

TD 5 : EXERCICE EXTRA SUR L'INDUCTION

1. Induction

Exercice 1. Montrer par induction que le nombre d'additions nécessaire à la résolution de l'algorithme récursif Fibonacci(n) est $f_{n+1} - 1$, f_n : $n^{\text{ème}}$ terme de la suite de Fibonacci.

Solution :

- En prenant a_n comme le nombre d'additions nécessaire. On a $a_n = \begin{cases} 0 & \text{Si } n = 0, 1 \\ a_{n-1} + 1 + a_{n-2} & \text{Si } n > 1 \end{cases}$
- Cas de base: $n = 0$ et $n = 1$, triviaux ($0 = 1 - 1$) .
- En supposant $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-2}$:
$$a_{n+1} = a_{(n+1)-1} + 1 + a_{(n+1)-2} = a_n + 1 + a_{n-1} = (f_{n+1} - 1) + 1 + (f_n - 1) = f_{n+1} + f_n - 1 = f_{n+2} - 1$$