Ejercicio: El Qubit y las Matrices de Pauli

Curso de Computación Cuántica

Introducción

En computación cuántica, la unidad básica de información es el **qubit**. A diferencia del bit clásico (0 o 1), un qubit puede existir en una superposición de ambos estados. Un estado de qubit se representa como un vector en un espacio de Hilbert complejo de dos dimensiones:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

donde $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son los estados base computacionales. Los coeficientes α y β son números complejos tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

En este ejercicio, usaremos la matriz de Pauli σ_z como nuestro operador de interés:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Los estados propios de σ_z son $|0\rangle$ con valor propio $+1$ y $|1\rangle$ con valor propio -1.

Parte 1: El Valor Esperado de σ_z

El **valor esperado** de un operador $\hat{A}$ en un estado $|\psi\rangle$ se calcula con la fórmula:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

Considere un qubit en el siguiente estado de superposición:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

Tarea: Calcule el valor esperado de σ_z para este estado.
Solución: El vector bra $\langle\psi|$ es el conjugado transpuesto de $|\psi\rangle$:

$$\langle\psi| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}$$

Calculamos el valor esperado:

$$\langle\sigma_z\rangle = \langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

$$\langle\sigma_z\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1\cdot 1 + (-i)\cdot(-i)) = \frac{1}{2}(1+i^2) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

Conclusión: El valor esperado es 0. Si realizáramos muchas mediciones de la propiedad asociada a σ_z, el promedio de los resultados sería 0.

Parte 2: La Incertidumbre de la Medición ($\Delta\sigma_z$)

La **incertidumbre** se define como:

$$(\Delta\hat{A})^2 = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2$$

Tarea: Calcule la incertidumbre de la medición de σ_z para el estado $|\psi\rangle$.
Solución: Primero, calculamos σ_z^2:

$$\sigma_z^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbb{I}$$

El valor esperado de la matriz identidad es siempre 1 para estados normalizados:

$$\langle\sigma_z^2\rangle = \langle\psi|\mathbb{I}|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

Ahora calculamos la incertidumbre:

$$(\Delta\sigma_z)^2 = \langle\sigma_z^2\rangle - \langle\sigma_z\rangle^2 = 1 - 0^2 = 1$$

$$\Delta\sigma_z = \sqrt{1} = 1$$

Conclusión: La incertidumbre de la medición de σ_z es 1, lo que indica que el resultado de una medición no es fijo.

Parte 3: La Medición y el Colapso del Estado

En la computación cuántica, la **medición** colapsa el estado de superposición a uno de los estados base del operador de medición.

Tarea:

1. Calcule la probabilidad de obtener cada resultado de medición para σ_z en el estado $|\psi\rangle$.
2. Si el resultado de la medición es -1, ¿en qué estado queda el qubit?

Solución:

1. La probabilidad de obtener el resultado $+1$ (estado $|0\rangle$) es $|\alpha|^2$:

$$P(+1) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

   La probabilidad de obtener el resultado -1 (estado $|1\rangle$) es $|\beta|^2$:

$$P(-1) = \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

2. Si el resultado de la medición es -1, el estado del qubit colapsa al estado propio correspondiente, que es $|1\rangle$. El nuevo estado es:

$$|\psi_{\text{después}}\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Este es un estado propio de σ_z, lo que significa que cualquier medición posterior de σ_z dará con certeza el valor -1.

1 Ejercicio: Medición de un observable en una superposición de dos qubits

Introducción

Este ejercicio tiene como objetivo consolidar los conceptos de valor esperado, incertidumbre y colapso del estado en un sistema de dos qubits. Para ello, exploraremos el comportamiento de un estado entrelazado al interactuar con un operador de medición de dos qubits.

Considere un sistema de dos qubits en el siguiente estado entrelazado, conocido como un estado de Bell:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El operador que vamos a medir es $\sigma_x \otimes \sigma_x$. Las matrices de Pauli son:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El operador de dos qubits $\sigma_x \otimes \sigma_x$ se calcula mediante el producto tensorial de las matrices de Pauli:

$$\sigma_x \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

—

Preguntas del ejercicio

1. Valor esperado

Calcule el valor esperado del operador $\sigma_x \otimes \sigma_x$ para el estado $|\psi\rangle$.

$$\langle \sigma_x \otimes \sigma_x \rangle = \langle \psi | (\sigma_x \otimes \sigma_x) | \psi \rangle$$

2. Incertidumbre

Calcule la incertidumbre de la medición, $(\Delta(\sigma_x \otimes \sigma_x))^2$. Para esto, primero necesita calcular el valor esperado de $(\sigma_x \otimes \sigma_x)^2$.

$$(\Delta(\sigma_x \otimes \sigma_x))^2 = \langle (\sigma_x \otimes \sigma_x)^2 \rangle - \langle \sigma_x \otimes \sigma_x \rangle^2$$

3. Probabilidades de medición y colapso del estado

1. Enumere los posibles resultados que se pueden obtener al medir el operador $\sigma_x \otimes \sigma_x$. ¿Cuáles son sus valores propios y estados propios?
2. Calcule la probabilidad de obtener cada resultado de medición.
3. Si el resultado de la medición es -1, ¿en qué estado queda el sistema de dos qubits inmediatamente después de la medición?
4. Si realiza una segunda medición del mismo observable, $\sigma_x \otimes \sigma_x$, inmediatamente después de la primera, ¿qué resultado obtendrá y por qué?

2 Ejercicio: Compatibilidad de Observables y el Conmutador

Introducción

En la mecánica cuántica, la **compatibilidad** de dos observables se refiere a si sus respectivas propiedades pueden ser medidas simultáneamente con precisión arbitraria. Esta compatibilidad se determina mediante el **conmutador** de sus operadores correspondientes.

El conmutador de dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ se define como:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Si el conmutador es cero, $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, los operadores **conmutan**, y se dice que los observables son **compatibles**. Si el conmutador es distinto de cero, $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, los observables son **incompatibles** y no pueden medirse simultáneamente con precisión.

Considere un sistema de un solo qubit con los siguientes operadores de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

—

Parte 1: Observables Incompatibles

Tarea:

1. Calcule el conmutador de los operadores de Pauli σ_x y σ_z, es decir, $[\sigma_x, \sigma_z]$.

- Calcule el producto matricial $\sigma_x \sigma_z$.
- Calcule el producto matricial $\sigma_z \sigma_x$.
- Sume los resultados para obtener el conmutador.

2. Con base en el resultado del conmutador, ¿qué puede concluir sobre la posibilidad de medir el espín de un qubit en el eje x y en el eje z de forma simultánea? Relacione su respuesta con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

—

Parte 2: Observables Compatibles

Ahora, considere un sistema de dos qubits. El primer qubit está en el estado base $|0\rangle$ y el segundo qubit está en el estado base $|1\rangle$.

Considere dos nuevos operadores de medición:

- El operador σ_z actuando en el primer qubit: $\hat{A} = \sigma_z \otimes \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- El operador σ_z actuando en el segundo qubit: $\hat{B} = \mathbb{I} \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Tarea:

1. Calcule el conmutador de los operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$, es decir, $[\hat{A}, \hat{B}]$.

- Escriba las matrices 4×4 para $\hat{A}$ y $\hat{B}$.
- Calcule los productos matriciales $\hat{A}\hat{B}$ y $\hat{B}\hat{A}$.

- Sume los resultados para obtener el conmutador.

2. Con base en el resultado del conmutador, ¿qué puede concluir sobre la relación entre la medición del espín en el eje z del primer qubit y la medición del espín en el eje z del segundo qubit?