POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 1 : LOGIQUE, ENSEMBLES

1. Logique

Exercice 1. En notant P, Q et R les affirmations suivantes:

- P : "Pierre fait des maths".
- Q : "Pierre fait de la chimie".
- R : "Pierre fait de l'anglais".

Représentez les affirmations qui suivent sous forme symbolique.

1. "Pierre fait des maths et de l'anglais mais pas de la chimie".
2. "Pierre fait des maths et de la chimie mais pas à la fois de l'anglais et de la chimie".
3. "Il est faux que Pierre ne fasse pas des maths et fasse quand même de la chimie".
4. "Il est faux que Pierre fasse des maths sans faire de la chimie".
5. "Il est faux que Pierre fasse l'anglais ou la chimie sans faire des maths".
6. "Pierre ne fait ni de l'anglais ni de la chimie mais fait des maths".

Solution

1. $P \wedge R \wedge \neg Q$
2. $P \wedge Q \wedge \neg(R \wedge Q)$
3. $\neg(\neg P \wedge Q)$
4. $\neg(P \wedge \neg Q)$
5. $\neg(R \vee Q \wedge \neg P)$
6. $\neg R \wedge \neg Q \wedge P$

Exercice 2. Expressions:

1. Simplifiez l'expression suivante : $(\neg q \to \neg p) \vee (\neg(q \to p) \wedge q)$
2. Démontrez sans table de vérité que : $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow q$

Solution

1. $q \wedge \neg p$
2. La bi-conditionnelle est associative, on en déduit: $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
$\Leftrightarrow (p \leftrightarrow p) \leftrightarrow q$
$\Leftrightarrow 1 \leftrightarrow q$
$\Leftrightarrow q$

Exercice 3. Écrivez la réciproque et la contraposée de chacune des implications suivantes :

1. Si $1 + 1 = 3$, alors je suis empereur de Chine.
2. S'il fait beau et si je ne suis pas fatigué, alors je vais à la plage.
3. Si je gagne au loto, alors je deviens chevalier Jedi et je vais sur la Lune.

Solution

- **réciproque**
  1. **si je suis empereur de Chine, alors $1 + 1 = 3$.**
  2. si je vais à la plage, alors il fait beau et je ne suis pas fatigué.
  3. **si je deviens chevalier Jedi et je vais sur la Lune alors j'ai gagné au loto.**
- **contraposée**
  1. **si je ne suis pas empereur de Chine, alors $1 + 1 \neq 3$.**
  2. si je ne vais pas à la plage, alors il ne fait pas beau ou je suis fatigué.
  3. **si je e deviens pas chevalier Jedi ou que je ne suis pas allé sur la Lune c'est que je n'ai pas gagné au loto.**

Exercice 4. Dites si les formules suivantes sont des tautologies :

1. $(p \wedge q) \to p$
2. $(p \vee q) \to (p \wedge q)$
3. $(p \wedge q) \to (p \vee q)$
4. $p \to (p \vee q)$
5. $p \to (p \to p)$
6. $p \to ((\neg p) \to p)$
7. $p \to (p \to q)$
8. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

Solution

1. **Oui**
2. **Non**
3. **Oui**
4. **Oui**
5. **Oui**
6. **Oui**
7. **Non**
8. **Oui**

Exercice 5. Déterminez les valeurs de vérité des propositipons suivantes (l'univers du discours est l'ensemble des entiers):

1. $\forall x \; \exists y \; x^2 + y < 0$
2. $\exists y \; \forall x \; x^2 + y < 0$
3. $\forall y \; \forall x \; x^2 + y < 0$
4. $\exists! x \; x + 3 = 2x$
5. $\forall x > 0 \; x^2$ est pair seulement si x est pair

6. $\forall x>0\ \exists y>0\ \forall z$ si $|z-2|<2$ alors $\left|z^2-4\right|<x$

Solution

1, 4 et 5 sont vraies.

Exercice 6. Soit $R(x,y)$ l'énoncé : " x est plus rapide que y". L'univers du discours étant l'ensemble de tous les habitants de la planète Terre, exprimez chacun des énoncés ci-après :

1. Bolt est le plus rapide
2. Bolt est plus rapide que quelques personnes.
3. Chacun a quelqu'un de plus rapide que lui.
4. Personne n'est plus rapide que tout le monde.
5. Il y a exactement une personne qui n'est pas plus rapide que quiconque.
6. Tout le monde est plus rapide que quelqu'un.

Solution

1. $\forall x\ R(\mathbf{Bolt},x)$
2. $\exists x\ R(\mathbf{Bolt},x)$
3. $\forall x\ \exists y\ R(y,x)$
4. $\nexists y\ \forall x\ R(y,x)$
5. $\exists! x\ \forall y\ \neg R(x,y)$
6. $\forall x\ \exists y\ R(x,y)$

2. Ensembles

Exercice 7. Donnez les éléments de $P(P(P(\phi)))$ et de $P(P(\{1,2\}))$.

Solution

1. $P(\phi)=\{\phi\}$
   $P(P(\phi))=\{\phi,\{\phi\}\}$
   $P(P(P(\phi)))=\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$
2. $P(\{1,2\})=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$
   $P(P(\{1,2\}))=\{\phi,\{\phi\},\{\{1\}\},\{\{2\}\},\{\{1,2\}\},\{\phi,\{1\}\},\{\phi,\{2\}\},$
   $\{\phi,\{1,2\}\},\{\{1\},\{2\}\},\{\{1\},\{1,2\}\},\{\{2\},\{1,2\}\},\{\phi,\{1\},\{2\}\},$
   $\{\phi,\{1\},\{1,2\}\},\{\phi,\{2\},\{1,2\}\},\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\},\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}\}$

Exercice 8. Soit A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrez que :

1. $(A\cap B)\cap\overline{A\cap C}=A\cap B\cap\overline{C}$

   Solution : $(A\cap B)\cap\overline{A\cap C}=(A\cap B)\cap\overline{A}\cup\overline{C}=(A\cap B\cap\overline{A})\cup(A\cap B\cap\overline{A})=A\cap B\cap\overline{C}$
2. $(A\cup B)\cap\overline{A\cup C}=\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$

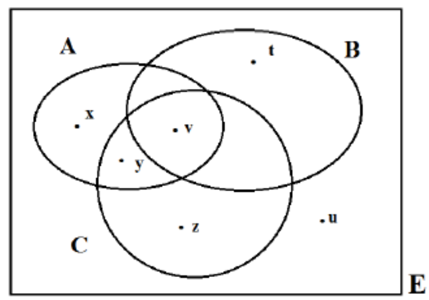
   Solution : $(A\cup B)\cap\overline{A\cup C}=(A\cup B)\cap\overline{A}\cap\overline{C}=(A\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{A}\cap\overline{C})=\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$
3. $\overline{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})}=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(B\cap A)$

4. $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (P(A) \subseteq P(B))$

   Solution : $(A \subseteq B)$ implique que tout sous-ensemble de A est sous-ensemble de B. Ce qui implique que tout élément de $P(A)$ est aussi élément de $P(B)$. Il faut aussi montrer la réciproque. Tout élément de P(A) dans P(B) ...
5. $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$
6. $(A - B) - C = A - (B - C) \Leftrightarrow A \cap C = \phi$

   Solution : On passe par les diagrammes de Venn et on montre les implictions dans les 2 sens.
7. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$
8. $B = (C \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)$

Exercice 9. Soit le diagramme de Venn ci-dessous. Dites quelles sont les affirmations vraies parmi les suivantes.



1. $u \in \overline{A \cup B \cup C}$
2. $y \in A \cap C$
3. $z \in \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
4. $x \in B - A$
5. $y \in C - \overline{A}$
6. $t \in B \oplus C$
7. $v \in A \cap C \cap \overline{C}$
8. $\{y, t, v\} \subseteq A \cap B$
9. $y \in \overline{C \oplus A}$
10. $\{x, t\} \subseteq A \oplus B$
11. $t \in \overline{C - B}$
12. $\{u, z\} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Solution

4., 7., 8. et 10 sont fausses. Toutes les autres sont vraies.

Exercice 10. Soit une classe de 70 étudiants. Certains étudiants prennent les cours LOG2810, INF2610, et LOG2420. 25 étudiants ont choisi LOG2810, 43 font INF2610, 31 font LOG2420, 12 sont inscrits au cours LOG2810 et au cours INF2610, 15 aux cours INF2610 et LOG2420, 16 aux cours LOG2810 et LOG2420 et enfin 9 étudiants ont opté pour les 3 cours.

1. Quel est le nombre d'étudiants de cette classe qui n'ont choisi aucun des 3 cours ?

   Réponse : 5 (70 - 65)
2. Quel est le nombre d'étudiants de cette classe qui prennent exactement un des trois cours ?

   Réponse : (25 - (3+9+7)) + (43-(9+3+6)) + (31-(7+9+6)) = 40
3. Quel est le nombre d'étudiants de cette classe qui sont inscrits au cours LOG2420 ou au cours INF2610, mais pas au cours LOG2810.

   Réponse : 25+6+ 9 = 40