Matrices Hermitianas, Unitarias y producto tensor

Luis Daniel Benavides Navarro, Ph.D.

24/08/2020

Matrices Hermitianas

Matrices Hermitianas

- **Definición Matriz Hermitiana.** Una matriz $n \times n$ se denomina hermitiana si $A^{\dagger} = A$. En otras palabras:

$$A[j,k] = \overline{A[k,j]}$$

- **Definición de autoadjunta (self-adjoint).** Si A es una matriz hermitiana el operador que representa se denomina **autoadjunto**.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4+5i & 6-16i \\ 4-5i & 13 & 7 \\ 6+16i & 7 & -2.1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 4-5i & 6+16i \\ 4+5i & 13 & 7 \\ 6-16i & 7 & -2.1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A^T} = \begin{bmatrix} 5 & 4+5i & 6-16i \\ 4-5i & 13 & 7 \\ 6+16i & 7 & -2.1 \end{bmatrix} = A$$

Proposiciones

Proposición. Si A es una matriz hermitiana $n \times n$, entonces para todo $V, V' \in \mathbb{C}^n$ Tenemos que:

$$\langle AV, V' \rangle = \langle V, AV' \rangle$$

Demostración. Si A es una matriz hermitiana $n \times n$, entonces para todo $V, V' \in \mathbb{C}^n$ Tenemos que:

$$\langle AV, V' \rangle = (AV)^\dagger \star V' = V^\dagger A^\dagger V' = V^\dagger \star AV' = \langle V, AV' \rangle$$

Proposiciones II

Proposición. Para una matriz hermitiana dada, vectores propios distintos que tienen valores propios distintos son ortogonales.

Demostración. Suponga que tenemos V_1 y V_2 que son vectores propios de la matriz A con

$$AV_1 = c_1V_1 \text{ y } AV_2 = c_2V_2$$

Entonces

$$c_1\langle V_1, V_2\rangle = \langle c_1V_1, V_2\rangle = \langle AV_1, V_2\rangle = \langle V_1, AV_2\rangle = \langle V_1, c_2V_2\rangle = \overline{c_2}\langle V_1, V_2\rangle = c_2\langle V_1, V_2\rangle$$

Podemos escribir

$$c_1\langle V_1, V_2\rangle - c_2\langle V_1, V_2\rangle = (c_1 - c_2)\langle V_1, V_2\rangle = 0$$

Dado que $c_1 - c_2 \neq 0$ (porque son diferentes), entonces $\langle V_1, V_2\rangle = 0$, y por lo tanto son ortogonales

Matriz diagonal

Definición. Una matriz diagonal es una matriz cuyos valores diferentes a cero se encuentran únicamente en la diagonal. Es decir, todos los valores fuera de la diagonal son 0.

Proposición. (El teorema espectral para operadores autoadjuntos de dimensión finita.) Todo operador autoadjunto A en un espacio vectorial complejo de dimensión finita $\mathbb{V}$, se puede representar mediante una matriz diagonal cuyas entradas diagonales son los valores propios de A, y cuyos vectores propios forman una base ortonormal para $\mathbb{V}$ (llamaremos a esta base una base propia).

Matrices Unitarias

Matrices Unitarias

- **Definición Matriz Unitaria.** Una matriz $n \times n$ se denomina unitaria si

$$U \star U^\dagger = U^\dagger \star U = I_n$$

- Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposiciones

Proposición. Las matrices unitarias conservan los productos internos, es decir, si U es unitaria, entonces para cualquier $V, V' \in \mathbb{C}^n$, tenemos que:

$$\langle UV, UV' \rangle = \langle V, V' \rangle.$$

Proposiciones

Proposición. Las matrices unitarias conservan los productos internos, es decir, si U es unitaria, entonces para cualquier $V, V' \in \mathbb{C}^n$, tenemos que:

$$\langle UV, UV' \rangle = \langle V, V' \rangle.$$

Demostración.

Proposiciones

Proposición. Las matrices unitarias conservan los productos internos, es decir, si U es unitaria, entonces para cualquier $V, V' \in \mathbb{C}^n$, tenemos que:

$$\langle UV, UV' \rangle = \langle V, V' \rangle.$$

Demostración.

$\langle UV, UV' \rangle = (UV)^\dagger \star (UV')$ Por definición del producto interno

Proposiciones

Proposición. Las matrices unitarias conservan los productos internos, es decir, si U es unitaria, entonces para cualquier $V, V' \in \mathbb{C}^n$, tenemos que:

$$\langle UV, UV' \rangle = \langle V, V' \rangle.$$

Demostración.

$$\langle UV, UV' \rangle = (UV)^\dagger \star (UV') \qquad \text{Por definición del producto interno}$$

$$= V^\dagger U^\dagger \star UV' \qquad \text{Por propiedades de la adjunta}$$

Proposiciones

Proposición. Las matrices unitarias conservan los productos internos, es decir, si U es unitaria, entonces para cualquier $V, V' \in \mathbb{C}^n$, tenemos que:

$$\langle UV, UV' \rangle = \langle V, V' \rangle.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle UV, UV' \rangle &= (UV)^\dagger \star (UV') && \text{Por definición del producto interno} \\ &= V^\dagger U^\dagger \star UV' && \text{Por propiedades de la adjunta} \\ &= V^\dagger \star I \star V' && \text{Porque U es unitaria} \end{aligned}$$

Proposiciones

Proposición. Las matrices unitarias conservan los productos internos, es decir, si U es unitaria, entonces para cualquier $V, V' \in \mathbb{C}^n$, tenemos que:

$$\langle UV, UV' \rangle = \langle V, V' \rangle.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\langle UV, UV' \rangle &= (UV)^\dagger \star (UV') && \text{Por definición del producto interno} \\
&= V^\dagger U^\dagger \star UV' && \text{Por propiedades de la adjunta} \\
&= V^\dagger \star I \star V' && \text{Porque U es unitaria} \\
&= V^\dagger \star V' && \text{Por propiedades de la multiplicación de matrices}
\end{aligned}$$

Proposiciones

Proposición. Las matrices unitarias conservan los productos internos, es decir, si U es unitaria, entonces para cualquier $V, V' \in \mathbb{C}^n$, tenemos que:

$$\langle UV, UV' \rangle = \langle V, V' \rangle.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\langle UV, UV' \rangle &= (UV)^\dagger \star (UV') && \text{Por definición del producto interno} \\
&= V^\dagger U^\dagger \star UV' && \text{Por propiedades de la adjunta} \\
&= V^\dagger \star I \star V' && \text{Porque U es unitaria} \\
&= V^\dagger \star V' && \text{Por propiedades de la multiplicación de matrices} \\
&= \langle V, V' \rangle && \text{Por definición del producto interno}
\end{aligned}$$

Proposiciones

Proposición. Como las matrices unitarias conservan los productos internos, también preservan la norma.

Proposiciones

Proposición. Como las matrices unitarias conservan los productos internos, también preservan la norma.

$$|UV| = |V|$$

Demostración.

Proposiciones

Proposición. Como las matrices unitarias conservan los productos internos, también preservan la norma.

$$|UV| = |V|$$

Demostración.

$$|UV| = \sqrt{\langle UV, UV \rangle} \qquad \text{Por definición de la norma}$$

Proposiciones

Proposición. Como las matrices unitarias conservan los productos internos, también preservan la norma.

$$|UV| = |V|$$

Demostración.

$$\begin{aligned} |UV| &= \sqrt{\langle UV, UV \rangle} && \text{Por definición de la norma} \\ &= \sqrt{\langle V, V \rangle} && \text{Por el teorema anterior} \end{aligned}$$

Proposiciones

Proposición. Como las matrices unitarias conservan los productos internos, también preservan la norma.

$$|UV| = |V|$$

Demostración.

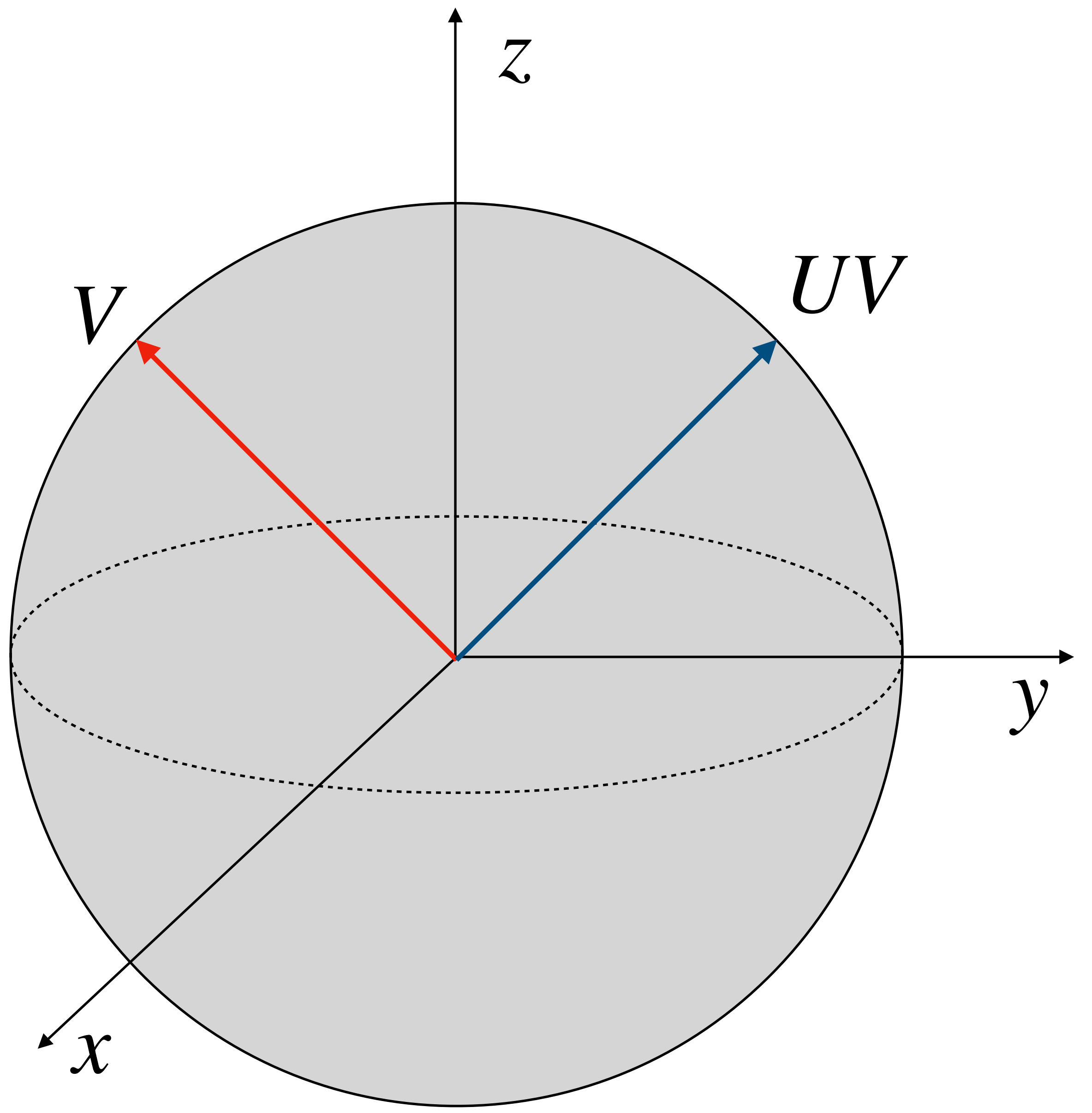
$$\begin{aligned} |UV| &= \sqrt{\langle UV, UV\rangle} && \text{Por definición de la norma} \\ &= \sqrt{\langle V, V\rangle} && \text{Por el teorema anterior} \\ &= |V| && \text{Por definición de la norma} \end{aligned}$$

Proposiciones

Proposición. Como las matrices unitarias conservan los productos internos, también preservan la norma.

Demostración.

$$|UV| = \sqrt{\langle UV, UV \rangle} \qquad \text{Por definición de la norma}$$
$$= \sqrt{\langle V, V \rangle} \qquad \text{Por el teorema anterior}$$
$$= |V| \qquad \text{Por definición de la norma}$$



Consecuencia. Como conserva la norma esto implica que si usted considera la esfera unitaria en un espacio vectorial (con cualquier dimensión), las matrices unitarias serán una forma de rotar la esfera. Es decir que si V es un vector unitario UV también será un vector unitario.

Algo más sobre matrices unitarias

- Las matrices unitarias preservan la geometría del espacio vectorial.
- Si U es unitaria podemos encontrar una matriz que deshace lo que hizo U

Si U es unitaria entonces: $UV = V'$

Multiplicando por la adjunta a ambos lados: $U^\dagger UV = U^\dagger V'$

Es decir: $V = U^\dagger V'$

- Esto implica que $U\dagger$deshace la acción de U, es decir las acciones de las matrices unitarias se pueden deshacer
- En le mundo cuántico todas las acciones que no son medidas, se pueden deshacer.

Ejercicios

Exercise 2.6.8 Show that if U is a unitary matrix and V_1 and V_2 are in $\mathbb{C}^n$, then

$$d(UV_1, UV_2) = d(V_1, V_2), \tag{2.152}$$

$$d(UV, UV') = |UV - UV'| = \sqrt{\langle UV - UV', UV - UV' \rangle}$$

■

Proposition 2.6.2 If A is a hermitian, then all eigenvalues are real.

To prove this, let A be a hermitian matrix with an eigenvalue $c \in \mathbb{C}$ and an eigenvector V. Consider the following sequence of equalities:

$$c\langle V, V\rangle = \langle cV, V\rangle = \langle AV, V\rangle = \langle V, AV\rangle = \langle V, cV\rangle = \overline{c}\langle V, V\rangle. \qquad (2.142)$$

Exercise 2.6.4 Prove that the eigenvalues of a symmetric matrix are real.

Real

$$A[j,k] = A[k,j]$$

■

$$A[j,k]^{\dagger} = \overline{(A[j,k])^{T}} = \overline{A[j,k]} = A[j,k]$$

(Por ser matriz real)

$$c\langle V, V\rangle = \langle cV, V\rangle = \langle AV, V\rangle = (AV)^{\dagger} \star V = V^{\dagger}A^{\dagger} \star V = \langle V, A^{\dagger}V\rangle = \langle V, AV\rangle = \langle V, cV\rangle = \overline{c}\langle V, V\rangle$$

Producto Tensor

Producto cartesiano (suma directa)

Queremos formar un un nuevo espacio vectorial a partir de dos espacios vectoriales

Suponga que tenemos dos espacios vectoriales $(\mathbb{V}, +, -, \mathbf{0}, \cdot)$ y $(\mathbb{V}', +', -', \mathbf{0}', \cdot')$

Creamos un nuevo espacio vectorial con $(\mathbb{V} \times \mathbb{V}', +'', -'', \mathbf{0}'', \cdot'')$ con:

$$\mathbb{V} \times \mathbb{V}' = \{(V, V') \mid V \in \mathbb{V} \text{ y } V' \in \mathbb{V}'\}$$

$$+'' : ((\mathbb{V} \times \mathbb{V}') \times (\mathbb{V} \times \mathbb{V}')) \to \mathbb{V} \times \mathbb{V}' : (V_1, V_1') +'' (V_2, V_2') = (V_1 + V_2, V_1' +' V_2')$$

$$-'' : \mathbb{V} \times \mathbb{V}' \to \mathbb{V} \times \mathbb{V}' : -'' (V, V') = (-V, -' V')$$

$$\cdot'' : (\mathbb{C} \times (\mathbb{V} \times \mathbb{V}')) \to \mathbb{V} \times \mathbb{V}' : c \cdot'' (V, V') = (c \cdot V, c \cdot' V')$$

Ejemplo: Producto cartesiano (suma directa)

Queremos formar un un nuevo espacio vectorial a partir de dos espacios vectoriales

Suponga que tenemos dos espacios vectoriales $(\mathbb{C}^2, +, -, \mathbf{0}, \cdot)$ y $(\mathbb{C}^3, +', -', \mathbf{0}', \cdot')$

Creamos un nuevo espacio vectorial con $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3, +'', -'', \mathbf{0}'', \cdot'')$ con:

$$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3 = \{(V, V') \,|\, V \in \mathbb{C}^2 \text{ y } V' \in \mathbb{C}^3\}$$

$$+'' : ((\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3) \times (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3)) \to \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3 : (V_1, V_1') +'' (V_2, V_2') = (V_1 + V_2, V_1' +' V_2')$$

$$-'' : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3 : -''(V, V') = (-V, -' V')$$

$$\cdot'' : (\mathbb{C} \times (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3)) \to \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3 : c \cdot'' (V, V') = (c \cdot V, c \cdot' V')$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2i \\ 1 + 6i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5i \\ 3 + 4i \\ -2.1 \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3$$

Ejemplo: Producto cartesiano (suma directa)

$$\left(\begin{bmatrix} 2i \\ 1+6i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5i \\ 3+4i \\ -2.1 \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} 4+3i \\ 8i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3i \\ 2-3i \\ -2.7i \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 4+5i \\ 1+14i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8i \\ 5+i \\ -2.1-2.7i \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 2i \\ 1+6i \\ -5i \\ 3+4i \\ -2.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4+3i \\ 8i \\ -3i \\ 2-3i \\ -2.7i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+5i \\ 1+14i \\ -8i \\ 5+i \\ -2.1-2.7i \end{bmatrix}$$

El conjunto $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3$ es isomorfismo con $\mathbb{C}^5$ (Ver ejercicio 2.2.17). Es decir tienen la misma forma se comportan igual. Analizar uno es igual a analizar el otro.

Producto tensor

Queremos otra manera para formar un un nuevo espacio vectorial a partir de dos espacios vectoriales

Suponga que tenemos dos espacios vectoriales $(\mathbb{V}, +\,, -\,, \mathbf{0}, \cdot\,)$ y $(\mathbb{V}', +'\,, -'\,, \mathbf{0}', \cdot'\,)$

Creamos un nuevo espacio vectorial con $(\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}', +''\,, -''\,, \mathbf{0}'', \cdot''\,)$ con:

$\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}' = \{V \otimes V' \,|\, V \in \mathbb{V} \text{ y } V' \in \mathbb{V}'\}$

$+'' : ((\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}') \times (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}')) \to \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}' : (V_1 \otimes V_1' +'' V_2 \otimes V_2') \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}'$

$-'' : \mathbb{V} \times \mathbb{V}' \to \mathbb{V} \times \mathbb{V}' : -''\,(V \otimes V') \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}'$

$\cdot'' : (\mathbb{C} \times (\mathbb{V} \times \mathbb{V}')) \to \mathbb{V} \times \mathbb{V}' : c \cdot''\,(V \otimes V') \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}'$

Reglas de reescritura adicionales

i) Producto tensor respeta adición en $\mathbb{V}$ y en $\mathbb{V}'$

$$(V_i + V_j) \otimes V_k' = V_i \otimes V_k' +'' V_j \otimes V_k'$$

$$V_i \otimes (V_j' +' V_k') = V_i \otimes V_j' +'' V_i \otimes V_k'$$

ii) Producto tensor respeta la multiplicación escalar en $\mathbb{V}$ y en $\mathbb{V}'$

$$c \cdot''\,(V_j \otimes V_k') = (c \cdot V_j) \otimes V_k' = V_j \otimes (c \cdot' V_k')$$

Ejemplo: Producto tensor

OJO: VOY A QUITAR LAS PRIMAS DE LAS OPERACIONES PARA FACILITAR LECTURA

Suponga que tenemos dos espacios vectoriales $(\mathbb{C}^2, +, -, \mathbf{0}, \cdot)$ y $(\mathbb{C}^3, +, -, \mathbf{0}, \cdot)$

Creamos un nuevo espacio vectorial con $(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3, +, -, \mathbf{0}, \cdot)$ con:

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3 = \{V \otimes V' \,|\, V \in \mathbb{C}^2 \text{ y } V' \in \mathbb{C}^3\}$$

$$+ : ((\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3) \times (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3)) \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3 : (V_1 \otimes V_1' + V_2 \otimes V_2') \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$$

$$- : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3 : -(V \otimes V') \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$$

$$\cdot : (\mathbb{C} \times (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3)) \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3 : c \cdot (V \otimes V') \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$$

Reglas de reescritura adicionales

i) Producto tensor respeta adición en $\mathbb{C}^2$ y en $\mathbb{C}^3$

$$(V_i + V_j) \otimes V_k' = V_i \otimes V_k' + V_j \otimes V_k'$$

$$V_i \otimes (V_j' + V_k') = V_i \otimes V_j' + V_i \otimes V_k'$$

ii) Producto tensor respeta la multiplicación escalar en $\mathbb{C}^2$ y en $\mathbb{C}^3$

$$c \cdot (V_j \otimes V_k') = (c \cdot V_j) \otimes V_k' = V_j \otimes (c \cdot V_k')$$

Ejemplo: Producto tensor

$$\begin{bmatrix} 2i \\ 1+6i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5i \\ 3+4i \\ -2.1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$$

$$\begin{bmatrix} 2i \\ 1+6i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5i \\ 3+4i \\ -2.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4+3i \\ 8i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3i \\ 2-3i \\ -2.7i \end{bmatrix} in \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$$

Ejemplo: Producto tensor

$$\begin{bmatrix} 2i \\ 1+6i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5i \\ 3+4i \\ -2.1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$$

$$(2i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (1+6i) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \otimes ((-5i) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (3+4i) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2.1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$(2i \times (-5i)) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (2i \times (3+4i)) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (2i \times (-2.1)) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

Ejemplo: Producto tensor

$$\begin{bmatrix} 2i \\ 1+6i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5i \\ 3+4i \\ -2.1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$$

$$\left(2i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (1+6i) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \otimes \left((-5i) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (3+4i) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2.1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$(2i \times (-5i)) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (2i \times (3+4i)) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (2i \times (-2.1)) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$((1+6i) \times (-5i)) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + ((1+6i) \times (3+4i)) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + ((1+6i) \times (-2.1)) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2i \\ 1+6i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5i \\ 3+4i \\ -2.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i \cdot \begin{bmatrix} -5i \\ 3+4i \\ -2.1 \end{bmatrix} \\ 1+6i \cdot \begin{bmatrix} -5i \\ 3+4i \\ -2.1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i \times (-5i) \\ 2i \times (3+4i) \\ 2i \times -2.1 \\ (1+6i) \times (-5i) \\ (1+6i) \times (3+4i) \\ (1+6i) \times (-2.1) \end{bmatrix}$$

El conjunto $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ es isomorfismo con $\mathbb{C}^6$. Es decir tienen la misma forma se comportan igual. Analizar uno es igual a analizar el otro.

Ejemplo: Producto tensor

$$\begin{bmatrix} 2i \\ 1+6i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5i \\ 3+4i \\ -2.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4+3i \\ 8i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3i \\ 2-3i \\ -2.7i \end{bmatrix} in \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$$

Ejemplo: Producto tensor

$$\begin{bmatrix} 2i \\ 1+6i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5i \\ 3+4i \\ -2.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4+3i \\ 8i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3i \\ 2-3i \\ -2.7i \end{bmatrix} in \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$$

$$\begin{bmatrix} 2i \times (-5i) \\ 2i \times (3+4i) \\ 2i \times -2.1 \\ (1+6i) \times (-5i) \\ (1+6i) \times (3+4i) \\ (1+6i) \times (-2.1) \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Producto tensor

$$\begin{bmatrix} 2i \\ 1+6i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5i \\ 3+4i \\ -2.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4+3i \\ 8i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3i \\ 2-3i \\ -2.7i \end{bmatrix} in \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$$

$$\begin{bmatrix} 2i \times (-5i) \\ 2i \times (3+4i) \\ 2i \times -2.1 \\ (1+6i) \times (-5i) \\ (1+6i) \times (3+4i) \\ (1+6i) \times (-2.1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (4+3i) \times (-3i) \\ (4+3i) \times (2-3i) \\ (4+3i) \times (-2.7i) \\ 8i \times (-3i) \\ 8i \times (2-3i) \\ 8i \times (-2.7i) \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Producto tensor

$$\begin{bmatrix} 2i \\ 1+6i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5i \\ 3+4i \\ -2.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4+3i \\ 8i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3i \\ 2-3i \\ -2.7i \end{bmatrix} in \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$$

$$\begin{bmatrix} 2i \times (-5i) \\ 2i \times (3+4i) \\ 2i \times -2.1 \\ (1+6i) \times (-5i) \\ (1+6i) \times (3+4i) \\ (1+6i) \times (-2.1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (4+3i) \times (-3i) \\ (4+3i) \times (2-3i) \\ (4+3i) \times (-2.7i) \\ 8i \times (-3i) \\ 8i \times (2-3i) \\ 8i \times (-2.7i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2i \times (-5i)) + ((4+3i) \times (-3i)) \\ (2i \times (3+4i)) + ((4+3i) \times (2-3i)) \\ (2i \times -2.1) + ((4+3i) \times (-2.7i)) \\ ((1+6i) \times (-5i)) + (8i \times (-3i)) \\ ((1+6i) \times (3+4i)) + (8i \times (2-3i)) \\ ((1+6i) \times (-2.1)) + (8i \times (-2.7i)) \end{bmatrix}$$

Producto tensor de matrices

Suponga que tenemos dos espacios vectoriales $(\mathbb{C}^{2\times 2}, +, -, \mathbf{0}, \cdot)$ y $(\mathbb{C}^{3\times 3}, +, -, \mathbf{0}, \cdot)$

Creamos un nuevo espacio vectorial con $(\mathbb{C}^{2\times 2} \otimes \mathbb{C}^{3\times 3}, +, -, \mathbf{0}, \cdot)$ con:

El espacio vectorial complejo $(\mathbb{C}^{2\times 2} \otimes \mathbb{C}^{3\times 3}, +, -, \mathbf{0}, \cdot)$ es isomorfo con $(\mathbb{C}^{6\times 6}, +, -, \mathbf{0}, \cdot)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{0,0} \cdot \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} & a_{0,1} \cdot \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \\ a_{1,0} \cdot \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} & a_{1,1} \cdot \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

¿Preguntas?

Exercise 2.7.2 State whether $[5, 6, 3, 2, 0, 1]^T$ is a tensor product of smaller vectors from $\mathbb{C}^3$ and $\mathbb{C}^2$.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \times b_1 \\ a_1 \times b_2 \\ a_2 \times b_1 \\ a_2 \times b_2 \\ a_3 \times b_1 \\ a_3 \times b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1 \times b_1 &= 5 \\ a_1 \times b_2 &= 6 \\ a_2 \times b_1 &= 3 \\ a_2 \times b_2 &= 2 \\ a_3 \times b_1 &= 0 \\ a_3 \times b_2 &= 1 \end{aligned}$$

Algoritmo producto tensor

$A \in \mathbb{C}^{m \times m'}$

$B \in \mathbb{C}^{n \times n'}$

$A \otimes B \in \mathbb{C}^{mn \times m'n'}$

$(A \otimes B)[j, k] = A[j/n, k/n'] \times B[j \textbf{ Mod } n, j \textbf{ Mod } n']$

$$\begin{bmatrix} 3+2i & 5-i & 2i \\ 0 & 12 & 6-3i \\ 2 & 4+4i & 9+3i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3+4i & 5-7i \\ 10+2i & 6 & 2+5i \\ 0 & 1 & 2+9i \end{bmatrix}.$$

$$\otimes : \mathbb{C}^{m\times m'} \times \mathbb{C}^{n\times n'} \longrightarrow \mathbb{C}^{mn\times m'n'}$$

$$(A \otimes B)[j,k] = A[j/n, k/m] \times B[j \operatorname{Mod} n, k \operatorname{Mod} m].$$

	0	1	2
0	3+2i	1+18i	29-11i
1	26+6i	18+12i	-4+19i
2	0	3+2i	-12+31i
3	0	0	0

R[1,2] = A[1/3,2/3] x B[1 mod 3, 2 mod 3]=A[0,0] x B[1, 2]= (3+2i)x(2+5i)= (6+15i+4i-10) = -4+19i

R[3,2] = A[3/3,2/3] x B[3 mod 3, 2 mod 3]=A[1,0] x B[0, 2]= 0x(5-7i)= (6+15i+4i-10) = -4+19i

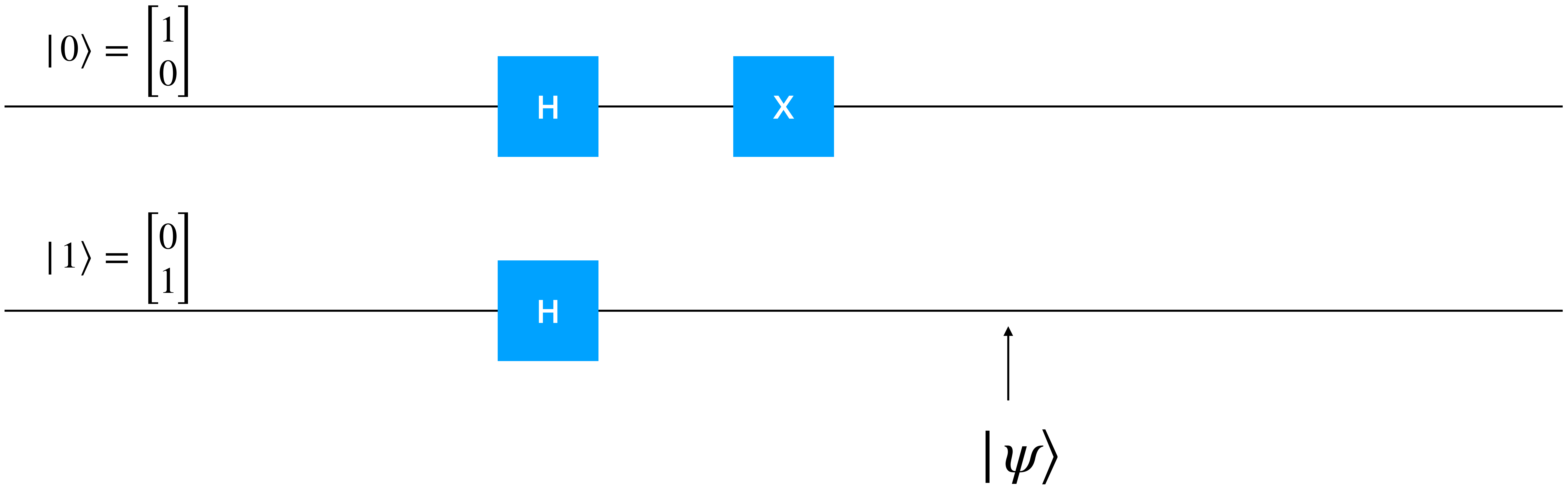
$$\otimes : \mathbb{C}^{m\times m'} \times \mathbb{C}^{n\times n'} \longrightarrow \mathbb{C}^{mn\times m'n'}$$

ned as

$$(A \otimes B)[j, k] = A[j/n, k/m] \times B[j \operatorname{Mod} n, k \operatorname{Mod} m].$$

$$(A \otimes B)[j, k] = A[j/n, k/n'] \times B[j \mod n, k \mod n']$$

Análisis de Circuitos



$$|\psi\rangle = (X \otimes I) \star (H \otimes H) \star (|0\rangle \otimes |1\rangle)$$