LOG 2810 – Éléments de structures discrètes
Mini-contrôle 1

Prof. John Mullins

Hiver 2020

Nom :
Matricule :
Signature :

Attendez avant d'ouvrir ce cahier

Veuillez indiquer ci-dessus votre nom, votre matricule et votre signature.

Vous êtes prié(e) de suivre scrupuleusement les moments de début et de fin de l'examen. Votre professeur vous indiquera **à quel moment** vous pourrez tourner la première page et quand vous devrez fermer votre cahier.

Vous devez répondre aux questions à l'intérieur des cases prévues à cet effet. Notez que :

— Vous pouvez utiliser le verso de chaque feuille comme brouillon.
— La durée de l'épreuve est de 60 minutes.
— Ce contrôle est calculé sur 20 points et vaut 10% de la note finale.
— Aucune documentation n'est autorisée.

Question 1 (2 points)

Soit $R = \{(7,2),(3,4),(2,3),(4,7),(5,4),(5,6),(6,6)\}$, la relation sur $A = \{2,3,4,5,6,7\}$

a. **(0.5 points)** Donnez la **liste** des couples appartenant à $\mathcal{R}$.

Solution :

b. **(0.5 points)** Donnez la **matrice booléenne** $M_{\mathcal{R}}$ de la relation $\mathcal{R}$. (Utilisez l'ordre naturel $\leq$ sur A pour énumérer les lignes et les colonnes de la matrice.)

Solution :

c. **(0.5 points)** Donnez la fermeture réflexive de $\mathcal{R}$.

Solution :

d. **(0.5 points)** Donnez la fermeture symétrique de $\mathcal{R}$.

Solution :

Question 1 (2 points)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 1$ et $A = [0, 15]$. Déterminez la préimage (ou image inverse) de A par f.

Solution :

Question 2 (1.5 points)

Soient $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$ deux ensembles. On considère les ensembles suivants. Chacun de ces ensembles définit une relation de E vers F. Dans chaque cas, précisez si la relation est une fonction, une injection, une surjection, ou une bijection. Donnez la liste des réponses correctes, par exemple : “une fonction et une injection” ou“aucune de ces réponse”, etc. Aucune justification n'est demandée.

a. **(0.5 point)** $\{(a, 3), (b, 3), (c, 1), (d, 4)\}$

Solution :

b. **(0.5 point)** $\{(a, 4), (b, 3), (c, 1), (d, 2)\}$

Solution :

c. **(0.5 point)** $\{(a, 3), (b, 2), (a, 1), (c, 4)\}$

Solution :

Question 3 (2 points)

Soit $E = \{3, 4, 5, 6\}$. On définit sur l'ensemble $E \times E$ la relation R : $(a, b)R(c, d)$ si $a + c$ est impair et $b - d$ est pair. Donnez la liste des éléments de R.

Solution :

Question 4 (2 points)

Soit R, la relation sur $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$ définie par :

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y') \text{ ou } x' \leq y$$

Montrez que R est une relation d'ordre sur E.

Solution :

Question 5 (2 points)

Soit $f(x) = 2x^4 - 4x\log^3(x)$. Trouver **le plus petit entier** n pour lequel $f(x) \in O(x^n)$, en déterminant les constantes C et k.

Solution :

Question 6 (2 points)

Donnez une **preuve par induction** que

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} \; = \; (n-1) \cdot 2^n + 1$$

pour tout entier n positif.

Solution :

Question 7 (2 points)

Démontrez que si n un entier alors $n(n+1)$ est pair.

Solution :

Question 8 (2 points)

Soit n un entier. Utilisez la contraposée en formant une **preuve indirecte** pour démontrer que si $3n^2 - 2$ est impair alors n est impair.

Solution :

Question 9 (2.5 points)

Soit les trois hypothèses H1, H2 et H3 et la conclusion C suivantes.

H1 : *Tous les carnivores mangent des herbivores* ;

H2 : *Le Tyranosaurus Rex est un animal féroce* ;

H3 : *Tous les animaux féroces sont des carnivores* ;

C : *Le Tyranosaurus Rex mange des herbivores.*

Soit les fonctions propositionnelles suivantes.

E(x) : *x est un carnivore* ;

R(x) : *x mange des herbivores* ;

F(x) : *x est un animal féroce.*

a. **(1 point)** Transformez ces hypothèses et la conclusion sous forme de propositions avec de prédicats et des quantificateurs.

Solution :

b. **(1.5 points)** Utilisez les règle d'inférence pour construire un **raisonnement valide** qui aboutit à la conclusion à partir des hypothèses. Justifiez chacune de vos étapes.

Solution :