Ejercicios de Repaso

5 de septiembre de 2025

A continuación se presenta una selección de ejercicios para practicar las operaciones fundamentales y propiedades de los números complejos.

Instrucciones: Resuelva los siguientes problemas, mostrando claramente su procedimiento.

Parte I: Operaciones Fundamentales

Dados los números complejos $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = -1 + 4i$.

1. Calcular la suma $z_1 + z_2$.
$$(3 + 2i) + (-1 + 4i)$$
2. Calcular la resta $z_1 - z_2$.
$$(3 + 2i) - (-1 + 4i)$$
3. Calcular el producto $z_1 \cdot z_2$.
$$(3 + 2i)(-1 + 4i)$$
4. Calcular la división $\frac{z_1}{z_2}$.
$$\frac{3 + 2i}{-1 + 4i}$$

Parte II: Módulo y Conjugado

Para un número complejo $z = a + bi$, el conjugado es $\bar{z} = a - bi$ y el módulo es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5. Encuentre el conjugado y el módulo del número complejo $z_3 = 4 - 3i$.
$$\bar{z}_3 \quad \text{y} \quad |z_3|$$
6. Demuestre la propiedad $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ usando z_3.
$$(4 - 3i)(4 + 3i)$$
7. Calcular el módulo del siguiente número complejo:
$$\left|\frac{1 + 5i}{2 - 3i}\right|$$

Parte III: Forma Polar y de Euler

Un número complejo $z = a + bi$ puede ser expresado en forma polar como $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ y en forma de Euler como $z = re^{i\theta}$, donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$.

8. Convierta el número complejo $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$ a su forma polar y a la forma de Euler.
9. Calcule la potencia $(1 + i\sqrt{3})^6$ utilizando el Teorema de De Moivre.

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

10. Exprese el número complejo $z_5 = 5e^{i\frac{\pi}{4}}$ en su forma rectangular $a + bi$.

Parte IV: Ecuaciones con Números Complejos

11. Encuentre todos los valores de z que satisfacen la siguiente ecuación:

$$z^2 = -8i$$

12. Resuelva la siguiente ecuación para z, donde z es un número complejo:

$$2z + (3 - i)\bar{z} = 5 + 2i$$

Recordatorio de Propiedades: Una matriz H es Hermítica si es igual a su propia transpuesta conjugada, es decir, $H = H^\dagger$, donde $H^\dagger = (\overline{H})^T$.

1. Los valores propios (eigenvalores) de una matriz Hermítica son siempre números reales.
2. Los vectores propios (eigenvectores) de una matriz Hermítica correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.

Instrucciones: Para cada una de las siguientes matrices, verifique que es Hermítica y luego encuentre sus valores y vectores propios. Compruebe las propiedades mencionadas.

1. Parte IV: Matrices 2x2

1. Considere la matriz de Pauli-X:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Verifique que σ_x es una matriz Hermítica.
b) Encuentre sus valores propios (λ_1, λ_2).
c) Encuentre los vectores propios normalizados $(|v_1\rangle, |v_2\rangle)$ correspondientes a cada valor propio.
d) Verifique que los vectores propios son ortogonales calculando su producto interno $\langle v_1|v_2\rangle$.

2. Dada la siguiente matriz H_1:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

a) Demuestre que H_1 es Hermítica.
b) Calcule sus valores propios y verifique que son reales.
c) Determine los vectores propios correspondientes.
d) Compruebe la ortogonalidad de los vectores propios.

3. Encuentre los valores y vectores propios de la matriz de Pauli-Y. Note que esta matriz contiene números imaginarios.

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

a) Verifique que σ_y es Hermítica.
b) Encuentre sus valores y vectores propios. Verifique que los valores propios son reales.

2. Parte V: Matrices 3x3

4. Considere la siguiente matriz H_2:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1+i \\ 0 & 3 & 0 \\ 1-i & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Verifique que H_2 es una matriz Hermítica.
b) Encuentre los tres valores propios de H_2. (Pista: uno de los valores propios puede ser evidente por la estructura de la matriz).
c) Calcule los vectores propios normalizados asociados a cada valor propio.
d) Verifique que los tres vectores propios son mutuamente ortogonales.

3. Parte VI: Demostración Teórica

5. Sea H una matriz Hermítica y sea $|v\rangle$ un vector propio de H con valor propio λ.

$$H|v\rangle = \lambda|v\rangle$$

Demuestre que el valor propio λ debe ser un número real. (Pista: comience calculando $\langle v|H|v\rangle$ y utilice la definición de la adjunta $H^\dagger$).

4. Parte VII: Producto Tensorial de Vectores (Estados Cuánticos)

1. Dados los estados de los qubits base:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcule los cuatro estados base de un sistema de dos qubits:

a) $|0\rangle \otimes |0\rangle$ (también escrito como $|00\rangle$)

b) $|0\rangle \otimes |1\rangle$ (también escrito como $|01\rangle$)

c) $|1\rangle \otimes |0\rangle$ (también escrito como $|10\rangle$)

d) $|1\rangle \otimes |1\rangle$ (también escrito como $|11\rangle$)

2. Dados los estados de superposición:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Calcule el estado del sistema compuesto $|+\rangle \otimes |-\rangle$.

3. Sea un sistema de dos qubits en el estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$.

a) Escriba el vector de estado explícito para $|\Psi\rangle$.

b) Demuestre que este estado es separable, es decir, que puede escribirse como el producto tensorial de dos estados de un solo qubit, $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$. Encuentre $|\psi_A\rangle$ y $|\psi_B\rangle$.

5. Parte VIII: Producto Tensorial de Matrices (Operadores Cuánticos)

4. Dadas las matrices de Pauli X y Z:

$$X = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Calcule las siguientes matrices de 4x4 que representan operadores en un sistema de dos qubits.

a) $X \otimes Z$ (El operador X actúa sobre el primer qubit y Z sobre el segundo).

b) $Z \otimes X$ (El operador Z actúa sobre el primer qubit y X sobre el segundo).

c) ¿Es el producto tensorial una operación conmutativa? Justifique su respuesta basándose en los resultados de a) y b).

5. Dada la matriz Hadamard H y la matriz Identidad I:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Calcule la matriz $H \otimes I$. Este operador es fundamental para crear entrelazamiento en algoritmos cuánticos.

6. Parte IX: Aplicación de Operadores Tensoriales a Estados

6. Usando la matriz $H \otimes I$ calculada en el ejercicio 5 y el estado inicial $|00\rangle$ del ejercicio 1, calcule el estado resultante:

$$(H \otimes I)|00\rangle$$

   Verifique que su resultado es el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$.

7. Considere el operador CNOT, cuya representación matricial es:

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Y el estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$ del ejercicio anterior. Calcule el estado final después de aplicar el operador CNOT.

$$|\Psi_{final}\rangle = CNOT|\Psi\rangle$$

   Escriba el resultado tanto en forma vectorial como en notación de Dirac. ¿Qué famoso estado entrelazado ha producido?

7. Parte X: Aplicación de Compuertas Simples

1. **Creación de Superposición en un Qubit**

   Considere un circuito donde se aplica una compuerta Hadamard (H) al qubit q_0 y el qubit q_1 no se modifica (lo que equivale a aplicar la compuerta Identidad, I).

   a) Escriba la operación matricial que representa este circuito.

   b) Calcule el estado final $|\psi_1\rangle$ aplicando la operación al estado inicial $|00\rangle$.

   c) ¿Cuáles son las probabilidades de medir $|00\rangle$ y $|10\rangle$? ¿Por qué es imposible medir $|01\rangle$ o $|11\rangle$?

   d) ¿Es el estado final $|\psi_1\rangle$ un estado separable? Si es así, expréselo como el producto tensorial de dos estados de un solo qubit.

2. **Superposición en Ambos Qubits**

   Ahora, considere un circuito donde se aplica una compuerta Hadamard (H) a *ambos* qubits, q_0 y q_1.

   a) Escriba la operación matricial $(H \otimes H)$ que representa a todo el circuito.

   b) Calcule el estado final $|\psi_2\rangle$ aplicando el operador al estado inicial $|00\rangle$. Expanda el resultado para mostrar la superposición de los cuatro estados base.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de medir cualquiera de los cuatro estados base ($|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$)?

8. Parte XI: Secuencia de Operaciones y Estados de Entrada

3. **Aplicación de Compuertas X y Z**

   Dado el estado inicial $|\psi_{in}\rangle = |+0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$. Se le aplica el siguiente circuito: una compuerta Pauli-X al qubit q_0 y una compuerta Pauli-Z al qubit q_1.

   a) ¿Cuál es la matriz que representa la operación del circuito?

   b) Calcule el estado de salida $|\psi_3\rangle$.

4. **Análisis de un Circuito en Secuencia**

   Considere el siguiente circuito de dos pasos, partiendo del estado $|00\rangle$:

   - **Paso 1:** Se aplica una compuerta X al qubit q_1 y una compuerta H al qubit q_0.
   - **Paso 2:** Inmediatamente después, se aplica una compuerta H al qubit q_1 y una compuerta Z al qubit q_0.

   a) Escriba el estado del sistema después del Paso 1.

   b) Calcule el estado final $|\psi_4\rangle$ después del Paso 2.

   c) Calcule la matriz unitaria total U_{total} del circuito, recordando que $U_{total} = U_{paso2} \cdot U_{paso1}$.

   d) Verifique que $U_{total}|00\rangle$ produce el mismo estado $|\psi_4\rangle$ que calculó en el apartado b).

9. Parte XII: Rotaciones y Fases

5. **Uso de la Compuerta S (Fase)**

   La compuerta S o de Fase es $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, la cual no afecta a $|0\rangle$ pero aplica una fase de i a $|1\rangle$.

   Considere un circuito que parte del estado de superposición $|\psi_{in}\rangle = |++\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$. Se aplica la compuerta S al qubit q_1 y la compuerta Identidad al qubit q_0.

   a) Escriba la matriz del operador $S \otimes I$.

   b) Calcule el estado final $|\psi_5\rangle$.

   c) ¿Han cambiado las probabilidades de medición de los cuatro estados base en comparación con el estado inicial? ¿Por qué sí o por qué no?