POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 8 : DÉNOMBREMENT

Exercice 1. Dans un jeu de 52 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (ces 5 cartes s'appellent une main).

1. Combien de mains contiennent exactement 2 dames et 1 roi ? $\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{44}{2}$

2. Combien de mains contiennent au moins 3 rois ? $\binom{4}{3} \times \binom{48}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{48}{1}$

Exercice 2. Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = Card\ A$.

1. Combien y-a-t-il de parties X de E contenant A ?
   - Premier raisonnement combinatoire
     Chaque partie X de E contenant A peut avoir $p, p+1, p+2, \ldots, n$ éléments. Ainsi, si X contient A et a $(p+k)$ éléments avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-p\}$, les k éléments qui s'ajoutent à ceux de A seront choisis parmi les $(n-p)$ éléments de $E - A$. Le nombre de choix possible de k éléments parmi les (n-p) éléments est $C(n-p, k)$.
     Le nombre de parties X de E contenant A est alors :
     $\sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 1^k \times 1^{n-p-k} = (1+1)^{n-p} = 2^{n-p}$

   - Deuxième raisonnement combinatoire
     Chaque partie X de E contenant A est obtenue par la réunion de A et d'un sous-ensemble de $E - A$. Les sous-ensemble de $E - A$ constitutent son ensemble des parties $\mathcal{P}(E - A)$. Le nombre de sous ensembles de $E - A$ est donc 2^{n-p}, avec $Card(E - A) = n - p$. Donc la réponse cherchée est : 2^{n-p}.

2. Combien y-a-t-il de parties X de E à m éléments contenant A, $m \in \{p, \ldots, n\}$?
   On a $m = p+k$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-p\}$. Les k éléments qui s'ajoutent à ceux de A seront choisis parmi les $(n-p)$ éléments de $E - A$. Le nombre de choix possible de k éléments parmi les (n-p) éléments est $C(n-p, k)$.
   D'où le nombre de parties X de E à m éléments contenant A est alors : $C(n-p, m-p)$

3. Combien y-a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?
   Les éléments de $E - A$ qui s'ajoutent à A pour former X sont distincts de ceux qui s'ajoutent à A pour former Y car $X \cap Y = A$. Si X contient m éléments incluant ceux de A ($C(n-p, m-p)$ possibilités), alors Y peut contenir jusqu'à $(n-m)$ éléments en plus de ceux de A. On a donc $\sum_{i=0}^{n-m} C(n-m, i) = \sum_{k=0}^{n-m} C(n-m,k) 1^i 1^{n-m-i} = (1+1)^{n-m} = 2^{n-m}$ possibilités de constitution de Y connaissant les m éléments de X.
   Le nombre de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$ est alors :
   $\sum_{m=p}^{n} C(n-p, m-p) \times 2^{n-m} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 2^{n-(k+p)} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 2^{(n-p)-k} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 2^{(n-p)-k} \times 1^k = (2+1)^{n-p} = 3^{n-p}$

Exercice 3. Soit la relation : $k \times C(n,k) = n \times C(n-1,k-1)$

1. Démontrez la relation.
   $C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)! \times k(k-1)!}$.
   En multipliant les deux membres par k puis en simplifiant le membre de gauche par k on a:
   $k \times C(n,k) = \frac{n(n-1)!}{(n-k)! \times (k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k-1+1)! \times (k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]! \times (k-1)!} = n \times C(n-1,k-1)$

2. En déduire pour tout entier positif n, la somme :
   $$C(n,1) + 2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)$$
   $C(n,1) + 2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)$
   $= n \times C(n-1,1-1) + n \times C(n-1,2-1) + \cdots + n \times C(n,k-1) + \cdots + n \times C(n-1,n-1)$
   $= n(C(n-1,0) + C(n-1,1) + \cdots + C(n,k-1) + \cdots + C(n-1,n-1))$
   $= n \times \sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,i)$
   $= n \times \sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,i) \times 1^i \times 1^{n-1-i}$
   $= n \times (1+1)^{n-1}$
   $= n \times 2^{n-1}$

3. En déduire pour tout entier positif non nul n, la somme :
   $$C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$$
   $C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$
   $= (2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)) - (C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   Or $2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n) = n \times 2^{n-1} - C(n,1)$,
   donc $C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$
   $= n \times 2^{n-1} - C(n,1) - (C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   $= n \times 2^{n-1} - (C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   $= n \times 2^{n-1} + C(n,0) - (C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   $= n \times 2^{n-1} + 1 - 2^n$
   $= 1 + (n-2) \times 2^{n-1}$

Exercice 4. Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 400 qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 4 ?

$$400 - \left\lfloor \frac{400}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{400}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{400}{2 \times 3} \right\rfloor = 133$$

Exercice 5. Calculez le coe icient de x^4y^7 dans le développement de $(2x-y)^{11}$. $-\binom{11}{7} * 16 = -5280$

Exercice 6. *Dénombrement*

(1) Quel est le coefficient de $a^3b^4c^3$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$?
Dans le développement de
$$(a+b+c)^{10} = (a+b+c)(a+b+c)...(a+b+c)$$
on obtient un terme $a^3b^4c^3$ en choisissant trois a, quatre b et trois c.
Il y a $\binom{10}{3}$ choix possibles pour les facteurs dont viendront les a.
Après ce premier choix, il y a $\binom{7}{4}$ choix possibles pour les facteurs d'où viendront les b. Au total, il y a :
$$\binom{10}{3}\binom{7}{4} = 4200$$
termes $a^3b^4c^3$ dans ce développement.

(2) Même question avec $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_p^{k_p}$ dans $(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)^n$.
De même, on obtient $\frac{n!}{\Pi_{i=1}^{p} k_i!}$ si $\sum_{i=1}^{p} k_p = n$ et 0 sinon.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note : $\sum_n^p$ le nombre de n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$.

1. Déterminer $\sum_n^0$, $\sum_n^1$, $\sum_n^2$, $\sum_1^p$, $\sum_2^p$.
   - $\sum_n^0 = 1$. Le seul n-uplet dont la somme des termes est zéro est : (0).
   - $\sum_n^1 = n$. Les n-uplets contiennent $n-1$ fois le chiffre 0 et seul chiffre 1. Il y a n façons de positionner le chiffre 1 dans un n-uplet.
   - $\sum_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$. Les n-uplets contiennent un seul chiffre 2 et $n-1$ zéros ou deux fois le chiffre 1 et $n-2$ zéros. Il y a n façons de positionner le chiffre 2 dans un n-uplet et il y a $C(n,2) = \frac{n(n-1)}{2}$ façons de positionner deux fois le chiffre 1 dans un n-uplet. Le nombre recherché est donc $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$
   - $\sum_1^p = 1$. On a (x_1) tel que $x_1 = p$. Le seul n-uplet possible est (p).
   - $\sum_2^p = p+1$. On a (x_1, x_2) tel que $x_1 + x_2 = p$. Soit $x_2 = p - x_1$ et $(x_1, x_2) = (x_1, p - x_1)$. Il y a $p+1$ façons de choisir x_1, soit $x_1 \in \{0, \dots, p\}$
   .
2. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n+1}^p = \sum_n^0 + \sum_n^1 + \cdots + \sum_n^p$
   - Par définition, $\sum_{n+1}^p$ est le nombre de $(n+1)$-uplets tels que $x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} = p$. C'est donc le nombre de n-uplets tels $x_1 + x_2 + ... + x_n = p - x_{n+1}$, soit $\sum_n^{p-x_{n+1}}$ (par définition).
   On a $x_{n+1} \in \{0, \dots, p\}$, donc $p+1$ choix possibles de x_{n+1}.

     Par suite, $\sum_{n+1}^p = \sum_n^{p-0} + \sum_n^{p-1} + \cdots + \sum_n^{p-(p-1)} + \sum_n^{p-p}$. D'où la relation.
   - Il est également possible de démontrer la relation par récurrence en montrant le cas de base comme suit :
   $\sum_1^0 + \sum_1^1 + \cdots + \sum_1^p = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{(p+1) fois} = p+1$ car $\sum_1^k = 1$ avec comme seul uplet (k). De plus on a $\sum_2^p = p+1$ (question 1). Donc $\sum_2^p = \sum_1^0 + \sum_1^1 + \cdots + \sum_1^p$.
3. En déduire que $\sum_n^p = C(n+p-1, p)$
   Preuve par induction :
   $\sum_1^p = 1 = C(p,p) = C(1-1+p, p)$. La relation est vraie pour $n = 1$.
   Supposons que $\sum_n^p = C(n+p-1, p)$ pour n quelconque $(n \geq 1)$.
   $\sum_{n+1}^p = \sum_n^0 + \sum_n^1 + \sum_n^2 + \cdots + \sum_n^p$ (d'après la question 2)
   $\sum_{n+1}^p = C(n+0-1, 0) + C(n+1-1, 1) + C(n+2-1, 2) + \cdots + C(n+p-1, p)$
   $\sum_{n+1}^p = C(n-1, 0) + C(n, 1) + C(n+1, 2) + \cdots + C(n+p-1, p)$
   C(n-1,0)=C(n,0) donc $\sum_{n+1}^p = (C(n,0) + C(n,1)) + C(n+1,2) + \cdots + C(n+p-1,p)$
   $\sum_{n+1}^p = (C(n+1,1) + C(n+1,2)) + \cdots + C(n+p-1,p)$ car C(n,0) + C(n,1)=C(n+1,1)
   $\sum_{n+1}^p = C(n+2,2) + \cdots + C(n+p-1,p)$
   De proche en proche on a $\sum_{n+1}^p = C(n+p-2, p-1) + C(n+p-1, p)$
   d'où $\sum_{n+1}^p = C(n+p, p)$
   On peut donc conclure que $\sum_n^p = C(n+p-1, p)$.

Exercice 8. Soit E un ensemble à n éléments. On appelle dérangement de E toute permutation de E ne laissant aucun élément invariant. On notera D_n le nombre de dérangements de E. On pose $D_0 = 1$.

1. Si E comporte un seul élément, y-a-t-il des dérangements de E ? En déduire D_1.
   Réponse : Pas de dérangement. $D_1 = 0$.
2. Si E comporte deux éléments, combien y-a-t-il de dérangements de E ? En déduire D_2.
   Réponse : 1 dérangement. $D_2 = 1$.
3. On suppose n quelconque, et on ecrit $E = \{a_1, ..., a_n\}$. Soit f une permutation de E. On suppose qu'elle laisse k éléments invariants. Combien y-a-t-il de telles permutations ? En déduire la formule suivante :
$$n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_k$$
   Réponse : Une permutation qui laisse k éléments invariants contient $(n-k)$ dérangements, soit D_{n-k}.
   Il y a $C(n,k)$ façons d'avoir k éléments invariants.
   Le nombre de permutations est donc $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k}$.
   Déduction : Le nombre de permutations de E est $n!$. On peut donc établir que $n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k}$.
   $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k} = C(n,0) \times D_n + C(n,1) \times D_{n-1} + \cdots + C(n,n-1) \times D_1 + C(n,n) \times D_0$

   En considérant que $C(n,k) = C(n,n-k)$, on a :
   $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k} = C(n,n) \times D_n + C(n,n-1) \times D_{n-1} + \cdots + C(n,1) \times D_1 + C(n,0) \times D_0$
   D'où $n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_k$.
4. En déduire D_3, D_4, D_5.
   Réponse : $D_3 = 2$ car $3! = \sum_{k=0}^{3} C(3,k) \times D_k$. En faisant une démarche analogue on obtient $D_4 = 9$, $D_5 = 44$.

Exercice 9. Marie possède cinq paires de gants et s'amuse à les porter de façon dépareillée ; tout d'abord, elle sépare les gants pour la main gauche des gants pour la main droite. Ensuite, elle numérote les gants pour la main gauche de 1 à 5 , et les gants pour la main droite de 1 à 5 (où la paire de gants assortis correspond au gant pour la main gauche n°x et au gant pour la main droite n°x). Finalement, pour chaque gant pour la main droite, elle choisit au hasard un gant pour la main gauche pour finir la paire.

1. À chaque numéro de gant pour la main gauche, on associe le numéro du gant pour la main droite avec lequel il est en paire. Combien y a t-il d'associations possibles ?
   Réponse : Une telle association correspond à une permutation de $\{1, ..., 5\}$. Il y a $5! = 120$ possibilités.
2. De combien de manières peut-on composer cinq paires de gants de sorte qu'aucune paire légitime ne soit reconstituée ?
   Réponse : Si aucune paire légitime n'est reconstituée, c'est qu'il y a un dérangement. Il y a $D_5 = 44$ possibilités (voir numéro précédent).
3. De combien de manières peut-on composer cinq paires de gants pour qu'une seule paire légitime soit reconstituée ?
   Réponse : Si une seule paire légitime est reconstituée, il y a 5 choix pour cette paire. Pour le reste, il faut un dérangement : il y a donc $5 \times D_4 = 45$ possibilités (voir numéro précédent).
4. De combien de manières peut-on composer cinq paires de gants pour qu'il y ait plus de paires illégitimes assorties que de paires légitimes ?
   Réponse :
   - On peut avoir trois (03) paires illégitimes et deux (02) paires légitimes. Or il y a $C(5,3) = 10$ choix de 2 paires légitimes parmi 5. Pour les 3 autres, il faut une association qui soit un dérangement D_3. On a donc : $10 \times D_3 = 20$ possibilités (voir numéro précédent).
   - On peut avoir quatre (04) paires illégitimes et une (01) paire légitime. Ce cas est traité dans la question précédente (question 3.). On a donc : $5 \times D_4 = 45$ possibilités (voir numéro précédent).
   - On peut avoir cinq (05) paires illégitimes et zéro (0) paire légitime. Ce cas est traité dans la question 2. On a donc : $D_5 = 44$ possibilités (voir numéro précédent).

   Le nombre d'associations où il y a plus de paires illégitimes que de paires légitimes est donc : 20 + 45 + 44 = 109.

Exercice 10. Parmi les permutations de l'ensemble E = {a, b, c, d, e, f} (que l'on peut représenter par les mots de 6 lettres qui contiennent exactement une fois chaque lettre de E), combien y en a-t-il qui ne contiennent ni ab ni cd ni ef ?

Première méthode

- Nombre de permutations qui contiennent ab.
  Pour une position fixe de ab, il y a : 4! possibilités de placer les autres lettres. Or il y a 5 positions possibles pour ab. Donc pour ab on a : $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent cd.
  Le raisonnement est analogue au cas de ab. D'où $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ef.
  Le raisonnement est analogue au cas de ab. D'où $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab et cd
  Pour une position fixe de ab et cd, il y a : 2! possibilités de placer les autres lettres. Il y a 5 positions possibles pour ab. Une fois ab placé, il y a 3, 2, 2, 2, 3 positions respectives pour cd. Soit 12 possibilités. Donc pour ab et cd on a : $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab et ef
  Le raisonnement est analogue au cas de ab et cd. D'où $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.

- Nombre de permutations qui contiennent cd et ef
  Le raisonnement est analogue au cas de ab et cd. D'où $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab, cd et ef
  Il y a $3! = 6$ possibilités de permutations.

Le résultat recherché est alors $6! - (3(5\times 4!) - 3(12\times 2!) + 3!) = 720 - 294 = 426$ possibilités de permutations.

Deuxième méthode

- Pour avoir ab seul on a : $5 \times 4! - 42$ possibilités. Pareil pour cd seul ou ef seul. Au total on a : $3(5 \times 4! - 42) = 234$ possibilités.
- Pour avoir ab et cd ensemble et sans ef on a : 18 possibilités. Pareil pour cd et ef sans ab puis ab et ef sans cd. Au total on a : 54 possibilités.
- Pour avoir ab, cd et ef ensemble on a : 6 possibilités.

Le résultat recherché est alors $6! - 3(5 \times 4! - 42) - (3 \times 18) - 6 = 426$ possibilités de permutations.

Exercice 11. Un mot long de n lettres compte l lettres différentes. La $i^{\grave{e}me}$ lettre apparaît n_i fois dans le mot, donc on a :

$$\sum_{i=1}^{l} n_i = n$$

Combien d'anagrammes du mot peut-on écrire ?

- Si on considère toutes les lettres comme distinctes, même lorsqu'il s'agit de la même lettre de l'alphabet, il y a $n!$ permutations. Chaque anagramme a une ou plusieurs permutations qui permet(tent) de l'obtenir.
- Quel que soit l'anagramme considéré, le nombre de permutations associées est $\prod_{i=1}^{l}(n_i!)$ (faire un exemple si nécessaire).

Donc il y a $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{l} n_i!}$ anagrammes.

Exercice 12. On considère le mot MORPHEUS.

1. Dénombrer les anagrammes du mot. $8\,!$
2. Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot :
   2.1. commençant et finissant par une voyelle ;
   $6 \cdot 6!$
   2.2. commençant et finissant par une consonne ;
   $20 \cdot 6!$
   2.3. commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
   $15 \cdot 6!$
   2.4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne. $15 \cdot 6!$

Exercice 13. Résoudre les relations de récurrence suivantes :

1. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$; $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$
   Réponse : $a_n = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$
2. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$
   Réponse : $a_n = (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$
3. $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$; $a_0 = 1$ et $a_1 = 3$
4. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + 6a_{n-3}$; $a_0 = 1$, $a_1 = -4$ et $a_2 = -4$
5. $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3}$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$
   Réponse : $a_n = (2 + \frac{3n}{2}) \times 2^n - 2 \times 3^n$

Exercice 14. Donner un ordre de grandeur asymptotique pour $T(n)$.

1. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$. Réponse : $\mathrm{O}(n^3)$
2. $T(n) = 8T(n/2) + n^2$. Réponse : $\mathrm{O}(n^3)$
3. $T(n) = 2T(n/4) + n^2$.