TD 11 : RÉVISIONS

Exercice 1. *Théorème maître*
Quelle est la borne asymptotique des relations de récurrence avec fractionnement suivantes ?

1. $T(n) = 3T(n/5) + \Theta(n)$
   $O(n)$
2. $T(n) = 4T(n/4) + \Theta(n)$
   $O(n \log(n))$
3. $T(n) = 6T(n/5) + \Theta(n^2)$
   $O(n^2)$

Exercice 2. *Résolution d'une équation de récurrence*
Résoudre les équations de récurrence suivantes (faites attention à la résolution du système) :

1. $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$; $a_0 = 1$ et $a_1 = 3$

$$\begin{aligned} r^2 - 2r - 3 &= 0 \\ r_1 &= -1 \\ r_2 &= 3 \\ a_n &= \alpha_1(-1)^n + \alpha_2 \cdot 3^n \\ 1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ 3 &= -\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

2. $a_n = 5a_{n-1} + 2a_{n-2} - 24a_{n-3}$; $a_0 = 1$, $a_1 = -4$ et $a_2 = -4$

$$\begin{aligned} r^3 - 5r^2 - 2r + 24 &= 0 \\ r_1 &= 3 \\ r_2 &= -2 \\ r_3 &= 4 \\ a_n &= \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2(-2)^n + \alpha_3 \cdot 4^n \\ 1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ -4 &= 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3 \\ -4 &= 9\alpha_1 + 4\alpha_2 + 16\alpha_3 \\ \alpha_1 &= \frac{4}{5} \\ \alpha_2 &= \frac{6}{5} \\ \alpha_3 &= 1 \end{aligned}$$

3. $a_n = 5a_{n-1} + 2a_{n-2} - 24a_{n-3}$; $a_0 = 1$ et $a_1 = -4$
   Même équation caractéristique et racines que pour la question précédente.

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2(-2)^n + \alpha_3 \cdot 4^n \\ 1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ -4 &= 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3 \\ \alpha_2 &= \frac{4}{3} - \frac{\alpha_1}{6} \\ \alpha_3 &= -\frac{5\alpha_1}{6} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercice 3. *Résolution d'une équation de récurrence*
Résoudre la relation de récurrence $a_n = a_{n-1}^2 \cdot a_{n-2}^3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$.
Posez $b_n = log_2(a_n)$
Rappel : Pour tout $a\,, b > 0$ et tout $0 < p \neq 1$
$log_2(a \cdot b) = log_2(a) + log_2(b)$; $log_2(a^p) = plog_2(a)$; $log_2(a) = b \Leftrightarrow a = 2^b$
Résolvez l'équation de récurrence pour b_n et en déduire l'expression de a_n, $b_n = 2b_{n-1} + 3b_{n-2}$, qui se résout de la même façon que l'équation 1) du numéro précédent. On trouve les racines $r = 3$ et $r = -1$ pour ensuite déterminer les alphas qui seront $\alpha_1 = -1/4$ et $\alpha_2 = 1/4$. Pour déterminer les alphas, il faut faire attention à bien appliquer le logarithme au deux premiers termes obtenus avec la relation, $a_1 = 2$ et $a_2 = 4$, afin de poser les équations. Il suffit finalement de remettre les b_n en a_n, et pour cela on utilise encore les formules des logarithmes. On a $b_n = log_2(a_n) = (-1/4) * (-1)^n + (1/4) * (3)^n$ et donc $a_n =^4 \sqrt{2^{-(-1)^n + 3^n}}$.

Exercice 4. *Preuve*
Prouvez que $(nk)\,!$ est divisible par $(n\,!)^k$.

$$\begin{aligned}
\frac{(k \cdot n)!}{(n!)^k} &= \frac{1}{(n!)^k} \cdot \left(n! \cdot \frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{(3n)!}{(2n)!} \cdots \frac{(k \cdot n)!}{((k-1) \cdot n)!} \right) \\
&= \frac{n!}{n!0!} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!} \cdots \frac{(kn)!}{n! \cdot ((k-1-\cdot n)!} \\
&= \binom{n}{n} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \binom{3n}{n} \cdots \binom{k \cdot n}{n}
\end{aligned}$$

Ce nombre est un produit d'entiers (positifs), c'est donc un entier (positif).

Exercice 5. *Propositions*
Soit p, q et r les propositions :
p : Vous êtes malade le jour de Noël.
q : Vous avez manqué le party de famille.
r : Vous avez réussi à acheter tous vos cadeaux à temps.
Exprimez chacune des propositions suivantes en langage courant.

1. $p \rightarrow q$
   Si vous êtes malade le jour de Noël, alors vous avez manqué le party de famille.
2. $\neg q \leftrightarrow r$
   Si vous n'avez pas manqué le party de famille, alors vous avez réussi à acheter tous vos cadeaux à temps et réciproquement.
3. $q \rightarrow \neg r$
   Si vous avez manqué le party de famille, alors vous n'avez pas réussi à acheter tous vos cadeaux à temps.
4. $p \vee q \vee r$
   Vous êtes malade le jour de Noël ou vous avez manqué le party de famille ou vous n'avez pas acheté tous vos cadeaux de Noël à temps.

Réduisez les expressions suivantes. Sont-elles des tautologies, des contradictions ou des contingences ?

1. $(p \rightarrow \neg r) \vee (q \rightarrow \neg r)$
   $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$
2. $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r) \vee (p \wedge r)$
   $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$

Exercice 6. *Quantificateurs*
Soit $C(x, y)$ l'énoncé « x peut offrir un cadeau à y », où l'univers du discours est l'ensemble des êtres humains. Avec les quantificateurs, exprimez les énoncés suivants :

1. Le Père Noël peut offrir un cadeau à tous le monde.
   $\exists x \forall y C(x, y), x \in \{\text{Père Noël}\}$
2. Tous le monde peut offrir un cadeau au Père Noël.
   $\exists y \forall x C(x, y), y \in \{\text{Père Noël}\}$
3. Personne sauf le Père Noël ne peut offrir un cadeau à tout le monde.
   $\exists ! x \forall y C(x, y), x \in \{\text{Père Noël}\}$
4. Tout le monde peut recevoir un cadeau de la part de quelqu'un.
   $\forall y \exists x C(x, y)$
5. Certaines personnes ne peuvent offrir qu'exactement deux cadeaux.
   $\exists x \exists ! y \exists ! z C(x, y) C(x, z)$

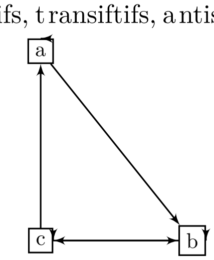
Exercice 7. *Récursivité* Donnez
une définition récursive de

1. l'ensemble des entiers positifs impairs.
   Base : $a_0 = 1$ Étape récurs. : $a_{x+1} = a_x + 2$
2. l'ensemble des puissances entières positives de 5.
   Base : $a_0 = 1, a_1 = 5$ Étape récurs. : $a_{x+1} = a_x * a_1$
3. l'ensemble des entiers qui ne sont pas divisibles par 4.
   Base : $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$ Étape récurs. : $a_{a+3} = a_x + 4$

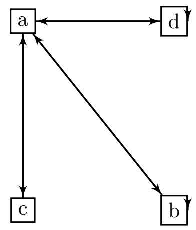
Exercice 8. *Relations*
Supposez que R et S sont des relations réflexives dans un ensemble A. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. R ∪S est réflexive.
2. R ∩S est réflexive.
3. R ⊕S est irréflexive.
4. R - S est irréflexive.
5. R ∘S est réflexive.
   Tous les énoncés sont vrais.

Exercice 9. *Relations*
Les graphes orientés suivant sont-ils réflexifs, transiftifs, antisymétriques et/ou symétriques ?

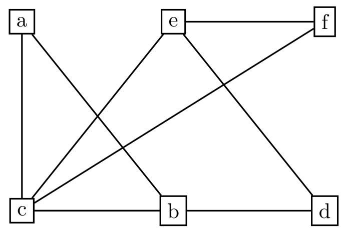


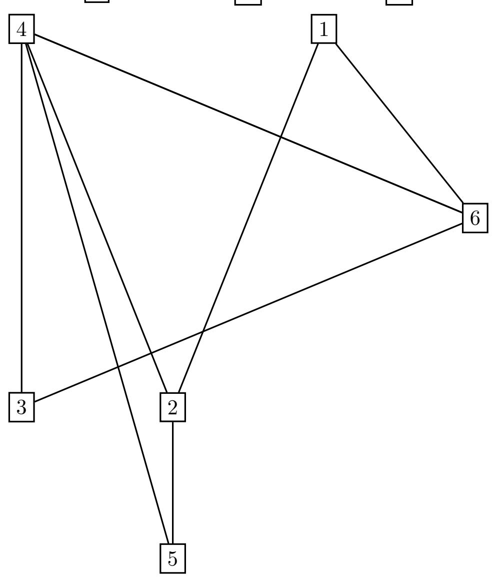
Ce graphe est réflexif, mais ni symétrique, ni antisymétrique. Il n'est pas transitif.



Ce graphe est symétrique, donc pas antisymétrique, mais il n'est pas réflexif ni transitif.

Exercice 10. *Graphes bipartis et graphes isomorphes*
Les graphes simples suivants sont-ils bipartis ? Sont-ils isomorphes ?





Ces graphes ne sont pas bipartis. Toutefois, ils sont isomorphes.