白色过膝袜

你做东方鬼畜音MAD，好吗

【日报】再谈小球与盒子

posted on 2022-06-29 12:04:24 | under 日报 (.#type=日报) | 43

前言

洛谷早期日报有一篇就是在讲小球与盒子 (https://www.luogu.com.cn/blog/chengni5673/dang-xiao-qiu-yu-shang-he-zi)的，但是有的地方讲的不是很清楚，而且一些情形的多项式做法没讲，所以我来填坑（）

- 本文对情形的分类主要参考了$\mathrm{P5824}$ 十二重计数法 (https://www.luogu.com.cn/problem/P5824)。这是一道十分好的模板题，希望读者读完这篇文章后去爆切。
- 本文还是尽量从基础讲起吧，尽管会有多项式内容。
- orz EntropyIncreaser。

小球盒子模型，大致上是将 n 个球装在 m 个盒子里，每个小球必须要放在一个盒子里，计算方案数。由于球、盒子会有不同的限制条件，因此产生了多样的计数问题。

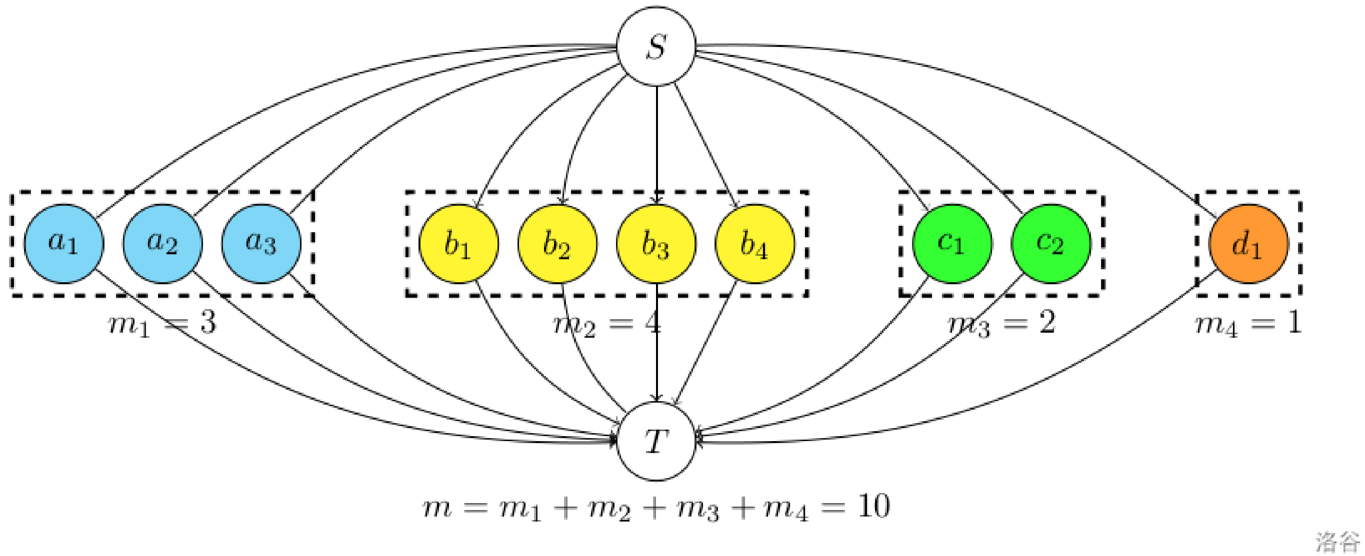
本文中，小球盒子的分类一共有 12 种。分别为**小球是否相同、盒子是否相同、装球数量无限制/最多一个球/最少一个球**，共 $2\times 2\times 3=12$ 种情况。比早期日报的那篇还多了 4 种。

正文

前置知识

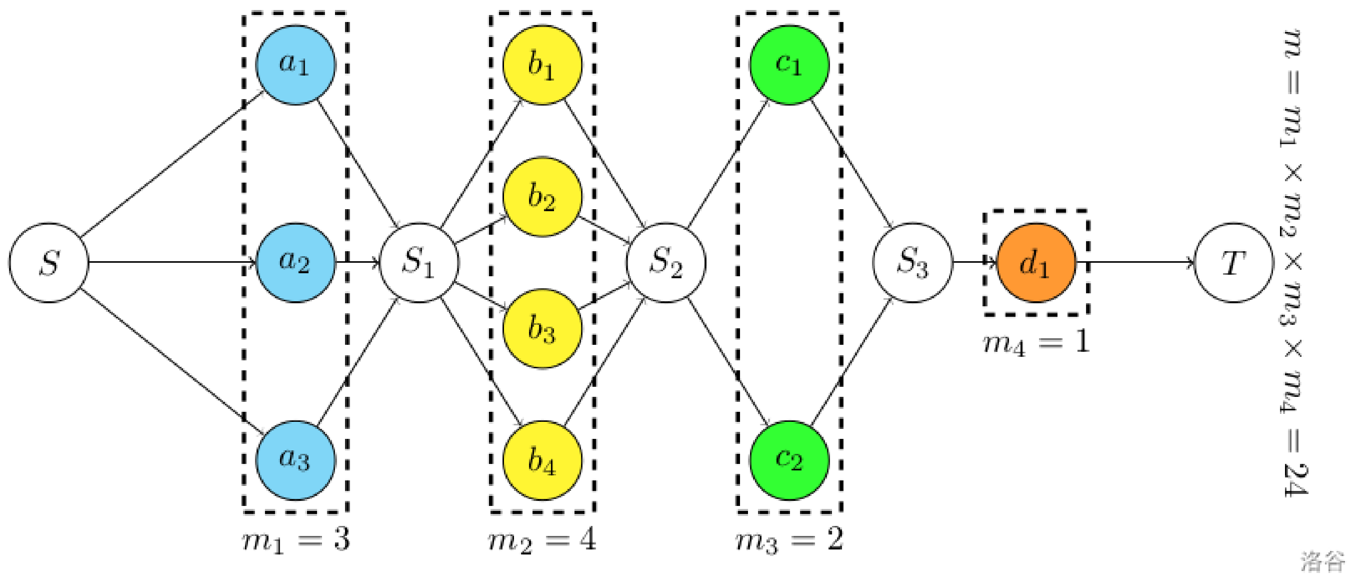
- **加法原理**：

> 做一件事情，完成它有 n 类方式，第一类方式有 m_1 种方法，第二类方式有 m_2 种方法，……，第 n 类方式有 m_n 种方法，那么完成这件事情共有 $m_1+m_2+\cdots m_n=\sum_{i=1}^n m_i$ 种方法。



- **乘法原理**：

> 做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法。那么完成这件事共有 $m_1 \cdot m_2 \cdots m_n = \prod_{i=1}^{n} m_i$ 种不同的方法。



由此可以求出排列数 A_n^m，它表示在 n 个物品中按顺序选出 m 个物品的方案数。显然，选出来的第一个物品有 n 种可能，第二个物品有 $n-1$ 种可能，以此类推，第 m 个物品有 $n-m+1$ 种可能。于是，

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1)$$

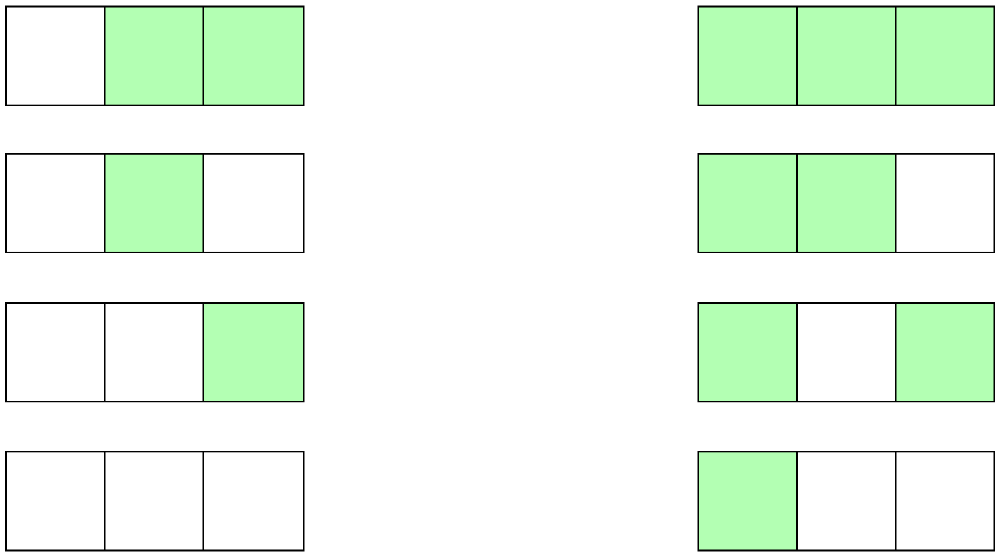
为了简便起见，

- 定义阶乘：$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$。
- 定义下降幂：$n^{\underline{m}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1)$。

因此，

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}=n^{\underline{m}}$$

由此引入组合数 C_n^m。它的定义是，在 n 个不同的物品，选择 m 个数的方案数。要注意的是，这选出来的 m 个物品是没有顺序之别的。



丢个图。这个是在 3 个数中选择若干个数的情况。可以发现，$C_3^0=1,C_3^1=3,C_3^2=3,C_3^3=1$。

组合数的推导也比较简单：它选出来的 m 个物品是没有顺序的，但是用排列数选出来的 m 个物品是有顺序的。显然这 m 个物品形成的排列的数量为 $A_m^m=m!$，而它们都等价于一种情况。因此，

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n!}{(n-m)!m!}$$

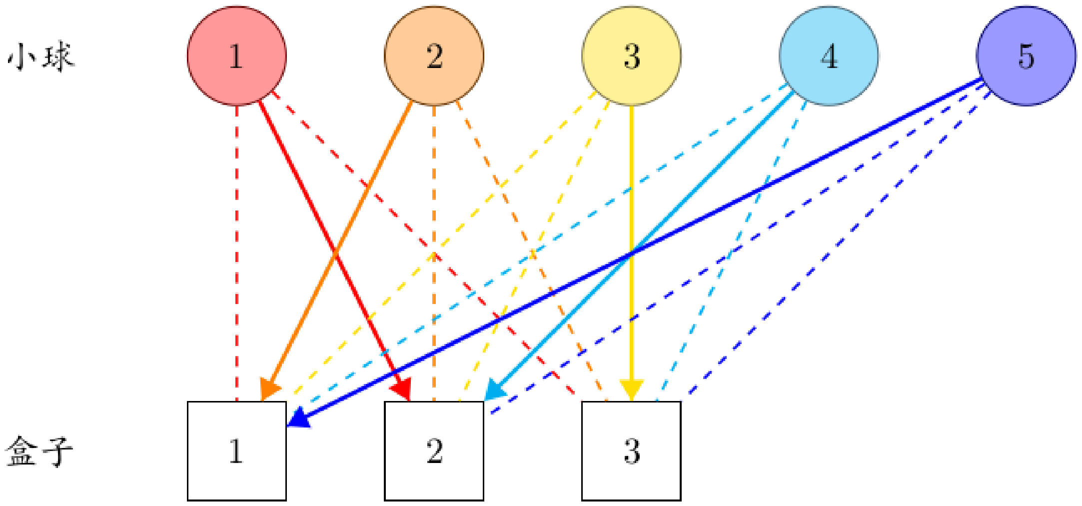
为了美观，组合数还有另外一种写法：

$$\binom{n}{m}=C_n^m$$

剩下来的知识就在十二重计数法里面体现啦。

I. 球不同，盒不同，装球数量无限制

考虑从每个小球出发。每个球都有 m 个地方可以塞，根据乘法原理，n 个球的塞法共有 $\underbrace{m\cdot m\cdot m\cdots m}_{n\text{ 个}}=m^n$。因为每个小球进盒子后，盒子里的小球是没有顺序可言的，所以把每个球塞完后所有情况就已经统计完了。

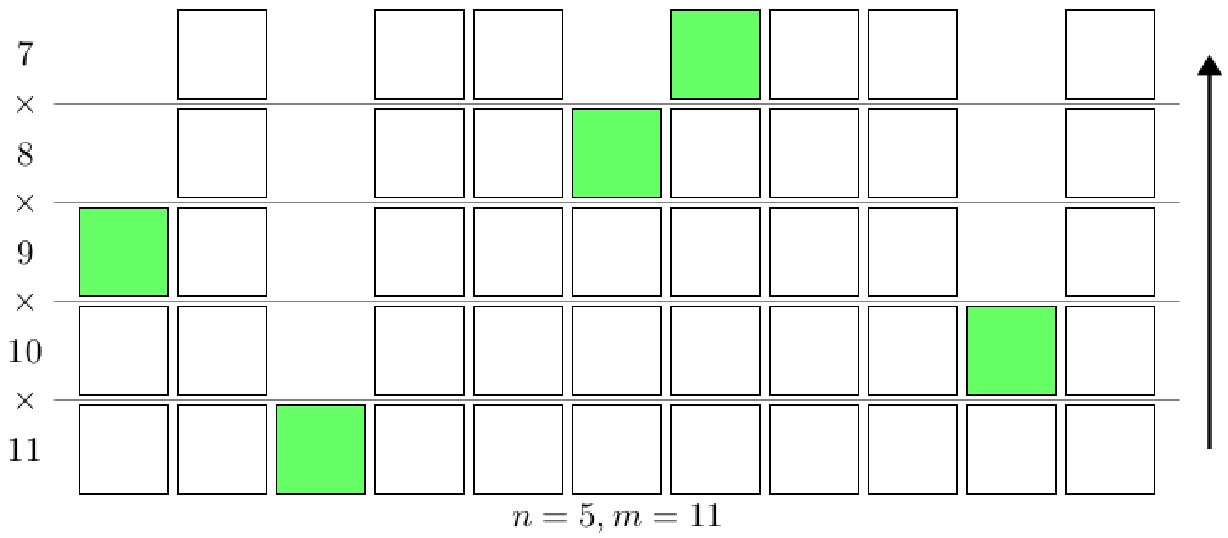


如图所示，是 $n=5,m=3$ 的一种情况。五个小球分别放入了 $2,1,3,2,1$ 号盒子里。每个小球都有 3 中选择，因此总方案数就是 3^5。

使用快速幂，时间复杂度为 $\mathcal{O}(\log n)$。

II. 球不同，盒不同，盒子至多装一球

因为盒子最多只能装 1 个球，所以球和盒子是一一对应的。因此我们要按顺序从 m 个盒子选出 n 个。这就是排列数的定义，答案就是 $m^{\underline{n}}$。



时间复杂度为 $\mathcal{O}(n)$。

III. 球不同，盒不同，盒子至少装一球

这里开始要引入二项式反演。

- 记「把 n 个不同球装入 m 个不同盒子，盒子非空」的方案数为 $f(n,m)$。

- 记「把 n 个不同球装入 m 个不同盒子，盒子可空」的方案数为 $g(n,m)$。

容易发现，$g(n,m)$ 就是十二重计数法的 I，于是 $g(n,m)=m^n$。

但是 $g(n,m)$ 还有另外一种表示方法。考虑枚举有 i 个盒子是非空的，这 i 个盒子得从 m 个盒子里选，所以要乘上系数 $\dbinom{m}{i}$；而 n 个不同小球放入 i 个盒子，由 f 的定义，就是 $f(n,i)$。那么：

$$g(n,m)=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}f(n,i)$$

首先给出二项式反演的式子：

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g(i)\iff g(n)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}f(i)$$

在证明之前，我们会频繁用到二项式定理。即：

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$$

二项式定理的证明并不太难。考虑右式由 n 个单项式 $(a+b)$ 相乘得到，那么若 a 的幂数为 i，就说明这 n 个单项式中，有 i 个选择了 a。从 n 个里面选 i 个的方案数就是 $\dbinom{n}{i}$。

$$(a+b)(\colorbox{lime}{a}+b)(\colorbox{lime}{a}+b)(a+b)(a+b)\qquad(a+b)(a+b)(a+b)(\colorbox{lime}{a}+b)(\colorbox{lime}{a}+b)$$

$$(\colorbox{lime}{a}+b)(a+b)(a+b)(a+b)(\colorbox{lime}{a}+b)\qquad(a+b)(a+b)(\colorbox{lime}{a}+b)(a+b)(\colorbox{lime}{a}+b)$$

$$(\colorbox{lime}{a}+b)(a+b)(a+b)(\colorbox{lime}{a}+b)(a+b)\qquad(a+b)(a+b)(\colorbox{lime}{a}+b)(\colorbox{lime}{a}+b)(a+b)$$

$$(\colorbox{lime}{a}+b)(a+b)(\colorbox{lime}{a}+b)(a+b)(a+b)\qquad(a+b)(\colorbox{lime}{a}+b)(a+b)(a+b)(\colorbox{lime}{a}+b)$$

$$(\colorbox{lime}{a}+b)(\colorbox{lime}{a}+b)(a+b)(a+b)(a+b)\qquad(a+b)(\colorbox{lime}{a}+b)(a+b)(\colorbox{lime}{a}+b)(a+b)$$

例如，$n=5$ 时从 5 个单项式里找 2 个单项式选择 a，方案数为 $\dbinom{5}{2}$，那么 a^2 的系数就是 $\dbinom{5}{2}$。

考虑二项式反演的证明：

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}f(i) &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}g(j) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i}g(j) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{n-i}g(j) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}g(j)\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{n-i} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}g(j)\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-j}{i}(-1)^{n-j-i} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}g(j)\cdot 0^{n-j} \\
&= g(n)
\end{aligned}
$$

现在已知:

$$
g(n,m)=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}f(n,i)
$$

于是得到,

$$
\begin{aligned}
f(n,m) &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}g(n,i) \\
&= \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}i^n
\end{aligned}
$$

直接暴力枚举+快速幂，时间复杂度为 $\mathcal{O}(m\log n)$。但是可以用筛法 $\mathcal{O}(m)$ 求出 $1^n,2^n,\cdots m^n$，所以可以优化到 $\mathcal{O}(m+n)$。

IV. 球不同，盒相同，装球数量无限制

这里开始要引入第二类斯特林数。

第二类斯特林数 $\begin{Bmatrix}n\\m\end{Bmatrix}$ 的定义是，将 n 个不同的数划分为 m 个集合，**集合与集合之间没有差别**，的方案数。考察 III 中 f 的定义。可以发现，f 所谓的盒子是互不相同的，而第二类斯特林数的集合是相同的。那么只要让 $f(n,m)$ 除去这 m 个盒子的排序关系即可。于是可以得到:

$$
\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \frac{1}{m!} f(n,m) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} i^n
$$
$$
= \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^{m-i} \cdot i^n}{i!(m-i)!}
$$

回到 IV 上来。我们可以枚举有 i 个盒子至少装了 1 个球，那么这就是第二类斯特林数行的板子：

$$
ans = \sum_{i=0}^{m} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix}
$$

下面问题在于怎么求出 $\begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix}, i = 0, 1, \cdots m$。

考虑多项式乘法。对于两个多项式 $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, B(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$，可以得到：

$$
C(x) = A(x) \cdot B(x) = \sum_{i=0}^{n+m} x^i \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = \sum_{i=0}^{n+m} x^i c_i
$$

那么只要构造如下多项式：

$$
A(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = \sum_{i=0}^{m} \frac{i^n}{i!} \cdot x^i
$$
$$
B(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!} \cdot x^i
$$

两者相乘，得到：

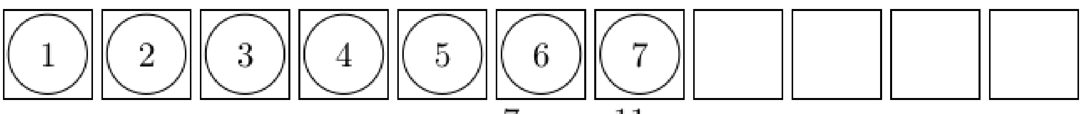
$$
c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^{i-j} \cdot j^n}{j!(i-j)!} = \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2 \cdots m
$$

- 构造 $A(x)$ 时使用筛法求出 $1^n, 2^n, \cdots m^n$，时间复杂度为 $\mathcal{O}(m)$。
- 使用 NTT 做多项式乘法，时间复杂度为 $\mathcal{O}(m \log m)$。

因此总的时间复杂度为 $\mathcal{O}(m \log m)$。

V. 球不同，盒相同，盒子至多装一球

轻松题。显然如果 $m < n$，无解；$m \geq n$，那么由于盒子相同，答案就是 1。



$n = 7, m = 11$

时间复杂度为 $\mathcal{O}(1)$。

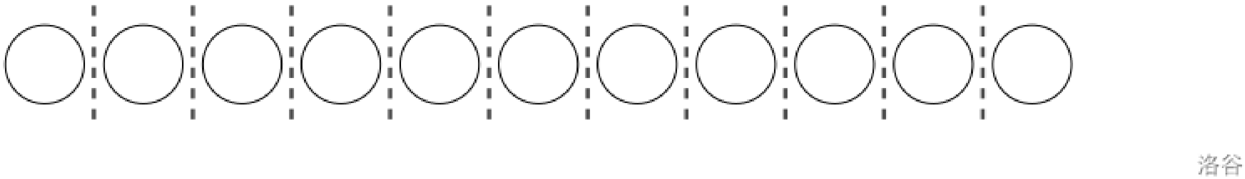
VI. **球不同，盒相同，盒子至少装一球**

轻松题。显然是第二类斯特林数的定义。直接拿第二类斯特林数行的做法求出一整行，再取出其中第 m 列，参照 IV。

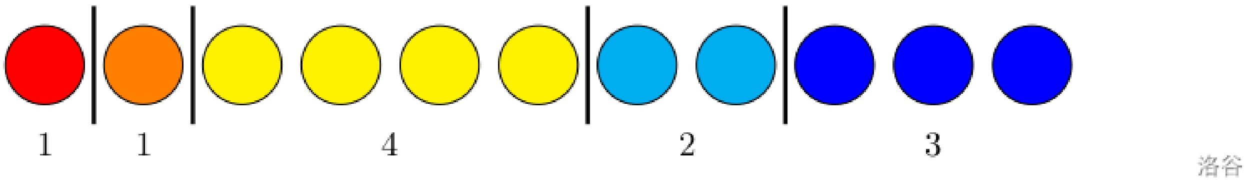
时间复杂度为 $\mathcal{O}(m\log m)$。

VII. **球相同，盒不同，装球数量无限制**

考虑使用隔板法。



将 n 个球依次排开。那么这 n 个球之间有 $n-1$ 个空隙。如果我们在这 $n-1$ 个空隙中选择 $m-1$ 个，那么这 n 个球就会被划分为 m 堆。如下图所示，为 $n=11,m=5$ 的一种情况。此时五个盒子装的小球个数分别为 $1,1,4,2,3$。



从左往右将每堆球丢在一个盒子里，那么我们就做到了「将 n 个相同小球，放入到 m 个不同盒子，盒子至少装一球」。容易发现插板的方案数一共有 $\dbinom{n-1}{m-1}$ 个，因此这个问题的方案数就是它。

但是现在盒子可以为空。做法也很简单：先往每个盒子里塞一个球，最后把这个球拿走就行了。换言之，先求「将 $n+m$ 个相同小球，放入到 m 个不同盒子，盒子至少装一球」的方案数，对于每个这个问题的划分方案，将每个盒子抽掉一个球，就是 VII 的方案。因此该问答案即为 $\dbinom{n+m-1}{m-1}$。

时间复杂度为 $\mathcal{O}(n+m)$。

VIII. **球相同，盒不同，盒子至多装一球**

轻松题。因为每个球只能放到一个盒子里，每个盒子最多装一个球，并且每个球必须要放到一个盒子里，因此考虑 m 个盒子里哪些放了球，答案就是 $\dbinom{m}{n}$。

时间复杂度为 $\mathcal{O}(m)$。

IX. 球相同，盒不同，盒子至少装一球

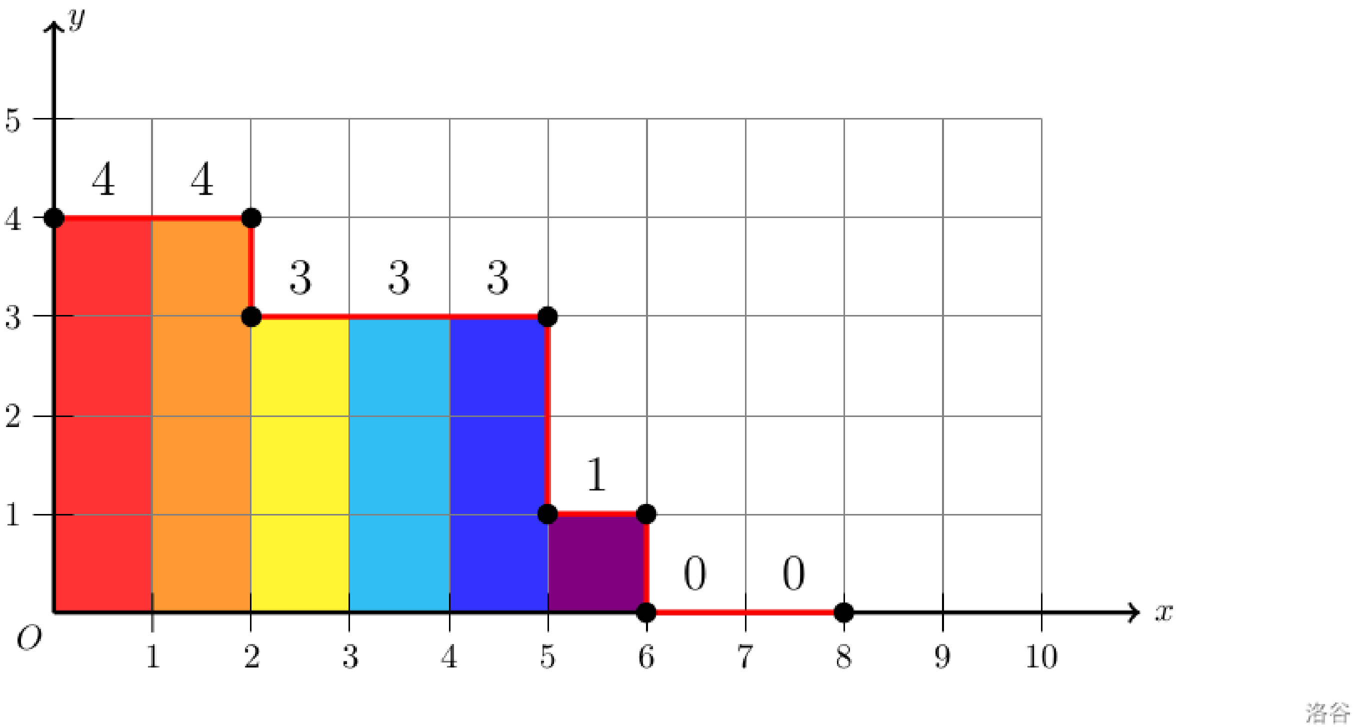
就是插板法的原版，上文已经提及。答案为 $\dbinom{n-1}{m-1}$。

时间复杂度为 $\mathcal{O}(n)$。

X. 球相同，盒相同，装球数量无限制

它 来 了。

记 $f(n,m)$ 为「n 个相同小球，放入到 m 个相同盒子，每个盒子装球数量无限制」的方案数。观察到所有的盒子和球都是相同的，假设一个方案第 i 个盒子装的球的数量为 c_i，那么可以将 c_i 按照从大到小的顺序排序。如果两种方案排完序后的序列完全相同，那么两者就是相同方案，否则必然是不同方案。这是本题的关键。



如图所示，是 $n=18, m=8$ 的一种情形。所有在红色线段下方的面积就是 n，每个彩色线段对应的都是排完序后每个盒子里小球的个数。$f(n,m)$，本质上就是计算从 $(m,0)$ 走到 y 轴，且红色线段下方区域面积恰好为 n 的方案数。因为盒子里小球个数按照从大到小排列，因此从 $(m,0)$ 出发只有两种选择：

- 第一种，向上走一格。此时需要往左边填充 m 个格子，转化为了计算 $f(n-m,m)$。
- 第二种，向左走一格。转化为了计算 $f(n,m-1)$。

容易得到状态转移方程：

$$f(n,m)=f(n,m-1)+f(n-m,m)$$

下面考虑如何加快 $f(n,m)$ 的计算。使用生成函数。

我们记 $F_m(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} f(i,m)x^i$，那么根据递推式，我们可以得到：

$$\begin{aligned}
F_m(x) &= \sum_{i=0}^{+\infty} f(i,m)x^i \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}(f(i,m-1)+f(i-m,m))x^i \\
&= F_{m-1}(x)+x^m F_m(x) \\
F_m(x) &= \frac{1}{1-x^m}\cdot F_{m-1}(x)
\end{aligned}$$

考虑到 $f(n,0)=[n=0]$，于是 $F_0(x)=1$，那么可以得到：

$$F_m(x)=\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{1-x^i}$$

两边取对数，得到：

$$\ln F_m(x)=\sum_{i=1}^{m}\ln\frac{1}{1-x^i}$$

考虑一个经典结论：

$$\ln(1-x^t)=-\sum_{i=1}\frac{x^{ti}}{i}$$

证明如下：

$$\begin{aligned}
\ln(1-x^t) &= \int\frac{-tx^{t-1}}{1-x^t}\mathrm{d}x \\
\sum_{i=0}x^{ti-1} &= \frac{1}{1-x^t}\cdot\frac{1}{x} \\
\sum_{i=1}x^{ti-1} &= \frac{1}{1-x^t}\cdot x^{t-1} \\
\ln(1-x^t) &= \int\left(-t\cdot\sum_{i=1}x^{ti-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=1}\frac{x^{ti}}{i}
\end{aligned}$$

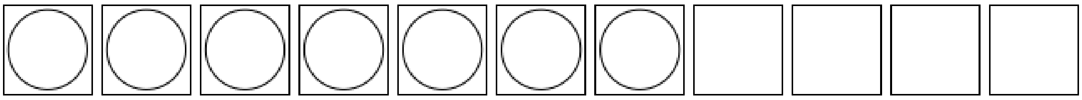
（也就是先求导再积分）

因为我们只需要 $F_m(x)$ 的前 $n+1$ 项系数，所以只要求得 $\ln F_m(x)$ 的前 $n+1$ 项，然后求一次多项式 $\exp$ 即可。容易发现 $-\sum_{i=1}\frac{x^{ti}}{i}$ 对 $\ln F_m(x)$ 前 n 项产生贡献的项数为 $\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor$，因此直接枚举 i，再枚举 i 的倍数，计入贡献即可求得 $F_m(x)$ 的前 $n+1$ 项。

算出 $\ln F_m(x)$ 的时间复杂度为 $\mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{m}\dfrac{n}{i}\right)=\mathcal{O}(n\log m)$。做一次多项式 $\exp$ 的时间复杂度为 $\mathcal{O}(n\log n)$。因此总时间复杂度为 $\mathcal{O}(n\log(nm))$。

XI. **球相同，盒相同，盒子至多装一球**

轻松题，与 V 完全相同。显然如果 $m<n$，无解；$m\ge n$，那么由于盒子相同，答案就是 1。



$n=7,m=11$

时间复杂度为 $\mathcal{O}(1)$。

XII. **球相同，盒相同，盒子至少装一球**

和 X 类似，只不过钦点了从 $(m,0)$ 出发的点第一步必须向上走。所以答案就是 $f(n-m,m)$。

时间复杂度为 $\mathcal{O}(n\log(nm))$。