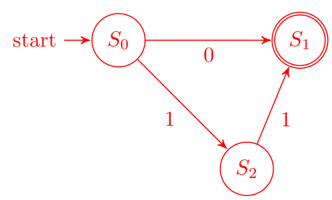
LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

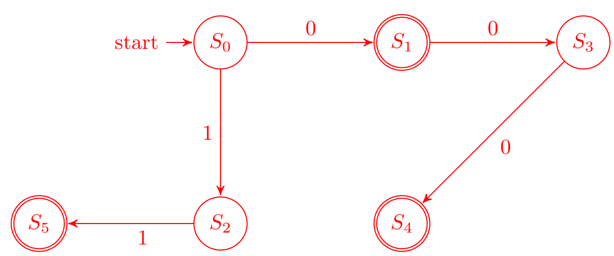
TD 9-10 : THÉORIE DES LANGAGES ET AUTOMATES

Exercice 1. Trouvez un automate fini qui reconnaît :

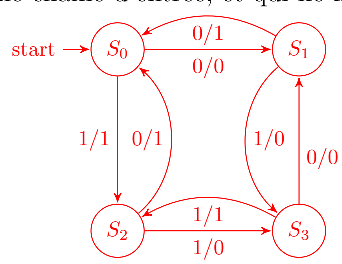
a. $\{0, 11\}$



b. $\{0, 11, 000\}$



Exercice 2. Construisez une machine à états finis qui modifie les bits en position d'indice pair, en commençant par le deuxième bit, d'une chaîne d'entrée, et qui ne modifie pas les autres lettres.



Exercice 3. Soit $V = \{S, A, B, a, b\}$ et $T = \{a, b\}$. Trouvez le langage produit par la grammaire $\{V, T, S, P\}$ lorsque l'ensemble P des productions est composé de :

a. $S \to AB,\ A \to ab,\ B \to bb$ Réponse : $L = \{abbb\}$

b. $S \to AB,\ S \to aA,\ A \to a,\ B \to ba$ Réponse : $L = \{aba, aa\}$

c. $S \to AB,\ S \to AA,\ A \to aB,\ A \to ab,\ B \to b$ Réponse : $L = \{abb, abab\}$

d. $S \to AA,\ S \to B,\ A \to aaA,\ A \to aa,\ B \to bB,\ B \to b$ Réponse : $L = \left\{b^{n+1}, a^{2n+2m+4}\right\}$

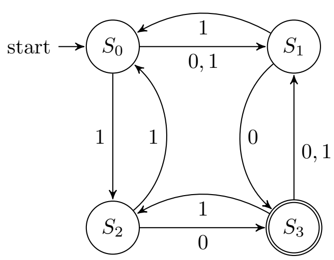
e. $S \to AB,\ A \to aAb,\ B \to bBa,\ A \to \lambda,\ B \to \lambda$ Réponse : $L = \{a^n b^{n+m} a^m\}$

Exercice 4. Construisez une grammaire syntagmatique pour l'ensemble de toutes les fractions de la forme a/b, où a est un entier signé en notation décimale et b est un entier positif. Construisez un arbre de dérivation pour $+311/17$ dans cette grammaire.

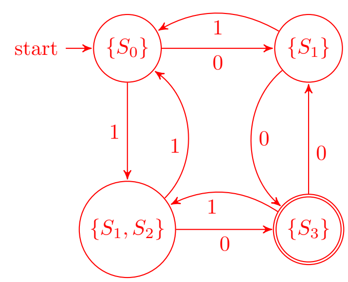
Réponse :

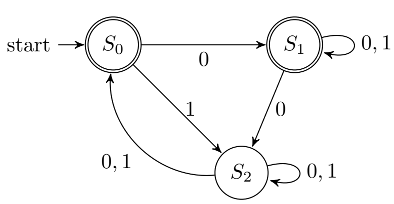
S → signe numérateur/dénominateur
signe → + | -
dénominateur → chiffreNonNul nombre
chiffreNonNul → 1|2|3|4|5|6|7|8|9
nombre → chiffre nombre
nombre → ϵ
chiffre → chiffreNonNul | 0
numérateur → chiffre nombre
NB : En ajoutant une epsilon-transition, on donne la possibilité à l'automate, de passer d'un état à un autre spontanément sans lire de lettre.

Exercice 5. Pour chacun des automates ci-après, donnez un automate déterministe correspondant.

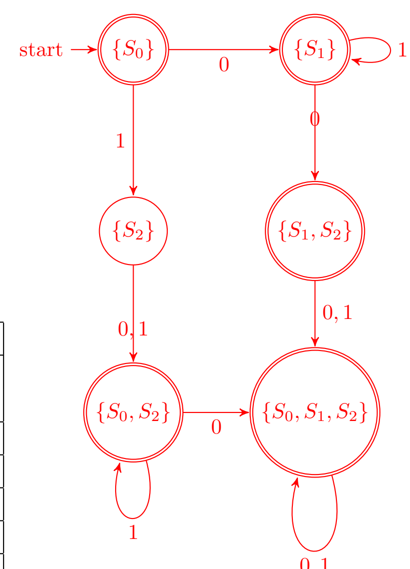


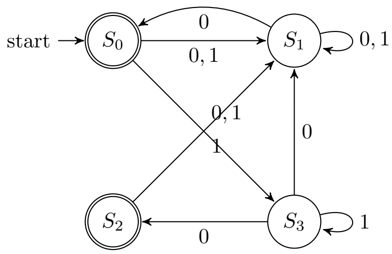
États	f (I) 0	f (I) 1
$\{S_0\}$	$\{S_1\}$	$\{S_1, S_2\}$
$\{S_1\}$	$\{S_3\}$	$\{S_0\}$
$\{S_1, S_2\}$	$\{S_3\}$	$\{S_0\}$
$\{S_3\}$	$\{S_1\}$	$\{S_1, S_2\}$



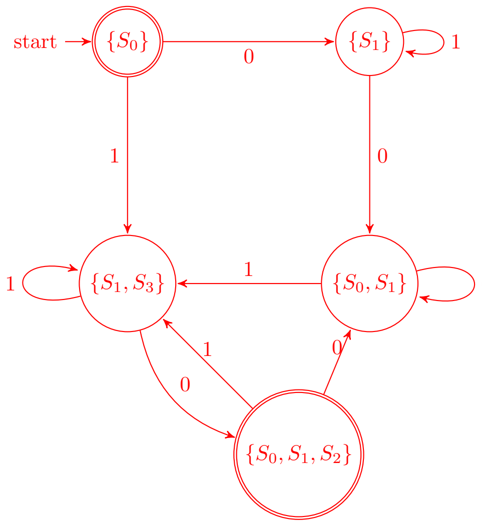


États	f (I) 0	f (I) 1
$\{S_0\}$	$\{S_1\}$	$\{S_2\}$
$\{S_1\}$	$\{S_1, S_2\}$	$\{S_1\}$
$\{S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$
$\{S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$
$\{S_0, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$
$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$





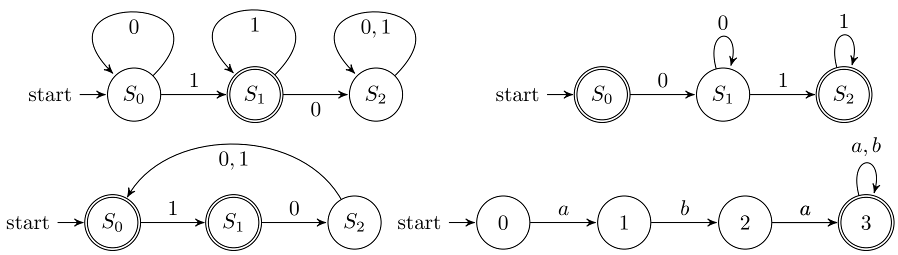
États	f	
	I	
	0	1
$\{S_0\}$	$\{S_1\}$	$\{S_1, S_3\}$
$\{S_1\}$	$\{S_0, S_1\}$	$\{S_1\}$
$\{S_1, S_3\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_1, S_3\}$
$\{S_0, S_1\}$	$\{S_0, S_1\}$	$\{S_1, S_3\}$
$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1\}$	$\{S_1, S_3\}$



Exercice 6. Déterminez si 1011 appartient à chacun des ensembles réguliers ci-après.

a. 10^*1^* - Réponse : Oui.
b. $0^*(10 \cup 11)^*$ - Réponse : Oui.
c. $0(01)^*1^*$ - Réponse : Non.
d. $1^*01(0 \cup 1)$ - Réponse : Oui.
e. $(10)^*(11)^*$ - Réponse : Oui.
f. $1(00)^*(11)^*$ - Réponse : Non.
g. $(10)^*1011$ - Réponse : Oui.
h. $(1 \cup 00)(01 \cup 0)1^*$ - Réponse : Oui.

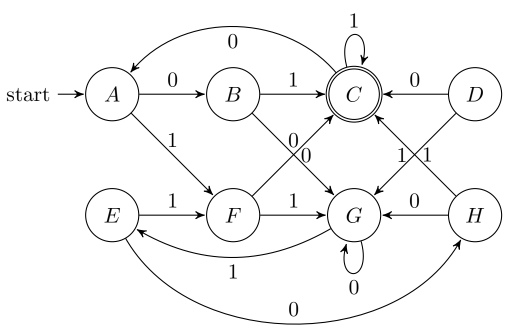
Exercice 7. Trouvez le langage reconnu par chacun des automates finis non déterministes.

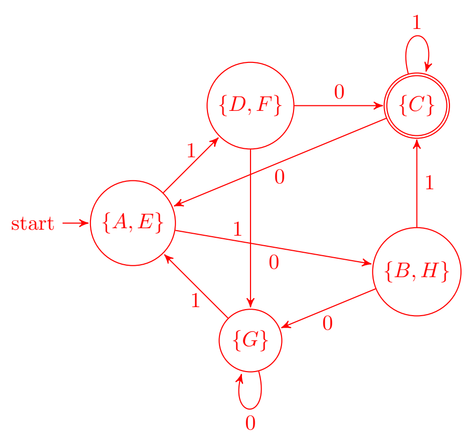


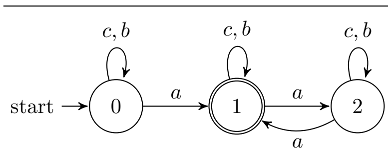
Réponse :

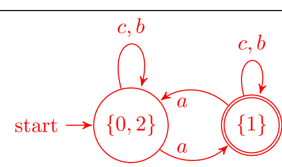
a. 0^*1^+
b. $\epsilon \cup 0^+1^+$
c. $(10(0 \cup 1))^* \cup (10(0 \cup 1)1)^*1 = (10(0 \cup 1))^*(\epsilon \cup 1)$

Exercice 8. Minimisez les automates :









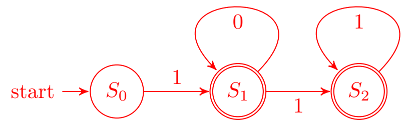
Exercice 9. Donnez des grammaires syntagmatiques pour produire chacun des ensembles suivants :

1. $\{01^n\}$
$S \to 0A$
$A \to 1A,\ \lambda$

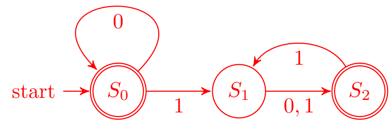
2. $\{0^n 1^{2n}\}$
   $S \to 0A11,\ \lambda$
   $A \to 0A11,\ \lambda$
3. $\{0^n 1^m 0^n\}$
   $S \to \lambda,\ 0A0,\ 1B$
   $A \to 0A0,\ 0B0$
   $B \to 1B,\ \lambda$

Exercice 10. Construisez les automates correspondant aux expressions ci-après.

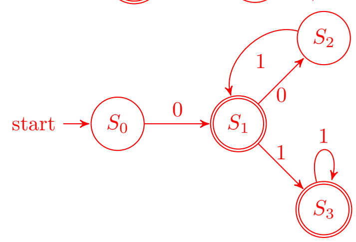
a. 10^*1^*



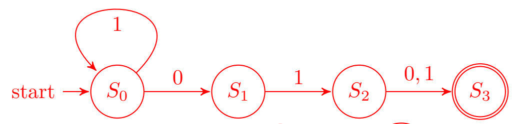
b. $0^*(10+11)^*$



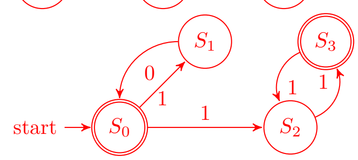
c. $0(01)^*1^*$



d. $1^*01(0+1)$



e. $(10)^*(11)^*$



Exercice 11. Prouvez que le langage $L = \{a^n b^n c^n ; n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier.

Solution

Supposons que le langage L est régulier. Il vérifie donc le lemme de pompage.

Soit p l'entier du lemme de pompage, $z = a^p b^p c^p$ un mot du langage L. Il existe une décomposition $z = uvw$, avec $u = a^k$, $v = a^t$, $w = a^{p-k-t} b^p c^p$. De plus $k + t \leq p$ (car $|uv| \leq p$), $t > 0$ (car $v \neq \epsilon$).

D'après le lemme de pompage, $\forall i \geq 0$, $uv^i w \in L$.

pour $i = 0$ on a : $uv^i w = a^k (a^t)^0 a^{p-k-t} b^p c^p = a^k a^{p-k-t} b^p c^p = a^{p-t} b^p c^p$

Puis que $t > 0$, $p - t < p$. Donc $uv^i w \notin L$. Absurde.

Exercice 12. *Lemme de pompage*

Soit L le langage constitué de tous les palindromes. Montrez que L n'est pas régulier.

Supposons L régulier. Soit p l'entier du lemme de pompage.

Quel que soit $m \in L$ avec $|m| \geq p$, il existe une décomposition uvw de m telle que $|uv| \leq p$, $v \neq \lambda$ et $\forall i \in \mathbb{N}, uv^i w \in L$.

Il suffit donc de prendre un mot dans L (puisque le lemme s'applique quel que soit le mot) et de montrer qu'aucune décomposition de ce mot ne respecte les trois conditions à la fois (puisque le lemme dit qu'il en existe une).

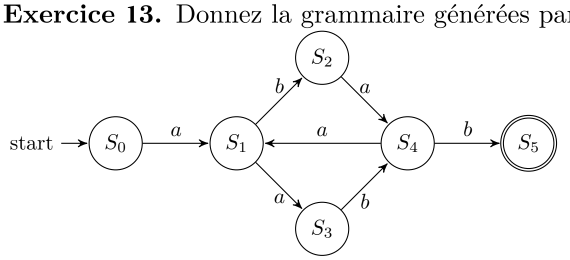
Posons $m = a^p b a^p$. m est un palindrome de longueur $2p + 1 \geq p$.

Ses décompositions uvw respectant les deux premières conditions sont de la forme : $u = a^j, v = a^k, w = a^{p-j-k} b a^p$ avec $j + k \leq p, k \geq 1$.

Pour $i = 2$:
$$\begin{aligned} uv^2 w &= a^j a^{2k} a^{p-j-k} b a^p \\ &= a^{p+k} b a^p \text{ qui n'est pas un palindrome puisque } k \neq 0 \end{aligned}$$

Donc L n'est pas régulier.

Exercice 13. Donnez la grammaire générées par le langage reconnu par les automates suivants :



$S \to aA$
$A \to bC \mid aB$
$B \to bD$
$C \to aD$
$D \to aA \mid b$

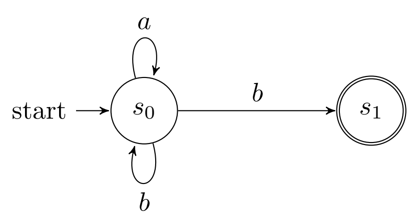
Exercice 14. Soit les grammaires G_1 et G_2 définies par :

a. $G_1 = (V_1\,, T_1\,, S_1\,, P_1)$ où $V_1 = \{a\,, b\,, S_1\,, A\}$, $T_1 = \{a\,, b\}$, S_1 symbole de départ et $P_1 = \{S_1 \to bS_1,\ S_1 \to aS_1,\ A \to aS_1,\ A \to bA,\ A \to a,\ S_1 \to b\}$.

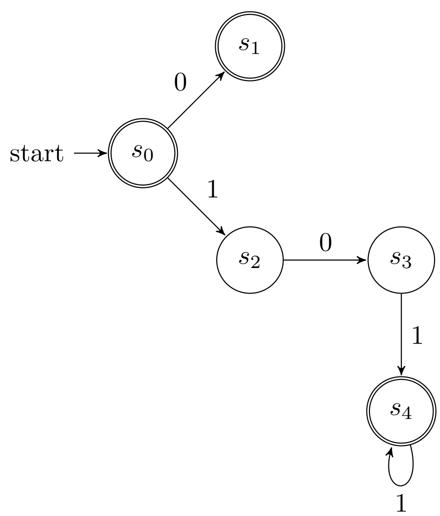
b. $G_2 = (V_2\,, T_2\,, S_2\,, P_2)$ où $V_2 = \{0\,, 1\,, S_2\,, A\,, B\}$, $T_2 = \{0\,, 1\}$, S_2 symbole de départ et $P_2 = \{S_2 \to 1A,\ S_2 \to 0,\ S_2 \to \lambda,\ A \to 0B,\ B \to 1,\ B \to 1B\}$.

1. Déterminez les types des grammaires G_1 et G_2. Type 3
2. Construisez les automates finis reconnaisant les langages produits par les grammaires G_1, G_2.

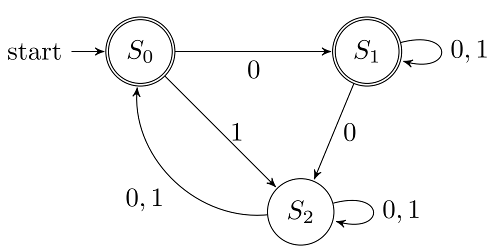
   2.a. $\{(b \cup a)^* b\}$

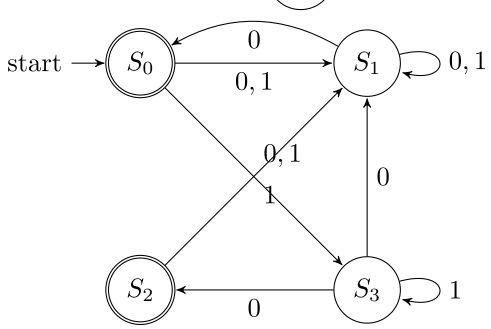


   2.b. $\{0\,, \lambda\,, 1011^*\}$



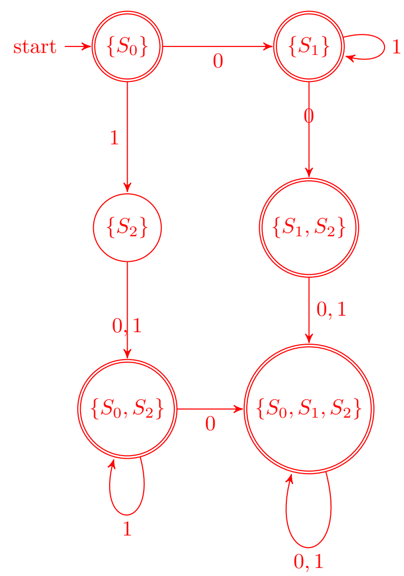
Exercice 15. Donnez les automates déterministes correspondant aux automates ci-après.





Premier automate :

États	f	
	I	
	0	1
$\{S_0\}$	$\{S_1\}$	$\{S_2\}$
$\{S_1\}$	$\{S_1, S_2\}$	$\{S_1\}$
$\{S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$
$\{S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$
$\{S_0, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$
$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$

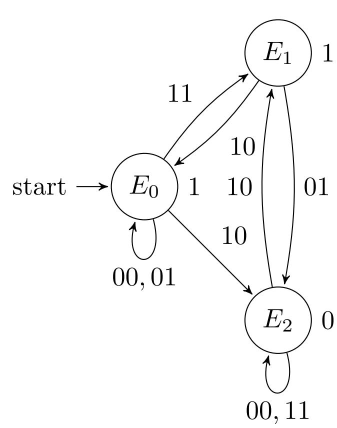


Exercice 16. Soit la table d'états suivante :

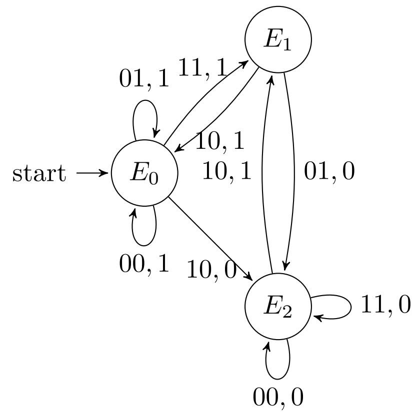
$E_p \vert e_1e_2$	00	01	11	10	S
E_0	E_0	E_0	E_1	E_2	1
E_1		E_2		E_0	1
E_2	E_2		E_2	E_1	0

a. S'agit-il d'une machine de Moore ou de Mealy ? Moore

b. Donner son diagramme d'états.



c. Convertir en Moore s'il s'agit d'une machine de Mealy, en Mealy s'il s'agit d'une machine de Moore.



Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 11 (page 625) ; 10, 17 (page 634) ; 8 (page 655).