SÉANCE DE RÉVISION
AUTOMNE 2019

Exercice 1. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ tel que $fofof = f$. Montrez que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

Exercice 2. Soient E un ensemble à n éléments. Soit X une partie de E à p éléments.

a. Combien y a t-il de parties Y de E disjointes de X ?
b. Combien y a t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?

Exercice 3. Prouvez que le langage $L = \{w \in \{a, b, c\}^* : w = w^R\}$ n'est pas régulier.
Rappel : si $w = a_1a_2 \dots a_n$ alors $w^R = a_na_{n-1} \dots a_2a_1$

Exercice 4. Démontrez que le langage $L = \{a^{4i}b^j | i \leq j\} \subseteq \{a, b\}^*$ n'est pas régulier.

Exercice 5. Pour un problème donné, on a une solution directe en $\Theta(n^3)$. On a aussi trouvé deux solutions de type diviser pour règner.Lesquelles choisir ?

a. Découper le problème de taille n en 2 sous-problèmes de taille $n/2$, et les recombiner en temps $\Theta(n^2)$.
b. Découper le problème de taille n en 4 sous-problèmes de taille $n/3$, et les recombiner en temps $\Theta(\sqrt{n})$.

Exercice 6. Deux algorithmes A et B passent respectivement $T_A(n) = c_A.n.log_2(n)$ et $T_B(n) = c_B.n^2$ microsecondes, respectivement, pour résoudre un problème de taille n. Trouvez le meilleur des deux algorithmes pour résoudre un problème de taille $n = 2^{20}$ sachant que A passe 10 microsecondes (μs) pour $n = 1024$ et B passe 1μs pour $n = 1024$.

Exercice 7. Soit la fonction récursive
$$\begin{cases} F_0 = 2 \\ F_n = F_{n-1} \times F_{n-1} \; si \; n > 0 \end{cases}$$

a. Montrez par récurrence que $F_n = 2^{2^n}$.
b. On s'intéresse au nombre $m(n)$ de multiplications effectuées pour calculer F_n. $m(n)$ est la solution de l'équation de récurrence ci-dessous. Montrez par récurrence que $m(n) = 2^n - 1$.
$$\begin{cases} m(n) = 0 \\ m(n) = 1 + 2 \times m(n-1) \; si \; n > 0 \end{cases}$$
c. Quelle est la complexité de F_n si elle s'implémente comme suit :

```
fonction F(n : entier) : entier
si n = 0
alors
    retourner(2)
sinon
    retourner(F(n-1) x F(n-1))
fin si
```

Exercice 1. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. On définit sur l'ensemble produit $E \times E$ la relation $\mathcal{R}$:

$$(p,q)\mathcal{R}(p',q') \text{ si } p-p' \text{ est pair et } q-q' \text{ est divisible par } 3$$

1. Donnez le cardinal de $E \times E$.
2. Vérifiez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On désigne par $\overline{(p,q)}$ la classe d'équivalence de (p,q).
3. Combien y a-t-il de classes d'équivalence différentes ? Donnez leur liste.
4. Calculez le nombre d'éléments des classes suivantes : $\overline{(1,1)}$, $\overline{(1,2)}$, $\overline{(1,3)}$.
5. Soit $q \in E$. Montrez que, si $(x,y) \in \overline{(1,q)}$ alors $(x+1,y) \in \overline{(2,q)}$.
6. Montrez que, pour tout $q \in E$, l'application f de $\overline{(1,q)}$ dans $\overline{(2,q)}$ définie par $f(x,y) = (x+1,y)$ est une bijection.
7. Déterminez le cardinal de chaque classe d'équivalence. Comparez avec la question 1.

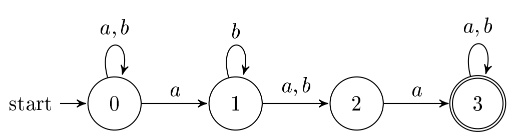
Exercice 2. Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g_1, g_2 : F \to G$.
On suppose f surjective et $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrez que $g_1 = g_2$.

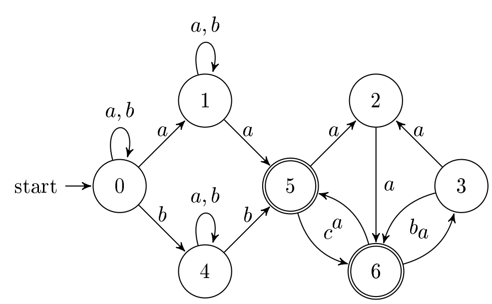
Exercice 3. Montrez que pour tout $n > 2$, $n^2 > n$.

Exercice 4. Le 1er Janvier 2014, une ville A compte 50000 habitants. On admet que chaque année, sa population augmente de 1.5%. On désigne par P_n sa population le 1er Janvier de l'annéee $2014+n$. Ainsi, $P_0 = 50000$.

1. Calculez P_1, P_2, P_3.
2. Quelle est la nature de la suite $(P_n)n \in \mathbb{N}$?
3. Exprimez P_n en fonction de n.
4. Déterminez à partir de quelle année la population de la ville aura doublé.

Exercice 5. Déterminisez les quatre automates suivants:





Exercice 6. On donne l'automate dont la table de transition est la suivante :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	B	C	D	E	F	G	H	I	A	G
1	E	F	H	H	I	B	B	C	E	E

A est l'état initial. C, F, I sont les états finaux.

1. Déssinez l'automate.
2. Trouvez l'automate minimal équivalents.

Exercice 7. Construisez les automates correspondants aux langages suivants :

1. a((a + b)(a + b))*b
2. (a + b)*(aa + bb)(a + b)*
3. (aaa + aaaaa)*

Exercice 8. Soit la grammaire $G = (V, T, S, P)$, avec $V = \{S, B, a, b\}$, $T = \{a, b\}$, $P = \{S \to aS,\ S \to bB,\ S \to \epsilon,\ S \to a,\ B \to aS,\ B \to bB,\ B \to a\}$.
Construisez l'automate M tel que $L(G) = L(M)$.

Exercice 9. Donnez les grammaires générées par les langages reconnus par les automates suivants :