POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 2 : RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE - RELATIONS

1. RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE & PREUVES

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles. Si $A \subset E$ et $B \subset F$ montrer que : $A \times B \subset E \times F$.

Exercice 2. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Notons $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, la *différence symétrique* de A et B. Soit C un autre sous-ensemble de E.

1. Vérifier que : $A\Delta B = B\Delta A$
2. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
3. Montrer que $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$
4. Démontrer que $A\Delta B = A\Delta C \rightarrow B = C$
5. Calculer $A\Delta A\,,\ A\Delta\overline{A}\,,\ A\Delta E\,,\ A\Delta\,\varnothing$
6. Démontrer que $A\Delta B = A \cap B \implies A = B = \varnothing$

Exercice 3. Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E. On suppose que : $A\cap B \neq \varnothing$, $A\cup B \neq E$, $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$. Montrer que :

1. $A \cap B\,,\ A \cap \overline{B}\,,\ B \cap \overline{A}\,,\ \overline{A \cup B}$ sont non vides.
2. $A \cap B\,,\ A \cap \overline{B}\,,\ B \cap \overline{A}\,,\ \overline{A \cup B}$ sont deux à deux disjoints.
3. $(A \cap B) \bigcup (A \cap \overline{B}) \bigcup (B \cap \overline{A}) \bigcup (\overline{A \cup B}) = E$

Exercice 4. On considère les énoncés suivants.

a. Si les Belges aiment le fromage ou si les Équatoriens font de l'équitation, alors le président du Ghana boit des smoothies aux bananes.
b. Si le président du Ghana boit des smoothies aux bananes et que son chat est en surpoids, alors les Indonésiens fabriquent des chaises berçantes.
c. Soit il n'est pas vrai que si le chat du président du Ghana est en surpoids, alors les Belges aiment le fromage, soit il est vrai que si les Équatoriens font de l'équitation, alors les Indonésiens fabriquent des chaises berçantes.
d. Les Indonésiens ne fabriquent pas de chaises berçantes.

---

e. Conclusion.

Traduire ce raisonnement dans la logique des propositions. Parmi les conclusions suivantes, lesquelles sont valides ?

a. Les Belges n'aiment pas le fromage.
b. Les Belges n'aiment pas le fromage ou les Équatoriens ne font pas d'équitation.

Exercice 5. On considère le raisonnement suivant.

a. L'ankylosaure est un animal herbivore.
b. Le tyrannosaure est un animal féroce.
c. Un animal féroce est carnivore.
d. Un carnivore mange un herbivore.
e. Un animal chasse ce qu'il mange.

---

f. Le tyrannosaure chasse l'ankylosaure.

Le raisonnement est-il valide ?

Exercice 6. Utilisez une preuve cas par cas pour démontrer que :

a. Si x et y sont des nombres réels, alors $|x| + |y| \geq |x + y|$.
b. Si n est un entier, alors $n(n + 1)$ est pair.
c. Si n est un entier naturel, alors $n^2 + 3n$ est un entier pair.

Exercice 7. Utilisez le raisonnement par l'absurde pour démontrer que :

a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas entier.
b. si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels, alors au moins un de ces nombres est supérieur ou égal à la moyenne de ces nombres.
c. aucun entier $(6n + m)(n + 6m)$, avec $n, m \in \mathbb{N}$, n'est une puissance de 2.
d. $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 8. Utilisez la contraposée en formant une preuve indirecte pour démontrer que :

a. soit a un réel, si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $a/2$ n'est pas un entier pair.
b. pour un entier n quelconque, si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

Exercice 9. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $n^3 - n$ est divisible par 6
2. $n^5 - n$ est divisible par 30
3. $n^7 - n$ est divisible par 42

2. Relations

Exercice 10. Parmi les relations suivantes de l'ensemble de tous les Canadiens.

- $\{(a, b)$, a et b ont le même âge.$\}$
- $\{(a, b)$, a et b ont les mêmes parents.$\}$
- $\{(a, b)$, a et b ont un parent en commun.$\}$
- $\{(a, b)$, a et b parlent une même langue maternelle.$\}$ - on considère une seule langue maternelle par personne

a. Lesquelles sont des relations d'équivalences?
b. Pour celles qui ne sont pas des relations d'équivalence, indiquer et justifier les propriétés manquantes.
c. Pour celles qui sont des relations d'équivalence, indiquer les classes d'équivalences respectives.

Exercice 11. soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On définit sur l'ensemble produit $E \times E$ la relation $\mathcal{R}$:

$$(a, b)\ \mathcal{R}\ (c, d)\ si (a - c)\ est\ pair\ et\ (b - d)\ est\ divisible\ par\ 3$$

(1) Donner le cardinal de $E \times E$.
(2) Donner la matrice de $\mathcal{R}$.

(3) Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(4) Donner le nombre total et la liste des différences classes d'équivalentes. On désigne par $\overline{(a, b)}$ la classe d'équivalence de (a, b).

(5) Calculer le nombre d'éléments des classes suivantes : $\overline{(1, 1)}$, $\overline{(1, 2)}$, $\overline{(1, 3)}$.

(6) Soit $x, y, b \in E$, montrer que si $(x, y) \in \overline{(1, b)}$, alors $(x + 1, y) \in \overline{(2, b)}$.

Exercice 12. Soit A $= \{1,2,3,4\}$

(1) Montrez que l'union de deux relations symétriques sur A est symétrique.
(2) Montrez que l'union de deux relations antisymétriques sur A n'est pas nécessairement antisymétriques.

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 10 (pages 10) ; 11 à 19 (pages 17) ; 28, 41, 44, 45, 46, 47(pages 171).