LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 4 : FONCTIONS - NOTATION ASYMPTOTIQUE - SUITES ET INDUCTION MATHÉMATIQUE
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. Fonctions

Exercice 1. Soient A, B et C trois ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to C$.

1. On suppose $g \circ f$ injective ; montrer que f est injective. g est-elle obligatoirement injective ?
   Solution : Si $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$, on a $g(f(x)) = g(f(y))$, ce qui n'est pas possible. La fonction g n'est pas forcément injective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective ; montrer que g est surjective. f est-elle obligatoirement surjective ?
   Solution : L'image de $g \circ f$ est un sous-ensemble de l'image de g ; donc, si l'image de g n'est pas C tout entier, $g \circ f$ n'est pas surjective. La fonction f n'est pas forcément surjective.
3. On suppose $g \circ f$ bijective. Que peut-on dire de f et g ? Sont-elles bijectives ?
   Solution : On sait seulement que f est injective et que g est surjective. Elles ne sont pas forcément bijectives.

Exercice 2. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^3 - 2$. **Solution :**

(1) Calculer $f \circ g$.
$f \circ g(x) = 2x^3 - 3$.

(2) Calculer g^{-1}.
$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 2}$.

2. Notation asymptotique

Exercice 3. Trouver le plus petit entier n pour lequel $f(x) \in \mathcal{O}(x^n)$ pour chacune des fonctions suivantes, en déterminant des constantes C et k.

a. $f(x) = 4x^2 + 2x^4 + 5$
   $n = 4\,, C = 3\,, k = \sqrt{5}$

b. $f(x) = \frac{x^3+8}{5x^2+3x}$
   $n = 1\,, C = \frac{1}{5}\,, k = \sqrt{\frac{40}{3}}$

c. $f(x) = 3x^3 - x^2\ log(x)$
   $n = 3\,, C = 3\,, k = 0$

d. $f(x) = 4x^4 - 4\ log^3(x)$
   $n = 4\,, C = 4\,, k = 0$

Exercice 4. Soit la fonction $f : n \to \left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \cdot (2 + \cos(n))$ définie sur $\mathbb{N}$. Prouver que :

$$f \in \Theta\left(\frac{n^3}{\log(n)}\right)$$

(Θ : grand theta)

Solution :

- $2 + \cos(n) \geq 1$ et $\frac{n^3}{\log(n)} \in \mathcal{O}\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right)$ (prendre par exemple $C = 1\,, k = 2$) donc $\frac{n^3}{\log(n)} \in \mathcal{O}\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \cdot (2 + \cos(n))$

- $\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \in \mathcal{O}(\frac{n^3}{\log(n)})$ (prendre par exemple $C = 10^6 + 1$, $k = 2$)
  et $2 + \cos(n) \leq 3$ donc il suffit de prendre $C = (10^6 + 1) * 3$ et toujours $k = 2$ pour trouver un couple qui convient pour montrer que : $\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \in \mathcal{O}(\frac{n^3}{\log(n)})(2 + \cos(n))$.

Donc $f \in \Theta\left(\frac{n^3}{\log(n)}\right)$

Exercice 5. Sur une échelle croissante, classer les fonctions suivantes selon leur comportement asymptotique.

a. $f_1(n) = 2\sqrt{n}$
b. $f_2(n) = \frac{n^4}{6}$
c. $f_3(n) = e^n$
d. $f_4(n) = \sqrt{log(n)}$
e. $f_5(n) = n\log(n)$
f. $f_6(n) = e^{-n}$

$e^{-n} \ll \sqrt{\log(n)} \ll 2\sqrt{n} \ll n\log(n) \ll \frac{n^4}{6} \ll e^n$

3. Suites et induction mathématique

Exercice 6. À 14h durant l'été, sous une température avoisinant 35°C, on dépose un morceau de viande sur un comptoir. Le morceau de viande contient 50 bactéries. On fait l'hypothèse que dans ces conditions, le nombre de bactéries double toutes les 15 minutes.
Soit $\mathcal{U}_n$ est le nombre de bactéries à un moment déterminé, $\mathcal{U}_{n+1}$ le nombre de bactéries 15 minutes plus tard.

1. Préciser la nature et la raison de la suite $(\mathcal{U}_n)$.

2. Exprimer $\mathcal{U}_n$ en fonction de n.

3. Calculer le nombre de bactéries à 16h.

4. En supposant que les conditions ne changent pas, à quelle heure (arrondie au quart d'heure supérieur) aurait-on 100 000 bactéries sur le morceau de viande ?

Exercice 7. Donnez une définition récursive de la suite a_n.

1. $a_n = 2n - 1$
2. $a_n = 3 - 2^n$
3. $a_n = 2^{2^n}$
4. $a_n = \frac{n^2-n+2}{2}$

Exercice 8. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} < \frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Solution : Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}$.

Pour $n = 1$: $u_1 = \frac{1}{2}$, et on a bien : $\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Supposons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} < u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

On a : $u_{n+1} = \frac{1\cdot3\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdots(2n+2)} = u_n \frac{2n+1}{2n+2}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = u_{n+1}$.
Vérifions que $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n+2}}{2n+3}$. Autrement dit, $2n+3 > 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \iff (2n+3)^2 > 4(n+1)(n+2)$
Soit $4n^2 + 12n + 9 > 4n^2 + 12n + 8$ vrai.
Donc $u_{n+1} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n+2}}{2n+3}$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$u_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}$.
Vérifions que $\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$. Autrement dit, $\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3} < 2n+2 \iff (2n+1)(2n+3) < (2n+2)^2$.

Soit $4n^2 + 8n + 3 < 4n^2 + 8n + 4$ vrai.
Donc $u_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$.

On a établi l'encadrement voulu à l'ordre $n + 1$.
On conclut, par récurrence sur n, à l'encadrement demandé.

Exercice 9. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 2$, $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+U_n}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, On a $1 \leq U_n \leq 2$.

Solution : Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 2$.

(1) Étape de base : $U_0 = 2$; $1 \leq 2 \leq 2$, donc $1 \leq U_0 \leq 2$. $P(0)$ est vraie.

(2) Étape inductive : Supposons jusqu'au rang n que $P(n)$ est vraie.

(3) $1 \leq U_n \leq 2 \iff 2 \leq 1 + U_n \leq 3 \iff \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{1}{2} \iff 1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+U_n} \leq 1 + \frac{1}{2} \iff 1 \leq 1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+u_n} \leq 1 + \frac{1}{2} \leq 2 \iff 1 \leq U_{n+1} \leq 2$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie. En supposant jusqu'au rang n que $P(n)$ est vraie, on a $P(n + 1)$ qui est vraie. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq U_n \leq 2$.

Exercice 10. Pour tout réel x et pour tout entier positif non nul n on a :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

En utilisant la notion d'itération, donner l'algorithme d'une fonction qui calcule $S_n(x)$.

Exercice 11. La fonction d'Ackermann est une fonction récursive à deux paramètres entiers définie par :

$$f(n\,,m) = \begin{cases} m+1 & Si\ n = 0 \\ f(n-1, 1) & Si\ n \geq 1\ et\ m = 0 \\ f(n-1, f(n, m-1)) & Si\ n \geq 1\ et\ m \geq 1 \end{cases}$$

1. Calculer $f(1\,,0)\,, f(2\,,0)\,, f(3\,,0)$ Réponse : $f(1\,,0) = 2\,; f(2\,,0) = 3\,; f(3\,,0) = 5$
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\,, f(1\,,k) = k+2$ Indication : Preuve par induction
   - Vrai pour k=0
   - Supposons que la propriété est vraie au rang k.
     Montrons qu'elle est vraie au rang k+1.

$$\begin{aligned} f(1, k+1) &= f(0, f(1, k)) \\ &= f(1, k) + 1 \\ &= k + 2 + 1 \text{ d'après la propriété de récurrence} \qquad = (k+1) + 2 \end{aligned}$$

3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\,,\, f(2\,,k) = 2k+3$ Indication : Preuve par induction
   - Vrai pour k=0
   - Supposons que la propriété est vraie au rang k.
     Montrons qu'elle est vraie au rang k+1.

$$\begin{aligned} f(2,k+1) &= f(1,f(2,k)) \\ &= f(2,k)+2 \text{ d'après 2.} \\ &= 2k+3+2 \text{ d'après la propriété de récurrence} \qquad = 2(k+1)+3 \end{aligned}$$

4. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\,,\, f(3\,,k) = 2^{k+3}-3$ Indication : Preuve par induction
   - Vrai pour k=0
   - Supposons que la propriété est vraie au rang k.
     Montrons qu'elle est vraie au rang k+1.

$$\begin{aligned} f(3,k+1) &= f(2,f(3,k)) \\ &= 2f(3,k)+3 \text{ d'après 3.} \\ &= 2(2^{k+3}-3)+3 \text{ d'après la propriété de récurrence} \qquad = 2^{(k+1)+3}-3 \end{aligned}$$

4. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2 (pages 64) ; 15, 18, 20, 24 et 26 (pages 65) ; 8, 9 et 14 (pages 73) ; 26 et 27 (pages 83) ; 2, 4, 5, 8 (page 197) ; 18, 21 (page 205) ; 40 (page 215).