TD 5 : INDUCTION, RECURSIVITÉ
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. Récursivité

Exercice 1. Donnez une définition récursive de l'ensemble des entiers positifs congrus à 3 modulo 7 ou congrus à 5 modulo 7.
$a_0 = 3$; $a_1 = 5$; $a_{n+2} = a_n + 7$

Exercice 2. Construire un algorithme récursif qui calcule $n \cdot x$ lorsque n et x sont des entiers positifs.

```
procedure(n,x)
  si x = 0 ou n = 0
    procedure(n,x):=0
  sinon
    procedure(n,x):=x+procedure(n-1,x)
```

Exercice 3. Donnez une définition récursive de la suite a_n.

1. $a_n = 2n + 1$ Réponse : $a_0 = 1$; $a_{n+1} = a_n + 2$
2. $a_n = 3 - 2^n$ Réponse : $a_0 = 2$; $a_{n+1} = 2a_n - 3$. Indication : Utiliser la suite $b_n = a_n - 3$.
3. $a_n = 2^{2^n}$ Réponse : $a_0 = 2$; $a_{n+1} = a_n^2$
4. $a_n = \frac{n^2-n+2}{2}$ Réponse : $a_0 = 1$; $a_{n+1} = a_n + n$

Exercice 4. Démontrez que la somme des n premiers entiers impairs est égale à n^2.
On peut remarquer que cette somme correspond à une suite arithmétique de raison 2.
On pose que cette suite soit $u_n = 2n + 1$. Dès lors le premier terme $u_0 = 1$ et le dernier terme serait $u_{n-1} = 2n - 1$.
On sait que la somme S_n d'une suite arithmétique u_n ayant n termes est: $S_n = (n)\frac{u_0+u_{n-1}}{2}$ où u_0 est le premier terme et u_{n-1} le dernier terme
On en déduit que cette somme est $s_n = (n)\frac{1+2n-1}{2} = n^2$.

Exercice 5. Démontrez que $n < 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit la proposition $Q(n)$ définie par : $n < 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Etape de base : vérifions la condition pour $n = 0$
   On a $0 < 2^0 = 1$ vrai
3. Etape inductive : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ $Q(n)$ est vrai. Montrons que $Q(n + 1)$ est vrai.
   On sait que $n < 2^n$. En particulier $1 \leq 2^n$. Donc on en déduit que $n+1 < 2^n+2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$.
   D'où $Q(n + 1)$ vrai.

Exercice 6. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer par induction que:$16|(3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n)$

1. Soit Q(n) la proposition 16 divise $(3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n)$
2. Etape de base : vérifions la condition pour $n = 0$

3. Etape inductive : supposons que $Q(n)$ est vrai et montrons que $Q(n+1)$ vrai
Posons $u_n = 3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n$. On en deduit que $u_{n+1} = 9u_n + 32n + 4(5^{n+2} - 1)$. Ainsi, il suffit de prouver que $5^{n+2} - 1$ divisble par 4.
On sait que $5 = 4 + 1$.
Alors $5^{n+2} = (4+1)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} 4^{n+2-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k} 4^{n+2-k} + 1$. Le résultat découle du fait que $5^{n+2} - 1 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k} 4^{n+2-k}$ qui est divisible par 4.
Note: on peut aussi démontrer que $4|(5^{n+2} - 1)$ par induction.

2. Fermeture des relations

Exercice 7. Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ par : $\{(1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 5)\}$.

1. Dessiner le graphe de la relation $\mathcal{R}$.
2. Donner la matrice de la relation $\mathcal{R}$.
3. Donner la fermeture réflexive de $\mathcal{R}$.
4. Donner la fermeture symétrique de $\mathcal{R}$.
5. Donner la fermeture transitive de $\mathcal{R}$.

Exercice 8. On considère les trois ensembles $A = \{2, 3, 4, 6\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{0, 3, 5\}$ et deux relations $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ et $\mathcal{S} \subseteq B \times C$ définies par : $\mathcal{R} = \{(4, a), (6, a), (6, b), (4, c), (6, c)\}$ et $\mathcal{S} = \{(a, 0), (b, 5), (c, 5), (d, 3)\}$

1. Donner la matrice de la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

$$M_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Donner la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ sous forme d'un ensemble de couples.
   $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(4, 0), (6, 0), (6, 5), (4, 5)\}$

Exercice 9. Soit la relation $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par : $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, a \times b \leq a + b\}$.

1. Donner la relation $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ sous forme d'un ensemble
   $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$. Il suffit de prendre $b = 1$
2. En déduire que $\mathcal{R} \circ (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 2, 4, 5, 8 (page 197) ; 35 (page 198) ; 18, 21 (page 205) ; 29 (page 214) ; 40 (page 215)