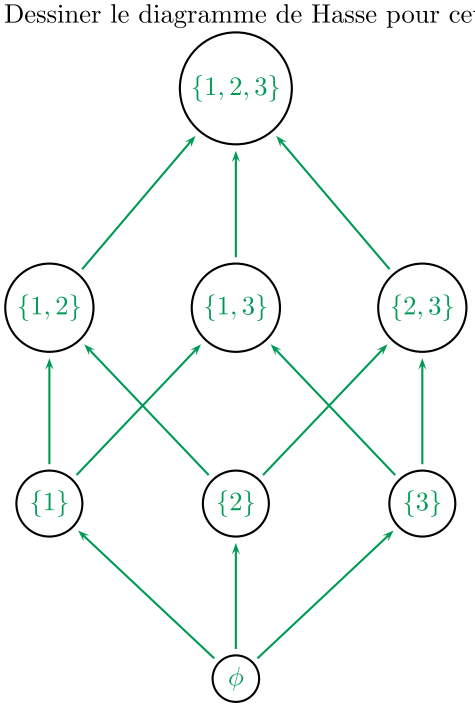
TD 6 : ORDRES - GRAPHES
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. Ordres

Exercice 1. On considère la relation d'ordre $\subset$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.

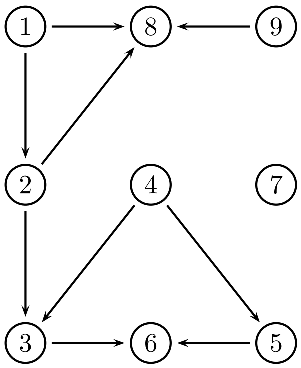
1. Dessiner le diagramme de Hasse pour cette relation.



2. Quels sont les éléments minimaux, maximaux ?
   Élément minimal : ϕ ; Élément maximal : $\{1, 2, 3\}$
3. Donner le plus petit élément, s'il y a lieu.
   Plus petit élément : ϕ
4. Donner le plus grand élément, s'il y a lieu.
   Plus grand élément : $\{1, 2, 3\}$

Exercice 2. Trouver le diagramme de Hasse pour la relation "plus grand ou égal à " dans l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Exercice 3. Proposer un tri topologique pour le graphe suivant :



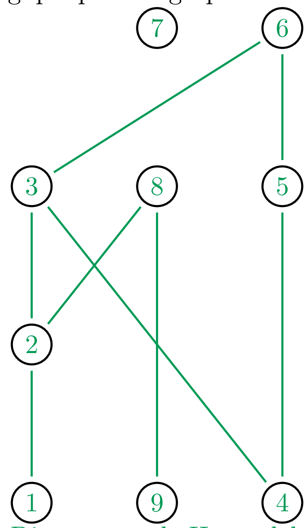
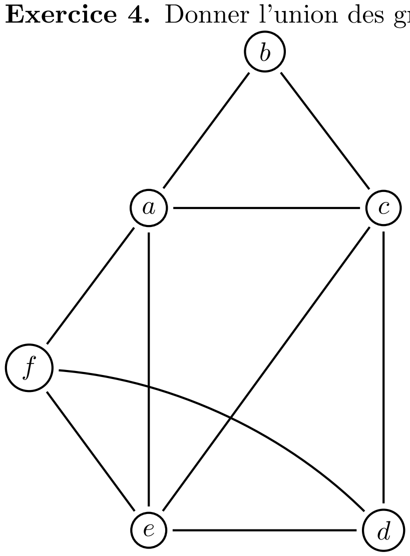


Diagramme de Hasse dela relation

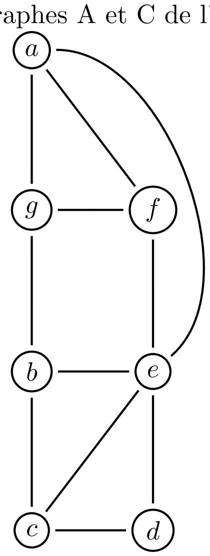
Exemples de tri topologique (la liste n'est pas exhaustive)
1-9-2-4-7-3-8-5-6 ; 7-9-1-4-2-5-8-3-6 ; 1-9-2-4-5-7-3-8-6 ; 9-4-5-1-2-3-6-8-7 ; 7-4-5-9-1-2-8-3-6

2. Graphes

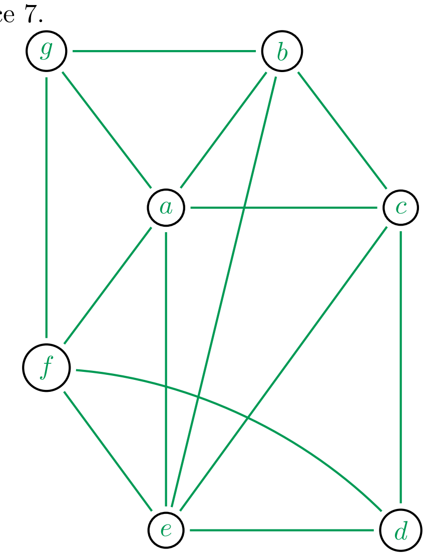
Exercice 4. Donner l'union des graphes A et C de l'exercice 7.



A



C



A ∪ C

Exercice 5. Écrire la matrice d'incidence associée au graphe $G = (V, E)$ tel que $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, avec $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{2, 3\}$, $e_3 = \{3, 1\}$, $e_4 = \{4, 1\}$ et $e_5 = \{4, 4\}$.
Matrice d'incidence :

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Que vaut la somme des éléments d'une colonne. Réponse : 2
2. Que représente la somme des éléments d'une ligne. Réponse : Le degré de chacun des sommets.

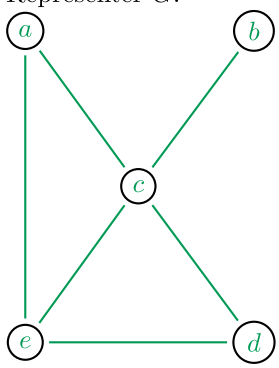
3. En déduire que dans un graphe non orienté $G = (V, E)$, on a

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2\,|E|$$

d(1)+d(2)+d(3)+d(4)=3+2+2+3=10=2*5=2|E|

Exercice 6. Soit $G = (V, E)$ le graphe non orienté défini par :
$V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{\{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$.

1. Représenter G.

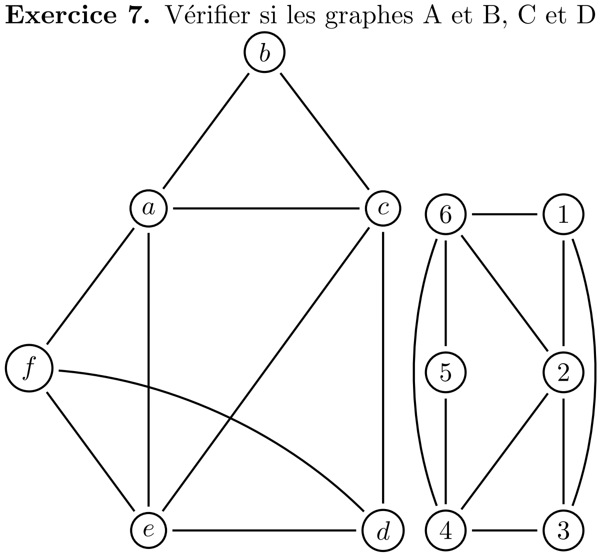


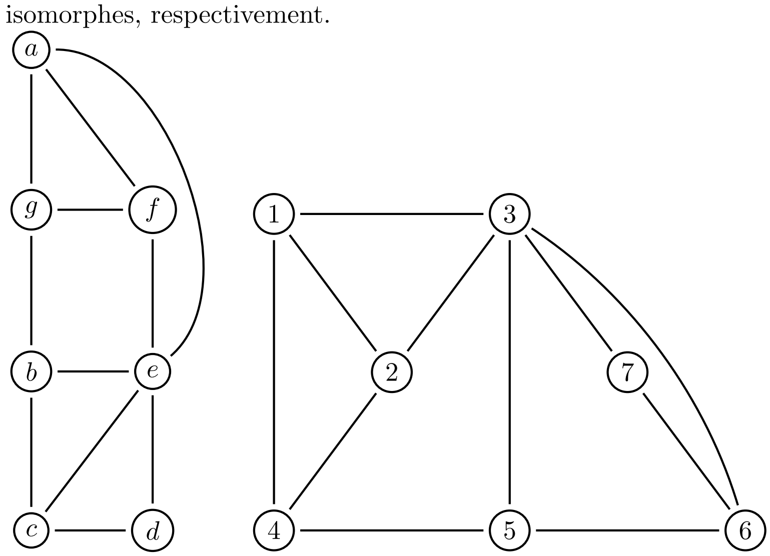
2. Écrire sa matrice d'adjacence et sa liste d'adjacence.

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Le graphe G est-il régulier ? Réponse : Non

Exercice 7. Vérifier si les graphes A et B, C et D sont isomorphes, respectivement.



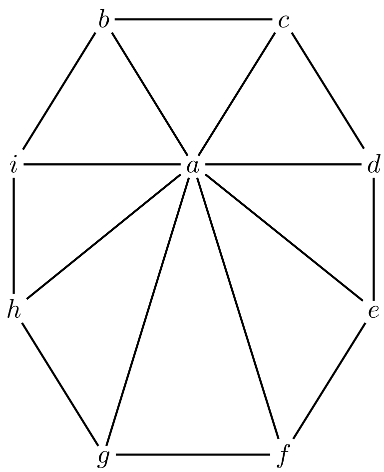


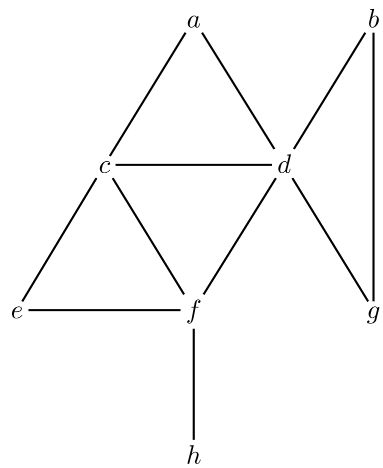
A B C

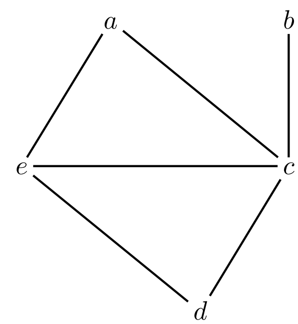
D

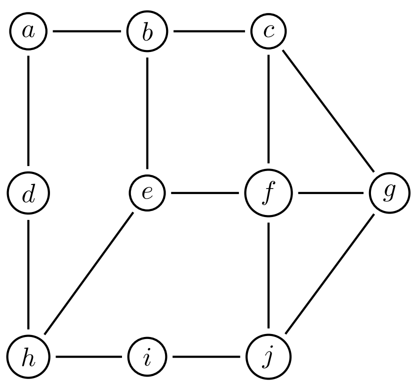
A et B sont isomorphes.
C et D sont isomorphes.

Exercice 8. Déterminer si les graphes sont bipartis.









Aucun

3. **Exercices supplémentaires (livre de Rosen)**

Exercices numéros 11, 15 (page 399) ; 26, 33, 34, 35, 41 (page 428)