

- ข้อ 7.12: ให้  $MODEXP = \{\langle a, b, c, p \rangle \mid a^b \equiv c \pmod{p}\}$  จงพิสูจน์ว่า  $MODEXP \in P$
- ข้อ 7.15: จงพิสูจน์ว่า star operation closed บน NP
- ข้อ 7.22: ให้  $HALF-CLIQUE = \{\langle G \rangle \mid G \text{ เป็น undirected graph ที่มี clique ขนาดอย่างน้อย } \frac{n}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ คือจำนวนจุดยอด}\}$  จงพิสูจน์ว่า  $HALF-CLIQUE$  เป็น NP-complete
- ข้อ 7.38: จงพิสูจน์ว่า ถ้า  $CLIQUE \in P$  เราจะมีวิธีหา subgraph ที่เป็น clique ขนาดใหญ่ที่สุดของ undirected graph ใดๆ ได้ใน polynomial time

- ข้อ 7.31: มีตารางขนาด  $n \times n$  ในแต่ละช่องจะมีหินสีแดง ก้อนหนึ่ง หรือหินสีฟ้าก้อนหนึ่ง หรือไม่มีเลย เป้าหมายของคุณคือ เลือกหยิบหินออกจากบางช่อง เพื่อให้

1. ทุกแถวแนวนอน มีหินเหลืออยู่อย่างน้อย 1 ก้อน
2. ทุกแถวแนวตั้ง มีหินอยู่เพียงสีเดียวเท่านั้น

พิจารณาปัญหา ให้นำหน้าตาของตารางเริ่มต้นมา แล้วคำนวณว่า สามารถทำตามเป้าหมายได้หรือไม่

จงพิสูจน์ว่าปัญหานี้เป็น NP-complete

7.12) When receive  $\langle a, b, c, p \rangle$  run this algorithm

```

Cout ← 1
for i in 1 to b
    Cout ← (Cout * a) mod p

```

if  $c$  is equal to  $C_{out}$  accepts. Otherwise, rejects.

7.15) Let  $A \in NP$ , let construct  $M$  to decide  $A$ .

On input  $w$ :

1. nondeterministic divide  $w$  in to  $w_1, w_2, \dots, w_k$
2. nondeterministic guess certificate  $cer_i$  for each  $w_i$
3. verify all  $\langle w_i, cer_i \rangle$ , if exist some branch pass all verify, accepts. Otherwise, rejects.

7.22) To show that  $HALF-CLIQUE \in NP$ , on input  $\langle G \rangle$  nondeterministic select  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  node,  $n$  is number of node of  $G$  then check if selected node are all fully connected.

To show that  $HALF-CLIQUE \in NP$ -Complete, reduce  $CLIQUE$  to  $HALF-CLIQUE$  by on input  $\langle H, k \rangle$  if  $H$  have  $m$  node, construct  $H'$  by Consider if

1)  $k < \frac{m}{2}$ ;  $k+x \geq \frac{m+x}{2}$ ;  $x \geq m-2k$ , then we add  $m-2k$  nodes where these nodes fully connected to each other and each of them connected to all origin node of  $H$

2)  $k \geq \frac{m}{2}$ ;  $k+x \leq \frac{m+x}{2}$ ;  $x \leq m-2k$ , then we add  $m-2k$  nodes where these nodes just stand alone without any edges

$HALF-CLIQUE$  accept  $\langle H' \rangle$  iff  $CLIQUE$  accept  $\langle H, k \rangle$

7.31) This problem since if we got a certificate, we can verify by remove stone as certificate and check if those constrain satisfy then accepts, otherwise rejects.

To proof that this problem is NP-complete, we will show that SAT can reduce to this problem.

Let SAT have  $q$  variable  $x_1, \dots, x_q$  and  $r$  clauses  $c_1, \dots, c_r$  we solve in game table size  $\max(q, r) \times \max(q, r)$  by for each clause  $c_i$  if it have  $x_j$ ; put blue stone at row  $i$  column  $j$ , if  $\bar{x}_j$ ; then put red stone at row  $i$  column  $j$ .

Now show that game solvable iff SAT satisfiable. If game can solve, for each column  $j$  if it have blue stones left mean that  $x_j$  is true, but if red stones left mean that  $x_j$  is false. And SAT also satisfied since every row have at least one stone imply every clauses exist some true sub-clause. In converse, if SAT is satisfied, if  $x_j$  is true then column  $j$  must has only blue stones, if  $x_j$  is false then column  $j$  must has only red stones. And game also solved since every column has only one colour and every row  $i$  has at least one stone since SAT is satisfied which clause  $i$  must has some true sub-clause.

7.38) If assume  $\text{CLIQUE} \in P$ , we can find largest clique of  $G$  by iterate  $i$  from 1 to number of nodes and test whether  $\langle G, i \rangle$  is accept, let  $I$  is the biggest  $i$  that accept. Then, for each node remove it as  $G'$  and test if  $\langle G', I \rangle$  still accept then remove that node ortherwise, keep that node. The graph in the end is the largest clique of  $G$ .

• if  $A \in \text{Time}(f(n))$ ,  $f(n) = o(n \log n)$ ;  $A$  is regular language

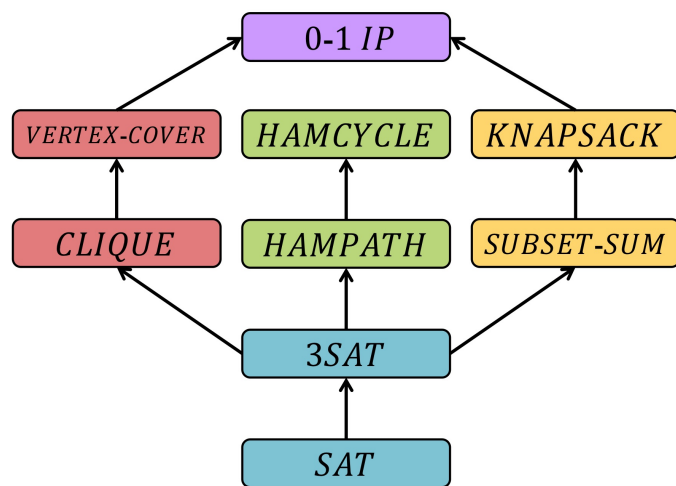
• multitape TM use  $t(n) \equiv \text{TM use } O(t^2(n))$

•  $\text{CFL} \in \text{P}$  •  $A \leq B$ ;  $B$  decidable  $\rightarrow A$  decidable  
 $A$  undecidable  $\rightarrow B$  undecidable

• NP-Completeness; 1.) NP-hard ( $\forall \text{NP} \leq_p \text{NP-hard}$ )  
 2.) It's in NP

•  $A \in \text{co-NP} \leftrightarrow A' \in \text{NP}$  •  $\text{NP} = \text{co-NP} \leftrightarrow \text{P} = \text{NP}$

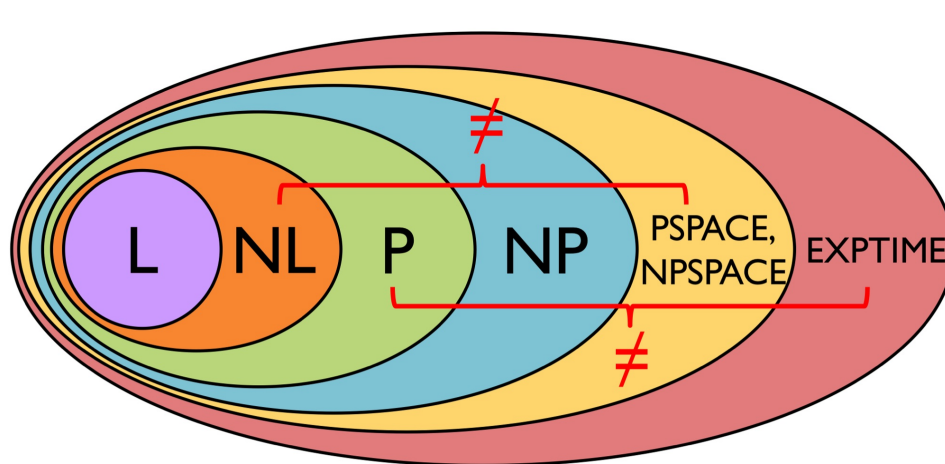
•  $A \in \text{co-NP-complete} \leftrightarrow A' \in \text{NP-complete}$ ; have certificate to answer 'no'



• Savitch's theorem:  $\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{SPACE}(f^2(n))$  when  $f(n) \geq \log n$

•  $\text{PSPACE} = \bigcup_k \text{SPACE}(n^k)$ ,  $\text{NPSPACE} = \bigcup_k \text{SPACE}(2^{n^k})$  •  $A \in \text{PSPACE-hard}$  imply  $A \in \text{NP-hard}$

•  $\text{NL} = \text{coNL}$  •  $2\text{SAT}$ ,  $A_{\text{NFA}}$ ,  $E_{\text{DFA}}$  is NL-complete •  $A_{\text{DFA}} \in \text{L}, \text{P}$



union  
 concat  
 star  
 intersect  
 complement

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| ✓ | ✓ | 0 | ✓ |

ปัญหาที่ถูกพิสูจน์แล้วว่าเป็น **NP-complete**

- **HAMPATH** (directed graph  $G$  มี Hamiltonian path จาก  $s$  ไป  $t$  หรือไม่)
- **HAMCYCLE** (directed graph  $G$  มี Hamiltonian cycle หรือไม่)
- **UHAMPATH** (undirected graph  $G$  มี Hamiltonian path จาก  $s$  ไป  $t$  หรือไม่)
- **UHAMCYCLE** (undirected graph  $G$  มี Hamiltonian cycle หรือไม่)
- **CLIQUE** (undirected graph  $G$  มี  $k$  จุดที่ทุกคู่มี edge เชื่อมกันหมดหรือไม่)
- **VERTEX-COVER** (undirected graph  $G$  สามารถระบายสีแดง  $k$  จุด ให้ทุก edge แต่ละจุดสีแดงได้หรือไม่)
- **SUBSET-SUM** ( $S$  มีสับเซตที่ผลรวมสมาชิกเท่ากับ  $t$  หรือไม่)
- **KNAPSACK** (สามารถหยิบของให้มูลค่ารวมอย่างน้อย  $k$  และน้ำหนักรวมไม่เกิน  $b$  ได้หรือไม่)
- **0-1 IP** (0-1 integer programming)
- **SAT** (Boolean satisfiability)
- **3SAT** (Boolean satisfiability ที่ทุก clause มี 3 ตัว)

ปัญหาที่ยังไม่ถูกพิสูจน์ว่าเป็น **NP-complete** แต่ก็ยังไม่มี **polynomial time algorithm**

- **ISO** (undirected graph  $G$  และ  $H$  isomorphic กันหรือไม่)
- **FACTOR** ( $k$  มีตัวประกอบที่มากกว่า 1 แต่ไม่เกิน  $a$  หรือไม่)

ปัญหาที่มี **polynomial time algorithm**

- **PATH** (directed graph  $G$  มี path จาก  $s$  ไป  $t$  หรือไม่)
- **UPATH** (undirected graph  $G$  มี path จาก  $s$  ไป  $t$  หรือไม่)
- **PRIMES** ( $k$  เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่)
- **2SAT** (Boolean satisfiability ที่ทุก clause มี 2 ตัว)