COURS NO5

CHAPITRES 4, 5, 10 et 14

- Taux d'intérêts nominaux et effectifs
- Périodes de paiement (PP) et de capitalisation (PC)
- Le coût immobilisé
- Les obligations
- L'incidence de l'inflation
- Dollars courants vs dollars constants
- Le calcul du coût du capital et du taux de rendement acceptable minimum (TRAM)

TAUX D'INTÉRÊT NOMINAL ET EFFECTIF

- Le **taux d'intérêt nominal** (**r**) est un taux d'intérêt qui **ne tient pas compte de la capitalisation (composition des intérêts).**

Par exemple, si le taux d'intérêt est de 4% par période et que la période d'intérêt est de 6 mois, on parlera d'intérêt de 8% nominal composé semi-annuellement (ou semestriellement).

- Le **taux d'intérêt effectif** (***i***) est le **taux réel** qui s'applique à une période donnée. Il tient compte de la capitalisation de l'intérêt au cours de la période du taux nominal correspondant.

Pour bien rendre compte de la valeur temporelle de l'argent, les formules, les facteurs et les valeurs des tables doivent être associés à un **taux d'intérêt effectif**.

LES TROIS UNITÉS DE TEMPS

- Période: période sur laquelle porte l'intérêt stipulé
  - Exemple : « 1 % par mois »

- Période de capitalisation **(PC)** : unité de temps la plus courte sur laquelle l'intérêt est couru
  - Exemple : « 8 % par année **capitalisé** mensuellement »

- Fréquence de la capitalisation **(m)**: nombre de fois *m* où la capitalisation se produit au cours de la période *t.*
  - Exemple : « 1 % par mois capitalisé mensuellement » → $m = 1$
  - Exemple : « 10 % par année capitalisé mensuellement » → $m = 12$

NOTATION

- r = taux **d'intérêt nominal** par **année**
- r_p = taux **d'intérêt nominal** par période (r ÷ nombre de périodes p dans l'année. Ex: r_p par trimestre=r/4)
- m = nombre de périodes de **capitalisation d'intérêt par année**
- i = taux **d'intérêt effectif** par **année**
- i_{PC} = taux **d'intérêt effectif** par période de capitalisation (PC) = ***r* / m**
- i_{PP} = taux **d'intérêt effectif** par période de paiement (PP)
- v = nombre de versements (paiements) par **année**
- PC = période de capitalisation
- PP = période de paiement (versement)
- n_a = nombre **d'années**
- n = nombre de périodes

TAUX D'INTÉRÊT NOMINAL ET EFFECTIF (suite)

FRÉQUENCES DE CAPITALISATION DE L'INTÉRÊT:

Taux nominal: - quotidienne: $m = 365$

- mensuelle : $m = 12$
- trimestrielle : $m = 4$
- semestrielle : $m = 2$

Taux effectif: - annuelle: $m = 1$

Le nombre de périodes de calcul d'intérêt sera ajusté par:

$n = n_a \times m$

Exemples de taux d'intérêt nominaux

Taux nominal=Taux par période x nombre de périodes

1,5 % par mois pendant 24 mois

Équivaut à : (1,5%)(24 mois) = 36 % par période de 24 mois

1,5 % par mois pendant 24 mois

Équivaut à : (1,5%)(12 mois) = 18 % par année

1,5 % par semestre pendant 1 an

Équivaut à : (1,5%)(2 semestres) = 3 % par année

CONVERSION DES TAUX NOMINAUX **

Taux nominal par année (r) =
taux nominal par période (r_p) x nombre de périodes dans l'année

EXEMPLE :

- 0,75% par mois capitalisé trimestriellement
- 0,75%*3=2,25% par trimestre capitalisé trimestriellement
- Soit 2,25%*4 = 9 % par année capitalisé trimestriellement

- 3% par semestre capitalisé annuellement

  3% * 2 = 6 % par année capitalisé annuellement

TAUX EFFECTIF

**

- Formule du *taux annuel effectif*:

$$i = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} - 1$$

Exemple : *r* = 9 % par année capitalisé mensuellement; *m*=12

$\boldsymbol{i} = (1+9\%/12)^{12/1} - 1 =$ 9.38 % par année

- *Taux effectif* par période de capitalisation **PC** *(i_{PC})* :

$$i_{PC} = \frac{r\text{\% par année}}{\text{nombre de périodes de capitalisation par année}} = \frac{r}{m}$$

$\boldsymbol{i}_{\text{par mois}} = 0{,}09/12 = 0{,}0075$ ou 0,75 %/mois

- *Taux effectif par période de paiement pp ($\boldsymbol{i}_{pp}$):*

$r_p \Rightarrow r \Rightarrow i_{pp}$

$$i_{pp} = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{v}} - 1$$

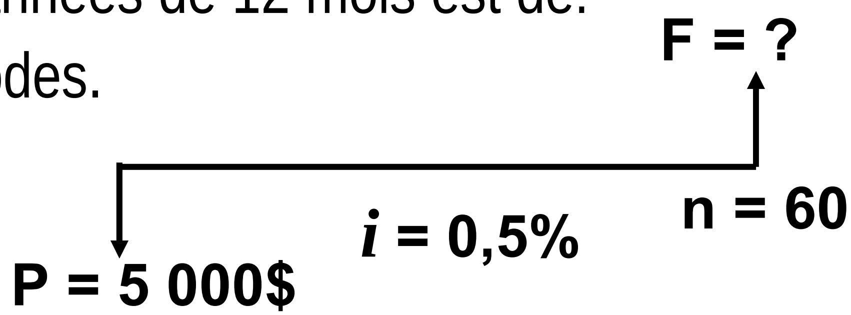
$\boldsymbol{i_{PP}}$ = Taux d'intérêt effectif par PP
$\boldsymbol{r}$ = Taux nominal par année
$\boldsymbol{v}$ = Nombre de flux dans une année
$\boldsymbol{m}$ = Nombre de PC d'intérêt par année
$\boldsymbol{n}$ = Nombre total de PP (nombre de PP par année x nombre d'années)

Exemple 1

Calculez la valeur future dans 5 ans d'un montant actuel de 5 000 $ produisant un taux d'intérêt de 6 % par année composé mensuellement.

1 seul montant alors utiliser i_{pc} et $n = n_a * m$

- Le taux effectif par mois: $i_{mois} = 6\ \%/12 = 0{,}5\ \%$.
- Le nombre total de PC sur 5 années de 12 mois est de: $n = n_a \times m = 5 \times 12 = 60$ périodes.



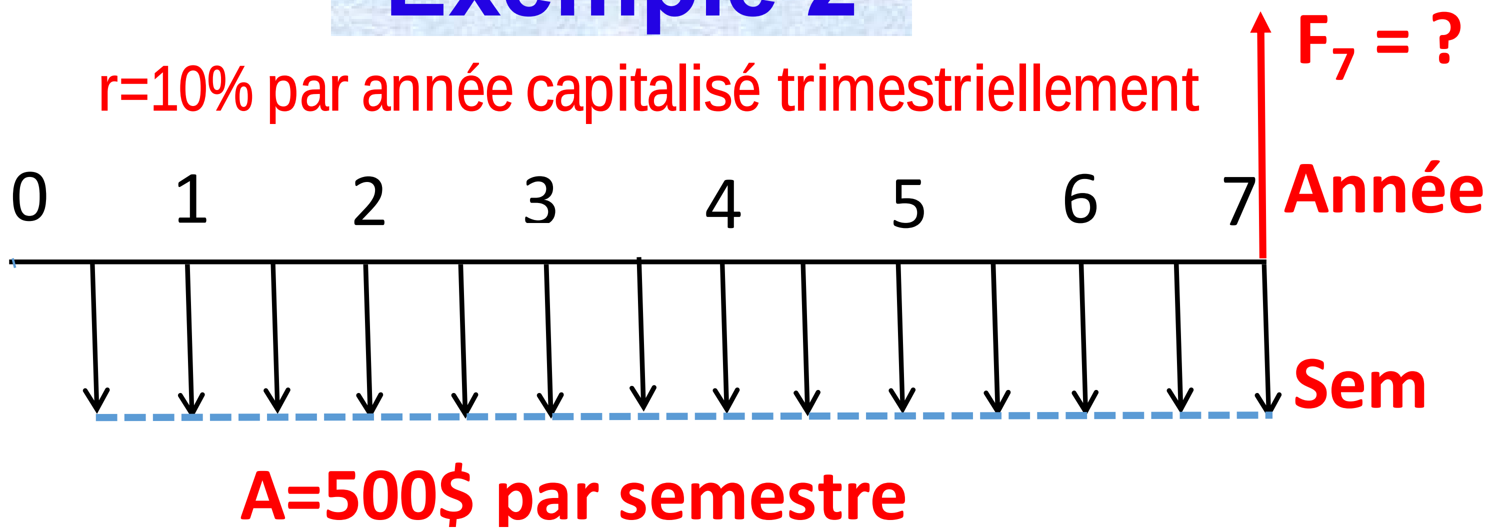
ou

$F = 5\,000(F/P;0{,}5\%;60)$
$= 5\,000(1{,}3489)$
$= 6\,744\ \$$

$$i = \left(1 + 6\%/12\right)^{12} - 1 = 6{,}17\%$$

$$F = 5\,000 \times (1+6{,}17)^5 = 6\,744\ \$$$

Exemple 2



Annuités (v flux dans l'année) alors utiliser i_{pp} et $n = n_a * v$

Solution

$i_{semestre}$**=(1+10%/4)$^{(4/2)}$-1=5,0625% <u>par semestre</u>**

Détermination de *F* à la fin du 14^{e} semestre (fin de la 7^{e} année):

F **= 500(*F*/*A*;5.0625%;14) = 500(19,68385)**
= 9 841,93 $

TAUX EFFECTIF: CAPITALISATION CONTINUE

**

Le taux d'intérêt effectif annuel s'obtient en utilisant l'équation suivante:

$$i = \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/v} - 1\right]$$ donc $$i = e^{r/v} - 1$$

Quand les *flux sont annuels v = 1*, on a:

$$i = e^{r} - 1$$

Taux d'intérêt effectif par période i_p:

$$i_p = e^{r_p} - 1$$

Exemple: Trouver le taux d'intérêt effectif par trimestre si r=12% par année, capitalisation d'intérêt continue et v=1. r_p**=12%/4=3% (taux par trimestre)**

$$i_{trimestre} = e^{0,03} - 1 = 3,045\%$$

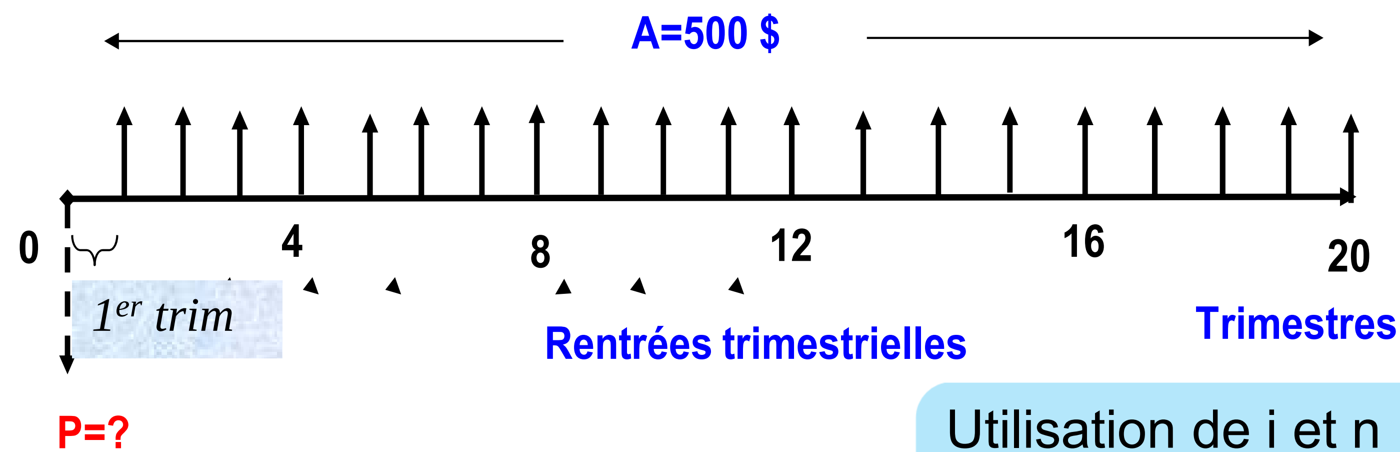
Exemple: composition continue

Une série de rentrées trimestrielles de 500$ s'étend sur une période de 5 ans. Quelle est sa valeur actualisée en fonction d'un taux d'intérêt de 8% par année, se composant continuellement

$$i = e^{r/v} - 1$$

$$i_{[\text{ trim}]} = e^{0.08/4} - 1$$

Taux d'intérêt par période: *i*= 2.02% par trimestre



P = A (P/A, 2.02%, 20)
= 500 \$ (16.3199)
= 8 159.96\$

Utilisation de i et n dans la formule d'équivalence

n=4 rentrées/an x 5 ans = 20

TAUX D'INTÉRÊT VARIABLES

- Cas de **montants différents**: calcul de la valeur actualisée P

  $P = F_1(P/F;i_1;1) + F_2(P/F;i_2;1)(P/F;i_1;1) + \ldots$
  $+ F_n(P/F;i_n;1)(P/F;i_{(n-1)};1) \ldots (P/F;i_2;1)(P/F;i_1;1)$

- Cas de **montant unique**: calcul de la valeur actualisée P

  $P = F_n(P/F;i_n;1)(P/F;i_{(n-1)};1) \ldots (P/F;i_2;1)(P/F;i_1;1)$

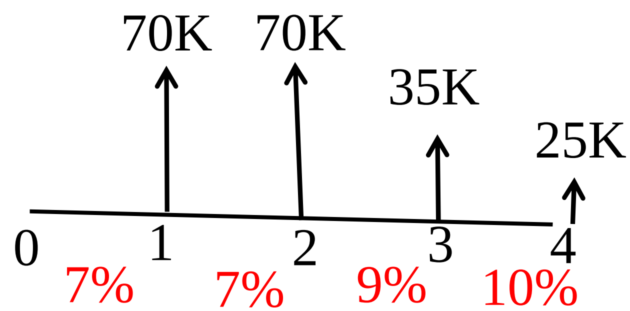
- Calcul de **l'annuité équivalente** (A): trouver d'abord la valeur P à l'aide de l'une des deux dernières équations précédentes, puis remplacer chaque symbole F_t par le symbole A.

$A = P / [\, (P/F;i_1;1) + (P/F;i_2;1)(P/F;i_1;1) + \ldots$
$+ (P/F;i_n;1)(P/F;i_{(n-1)};1) \ldots (P/F;i_2;1)(P/F;i_1;1)\,]$

TAUX D'INTÉRÊT VARIABLES: exemple 4.12

Déterminez la valeur actualisée **P** et la valeur équivalente **A** des flux monétaires nets (FMN) suivants en considérant les taux indiqués.

Année	**1**	**2**	**3**	**4**
FMN	70 000	70 000	35 000	25 000
Taux annuel	7 %	7 %	9 %	10 %



Solution

P = [70 000(P/A;7 %;2) + 35 000(P/F;9 %;1)(P/F;7 %;2)
+ 25 000(P/F;10 %;1)(P/F;9 %;1)(P/F;7 %;2)]

= [70 000(1,8080) + 35 000(0,8013) + 25 000(0,7284)]

= 172 816 $

A: 172 816 $ = A(1,8080 + 0,8013 + 0,7284)

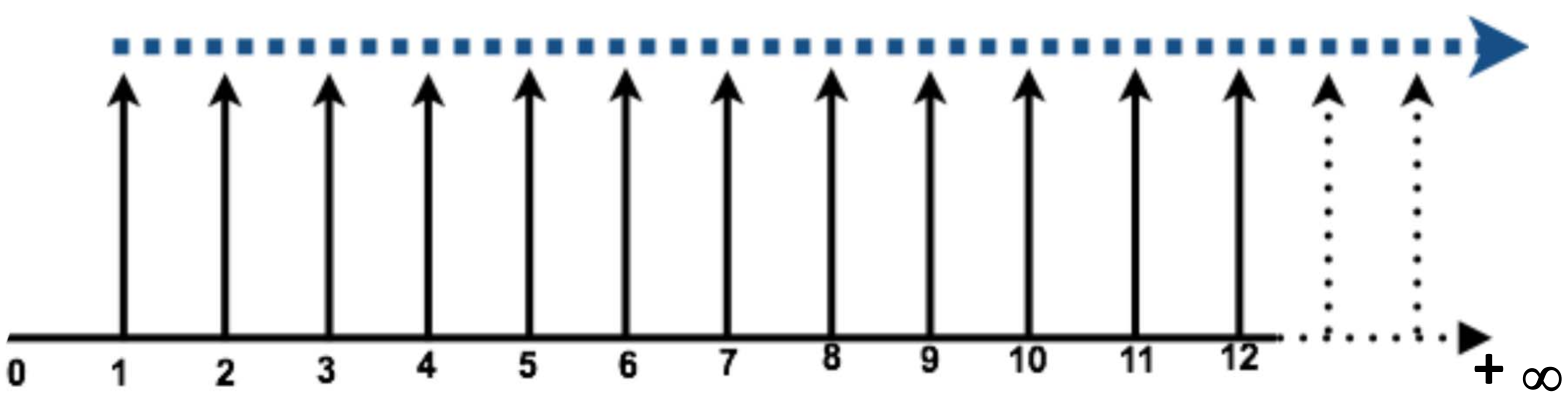
A = 172 816 $ / 3,3377 = 51 777$

LE COÛT IMMOBILISÉ : calcul et analyse

- **Coût immobilisé (valeur actualisée d'une annuité infinie)**
  - **Valeur actualisée** d'un projet d'une durée illimitée
  - Méthode d'analyse recommandée pour les projets du du **secteur public**

$$P = \frac{A}{i} \quad \text{alors} \quad A = P \times i$$

- **Période d'analyse infinie**
  - La valeur n est très longue, indéfinie ou infinie.



Le facteur *P/A* avec *n* tendant vers l'infini

Facteur *P*/A :

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

Diviser le numérateur et le dénominateur par $(1+\boldsymbol{i})^n$

$$P = A\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}\right]$$

Si *n* tend vers ∞, l'équation ci-dessus se réduit à :

$$\boxed{\boldsymbol{P = \frac{A}{i}}}$$

Soit **CI**, représentant le « **coût immobilisé** »

$$\boxed{CI = P = \frac{A}{i}}$$

Montant annuel pour toujours :

$$\boxed{A = P\boldsymbol{i} = (\mathrm{CI})\boldsymbol{i}}$$

Exemple sur le coût immobilisé 5.4

Paramètres du problème

Le coût du système à l'installation est de **150 000 $** et les coûts supplémentaires sont de **50 000 $ après 10 ans**.

Les frais de maintenance annuels du logiciel sont de **5 000 $ les 4 premières années, et de 8 000 $ par la suite.**

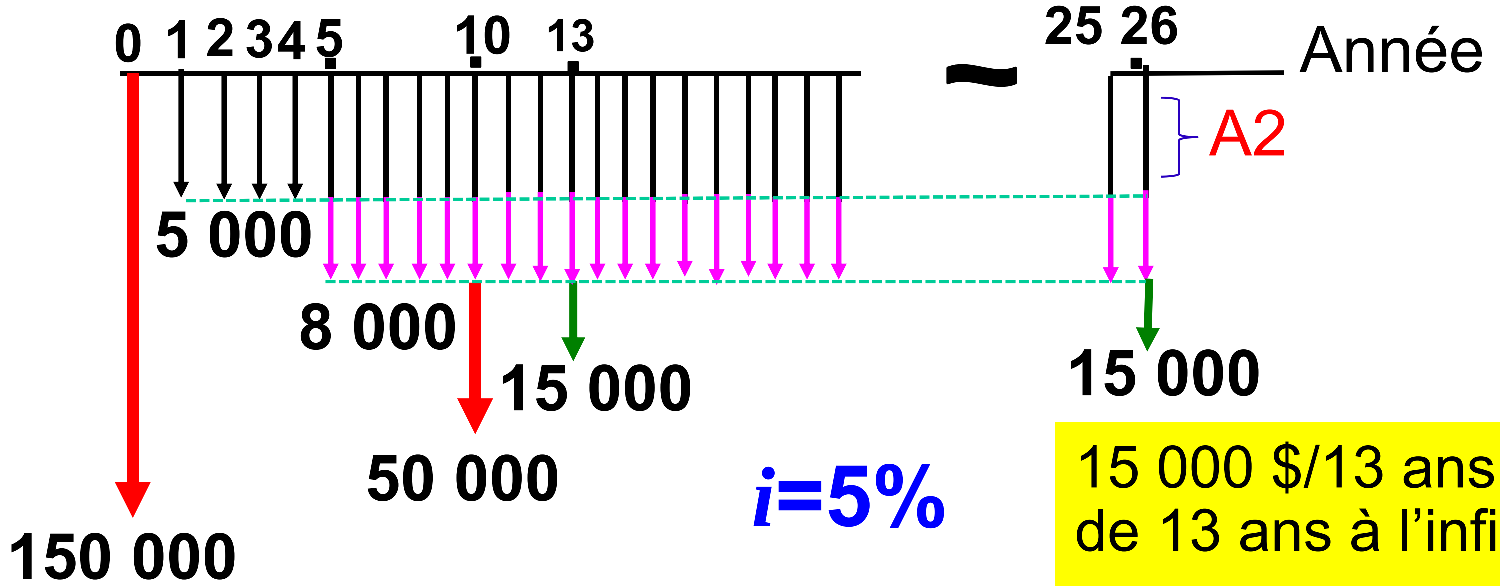
On prévoit également un **coût récurrent de 15 000 $ pour des mises à niveau importantes effectuées tous les 13 ans.** Les calculs sont basés sur ***i* = 5 %** par année pour les fonds de la municipalité.

Déterminez :

1. la valeur actualisée **(P)** des coûts à 5 %;
2. le montant annuel ($/année) **(A)** que devra débourser la municipalité .

Exemple 5.4 - solution

**



15 000 $/13 ans: cycle de 13 ans à l'infini

$A_1 = -15\,000(A/F;5\%;13) = \mathbf{-847{,}00\ \$}$

$A_2 = \mathbf{-5\,000\ \$}$

$CI_1 = -150\,000 - 50\,000(P/F;5\%;10) =$	**-180 695 $**
$CI_2 = (-3\,000/0{,}05)(P/F;5\%;4) =$	**-49 362 $**
$CI_3 = (A_1 + A_2)/i = (-847 - 5\,000)/0{,}05 =$	**-116 940 $**

$CI_T = P = -180\,695\ \$ - 49\,362\ \$ - 116\,940\ \$ =$ **-346 997 $**

$A = Pi = CI_T\,(i) = 346\,997\$ \times 5\% =$ **17 350 $/an pour toujours**

Obligation

- **Obligation** : **Titre d'emprunt à long terme** donnant à son souscripteur le droit de créance sur l'émetteur.
- **Valeur nominale ou valeur au pair** (VN) : valeur unitaire de chaque obligation. Servira de référence pour le calcul des intérêts. Somme remboursée à la fin du prêt.
- **Taux de coupon** : Coupon total <u>annuel</u> divisé par la valeur nominale d'une obligation.
- **Coupons (I)** : Versements d'intérêts. La plupart des obligations canadiennes versent des **coupons** <u>**semestriels**</u>
- **Échéance (n)**: Date à laquelle l'émetteur de l'obligation doit rembourser le capital (ou valeur nominale).
- **Rendement à l'échéance** RAÉ (TRI=i^*): Rendement en tenant compte du prix de l'obligation, de ses coupons et de sa valeur nominale (VN).

VALEUR ACTUALISÉE DES OBLIGATIONS

- Valeur de l'obligation = VA des coupons
  + VA de la valeur nominale
- **Lorsque les taux d'intérêt augmentent,**
  le prix des obligations diminue, et vice versa.

Valeur actualisée d'une obligation

**

L'intérêt est payé **v fois par année**.

$$I = \text{valeur nominale x} \left(\frac{\text{taux d'intérêt nominal}}{\text{nombre de versements par année}} \right)$$

$$I = VN\left(\frac{r}{v}\right)$$

Où:

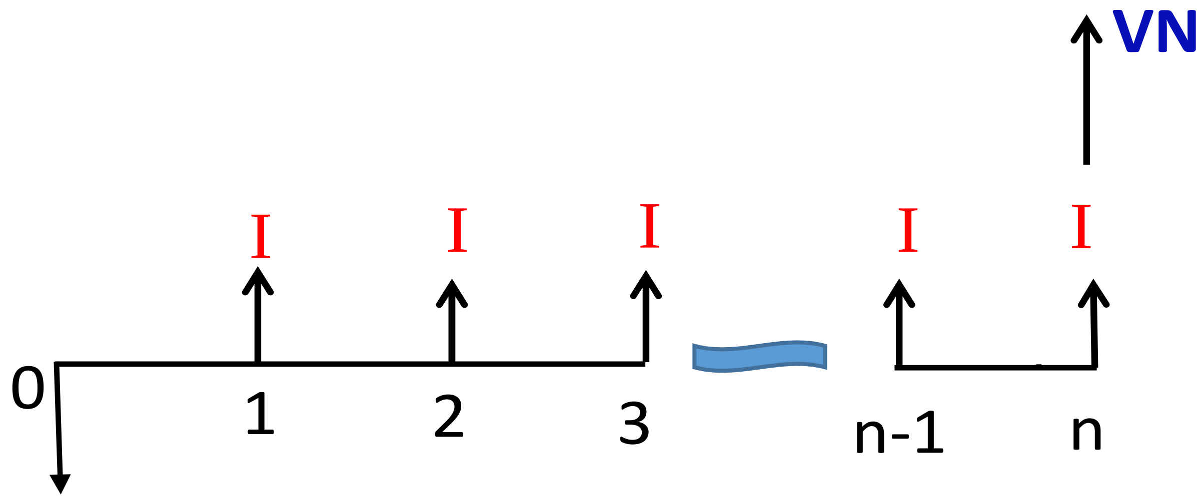
VN= Valeur nominale de l'obligation à l'échéance

r= Taux nominal

v= Nombre de fois que l'intérêt est payé dans l'année

I= Intérêt périodique (**coupon périodique**)

VALEUR D'UNE OBLIGATION – équation



$$I = VN\left(\frac{r}{v}\right)$$

VA=P=Prix à payer aujourd'hui?

$$VA = I\left[\frac{(1+k)^{n}-1}{k(1+k)^{n}}\right] + VN(1+k)^{-n}$$
$$= I(P/A;k;n) + VN(P/F;k;n)$$

I = coupon périodique (connu)
TRAM=**k** = taux de rendement périodique (connu)
VN = valeur nominale (connue)

Exemple 5.10

Émission d'obligations de **5 000 $ sur 10 ans**, pour une valeur totale de **5 millions de dollars**. Chaque obligation rapporte un **intérêt 6 % payable trimestriellement.**

a) Déterminez le montant que recevra un acheteur chaque 3 mois et après 10 ans.

b) On suppose qu'un investisseur achète **une** obligation à 4 900 $, après avoir obtenu un rabais de 2 %. Quels seront les **montants d'intérêts trimestriels et le paiement final à échéance** ?

a) Intérêt trimestriel= VN x (r/v) = 5 000 x (0.06 / 4) = 75$
La valeur nominale de l'obligation est remboursée après 10 ans.

b) L'achat d'une obligation à rabais ne modifie pas les intérêts reçus (75 $ par trimestre) ni le remboursement final (5000$ après 10 ans)

Exemple 5.11

Considérons une obligation d’une valeur nominale **VN** de **5 000 $** qui vient à échéance dans **10 ans.** Le taux de coupon (taux d’intérêt annuel) est de **4,5 %** et les coupons sont versés semestriellement.

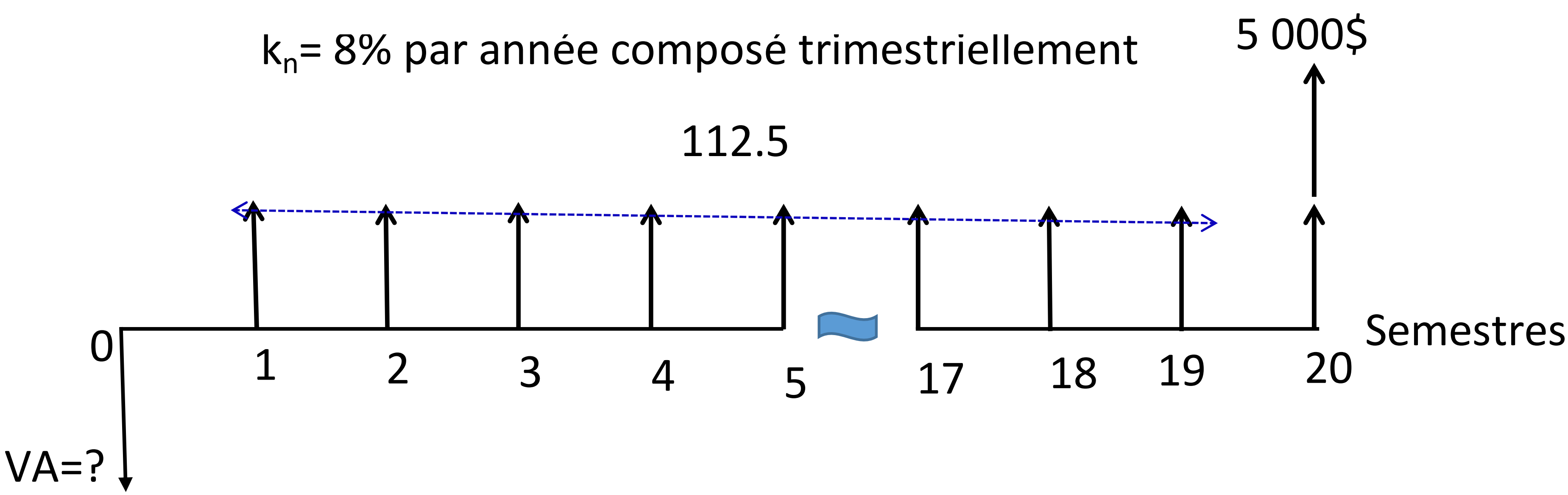
On suppose que le taux de rendement acceptable minimum (TRAM) est de **8% par année composé trimestriellement.**

Combien seriez-vous prêt à payer aujourd’hui pour cette obligation?

Exemple 5.11 - Solution

1) Intérêt semestriel= I= 5 000 x (0.045 / 2) = **112.50$**
La valeur nominale de l'obligation est remboursée après 10 ans.

2) TRAM effectif par semestre=k= $(1+8\%/4)^{(4/2)}-1$= 4.04%
n= 20 semestres

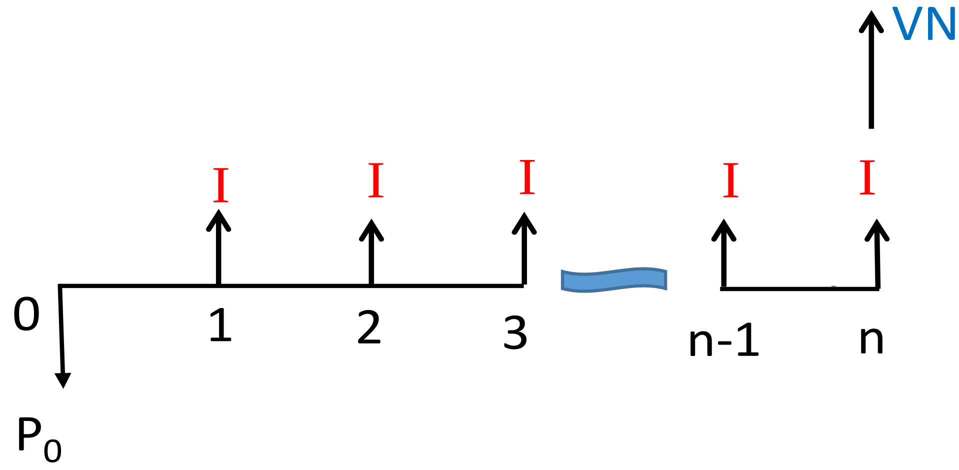


13.54232 **0.45289**

VA=112,50(*P*/*A*;4.04 %;20) + 5 000(*P*/*F*;4.04 %;20) = **3 788 $**

Si le prix demandé pour l'obligation est > à **3 788$**, c'est à rabais, le TRAM ne sera pas atteint.

RENDEMENT À L'ÉCHÉANCE (*i**) D'UNE OBLIGATION



Trouver ***i**** qui rend la valeur actuelle nette **(VAN) =0**

$$\text{VAN}\ (i^*) = -\text{P}_0 + \text{I}\left[\frac{(1+i^*)^{\text{n}}-1}{i(1+i^*)^{\text{n}}}\right] + \text{VN}(1+i^*)^{\text{-n}} = 0$$

$$\text{VAN}\ (i^*) = -\text{P}_0 + I(P/A;i^*;n) + VN(P/F;i^*;n) = 0$$

Procéder par essai-erreur

I = coupon périodique (connu)

i* = taux de rendement de l'obligation (à déterminer)

VN = valeur nominale (connue)

P_0 = Prix d'achat de l'obligation

Calcul du rendement par essai-erreur

L'interpolation peut se faire comme suit:

$$RAÉ = i^* = i_1 + \frac{VAN(i_1)}{VAN(i_1) - VAN(i_2)}(i_2 - i_1)$$

i_1 =taux qui apermis de calculer $VAN(i_1) > 0$

i^* =taux qui annule laVAN $VAN(i^*) = 0$

i_2 =taux qui apermis de calculer $VAN(i_2) < 0$

VAN (i_1) = valeur actuelle nette, calculée avec i_1

VAN (i_2) = valeur actuelle nette, calculée avec i_2

i^*= Rendement à l'échéance de l'obligation (RAÉ)

RENDEMENT À L'ÉCHÉANCE D'UNE OBLIGATION (exemple)

Aujourd'hui, vous avez payé 463.20 $ une obligation échéant dans 5 ans, dont les coupons sont payables semestriellement et dont le taux de coupon est de 10 %. Cette obligation est rachetable à sa valeur nominale, soit 500 $.

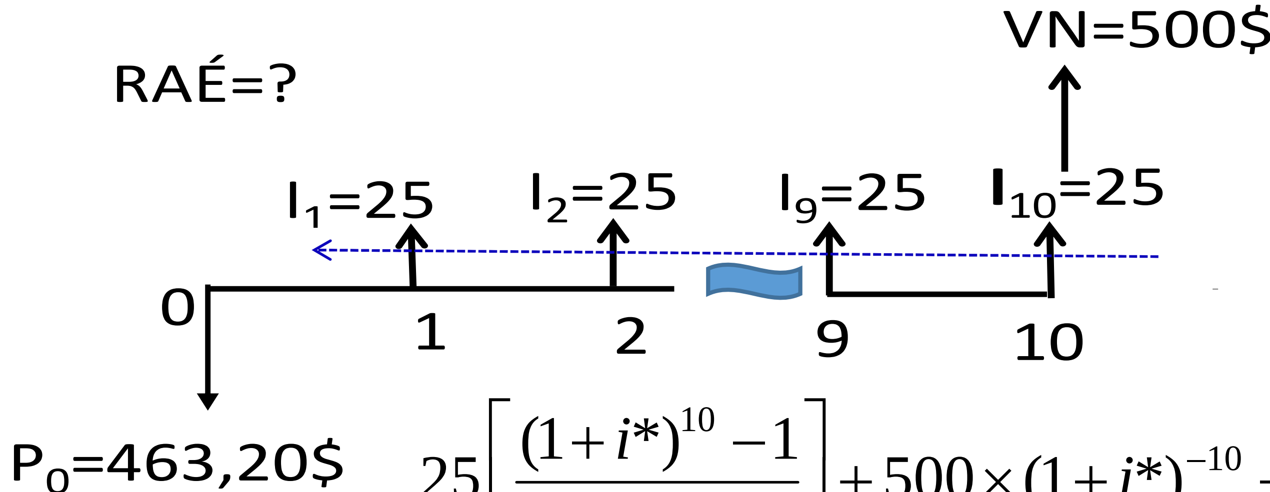
Si vous la conservez jusqu'à l'échéance, quel taux de rendement effectif moyen (ou rendement à l'échéance i) réaliserez-vous ?

- Coupons: 500$ $*$ (10%/ 2) $=$ **25 $ /semestre.**
- Échéance: 10 semestres (**5 ans x 2 semestres**)
- En plus des coupons semestriels, on encaisse la valeur nominale **VN=500$** à l'échéance.

Il s'agit de **trouver le taux de rendement i*** connaissant le **prix (463.20$)**, **les flux monétaires** et l'**échéance**.

On peut déjà dire que ce taux sera plus élevé que le taux de coupon (10%) puisque l'obligation se vend à escompte.

RENDEMENT À L'ÉCHÉANCE D'UNE OBLIGATION (suie)



$$25\left[\frac{(1+i^*)^{10}-1}{i^*(1+i^*)^{10}}\right]+500\times(1+i^*)^{-10}-463.20=0$$

Calcul de ***i****** semestriel par interpolation:

i_1=	5%	VAN (i_1) =	36.80 $
i *=	?	VAN (i*) =	0 $
i_2=	7%	VAN (i_2) =	-33.44 $

$$RAÉ=5\% + \frac{36.80\$}{36.80\$ -(-33,44\$)}(7\%-5\%)=6,05\%$$

Rendement annuel: **nominal**= i*x2=6,05%x2=12,1%

Rendement annuel **effectif**=(1+6.05)^2-1=12,36%

CAPITAL ET INTÉRÊT

– Le versement inclut une portion de **paiement de capital** et une portion de **paiement d’intérêt** variables dans le temps

– Le calcul du versement s’effectue selon la formule d’annuité suivante:

$$\boxed{A = P\left(A/P, i, n\right)}$$

CAPITAL ET INTÉRÊT

- Le versement inclut une portion de **paiement de capital** et une portion de **paiement d'intérêt variables dans le temps**
- Le calcul du versement s'effectue selon la formule d'annuité suivante:

$$\boxed{A = P\,(A/P, i, n)}$$

#	Capital P	Intérêt I_t	Capital remboursé, CR_t	Capital$_F$ P_t
1	P_0	$I_1 = P_0 * i$	$CR_1 = A - I_1$	$P_1 = P_0 - CR_1$
2	P_1	$I_2 = P_1 * i$	$CR_2 = A - I_2$	$P_2 = P_1 - CR_2$
n	…			

EXEMPLE

P= 5 000$

r=12%

n=2 ans

m=12 et v=12

P= 5 000$

$i_{pér}$ =12%/12

n=2 ans = 24 mois

A=P(A/P,i,n)

$$i = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/v} - 1$$

$$= \left(1+\frac{12\%}{12}\right)^{12/12} - 1 = 1\%$$

235.37 = 5000(A / P,1%,24)

0.047073

t	Montant de versement A	Verse-ment du capital CR_t	Versement d'intérêt I	Solde = C-$\sum CR_t$
1	235.37 $	185.37 $	50.00 $	4 814.63 $
2	235.37	187.22	48.15	4 627.41
3	235.37	189.09	46.27	4 438.32
4	235.37	190.98	44.38	4 247.33
5	235.37	192.89	42.47	4 054.44
6	235.37	194.82	40.54	3 859.62
7	235.37	196.77	38.60	3 662.85
8	235.37	198.74	36.63	3 464.11
9	235.37	200.73	34.64	3 263.38
10	235.37	202.73	32.63	3 060.65
11	235.37	204.76	30.61	2 855.89
12	235.37	206.81	28.56	2 649.08
13	235.37	208.88	26.49	2 440.20
14	235.37	210.97	24.40	2 229.24
15	235.37	213.08	22.29	2 016.16
16	235.37	215.21	20.16	1 800.96
17	235.37	217.36	18.01	1 583.60
18	235.37	219.53	15.84	1 364.07
19	235.37	221.73	13.64	1 142.34
20	235.37	223.94	11.42	918.40
21	235.37	226.18	9.18	692.21
22	235.37	228.45	6.92	463.77
23	235.37	230.73	4.64	233.04
24	235.37	233.04	2.33	0.00

INCIDENCE DE L'INFLATION

L’INFLATION

Diminution du pouvoir d’achat de l’unité monétaire dans le temps

- Mesurée par l’indice des prix à la consommation **(IPC)**
- **IPC** mesure la valeur d’un panier typique de biens et de services achetés par le consommateur moyen

$$IPC = \frac{\text{Valeur du panier durant la période courante}}{\text{Valeur du panier durant la période de référence}} \mathbf{\times 100}$$

Les trois taux importants

- Le taux **d'intérêt réel** ou sans inflation
  - Désigné par i
- Le taux d'intérêt corrigé de l'inflation ou **taux du marché**
  - Désigné par i_f
- Le **taux d'inflation**
  - Désigné par f

CALCUL DE L'INFLATION

f_n : Taux d'inflation à l'année n

$f_{n1 \to n2}$: Taux d'inflation moyen annuel sur la période n_1 à n_2

$IPC_{\mathrm{n\,j}}$: indice des prix à la consommation pour la période finale n_{j}

$$f_n = \frac{IPC_n - IPC_{n-1}}{IPC_{n-1}}$$

$$f_{n_1 \to n_2} = \left(\left[\frac{IPC_{n2}}{IPC_{n1}} \right]^{\frac{1}{n_2 - n_1}} - 1 \right)$$

TAUX D'INFLATION MOYEN

EXEMPLE

Année	IPC	INFLATION	Année	IPC	INFLATION
2006	109.1	1.96%	2011	119.9	2.92%
2007	111.5	2.20%	2012	121.7	1.50%
2008	114.1	2.33%	2013	122.8	0.90%
2009	114.4	0.26%	2014	125.2	1.95%
2010	116.5	1.84%	2015	126.6	1.12%

2002=100

http://www.statcan.gc.ca/tables-tableaux/sum-som/l02/cst01/econ150a-fra.htm

Taux d'inflation moyen pour la période 2006-2015 :

$$109.1\left(1+f\right)^{9}=126.6$$

$$\left(1+f\right)^{9}=1.16$$

$$f=(1.16)^{1/9}-1 \Rightarrow f=1.66\%$$

$$1.84\%=\left[\frac{116.5-114.4}{114.4}\right]$$

9=2015-2006

Dollars courants et dollars constants

- **DOLLARS COURANTS A**
  - Flux monétaire dans le futur estimé en tenant compte de l'inflation

    (avec le taux du marché)
  - Les dollars courants ont le pouvoir d'achat des $ de l'année courante

- **DOLLARS CONSTANTS A'**
  - Flux monétaire dans le futur estimé sans tenir compte de l'inflation

    (avec le taux réel)
  - Les dollars constants ont le pouvoir d'achat de l'année de référence

CONVERSION

DOLLARS COURANTS et DOLLARS CONSTANTS

$$A_n = A_n^{'}(1+f)^n$$

Taux d'inflation moyen

$$A_n^{'} = \frac{A_n}{(1+f)^n}$$

A_n : dollar courant à l'année n

$A_n^{'}$: dollar constant à l'année n

f : taux d'inflation moyen

TAUX D'INTÉRÊT et INFLATION

$$i = \frac{i_f - f}{1 + f}$$

$$i_f = (1+i)(1+f) - 1$$
$$= i + f + if$$

i = taux d'intérêt réel

i_f = taux d'intérêt du marché (tient compte de l'inflation)

f = taux d'inflation

ANALYSE DE RENTABILITÉ AVEC INFLATION

- Pour analyser la rentabilité d'un projet :
  1. choisir un domaine d'analyse

     constant ou courant
  2. tout transformer dans le même domaine

RÈGLE GÉNÉRALE :

Domaine courant
- **Dollars courants (futurs) à la période t_2 : A**
- **Taux d'intérêt du marché : i_f**

Domaine constant
- **Dollars constants (actuels) à la période t_1 : A'**
- **Taux d'intérêt réel : i**

Pouvoir d'achat en dollars constants

$$F = \frac{P(F/P, \boldsymbol{i}_f, n)}{(1+f)^n}$$

Pouvoir d'achat en dollars constants

Exemple

P = 1 000 \$ aujourd'hui et le taux d'intérêt du marché est de 10 % par année (f= 4 %/année). n=7. **Valeur capitalisée et pouvoir d'achat en \$ constants?**

Solution

F_7 = 1000 \$(F/P;10%;7) = **1 948 \$**

F = 1 948 \$/$(1,04)^7$

= 1 948/1,3159 = 1 481

Pouvoir d'achat en dollars constants

1 481 \$ est inférieur de 24 % à 1 948 \$.

L'inflation réduit le pouvoir d'achat de 24 % au bout de 7 ans.

$$\dot{i} = \frac{0.10 - 0.04}{1 + 0.04} = 0.0577 = 5.77\%$$

L'inflation de 4 %/an a réduit le taux réel à moins de 6 %/an.

F = 1 000 \$(F/P;5,77%;7) = 1 481 \$.

Sources de financement

DEUX PRINCIPALES SOURCES DE FINANCEMENT:

- **FONDS PROPRES (CAPITAUX PROPRES):**
  - **Émission d'actions (frais d'émission déductibles)**
    - **Actions ordinaires AO (dividendes)**
    - **Actions privilégiées AP (dividendes)**
  - **Autofinancement (utilisation des résultats non distribués RND) (dividendes)**

- **FONDS EMPRUNTÉS (ENDETTEMENT)**
  - **Emprunt à long terme (intérêts déductibles d'impôts)**
  - **Émission d'obligations (intérêts déductibles d'impôts)**

Coût des capitaux propres (k_{cp})

Le **coût des capitaux propres** représente le manque à gagner subi par les actionnaires du fait de leur renonciation aux autres possibilités de placement.

Pour l'évaluation, deux modèles peuvent être utilisés:

- le modèle de **GORDON et SHAPIRO**
- le modèle d'évaluation des actifs financiers (**MEDAF**)

MODÈLE DE GORDON et SHAPIRO ou MÉTHODE DES DIVIDENDES

- Repose sur l'hypothèse d'une croissance régulière du dividende à un taux annuel constant g.

- Déterminé à partir de la tendance passée corrigée des anticipations du futur.

- Taux de croissance des dividendes $\mathbf{g}$ doit être inférieur au coût des capitaux propres $\mathbf{k_{cp}}$ $\mathbf{(g < k_{cp})}$

VALEUR D'UNE ACTION

$$P_0 = \frac{D_1}{k_{cp} - g}$$

On obtient :

$$k_{cp} = \frac{D_1}{P_0} + g$$

En général, le cours de l'action à un moment précis t est :

$$P_t = \frac{D_t(1+g)}{k_{cp} - g} = \frac{D_{t+1}}{k_{cp} - g}$$

- k_{cp}: coût des CP de l'entreprise ou **taux de rendement exigé par les actionnaires**
- P_0 : valeur de l'action à la **période 0**, D_1: dividende de l'année 1
- D_t: dividende à la fin de la période t, g: taux de croissance des dividendes

MODÈLE DE GORDON et SHAPIRO (suite)

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+k_{cp})} + \frac{D_1(1+g)}{(1+k_{cp})^2} + \frac{D_1(1+g)^2}{(1+k_{cp})^3} + \ldots$$

$$= \frac{D_1}{(1+k_{cp})} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(1+g)}{(1+k_{cp})} \right]^n ,$$

$$= \frac{D_1}{(1+k_{cp})} \left[\frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+k_{cp}}} \right], \text{ où } g < k_{cp}$$

$$P_0 = \frac{D_1}{k_{cp} - g}$$

On obtient :

$$k_{cp} = \frac{D_1}{P_0} + g$$

Représente la valeur actuelle des dividendes futurs

Modèle de croissance du dividende

Suite géométrique de 1er terme $1/(1+k_{cp})$ et de raison $(1+g)/(1+k_{cp})$

- k_{cp}: coût des CP de l'entreprise ou taux de rendement exigé par les actionnaires
- P_0 : valeur de l'action à la période 0, D_1: dividende de l'année 1
- D_t: dividende à la fin de la période t, g: taux de croissance des dividendes

1. FINANCEMENT PAR CAPITAUX PROPRES

1.a- Coût des résultats non distribués

$$k_r = \frac{D_1}{P_0} + g$$

1.b- COÛT DES ACTIONS

- **ORDINAIRES:**

$$k_o = \frac{D_1}{P_0(1 - f_c)} + g$$

- **PRIVILÉGIÉES:**

$$k_p = \frac{D^*}{P^*(1 - f_c)}$$

Coût des capitaux propres:

$$k_{cp} = ak_r + bk_o + ck_p$$

***k_r*: coût des RND;** ***P_0* : Valeur marchande de l'action**
***D_1*: dividendes pour la1ère année;** ***g*: taux annuel de croissance des dividendes**

***k_o*: coût des AO;** ***f_c* : frais d'émissions en % du prix des actions, après impôts**

***k_p*: coût des AP;** ***D^**: dividende fixe annuel;** ***P^**: prix d'émission**

a,b,c: **Fraction du total des capitaux propres financée par les RND, AO et AP respectivement**

2. FINANCEMENT PAR ENDETTEMENT

$$k_d = \left[E.k_e + (1-E).k_{ob}\right].(1-T)$$

k_d: Coût de l'endettement (long terme)

E: Fraction de l'emprunt à LT par rapport à la dette totale

k_e: Taux d'intérêt de l'emprunt à LT avant impôt

T: Taux d'impôt

k_{ob}: Taux d'intérêt avant impôt sur les obligations

Il faut aussi tenir compte des frais d'émission d'obligations

COÛT MOYEN PONDÉRÉ DU CAPITAL:CPMC

$$CMPC = \frac{C_{cp}}{C_d + C_{cp}} \times k_{cp} + \frac{C_d}{C_d + C_{cp}} \times k_d$$

CMPC= fraction des capitaux propres * coût des capitaux propres +
fraction des emprunts * coûts (après impôt) des capitaux empruntés

Coût des capitaux propres: $k_{cp} = ak_r + bk_o + ck_p$

Coût de l'endettement: $k_d = \left[E.k_e + (1-E).k_{ob}\right].(1-T)$

- **C_d:** Valeur de la dette (long terme) en dollars
- **C_{cp}:** Valeur des capitaux propres en dollars
- **k_{cp}**: Taux exigé par les actionnaires (coût des capitaux propres par période)
- **k_d** : Taux d'intérêt moyen **après impôt** par période

Exemple 10.2: Coût moyen pondéré du capital

Source de capitaux	Montant (en $)	Coût (en %)
• Actions ordinaires	5 millions $	13,7 %
• Résultats non distribués	2 millions $	8,9 %
• Emprunt par émission d'obligations	3 millions $	7,5 %

Somme : 10 millions $

Actions = 5/10= 50 %; **RND**= 2/10=20 %; **Obligations**= 3/10=30%

Financement habituel: 40% capitaux propres à 7,5% et 60% dettes à 10%

CMPC du capital historique = (0,4)(**7,5**) + (0,6)(**10**) = **9,0 %**

a) **CMPC** = (0,50)(13,7) + (0,20)(8,9) + (0,30)(7,5) = **10,88 %** > à la moyenne

Le TRAM de cette entreprise doit être **>** 10,88 %

b) Si **rendement prévu est 5%,** le programme doit être évalué au moyen de:

TRAM = **k**=10,88% + 5% = **15,88%**

MODÈLE DES ACTIFS FINANCIERS MEDAF

Permet de déterminer le rendement d'un titre donné (donc à priori le **coût des capitaux propres**)

PARAMÈTRES DU MODÈLE

Deux catégories de risque

- un **risque systématique** ou risque de marché (non diversifiable car **lié à la conjoncture économique**,…)

- un **risque diversifiable** ou risque spécifique (**lié uniquement aux variables intrinsèques** de l'entreprise).

Pour générer un portefeuille de titres, l'investisseur pourra diversifier les titres en fonction du risque

MODÈLE DES ACTIFS FINANCIERS MEDAF

$$R_e = R_f + \beta_i\,[R_m - R_f]$$

Taux de rendement d'un projet à risque = Taux sans risque + β * prime de risque du marché

R_e = Coût du **capital-actions** ordinaires

R_f = Taux prescrit des bons du Trésor du gouvernement du Canada, considérés comme un placement sûr (**taux sans risque**)

β = Volatilité de l'action ordinaire de l'entreprise par rapport à d'autres actions sur le marché (**β** = 1 est la norme)

R_m = rendement des actions pour un portefeuille du marché défini, mesuré à l'aide d'un indice reconnu

$[R_m - R_f]$ = **Prime de risque du marché** c'est-à-dire le surplus de rentabilité exigé par les investisseurs lorsque ces derniers placent leur argent sur le marché, plutôt que dans un actif sans risque

MEDAF (suite)

PARAMÈTRES DU MODÈLE

Le coefficient **β** mesure la volatilité d'un titre par rapport à celle d'un indice boursier (exemple TSX Composite de Toronto).

$$\beta_{\mathrm{i}} = \frac{Cov(R_{\mathrm{i}}, R_{\mathrm{m}})}{Var(R_{\mathrm{m}})}$$

Si une action a un Bêta de 1,4, cela signifie que, lorsque l'indice de marché varie de 1%, la rentabilité de cette action connaît une variation de 1,4% (coefficient de volatilité ou de sensibilité).

MEDAF (suite)

Exemple 10.5:

- **Coût du capital-actions ordinaires doit être < 15%**
- **Bons du trésor (pas de risque): 4%**
- **Prime de risque souhaitable= 5 %**
- **Valeur historique du coefficient β = 1,7**
- R_e **= 4,0+ 1,7 * 5 = 12,5 %**

TRAVAIL À FAIRE

- **Problèmes: Économie pour ingénieurs**:
  - 4.9, 4.10, 4.11, 4.19, 4.21, 4.23, 4.31, 4.36, 4.40 4.49 et 4.58
  - 5.25, 5.26, 5.48, 5.49, 5.50, 5.52
  - 10.14, 10.16 et 10.20
  - 14.2, 14.6, 14.19, 14.26 et 14.29

- **Lire et cours #6 (coûts et Seuil de rentabilité) et chapitre 13** : **Économie pour ingénieurs**