

Introducción a Espacios Vectoriales Complejos

Luis Daniel Benavides N, Ph.D.

2-02-2024

Agenda

- Abstracciones, Pensamiento y Realidad
- Teorías y conjeturas
- Espacios Vectoriales

Abstracciones, Pensamiento y Realidad

Abstracciones

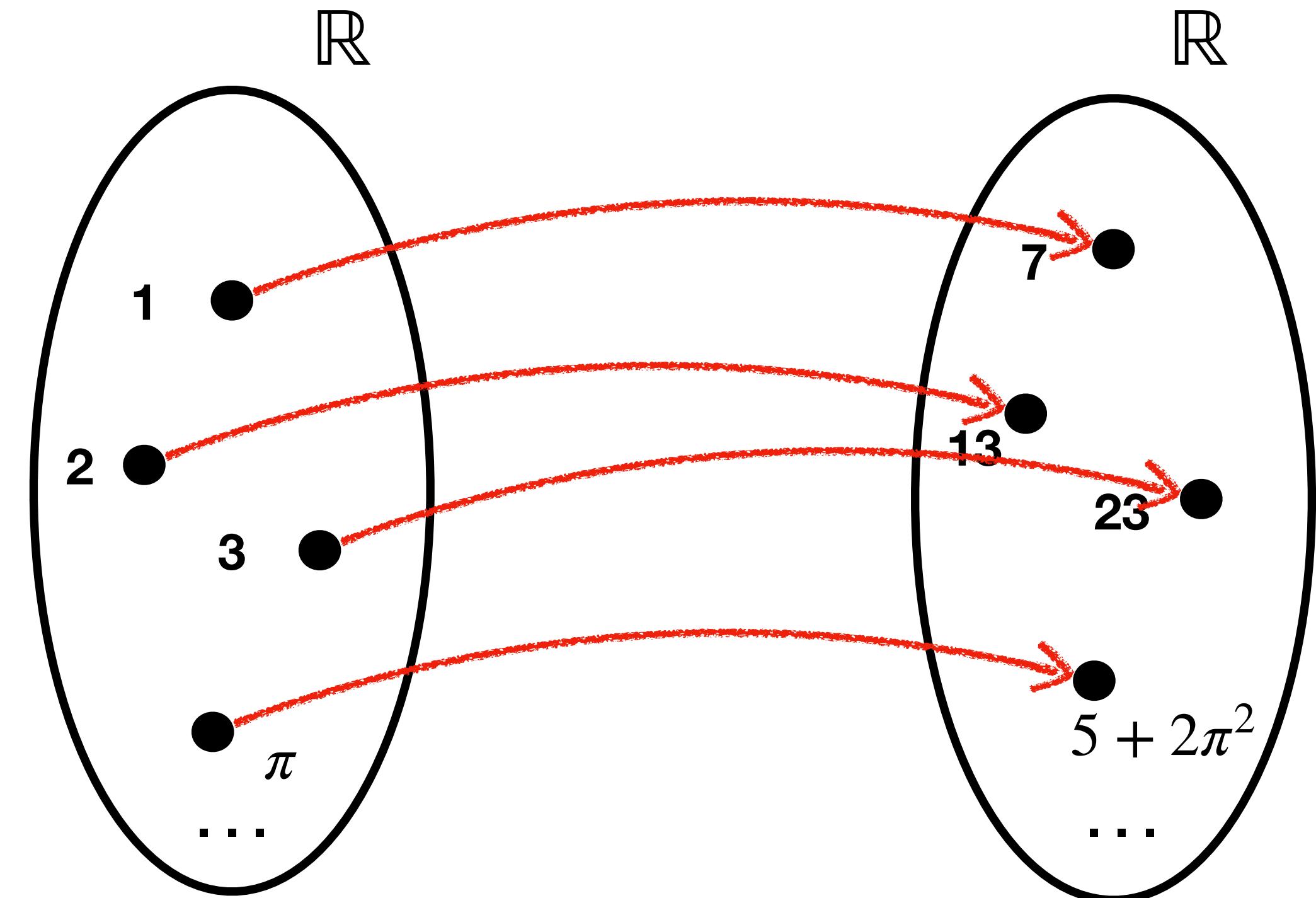
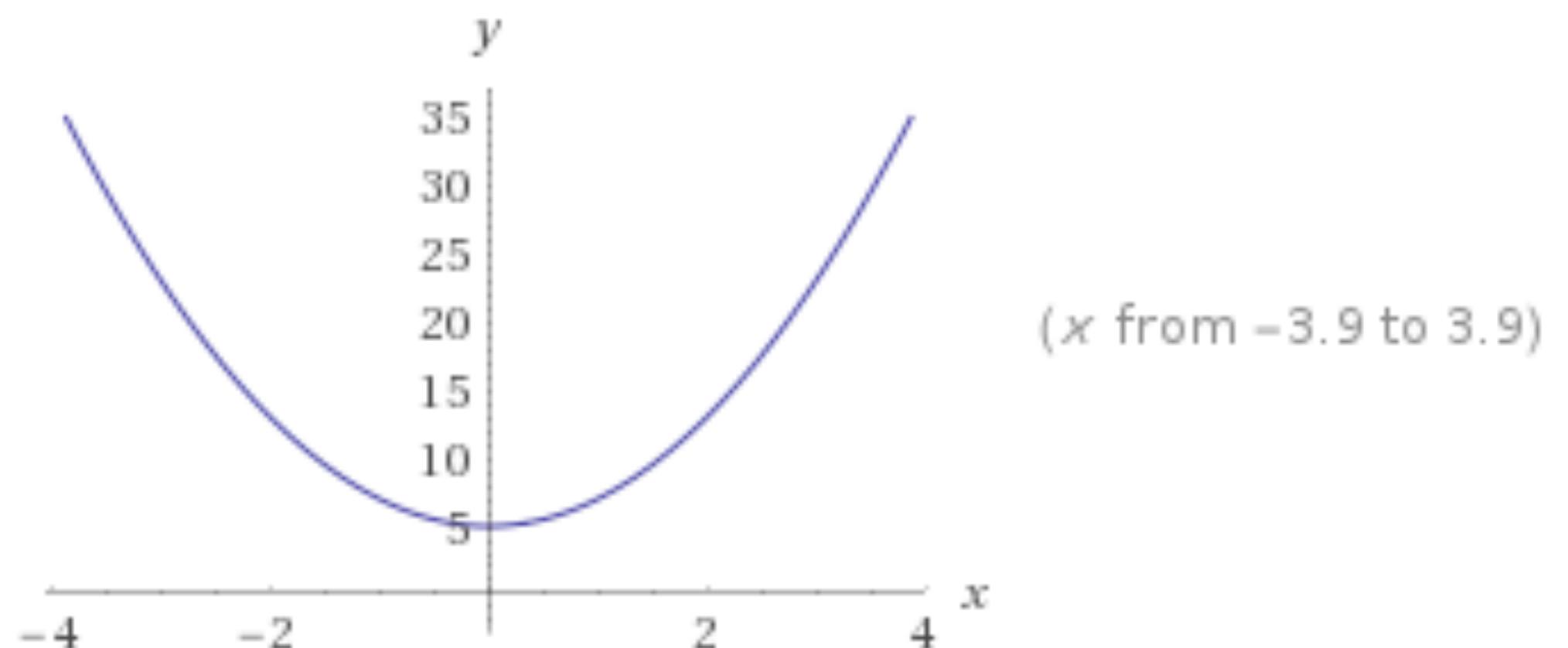
- Ideas
- Conceptos
- Pensamiento
- Inteligencia
- Conocimiento
- Matemáticas

Números

- Naturales
 - 0, 1, 2, 3, 4, 5 ,6 . . .
- Enteros
 - . . . , -3, -2 , -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ,6 . . .
- Racionales
 - $1/2, 1/7, 8/9, 0, 1/45, -4/7 \dots$
- Irracionales
 - $\pi, \sqrt{2}, e$
- Reales
 - -2.6789, 5.789, 10.67894, . . .
- Imaginarios
 - $-3i, 1/4i, 89i, 78.9i \dots$
- Complejos
 - $7 - 3i, 89.4 - 5.67i, 0 + 89i$

Funciones

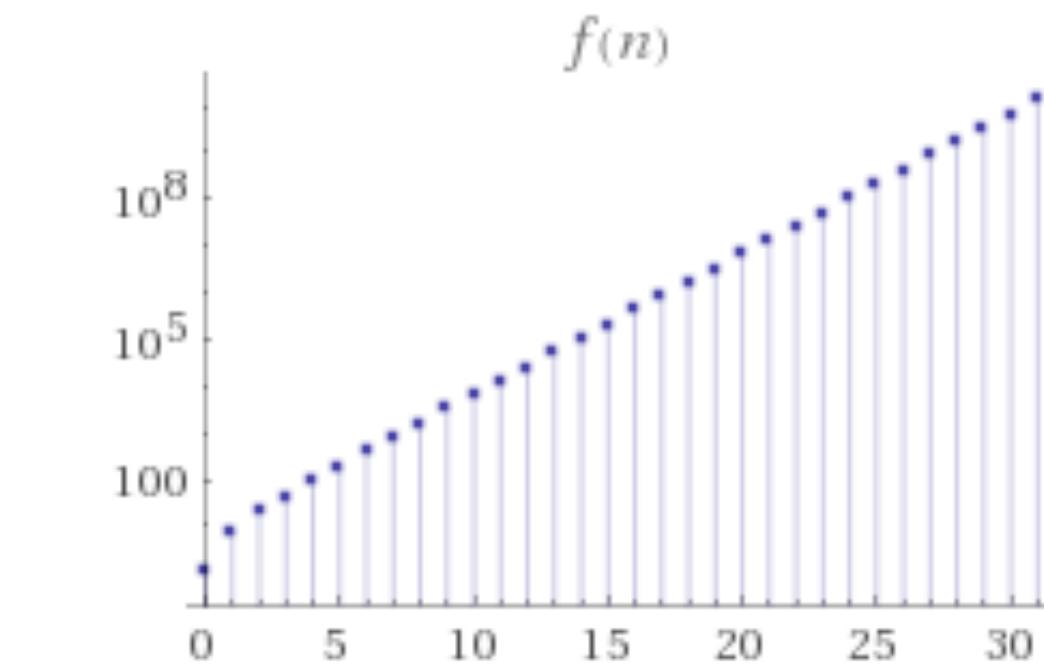
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 5 + 2x^2$$



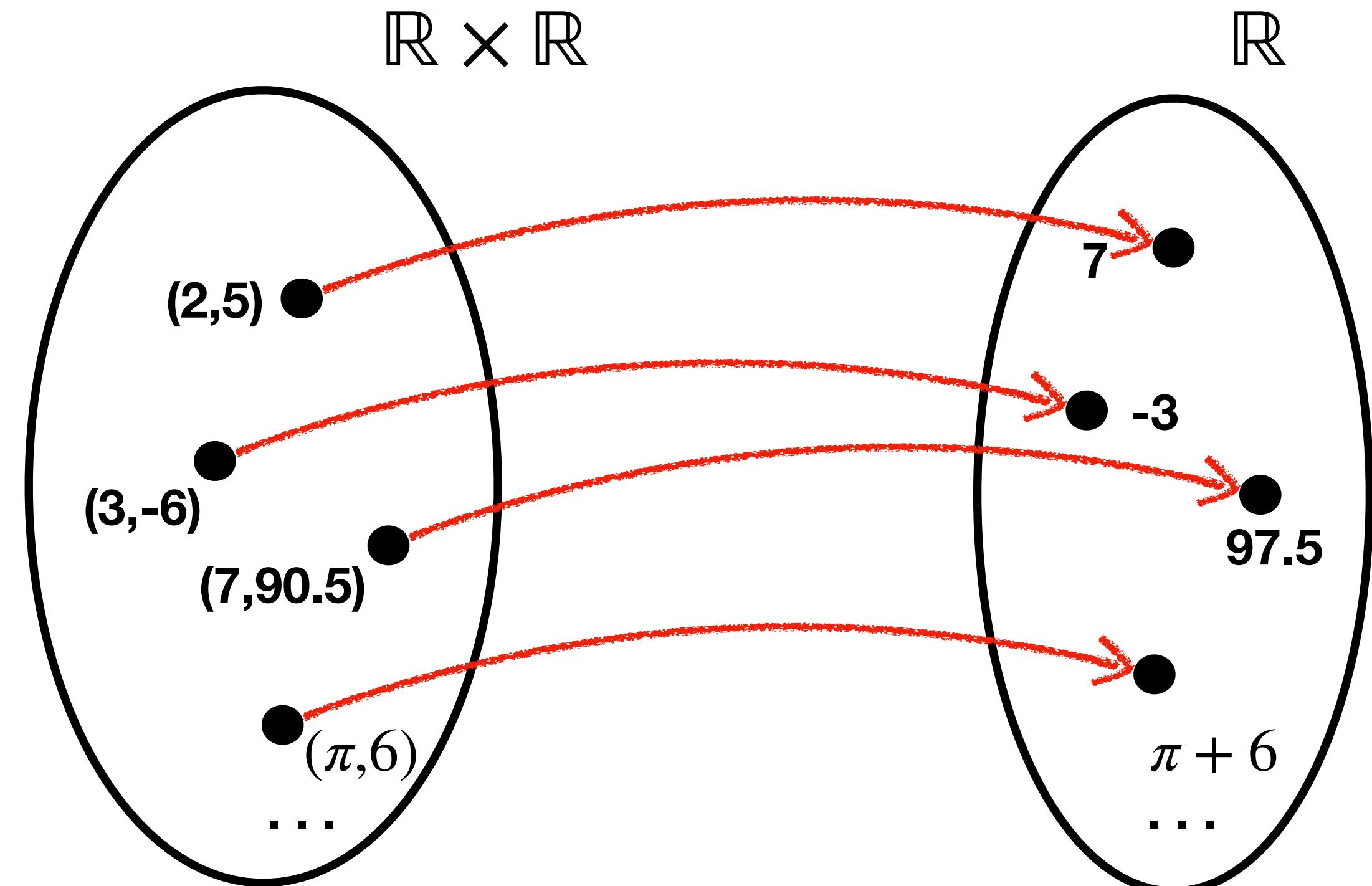
Funciones

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : f(n) = 5 + 2f(n - 1), f(0) = 1$$

$$\begin{aligned}f(0) &= 1 \\f(1) &= 7 \\f(2) &= 19 \\&\dots\end{aligned}$$

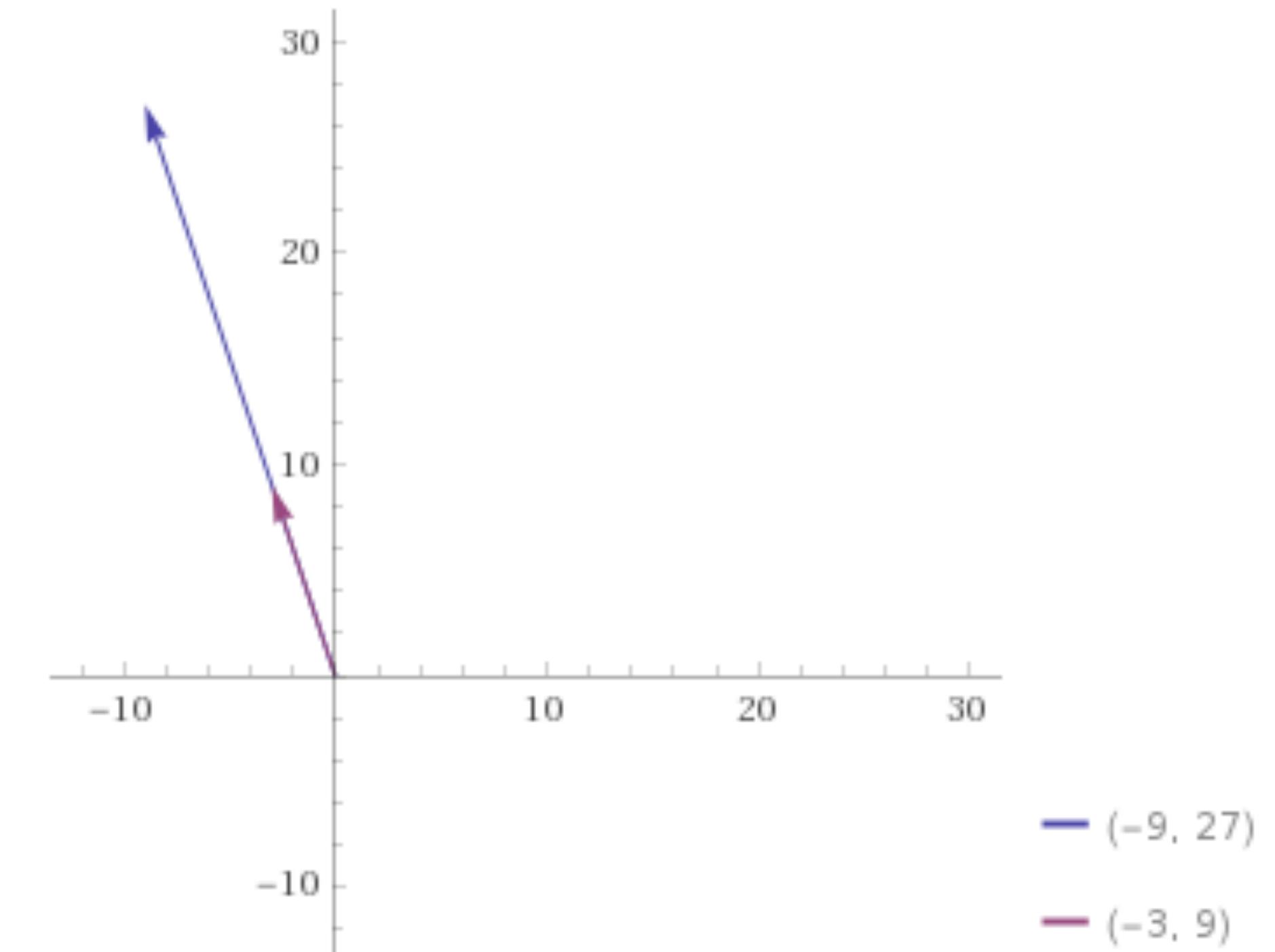
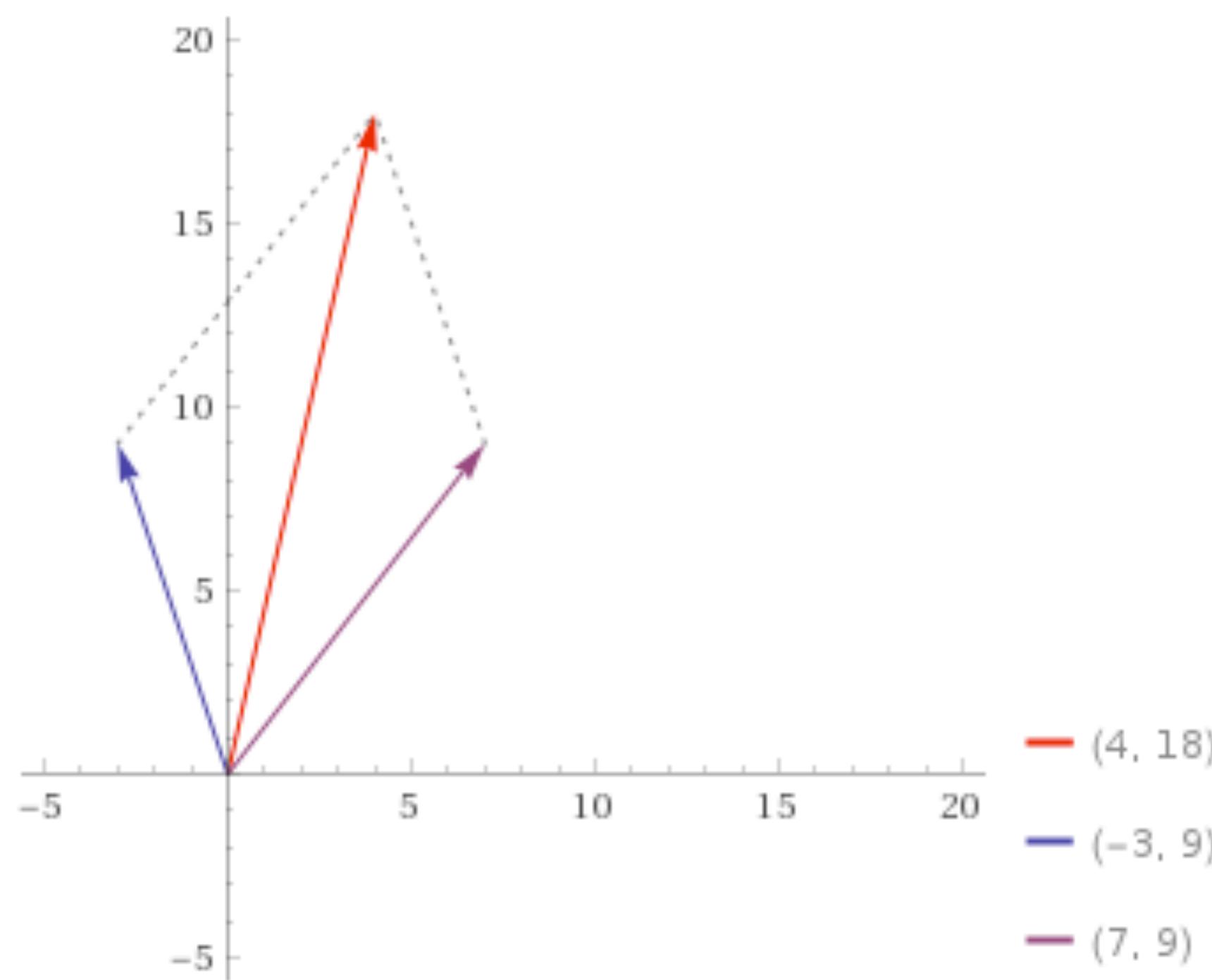


$$suma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : suma(x, y) = x + y$$

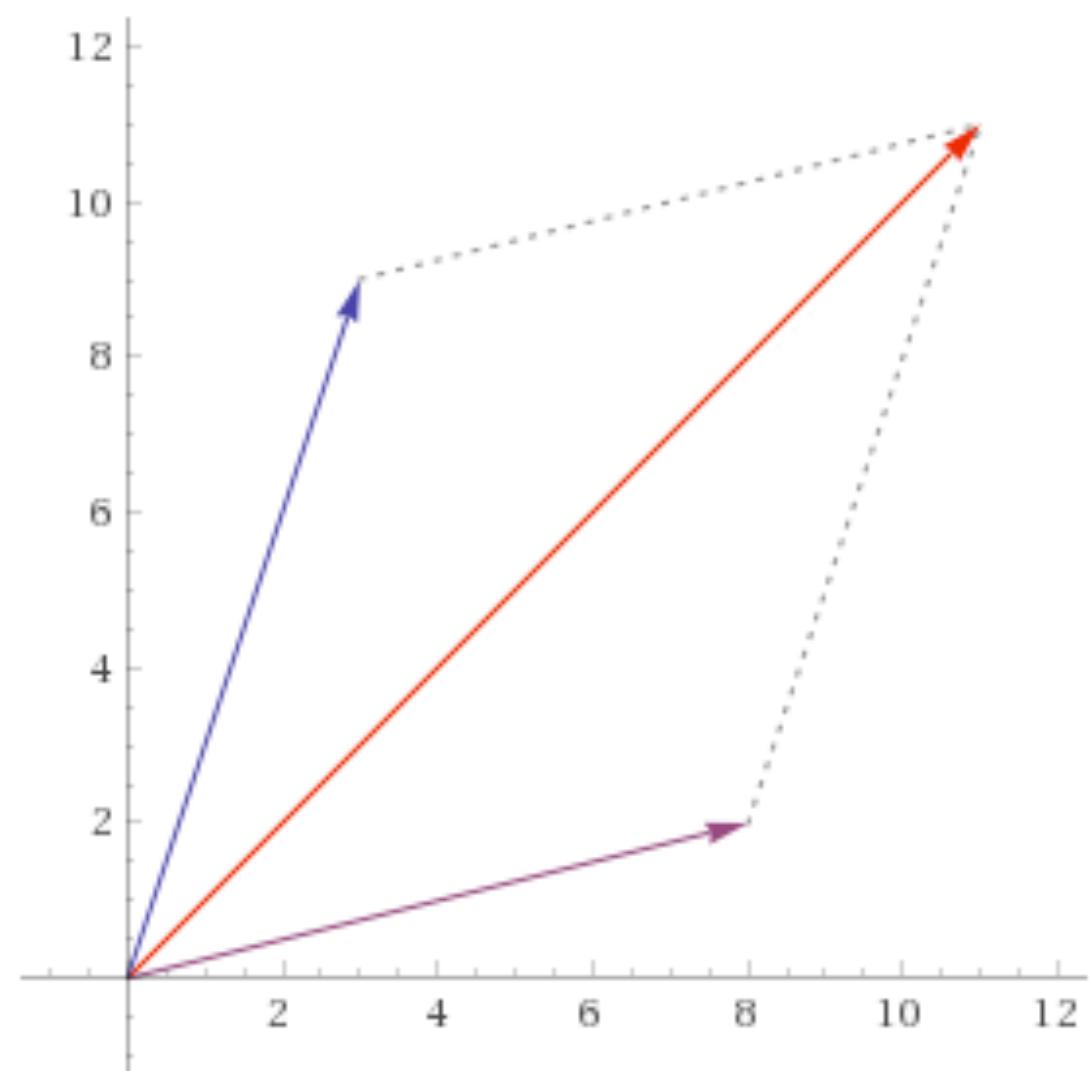


Vectores

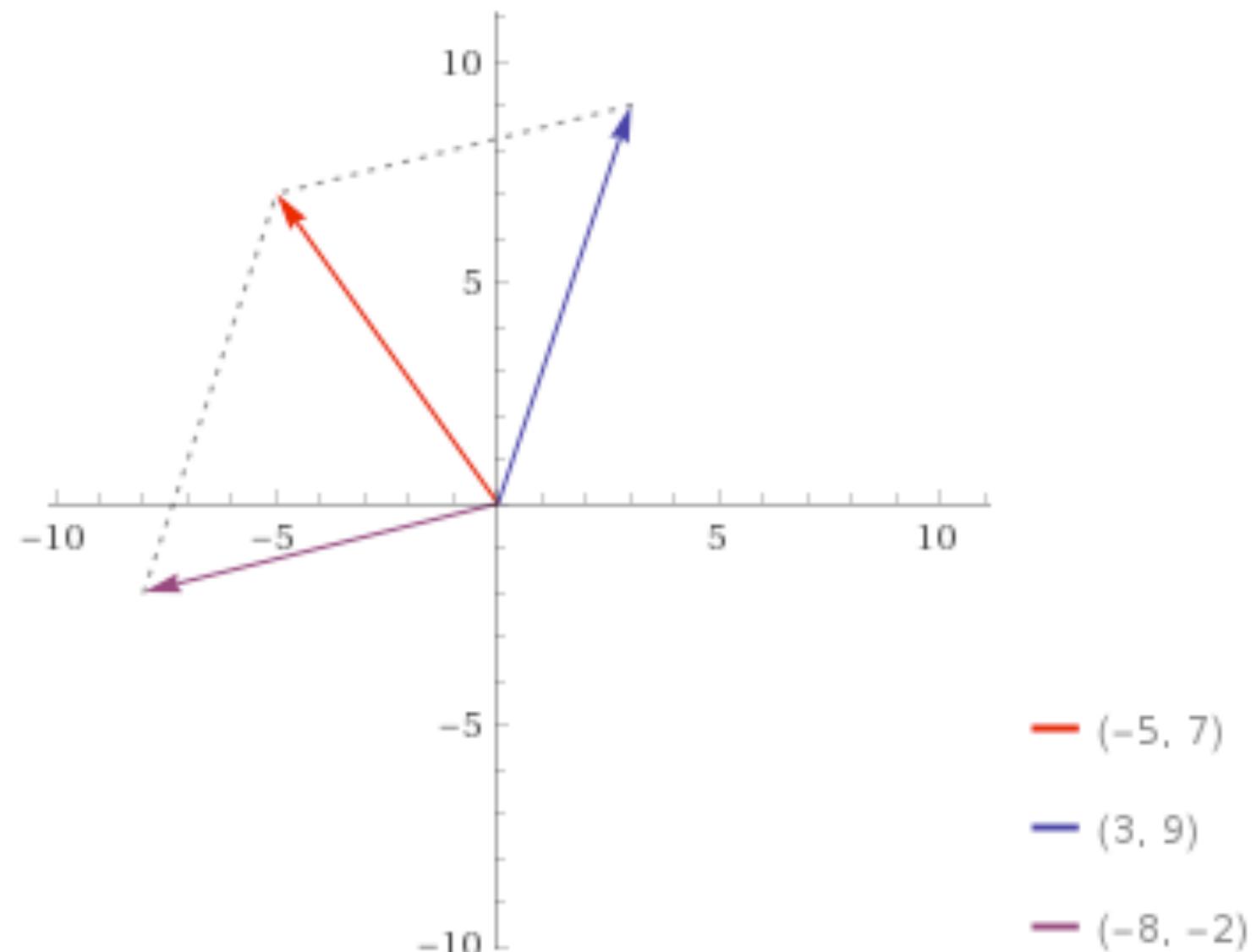
- **Vectores:** objetos con magnitud y dirección



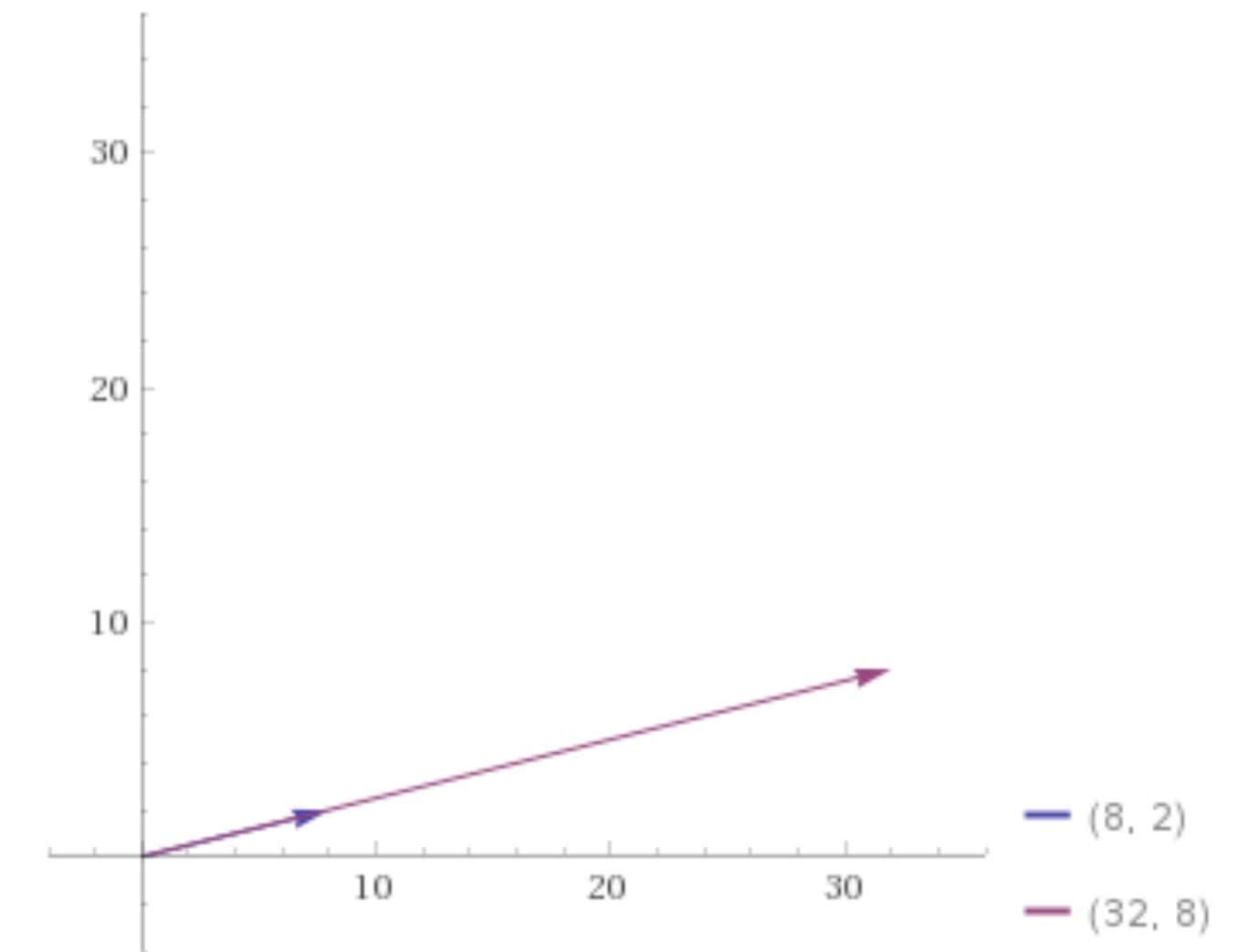
Operaciones



Suma

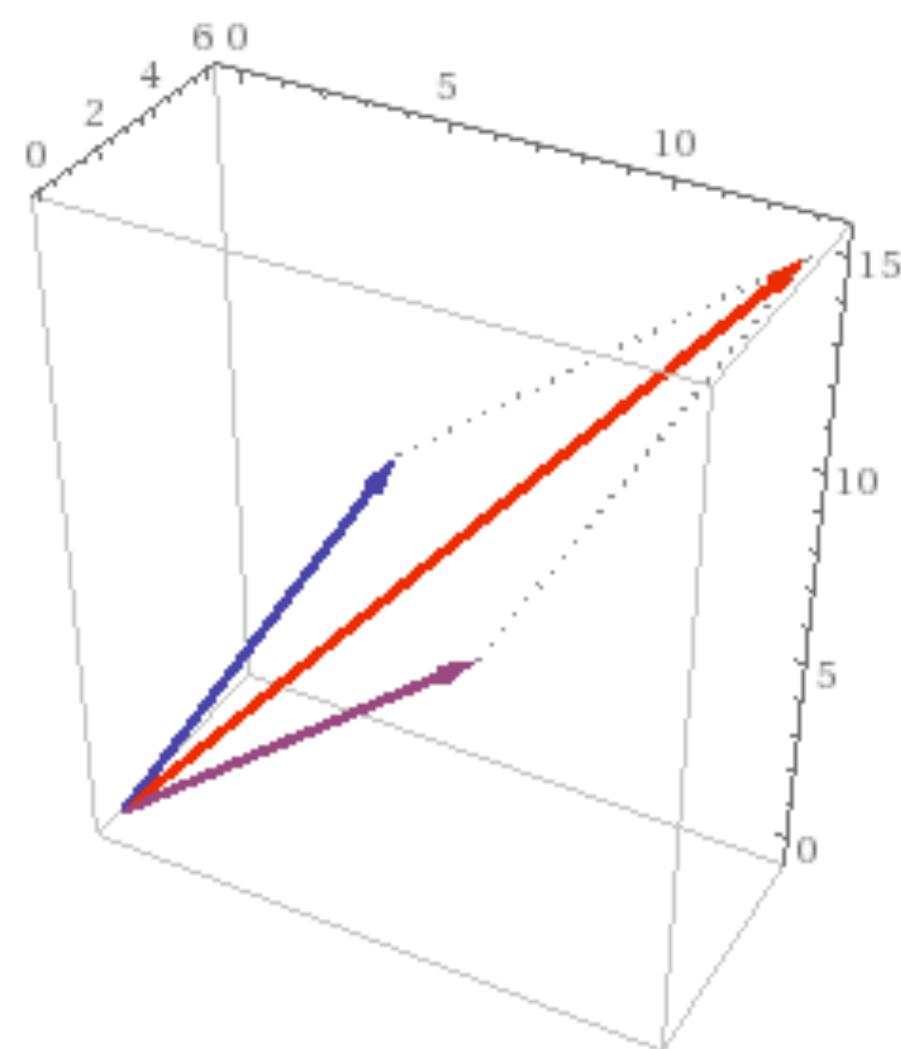


Resta

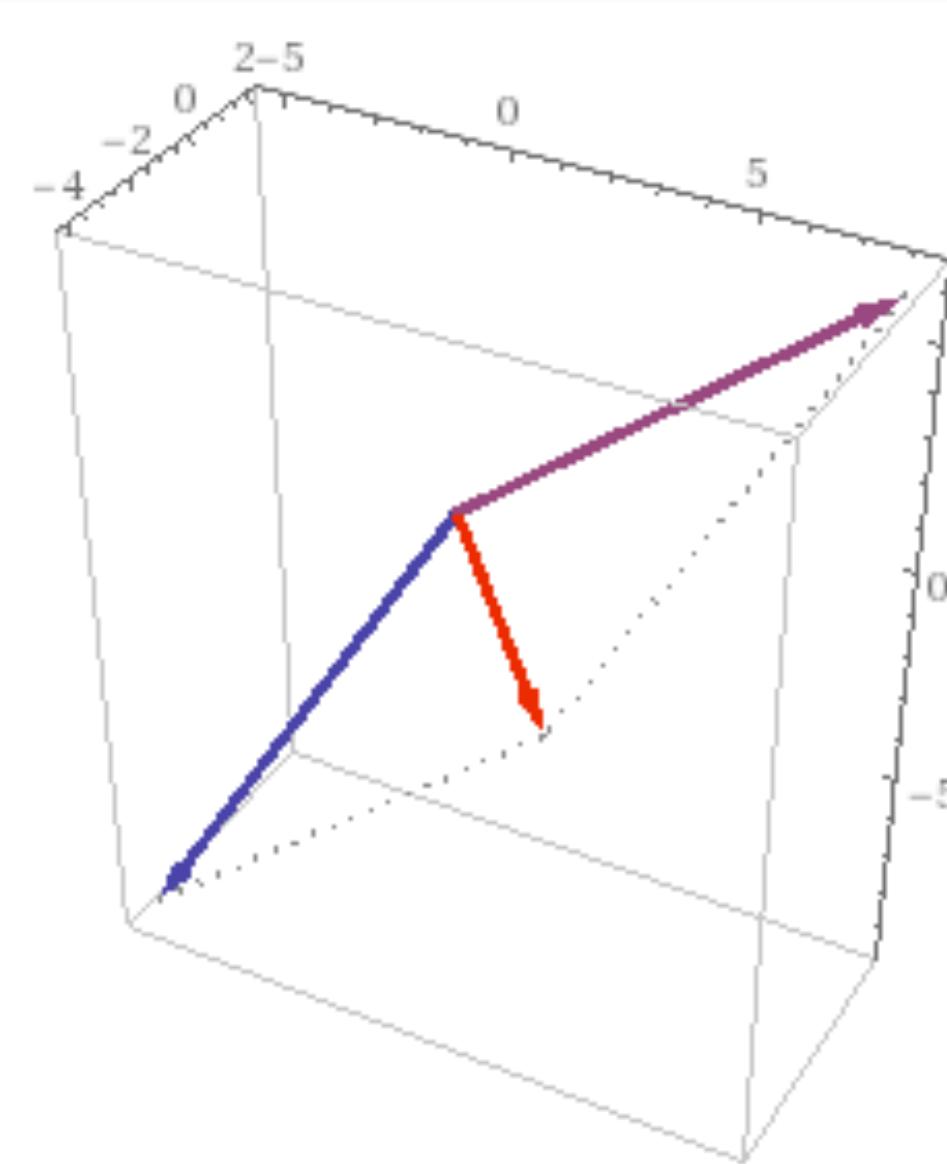


Mult. por escalar (*4)

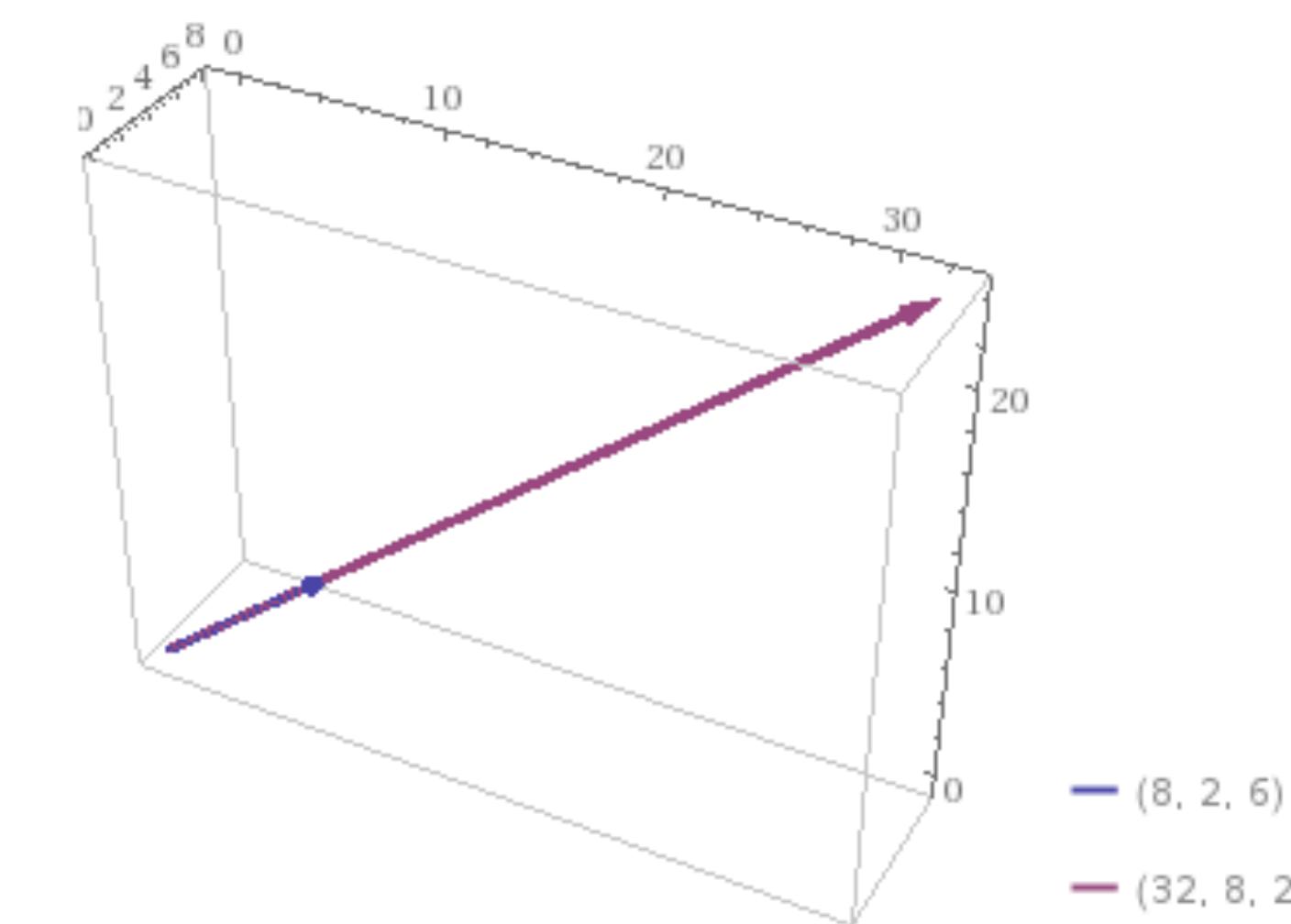
Operaciones en \mathbb{R}^3



Suma



Resta



Mult. por escalar (*4)

Abstracciones II

Vectores en \mathbb{R}^4

Vectores en \mathbb{C}^2

Vectores en \mathbb{R}^5

Vectores en \mathbb{C}^{256}

Vectores en \mathbb{R}^{256}

Vectores en $\mathbb{C}^{256 \times 256}$

Teorías y conjeturas

Teorías

- Axiomas y definiciones (Objetos)
- Reglas (Comportamiento)
- Teoremas (Propiedades y verdades de esos objetos con esas reglas)
 - Pruebas (Computaciones siguiendo estas reglas)
- Lenguajes que usamos para expresar nuestras teorías y conjeturas sobre los objetos
 - Español, Lógica formal (Reglas de inferencia), Diagramas

Espacios Vectoriales Complejos

Un primer ejemplo \mathbb{C}^n

$$V = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Para referirnos a uno de los valores de V escribimos: $V[k]$
Por ejemplo,

$$V[2] = c_2$$

Suma

$$A + B = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} + b_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Multiplicación por escalar

$$c \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \times a_0 \\ c \times a_1 \\ \vdots \\ c \times a_{n-1} \end{bmatrix} = c \times V[k]$$

**Sigamos aprendiendo con sus
ejercicios**

Ejercicio 2.1.2 Probar formalmente la asociatividad de la suma para el espacio \mathbb{C}^n

$$(V + W) + Z = V + (W + Z)$$

1. $(V[k] + W[k]) + Z[k] = V[k] + (W[k] + Z[k])$ Es verdadero por asociatividad de la suma de números complejos
2. $(V + W) + Z = V + (W + Z)$ Es verdadero por la definición de suma en \mathbb{C}^n



Ejercicio 2.1.4 Probar formalmente que $(c_1 + c_2) \cdot V = c_1 \cdot V + c_2 \cdot V$

$$(c_1 + c_2) \cdot V = c_1 \cdot V + c_2 \cdot V$$

1. $(c_1 + c_2) \cdot V[k] = c_1 \cdot V[k] + c_2 \cdot V[k]$ Es verdadero porque la multiplicación distribuye sobre la suma de números complejos
2. $(c_1 + c_2) \cdot V = c_1 \cdot V + c_2 \cdot V$ Es verdadero por la definición producto escalar en \mathbb{C}^n



Ejercicio 2.1.4 Probar formalmente que $(c_1 + c_2) \cdot V = c_1 \cdot V + c_2 \cdot V$

1. $W = (c_1 + c_2) \cdot V$
2. $W[j] = (c_1 + c_2) \times V[j]$
3. $W[j] = c_1 \times V[j] + c_2 \times V[j]$
4. $W = c_1 \cdot V + c_2 \cdot V$
5. $(c_1 + c_2) \cdot V = c_1 \cdot V + c_2 \cdot V$



Espacios Vectoriales Def. I

- **Def.:** Un espacio vectorial complejo es un objeto que está compuesto de un conjunto no vacío \mathbb{V} de elementos que llamemos vectores y que tiene tres operaciones:
 - Adición: $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$
 - Negación: $- : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$
 - multiplicación escalar: $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$
- cont.

Espacios Vectoriales Def. II

- Además un espacio vectorial complejo tiene un elemento distinguido denominado el vector $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$. Estas operaciones deben satisfacer las siguientes propiedades para $\mathbf{0}$ y para todos los vectores: $V, W, X \in \mathbb{V}$ y para todo $c, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$:

1. Comutatividad de la adición:

$$V + W = W + V$$

2. Asociatividad de la adición:

$$(V + W) + X = V + (W + X)$$

3. Zero es la identidad de la adición:

$$V + \mathbf{0} = \mathbf{0} + V$$

4. Cada vector tiene un inverso:

$$V + (-V) = (-V) + V = \mathbf{0}$$

5. La multiplicación escalar tiene una unidad:

$$1 \cdot V = V$$

6. La multiplicación escalar respeta la multiplicación compleja:

$$c_1 \cdot (c_2 \cdot V) = (c_1 \times c_2) \cdot V$$

7. La multiplicación escalar distribuye sobre la suma:

$$c \cdot (V + W) = c \cdot V + c \cdot W$$

8. La multiplicación escalar distribuye sobre la adición compleja:

$$(c_1 + c_2) \cdot V = c_1 \cdot V + c_2 \cdot V$$

Más ejemplos de espacios vectoriales complejos

$$\mathbb{C}^{m\times n}$$

Suma

$$A = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & \cdots & c_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n} \quad B = \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & \cdots & b_{0,n-1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m-1,0} & b_{m-1,1} & \cdots & b_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} c_{0,0} + b_{0,0} & c_{0,1} + b_{0,1} & \cdots & c_{0,n-1} + b_{0,n-1} \\ c_{1,0} + b_{1,0} & c_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & c_{1,n-1} + b_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-1,0} + b_{m-1,0} & c_{m-1,1} + b_{m-1,1} & \cdots & c_{m-1,n-1} + b_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$(A + B)[j, k] = A[j, k] + B[j, k]$$

Negación

$$A = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & \cdots & c_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -c_{0,0} & -c_{0,1} & \cdots & -c_{0,n-1} \\ -c_{1,0} & -c_{1,1} & \cdots & -c_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -c_{m-1,0} & -c_{m-1,1} & \cdots & -c_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$(-A)[j, k] = -A[j, k]$$

Multiplicación escalar

$$A = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & \cdots & c_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$p \cdot A = \begin{bmatrix} p \times c_{0,0} & p \times c_{0,1} & \cdots & p \times c_{0,n-1} \\ p \times c_{1,0} & p \times c_{1,1} & \cdots & p \times c_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p \times c_{m-1,0} & p \times c_{m-1,1} & \cdots & p \times c_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$(p \cdot A)[j, k] = p \times A[j, k]$$

$$\mathbb{C}^{n\times n}$$

Si $m = n$ hay más estructura y operaciones

$$(A^T)[j, k] = A[k, j]$$

$$(\bar{A})[j, k] = \overline{A[j, k]}$$

$$(A^\dagger)[j, k] = (\bar{A}^T)[j, k] = ((\bar{A})^T)[j, k] = \overline{A[k, j]}$$

Acción de matriz sobre vector

A es una matriz . **A** representa la dinámica de un sistema.

V es un vector. **V** representa el estado de un sistema

La acción de A sobre V es igual a A^*V

El resultado es un vector.

Preguntas

Base y Dimensión

Combinación lineal

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial complejo. Se dice que $V \in \mathbb{V}$ es una combinación lineal de vectores V_0, V_1, \dots, V_{n-1} en \mathbb{V} si V puede ser escrito así:

$$V = c_0 V_0 + c_1 V_1 + \dots + c_{n-1} V_{n-1}$$

Para algunos $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$

Independencia Lineal

Un conjunto $\{V_0, V_1, \dots, V_{n-1}\}$ de vectores en \mathbb{V} es linealmente independiente si:

$$0 = c_0V_0 + c_1V_1 + \dots + c_{n-1}V_{n-1}$$

Implica que $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$. Es decir que la única forma de obtener el vector **0** es que todos los coeficientes complejos sean 0.

Base de un espacio vectorial complejo

Un conjunto $\mathcal{B} = \{V_0, V_1, \dots, V_{n-1}\} \subseteq \mathbb{V}$ es llamado una base de un espacio vectorial \mathbb{V} si:

- i) Cada, $V \in \mathbb{V}$ puede ser escrito como una combinación lineal de vectores en \mathcal{B}
- ii) \mathcal{B} es linealmente independiente

Base canónica de \mathbb{C}^n

$\mathcal{B} = \{E_0, E_1, \dots, E_{n-1}\}$ es la base canónica de \mathbb{C}^n si:

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, E_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, todo vector $V = [c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]^T \in \mathbb{C}^n$ se puede escribir así:

$$V = \sum_{j=0}^{n-1} (c_j \cdot E_j) = c_0 \cdot E_0 + c_1 \cdot E_1 + \dots + c_{n-1} \cdot E_{n-1}$$

Base canónica de $\mathbb{C}^{m \times n}$

$\mathcal{B} = \{E_{0,0}, E_{0,1}, \dots, E_{m-1,n-1}\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^{m \times n}$ si:

$$E_{j,k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ j & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ m-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ se puede escribir así:

$$A = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} A[j, k] \cdot E_{j,k}$$

Ejemplo $\mathbb{C}^{2 \times 2}$

$$E_{0,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 7+4i \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -\sqrt{2} \cdot E_{0,0} + (7+4i) \cdot E_{0,1} + 1 \cdot E_{1,0} + 3 \cdot E_{1,1}$$

Dimensión

Prop. Para cada espacio vectorial, todas las bases tienen el mismo número de vectores.

Def. La **dimension** de un espacio vectorial complejo es el número de elemento en la base.

Prop. Dos espacios vectoriales que tienen la misma dimensión son isomorfos

Producto interno y espacios de Hilbert

Producto interno

- $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$
 - No degenera:
 - $\langle V, V \rangle \geq 0$
 - y $\langle V, V \rangle = 0$ si solo si $V = \mathbf{0}$
 - Respeta la adición:
 - $\langle V_1 + V_2, V_3 \rangle = \langle V_1, V_3 \rangle + \langle V_2, V_3 \rangle$
 - $\langle V_1, V_2 + V_3 \rangle = \langle V_1, V_2 \rangle + \langle V_1, V_3 \rangle$
 - Respeta la multiplicación escalar
 - $\langle c \cdot V_1, V_2 \rangle = c \times \langle V_1, V_2 \rangle$
 - $\langle V_1, c \cdot V_2 \rangle = \bar{c} \times \langle V_1, V_2 \rangle$
 - Antisimétrico:
 - $\langle V_1, V_2 \rangle = \overline{\langle V_2, V_1 \rangle}$

Productos internos para diferentes espacios

- \mathbb{R}^n : $\langle V_1, V_2 \rangle = V_1^T \star V_2$
- \mathbb{C}^n : $\langle V_1, V_2 \rangle = V_1^\dagger \star V_2$
- $\mathbb{R}^{n \times n}$:
 - $\langle A, B \rangle = \text{Trace}(A^T \star B)$, con $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 - $\text{Trace}(D) = \sum_{k=0}^{n-1} D[k, k]$, es decir la traza es la suma de la diagonal de la matriz
- $\mathbb{C}^{n \times n}$:
 - $\langle A, B \rangle = \text{Trace}(A^\dagger \star B)$, con $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$
 - $\text{Trace}(D) = \sum_{k=0}^{n-1} D[k, k]$, es decir la traza es la suma de la diagonal de la matriz

Valores y Vectores Propios

Valores y Vectores propios

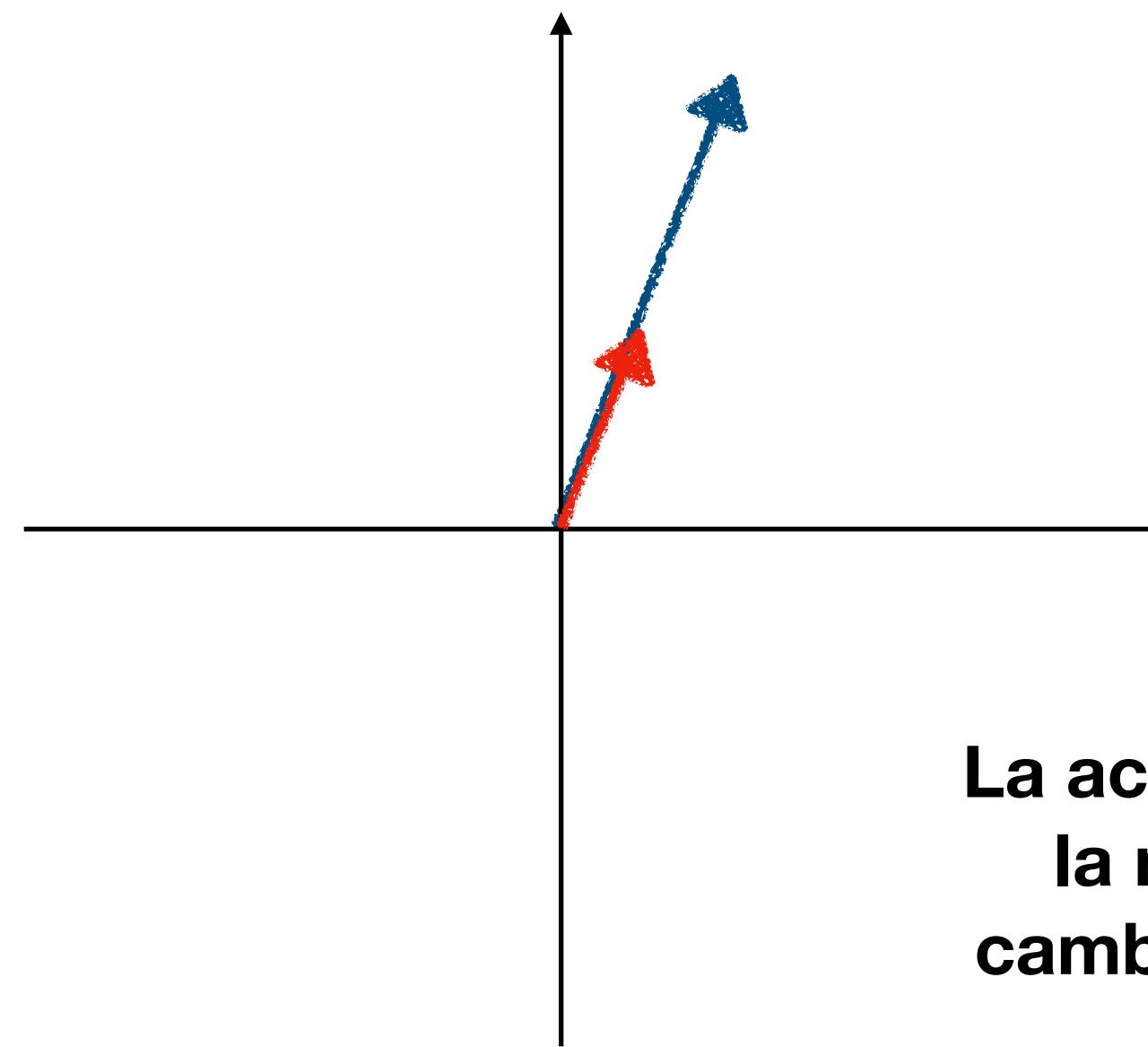
Definición. Para una matriz A en \mathbb{C}^n , si hay un número $c \in \mathbb{C}$ y un vector $V \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ tal que:

$$AV = c \cdot V,$$

entonces c es un valor propios de A y V es un vector propios de A asociado a c .

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



La acción solo altera la magnitud, no cambia la dirección.

Preguntas