

EXERCICES SUR LES INTÉRÊTS

Exercice 1

Une entreprise doit emprunter 10 000 \$ au taux d'intérêt de 8 % capitalisé trimestriellement pendant 3 ans.

Calculez la valeur future de cet emprunt à la fin des 3 ans

Solution

$$\begin{array}{llll} P & = & 10\,000 \$, & r & = & 8\% \\ n & = & 3 \text{ ans}, & m & = & 4 \end{array}$$

Alors :

$$F = P \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{3 \times 4} = 10\,000 \times \left(1 + \frac{8\%}{4}\right)^{12} = 12\,682 \$$$

Exercice 2

Quelle est la valeur future équivalente d'une série de versements égaux de 5 000 \$, effectués une fois par année pendant 5 ans, si le taux d'intérêt de 6 % par année se composant continuellement est utilisé.

Solution :

$$F = 5\,000 \$ (F/A; 6,1837\%; 5) = \$28,289$$

Exercice 3

Une série de dépôts trimestriels de 1 000\$ chacun s'échelonne sur 3 ans. On veut calculer sa valeur capitalisée (montant cumulé à la fin de l'année 3 F_3), en fonction d'un taux d'intérêt de 12%, se composant mensuellement. Parmi les équations suivantes, laquelle est la bonne?

- a) $F = 4(1000\$)(F/A; 12\%; 3)$
- b) $F = 1000\$ (F/A; 3\%; 12)$
- c) $F = 1000\$ (F/A; 1\%; 12)$
- d) $F = 1000\$ (F/A; 3.03\%; 12)$

Solution : d

Exercice 4

Quelle sera la valeur future d'un placement de 1000\$ pour une durée de 5 ans à un taux de 6% lorsque les intérêts sont composés annuellement?

Solution

$$F_5 = 1000\$ * (1 + 0.06)^5 = 1000\$ * 1,3382 = 1338 \$$$

Exercice 5

Quelle sera la valeur actuelle d'un placement de 1000\$, placé pour 5 ans à un taux annuel de 6% ?

Solution : 1 000 \$

Exercice 6

Vous effectuez des dépôts trimestriels égaux de 1 000 \$ dans un fonds qui rapporte des intérêts de 12 % se composant mensuellement. Trouvez le montant cumulé à la fin de la deuxième année.

Solution :

Soit $r=12\%$; $m= 12$ périodes de capitalisation par année; $v=4$ versements par année; $n=2 \times 4=8$ versements

$n=2$ années \times 8 trimestres = 8 trimestres. $F_8=?$

$$i_{\text{trimestre}}=(1+r/m)^{(m/v)}-1=(1+12\%/12)^{(12/4)}-1=3,03\%$$

$$F_8=1000 \text{ \$}(F/A;3,03 \%,8)=8\,901,81 \text{ \$}$$

Exercice 7

Quelle sera la valeur future d'un placement de 1000\$ pour une durée de 5 ans à un taux de 8% lorsque les intérêts sont composés trimestriellement ?

Solution

$$1000\$ \times (1+0.08/4)^{5 \times 4} = 1000\$ \times (1.02)^{20}$$

$$1000\$ \times 1.4859 = 1486\$$$

Exercice 8

Vous recevez 1102,50\$ après avoir placé 1000\$ durant 1 an. Sachant que la capitalisation est semestrielle, quel était le taux nominal affiché par l'institution financière ?

Solution

$$1102.50\$ = 1000\$ \times (1+r/2)^2$$

$$1102,50\$/1000 = (1+r/2)^2$$

$$r/2 = (1.1025)^{1/2} - 1$$

$$r=0.05 \times 2 \text{ soit } r = 10\%$$

Exercice 9

Vous placez 1000\$ immédiatement (an 0) et 1000\$ au début de chacune des 3 prochaines années. Quelle est la valeur actuelle (an 0) de ce placement et la valeur accumulée à la fin de l'année 4, si le taux est de 6% par année?

Solution

$$P_0=1\,000\$ + 1000\$ \times (P/A;6\%;3) = 3\,673\$$$

$$F_4= 1000\$ \times (F/A;6\%;4)(F/P;6\%;1) = 3\,673\$ \times (F/P;6\%;4) = 4\,637\$$$

Exercice 10

Quelle sera la partie du capital qui sera remboursé le 1^{er} mois d'un emprunt hypothécaire de 100 000\$, à 8%, sur 30 ans, le remboursement est mensuel et la capitalisation est semestrielle (intérêt composé 2 fois par année)?

Solution

Taux effectif par mois = $(1+0,08/2)^{2/12} - 1 = 0,656 \%$

Versements mensuels : $100\,000\$(A/P; 0,656\%; 360) = 725\$$ par mois

Intérêt pour le 1^{er} mois : 0,00725

$100\,000\$ \times 0,00656 = 656\$$

1^{er} Versement en capital: $725\$ - 656\$ = 69\$$

Exercice 11

Les revenus de la 1^{ère} année sont de 5 000\$. À compter de la 2^e année, ils augmentent de 1000\$ par année pour les 4 années subséquentes. Quelle sera la valeur actuelle des revenus si le taux est de 6% par année?

Solution

Valeur actuelle de l'annuité de 5000\$

$5000\$ \times (P/A; 6\%; 5) = 5000\$ \times 4,2124 = 21062\$$

Valeur actuelle du gradient

$1000\$ \times (P/G; 6\%; 5) = 1000\$ \times 7,9345 = 7935\$$

$P = 21062\$ + 7935\$ = 28\,997\$$

Exercice 12

Vous déposez 2 000 \$ dans un régime enregistré d'épargne-retraite (REER) qui rapporte des intérêts de 12 % par année, se composant trimestriellement, durant les 2 premières années, et des intérêts de 9 % par années, se composant trimestriellement, durant les 3 années suivantes. Déterminez le montant cumulé au bout de 5 ans (F5).

Solution

soit $P=2000\$$; $r=12\%$ pour 2 premières années et 9% pour les 3 dernières années

$m=4$, un seul flux pour les n périodes où $n= 20$ trimestres

$i_1=12\%/4=3\%$ $i_2=9\%/4=2,25\%$

$F=2000\$(F/P; 3\%; 8)(F/P; 2,25\%; 12)=3\,309 \$$

Exercice 13

Jean achète une nouvelle obligation de société de 1 000 \$. L'entreprise émettrice promet de verser tous les 6 mois au détenteur un coupon (intérêt) de 45 \$ sur les 1 000 \$ correspondant à sa valeur nominale (au pair) du titre et de rembourser ces 1 000 \$ au bout 10 ans. Deux ans plus tard, Jean vend l'obligation à Simon au prix de 900 \$.

1. Quel est le rendement de l'investissement de Jean?

2. Si Simon conserve l'obligation pendant les 8 années qui restent à son échéance, quel est le rendement à l'échéance de son investissement ? Quel est le rendement à l'échéance de son investissement par année (nominal et effectif) en supposant que les intérêts sont capitalisés (composés) semestriellement?

3. Quel était le rendement courant au moment où Simon a acheté l'obligation?

Solution :

- Soit : le prix d'achat initial=valeur nominale=1 000\$, taux d'intérêt contractuel= 9 % par année versé semestriellement, durée de 10 ans, vendue après 2 ans à 900 \$

1) Comme Jean a reçu 45 \$ tous les 6 mois pendant 2 ans, pour trouver le rendement de son investissement, Jean doit déterminer le taux d'intérêt qui rend sa dépense de 1 000\$ équivalente à la valeur des rentrées semestrielles et du prix de vente ou $VAN(i^*)=0$:
 $-1\ 000\$ + 45\$(P/A; i^*; 4) + 900\$(P/F; i^*; 4) = 0$

$$i_1=3\% \quad VAN(3\%) = -1000\$ + 45\$(P/A; 3\%; 4) + 900\$(P/F; 3\%; 4) = -1000 + 966,91\$ = -33.09\$,$$

essayer $i_2 < 3\%$

$$i_2=2\% \quad VAN(2\%) = -1000\$ + 45\$(P/A; 2\%; 4) + 900\$(P/F; 2\%; 4) = 1002,81\$ - 1\ 000\$ = +2,81\$$$

Procéder par interpolation :

$$i^* \text{ semestre} = 2\% + \{2.81\$ / [2.81\$ - (-33.09\$)]\} \times (3\% - 2\%) = 2,08\% / \text{semestre}$$

Le rendement nominal annuel est donc $2 \times 2,08\% = 4.16\%$ en fonction d'une capitalisation semestrielle.

Rendement effectif annuel : $i^* = (1 + 4,16\% / 2)^2 - 1 = 4,20\%$

2) Rendement de l'investissement de Simon : i^* ? tel que $VAN(i^*) = 0$
 $-900\$ + 45\$(P/A; i^*; 16) + 1000\$(P/F; i^*; 16) = 0$

$$i_1=5\% \quad VAN(5\%) = -900\$ + 45\$(P/A; i; 16) + 1000\$(P/F; i; 16) \\ -900\$ + 45 \times 10,8378 + 1\ 000 \times 0,4581 = -900\$ + 945,80\$ = +45.8\$, \text{ essayer } i_2 > 5\%$$

$$i_2=6\% \quad VAN(6\%) = -900\$ + 45\$(P/A; 6\%; 16) + 1000\$(P/F; 6\%; 16)$$

$$-900\$ + 45 \times 10,1059 + 1000\$ \times 0,3936 = -900\$ + 848,37\$ = -51,63\$ \quad \text{Procéder par interpolation :}$$

$$i^* \text{ semestre} = 5\% + \{45.8\$ / [45.8\$ - (-51.63\$)]\} \times (6\% - 5\%) = 5.47\% / \text{semestre}$$

Le rendement nominal annuel est donc $2 \times 5,47\% = 10,94\%$ en fonction d'une capitalisation semestrielle. Rendement effectif annuel : $i = (1 + 10,94\% / 2)^2 - 1 = 11,24\%$

Ce taux est à comparer au taux de rendement acceptable (TRAM) effectif annuel

3) Le rendement courant au moment où Simon a acheté l'obligation est:

$$45\$/900\$ = 5\% \text{ par semestre}$$

$$2 \times 5\% = 10\% \text{ par année}$$

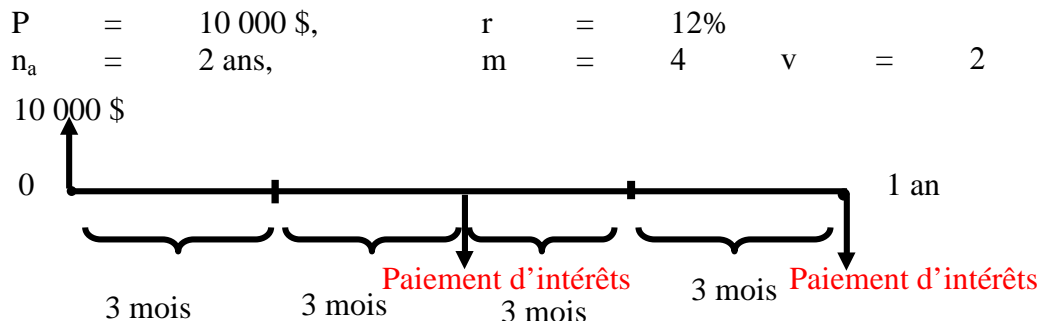
$$i = (1 + 10\%/2)^2 - 1 = 10,25\%$$

Exercice 14

Vous avez effectué un emprunt de 10 000 \$ au taux d'intérêt de 12 % pour une durée de 2 ans. Votre contrat vous oblige à faire des versements d'intérêt tous les 6 mois. Le taux d'intérêt est de 12 % composé trimestriellement.

Calculez le montant annuel d'intérêt payé sur cet emprunt.

Solution :



Taux effectif / semestre : $i_{eff/s} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{v}} - 1 = \left(1 + \frac{12\%}{4}\right)^4 - 1 = 6.09\%$

Intérêt par semestre: $10\,000 \$ \times 6.09\% = \underline{609 \$ / \text{semestre}}$

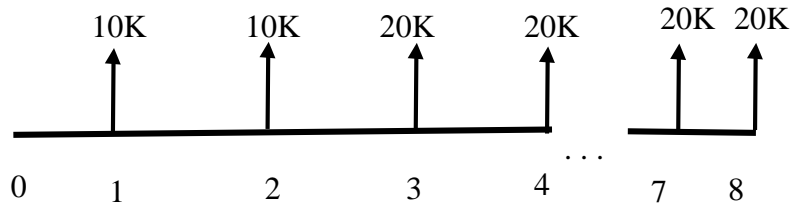
Intérêt/ année : $609 \$ \times 2 = \underline{1\,218 \$ / \text{an}}$

Exercice 15

Une compagnie envisage d'acheter de l'équipement dont la durée de vie est de 8 ans. On néglige ici l'effet de l'impôt. Les flux monétaires nets d'exploitation (FMN) annuels projetés sont de 10 000 \$ pour chacune des 2 premières années et de 20 000 \$ pour chacune des 6 autres. Le taux d'intérêt utilisé pour calculer les valeurs actuelles est évalué à 10 % pour les 4 premières années et à 12 % pour les 4 dernières. Le taux d'intérêt obtenu du réinvestissement des sommes d'argent, utilisé pour calculer les valeurs futures, est estimé à 10 % pour les 2 premières années et à 12 % pour les 6 dernières. L'équipement n'a aucune valeur de revente à la fin de la huitième année.

- A) Calculez le montant maximal que la compagnie doit investir dans ce projet pour réaliser des taux d'intérêt de 10 % pour les 4 premières années et de 12 % pour les 4 dernières années;
- B) Calculez la valeur future, à la fin de la huitième année, des flux monétaires nets d'exploitation du projet;
- C) En tenant compte du fait qu'on peut vendre l'équipement 65 000 \$ à la fin de la quatrième année, établissez si cette option est plus avantageuse que l'option initiale.

Solution



A) Valeur actuelle des flux monétaires nets

Taux d'actualisation: 10% pour années 1 à 4
12% pour les 4 dernières années

$$VA = 10000 (P/A, 10\%, 2) + 20000 (P/A, 10\%, 2)(P/F, 10\%, 2) + 20000 (P/A, 12\%, 4)(P/F, 10\%, 4) = 87\,531 \$$$

Le montant maximal qu'elle doit investir est 87 531 \$

B) Valeur future des flux monétaires nets

Taux de réinvestissement	10%	pour années 1 et 2
	12%	pour les 6 dernières années

$$\begin{aligned} \text{VF} &= 10000 \text{ (F/A,10\%,2)} \text{ (F/P,12\%,6)} + 20000 \text{ (F/A,12\%,6)} \\ &\quad 2.1 \quad 1.9738 \quad 8.1152 \\ &= 203\,754 \$ \end{aligned}$$

C) Valeur actuelle des FMN : Taux: 10% pour années 1 à 4

Valeur de revente à l'année 4 = 65 000 \$

$$VA = \frac{10000 (P/A, 10\%, 2)}{1.7355} + \frac{20000 (P/A, 10\%, 2)(P/F, 10\%, 2)}{1.7355 \cdot 0.8264} + \frac{65000 (P/F, 10\%, 4)}{0.6830} = \mathbf{90\ 437\ \$} > \mathbf{option\ A: \ 87\ 531\ \$}$$

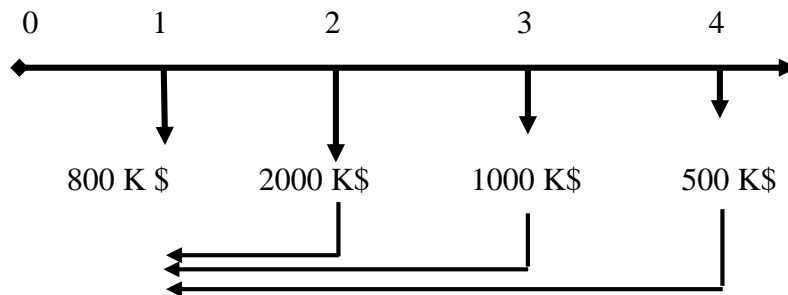
Exercice 16

Une entreprise veut réaliser un projet de construction sur une période de 4 ans. Le taux d'intérêt payé pour le financement durant la construction est de 10 %. Les coûts de construction prévus sont les suivants: 800 000 \$ à la fin de la première année, 2 000 000 \$ à la fin de la deuxième, 1 000 000 \$ à la fin de la troisième, et 500 000 \$ à la fin de la quatrième année.

- Calculer la valeur actuelle des coûts de construction à la fin de la première année;
- Calculer la valeur future du projet à la fin de la quatrième année.

Solution :

$n = 4$ ans, $i = 10\%$



$$\begin{aligned}
 \text{a) } P &= 800 \text{ K\$} + 2000 \text{ K\$} \cdot (P/F, 10\%, 1) + 1000 \text{ K\$} \cdot (P/F, 10\%, 2) \\
 &\quad \quad \quad 0.9091 \quad \quad \quad 0.8264 \\
 &\quad + 500 \text{ K\$} (P/F, 10\%, 3) = 3\,820\,250 \$ \\
 &\quad \quad \quad 0.7513 \\
 \text{b) } F &= 3\,820\,250 \$ (F/P, 10\%, 3) = 5\,084\,753 \$ \\
 &\quad \quad \quad 1.3310
 \end{aligned}$$

Exercice 17

Étienne achète une voiture de 24 000\$, qu'il doit payer en 48 versements mensuels de 583,66\$ chacun. Quel est le taux d'intérêt effectif par année relatif à cette entente de financement ?

Solution

$$\begin{aligned}
 24\,000\$ &= 583,66\$ (P/A; i; 48) \\
 (P/A; i; 48) &= 24\,000\$ / 583,66\$ = 41,1198 \\
 i_1 &= 0,5\% \quad (P/A; 0,5\%; 48) = 42,5803 \\
 i &=? \quad (P/A; i; 48) = 41,1198 \\
 i_2 &= 1\% \quad (P/A; 1\%; 48) = 37,9740
 \end{aligned}$$

Procéder par interpolation :

$$i_{\text{mois}} = 0,5 + \frac{(41,1198 - 42,5803)}{(37,9740 - 42,5803)} \times (1 - 0,5) = 0,65122\% / \text{mois}$$

$$i_{\text{effectif}} = (1 + 0,0065122)^{12} - 1 = 8,1\% / \text{année}$$