POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

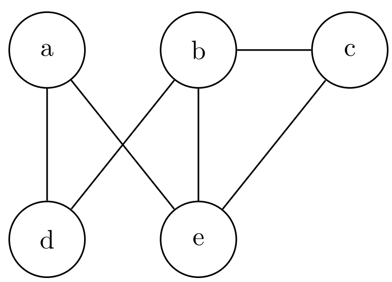
LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 6 : GRAPHES
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

---

1. Graphes

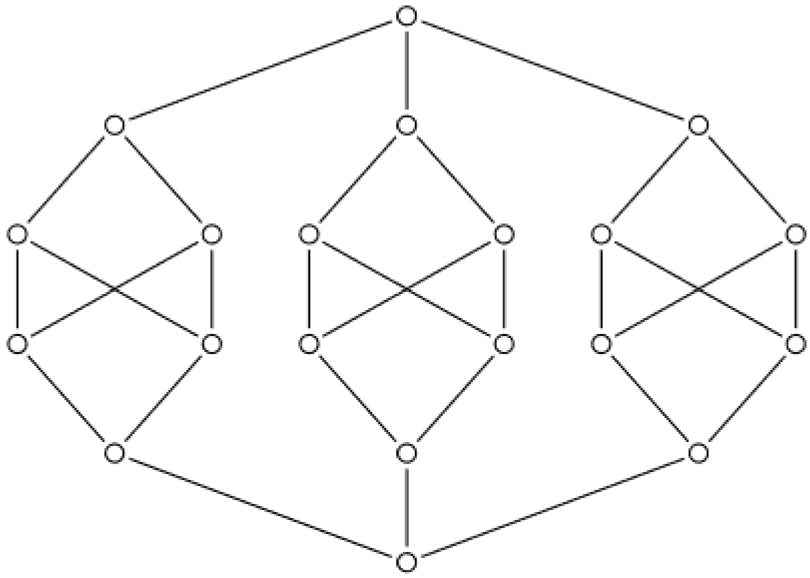
Exercice 1. Soit le graphe suivant :



Les listes de sommets suivants forment-elles des chaînes dans le graphe ci-dessus? Lesquelles sont des chaînes simples? Lesquelles sont des cycles? Quelles sont les longueurs de celles qui sont des chaînes?
Solution :

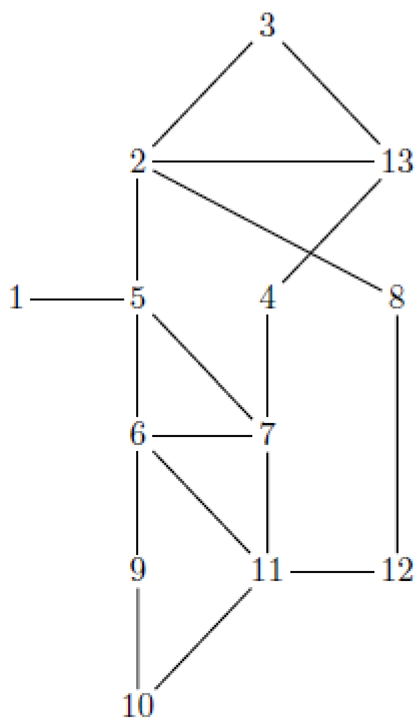
(1) a, e, b, c, b
a, e, b, c, b est une chaîne. Mais ce n'est ni simple, ni un cycle. Sa longueur est 4.
(2) a, e, a, d, b, c, a
a, e, a, d, b, c n'est pas une chaîne.
(3) e, b, a, d, b, e
e, b, a, d, b, e n'est pas une chaîne.
(4) c, b, d, a, e, c
e, b, a, d, b est une chaîne simple et un cycle. Sa longueur est 5.
(5) Combien existe-t-il de chemins de longueur 4 entre a et b?
11

Exercice 2. Le graphe ci-dessous contient-il un cycle hamiltonien ?

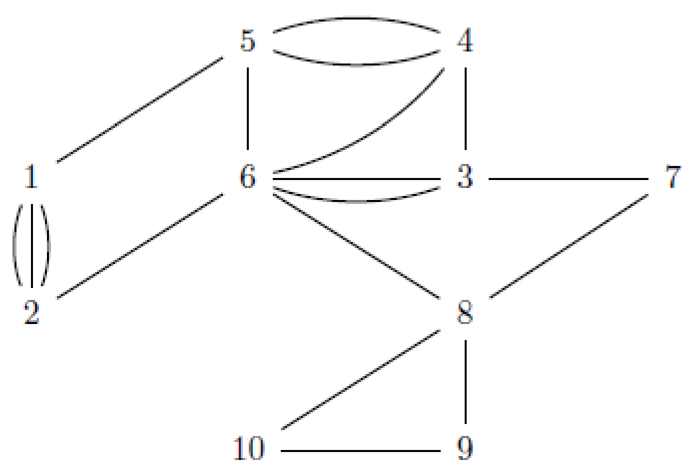


Solution : Non. Il contient par contre une chaîne hamiltonienne:

Exercice 3. Le graphe (a) admet-il une chaîne eulérienne ? Si oui, déterminez-en une.
Le multigraphe (b) admet-il un cycle eulérien ? Si oui, déterminez-en un.



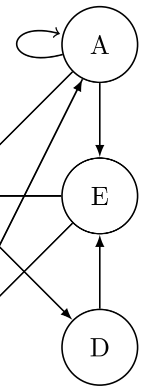
(a)



(b)

Solution :
(a) : Oui : 13-2-3-13-4-7-11-12-8-2-5-7-6-11-10-9-6-5-1
(b) : Oui : 1-5-4-5-6-4-3-7-8-9-10-8-6-3-6-2-1-2-1

Exercice 4. Soit le graphe suivant :



Matrice d'adjacence M :

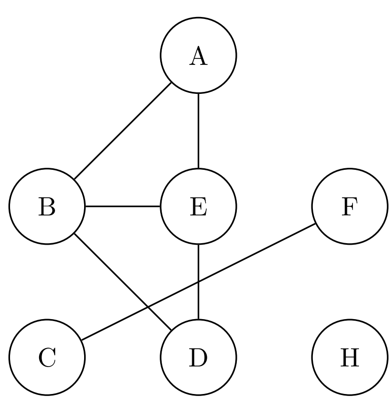
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

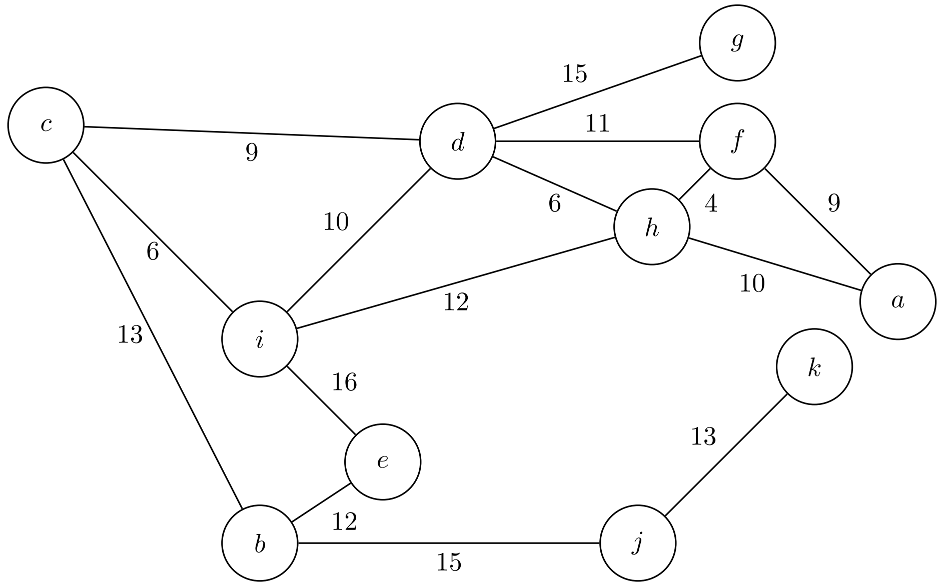
Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 allant de A à C ? 2
Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 allant de E à A ? 1

Exercice 5. Soit le graphe suivant :



Combien y a-t-il de composantes connexes dans ce graphe ? 3 : A-B-D-E, F-C et H

Exercice 6. Appliquez l'algorithme de Dijkstra au graphe suivant afin de trouver le plus court chemin du sommet a au sommet k.



Solution :

(1) $S = \{a\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0)\}$
Chemins connus : $C = \{(ah, 10), (af, 9)\}$, le reste étant toujours à l'infini.

(2) $S = \{a, f\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9)\}$
Chemins connus : $C = \{(ah, 10), (afd, 20)\}$

(3) $S = \{a, f, h\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahd, 16), (ahi, 22)\}$

(4) $S = \{a, f, h, d\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31)\}$

(5) $S = \{a, f, h, d, i\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38)\}$

(6) $S = \{a, f, h, d, i, c\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$

(7) $S = \{a, f, h, d, i, c, g\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$

(8) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdcb, 38)\}$

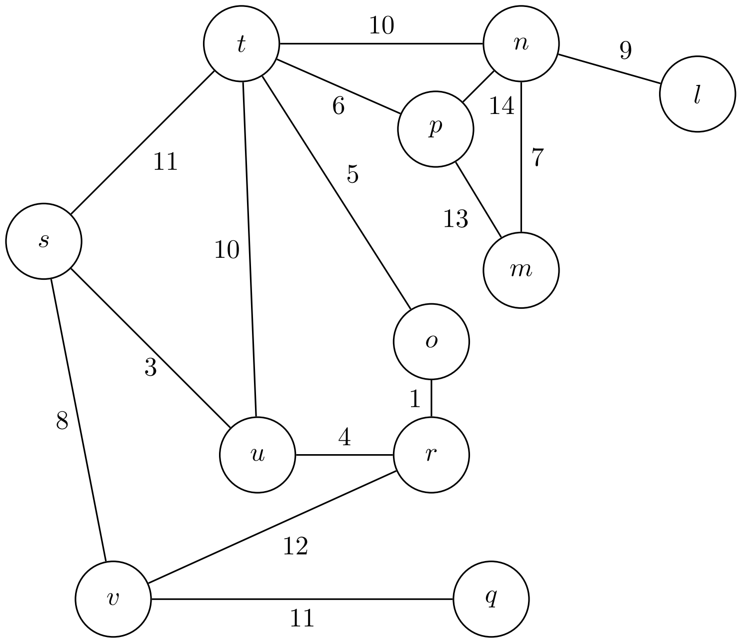
(9) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdcbj, 53)\}$

(10) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b, j\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38), (ahdcbj, 5$
Chemins connus : $C = \{(ahdcbjk, 66)\}$

(11) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b, j, k\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38), (ahdcbj, 5$
Chemins connus : $C = \{\}$
L'algorithme s'arrête ici en raison de l'apparition du sommet visé dans l'ensemble des sommets

connus S. Si on consulte le chemin emprunté pour s'y rendre, on obtient la suite des sommets a, h, d, c, b, j, k pour une distance minimale de 66.

Exercice 7. Appliquez l'algorithme de Floyd au graphe suivant afin de trouver la longueur du chemin minimal du sommet l au sommet v.



Solution : 37
Conseil : Implémenter l'algorithme parce qu'il n'est pas agréable à faire à la main.

Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 45, 46, 61 (page 440) ; 14, 20, 21, 22 (page 450) ; 22, 23 (page 464) ; 15, 16 (page 486) ; 16, 17, 18 (page 496) ; 38, 40 (page 502) ; 39, 40, 41 (page 574).