Taller ejercicios - Arquitectura Secciones 5.3 y 5.4

Sección 5.3 Compuertas Reversibles

5.3.1 La matriz del controlled-NOT (CNOT) es:

$$CNOT = \begin{array}{c|cccc} & |00\rangle & |01\rangle & |10\rangle & |11\rangle \\ \hline |00\rangle & 1 & 0 & 0 & 0 \\ |01\rangle & 0 & 1 & 0 & 0 \\ |10\rangle & 0 & 0 & 0 & 1 \\ |11\rangle & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Ahora se multiplica CNOT x CNOT:

$$CNOT^2 = CNOT \times CNOT$$

$$CNOT^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

Por tanto, $CNOT \times CNOT = I$, así, CNOT es su propia inversa

5.3.2 La compuerta Toffoli realiza la operación $|x, y, z\rangle \to |x, y, z \oplus (x \wedge y)\rangle$

Demostración: Si se aplica Toffoli dos veces: $|x, y, z\rangle$

$$\to |x, y, z \oplus (x \wedge y)\rangle$$

$$\to |x, y, (z \oplus (x \wedge y)) \oplus (x \wedge y)\rangle$$

Simplificando el tercer bit:

$$(z \oplus (x \wedge y)) \oplus (x \wedge y) = z \oplus ((x \wedge y) \oplus (x \wedge y))$$
$$= z \oplus 0 \quad (\text{porque } a \oplus a = 0)$$
$$= z$$

Por tanto: $Toffoli(Toffoli(|x, y, z\rangle)) = |x, y, z\rangle$

La matriz de Toffoli es 8x8:

	$\|000\rangle$	$\|001\rangle$	$\|010\rangle$	$\|011\rangle$	$\|100\rangle$	$\|101\rangle$	$\|110\rangle$	$\|111\rangle$
$\|000\rangle$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\|001\rangle$	0	1	0	0	0	0	0	0
$\|010\rangle$	0	0	1	0	0	0	0	0
$\|011\rangle$	0	0	0	1	0	0	0	0
$\|100\rangle$	0	0	0	0	1	0	0	0
$\|101\rangle$	0	0	0	0	0	1	0	0
$\|110\rangle$	0	0	0	0	0	0	0	1
$\|111\rangle$	0	0	0	0	0	0	1	0

Al multiplicar esta matriz por sí misma, obtenemos $\mathbb{I}_8$ porque cada fila tiene exactamente un 1, y ese 1 está en una posición diferente en cada fila. Al multiplicar, el producto es la identidad.

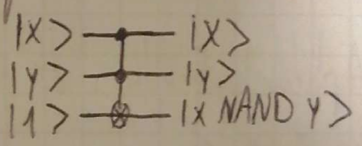
Por tanto, $\text{Toffoli}^2 = \mathbb{I}$, la compuerta Toffoli es su propia inversa.

5.3.3 Parte A: NAND con una Toffoli

La compuerta NAND produce: $x \text{ NAND } y = \neg(x \wedge y)$

Se sabe que Toffoli hace: $|x, y, z\rangle \to |x, y, z \oplus (x \wedge y)\rangle$

Si se configura $z=1$: $|x, y, 1\rangle \to |x, y, 1 \oplus (x \wedge y)\rangle = |x, y, \neg(x, y)\rangle$

Circuito


Verificación con tabla de verdad

x	y	$x \wedge y$	$1 \oplus (x \wedge y)$	x NAND y
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Parte B: OR con dos Toffolis

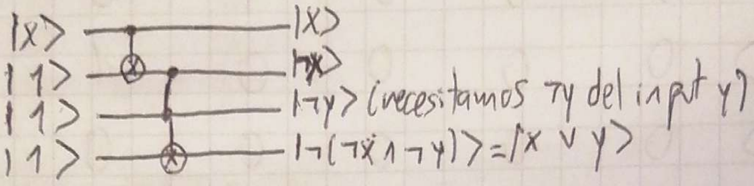
La compuerta OR produce: $x \vee y$

Se usa Ley de Morgan: $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$

Paso 1: Usar Toffoli para obtener $\neg x$ y $\neg y$

Paso 2: Usar Toffoli para obtener $\neg(\neg x \wedge \neg y)$

Circuito



Más precisamente: Toffoli 1: $|1,1,x\rangle \rightarrow |1,1,\neg x\rangle$

Toffoli 2: $|1,1,y\rangle \rightarrow |1,1,\neg y\rangle$

Toffoli 3: $|\neg x, \neg y, 1\rangle \rightarrow |\neg x, \neg y, \neg(\neg x \wedge \neg y)\rangle$
$= |\neg x, \neg y, x \vee y\rangle$

Verificación

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x \wedge \neg y$	$\neg(\neg x \wedge \neg y)$	$x \vee y$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1

5.3.4 La compuerta Fredkin realiza
- Si $x=0$: $|0,y,z\rangle \rightarrow |0,y,z\rangle$
- Si $x=1$: $|1,y,z\rangle \rightarrow |1,z,y\rangle$ (intercambia y y z)

Demostración Aplicando Fredkin dos veces:

Caso 1: $x=0$

$|0,y,z\rangle \rightarrow |0,y,z\rangle \rightarrow |0,y,z\rangle$ Se mantiene igual

Caso 2: $x=1$

$|1,y,z\rangle \rightarrow |1,z,y\rangle \rightarrow |1,y,z\rangle$ Se intercambia y y z, luego se vuelven a intercambiar.

En ambos casos, aplicar Fredkin dos veces devuelve el estado original

Verificación matricial: $\text{Fredkin}^2 = \text{Fredkin} \times \text{Fredkin}$

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & |000\rangle & |001\rangle & |010\rangle & |011\rangle & |100\rangle & |101\rangle & |110\rangle & |111\rangle \\
\hline
|000\rangle & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
|001\rangle & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
|010\rangle & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
|011\rangle & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
|100\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
|101\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
|110\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
|111\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

$= \mathbb{I}_8$

Así, $\text{Fredkin}^2 = \mathbb{I}$, la compuerta Fredkin es su propia inversa.

Sección 5.4 Compuertas cuánticas

5.4.1 Una matriz U es unitaria si $U^\dagger U = \mathbb{I}$, donde $U^\dagger$ es la traspuesta conjugada.

Matriz X: $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $X^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ X es real, $X^\dagger = X^T$

$$X^\dagger X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}$$

Matriz Y: $Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ $Y^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ Conjugar $i \Leftrightarrow -i$

$$Y^\dagger Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}$$

Matriz Z: $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad Z^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$Z^{\dagger} Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}$$

Matriz S: $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ $\quad S^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ Conjugar $i \to -i$

$$S^{\dagger} S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}$$

Matriz T: $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$ $\quad T^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{bmatrix}$ Conjugar $i \to -i$

$$T^{\dagger} T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I} \qquad e^{-i\pi/4} \cdot e^{i\pi/4} = e^{0} = 1$$

Todas las matrices son unitarias

5.4.2 Matriz X (NOT): $X\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}$ Intercambia las amplitudes de $|0\rangle$ y $|1\rangle$

Matriz Y: $Y\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ic_1 \\ ic_0 \end{bmatrix}$ Intercambia las amplitudes con un factor de fase $\pm i$

Matriz Z: $Z\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ -c_1 \end{bmatrix}$ Mantiene $|0\rangle$ igual y cambia el signo de la amplitud $|1\rangle$

Matriz S: $S\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ ic_1 \end{bmatrix}$ Mantiene $|0\rangle$ igual y multiplica amplitud de $|1\rangle$ por i (rotación fase de 90°)

Matriz T: $T\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ e^{i\pi/4} \cdot c_1 \end{bmatrix}$ Mantiene $|0\rangle$ igual y multiplica la amplitud de $|1\rangle$ por $e^{i\pi/4}$ (rotación fase 45°)

5.4.3

i) $X^2 = Y^2 = Z^2 = \mathbb{I}$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) $H = (1/\sqrt{2})(X+Z)$

$$X+Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(1/\sqrt{2})(X+Z) = (1/\sqrt{2})\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = H$$

iii) $X = HZH$

$$HZ = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$HZH = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = X$$

iv) $Z = HXH$

$$HX = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$HXH = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = Z$$

v) $-iY = HYH$

$$HY = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$HYH = \begin{bmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = -iY$$

vi) $S = T^2$

$$T^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = S$$

vii) $-iY = XYX$

$$YX = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$XYX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = -iY$$

5.4.4 Sea $\theta' = \theta$ donde $\pi/2 < \theta' < \pi$

Se puede escribir: $\cos(\theta') = \cos(\pi - (\pi - \theta')) = -\cos(\pi - \theta')$
$\operatorname{sen}(\theta') = \operatorname{sen}(\pi - (\pi - \theta')) = \operatorname{sen}(\pi - \theta')$

Se define $\theta'' = \pi - \theta'$, entonces $0 < \theta'' < \pi/2$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos(\theta')|0\rangle + e^{i\varphi}\operatorname{sen}(\theta')|1\rangle \\ &= -\cos(\theta'')|0\rangle + e^{i\varphi}\operatorname{sen}(\theta'')|1\rangle \\ &= e^{i\pi}\cos(\theta'')|0\rangle + e^{i\varphi}\operatorname{sen}(\theta'')|1\rangle \\ &= e^{i\pi}[\cos(\theta'')|0\rangle + e^{i(\varphi-\pi)}\operatorname{sen}(\theta'')|1\rangle] \end{aligned}$$

Como multiplicar por $e^{i\pi} = -1$ no cambia el estado físico:

$|\psi\rangle \sim \cos(\theta'')|0\rangle + e^{i(\varphi-\pi)}\operatorname{sen}(\theta'')|1\rangle$

Donde $\theta'' = \pi - \theta'$ está en el primer cuadrante y $\varphi' = \varphi - \pi$ es la nueva fase.

Todo qubit con $\theta > \pi/2$ puede representarse con $\theta \in [0, \pi/2]$ ajustando la fase.

5.4.5 Estado inicial $(\theta = \pi/4)$:

$$|\psi_1\rangle = \cos(\pi/4)|0\rangle + e^{i\varphi}\,\mathrm{sen}(\pi/4)|1\rangle$$
$$= (1/\sqrt{2})|0\rangle + (e^{i\varphi}/\sqrt{2})|1\rangle$$

Estado modificado $(\theta = \pi/3)$:

$$|\psi_2\rangle = \cos(\pi/3)|0\rangle + e^{i\varphi}\,\mathrm{sen}(\pi/3)|1\rangle$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)|0\rangle + \left(e^{i\varphi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)|1\rangle$$

Probabilidad de colapsar al polo sur $(|1\rangle)$:

Probabilidad es $|c_1|^2$:

$$P(|1\rangle) = |\sqrt{3}/2|^2 = \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$$

Probabilidad de colapsar al polo norte $(|0\rangle)$:

$$P(|0\rangle) = |1/2|^2 = 1/4 = 0.25 = 25\%$$

Visualización en la esfera de Bloch:

- Con $\theta = \pi/3$ la latitud es $2\theta = 2\pi/3 \approx 120°$, lo que coloca al qubit más cerca del polo sur que del ecuador

Conclusión: Al cambiar de θ de $\pi/4$ a $\pi/3$, el qubit se mueve más cerca del polo sur, aumentando la probabilidad de colapsar a $|1\rangle$ de 50% a 75%

5.4.6 Qubit original: $|\psi\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + e^{i\psi}\operatorname{sen}(\theta)|1\rangle$

Qubit ortogonal: $|\psi_-\rangle = \operatorname{sen}(\theta)|0\rangle - e^{i\psi}\cos(\theta)|1\rangle$

Se reescribe $|\psi_\perp\rangle$ en forma canónica. Se define $\theta' = \pi/2 - \theta$:

$$\cos(\theta') = \cos(\pi/2 - \theta) = \operatorname{sen}(\theta)$$
$$\operatorname{sen}(\theta') = \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$$

Así, $|\psi_\perp\rangle = \cos(\theta')|0\rangle - e^{i\psi}\operatorname{sen}(\theta')|1\rangle$
$= \cos(\theta')|0\rangle + e^{i(\psi+\pi)}\operatorname{sen}(\theta')|1\rangle$

En la esfera de Bloch:

- Latitud de $|\psi\rangle$: 2θ
- Latitud de $|\psi_\perp\rangle$: $2\theta' = 2(\pi/2 - \theta) = \pi - 2\theta$

- Longitud de $|\psi\rangle$: ψ
- Longitud de $|\psi_\perp\rangle$: $\psi + \pi$

Así, los qubits ortogonales están en antípodas de la esfera de Bloch.

5.4.7 Para $U = [a\ b;\ c\ d]$, se tiene: $CU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}$

Caso 1: Qubit de control $= |0\rangle$

Estado de entrada: $|0\rangle \otimes |\psi\rangle = |0, \psi\rangle$

Si $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, entonces: $|0, \psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle$
$= [\alpha, \beta, 0, 0]^T$

Aplicando CU: $CU\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = |0\rangle \otimes |\psi\rangle$

La identidad se aplica, $|\psi\rangle$ no cambia

Caso 2: Qubit de control $= |1\rangle$

Estado de entrada: $|1\rangle \otimes |\psi\rangle = |1,\psi\rangle$

$|1,\psi\rangle = \alpha|10\rangle + \beta|11\rangle = [0,0,\alpha,\beta]^T$

Aplicando CU: $CU \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a\alpha + b\beta \\ c\alpha + d\beta \end{bmatrix} = |1\rangle \otimes U|\psi\rangle$

U se aplica a $|\psi\rangle$

CU funciona correctamente como compuerta controlada

5.4.8 Si U es unitaria, entonces $U^\dagger U = \mathbb{I}_2$

Para CU de 4x4: $CU = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix}$ $(CU)^\dagger = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & U^\dagger \end{bmatrix}$

Se multiplica: $(CU)^\dagger (CU) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & U^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_4$

Si U es unitaria, CU es unitaria

5.4.9 CNOT tiene la matriz: $CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

C(CNOT) es una compuerta de 3 qubits controlada por el primer qubit:

$C(CNOT) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_4 & 0 \\ 0 & CNOT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Eso es la matriz Toffoli: Cuando el primer qubit es 0: $\mathbb{I}_4$ (no cambia nada)
Cuando el primer qubit es 1: CNOT actúa sobre los dos últimos qubits

Toffoli $= C(CNOT)$

5.4.10 La compuerta Deutsch $D(\theta)$ aplica $R(\theta)$ al tercer qubit solo si ambos qubits de control son $|1\rangle$.

Para $\theta = \pi/2$:

$$R(\pi/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$D(\pi/2)$ actúa como:
- Si $x=1$ y $y=1$: aplica $R(\pi/2)$ a z
- De lo contrario: no cambia z

Para $|11z\rangle$:

$R(\pi/2)|z\rangle$:
- Si $z=0$: permanece $|0\rangle$
- Si $z=1$: se convierte en $i|1\rangle$

En Toffoli: $|110\rangle \to |111\rangle$
$|111\rangle \to |110\rangle$

Toffoli realiza $z \oplus (x \wedge y)$, mientras que $D(\pi/2)$ aplicaría una rotación pase

Toffoli y $D(\pi/2)$ son diferentes en naturaleza, aunque ambas son compuertas de 3 qubits controladas

5.4.11 Comprobación de fanout con Toffoli: $|1,y,0\rangle \to |1,y,y\rangle$ Fanout clásico

Prueba con superposición

- Entrada: $|(|0\rangle+|1\rangle)/\sqrt{2}, 1, 0\rangle$
- Expandiendo: $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \otimes |1,0\rangle = (|0,1,0\rangle + |1,1,0\rangle)/\sqrt{2}$
- Como vector: $[0, 0, 1/\sqrt{2}, 0, 0, 0, 1/\sqrt{2}, 0]^T$
- Aplicando Toffoli: Toffoli $\times$ $[0,0,1/\sqrt{2},0,0,0,1/\sqrt{2},0]^T$
$= [0,0,1/\sqrt{2},0,0,0,0,1/\sqrt{2}]^T$
$= (|0,1,0\rangle + |1,1,1\rangle)/\sqrt{2}$
- Estado resultante: $(|0\rangle|1,0\rangle + |1\rangle|1,1\rangle)/\sqrt{2}$
- Esto NO es: $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \otimes (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$
$= (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)/2$