LOG 2810

STRUCTURES DISCRETES

TD 3 :RELATION ET FONCTIONS

---

1. Relations

Exercice 1. Parmi les relations suivantes de l'ensemble de tous les Canadiens.

- $\{(a,\ b)$, a et b ont le même âge.$\}$
- $\{(a,\ b)$, a et b ont les mêmes parents.$\}$
- $\{(a,\ b)$, a et b ont un parent en commun.$\}$
- $\{(a,\ b)$, a et b parlent une même langue maternelle.$\}$ - on considère une seule langue maternelle par personne

a. Lesquelles sont des relations d'équivalences?

Solution.

- $\{(a,\ b)$, a et b ont le même âge.$\}$ est une relation d'équivalence
- $\{(a,\ b)$, a et b ont les mêmes parents.$\}$ est une relation d'équivalence
- $\{(a,\ b)$, a et b parlent une même langue maternelle.$\}$ est une relation d'équivalence.

b. Pour celles qui ne sont pas des relations d'équivalence, indiquer et justifier les propriétés manquantes.

Solution.
{(a, b), a et b ont un parent en commun} n'est pas transitive. En effet, a et b peuvent avoir le même père, mais pas la même mère; b et c peuvent avoir la même mère, mais pas le même père. Dans ce cas-là, a est en relation avec b, et b est en relation avec c, mais a n'est pas en relation avec c

c. Pour celles qui sont des relations d'équivalence, indiquer les classes d'équivalences respectives.

Solution.

- $\{(a,\ b)$, a et b ont le même âge.$\}$: chaque âge est une classe d'équivalence. On a donc l'ensemble des $\mathbb{N}$.
- $\{(a,\ b)$, a et b ont les mêmes parents.$\}$: l'ensemble des enfants est une classe d'équivalence.
- $\{(a,\ b)$, a et b parlent une même langue maternelle.$\}$: chaque langue parlée comme langue maternelle est une classe d'équivalence.

Exercice 2. soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On définit sur l'ensemble produit $E \times E$ la relation $\mathcal{R}$:

$$(a, b)\ \mathcal{R}\ (c, d)\ si (a - c)\ est\ pair\ et\ (b - d)\ est\ divisible\ par\ 3$$

(1) Donner le cardinal de $E \times E$. 16
(2) Donner la matrice de $\mathcal{R}$.
pour construire la matrice, il faut considérer que :
(1,1) est en relation avec les couples suivants : (1,1), (1,4), (3,1), (3,4).
(1,2) est en relation avec les couples suivants : (1,2), (3,2).
(1,3) est en relation avec les couples suivants : (1,3), (3,3).
(1,4) est en relation avec les couples suivants : (1,1), (1,4), (3,1), (3,4).
(2,1) est en relation avec les couples suivants : (2,1), (2,4), (4,1), (4,4).
(2,2) est en relation avec les couples suivants : (2,2), (4,2).
(2,3) est en relation avec les couples suivants : (2,3), (4,3).

(2,4) est en relation avec les couples suivants : (2,1), (2,4), (4,1), (4,4).
(3,1) est en relation avec les couples suivants : (1,1), (1,4), (3,1), (3,4).
(3,2) est en relation avec les couples suivants : (1,2), (3,2).
(3,3) est en relation avec les couples suivants : (1,3), (3,3).
(3,4) est en relation avec les couples suivants : (1,1), (1,4), (3,1), (3,4).
(4,1) est en relation avec les couples suivants : (2,1), (2,4), (4,1), (4,4).
(4,2) est en relation avec les couples suivants : (2,2), (2,4).
(4,3) est en relation avec les couples suivants : (2,3), (4,3).
(4,4) est en relation avec les couples suivants : (2,1), (2,4), (4,1), (4,4).

(3) Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, alors $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, symétrique et transitive.
- Réflexive : Montrons que $(a,b)\ \mathcal{R}\ (a,b)$ est valide $\forall\ (a,b)$.
soit $(a-a)=0$. 0 est pair. De plus, soit $(b-b)=0$, 0 est divisible par 3.
- Symétrique : Montrons que $\forall\ (a,b)\ \mathcal{R}\ (c,d)$ alors $(c,d)\ \mathcal{R}\ (a,b)$.
On suppose $(a,b)\ \mathcal{R}\ (c,d)$, alors $(a-c)$ est pair et $(b-d)$ est divisible par 3.
Alors soit $(c,d)\ \mathcal{R}\ (a,b)$. $(c-a)=-(a-c)$. on sait que $(a-c)$ est pair, donc $-(a-c)$ est pair également. De plus, $(d-b)=-(b-d)$. De la même façon, on sait que $(b-d)$ est divisible par 3, donc $-(b-d)$ est également divisible par 3.
- Transitivité : Montrons que $\forall\ (a,b),\ (c,d),\ (e,f)\in E\times E$, si $(a,b)\ \mathcal{R}\ (c,d)$ et si $(c,d)\ \mathcal{R}\ (e,f)$, alors $(a,b)\ \mathcal{R}\ (e,f)$.
Si $(a-c)$ est pair, alors soit a et c sont pair, ou a et c sont impair. De la même façon, si $(c-e)$ est pair, alors c et e sont pair, ou c et e sont impair. On peut donc conclure que a et e sont soit tous les deux pair, ou tous les deux impair. Dans les deux cas, $(a-e)$ reste pair. De plus, on suppose $b-d=3n$ et $d-f=3m$. Donc $(b-d)+(d-f)=b-d+d-f=b-f=3n+3m=3(n+m)$. En conclusion, $b-f$ est divisible par 3.

(4) Donner le nombre total et la liste des différences classes d'équivalentes. On désigne par $\overline{(a,b)}$ la classe d'équivalence de (a,b).
il y a six classes d'équivalences.
$\{(1,1),(1,4),(3,1),(3,4)\}$
$\{(1,2),(3,2)\}$
$\{(1,3),(3,3)\}$
$\{(2,1),(2,4),(4,1),(4,4)\}$
$\{(2,3),(4,3)\}$
$\{(2,2),(4,2)\}$

(5) Calculer le nombre d'éléments des classes suivantes : $\overline{(1,1)}$, $\overline{(1,2)}$, $\overline{(1,3)}$.
4
2
2

(6) Soit $x,y,b\in E$, montrer que si $(x,y)\in\ \overline{(1,b)}$, alors $(x+1,y)\in\ \overline{(2,b)}$.
$(x,y)\in\ \overline{(1,b)}\ \rightarrow\ (x-1)$ est pair et $(y-b)$ est divisible par 3.
$(x,y)\in\ \overline{(1,b)}\ \rightarrow\ (x-1+2-2)$ est pair et $(y-b)$ est divisible par 3.
$(x,y)\in\ \overline{(1,b)}\ \rightarrow\ ((x-1+2)-2)$ est pair et $(y-b)$ est divisible par 3.
$(x,y)\in\ \overline{(1,b)}\ \rightarrow\ ((x+1)-2)$ est pair et $(y-b)$ est divisible par 3.
$(x,y)\in\ \overline{(1,b)}\ \rightarrow\ (x+1,y)\ \mathcal{R}\ (2,b)$
$(x,y)\in\ \overline{(1,b)}\ \rightarrow\ (x+1,y)\ \in\ \overline{(2,b)}$

Exercice 3. Soit A = {1,2,3,4}

(1) Montrez que l'union de deux relations symétriques sur A est symétrique.
Soient R et S deux relations symétriques. Soit $(a,b)\in R\cup S$. Donc $(a,b)\in R$ ou $(a,b)\in S$. On en déduit que $(b,a)\in R$ ou $(b,a)\in S$. Ainsi $(b,a)\in R\cup S$.

(2) Montrez que l'union de deux relations antisymétriques sur A n'est pas nécessairement antisymétriques.
Posons $R=\{(1,1),(2,3)\}$ et $S=\{(1,1),(3,2)\}$. L'union de R et S nous donne l'ensemble $R\cup S=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$. Cet ensemble n'est pas antisymétrique.

Exercice 4. On définit dans $\mathbb{N}^*$ la relation $\ll$ suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, x \ll y \text{ } s'il \text{ } existe \text{ } n \in \mathbb{N}^* \text{ } tel \text{ } que \text{ } y = x^n$$

Montrez que $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$

$\ll$ est une relation d'ordre si $\ll$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

- Réflexivité : Montrons que $\forall x \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = x^n$.
  En prenant $n = 1$, on conclut la réflexivité de $\ll$.
- antisymétrie : Montrons que $\forall (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $x \ll y$ et $y \ll x$, alors x = y.
  $x \ll y \to y = x^n$ et $y \ll x \to x = y^m$
  en combinant, on obtient : $y = y^{m^n} = y^{m*n}$. Ainsi, $m * n = 1$. On en déduit que $n = 1$, $m = 1$.
  donc $x = y$.
- Transitivité : Montrons que $\forall x, y, z \in \mathbb{N}^*$, si $x \ll y$ et $y \ll z$, alors $\exists$ $n \in \mathbb{N}^*, x \ll z$.
  $x \ll y \to y = x^n$ et $y \ll z \to z = y^m$
  En combinant, on obtient : $z = x^{n^m} = x^{n*m}$
  En posant $N = n * m$, on a $N \in \mathbb{N}^*$ et $z = x^N$ donc $x \ll z$.

$\ll$ est donc une relation d'ordre. C'est un ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$ car pour le couple (2,6), il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $6 = 2^n$.

Exercice 5. On définit une relation sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{T}$ suivante:

$$(x,y)\mathcal{T}(x',y') \text{ } si \text{ } |x - x'| \leq y - y'$$

(1) Montrez que $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre.

Solution.

- Réflexivité. Il faut montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ (x,y) \ \mathcal{T} \ (x,y)$.
  Trivial.
- Anti-symétrie. Montrons que
  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \ (x,y)\mathcal{T}(x',y') \ et \ (x',y')\mathcal{T}(x,y) \ \leftrightarrow \ (x,y) = (x',y')$

  $(x,y)\mathcal{T}(x',y') \ \leftrightarrow \ |x - x'| \leq y - y' \ et (x',y')\mathcal{T}(x,y) \leftrightarrow \ |x' - x| \leq y' - y$
  $|x - x'| = |x' - x|, \ |x - x'| \leq y - y' \ et \ |x - x'| \leq -(y - y'), \ donc \ y - y' = 0, \ soit \ y = y'$. *On en déduit que* $|x - x'| = 0, \ soit \ x = x'$.
- Transivité. Montrons que
  $\forall (x,y), \ (x',y'), \ (x'',y'') \in \mathbb{R}, \ (x,y)\mathcal{T}(x',y') \ et \ (x',y')\mathcal{T}(x'',y'') \ \to \ (x,y)\mathcal{T}(x'',y'')$

  $(x,y)\mathcal{T}(x',y') \ et \ (x',y')\mathcal{T}(x'',y'') \ \to \ |x - x'| \leq y - y' \ et \ |x' - x''| \leq y' - y''$
  En sommant les deux inégalités, nous avons: $|x - x'| + |x' - x''| \leq y - y''$.
  $Or, |(x - x') + (x' - x'')| \ \leq \ |x - x'| + |x' - x''| \leq y - y'', \ donc \ |x - x''| \ \leq \ y - y''$

(2) $\mathcal{T}$ est-elle une relation d'ordre total?.

Solution.
Non. Il suffit de montrer un contre-exemple, soit les couples (10,2) et (1,0).

2. Fonctions

Exercice 6. Sans les cas suivants dites si l'application $f : A \to B$ est injective , surjective ou bijective. Si elle est bijective donnez sa réciproque

(1) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = x + 1$
Solution: fonction bijective. $f^{-1}(x) = x - 1$
(2) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 1$
Solution: fonction non injective et non surjective. Preuve graphique
(3) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = 2^x$
Solution: fonction injective , non surjective
(4) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = 1/x$
Solution: fonction injective mais non surjective (car 0 n'a pas de pré-image), donc non bijective

(5) $A \subseteq \mathbb{R}^2, B \subseteq \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x+y, x-y)$
Solution: fonction bijective

Exercice 7. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

(1) Déterminer $F = f(E)$
Solution: $F =]-1, 1[$
(2) Vérifier que f est une bijection de E sur F . injection : s
(3) Calculer la réciproque de f
Solution: $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$

Exercice 8. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$, deux ensembles. On considère les ensembles ci-dessous décrivant une relation E vers F. Précisez si la relation est une fonction, injection, surjection ou bijection.

(1) $\{(a,2), (b,2), (c,1), (d,3)\}$
Solution: Une fonction
(2) $\{(a,4), (b,1), (c,3), (d,2)\}$
Solution: Une fonction bijective
(3) $\{(a,2), (b,2), (a,1), (b,4)\}$
Solution: Aucune
(4) $\{(a,1), (b,2), (c,3)\}$
Solution: Aucune