Danzh
ACMer,目前正在恶补数学~
下面是我的OJ账号，欢迎访问~
洛谷
Virtual judge
另外，我是从csdn刚刚搬过来的，所以这里博客很少~有兴趣可以看看我的csdn博客~
danzh-csdn
----
danzh喜欢指弹，下面是一些平常爱听的曲子

Way - 岸部眞明
00:00 / 02:54

1	Way	岸部眞明
2	奇迹の山	岸部眞明
3	Time travel	岸部眞明
4	中川イサト	東方美人
5	E调卡农	大伟
6	忆	陈亮
7	china funk	陈亮
8	枫桥夜泊	陈亮

昵称： danzh
园龄： 5年3个月
粉丝： 1
关注： 0
+加关注

搜索

找找看

随笔分类

a.杜教筛(4)
a.莫比乌斯反演(6)
a.欧拉定理(2)
a.欧拉函数(3)
a.容斥原理(1)
a.数论——奇奇怪怪的数论结论(1)

数论公式总结

@

目录

- 更新中...
- 我的csdn和博客园是同步的，欢迎来访danzh-博客园~
欢迎关注~

1.中间式子&常用技巧

$$[n == 1] = \sum_{d|n} \mu(d)$$

> 这个式子用来替换条件式，从而降低复杂度

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{[\frac{n}{i}]} f(i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{[\frac{n}{i}]} f(j)$$

> 被加数可以任意以i或j作为索引

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{[\frac{n}{i}]} f(ij) * g(i) * h(j) = \sum_{k=1}^{n} f(k) * \sum_{d|k} g([\frac{k}{d}])h(d)$$

> 令$k = ij$，然后枚举k。这里的i可以不从1枚举到n，可以是任意数，前提是保证后面的d和i性质一样(比如i是[1,n]范围内的质数，那么d|k且d是质数)，且计算时保证关于i的函数和关于d的函数是同一性质（还是刚才的例子，式子左边是g(i)，右边以d作为自变量的也应该是g而不应该是h，但如果i是顺序从1枚举到n则没有这个限制）

$$gcd(i, j) = \sum_{d|i且d|j} \phi(d)$$

> 可以用这个式子去反演更简单

2.gcd

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [gcd(i, j) == x] = 2 * pre\phi([\frac{n}{x}]) - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [gcd(i, j) == x] = \sum_{d=1}^{[\frac{n}{x}]} \left(\mu(d) * [\frac{n}{dx}] * [\frac{m}{dx}]\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} gcd(i, j) = \sum_{d=1}^{n} \left(2d * pre\phi[\frac{n}{x}] - d\right)$$

a.数论——套数据结构求和式(1)
a.数论——推式子(2)
a.数论——线性筛(1)
a.数论——约数相关问题(2)
a.数论——质因数分解(1)
a.数学——数学结论(1)
a.水题(5)
a.总结(1)
b.hzwer分块入门(9)
更多

随笔档案
2019年9月(3)
2019年8月(43)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}gcd(i,j)=\sum_{x=1}^{n}\left(x*\sum_{d=1}^{[\frac{n}{x}]}\left(\mu(d)*[\frac{n}{dx}]*[\frac{m}{dx}]\right)\right)$$

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\frac{lcm(i,j)}{gcd(i,j)}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\frac{ij}{gcd(i,j)^2}=(n!)^{2n}*\left(\prod_{x=1}^{n}x^{2pre\phi([\frac{n}{x}])-1}\right)^{-2}$$

> 可能需要欧拉定理，注意乘法逆元的使用

$$gcd(x^a-y^a,x^b-y^b)=x^{gcd(a,b)-y^{gcd(a,b)}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}i[gcd(i,j)=1]=\sum_{i=1}^{n}i\sum_{j=1}^{i}[gcd(i,j)=1]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}i\phi(i)$$

> 这个直接用欧拉函数就好了

$$\sum_{i=1}^{n}i[gcd(i,n)=1]=\frac{[n=1]+n\phi(n)}{2}$$

> 1–n中与n互质的数的个数显然是$\phi(n)$，而这里需要求的不是个数而是求这些数的和。推导如下：
> 先把条件式$[gcd(i,n)==1]$反演一下:
>
> $$\sum_{i=1}^{n}i\sum_{d|gcd(i,n)}\mu(d)=\sum_{i=1}^{n}i\sum_{d|i且d|n}\mu(d)$$
>
> 然后改为枚举d
>
> $$\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\sum_{i=1}^{n}i[d|i且d|n]=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\sum_{i=1}^{\frac{n}{d}}id[d|n]=\sum_{d|n}\mu(d)d\sum_{i=1}^{\frac{n}{d}}i$$
>
> 然后等差数列求一下和：
>
> $$\sum_{d|n}\mu(d)d\frac{(1+\frac{n}{d})*\frac{n}{d}}{2}$$
>
> 由于d|n，所以$\frac{n}{d}$就是整数，所以$d*[\frac{n}{d}]=n$，所以：
>
> $$\sum_{d|n}\mu(d)\frac{(1+\frac{n}{d})n}{2}=\frac{n}{2}\sum_{d|n}\mu(d)(1+\frac{n}{d})=\frac{n}{2}\left(\sum_{d|n}\mu(d)+\sum_{d|n}\frac{\mu(d)n}{d}\right)$$
>
> 注意到欧拉函数和莫比乌斯函数的关系：$\sum_{n|d}\frac{\mu(d)}{d}=\frac{\phi(n)}{n}$带入上式:
>
> $$\frac{n}{2}\left(\sum_{d|n}\mu(d)+n*\frac{\phi(n)}{n}\right)=\frac{n}{2}([n==1]+\phi(n))=\frac{[n==1]+n\phi(n)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}j[gcd(i,j)=1]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i\phi(i)+\frac{[n>=1]}{2}$$

> 推导：用上面的就行了

3.d

$$d(i*j)=\sum_{x|i}\sum_{y|j}[gcd(x,y)==1]$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}d(i*j)=\sum_{d=1}^{n}\left(\mu(d)*pred([\frac{n}{d}])*pred([\frac{m}{d}])\right)$$

4.μ

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{[\frac{m}{i}]}ij\mu(i)=1$$

$$\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=\frac{\phi(n)}{n}$$

5.ϕ

$$\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=\frac{\phi(n)}{n}$$

$$\sum_{d|n}\phi(d)=n$$

6.σ

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sigma(gcd(i,j))=\sum_{x=1}^{n}\sigma(x)\sum_{d=1}^{[\frac{n}{x}]}\left(\mu(d)*[\frac{n}{dx}]*[\frac{m}{dx}]\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sigma(gcd(i,j))*[\sigma(gcd(i,j))<=a]=\sum_{k=1}^{n}[\frac{n}{k}][\frac{m}{k}]g(k),\text{其中}g(k)=\sum_{d|k}\sigma(d)*[\sigma(d)<=$$

> 这里分块，然后$g(k)$的区间和用线段树维护，每次a修改，用线段树给$g(k)$修改

7.因子相关

$$f(x)=\sum_{i=1}^{[sqrt(x)]}\mu(i)*[\frac{x}{i^2}]$$

> [1,x]范围内所有数不含平方因子的数的数量

8.一些求和

$$\sum_{i=1}^{n}i^3=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}ij=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

> 上面这两个是伯努利多项式，暂时还没学

更新中...

分类: a.总结

« 上一篇： 洛谷P1390 公约数的和 欧拉函数+容斥+线性筛
» 下一篇： 洛谷P3455 [POI2007]ZAP-Queries 莫比乌斯反演+整除分块