y2823774827y 的博客

浅谈斯特林数及斯特林反演

posted on 2019-04-14 09:52:25 | under [未分类 (.#type=未分类)] | 33

更好的阅读体验⟹[My Blog (https://www.cnblogs.com/y2823774827y/p/10700231.html)]

历史小芝士

在组合数学中，斯特林($Stirling$)数可指两类数，第一类斯特林数和第二类斯特林数 这些均由18世纪数学家$James Stirling$提出的，并在著作《$Methodous Differentialis$》中首次使用

自此，斯特林数及反演成为又一广泛运用到处理组合问题的一大利器

第一类斯特林数

定义

$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}$表示$n$个元素分成$m$个环的方案数

显然：

$$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n-1\\m-1\end{bmatrix}+(n-1)*\begin{bmatrix}n-1\\m\end{bmatrix}$$

理解：考虑从$n-1$个元素推过来，如果两个空环肯定是不符合的 空一个环则单独成环，如果$n-1$的时候就没有空环就任意放在一个元素前

性质

- $n! = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$

理解：其实本质就是置换，一个环则为一组轮换，每种排列都会对应着唯一 一种置换

- $x^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^i$

归纳法：

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{n+1}} &= (x-n)x^{\underline{n}} \\
&= (x-n)\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^i \\
&= x\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^i - n\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^{i+1} - n\sum_{i=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^i \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix} (-1)^{n-i+1} x^i + n\sum_{i=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i+1} x^i \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (\begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix} + n * \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}) (-1)^{n-i+1} x^i \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i+1} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{(n+1)} \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix} (-1)^{(n+1)-i} x^i
\end{aligned}
$$

- $x^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} x^i$

证明类上，不再赘述

求第一类斯特林数

- $\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} x^i = \prod_{i=0}^{n-1} (x+i)$

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	2	3	1	0
4	0	6	11	6	1

其实把表刷出来就差不多了，可以理解为根据$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (n-1) * \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$逐渐转移

至此，我们可以通过分治$FFTO(nlog^2n)$求出一行的第一类斯特林数

- 还有一种类似于多项式求逆模式$O(nlogn)$的方法

$$F(x)^n = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i), F(x)^{2n} = F(x)^n F(x+n)^n$$

考虑当我们求出$F(x)^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$：

$F(x+n)^n = \sum_{i=0}^{n} a_i (x+n)^i$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} n^{i-j} x^j$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} n^{j-i} a_j) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (\sum_{j=i}^{n} \frac{j!}{i!(j-i)!} n^{j-i} a_j) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (i!)^{-1} x^i (\sum_{j=i}^{n} (\frac{n^{j-i}}{(j-i)!}) \cdot (j! a_j))$$

我们通过左半部分系数能得到右半部分系数，再相乘一下就得到了总体的系数

代码运用到了下方例题，故在这里不重复放了

第二类斯特林数

定义

$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}$表示$n$个有区别的小球丢进$m$个无区别的盒子，无空盒子的方案数

显然：

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{Bmatrix} + m * \begin{Bmatrix} n-1 \\ m \end{Bmatrix}$$

理解：考虑从$n-1$个小球推过来，如果两个空盒子肯定是不符合的

空一个盒子则只能放到那个空盒子里面了，如果$n-1$的时候就没有空箱子就随便放

性质

$$m^n = \sum_{i=0}^{m} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} * i! * C(m,i)$$

当然也可以写成：

$$m^n = \sum_{i=0}^{m} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} * m^{\underline{i}}$$

到后面反演时我们会这样写：

$$m^n = \sum_{i=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} * m^{\underline{i}}$$

看看后面的$m^{\underline{i}}$就懂了

理解：m^n为n个有区别的小球丢进m个有区别的盒子，允许空盒子

枚举有效盒子的个数，再从m个盒子选i个盒子，然后n个小球丢进i个盒子

转换到组合表示

第二类斯特林数显然是和排列组合有关系的，转换过来：

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

理解：如果空箱子的情况我们也算进去，答案显然是$\frac{m^n}{m!}$

反过来求第二类斯特林数，又得减掉这种情况：

选k个空盒子，然后小球放到其他的盒子里

但最后我们求出来的答案为有区别的盒子，转换过来要$\times \frac{1}{m!}$

求第二类斯特林数

大概都能猜到是卷积形式了吧，随手展开一下：

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{m!}{k!(m-k)!}(m-k)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(m-k)^n}{k!(m-k)!}$$

至此，我们能实现$O(nlogn)$求出$S(n)$这一行的第二类斯特林

第二类斯特林数与自然数幂的关系

$$Sum(n) = \sum_{i=0}^{n} i^k$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} i^{\underline{j}}$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix}\sum_{i=0}^{n} i^{\underline{j}}$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} j!\sum_{i=0}^{n} C_i^j$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} j!C_{n+1}^{j+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix}\frac{(n+1)^{\underline{j+1}}}{j+1}$$

关于$\sum_{i=0}^{n} C_i^j = C_{n+1}^{j+1}$的理解：枚举$j+1$的右端点$i+1$，则相当于从$i$个点中选$j$个点

斯特林反演

定义

斯特林反演：$f(n) = \sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} g(k) \Longleftrightarrow g(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} f(k)$

总结上面我们所推倒的性质

- $x^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}(-1)^{n-i}x^i, x^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}x^i$

- $m^n=\sum_{i=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\i\end{Bmatrix}*m^{\underline{i}}$

补充

$$x^{\underline{n}}=(-1)^n(-x)^{\overline{n}},x^{\overline{n}}=(-1)^n(-x)^{\underline{n}}$$

前置

我们先证这个**反转公式**

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}k\\m\end{Bmatrix}=[m=n]$$

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}=[m=n]$$

反转公式**1**：

$$m^{\underline{n}}=\sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix}(-1)^{n-i}m^i$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix}(-1)^{n-i}\sum_{j=0}^{i}\begin{Bmatrix}i\\j\end{Bmatrix}m^{\underline{j}}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}m^{\underline{i}}\sum_{j=i}^{n}(-1)^{n-j}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}j\\i\end{Bmatrix}$$

反转公式**2**：

$$m^n=\sum_{i=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\i\end{Bmatrix}m^{\underline{i}}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\i\end{Bmatrix}(-1)^i(-m)^{\overline{i}}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\i\end{Bmatrix}(-1)^i\sum_{j=0}^{i}\begin{bmatrix}i\\j\end{bmatrix}(-m)^j$$

$$=\sum_{i=0}^{n}m^i\sum_{j=i}^{n}(-1)^{i-j}\begin{Bmatrix}n\\j\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}j\\i\end{bmatrix}$$