组合数学（5）容斥原理与反演

慎独
爱好动漫喜欢数学的普通废物

pid:86966881

> 算无遗策，画无失理——三国魏·曹植《王仲宣诔》

在这个系列的第一篇就提到过，组合数学是数数的艺术，可以说大部分组合数学的问题都在于求某个特定的集合的大小，而容斥原理（**The Principle of Inclusion and Exclusion**），**简称PIE**，就是一个非常有力的工具。

定理： 容斥原理

$|X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n| = \sum_i |X_i| - \sum_{i<j} |X_i \cap X_j| + ... + (-1)^{n-1} |X_1 \cap ... \cap X_n|$

令 X 为所有 X_i 的集合，则可以写成

$|\bigcup_{i=1}^n X_i| = \sum_{Y \subseteq X} (-1)^{size(Y)-1} |\bigcap_{e \in Y} e|$

proof：常规证法是数学归纳法+，除了写起来麻烦一点以外没有什么难度。

巧妙一点的证法是考虑某个元素对等式左右两边的贡献。

假设某个元素在 k 个 X_i 集合中

当 $size(Y) = 1$，被加了 C_k^1 次

当 $size(Y) = 2$，被减了 C_k^2 次

当 $size(Y) = 3$，被加了 C_k^3 次

$\vdots$

当 $size(Y) = k$，被加了 $(-1)^{k-1} C_k^k$ 次

全部加起来

$$\begin{aligned} & C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 + \cdots + (-1)^{k-1} C_k^k \\ & = 1 - (C_k^0 - C_k^1 + C_k^2 - C_k^3 + \cdots + (-1)^k C_k^k) \\ & = 1 - (1-1)^k \\ & = 1 \end{aligned}$$

于是任意元素对等式左右两边的贡献都是 1，等式成立

另外，由德摩根定律+，容斥原理还可以写成

$|\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap ... \cap \overline{X_n}| = |\Omega| - \sum_i |X_i| + \sum_{i<j} |X_i \cap X_j| + ... + (-1)^k |X_1 \cap ... \cap X_n|$

广义容斥原理+

把上述 X_i 看做满足某种性质的元素组成的集合，上面的容斥原理只能求出满足所有性质或者不满足任何一条性质的元素个数，适用范围还是有些狭窄，如果我们想要求出恰好满足 $m(m \le n)$ 条性质的元素个数呢，就要用到广义的容斥原理。

定理：广义容斥原理

下面在集合 Ω 上讨论不同性质形成的子集 $X_1, X_2 \cdots X_n$

记 $\alpha(m) = \sum |X_{i1} \cap X_{i2} \cap \cdots \cap X_{im}|$

$\beta(m)$ 为恰好满足 m 条性质的元素个数

则 $\beta(m) = \sum_{k=m}^n (-1)^{k-m} \binom{k}{m} \alpha(k)$

proof:下面采用考虑贡献的方法证明

对于 $s \in \Omega$,假设 s 有 l 种性质

- 若 $s < m$

该元素对等式两边贡献均为0

- 若 $s = m$

该元素对等式两边贡献均为1

- 若 $s > m$

该元素对等式左边贡献为0，对等式右边

在 $\alpha(m)$ 被计算 $\binom{l}{m}$ 次

在 $\alpha(m+1)$ 被计算 $\binom{l}{m+1}$ 次

...

在 $\alpha(l)$ 被计算 $\binom{l}{l}$ 次

对等式右边贡献为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=m}^{l}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}\binom{l}{k} \\
&=\sum_{k=m}^{l}(-1)^{k-m}\binom{l}{m}\binom{l-m}{k-m} \\
&=\binom{l}{m}(1-1)^{l-m} \\
&=0
\end{aligned}
$$

顺便一提，上面我们用德摩根定律得到的式子其实就是广义容斥原理 $m=0$ 的情况

容斥原理的应用在于根据题意去构造满足合适性质的子集，下面看一个应用。

在组合数学（4）指数型、狄利克雷型生成函数中，我们通过**指数型生成函数**解决了全错排问题，下面我们用**容斥原理**解决一下。

解：设 Ω 为 $1,2,...,n$ 组成的全体排列，则 $|\Omega|=n!$

令 X_i 表示第 i 个数字在原位上的集合

则我们要求的全错排+的大小为 $|\overline{X_1}\cap\overline{X_2}\cap...\cap\overline{X_n}|$

而

$\sum_i |X_i| = C_n^1(n-1)!$

$\sum_{i<j} |X_i\cap X_j| = C_n^2(n-2)!$

...

$|X_1\cap...\cap X_n| = C_n^n(n-n)!$

代入容斥原理的公式得，

$d(n)=n!-C_n^1(n-1)!+C_n^2(n-2)!+...+(-1)^nC_n^n0!$

把组合数展开，约分

$d(n)=n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$

相比生成函数的方法简便一些。不过具体问题还是要具体分析，找到最合适的方法。

容斥原理讲完了，到标题的另一个重点了，**反演**

定义：对于数列 f_n **和**g_n ，若它们可以互相线性表出+，即存在 $a_{i,j}$ $b_{i,j}$ 使得

$g_n=\sum_{i=0}^{n}a_{n,i}f_i$ 和 $f_n=\sum_{i=0}^{n}b_{n,i}g_i$ ，则称它们可以相互反演

事实上，**求解反演就像求解矩阵的逆的过程**，我们知道这个过程对于一般的情况并不容易，但是针对一些特定的情况我们还是可以求解的

性质：把 g_n 代入 f_n ，有

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_{i=0}^{n} b_{n,i} g_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} b_{n,i} \sum_{j=0}^{i} a_{i,j} f_j \\ &= \sum_{i=0}^{n} f_i \sum_{j=i}^{n} b_{n,j} a_{j,i} \end{aligned}$$

不难发现，$\sum_{j=i}^{n} b_{n,j} a_{j,i} = \delta_{n,i}$ 是它们反演的充要条件

其实反演不局限于**数列**，**函数**或者**集合**均可进行反演，下面简单介绍一下

二项式反演

$f_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} g_i \iff g_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_i$

直接根据上面那个充要条件验证就行

另外, 二项式反演也可以看做广义容斥原理的另一种表达

Stirling 反演

$g_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\} f_k \Leftrightarrow f_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} g_k$

同样代进去验证就行，之后应该会有一篇文章写stirling数的

Min-Max 反演

设 S 为一个集合, min和max 为集合的最小/最大元素, 那么有

$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

$\min(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \max(T)$

kth Min-Max反演

$kthMax(S) = \sum\limits_{S' \subseteq S} Min(S') * (-1)^{|S'|-k} * \binom{|S'|-1}{k-1}$

$kthMin(S) = \sum\limits_{S' \subseteq S} Max(S') * (-1)^{|S'|-k} * \binom{|S'|-1}{k-1}$

最值反演是最后一个的特殊情况，这里就证明最后一个了

证明：构造容斥系数

$kthMax(S) = \sum\limits_{S' \subseteq S} Min(S') * f_{|S'|}$

考虑第 $x+1$ 值的贡献，也就是有多少个集合的最小值是全集的第 $x+1$ 大值，得 $\sum\limits_{i=0}^{x} \binom{x}{i} * f_{i+1}$ ，再考虑对全局的影响，当 $x = k-1$ 有贡献，令 $g(x) = [x = k-1] = \sum\limits_{i=0}^{x} \binom{x}{i} * f_{i+1}$

很舒服，这里可以直接套用二项式反演的结论

$$f_{x+1}=\sum_{i=0}^{x}\binom{x}{i}*g_i*(-1)^{x-i}=(-1)^{x-k+1}*\binom{x}{k-1}$$

于是 $f_x=(-1)^{x-k}*\binom{x-1}{k-1}$

进而 $kthMax(S)=\sum\limits_{S'\subseteq S}Min(S')*(-1)^{|S'|-k}*\binom{|S'|-1}{k-1}$

另一个式子同理可证

ps.最后面的内容在一般数学本科教学中不太会出现，更多的可能是在OI中吧，233

编辑于 2021-02-10 10:44

组合数学（Combinatorics） 数学 反演定理