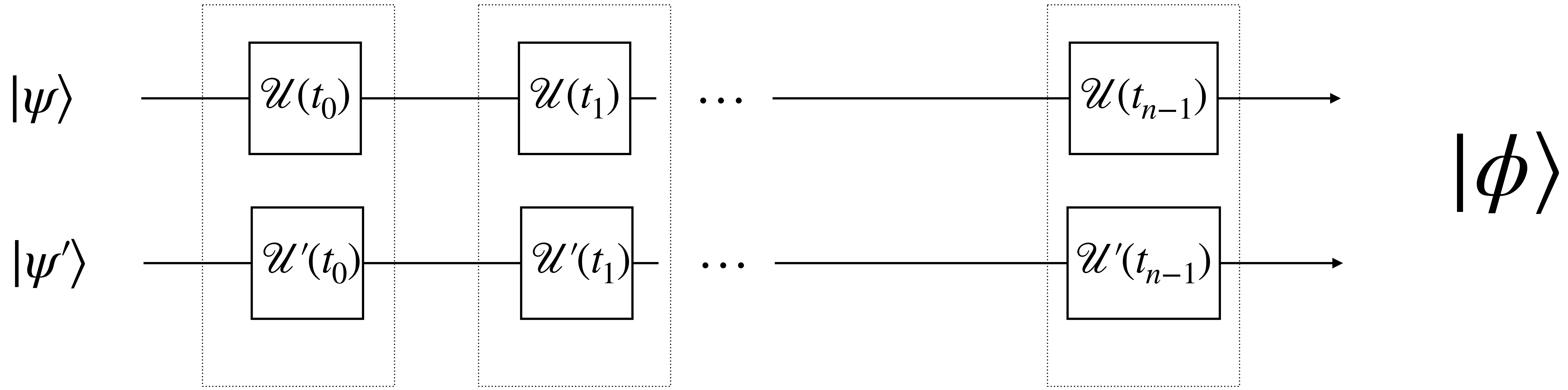
$$\vdots \qquad \mathcal{U}(t_{n-1})^\dagger |\phi\rangle$$

$$\mathcal{U}(t_{n-1}\mathcal{U}(t_{n-2}) \dots \mathcal{U}(t_2)\mathcal{U}(t_1)\mathcal{U}(t_0)|\psi\rangle = |\phi\rangle$$

Ensamblando sistemas

- El espacio vectorial de un sistema ensamblado está dado por el producto tensor de los espacios vectoriales de los sistemas individuales

- La dinámica de un sistema ensamblado está dado por el producto tensor de las matrices describiendo la dinámica del sistema.



$|\psi\rangle \otimes |\psi'\rangle$ $\quad$ $\mathscr{U}(t_0) \otimes \mathscr{U}'(t_0)$ $\quad$ $\mathscr{U}(t_1) \otimes \mathscr{U}'(t_1)$ $\quad$ $\mathscr{U}(t_{n-1}) \otimes \mathscr{U}'(t_{n-1})$

$$|\phi\rangle = \mathscr{U}(t_{n-1}) \otimes \mathscr{U}'(t_{n-1}) \ldots \mathscr{U}(t_{01}) \otimes \mathscr{U}'(t_{01}) * \mathscr{U}(t_0) \otimes \mathscr{U}'(t_0)(|\psi\rangle \otimes |\psi'\rangle)$$

Entrelazamiento

Considere dos sistemas cada uno de una partícula con dos posiciones posibles

$$|\beta\rangle = |x_0\rangle \otimes |y_0\rangle + |x_1\rangle \otimes |y_1\rangle$$

$$|\beta\rangle = 1(|x_0\rangle \otimes |y_0\rangle) + \cancel{0(|x_0\rangle \otimes |y_1\rangle)} + \cancel{0(|x_1\rangle \otimes |y_0\rangle)} + 1(|x_1\rangle \otimes)|y_1\rangle$$

¿Podemos escribir $|\psi\rangle$ como el producto tensor de dos vectores representando los estados independientes de los sistemas?

$$|\psi\rangle_{sitema-x} = c_0|x_0\rangle + c_1|x_1\rangle$$

$$|\phi\rangle_{sitema-y} = b_0|y_0\rangle + b_1|y_1\rangle$$

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = c_0b_0(|x_0\rangle \otimes |y_0\rangle) + c_0b_1(|x_0\rangle \otimes |y_1\rangle) + c_1b_0(|x_1\rangle \otimes |y_0\rangle) + c_1b_1(|x_1\rangle \otimes)|y_1\rangle$$

$$c_0b_0 = 1 \quad c_1b_0 = 0$$
$$c_0b_1 = 0 \quad c_1b_1 = 1$$

El estado $|\beta\rangle = |x_0\rangle \otimes |y_0\rangle + |x_1\rangle \otimes |y_1\rangle$ representa un estado entrelazado. Una vez conocemos el estado de la partícula X podemos saber el de la partícula *Y* así estén a millones de kilómetros.

Ejercicios

- Realice el quiz asignado en moodle
- Crear un proyecto de github nuevo denominado Observables y medidas.
- Modele en su librería los problemas
  - 4.3.1
  - 4.3.2
  - 4.4.1
  - 4.4.2
  - Desarrolle e incluya en el Github una discusión de los ejercicios 4.5.2 y 4.5.3