1. Vous êtes sur le point de quitter votre logement pour aller à votre examen final de LOG2810 à Polytechnique Montréal quand vous vous apercevez soudainement que vous n'avez pas vos lunettes. Cependant vous savez que les énoncés suivants sont vrais :
   a. *"Si mes lunettes sont sur la table de la cuisine, alors je les aurais vues au déjeuner"* ;
   b. *"J'ai lu le journal dans le salon ou j'ai lu le journal dans la cuisine"* ;
   c. *"Si j'ai lu le journal dans le salon, alors mes lunettes sont sur la table à café"* ;
   d. *"Je n'ai pas vu mes lunettes au déjeuner"* ;
   e. *"Si j'ai lu le journal dans le cuisine, alors mes lunettes sont sur la table de la cuisine"*.

   $\boxed{1}$ (a) Traduisez ces énoncés en propositions en utilisant des variables propositionnelles et des opérateurs logiques.

   $\boxed{2}$ (b) Où sont vos lunettes ? Écrivez votre démonstration avec toutes les étapes et la raison de chacune des étapes.

2. Supposez que $P(x, y)$ soit une fonction propositionnelle et que l'univers du discours des variables x et y soit $\{1, 2, 3\}$.

   $\boxed{1}$ (a) Exprimez la proposition $\neg\exists x \exists y (P(x, y) \wedge \neg P(y, x))$ tel qu'il n'y ait aucune négation qui précède un quantificateur.

   $\boxed{1}$ (b) Supposez que les propositions $P(1, 3)$, $P(2, 1)$, $P(2, 2)$, $P(2, 3)$, $P(3, 1)$ et $P(3, 2)$ soient vraies et que $P(x, y)$ soit fausse dans tous les autres cas. Est-ce que la proposition en a) est vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

$\boxed{2}$ 3. Utilisez le **principe de l'induction** pour montrer que, pour tout entier strictement positif n, on a

$$\sum_{j=1}^{n} j2^j = (n - 1)2^{n+1} + 2.$$

$\boxed{2}$ 4. La double factorielle $n!!$ d'un entier positif n est une généralisation de la factorielle habituelle $n!$ et est définie par

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2, & \text{si } n > 0 \text{ est pair,} \\ n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1, & \text{si } n > 1 \text{ est impair,} \\ 1, & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1. \end{cases}$$

Par exemple, $0!! = 1$, $1!! = 1$, $2!! = 2$, $3!! = 3 \cdot 1 = 3$, $4!! = 4 \cdot 2 = 8$, $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$. Utilisez des manipulations algébriques pour prouver que $n! = n!!(n-1)!!$. (Indice : Faites une preuve par cas. D'abord, montrez que $\frac{n!}{n!!} = (n - 1)!!$ quand n est pair. Ensuite, recommencez la preuve que $\frac{n!}{n!!} = (n - 1)!!$ quand n est impair)

4

$\boxed{1}$ 5. Soit n, un nombre positif. Prouvez en utilisant des manipulations algébriques que

$$\left(\frac{5}{4}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{-2k}.$$

(Indice : $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$)

6. Le nouveau comité étudiant PolyAI compte 50 membres. Lors de la prochaine assemblée générale annuelle, il faudra élire le nouveau conseil exécutif pour l'année 2018–2019.

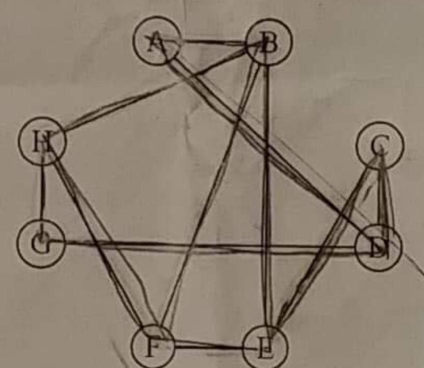
[1] (a) De combien de façons peut-on former un conseil exécutif de cinq membres ?

[1] (b) De combien de façons peut-on former un conseil exécutif composé de ces quatre membres : un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire ?

[1] (c) De combien de façons peut-on former un conseil exécutif composé d'un président, d'un vice-président, d'un trésorier, d'un secrétaire et de deux conseillers ?

[1] (d) Dans les faits, même si le club compte 50 membres, lors de l'assemblée générale, il y a seulement une dizaine de membres qui sont intéressés par des rôles dans le conseil exécutif. Il y a deux membres qui se présentent pour le poste de président, deux pour le poste de vice-président, un seul pour le poste de trésorier, un seul pour le poste de secrétaire (le trésorier et le secrétaire seront donc élus par acclamation) et finalement quatre membres qui se présentent pour les deux postes de conseillers. Dans ces circonstances, de combien de façons pourra-t-on former le nouveau conseil exécutif du club PolyAI ?

[2] 7. Huit personnes se retrouvent pour un repas de mariage. Le graphe ci-dessous précise les incompatibilités d'humeur entre ces personnes (une arête reliant deux personnes indique qu'elles ne se supportent pas).



Proposez un plan de table (la table est ronde) en évitant de placer côte à côte deux personnes incompatibles.

[2] 8. Construisez un automate fini déterministe reconnaissant les nombres binaires qui sont des multiples de 5. Expliquez votre démarche.

[2] 9. Soit $L = \{0^i 1^j : pgcd(i,j) = 1\}$, où $pgcd(i,j)$ est le plus grand commun diviseur entre i et j. Montrez que le langage L n'est pas régulier.

Automne 2018

Question 1

Soient c : « Mes lunettes sont sur la table de la cuisine »

p : « J'ai vu mes lunettes au petit déjeuner »

js : « J'ai lu le journal au sallon »

jc : « J'ai lu le journal dans la cuisine »

t : « Mes lunettes sont sur la table à café »

a) $h_1 : c \rightarrow p$

$h_2 : js \vee jc$

$h_3 : js \rightarrow t$

$h_4 : \neg p$

$h_5 : jc \rightarrow c$

b/ h_1 et h_4 : $$\frac{c \to p \quad \neg p}{\neg c \quad (h_6)} \quad MT$$

h_6 et h_5 $$\frac{jc \to c \quad \neg c}{\neg jc \quad (h_7)} \quad (MT)$$

h_7 et h_2 $$\frac{js \lor jc \quad \neg jc}{js \quad (h_8)} \quad (\text{Syllo. disjonc})$$

h_8 et h_3 $$\frac{js \quad js \to t}{t} \quad (MP)$$

<u>Conclusion</u> t   lunettes sur la table à café

Question 2

2/ a) $\neg(\exists x \exists y\ P(x,y) \wedge \neg P(y,x))$

$\Leftrightarrow \quad \forall x \forall y\ \neg P(x,y) \vee P(y,x)$

b/ On a $P(2,1)$ mais $\neg P(1,2)$

On a donc $\neg(\neg P(2,1) \vee \neg P(1,2))$. La proposition est donc fausse

Question 3

Soit $P(n)$ la proposition « $\sum_{j=1}^{n} j2^j = (n-1)2^{n+1} + 2$ »

* Initialisation : $\sum_{j=1}^{1} 1 \times 2^1 = 2$

$(1-1)2^{1+1} + 2 = 2$ $\quad$ $P(1)$ est vraie

* Supposons que $P(n)$ est vraie et donc $P(n+1)$ l'est aussi

$\sum_{j=1}^{n} j2^j = (n-1)2^{n+1} + 2$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1} j2^j = (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1}$

$= (n-1+n+1)2^{n+1} + 2$

$= n\,2^{n+2} + 2$ $\quad$ $P(n+1)$ est vraie

* Conclusion $\quad$ Bla bla

Exercice 4

Demontrer que $\frac{n!}{n!!} = (n-1)!!$

* Supposons que n est pair

$$\frac{n!}{n!!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots 3 \times 2 \times 1}{n \times \quad (n-2) \times \quad \times 4 \times 2}$$

$$= (n-1) \times (n-3) \times \cdots 3 \times 1$$

Il ne sera pas simplifié

$$= (n-1)!!$$

* Supposons que n est impair

$$\frac{n!}{n!!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \quad \times 3 \times 2 \times 1}{n \times \quad (n-2) \times \quad \times 3 \times 1}$$

$$= (n-1) \times (n-3) \times \quad \times 2$$

$$= (n-1)!!$$

* Conclusion

Dans tous les cas, $\frac{n!}{n!!} = (n-1)!!$

$$\Rightarrow n! = n!! \times (n-1)!!$$

Exercice 5

$$\left(\frac{5}{4}\right)^n = \left(\tfrac{1}{4}+1\right)^n$$

$$\overset{\text{Binôme de Newton}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \underbrace{1^{n-k}}_{1 \leftarrow \text{on l'oublie}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2^{-2})^k$$

Bref

Exercice 6 A la fin (Voir la dernière page)

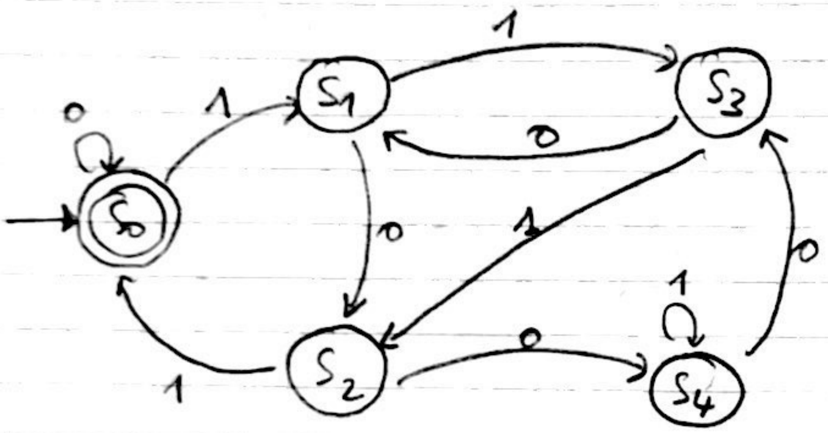
Exercice 7

Il s'agit de trouver un cycle hamiltonien dans le complémentaire du graphe.

Bref vous avez compris. On est la veille je suis fatigué :-D

Exercice 8

Automate :



Explication : mathieuturcotte.ca/textes/automate-fini-deterministe/

Bonne lecture

Exercice 9 : lemme de pompage

Supposons que L est régulier à p états.
Soit $z = 0^k 0^\ell 0^{i-k-\ell} 1^j$ avec i, j premiers entre eux

et $i+j > p$ ($|z| > p$), $k+\ell > p$ et $\ell \neq 0$.
Posons $u = 0^k$ $v = 0^\ell$ et $w = 0^{i-k-\ell} 1^j$

$z = uvw$. L respecte le lemme de pompage

Donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $uv^m w \in L$
Particulièrement pour $m = 0$, $uw \in L$
$\Rightarrow 0^{i-\ell} 1^j \in L$.
Contradiction car on n'est pas

garanti que $i-1$ et j sont premiers entre eux.

Exemple : 3 et 8 sont premiers entre eux mais 3-1 et 8 ne le sont plus.

Comme on est arrivé à une absurdité, on peut conclure que L n'est pas régulier.

Question 6

6) a) nombre = $C_{50}^{5} = 2118760$

b/ nombre = $A_{50}^{4} = 5527200$

c/ nombre = $A_{50}^{4} \times C_{46}^{2}$

d/ nombre = $2 \times 2 \times C_{4}^{2} = 24$