TD 1 : LOGIQUE, ENSEMBLES

1. Logique

Exercice 1. En notant P, Q et R les affirmations suivantes:

- P : “Pierre fait des maths”.
- Q : “Pierre fait de la chimie”.
- R : “Pierre fait de l'anglais”.

Représentez les affirmations qui suivent sous forme symbolique.

1. “Pierre fait des maths et de l'anglais mais pas de la chimie”.
2. “Pierre fait des maths et de la chimie mais pas à la fois de l'anglais et de la chimie”.
3. “Il est faux que Pierre ne fasse pas des maths et fasse quand même de la chimie”.
4. “Il est faux que Pierre fasse des maths sans faire de la chimie”.
5. “Il est faux que Pierre fasse l'anglais ou la chimie sans faire des maths”.
6. “Pierre ne fait ni de l'anglais ni de la chimie mais fait des maths”.

Solution

1. $P \wedge R \wedge \neg Q$
2. $P \wedge Q \wedge \neg(R \wedge Q)$
3. $\neg(\neg P \wedge Q)$
4. $\neg(P \wedge \neg Q)$
5. $\neg(R \vee Q \wedge \neg P)$
6. $\neg R \wedge \neg Q \wedge P$

Exercice 2. Expressions:

1. Simplifiez l'expression suivante : $(\neg q \rightarrow \neg p) \vee (\neg(q \rightarrow p) \wedge q)$
2. Démontrez sans table de vérité que : $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow q$

Solution

1. $q \vee \neg p$
2. La bi-conditionnelle est associative, on en déduit: $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
   $\Leftrightarrow (p \leftrightarrow p) \leftrightarrow q$
   $\Leftrightarrow 1 \leftrightarrow q$
   $\Leftrightarrow q$

Exercice 3. Écrivez la réciproque et la contraposée de chacune des implications suivantes :

1. Si $1 + 1 = 3$, alors je suis empereur de Chine.
2. S'il fait beau et si je ne suis pas fatigué, alors je vais à la plage.
3. Si je gagne au loto, alors je deviens chevalier Jedi et je vais sur la Lune.

Solution

- **réciproque**
  1. **si je suis empereur de Chine, alors $1 + 1 = 3$.**
  2. si je vais à la plage, alors il fait beau et je ne suis pas fatigué.
  3. **si je deviens chevalier Jedi et je vais sur la Lune alors j'ai gagné au loto.**
- **contraposée**
  1. **si je ne suis pas empereur de Chine, alors $1 + 1 \neq 3$.**
  2. si je ne vais pas à la plage, alors il ne fait pas beau ou je suis fatigué.
  3. **si je e deviens pas chevalier Jedi ou que je ne suis pas allé sur la Lune c'est que je n'ai pas gagné au loto.**

Exercice 4. Dites si les formules suivantes sont des tautologies :

1. $(p \wedge q) \to p$
2. $(p \vee q) \to (p \wedge q)$
3. $(p \wedge q) \to (p \vee q)$
4. $p \to (p \vee q)$
5. $p \to (p \to p)$
6. $p \to ((\neg p) \to p)$
7. $p \to (p \to q)$
8. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

Solution

1. **Oui**
2. **Non**
3. **Oui**
4. **Oui**
5. **Oui**
6. **Oui**
7. **Non**
8. **Oui**

Exercice 5. Déterminez les valeurs de vérité des propositipons suivantes (l'univers du discours est l'ensemble des entiers):

1. $\forall x\ \exists y\ x^2 + y < 0$
2. $\exists y\ \forall x\ x^2 + y < 0$
3. $\forall y\ \forall x\ x^2 + y < 0$
4. $\exists! x\ x + 3 = 2x$
5. $\forall x > 0\ x^2$ est pair seulement si x est pair

6. $\forall x > 0\ \exists y > 0\ \forall z$ si $|z-2| < 2$ alors $\left|z^2-4\right| < x$

Solution

1, 4 et 5 sont vraies.

Exercice 6. Soit $R(x,y)$ l'énoncé : " x est plus rapide que y". L'univers du discours étant l'ensemble de tous les habitants de la planète Terre, exprimez chacun des énoncés ci-après :

1. Bolt est le plus rapide
2. Bolt est plus rapide que quelques personnes.
3. Chacun a quelqu'un de plus rapide que lui.
4. Personne n'est plus rapide que tout le monde.
5. Il y a exactement une personne qui n'est pas plus rapide que quiconque.
6. Tout le monde est plus rapide que quelqu'un.

Solution

1. $\forall x\ R(\mathbf{Bolt}, x)$
2. $\exists x\ R(\mathbf{Bolt}, x)$
3. $\forall x\ \exists y\ R(y,x)$
4. $\nexists y\ \forall x\ R(y,x)$
5. $\exists! x\ \forall y\ \neg R(x,y)$
6. $\forall x\ \exists y\ R(x,y)$

2. Ensembles

Exercice 7. Donnez les éléments de $P(P(P(\phi)))$ et de $P(P(\{1,2\}))$.

Solution

1. $P(\phi) = \{\phi\}$
   $P(P(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$
   $P(P(P(\phi))) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$
2. $P(\{1,2\}) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
   $P(P(\{1,2\})) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1,2\}\}, \{\phi, \{1\}\}, \{\phi, \{2\}\},$
   $\{\phi, \{1,2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{1,2\}\}, \{\{2\}, \{1,2\}\}, \{\phi, \{1\}, \{2\}\},$
   $\{\phi, \{1\}, \{1,2\}\}, \{\phi, \{2\}, \{1,2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}, \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}\}$

Exercice 8. Soit A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrez que :

1. $(A \cap B) \cap \overline{\overline{A} \cap C} = A \cap B \cap \overline{C}$

   Solution : $(A \cap B) \cap \overline{\overline{A} \cap C} = (A \cap B) \cap \overline{\overline{A}} \cup \overline{C} = (A \cap B \cap \overline{\overline{A}}) \cup (A \cap B \cap \overline{A}) = A \cap B \cap \overline{C}$
2. $(A \cup B) \cap \overline{A \cup C} = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$

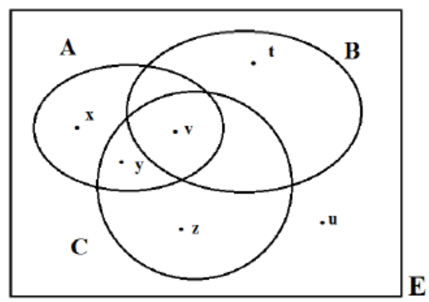
   Solution : $(A \cup B) \cap \overline{A \cup C} = (A \cup B) \cap \overline{A} \cap \overline{C} = (A \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$
3. $\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap A)$

4. $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (P(A) \subseteq P(B))$

   Solution : $(A \subseteq B)$ implique que tout sous-ensemble de A est sous-ensemble de B. Ce qui implique que tout élément de $P(A)$ est aussi élément de $P(B)$. Il faut aussi montrer la réciproque. Tout élément de P(A) dans P(B) ...
5. $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$
6. $(A - B) - C = A - (B - C) \Leftrightarrow A \cap C = \phi$

   Solution : On passe par les diagrammes de Venn et on montre les implictions dans les 2 sens.
7. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$
8. $B = (C \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)$

Exercice 9. Soit le diagramme de Venn ci-dessous. Dites quelles sont les affirmations vraies parmi les suivantes.



1. $u \in \overline{A \cup B \cup C}$
2. $y \in A \cap C$
3. $z \in \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
4. $x \in B - A$
5. $y \in C - \overline{A}$
6. $t \in B \oplus C$
7. $v \in A \cap C \cap \overline{C}$
8. $\{y, t, v\} \subseteq A \cap B$
9. $y \in \overline{C \oplus A}$
10. $\{x, t\} \subseteq A \oplus B$
11. $t \in \overline{C - B}$
12. $\{u, z\} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Solution

4., 7., 8. et 10 sont fausses. Toutes les autres sont vraies.

Exercice 10. Soit une classe de 70 étudiants. Certains étudiants prennent les cours LOG2810, INF2610, et LOG2420. 25 étudiants ont choisi LOG2810, 43 font INF2610, 31 font LOG2420, 12 sont inscrits au cours LOG2810 et au cours INF2610, 15 aux cours INF2610 et LOG2420, 16 aux cours LOG2810 et LOG2420 et enfin 9 étudiants ont opté pour les 3 cours.

1. Quel est le nombre d'étudiants de cette classe qui n'ont choisi aucun des 3 cours ?

   Réponse : 5 (70 - 65)
2. Quel est le nombre d'étudiants de cette classe qui prennent exactement un des trois cours ?

   Réponse : (25 - (3+9+7)) + (43-(9+3+6)) + (31-(7+9+6)) = 40
3. Quel est le nombre d'étudiants de cette classe qui sont inscrits au cours LOG2420 ou au cours INF2610, mais pas au cours LOG2810.

   Réponse : 25+6+ 9 = 40

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 2 : RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE - RELATIONS
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Exercice 1. Soit E et F deux ensembles. Si $A \subset E$ et $B \subset F$ montrer que : $A \times B \subset E \times F$.
Solution :
On sait que $A \subset E$ et $B \subset F$
Soit $(x\,,\,y) \in A \times B$
($x \in A$ et $A \subset E$ alors $x \in E$) et ($y \in B$ et $B \subset F$ alors $y \in F$)
$x \in E$ et $y \in F$, donc $(x\,,\,y) \in E \times F$
On a $\forall (x\,,\,y) \in A \times B\,,\,(x\,,\,y) \in E \times F$
Donc $A \times B \subset E \times F$.

Exercice 2. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Notons $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, la *différence symétrique* de A et B. Soit C un autre sous-ensemble de E.

1. Vérifier que : $A\Delta B = B\Delta A$
   Indication : Utiliser la commutativité de $\cup$ dans la formule donnée par l'énoncé.
2. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
   On sait que/on admet (idée de la démonstration : mq c'est vrai pour tout élément concerné) $\forall C\,,D\,,G$ 3 ensembles, $(C \cup D) - G = (C - G) \cup (D - G)$.
   Donc $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - (A \cap B)) \cup (B - (A \cap B)) = (A - B) \cup (B - A)$
3. Montrer que $A\Delta B = \ \overline{A}\Delta\overline{B}$
   Soit $x \in \overline{A}\Delta\overline{B}$
   $\iff (x \in (\overline{A} - \overline{B}))$ ou $(x \in (\overline{B} - \overline{A}))$
   $\iff (x \in \overline{A}$ et $x \notin \overline{B})$ ou $(x \in \overline{B}$ et $x \notin \overline{A})$
   $\iff (x \notin A$ et $x \in B)$ ou $(x \notin B$ et $x \notin A)$
   $\iff x \in ((B - A) \cup (A - B))$
   $\iff x \in B\Delta A = A\Delta B$
4. Démontrer que $A\Delta B = A\Delta C \rightarrow B = C$
   Soit $x \in B$. Mq $x \in C$ (la réciproque se démontre de la même manière puisque B et C jouent le même rôle).
   Par contradiction : supposons que $x \notin C$.
   - Premier cas :$x \in A \implies x \in (A \cap B)$
     $(x \in A$ et $x \notin C) \iff x \in (A - C) \implies x \in A\Delta C = A\Delta B$
     $\implies x \notin (A \cap B$:contradiction
   - Deuxième cas :$x \notin A \implies x \in (B - A)$
     $\implies x \in A\Delta B = A\Delta C$
     et $x \notin C$ donc $x \in (A\Delta C) \cap \overline{C}$
     $(A\Delta C) \cap \overline{C} = ((A \cup C) - (A \cap C)) \cap \overline{C}$
     $= ((A \cup C) \cap \overline{C}) - (A \cap C)$
     $= (A \cap \overline{C}) - (A \cap C)$
     $= A \cap \overline{C}$: contradiction car $x \notin A$

   Donc $B = C$
5. Calculer $A\Delta A\,,\ A\Delta\overline{A}\,,\ A\Delta E\,,\ A\Delta\varnothing$
   $A\Delta A = \varnothing\,,\ A\Delta\overline{A} = E\,,\ A\Delta E = \overline{A}\,,\ A\Delta\varnothing = A$

6. Démontrer que $A\Delta B = A\cap B \implies A = B = \varnothing$
   Idée : $(A\Delta B) = (A\cup B) - (A\cap B)$ donc $A\Delta B = A\cap B \implies A\cap B = \varnothing = A\cup B \implies A = B = \varnothing$

Exercice 3. Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E. On suppose que : $A\cap B \neq \varnothing$, $A\cup B \neq E$, $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$. Montrer que :

1. $A\cap B\,,\ A\cap\overline{B}\,,\ B\cap\overline{A}\,,\ \overline{A\cup B}$ sont non vides.
   - $A\cap B\neq\varnothing$ d'après l'énoncé.
   - $A\not\subseteq B \to \exists x\in E, x\in A\wedge x\notin B$
     $A\not\subseteq B \to \exists x\in E, x\in A\wedge x\in \overline{B}$
     $A\not\subseteq B \to \exists x\in E, x\in A\cap\overline{B}$
     Donc $A\cap\overline{B}\neq\varnothing$
   - $B\not\subseteq A \to \exists x\in E, x\in B\wedge x\notin A$
     $B\not\subseteq A \to \exists x\in E, x\in B\wedge x\in \overline{A}$
     $B\not\subseteq A \to \exists x\in E, x\in B\cap\overline{A}$
     Donc $B\cap\overline{A}\neq\varnothing$
   - $A\cup B\neq E \to \exists x\in E, x\notin A\cup B$
     $A\cup B\neq E \to \exists x\in E, x\in \overline{A\cup B}$
     Donc $\overline{A\cup B}\neq\varnothing$
2. $A\cap B\,,\ A\cap\overline{B}\,,\ B\cap\overline{A}\,,\ \overline{A\cup B}$ sont deux à deux disjoints.
   - $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B}) = A\cap B\cap\overline{B}$
     $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B}) = A\cap\varnothing$, car $B\cap\overline{B}=\varnothing$
     $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B}) = \varnothing$, car $A\cap\varnothing=\varnothing$
     Donc $A\cap B$ et $A\cap\overline{B}$ sont disjoints.
   - $(A\cap B)\cap(B\cap\overline{A}) = A\cap B\cap\overline{A}$
     $(A\cap B)\cap(B\cap\overline{A}) = B\cap\varnothing$, car $\cap$ est commutatif et $A\cap\overline{A}=\varnothing$
     $(A\cap B)\cap(B\cap\overline{A}) = \varnothing$, car $B\cap\varnothing=\varnothing$
     Donc $A\cap B$ et $B\cap\overline{A}$ sont disjoints.
   - $(A\cap B)\cap(\overline{A\cup B}) = A\cap B\cap\overline{A}\cap\overline{B}$
     $(A\cap B)\cap(\overline{A\cup B}) = \varnothing$, car $\cap$ est commutatif et $A\cap\overline{A}=\varnothing, B\cap\overline{B}=\varnothing$
     Donc $A\cap B$ et $\overline{A\cup B}$ sont disjoints.
   - $(A\cap\overline{B})\cap(B\cap\overline{A}) = A\cap\overline{B}\cap B\cap\overline{A}$
     $(A\cap\overline{B})\cap(B\cap\overline{A}) = \varnothing$, car $\cap$ est commutatif et $A\cap\overline{A}=\varnothing, B\cap\overline{B}=\varnothing$
     Donc $A\cap\overline{B}$ et $B\cap\overline{A}$ sont disjoints.
   - $(A\cap\overline{B})\cap(\overline{A\cup B}) = A\cap\overline{B}\cap\overline{A}\cap\overline{B}$
     $(A\cap\overline{B})\cap(\overline{A\cup B}) = \varnothing\cap\overline{B}$, car $\cap$ est commutatif et $A\cap\overline{A}=\varnothing$
     $(A\cap\overline{B})\cap(\overline{A\cup B}) = \varnothing$
     Donc $A\cap\overline{B}$ et $\overline{A\cup B}$ sont disjoints.
   - $(B\cap\overline{A})\cap(\overline{A\cup B}) = B\cap\overline{A}\cap\overline{A}\cap\overline{B}$
     $(B\cap\overline{A})\cap(\overline{A\cup B}) = \varnothing\cap\overline{A}$, car $\cap$ est commutatif et $B\cap\overline{B}=\varnothing$
     $(B\cap\overline{A})\cap(\overline{A\cup B}) = \varnothing$
     Donc $B\cap\overline{A}$ et $\overline{A\cup B}$ sont disjoints.
3. $(A\cap B)\bigcup(A\cap\overline{B})\bigcup(B\cap\overline{A})\bigcup(\overline{A\cup B}) = E$
   $(A\cap B)\bigcup(A\cap\overline{B})\bigcup(B\cap\overline{A})\bigcup(\overline{A\cup B}) = (A\cap B)\bigcup(A\cap\overline{B})\bigcup(B\cap\overline{A})\bigcup(\overline{A}\cap\overline{B})$
   $= \left[(A\cap B)\ \cup\ (A\cap\overline{B})\right]\bigcup\left[(B\cap\overline{A})\ \cup\ (\overline{A}\cap\overline{B})\right]$
   $= \left[(A\ \cup\ (A\cap\overline{B}))\ \cap\ (B\ \cup\ (A\cap\overline{B}))\right]\bigcup\left[(B\ \cup\ (\overline{A}\cap\overline{B}))\ \cap\ (\overline{A}\ \cup\ (\overline{A}\cap\overline{B}))\right]$
   $= \left[A\cap(A\ \cup\ \overline{B})\ \cap\ (B\ \cup\ A)\ \cap\ (B\ \cup\ \overline{B})\right]\bigcup\left[(B\cup\overline{A})\ \cap\ (B\cup\overline{B})\ \cap\ (\overline{A}\cup\overline{A})\ \cap\ (\overline{A}\cup\overline{B})\right]$
   $= \left[A\cap(A\ \cup\ \overline{B})\ \cap\ (B\ \cup\ A)\ \cap\ E)\right]\bigcup\left[(B\cup\overline{A})\ \cap\ E\ \cap\ \overline{A}\ \cap\ (\overline{A}\cup\overline{B})\right]$
   $= \left[A\cap(A\ \cup\ \overline{B})\ \cap\ (B\ \cup\ A))\right]\bigcup\left[(B\cup\overline{A})\ \cap\ \overline{A}\ \cap\ (\overline{A}\cup\overline{B})\right]$
   $= [A\cap(B\ \cup\ A)]\bigcup\left[\overline{A}\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\right]$
   $= A\ \cup\ \overline{A}$
   $= E$

Exercice 4. On considère les énoncés suivants.

a. Si les Belges aiment le fromage ou si les Équatoriens font de l'équitation, alors le président du Ghana boit des smoothies aux bananes.
b. Si le président du Ghana boit des smoothies aux bananes ou que son chat est en surpoids, alors les Indonésiens fabriquent des chaises berçantes.
c. Soit il n'est pas vrai que si le chat du président du Ghana est en surpoids, alors les Belges aiment le fromage, soit il est vrai que si les Équatoriens font de l'équitation, alors les Indonésiens fabriquent des chaises berçantes.
d. Les Indonésiens ne fabriquent pas de chaises berçantes.

---

e. Conclusion.

Traduire ce raisonnement dans la logique des propositions. Parmi les conclusions suivantes, lesquelles sont valides ?

a. Les Belges n'aiment pas le fromage.
b. Les Belges n'aiment pas le fromage ou les Équatoriens ne font pas d'équitation.

Résolution

Considérons les prédicats suivants :
b : Les Belges aiment le fromage.
e : Les Équatoriens font de l'équitation.
g : Le président du Ghana boit des smoothies aux bananes.
c : Le chat du président du Ghana est en surpoids.
i : Les Indonésiens fabriquent des chaises berçantes.
La traduction de l'énoncé donne :
$h_1 : (b \vee e) \to g$
$h_2 : (g \vee c) \to i$
$h_3 : \neg(c \to b) \oplus (e \to i)$
$h_4 : \neg i$

Conclusion .
On a :

1	$\neg i$	h_4
2	$\neg(g \vee c)$	h_2, h_4 et règle *Modus Tollens*
$3a$	$\neg(b \vee e)$	h_1, $\neg g$ et $\neg c$ *vu en* 2
$3b$	$(e \to i)$	h_3, $\neg g$, $\neg c$ *vu en* 2 et règle Syllogisme disjonctif
$3b'$	$\neg e$	h_4, $(e \to i)$ *vu en* 3b et règle Modus T ollens

On peut tirer de ce raisonnement que les Belges n'aiment pas le fromage et que les Équatoriens ne font pas d'équitation. Les conclusions a et b sont valides d'après 3a.
3b permet de percevoir le concept de syllogisme disjonctif cela a un but pédagogique.

Exercice 5. On considère le raisonnement suivant.

a. L'ankylosaure est un animal herbivore.
b. Le tyrannosaure est un animal féroce.
c. Un animal féroce est carnivore.
d. Un carnivore peut manger un herbivore.
e. Un animal chasse ce qu'il mange.

---

f. Le tyrannosaure chasse l'ankylosaure.

Le raisonnement est-il valide ?

Résolution

Considérons les prédicats suivants :
$H(x)$: x est un herbivore.
$F(x)$: x est un animal féroce.
$C(x)$: x est un carnivore.
$M(x, y)$: x mange y.
$Ch(x, y)$: x chasse y.

Soient les constantes l : tyrannosaure et a : ankylosaure. On a
La traduction de l'énoncé donne :
$h_1 : H(a)$
$h_2 : F(t)$
$h_3 : F(x) \rightarrow C(x)$
$h_4 : C(x) \wedge H(y) \rightarrow M(x\,,y)$
$h_5 : M(x\,,y) \rightarrow Ch(x\,,y)$

$Ch(t\,,a)$
On a :

1	$F(x) \rightarrow C(x)$	h_3
2	$F(t) \rightarrow C(t)$	h_3 *et instanciation universelle*
3	$F(t)$	h_2
4	$C(t)$	h_2 *et tape* 2 *et rgle du modus ponens*
5	$H(a)$	h_1
6	$C(t) \wedge H(a)$	*Conjonction des tapes* 4 *et* 5
7	$C(x) \wedge H(y) \rightarrow M(x,y)$	h_4
8	$C(t) \wedge H(a) \rightarrow M(t,a)$	*Instanciation universelle sur la base de* h_4 (*tape* 7)
9	$M(t,a)$	*tapes* 6 *et* 8 *et rgle du modus ponens*
10	$M(x,y) \rightarrow Ch(x,y)$	h_5
11	$M(t,a) \rightarrow Ch(t,a)$	*Instanciation universelle sur la base de* h_5 (*tape* 10)
12	$Ch(t,a)$	*tapes* 9 *et* 11 *et rgle du modus ponens*

Exercice 6. Utilisez une preuve cas par cas pour démontrer que :

a. Si x et y sont des nombres réels, alors $|x| + |y| \geq |x + y|$.
Solution
Raisonnons par cas. Trois cas sont facilement identifiables, le premier étant lorsque $x \geq 0$ et $y \geq 0$, le second lorsque $x \leq 0$ et $y \leq 0$ et le dernier lorsque les deux variables sont de signe différent.
- Dans le premier cas, $x \geq 0 \rightarrow |x| = x$, $y \geq 0 \rightarrow |y| = y$ et $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \rightarrow |x + y| = x + y$. On se retrouve donc en présence d'un égalité.
- De façon similaire, dans le second cas, $x \leq 0 \rightarrow |x| = -x$, $y \leq 0 \rightarrow |y| = -y$ et $x \leq 0 \wedge y \leq 0 \rightarrow |x + y| = -(x + y) = -x - y$. On se retrouve donc en présence d'un égalité.
- Dans le dernier cas, on a que $x \geq 0 \rightarrow |x| = x$ et $y \leq 0 \rightarrow |y| = -y$.
Lemme 1 :$\forall a \in \mathbb{R}\,, |a|^2 = a^2$ (preuve :examiner les deux cas)
Lemme 2 :$\forall a \in \mathbb{R}\,, a \leq |a|$ (preuve : examiner les deux cas)
Lemme 3 :$\forall a\,, b \in \mathbb{R}^+ / a^2 \leq b^2\,, a \leq b$ (preuve :$b^2 - a^2 \geq 0 \iff (b-a)(b+a) \geq 0 \iff b \geq a$)
On a :

$$\begin{aligned} |x+y|^2 - (|x| + |y|)^2 &= (x+y)^2 - (|x|^2 + 2|x||y| + |y|^2) \text{ par } L_1 \\ &= (x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 + 2|xy| + y^2) \\ &= 2(xy - |xy|) \leq 0 \text{ par } L_2 \end{aligned}$$

Donc $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$. Par L_3, on a ce qu'on voulait démontrer.

b. Si n est un entier, alors $n(n + 1)$ est pair.
Solution
Raisonnons par cas. Deux cas sont identifiables, lorsque n est pair et lorsque n est impair. Si n est pair, alors on a un produit entre un nombre pair et un nombre impair $(n + 1)$, ce qui donne toujours un résultat pair. Il en est de même si n est impair, ce qui veut dire que $n(n + 1)$ est toujours pair $\forall n \in \mathbb{Z}$.

c. Si n est un entier naturel, alors $n^2 + 3n$ est un entier pair.
Solution
Raisonnons par cas. Deux cas sont identifiables, lorsque n est pair et lorsque n est impair. Si n est pair, alors on a un produit entre un nombre pair (n^2) et un nombre impair $(3n)$, ce qui donne toujours un résultat pair. Il en est de même si n est impair, ce qui veut dire que $n^2 + 3n$ est toujours pair $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Utilisez le raisonnement par l'absurde pour démontrer que :

a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas entier.

Solution

Nous avons à montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \rightarrow \sqrt{n^2+1}$ n'est pas entier. Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^* | \sqrt{n^2+1}$ est entier.
On note $m = \sqrt{n^2+1}$.
On a donc :

$$m^2 = n^2 + 1 \iff m^2 - n^2 = 1 \iff (m-n)(m+n) = 1$$

$m - n$ et $m + n$ sont des entiers. Donc :

$$(m-n = m+n = 1) \wedge (m-n = m+n = -1)(m = 1 \wedge n = 0) \wedge (m = -1 \wedge n = 0)$$

Les deux cas présentent une contradiction puisque $n \neq 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \rightarrow \sqrt{n^2+1}$ n'est pas entier.

b. si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels, alors au moins un de ces nombres est supérieur ou égal à la moyenne de ces nombres.

Solution :

Posons qu'il existe un $a_j \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ tel que la moyenne des $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est plus petite ou égale à a_j. Si on raisonne par l'absurde, on poserait plutôt que $\forall a_j \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, la moyenne des $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est plus grande que a_j. Or, dans le cas où on choisit le a_j comme étant plus grand ou égal à tous les autres $a_1, a_2, \ldots, a_n$:
$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > a_j * n$
$(a_1 - a_j) + (a_2 - a_j) + \ldots + (a_n - a_j) > 0$
est absurde car tous les a_x sont inférieurs ou égaux à a_j, donc toutes les soustractions additionnées devraient donner 0 ou une valeur inférieure à 0. On peut donc affirmer que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels, alors au moins un de ces nombres est supérieur ou égal à la moyenne de ces nombres.

c. aucun entier $(6n+m)(n+6m)$, avec $n, m \in \mathbb{N}$, n'est une puissance de 2.

Solution :

Supposons qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $e = (6n+m)(n+6m)$ soit une puissance de 2.
e étant une puissance de 2, alors $(6n+m)$ et $(n+6m)$ sont aussi des puissances de 2 et par conséquent ils sont pairs. Il s'en suit que n et m sont aussi pairs (de plus ils sont non nuls).
Posons $n = 2k$ et $m = 2t$. On a $e = (12k+2t)(2k+12t) = 4(6k+t)(k+6t) = 2^2(6k+t)(k+6t)$.
En menant le même raisonnement que précédemment, on obtient que $(6k+t)$ et $(k+6t)$ sont des puissances de 2 et que k et t sont pairs. Le procédé pourrait donc continuer à l'infini. Ce qui prouve que e ne peut être une puissance de 2 (sinon le développement serait fini, on devrait s'arrêter à un moment donné).

d. $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Solution :

Lemme : Si n^2 est un multiple de 3 alors n est un multiple de 3.
Preuve : considérons un entier n tel que n^2 soit un multiple de 3. Supposons que n ne soit pas multiple de 3. Alors il existe un entier k tel que n = 3k + 1 ou n = 3k + 2.
Dans les deux cas, n^2 n'est pas un multiple de 3. Donc, n est multiple de 3.
Supposons que $\sqrt{3}$ soit rationnel. Alors il existe deux entiers p et q tels que $\sqrt{3} = p/q$ avec p/q une fraction irreductible.

$$3 = \frac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 3q^2$$

p^2 est multiple de 3 donc p aussi, donc $p = 3p'$. Donc on a :

$$9p'^2 = 3q^2 \implies 3p'^2 = q^2$$

Donc q est aussi divisible par 3, donc $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, ce qui contredit notre hypothèse initiale.
Donc $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 8. Utilisez la contraposée en formant une preuve indirecte pour démontrer que :

a. soit a un réel, si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $a/2$ n'est pas un entier pair.
Solution
La contraposée s'écrit : si $a/2$ est un entier pair, alors a^2 est un multiple entier de 16.
Prouvons-le par la méthode de la preuve directe. Nous supposons donc que $a/2$ est un entier pair. Alors, $\exists k \in \mathbb{N}, a/2 = 2k$. Nous avons $a = 4k$ et $a^2 = 16k$. D'où a^2 est un multiple entier de 16.

b. pour un entier n quelconque, si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
Solution
La contraposée s'écrit : si n est un entier impair quelconque, alors $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.
Prouvons-le par la méthode de la preuve directe. Nous supposons donc que n peut s'écrire $(2x+1)$, où $x \in \mathbb{Z}$ est un entier. Alors, $(n^2 - 1) = 4(x^2 + x)$. Nous avons que $\forall x$, $x^2 + x$ est pair et peut donc s'écrire sous la forme $x^2 + x = 2t$ D'où $n^2 - 1 = 4 * 2t = 8t$ est divisible par 8.

Exercice 9. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $n^3 - n$ est divisible par 6
Solution
Première méthode
$n^3 - n = n(n+1)(n-1)$
$n^3 - n$ est le produit de 3 entiers consécutifs. Donc au moins un de ces entiers est pair, ce qui implique que $n^3 - n$ est pair. De plus, au moins un de ces entiers est multiple de 3, ce qui implique que $n^3 - n$ est divisible par 3.
$n^3 - n$ est divisible à la fois par 2 et 3. Il est alors divisible par 6.
Deuxième méthode
On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, n \ mod \ 6 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
   - Si $n \ mod \ 6 = 0$, alors $n^3 mod \ 6 = 0$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 1$, alors $n^3 mod \ 6 = 1$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 2$, alors $n^3 mod \ 6 = 2$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 3$, alors $n^3 mod \ 6 = 3$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 4$, alors $n^3 mod \ 6 = 4$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$
   - Si $n \ mod \ 6 = 5$, alors $n^3 mod \ 6 = 5$. On a donc $(n^3 - n) \ mod \ 6 = 0$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est divisible par 6.
2. $n^5 - n$ est divisible par 30
Solution
$n^5 - n = n(n+1)(n-1)(n^2+1)$
On retrouve encore le produit de 3 entiers consécutifs. Il est alors divisible par 6. On sait que $6 * 5 = 30$ donc il ne reste qu'à démontrer que $n^5 - n$ est aussi divisible par 5. Si parmi les 3 entiers consécutifs aucun n'est divisible par 5, alors on peut écrire les 3 nombres consécutifs comme un multiple de 5 additionné de 1, 2, 3 ou 4 :
$n^5 - n = (5m+1)(5m+2)(5m+3)((5m+2)^2+1)$ ou
$n^5 - n = (5m+2)(5m+3)(5m+4)((5m+3)^2+1)$
Lorsqu'on développe le polynôme, on s'aperçoit que tous les coefficients sont divisibles par 5 dans les 2 cas. En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, n^5 - n$ est divisible par 30.
3. $n^7 - n$ est divisible par 42
Solution
Même idée (mais c'est long) ou utilisation du petit théorème de Fermat qui donne $n^7 - n$ est divisible par 7. L'examen détaillé (plus court) pour 2 et 3 se fait comme pour la deuxième méthode de la première question. On a un nombre divisible par 2, 3 et 7 donc par leur ppcm, soit 42.

2. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 10 (pages 10) ; 11 à 19 (pages 17) ; 28, 41, 44, 45, 46, 47(pages 171).

TD 3-4: RELATION - FONCTIONS

NOTATION ASYMPTOTIQUE - SUITES ET INDUCTION MATHÉMATIQUE

RECURSIVITÉ - FERMETURE DES RELATIONS - ORDRES

1. Relations

Exercice 1. On définit dans $\mathbb{N}^*$ la relation $\ll$ suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, x \ll y \text{ } s'il \text{ } existe \text{ } n \in \mathbb{N}^* \text{ } tel \text{ } que \text{ } y = x^n$$

Montrez que $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$

$\ll$ est une relation d'ordre si $\ll$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

- Réflexivité : Montrons que $\forall x \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = x^n$.
  En prenant $n = 1$, on conclut la réflexivité de $\ll$.
- antisymétrie : Montrons que $\forall (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $x \ll y$ et $y \ll x$, alors x = y.
  $x \ll y \rightarrow y = x^n$ et $y \ll x \rightarrow x = y^m$
  en combinant, on obtient : $y = y^{m^n} = y^{m*n}$. Ainsi, $m * n = 1$. On en déduit que $n = 1$, $m = 1$. donc $x = y$.
- Transitivité : Montrons que $\forall x, y, z \in \mathbb{N}^*$, si $x \ll y$ et $y \ll z$, alors $\exists \text{ } n \in \mathbb{N}^*, x \ll z$.
  $x \ll y \rightarrow y = x^n$ et $y \ll z \rightarrow z = y^m$
  En combinant, on obtient : $z = x^{n^m} = x^{n*m}$
  En posant $N = n * m$, on a $N \in \mathbb{N}^*$ et $z = x^N$ donc $x \ll z$.

$\ll$ est donc une relation d'ordre. C'est un ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$ car pour le couple (2,6), il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $6 = 2^n$.

Exercice 2. On définit une relation sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{T}$ suivante:

$$(x,y)\mathcal{T}(x',y') \text{ } si \text{ } |x - x'| \leq y - y'$$

(1) Montrez que $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre.

Solution.

- Réflexivité. Il faut montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \text{ } \mathcal{T} \text{ } (x,y)$.
  Trivial.
- Anti-symétrie. Montrons que
  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \text{ } (x,y)\mathcal{T}(x',y') \text{ } et \text{ } (x',y')\mathcal{T}(x,y) \text{ } \leftrightarrow \text{ } (x,y) = (x',y')$

  $(x,y)\mathcal{T}(x',y') \text{ } \leftrightarrow \text{ } |x - x'| \leq y - y' \text{ } et (x',y')\mathcal{T}(x,y) \leftrightarrow \text{ } |x' - x| \leq y' - y$
  $|x - x'| = |x' - x|, \text{ } |x - x'| \leq y - y' \text{ } et \text{ } |x - x'| \leq -(y - y'), \text{ } donc \text{ } y - y' = 0, \text{ } soit \text{ } y = y'. \text{ } On \text{ } en \text{ } déduit \text{ } que \text{ } |x - x'| = 0, \text{ } soit \text{ } x = x'.$
- Transivité. Montrons que
  $\forall (x,y), \text{ } (x',y'), \text{ } (x'',y'') \in \mathbb{R}, \text{ } (x,y)\mathcal{T}(x',y') \text{ } et \text{ } (x',y')\mathcal{T}(x'',y'') \text{ } \rightarrow \text{ } (x,y)\mathcal{T}(x'',y'')$

  $(x,y)\mathcal{T}(x',y') \text{ } et \text{ } (x',y')\mathcal{T}(x'',y'') \text{ } \rightarrow \text{ } |x - x'| \leq y - y' \text{ } et \text{ } |x' - x''| \leq y' - y''$
  En sommant les deux inégalités, nous avons: $|x - x'| + |x' - x''| \leq y - y''$.
  Or, $|(x - x') + (x' - x'')| \text{ } \leq \text{ } |x - x'| + |x' - x''| \leq y - y''$, *donc* $|x - x''| \text{ } \leq \text{ } y - y''$

(2) $\mathcal{T}$ est-elle une relation d'ordre total?.

Solution.
Non. Il suffit de montrer un contre-exemple, soit les couples (10,2) et (1,0).

2. Fonctions

Exercice 3. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$, deux ensembles. On considère les ensembles ci-dessous décrivant une relation E vers F. Précisez si la relation est une fonction, injection, surjection ou bijection.

(1) $\{(a, 2), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\}$
Solution: Une fonction
(2) $\{(a, 4), (b, 1), (c, 3), (d, 2)\}$
Solution: Une fonction bijective
(3) $\{(a, 2), (b, 2), (a, 1), (b, 4)\}$
Solution: Aucune
(4) $\{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$
Solution: Aucune

Exercice 4. Sans les cas suivants dites si l'application $f : A \to B$ est injective , surjective ou bijective. Si elle est bijective donnez sa réciproque

(1) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = x + 1$
Solution: fonction bijective. $f^{-1}(x) = x - 1$
(2) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 1$
Solution: fonction non injective et non surjective. Preuve graphique
(3) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = 2^x$
Solution: fonction injective , non surjective
(4) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = 1/x$
Solution: fonction injective mais non surjective (car 0 n'a pas de pré-image), donc non bijective

(5) $A \subseteq \mathbb{R}^2, B \subseteq \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, x - y)$
Solution: fonction bijective

Exercice 5. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

(1) Déterminer $F = f(E)$
Solution: $F =]-1, 1[$
(2) Vérifier que f est une bijection de E sur F . injection : s
(3) Calculer la réciproque de f
Solution: $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$

Exercice 6. Soient A, B et C trois ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to C$.

1. On suppose $g \circ f$ injective ; montrer que f est injective. g est-elle obligatoirement injective ?
Solution : Si $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$, on a $g(f(x)) = g(f(y))$, ce qui n'est pas possible. La fonction g n'est pas forcément injective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective ; montrer que g est surjective. f est-elle obligatoirement surjective ?
Solution : L'image de $g \circ f$ est un sous-ensemble de l'image de g ; donc, si l'image de g n'est pas C tout entier, $g \circ f$ n'est pas surjective. La fonction f n'est pas forcément surjective.
3. On suppose $g \circ f$ bijective. Que peut-on dire de f et g ? Sont-elles bijectives ?
Solution : On sait seulement que f est injective et que g est surjective. Elles ne sont pas forcément bijectives.

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^3 - 2$.
Solution :

(1) Calculer $f \circ g$.
$f \circ g(x) = 2x^3 - 3.$
(2) Calculer g^{-1}.
$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 2}.$

3. Notation asymptotique

Exercice 8. Trouver le plus petit entier n pour lequel $f(x) \in \mathcal{O}(x^n)$ pour chacune des fonctions suivantes, en déterminant des constantes C et k.

a. $f(x) = 4x^2 + 2x^4 + 5$
$n = 4\,, C = 3\,, k = \sqrt{5}$

b. $f(x) = \frac{x^3+8}{5x^2+3x}$
$n = 1\,, C = \frac{1}{5}\,, k = \sqrt{\frac{40}{3}}$

c. $f(x) = 3x^3 - x^2\ log(x)$
$n = 3\,, C = 3\,, k = 0$

d. $f(x) = 4x^4 - 4\ log^3(x)$
$n = 4\,, C = 4\,, k = 0$

Exercice 9. Soit la fonction $f : n \to \left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \cdot (2 + \cos(n))$ définie sur $\mathbb{N}$. Prouver que :

$$f \in \Theta\left(\frac{n^3}{\log(n)}\right)$$

(Θ : grand theta)

Solution :

- $2 + \cos(n) \geq 1$ et $\frac{n^3}{\log(n)} \in \mathcal{O}\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right)$ (prendre par exemple $C = 1\,, k = 2$) donc $\frac{n^3}{\log(n)} \in \mathcal{O}\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \cdot (2 + \cos(n))$

- $\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \in \mathcal{O}(\frac{n^3}{\log(n)})$ (prendre par exemple $C = 10^6 + 1\,, k =$) et $2 + \cos(n) \leq 3$ donc il suffit de prendre $C = (10^6 + 1) * 3$ et toujours $k =$ pour trouver un couple qui convient pour montrer que : $\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \in \mathcal{O}(\frac{n^3}{\log(n)})(2 + \cos(n))$.

Donc $f \in \Theta\left(\frac{n^3}{\log(n)}\right)$

Exercice 10. Sur une échelle croissante, classer les fonctions suivantes selon leur comportement asymptotique.

a. $f_1(n) = 2\sqrt{n}$
b. $f_2(n) = \frac{n^4}{6}$
c. $f_3(n) = e^n$
d. $f_4(n) = \sqrt{log(n)}$
e. $f_5(n) = n\log(n)$
f. $f_6(n) = e^{-n}$

$e^{-n} \ll \sqrt{\log(n)} \ll 2\sqrt{n} \ll n\log(n) \ll \frac{n^4}{6} \ll e^n$

4. Suites et induction mathématique

Exercice 11. À 14h durant l'été, sous une température avoisinant 35°C, on dépose un morceau de viande sur un comptoir. Le morceau de viande contient 50 bactéries. On fait l'hypothèse que dans ces conditions, le nombre de bactéries double toutes les 15 minutes.
Soit $\mathcal{U}_n$ est le nombre de bactéries à un moment déterminé, $\mathcal{U}_{n+1}$ le nombre de bactéries 15 minutes plus tard.

1. Préciser la nature et la raison de la suite $(\mathcal{U}_n)$. Suite géométrique de raison 2

2. Exprimer $\mathcal{U}_n$ en fonction de n. Un = 50 x 2^n

3. Calculer le nombre de bactéries à 16h. À 16h remarquer que n = 8

4. En supposant que les conditions ne changent pas, à quelle heure (arrondie au quart d'heure supérieur) aurait-on 100 000 bactéries sur le morceau de viande ? 16h 45 mns

Exercice 12. Donnez une définition récursive de la suite a_n.

1. $a_n = 2n+1$ Réponse : $a_0 = 1$; $a_{n+1} = a_n + 2$
2. $a_n = 3 - 2^n$ Réponse : $a_0 = 2$; $a_{n+1} = 2a_n - 3$. Indication : Utiliser la suite $b_n = a_n - 3$.
3. $a_n = 2^{2^n}$ Réponse : $a_0 = 2$; $a_{n+1} = a_n^2$
4. $a_n = \frac{n^2-n+2}{2}$ Réponse : $a_0 = 1$; $a_{n+1} = a_n + n$

Exercice 13. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} < \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Solution : Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

Pour $n = 1$: $u_1 = \frac{1}{2}$, et on a bien : $\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Supposons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} < u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

On a : $u_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n+2)} = u_n \frac{2n+1}{2n+2}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = u_{n+1}$.

Vérifions que $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n+2}}{2n+3}$. Autrement dit, $2n+3 > 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \iff (2n+3)^2 > 4(n+1)(n+2)$

Soit $4n^2 + 12n + 9 > 4n^2 + 12n + 8$ vrai.

Donc $u_{n+1} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n+2}}{2n+3}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$u_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}$.

Vérifions que $\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$. Autrement dit, $\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3} < 2n+2 \iff (2n+1)(2n+3) < (2n+2)^2$.

Soit $4n^2 + 8n + 3 < 4n^2 + 8n + 4$ vrai.

Donc $u_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$.

On a établi l'encadrement voulu à l'ordre $n+1$.

On conclut, par récurrence sur n, à l'encadrement demandé.

Exercice 14. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 2$, $U_{n+1} = 1 +$ pour $\frac{1}{1+U_n}$. Démontrer par récurrence que tout $n \in \mathbb{N}$, On a $1 \le U_n \le 2$.

Solution : Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \le U_n \le 2$.

(1) Étape de base : $U_0 = 2$; $1 \le 2 \le 2$, donc $1 \le U_0 \le 2$. $P(0)$ est vraie.

(2) Étape inductive : Supposons jusqu'au rang n que $P(n)$ est vraie.

(3) $1 \le U_n \le 2 \iff 2 \le 1 + U_n \le 3 \iff \frac{1}{3} \le \frac{1}{1+u_n} \le \frac{1}{2} \iff 1 + \frac{1}{3} \le 1 + \frac{1}{1+U_n} \le 1 + \frac{1}{2} \iff 1 \le 1 + \frac{1}{3} \le 1 + \frac{1}{1+u_n} \le 1 + \frac{1}{2} \le 2 \iff 1 \le U_{n+1} \le 2$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie. En supposant jusqu'au rang n que $P(n)$ est vraie, on a $P(n+1)$ qui est vraie. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $1 \le U_n \le 2$.

Exercice 15. Pour tout réel x et pour tout entier positif non nul n on a :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

En utilisant la notion d'itération, donner l'algorithme d'une fonction qui calcule $S_n(x)$.

Indication : Considérer les transformations suivantes :

$S_n(x) = \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^n}{n}$

$S_n(x) = x(\frac{1}{1} + \frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^{n-2}}{n-1} + \frac{x^{n-1}}{n})$

$S_n(x) = x(\frac{1}{1} + x(\frac{1}{2} + \frac{x^1}{3} + \cdots + \frac{x^{n-3}}{n-1} + \frac{x^{n-2}}{n}))$

$S_n(x) = x(1 + x(\frac{1}{2} + x(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{x^{n-4}}{n-1} + \frac{x^{n-3}}{n}))$

$S_n(x) = x(1 + x(\frac{1}{2} + x(\frac{1}{3} + x(\cdots + x(\frac{1}{n-1} + \frac{x}{n})\cdots))))$

Exemple :

```
Sn(x,n) {
    tmp = 1/n
    for k=n to 2 by -1 {
        tmp = 1/(k-1)+x*tmp
    return x*tmp
    }
}
```

Exercice 16. La fonction d'Ackermann est une fonction récursive à deux paramètres entiers définie par :

$$f(n\,,m) = \begin{cases} m+1 & Si\ n=0 \\ f(n-1,1) & Si\ n \geq 1\ et\ m=0 \\ f(n-1, f(n,m-1)) & Si\ n \geq 1\ et\ m \geq 1 \end{cases}$$

1. Calculer $f(1\,,0)\,,f(2\,,0)\,,f(3\,,0)$ Réponse : $f(1\,,0)=2\,;f(2\,,0)=3\,;f(3\,,0)=5$
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\,, f(1\,,k)=k+2$ Indication : Preuve par induction
   - Vrai pour k=0
   - Supposons que la propriété est vraie au rang k.
     Montrons qu'elle est vraie au rang k+1.

$$\begin{aligned} f(1,k+1) &= f(0,f(1,k)) \\ &= f(1,k)+1 \\ &= k+2+1 \text{ d'après la propriété de récurrence} \qquad = (k+1)+2 \end{aligned}$$

3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\,, f(2\,,k)=2k+3$ Indication : Preuve par induction
   - Vrai pour k=0
   - Supposons que la propriété est vraie au rang k.
     Montrons qu'elle est vraie au rang k+1.

$$\begin{aligned} f(2,k+1) &= f(1,f(2,k)) \\ &= f(2,k)+2 \text{ d'après 2.} \\ &= 2k+3+2 \text{ d'après la propriété de récurrence} \qquad = 2(k+1)+3 \end{aligned}$$

4. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\,, f(3\,,k)=2^{k+3}-3$ Indication : Preuve par induction
   - Vrai pour k=0
   - Supposons que la propriété est vraie au rang k.
     Montrons qu'elle est vraie au rang k+1.

$$\begin{aligned} f(3,k+1) &= f(2,f(3,k)) \\ &= 2f(3,k)+3 \text{ d'après 3.} \\ &= 2(2^{k+3}-3)+3 \text{ d'après la propriété de récurrence} \qquad = 2^{(k+1)+3}-3 \end{aligned}$$

5. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2 (pages 64) ; 15, 18, 20, 24 et 26 (pages 65) ; 8, 9 et 14 (pages 73) ; 26 et 27 (pages 83) ; 2, 4, 5, 8 (page 197) ; 18, 21 (page 205) ; 40 (page 215).

6. Récursivité

Exercice 17. Donnez une d´efinition r´ecursive de l'ensemble des entiers positifs congrus `a 3 modulo 7 ou congrus à 5 modulo 7.
$a_0 = 3$; $a_1 = 5$; $a_{n+2} = a_n + 7$

Exercice 18. Construire un algorithme r´ecursif qui calcule $n \cdot x$ lorsque n et x sont des entiers positifs. procedure(n,x)

```
  si x = 0 ou n = 0
      procedure(n,x):=0
  sinon
      procedure(n,x):=x+procedure(n-1,x)
```

Exercice 20. D´emontrez que la somme des n premiers entiers impairs est ´egale `a n^2.
On peut remarquer que cette somme correspond à une suite arithmétique de raison 2.
On pose que cette suite soit $u_n = 2n + 1$. Dès lors le premier terme $u_0 = 1$ et le dernier terme serait $u_{n-1} = 2n - 1$.
On sait que la somme S_n d'une suite arithmétique u_n ayant n termes est: $S_n = (n)\frac{u_0+u_{n-1}}{2}$ où u_0 est le premier terme et u_{n-1} le dernier terme
On en déduit que cette somme est $s_n = (n)\frac{1+2n-1}{2} = n^2$.

Exercice 21. D´emontrez que $n < 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit la proposition $Q(n)$ définie par : $n < 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Etape de base : vérifions la condition pour $n = 0$
   On a $0 < 2^0 = 1$ vrai
3. Etape inductive : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ $Q(n)$ est vrai. Montrons que $Q(n + 1)$ est vrai.
   On sait que $n < 2^n$. En particulier $1 \leq 2^n$. Donc on en déduit que $n+1 < 2^n+2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$.
   D'où $Q(n + 1)$ vrai.

Exercice 22. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer par induction que:$16|(3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n)$

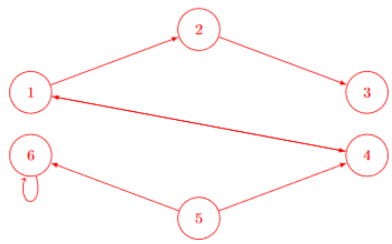
1. Soit Q(n) la proposition 16 divise $(3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n)$
2. Etape de base : vérifions la condition pour $n = 0$
3. Etape inductive : supposons que $Q(n)$ est vrai et montrons que $Q(n + 1)$ vrai
   Posons $u_n = 3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n$. On en deduit que $u_{n+1} = 9u_n + 32n + 4(5^{n+2} - 1)$. Ainsi, il suffit de prouver que $5^{n+2} - 1$ divisble par 4.
   On sait que 5 = 4 + 1.
   Alors $5^{n+2} = (4 + 1)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} 4^{n+2-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k} 4^{n+2-k} + 1$. Le résultat découle du fait que $5^{n+2} - 1 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k} 4^{n+2-k}$ qui est divisible par 4.
   Note: on peut aussi démontrer que $4|(5^{n+2} - 1)$ par induction.

7. Fermeture des relations

Exercice 23. Soit la relation $\mathcal{R}$ d´efinie sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ par : $\{(1, 2), (1,4), (2, 3), (4, 1), (5, 4), (5, 6), (6,6)\}$.

1. Dessiner le graphe de la relation $\mathcal{R}$.
2. Donner la matrice de la relation $\mathcal{R}$.
3. Donner la fermeture réflexive de $\mathcal{R}$.
4. Donner la fermeture symétrique de $\mathcal{R}$.
5. Donner la fermeture transitive de $\mathcal{R}$.

1.



2. Matrice de la relation $\mathcal{R}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Note sur les questions suivantes : le type de représentation (matrice, graphe, liste de couples) n'a pas d'importance.

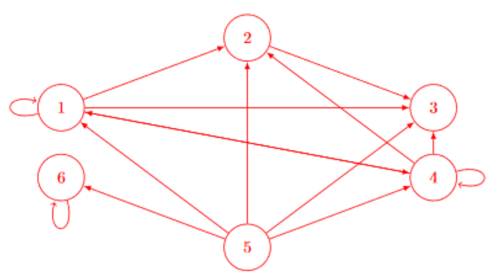
3. Fermeture réflexive :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Fermeture symétrique :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Fermeture transitive (doit être une relation transitive, il faut donc aussi compléter les triangles créés par la complétion d'autres triangles. En outre, la définition d'une relation transitive s'applique aussi dans le cas x=z) :



Note : les fermetures sont utilisées dans certaines requêtes sur des bases de données

Exercice 24. On consid`ere les trois ensembles $A = \{2, 3, 4, 6\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{0, 3, 5\}$ et deux relations $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ et $\mathcal{S} \subseteq B \times C$ d´efinies par : $\mathcal{R} = \{(4, a), (6, a), (6, b), (4, c), (6, c)\}$ et $\mathcal{S} = \{(a, 0), (b, 5), (c, 5), (d, 3)\}$

1. Donner la matrice de la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

$$M_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Donner la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ sous forme d'un ensemble de couples.
   $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(4, 0), (6, 0), (6, 5), (4, 5)\}$

Exercice 25. Soit la relation $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ d´efinie par : $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, a \times b \leq a + b\}$.

1. Donner la relation $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ sous forme d'un ensemble
   $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$. Il suffit de prendre $b = 1$
2. En déduire que $\mathcal{R} \circ (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.

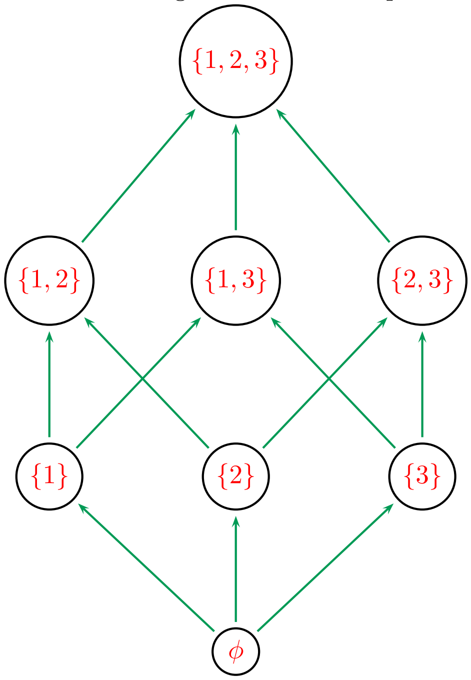
8. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 2, 4, 5, 8 (page 197) ; 35 (page 198) ; 18, 21 (page 205) ; 29 (page 214) ; 40 (page 215)

9. Ordres

Exercice 26. On considère la relation d'ordre $\subset$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.

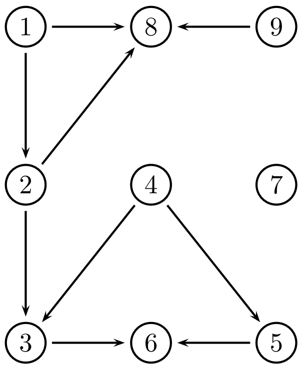
1. Dessiner le diagramme de Hasse pour cette relation.



2. Quels sont les éléments minimaux, maximaux ?
   Élément minimal : ϕ ; Élément maximal : $\{1, 2, 3\}$
3. Donner le plus petit élément, s'il y a lieu.
   Plus petit élément : ϕ
4. Donner le plus grand élément, s'il y a lieu.
   Plus grand élément : $\{1, 2, 3\}$

Exercice 27. Trouver le diagramme de Hasse pour la relation "plus grand ou égal à " dans l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Exercice 28. Proposer un tri topologique pour le graphe suivant :



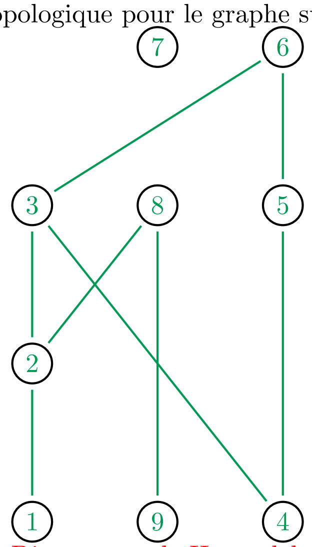


Diagramme de Hasse dela relation

Exemples de tri topologique (la liste n'est pas exhaustive)
1-9-2-4-7-3-8-5-6 ; 7-9-1-4-2-5-8-3-6 ; 1-9-2-4-5-7-3-8-6 ; 9-4-5-1-2-3-6-8-7 ; 7-4-5-9-1-2-8-3-6

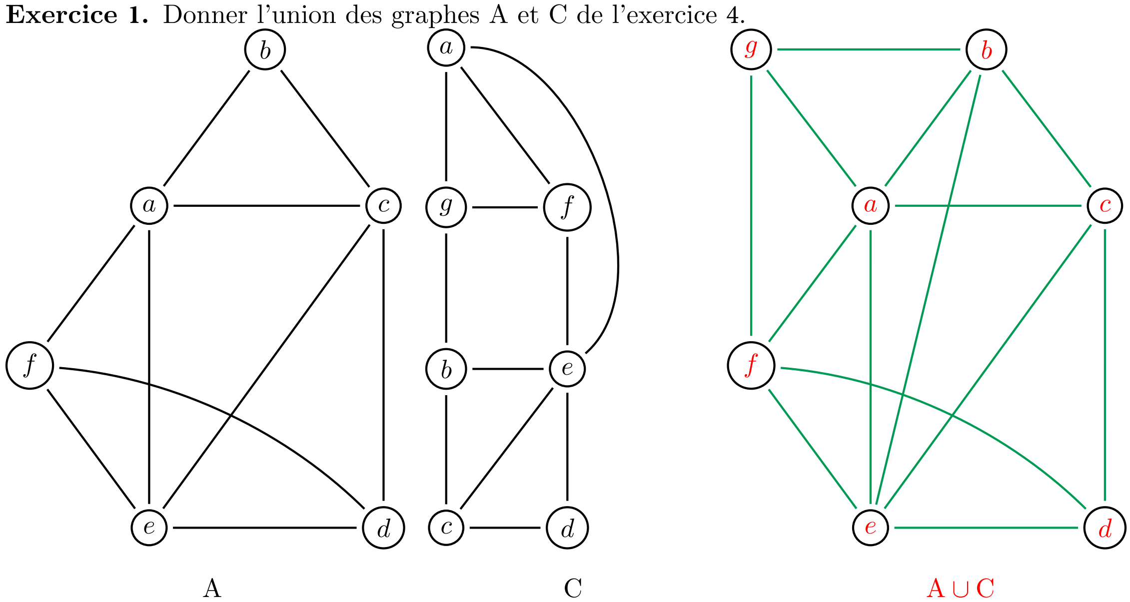
POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 5 : GRAPHES

1. Graphes

Exercice 1. Donner l'union des graphes A et C de l'exercice 4.



Exercice 2. Ecrire la matrice d'incidence associée au graphe $G = (V, E)$ tel que $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, avec $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{2, 3\}$, $e_3 = \{3, 1\}$, $e_4 = \{4, 1\}$ et $e_5 = \{4, 4\}$.

Matrice d'incidence :

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

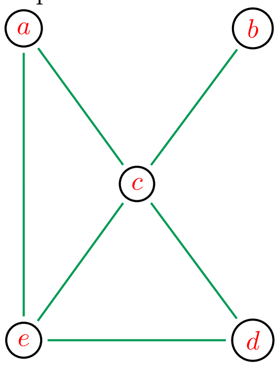
1. Que vaut la somme des éléments d'une colonne. Réponse : 2
2. Que représente la somme des éléments d'une ligne. Réponse : Le degré de chacun des sommets.
3. En déduire que dans un graphe non orienté $G = (V, E)$, on a

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2\,|E|$$

d(1)+d(2)+d(3)+d(4)=3+2+2+3=10=2x5=2|E|

Exercice 3. Soit $G = (V, E)$ le graphe non orienté défini par :
$V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{\{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$.

1. Représenter G.

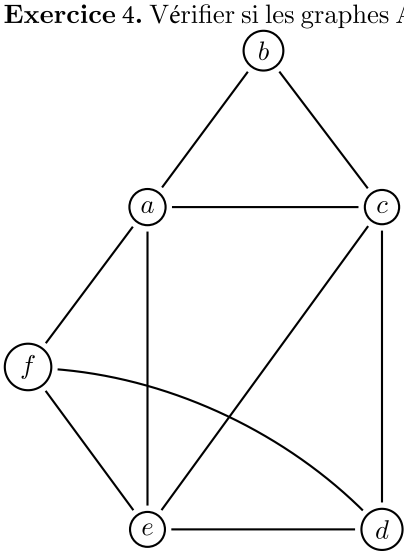


2. Écrire sa matrice d'adjacence et sa liste d'adjacence.

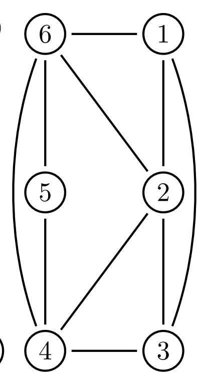
$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Le graphe G est-il r´egulier ? Réponse : Non

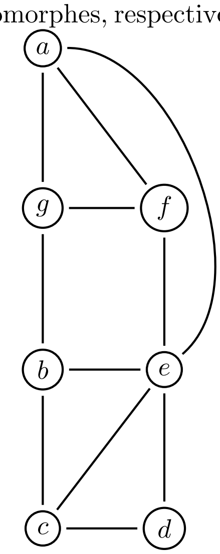
Exercice 4. Vérifier si les graphes A et B, C et D sont isomorphes, respectivement.



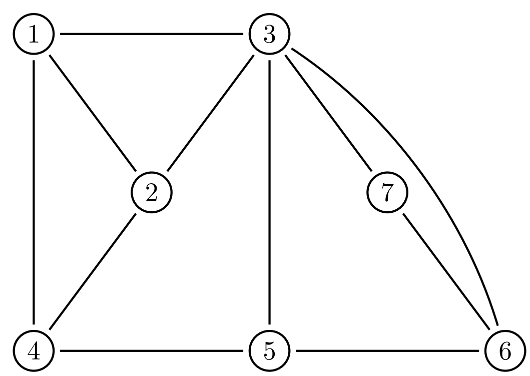
A



B



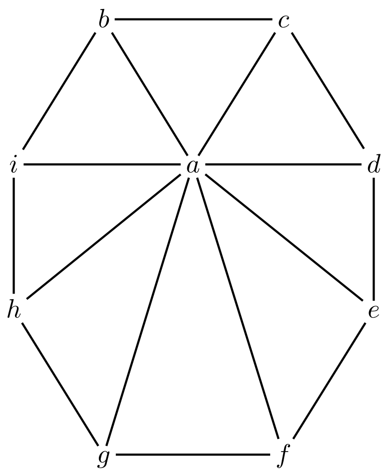
C

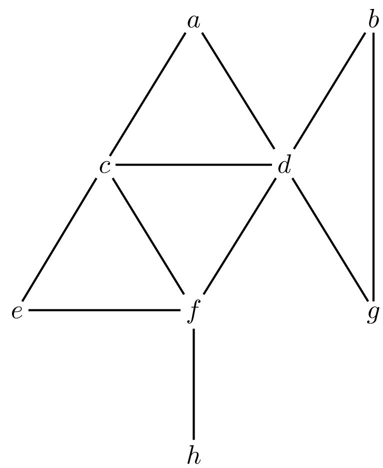


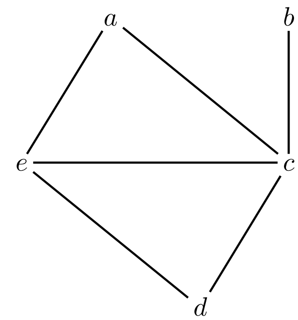
D

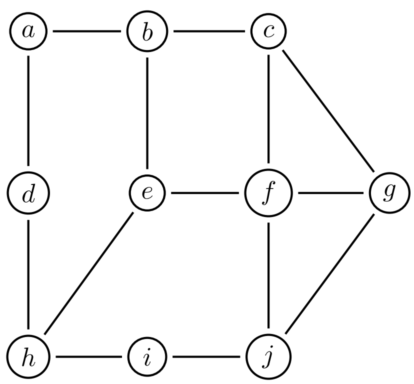
A et B sont isomorphes.
C et D sont isomorphes.

Exercice 5. Déterminer si les graphes sont bipartis.



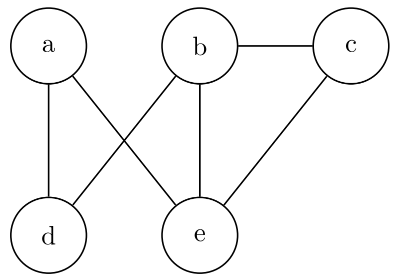






Aucun

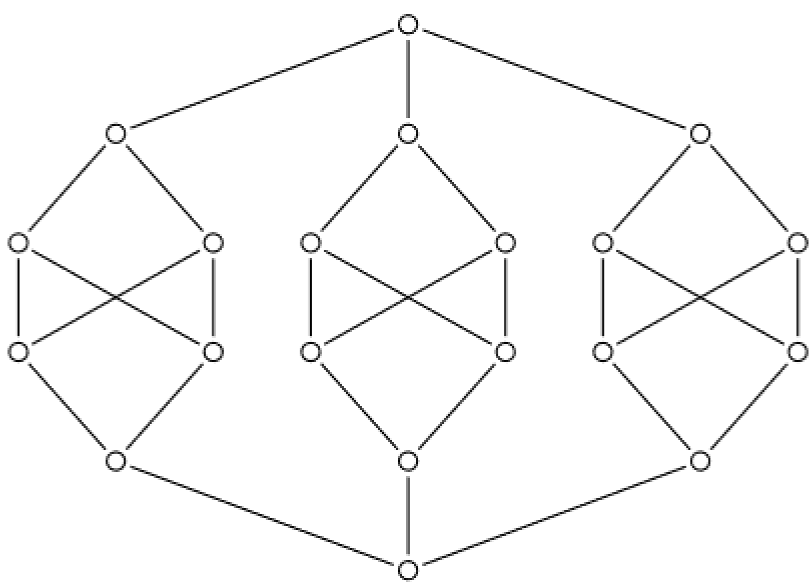
Exercice 6. Soit le graphe suivant :



Les listes de sommets suivants forment-elles des chaînes dans le graphe ci-dessus? Lesquelles sont des chaînes simples? Lesquelles sont des cycles? Quelles sont les longueurs de celles qui sont des chaînes?
Solution :

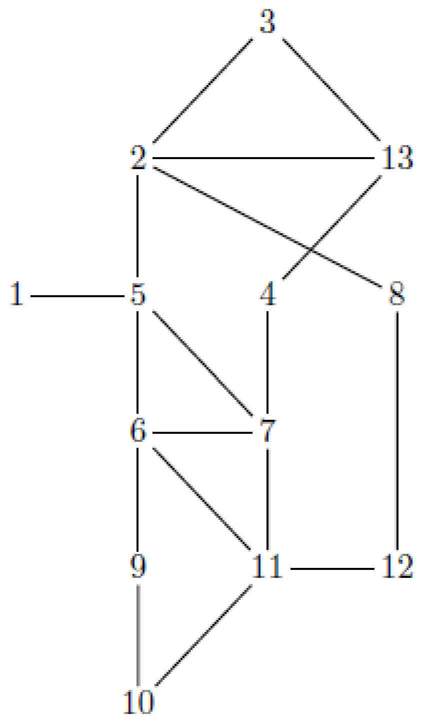
(1) a, e, b, c, b
a, e, b, c, b est une chaîne. Mais ce n'est ni simple, ni un cycle. Sa longueur est 4.
(2) a, e, a, d, b, c, a
a, e, a, d, b, c n'est pas une chaîne.
(3) e, b, a, d, b, e
e, b, a, d, b, e n'est pas une chaîne.
(4) c, b, d, a, e, c
e, b, a, d, b est une chaîne simple et un cycle. Sa longueur est 5.
(5) Combien existe-t-il de chemins de longueur 4 entre a et b?
11

Exercice 7. Le graphe ci-dessous contient-il un cycle hamiltonien ?

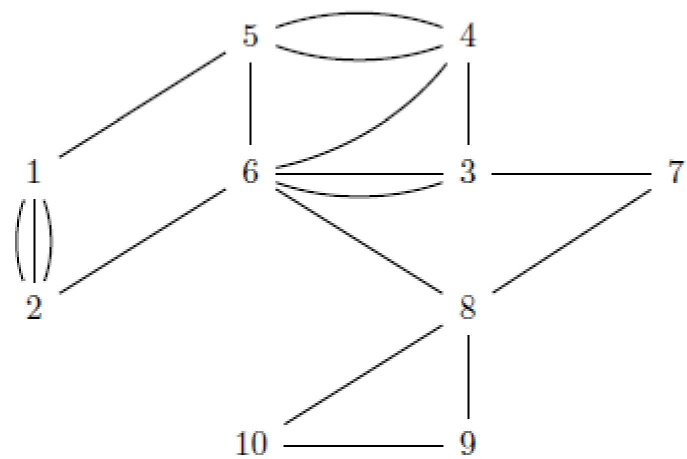


Solution : Non. Il contient par contre une chaîne hamiltonienne:

Exercice 8. Le graphe (a) admet-il une chaîne eulérienne ? Si oui, déterminez-en une.
Le multigraphe (b) admet-il un cycle eulérien ? Si oui, déterminez-en un.



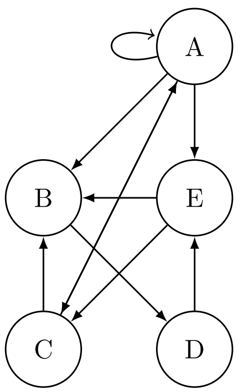
(a)



(b)

Solution :
(a) : Oui : 13-2-3-13-4-7-11-12-8-2-5-7-6-11-10-9-6-5-1
(b) : Oui : 1-5-4-5-6-4-3-7-8-9-10-8-6-3-6-2-1-2-1

Exercice 9. Soit le graphe suivant :



Matrice d'adjacence M :

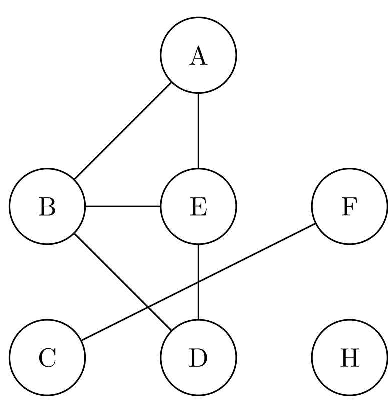
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 allant de A à C ? 2
Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 allant de E à A ? 1

Exercice 10. Soit le graphe suivant :



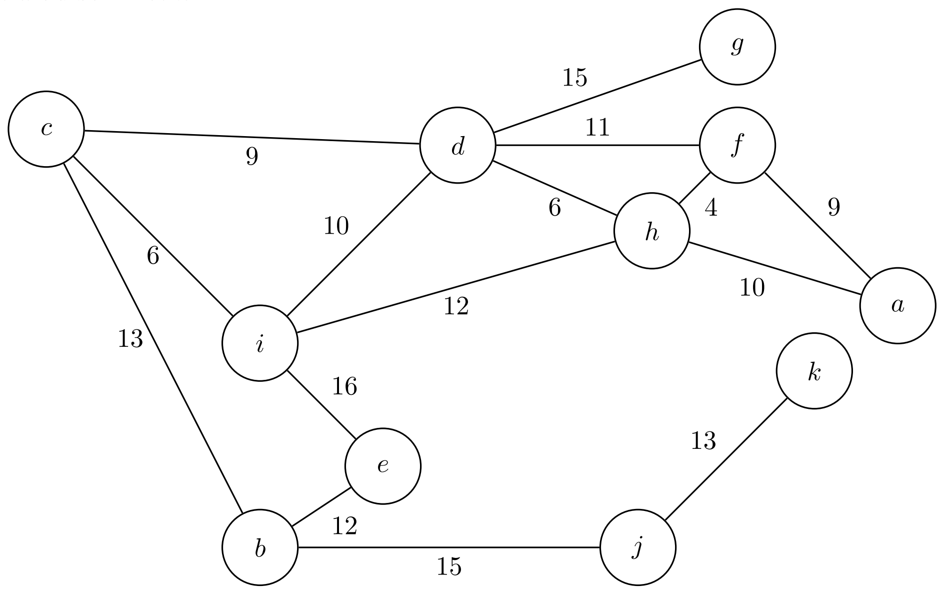
Combien y a-t-il de composantes connexes dans ce graphe ? 3 : A-B-D-E, F-C et H

2. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 11, 15 (page 399) ; 26, 33, 34, 35, 41 (page 428)

TD 6 : GRAPHES - ARBRES

Exercice 1. Appliquez l'algorithme de Dijkstra au graphe suivant afin de trouver le plus court chemin du sommet a au sommet k.



Solution :

(1) $S = \{a\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0)\}$
Chemins connus : $C = \{(ah, 10), (af, 9)\}$, le reste étant toujours à l'infini.

(2) $S = \{a, f\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9)\}$
Chemins connus : $C = \{(ah, 10), (afd, 20), (afh, 13)\}$

(3) $S = \{a, f, h\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahd, 16), (ahi, 22)\}$

(4) $S = \{a, f, h, d\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31)\}$

(5) $S = \{a, f, h, d, i\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38)\}$

(6) $S = \{a, f, h, d, i, c\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$

(7) $S = \{a, f, h, d, i, c, g\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$

(8) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdcb, 38)\}$

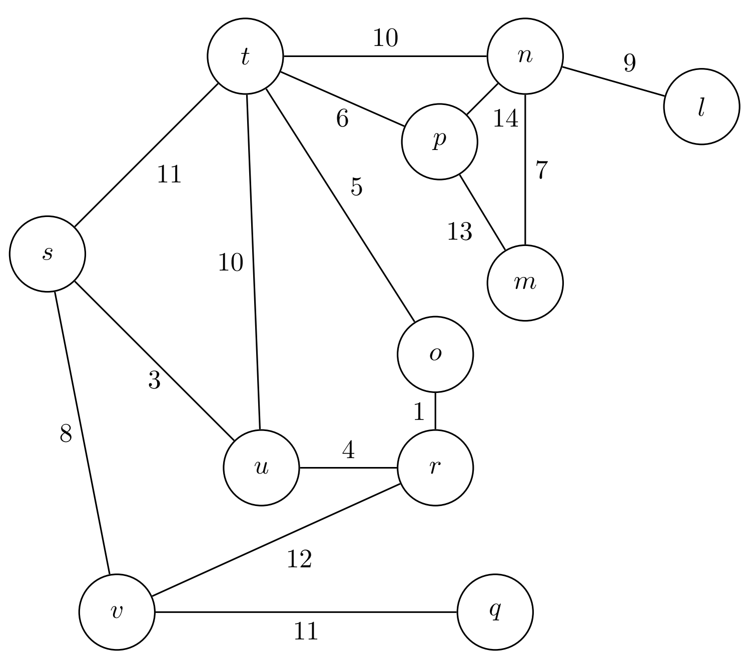
(9) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdcbj, 53)\}$

(10) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b, j\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38), (ahdcbj, 53)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdcbjk, 66)\}$

(11) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b, j, k\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38), (ahdcbj, 53), (ahdcbjk, 66)\}$

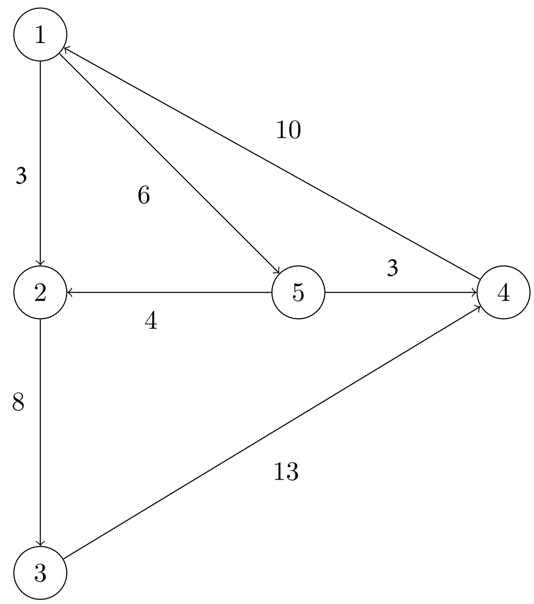
Chemins connus : $C = \{\}$
L'algorithme s'arrête ici en raison de l'apparition du sommet visé dans l'ensemble des sommets connus S. Si on consulte le chemin emprunté pour s'y rendre, on obtient la suite des sommets a, h, d, c, b, j, k pour une distance minimale de 66.

Exercice 2. Appliquez l'algorithme de Floyd au graphe suivant afin de trouver la longueur du chemin minimal du sommet l au sommet v.



Solution : 37
Conseil : Implémenter l'algorithme parce qu'il n'est pas agréable à faire à la main.

Exercice 3. Appliquez l'algorithme de Floyd au graphe suivant afin de trouver la longueur du chemin minimal du sommet *1* au sommet *4*.



Solution : 9

Exercice 4. Soit T un graphe connexe à n sommets montrer que T possède au moins n - 1 aretes.

Solution :
Par récurrence sur n :

Le résultatest évident pour $n = 1$ et $n = 2$.

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. On suppose que tout graphe connexe de n sommets possède au moins $n - 1$ arêtes.

Soit alors T un graphe connexe à $n + 1$ sommets. Soit a le nombre d'arêtesde T.

Notons que la connexité assure que chaque sommet est de degré au moins 1.

- Si chaque sommet est de degré au moins 2, alors le théorème des poignées de main conduit $2a = \sum_{A \in \mathcal{S}} d(A) \geqslant 2n$, et donc $a \geqslant n$.

- S'il existe un sommet de degré 1. Notons le A. Alors, le graphe induit T' obtenu en éliminant A et l'arête dont il est l'extrémité, est un graphe connexe de n sommets qui possède exactement

une arête de moins que T. D'après l'hypothèse de récurrence, T' possède donc au moins n-1 arêtes, d'où T en possède au moins n, ce qui achève la démonstration.

Exercice 5. Montrer que pour un graphe T à n sommets les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) T est un arbre
(2) T est un graphe connexe à $n-1$ arêtes

Preuve :
On peut tout de suite supposer que $n \geqslant 2$.

- Si T est un graphe connexe de n sommets et de n - 1 arêtes.
Par l'absurde : supposons que T possède un cycle, disons $M_1M_2...M_kM_1$.

Alors, en supprimant l'arête (M_1, M_2), on ne brise pas la connexité du graphe (si l'on a besoin de passer de M_1 à M_2, ou le contraire, il suffit de faire le tour via le chemin $M_2...M_kM_1$). Le nouveau graphe obtenu est donc connexe et possède n sommets et $n-2$ arêtes, ce qui contredit le résultat de l'exercice précédent.

Donc, T ne possède pas de cycle, ce qui permet d'affirmer qu'il s'agit bien d'un arbre.

- Prouvons maintenant par récurrence sur n, que si T est un arbre à n sommets alors il possède exactement n-1 arêtes.

La conclusion est évidente pour $n = 2$.
Soit $\geqslant$ fixé. Supposons la conclusion établie pour tout arbre de sommets.
Soit T un arbre à $n+1$ sommets.
On va commencer par prouver que T possède au moins un sommet de degré 1 :
Par l'absurde : supposons que tous les sommets soient de degrés au moins 2.

Soit alors M un sommet arbitraire. On choisit M parmi les sommets adjacents à M_1, et on colorie l'arête (M_1, M_2). On choisit alors un sommet M_3, adjacent à M_2 selon une arête non encore coloriée (ce qui est possible, puisque $d(M_2) \geqslant 2$), et on colorie l'arête (M_2, M_3). Et ainsi de suite, tant que c'est possible, si M_i vient d'être construit et qu'il reste une arête d'extrémité M_i qui n'a pas encore été coloriée, on choisit un sommet noté M_{i+1} parmi ceux qui sont les autres extrémités de telles arêtes, et on colorie l'arête (M_i, M_{i+1}).
Comme le nombre d'arêtes est fini et que le nombre d'arêtes non coloriées diminue d'une unité à chaque étape, cette procédure va devoir s'arrêter.

Comme T ne possède pas de cycle, il est impossible qu'un même sommet apparaîsse deux fois dans la suite (M_i).

Soit M_k le dernier sommet construit. Alors, puisque $d(M_k) \geqslant 2$ et que l'on a colorié qu'une seule arête d'extrémité M_k, c'est donc qu'il en reste encore au moins une non coloriée et qui permet de poursuivre la construction. Contradiction.

Ainsi, T possède au moins un sommet de degré 1, disons A. Mais alors, en supprimant A et l'arête dont il est une extrémité, on obtient un sous-graphe T' qui est toujours connexe et sans cycle, c.à.d. un arbre, mais qui possède exactement un sommet et une arête de moins que T.

L'hypothèse de récurrence assure donc que T' possède exactement n-1 arêtes, et ainsi que T en possède exactement n.

Exercice 6. Un arbre m-aire complet M avec $m = 5$ a exactement :

a. $n = 21$ sommets. Combien a-t-il de feuilles? 17
b. $i = 12$ sommets internes. Combien a-t-il de sommets? 61
c. $l = 129$ feuilles. Combien a-t-il de sommets internes? 32

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 7 : GRAPHES - ARBRE

Exercice 1.

(1) *Donnez l'ordre dans lequel les sommets sont traversés dans le cas d'un parcours préfixe.*

Solution : *a,d,e,f,g,o,n,m,p,c,b,h,i,l,k,q,j*

(2) *Donnez l'ordre dans lequel les sommets sont traversés dans le cas d'un parcours infixe.*
Solution : *e,d,f,o,g,n,p,m,a,c,h,b,l,i,q,k,j*

(3) *Donnez l'ordre dans lequel les sommets sont traversés dans le cas d'un parcours postfixe.*
Solution : *e,f,o,n,p,m,g,d,c,h,l,q,k,j,i,b,a*

Exercice 2. Jeux avec les expressions arithmétiques :

1. Calculer la valeur des expressions suivantes, avec A = 1, B = 2, C = 2, D = 3 et E=4.
   a. Posfixées : $ABC + *CDE + \uparrow -$; $ADBCD * - + *$ -124 et -1
   b. Préfixées : $- * +ABC - DB$; $*A + D - B * CD$ 5 et -1

2. Dessiner l'arbre binaire représentant l'expression suivante et donnez-en une forme préfixe, infixe et postfixe : (A*B-C/D+E) + (A-B-C-D*D)/(A+B+C)
   Parcours :
   Préfixe : ++-*AB/CDE/—ABC*DD++ABC
   Infixe : A*B-C/D+E+A-B-C-D*D/A+B+C
   Postfixe : AB*CD/-E+AB-C-DD*-AB+C+/+

Exercice 3. écrivez les equations suivant sous la forme préfix et postfix en suivant la priorité des opéra-tions.

(1) 1+2*3
préfix : +1*23
postfix : 123*+

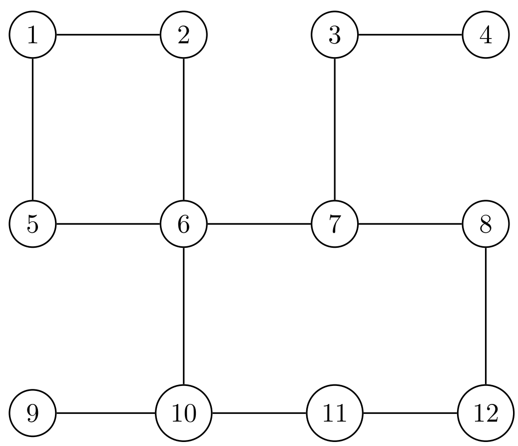
(2) (1-2)*(3+4)
préfix : *-12+34
postfix : 12-34+*

(3) (3 ˆ 2+4 ˆ 2) ˆ (1/2)
préfix : ˆ +ˆ 32ˆ 42/12
postfix : 32ˆ 42ˆ +12/ˆ

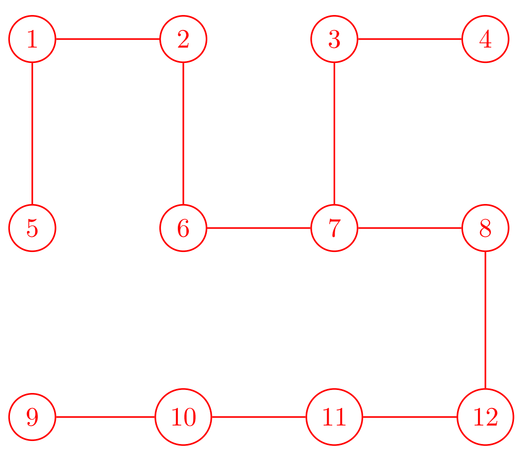
Exercice 4. Donnez le resultat des équations suivantes.

- préfix:
  (1) +-42/5+*123
  3
  (2) +4//++29*-15+2*1233
  31/9
- postfix:
  (1) 142*+3/53-+
  5
  (2) 273+*2-411+5*-/
  3

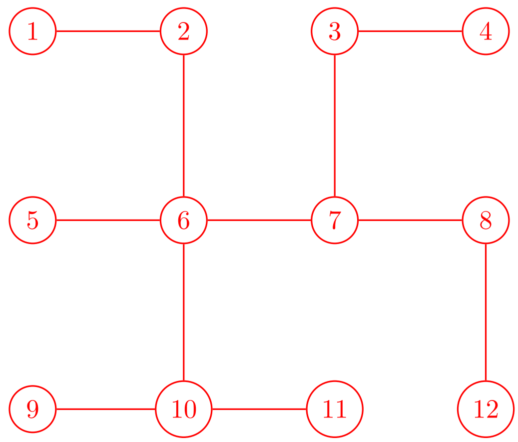
Exercice 5. Donnez les arbres de recouvrement en partant du noeud 6 en utilisant la fouille en profondeur et en largeur. À notez quand dans le cas où plusieurs noeuds sont disponibles, on les choisit en ordre croissant.



fouille en profondeur :

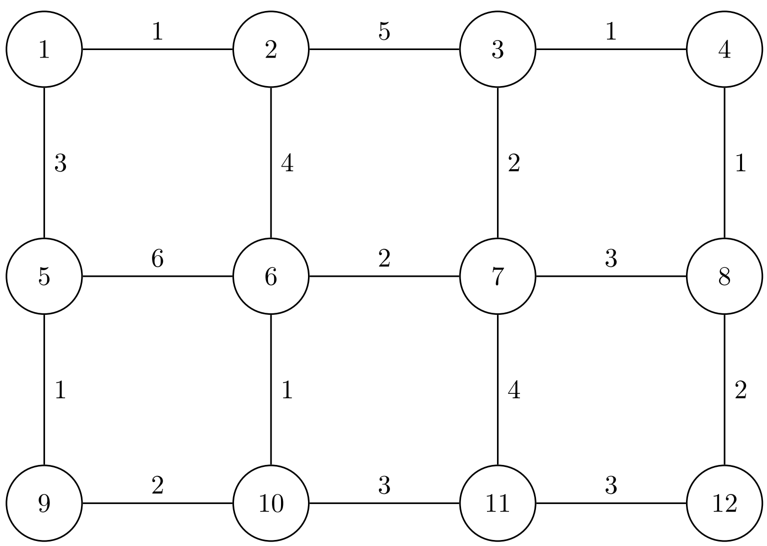


fouille en largeur :

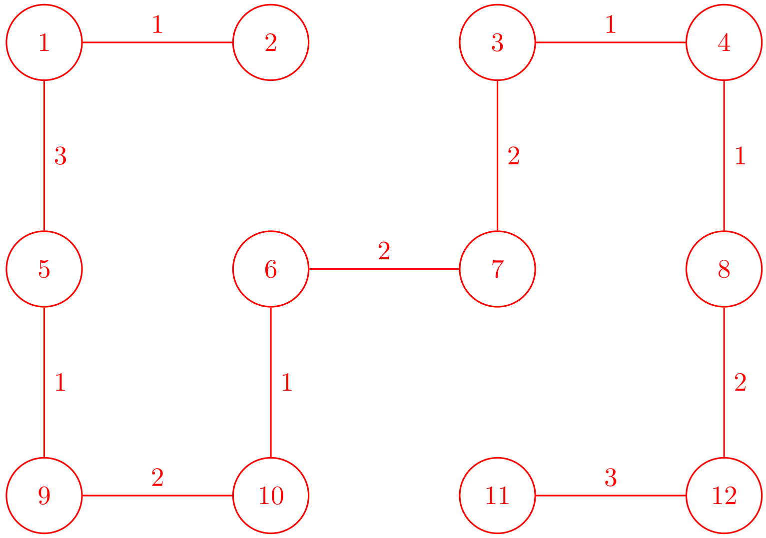


Exercice 6. À partir du graph suivant, décrivez chaque étape afin obtenir l'arbre de recouvrement ayant le coût minimal en utilisant :

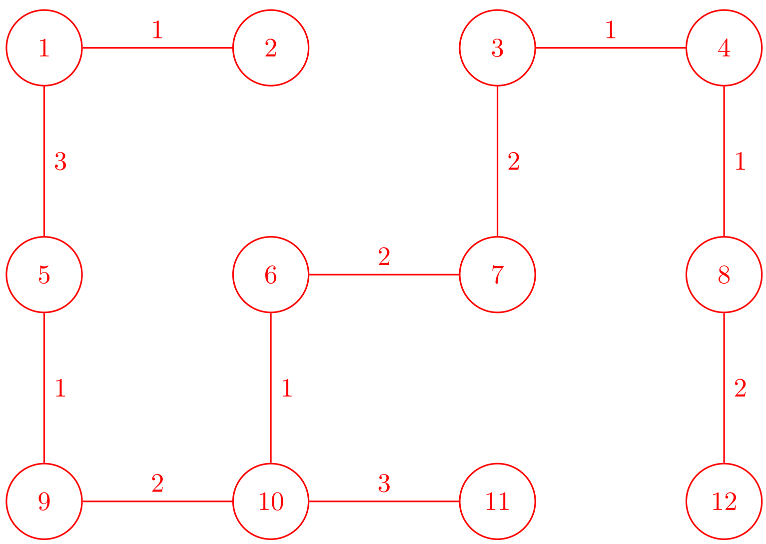
(1) l'algorithme de Prim.
(2) l'algorithme de Kruskal.



Prim :

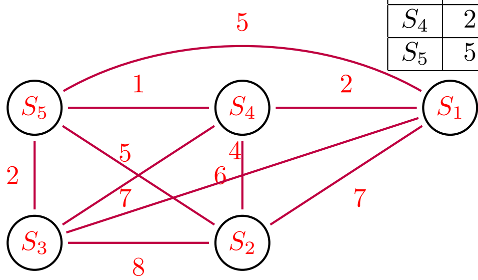

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
1
1
3
2
1
2
1
1
2
2
3

Kruskal :

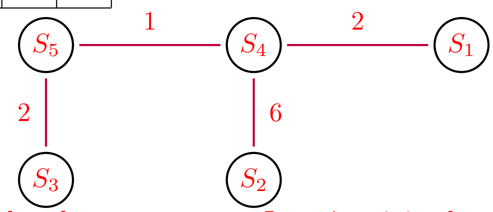

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
1
1
3
2
1
2
1
1
2
2
3

Exercice 7. Appliquer l'algorithme de Prim aux donne´es du tableau ci-apre`s pour trouver le cout minimal.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1					
S_2	7				
S_3	4	8			
S_4	2	6	5		
S_5	5	7	2	1	



Graphe initial.



Arbre de recouvrement. Le coût minimal est 11.

Exercice 8. Une compagnie désire installer au moindre coût un réseau de transmission de données entre son siège et 7 de ces succursales numérotées S_1, S_2, ..., S_7. Le coût d'une ligne entre deux agences est donnée par la TABLE 1 :

1. Appliquer Prim pour trouver le coût minimal du projet.
   Solution :
   1.1. Choisir un arc arbitraire parmi les arcs de coût minimal : $Sige - S1$.
   1.2. Choisir un arc arbitraire ne formant pas de cycle parmi les arcs de coût minimal qui touchent au $Sige$ ou à $S1$: $Sige - S5$ ou $S1 - S4$.
   1.3. Prendre l'autre arc de l'étape précédente (puisqu'il est minimal et ne forme pas de cycle).
   1.4. Choisir un arc arbitraire ne formant pas de cycle parmi les arcs de coût minimal qui touchent au $Sige$, à $S1$, à $S4$ ou à $S5$: $Sige - S3$.
   1.5. Choisir un arc arbitraire ne formant pas de cycle parmi les arcs de coût minimal qui touchent au $Sige$, à $S1$, à $S3$, à $S4$ ou à $S5$: $S5 - S7$.
   1.6. Choisir un arc arbitraire ne formant pas de cycle parmi les arcs de coût minimal qui touchent au $Sige$, à $S1$, à $S3$, à $S4$, à $S5$ ou à $S7$: $S2 - S6$.
   Ceci marque la fin de l'algorithme car nous avons itéré $n - 2$ fois (où n est le nombre de sommets, donc 6 fois). La somme du coût des arcs choisis est de $(5+7+7+9+10+15+20 =)$ 73.
2. Appliquer Kruskal pour trouver le coût minimal du projet.
   Solution : Dresser la liste des arcs selon leur coût.
   2.1. $Sige - S1 = 5$
   2.2. $Sige - S5 = 7$, $S1 - S4 = 7$
   2.3. $Sige - S3 = 9$
   2.4. $S5 - S7 = 10$
   2.5. $S1 - S3 = 11$
   2.6. $S1 - S5 = 12$
   2.7. $Sige - S4 = 13$
   2.8. $S1 - S7 = 15$, $S2 - S5 = 15$, $S3 - S5 = 15$, $S4 - S5 = 15$
   2.9. $S1 - S2 = 17$
   2.10. $Sige - S2 = 18$
   2.11. $S2 - S6 = 20$, $S3 - S4 = 20$

2.12. ... (On a au moins une fois chaque sommet dans la liste, alors l'algorithme ne devrait pas aller plus loin).

Il s'agit ensuite de choisir, dans l'ordre de la liste, tous les arcs qui ne provoquent pas de cycle lorsqu'ajoutés au graphe. On choisit donc tous les arcs de 2.1 à 2.4. Ensuite, il y aura $S2 - S5$ dans 2.8 et finalement $S2 - S6$ dans 2.11. La somme est encore une fois égale à 73.

3. Comparer les deux solutions.

Comme Kruskal nécessite de dresser une liste qui ici ne change pas le résultat en termes de coût, Prim sera plus rapide à appliquer. Le coût minimal du projet est de 73.

Tab. 1. Coût d'installation d'un réseau de transmission

	Siège	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_1	5						
S_2	18	17					
S_3	9	11	27				
S_4	13	7	23	20			
S_5	7	12	15	15	15		
S_6	38	38	20	40	40	35	
S_7	22	15	25	25	30	10	45

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 8 : DÉNOMBREMENT

Exercice 1. Dans un jeu de 52 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (ces 5 cartes s'appellent une main).

1. Combien de mains contiennent exactement 2 dames et 1 roi ? $\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{44}{2}$

2. Combien de mains contiennent au moins 3 rois ? $\binom{4}{3} \times \binom{48}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{48}{1}$

Exercice 2. Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = Card\ A$.

1. Combien y-a-t-il de parties X de E contenant A ?
   - Premier raisonnement combinatoire
     Chaque partie X de E contenant A peut avoir $p, p+1, p+2, \ldots, n$ éléments. Ainsi, si X contient A et a $(p+k)$ éléments avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-p\}$, les k éléments qui s'ajoutent à ceux de A seront choisis parmi les $(n-p)$ éléments de $E - A$. Le nombre de choix possible de k éléments parmi les (n-p) éléments est $C(n-p, k)$.
     Le nombre de parties X de E contenant A est alors :
     $\sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 1^k \times 1^{n-p-k} = (1+1)^{n-p} = 2^{n-p}$
   - Deuxième raisonnement combinatoire
     Chaque partie X de E contenant A est obtenue par la réunion de A et d'un sous-ensemble de $E - A$. Les sous-ensemble de $E - A$ constitutent son ensemble des parties $\mathcal{P}(E - A)$. Le nombre de sous ensembles de $E - A$ est donc 2^{n-p}, avec $Card(E - A) = n - p$. Donc la réponse cherchée est : 2^{n-p}.

2. Combien y-a-t-il de parties X de E à m éléments contenant A, $m \in \{p, \ldots, n\}$?
   On a $m = p + k$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-p\}$. Les k éléments qui s'ajoutent à ceux de A seront choisis parmi les $(n-p)$ éléments de $E - A$. Le nombre de choix possible de k éléments parmi les (n-p) éléments est $C(n-p, k)$.
   D'où le nombre de parties X de E à m éléments contenant A est alors : $C(n-p, m-p)$

3. Combien y-a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?
   Les éléments de $E - A$ qui s'ajoutent à A pour former X sont distincts de ceux qui s'ajoutent à A pour former Y car $X \cap Y = A$. Si X contient m éléments incluant ceux de A ($C(n-p, m-p)$ possibilités), alors Y peut contenir jusqu'à $(n-m)$ éléments en plus de ceux de A. On a donc $\sum_{i=0}^{n-m} C(n-m,i) = \sum_{k=0}^{n-m} C(n-m,k) 1^i 1^{n-m-i} = (1+1)^{n-m} = 2^{n-m}$ possibilités de constitution de Y connaissant les m éléments de X.
   Le nombre de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$ est alors :
   $\sum_{m=p}^{n} C(n-p, m-p) \times 2^{n-m} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 2^{n-(k+p)} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 2^{(n-p)-k} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 2^{(n-p)-k} \times 1^k = (2+1)^{n-p} = 3^{n-p}$

Exercice 3. Soit la relation : $k \times C(n,k) = n \times C(n-1,k-1)$

1. Démontrez la relation.
$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)! \times k(k-1)!}$.
En multipliant les deux membres par k puis en simplifiant le membre de gauche par k on a:
$k \times C(n,k) = \frac{n(n-1)!}{(n-k)! \times (k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k-1+1)! \times (k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]! \times (k-1)!} = n \times C(n-1,k-1)$

2. En déduire pour tout entier positif n, la somme :
$$C(n,1) + 2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)$$
$C(n,1) + 2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)$
$= n \times C(n-1,1-1) + n \times C(n-1,2-1) + \cdots + n \times C(n,k-1) + \cdots + n \times C(n-1,n-1)$
$= n(C(n-1,0) + C(n-1,1) + \cdots + C(n,k-1) + \cdots + C(n-1,n-1))$
$= n \times \sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,i)$
$= n \times \sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,i) \times 1^i \times 1^{n-1-i}$
$= n \times (1+1)^{n-1}$
$= n \times 2^{n-1}$

3. En déduire pour tout entier positif non nul n, la somme :
$$C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$$
$C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$
$= (2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)) - (C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
Or $2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n) = n \times 2^{n-1} - C(n,1)$,
donc $C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$
$= n \times 2^{n-1} - C(n,1) - (C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
$= n \times 2^{n-1} - (C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
$= n \times 2^{n-1} + C(n,0) - (C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
$= n \times 2^{n-1} + 1 - 2^n$
$= 1 + (n-2) \times 2^{n-1}$

Exercice 4. Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 400 qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 4 ?

$$400 - \left\lfloor \frac{400}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{400}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{400}{2 \times 3} \right\rfloor = 133$$

Exercice 5. Calculez le coe icient de x^4y^7 dans le développement de $(2x-y)^{11}$. $-\binom{11}{7} * 16 = -5280$

Exercice 6. *Dénombrement*

(1) Quel est le coefficient de $a^3b^4c^3$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$?
Dans le développement de
$$(a+b+c)^{10} = (a+b+c)(a+b+c)...(a+b+c)$$
on obtient un terme $a^3b^4c^3$ en choisissant trois a, quatre b et trois c.
Il y a $\binom{10}{3}$ choix possibles pour les facteurs dont viendront les a.
Après ce premier choix, il y a $\binom{7}{4}$ choix possibles pour les facteurs d'où viendront les b. Au total, il y a :
$$\binom{10}{3}\binom{7}{4} = 4200$$
termes $a^3b^4c^3$ dans ce développement.

(2) Même question avec $a_1^{k_1}a_2^{k_2} \dots a_p^{k_p}$ dans $(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)^n$.
De même, on obtient $\frac{n!}{\Pi_{i=1}^{p} k_i!}$ si $\sum_{i=1}^{p} k_p = n$ et 0 sinon.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note : $\sum_n^p$ le nombre de n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$.

1. Déterminer $\sum_n^0$, $\sum_n^1$, $\sum_n^2$, $\sum_1^p$, $\sum_2^p$.
   - $\sum_n^0 = 1$. Le seul n-uplet dont la somme des termes est zéro est : (0).
   - $\sum_n^1 = n$. Les n-uplets contiennent $n-1$ fois le chiffre 0 et seul chiffre 1. Il y a n façons de positionner le chiffre 1 dans un n-uplet.
   - $\sum_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$. Les n-uplets contiennent un seul chiffre 2 et $n-1$ zéros ou deux fois le chiffre 1 et $n-2$ zéros. Il y a n façons de positionner le chiffre 2 dans un n-uplet et il y a $C(n,2) = \frac{n(n-1)}{2}$ façons de positionner deux fois le chiffre 1 dans un n-uplet. Le nombre recherché est donc $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$
   - $\sum_1^p = 1$. On a (x_1) tel que $x_1 = p$. Le seul n-uplet possible est (p).
   - $\sum_2^p = p+1$. On a (x_1, x_2) tel que $x_1 + x_2 = p$. Soit $x_2 = p - x_1$ et $(x_1, x_2) = (x_1, p - x_1)$. Il y a $p+1$ façons de choisir x_1, soit $x_1 \in \{0, \dots, p\}$

     .
2. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n+1}^p = \sum_n^0 + \sum_n^1 + \dots + \sum_n^p$
   - Par définition, $\sum_{n+1}^p$ est le nombre de $(n+1)$-uplets tels que $x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} = p$. C'est donc le nombre de n-uplets tels $x_1 + x_2 + ... + x_n = p - x_{n+1}$, soit $\sum_n^{p - x_{n+1}}$ (par définition).
     On a $x_{n+1} \in \{0, \dots, p\}$, donc $p+1$ choix possibles de x_{n+1}.

     Par suite, $\sum_{n+1}^p = \sum_n^{p-0} + \sum_n^{p-1} + \dots + \sum_n^{p-(p-1)} + \sum_n^{p-p}$. D'où la relation.
   - Il est également possible de démontrer la relation par récurrence en montrant le cas de base comme suit :
     $\sum_1^0 + \sum_1^1 + \dots + \sum_1^p = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{(p+1) fois} = p+1$ car $\sum_1^k = 1$ avec comme seul uplet (k). De plus on a $\sum_2^p = p+1$ (question 1). Donc $\sum_2^p = \sum_1^0 + \sum_1^1 + \dots + \sum_1^p$.
3. En déduire que $\sum_n^p = C(n+p-1, p)$
   Preuve par induction :
   $\sum_1^p = 1 = C(p,p) = C(1-1+p, p)$. La relation est vraie pour $n = 1$.
   Supposons que $\sum_n^p = C(n+p-1, p)$ pour n quelconque $(n \geq 1)$.
   $\sum_{n+1}^p = \sum_n^0 + \sum_n^1 + \sum_n^2 + \dots + \sum_n^p$ (d'après la question 2)
   $\sum_{n+1}^p = C(n+0-1, 0) + C(n+1-1, 1) + C(n+2-1, 2) + \dots + C(n+p-1, p)$
   $\sum_{n+1}^p = C(n-1, 0) + C(n, 1) + C(n+1, 2) + \dots + C(n+p-1, p)$
   C(n-1,0)=C(n,0) donc $\sum_{n+1}^p = (C(n,0) + C(n,1)) + C(n+1,2) + \dots + C(n+p-1,p)$
   $\sum_{n+1}^p = (C(n+1,1) + C(n+1,2)) + \dots + C(n+p-1,p)$ car C(n,0) + C(n,1)=C(n+1,1)
   $\sum_{n+1}^p = C(n+2,2) + \dots + C(n+p-1,p)$
   De proche en proche on a $\sum_{n+1}^p = C(n+p-2, p-1) + C(n+p-1, p)$
   d'où $\sum_{n+1}^p = C(n+p, p)$
   On peut donc conclure que $\sum_n^p = C(n+p-1, p)$.

Exercice 8. Soit E un ensemble à n éléments. On appelle dérangement de E toute permutation de E ne laissant aucun élément invariant. On notera D_n le nombre de dérangements de E. On pose $D_0 = 1$.

1. Si E comporte un seul élément, y-a-t-il des dérangements de E ? En déduire D_1.
   Réponse : Pas de dérangement. $D_1 = 0$.
2. Si E comporte deux éléments, combien y-a-t-il de dérangements de E ? En déduire D_2.
   Réponse : 1 dérangement. $D_2 = 1$.
3. On suppose n quelconque, et on ecrit $E = \{a_1, ..., a_n\}$. Soit f une permutation de E. On suppose qu'elle laisse k éléments invariants. Combien y-a-t-il de telles permutations ? En déduire la formule suivante :
$$n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_k$$
   Réponse : Une permutation qui laisse k éléments invariants contient $(n-k)$ dérangements, soit D_{n-k}.
   Il y a $C(n,k)$ façons d'avoir k éléments invariants.
   Le nombre de permutations est donc $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k}$.
   Déduction : Le nombre de permutations de E est $n!$. On peut donc établir que $n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k}$.
   $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k} = C(n,0) \times D_n + C(n,1) \times D_{n-1} + \cdots + C(n,n-1) \times D_1 + C(n,n) \times D_0$

   En considérant que $C(n,k) = C(n,n-k)$, on a :
   $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k} = C(n,n) \times D_n + C(n,n-1) \times D_{n-1} + \cdots + C(n,1) \times D_1 + C(n,0) \times D_0$
   D'où $n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_k$.
4. En déduire D_3, D_4, D_5.
   Réponse : $D_3 = 2$ car $3! = \sum_{k=0}^{3} C(3,k) \times D_k$. En faisant une démarche analogue on obtient $D_4 = 9$, $D_5 = 44$.

Exercice 9. Marie possède cinq paires de gants et s'amuse à les porter de façon dépareillée ; tout d'abord, elle sépare les gants pour la main gauche des gants pour la main droite. Ensuite, elle numérote les gants pour la main gauche de 1 à 5 , et les gants pour la main droite de 1 à 5 (où la paire de gants assortis correspond au gant pour la main gauche n°x et au gant pour la main droite n°x). Finalement, pour chaque gant pour la main droite, elle choisit au hasard un gant pour la main gauche pour finir la paire.

1. À chaque numéro de gant pour la main gauche, on associe le numéro du gant pour la main droite avec lequel il est en paire. Combien y a t-il d'associations possibles ?
   Réponse : Une telle association correspond à une permutation de $\{1, ..., 5\}$. Il y a $5! = 120$ possibilités.
2. De combien de manières peut-on composer cinq paires de gants de sorte qu'aucune paire légitime ne soit reconstituée ?
   Réponse : Si aucune paire légitime n'est reconstituée, c'est qu'il y a un dérangement. Il y a $D_5 = 44$ possibilités (voir numéro précédent).
3. De combien de manières peut-on composer cinq paires de gants pour qu'une seule paire légitime soit reconstituée ?
   Réponse : Si une seule paire légitime est reconstituée, il y a 5 choix pour cette paire. Pour le reste, il faut un dérangement : il y a donc $5 \times D_4 = 45$ possibilités (voir numéro précédent).
4. De combien de manières peut-on composer cinq paires de gants pour qu'il y ait plus de paires illégitimes assorties que de paires légitimes ?
   Réponse :
   - On peut avoir trois (03) paires illégitimes et deux (02) paires légitimes. Or il y a $C(5,3) = 10$ choix de 2 paires légitimes parmi 5. Pour les 3 autres, il faut une association qui soit un dérangement D_3. On a donc : $10 \times D_3 = 20$ possibilités (voir numéro précédent).
   - On peut avoir quatre (04) paires illégitimes et une (01) paire légitime. Ce cas est traité dans la question précédente (question 3.). On a donc : $5 \times D_4 = 45$ possibilités (voir numéro précédent).
   - On peut avoir cinq (05) paires illégitimes et zéro (0) paire légitime. Ce cas est traité dans la question 2. On a donc : $D_5 = 44$ possibilités (voir numéro précédent).

   Le nombre d'associations où il y a plus de paires illégitimes que de paires légitimes est donc : 20 + 45 + 44 = 109.

Exercice 10. Parmi les permutations de l'ensemble E = {a, b, c, d, e, f} (que l'on peut représenter par les mots de 6 lettres qui contiennent exactement une fois chaque lettre de E), combien y en a-t-il qui ne contiennent ni ab ni cd ni ef ?

Première méthode

- Nombre de permutations qui contiennent ab.
  Pour une position fixe de ab, il y a : 4! possibilités de placer les autres lettres. Or il y a 5 positions possibles pour ab. Donc pour ab on a : $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent cd.
  Le raisonnement est analogue au cas de ab. D'où $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ef.
  Le raisonnement est analogue au cas de ab. D'où $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab et cd
  Pour une position fixe de ab et cd, il y a : 2! possibilités de placer les autres lettres. Il y a 5 positions possibles pour ab. Une fois ab placé, il y a 3, 2, 2, 2, 3 positions respectives pour cd. Soit 12 possibilités. Donc pour ab et cd on a : $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab et ef
  Le raisonnement est analogue au cas de ab et cd. D'où $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.

- Nombre de permutations qui contiennent cd et ef
  Le raisonnement est analogue au cas de ab et cd. D'où $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab, cd et ef
  Il y a $3! = 6$ possibilités de permutations.

Le résultat recherché est alors $6! - (3(5\times4!) - 3(12\times2!) + 3!) = 720 - 294 = 426$ possibilités de permutations.

Deuxième méthode

- Pour avoir ab seul on a : $5 \times 4! - 42$ possibilités. Pareil pour cd seul ou ef seul. Au total on a : $3(5 \times 4! - 42) = 234$ possibilités.
- Pour avoir ab et cd ensemble et sans ef on a : 18 possibilités. Pareil pour cd et ef sans ab puis ab et ef sans cd. Au total on a : 54 possibilités.
- Pour avoir ab, cd et ef ensemble on a : 6 possibilités.

Le résultat recherché est alors $6! - 3(5 \times 4! - 42) - (3 \times 18) - 6 = 426$ possibilités de permutations.

Exercice 11. Un mot long de n lettres compte l lettres différentes. La $i^{\grave{e}me}$ lettre apparaît n_i fois dans le mot, donc on a :

$$\sum_{i=1}^{l} n_i = n$$

Combien d'anagrammes du mot peut-on écrire ?

- Si on considère toutes les lettres comme distinctes, même lorsqu'il s'agit de la même lettre de l'alphabet, il y a $n!$ permutations. Chaque anagramme a une ou plusieurs permutations qui permet(tent) de l'obtenir.
- Quel que soit l'anagramme considéré, le nombre de permutations associées est $\prod_{i=1}^{l}(n_i!)$ (faire un exemple si nécessaire).

Donc il y a $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{l} n_i!}$ anagrammes.

Exercice 12. On considère le mot MORPHEUS.

1. Dénombrer les anagrammes du mot. $8\,!$
2. Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot :
   2.1. commençant et finissant par une voyelle ;
   $6 \cdot 6!$
   2.2. commençant et finissant par une consonne ;
   $20 \cdot 6!$
   2.3. commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
   $15 \cdot 6!$
   2.4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne. $15 \cdot 6!$

Exercice 13. Résoudre les relations de récurrence suivantes :

1. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$; $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$
   Réponse : $a_n = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$
2. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$
   Réponse : $a_n = (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$
3. $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$; $a_0 = 1$ et $a_1 = 3$
4. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + 6a_{n-3}$; $a_0 = 1$, $a_1 = -4$ et $a_2 = -4$
5. $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3}$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$
   Réponse : $a_n = (2 + \frac{3n}{2}) \times 2^n - 2 \times 3^n$

Exercice 14. Donner un ordre de grandeur asymptotique pour $T(n)$.

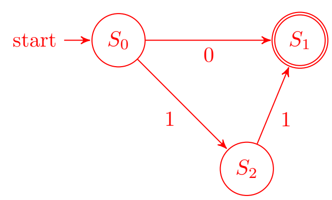
1. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$. Réponse : $\mathrm{O}(n^3)$
2. $T(n) = 8T(n/2) + n^2$. Réponse : $\mathrm{O}(n^3)$
3. $T(n) = 2T(n/4) + n^2$.

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

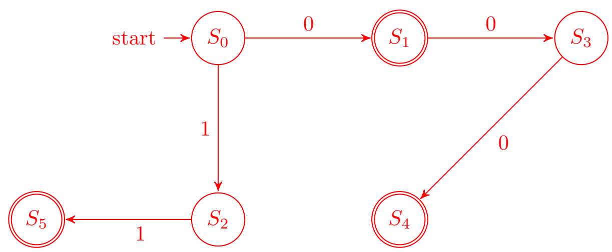
TD 9-10 : THÉORIE DES LANGAGES ET AUTOMATES

Exercice 1. Trouvez un automate fini qui reconnaît :

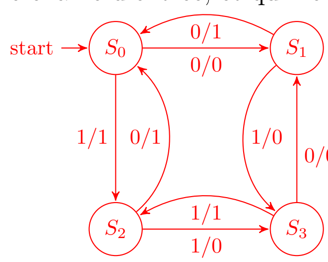
a. $\{0, 11\}$



b. $\{0, 11, 000\}$



Exercice 2. Construisez une machine à états finis qui modifie les bits en position d'indice pair, en commençant par le deuxième bit, d'une chaîne d'entrée, et qui ne modifie pas les autres lettres.



Exercice 3. Soit $V = \{S, A, B, a, b\}$ et $T = \{a, b\}$. Trouvez le langage produit par la grammaire $\{V, T, S, P\}$ lorsque l'ensemble P des productions est composé de :

a. $S \to AB,\ A \to ab,\ B \to bb$ Réponse : $L = \{abbb\}$

b. $S \to AB,\ S \to aA,\ A \to a,\ B \to ba$ Réponse : $L = \{aba, aa\}$

c. $S \to AB,\ S \to AA,\ A \to aB,\ A \to ab,\ B \to b$ Réponse : $L = \{abb, abab\}$

d. $S \to AA,\ S \to B,\ A \to aaA,\ A \to aa,\ B \to bB,\ B \to b$ Réponse : $L = \left\{b^{n+1}, a^{2n+2m+4}\right\}$

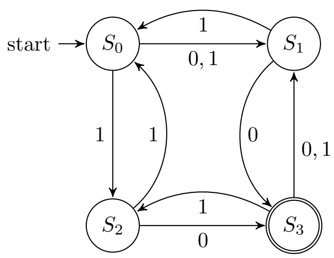
e. $S \to AB,\ A \to aAb,\ B \to bBa,\ A \to \lambda,\ B \to \lambda$ Réponse : $L = \{a^n b^{n+m} a^m\}$

Exercice 4. Construisez une grammaire syntagmatique pour l'ensemble de toutes les fractions de la forme a/b, où a est un entier signé en notation décimale et b est un entier positif. Construisez un arbre de dérivation pour $+311/17$ dans cette grammaire.

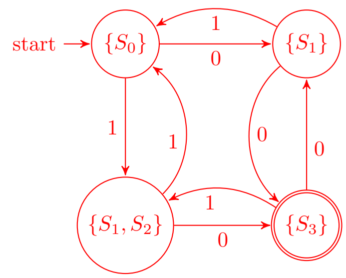
Réponse :

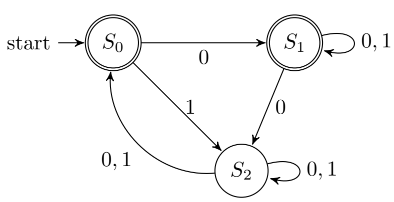
S → signe numérateur/dénominateur
signe → + | -
dénominateur → chiffreNonNul nombre
chiffreNonNul → 1|2|3|4|5|6|7|8|9
nombre → chiffre nombre
nombre → ϵ
chiffre → chiffreNonNul | 0
numérateur → chiffre nombre
NB : En ajoutant une epsilon-transition, on donne la possibilité à l'automate, de passer d'un état à un autre spontanément sans lire de lettre.

Exercice 5. Pour chacun des automates ci-après, donnez un automate déterministe correspondant.

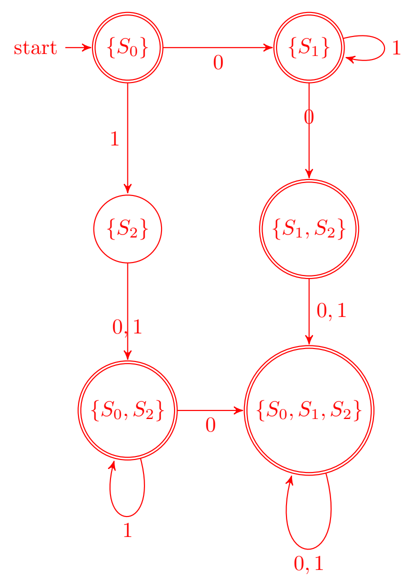


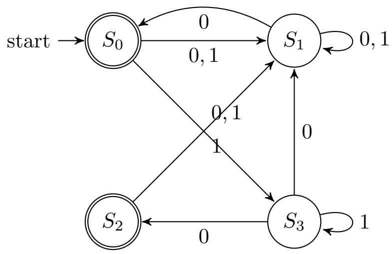
États	f	
	I	
	0	1
$\{S_0\}$	$\{S_1\}$	$\{S_1, S_2\}$
$\{S_1\}$	$\{S_3\}$	$\{S_0\}$
$\{S_1, S_2\}$	$\{S_3\}$	$\{S_0\}$
$\{S_3\}$	$\{S_1\}$	$\{S_1, S_2\}$



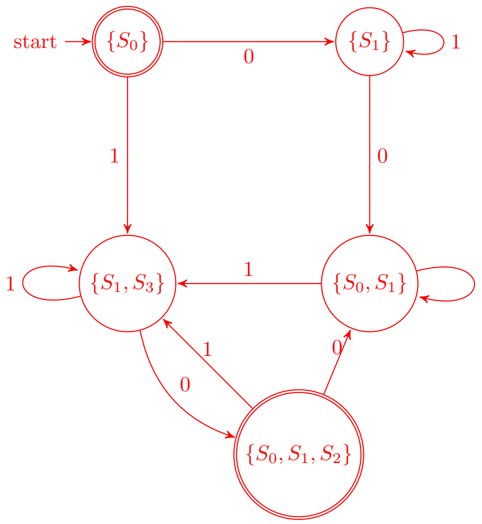


États	f	
	I	
	0	1
$\{S_0\}$	$\{S_1\}$	$\{S_2\}$
$\{S_1\}$	$\{S_1, S_2\}$	$\{S_1\}$
$\{S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$
$\{S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$
$\{S_0, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$
$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$





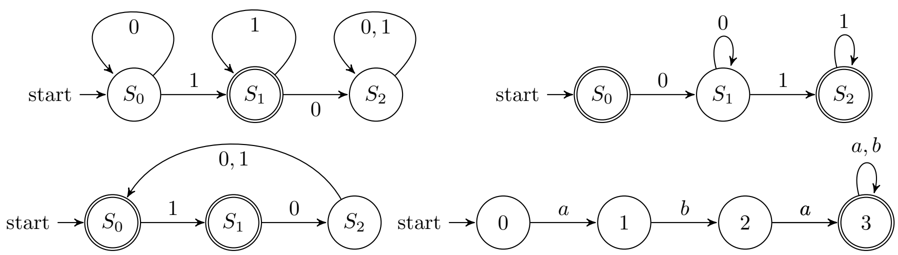
États	f	
	I	
	0	1
$\{S_0\}$	$\{S_1\}$	$\{S_1, S_3\}$
$\{S_1\}$	$\{S_0, S_1\}$	$\{S_1\}$
$\{S_1, S_3\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_1, S_3\}$
$\{S_0, S_1\}$	$\{S_0, S_1\}$	$\{S_1, S_3\}$
$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1\}$	$\{S_1, S_3\}$



Exercice 6. Déterminez si 1011 appartient à chacun des ensembles réguliers ci-après.

a. 10^*1^* - Réponse : Oui.
b. $0^*(10 \cup 11)^*$ - Réponse : Oui.
c. $0(01)^*1^*$ - Réponse : Non.
d. $1^*01(0 \cup 1)$ - Réponse : Oui.
e. $(10)^*(11)^*$ - Réponse : Oui.
f. $1(00)^*(11)^*$ - Réponse : Non.
g. $(10)^*1011$ - Réponse : Oui.
h. $(1 \cup 00)(01 \cup 0)1^*$ - Réponse : Oui.

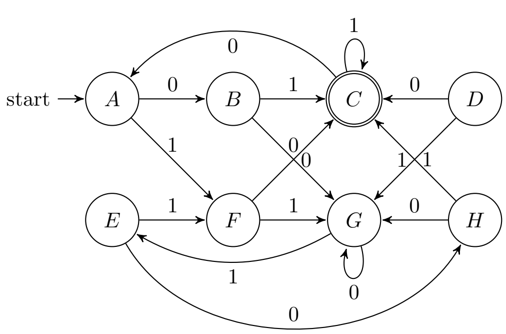
Exercice 7. Trouvez le langage reconnu par chacun des automates finis non déterministes.

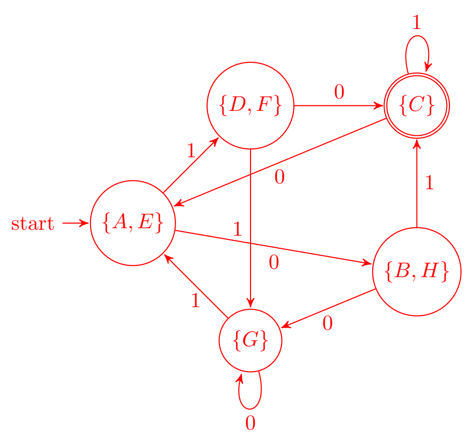


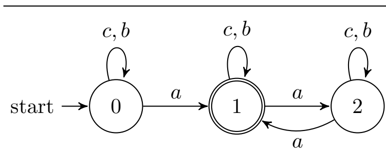
Réponse :

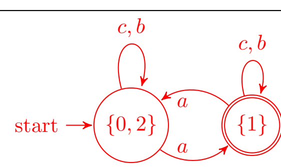
a. 0^*1^+
b. $\epsilon \cup 0^+1^+$
c. $(10(0 \cup 1))^* \cup (10(0 \cup 1)1)^*1 = (10(0 \cup 1))^*(\epsilon \cup 1)$

Exercice 8. Minimisez les automates :









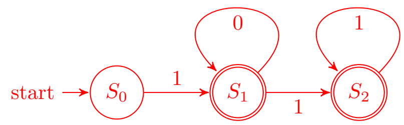
Exercice 9. Donnez des grammaires syntagmatiques pour produire chacun des ensembles suivants :

1. $\{01^n\}$
$S \to 0A$
$A \to 1A,\ \lambda$

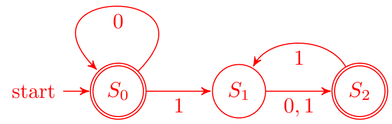
2. $\{0^n 1^{2n}\}$
   $S \to 0A11,\ \lambda$
   $A \to 0A11,\ \lambda$
3. $\{0^n 1^m 0^n\}$
   $S \to \lambda,\ 0A0,\ 1B$
   $A \to 0A0,\ 0B0$
   $B \to 1B,\ \lambda$

Exercice 10. Construisez les automates correspondant aux expressions ci-après.

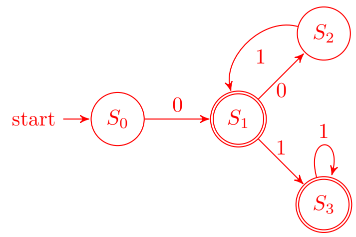
a. 10^*1^*



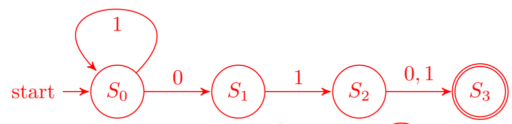
b. $0^*(10+11)^*$



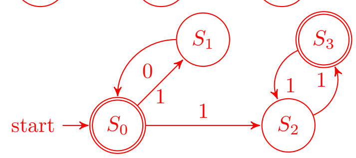
c. $0(01)^*1^*$



d. $1^*01(0+1)$



e. $(10)^*(11)^*$



Exercice 11. Prouvez que le langage $L = \{a^n b^n c^n; n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier.

Solution

Supposons que le langage L est régulier. Il vérifie donc le lemme de pompage.

Soit p l'entier du lemme de pompage, $z = a^p b^p c^p$ un mot du langage L. Il existe une décomposition $z = uvw$, avec $u = a^k$, $v = a^t$, $w = a^{p-k-t}b^p c^p$. De plus $k + t \leq p$ (car $|uv| \leq p$), $t > 0$ (car $v \neq \epsilon$).

D'après le lemme de pompage, $\forall i \geq 0$, $uv^i w \in L$.

pour $i = 0$ on a : $uv^i w = a^k (a^t)^0 a^{p-k-t} b^p c^p = a^k a^{p-k-t} b^p c^p = a^{p-t} b^p c^p$

Puis que $t > 0$, $p - t < p$. Donc $uv^i w \notin L$. Absurde.

Exercice 12. *Lemme de pompage*

Soit L le langage constitué de tous les palindromes. Montrez que L n'est pas régulier.

Supposons L régulier. Soit p l'entier du lemme de pompage.

Quel que soit $m \in L$ avec $|m| \geq p$, il existe une décomposition uvw de m telle que $|uv| \leq p$, $v \neq \lambda$ et $\forall i \in \mathbb{N}, uv^i w \in L$.

Il suffit donc de prendre un mot dans L (puisque le lemme s'applique quel que soit le mot) et de montrer qu'aucune décomposition de ce mot ne respecte les trois conditions à la fois (puisque le lemme dit qu'il en existe une).

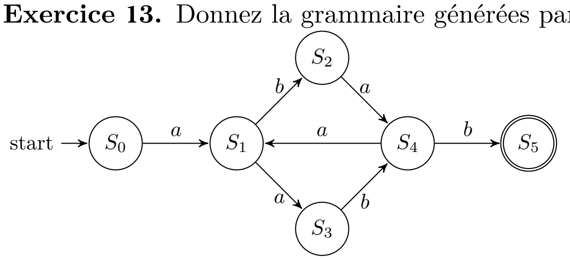
Posons $m = a^p b a^p$. m est un palindrome de longueur $2p + 1 \geq p$.

Ses décompositions uvw respectant les deux premières conditions sont de la forme : $u = a^j, v = a^k, w = a^{p-j-k} b a^p$ avec $j + k \leq p, k \geq 1$.

Pour $i = 2$:
$$\begin{aligned} uv^2 w &= a^j a^{2k} a^{p-j-k} b a^p \\ &= a^{p+k} b a^p \text{ qui n'est pas un palindrome puisque } k \neq 0 \end{aligned}$$

Donc L n'est pas régulier.

Exercice 13. Donnez la grammaire générées par le langage reconnu par les automates suivants :



$S \to aA$
$A \to bC \mid aB$
$B \to bD$
$C \to aD$
$D \to aA \mid b$

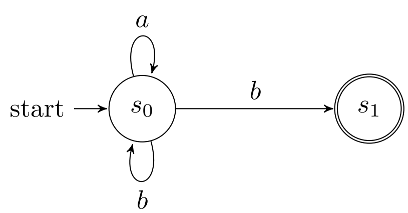
Exercice 14. Soit les grammaires G_1 et G_2 définies par :

a. $G_1 = (V_1, T_1, S_1, P_1)$ où $V_1 = \{a, b, S_1, A\}$, $T_1 = \{a, b\}$, S_1 symbole de départ et $P_1 = \{S_1 \to bS_1,\ S_1 \to aS_1,\ A \to aS_1,\ A \to bA,\ A \to a,\ S_1 \to b\}$.

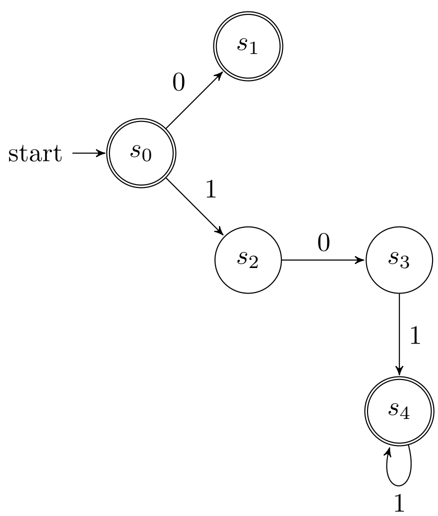
b. $G_2 = (V_2, T_2, S_2, P_2)$ où $V_2 = \{0, 1, S_2, A, B\}$, $T_2 = \{0, 1\}$, S_2 symbole de départ et $P_2 = \{S_2 \to 1A,\ S_2 \to 0,\ S_2 \to \lambda,\ A \to 0B,\ B \to 1,\ B \to 1B\}$.

1. Déterminez les types des grammaires G_1 et G_2. Type 3
2. Construisez les automates finis reconnaisant les langages produits par les grammaires G_1, G_2.

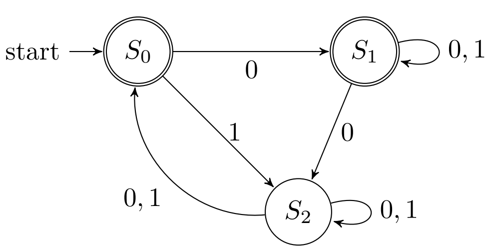
   2.a. $\{(b \cup a)^* b\}$

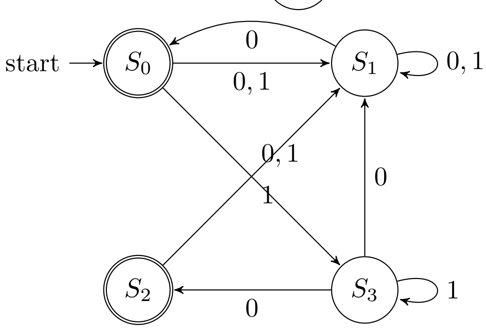


   2.b. $\{0, \lambda, 1011^*\}$



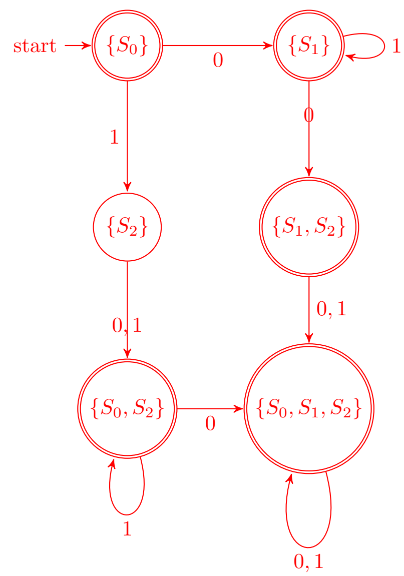
Exercice 15. Donnez les automates déterministes correspondant aux automates ci-après.





Premier automate :

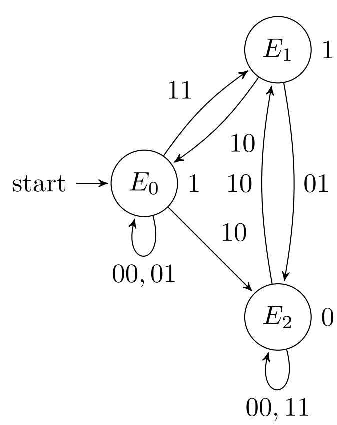
États	f	
	I	
	0	1
$\{S_0\}$	$\{S_1\}$	$\{S_2\}$
$\{S_1\}$	$\{S_1, S_2\}$	$\{S_1\}$
$\{S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$
$\{S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$
$\{S_0, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_2\}$
$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$	$\{S_0, S_1, S_2\}$



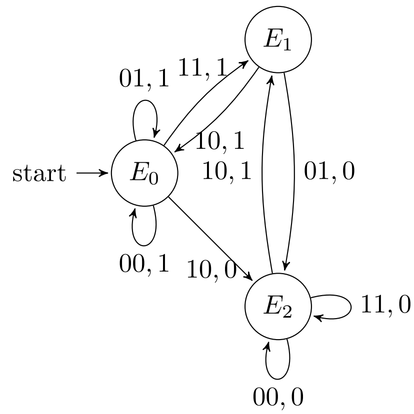
Exercice 16. Soit la table d'états suivante :

$E_p \| e_1e_2$	00	01	11	10	S
E_0	E_0	E_0	E_1	E_2	1
E_1		E_2		E_0	1
E_2	E_2		E_2	E_1	0

a. S'agit-il d'une machine de Moore ou de Mealy ? Moore
b. Donner son diagramme d'états.



c. Convertir en Moore s'il s'agit d'une machine de Mealy, en Mealy s'il s'agit d'une machine de Moore.



Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 11 (page 625) ; 10, 17 (page 634) ; 8 (page 655).