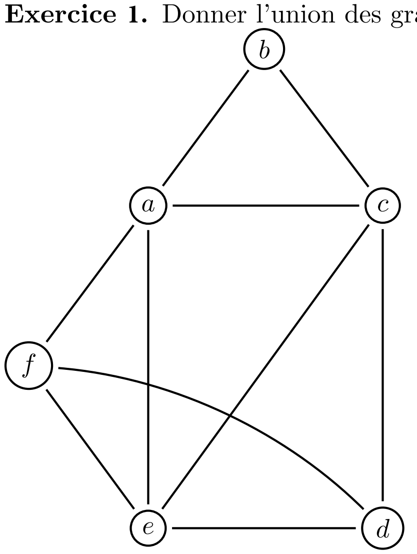
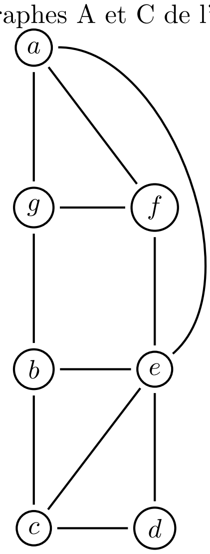

TD 5 : GRAPHES

1. Graphes

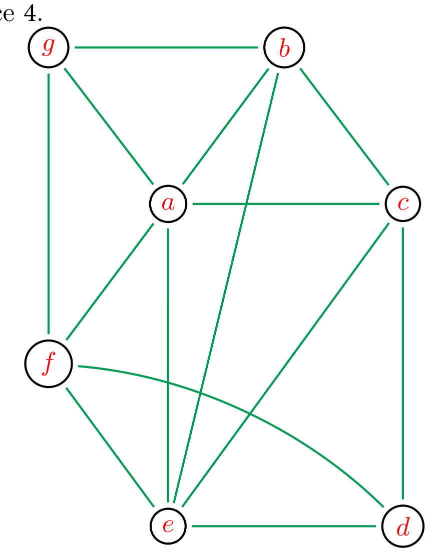
Exercice 1. Donner l'union des graphes A et C de l'exercice 4.



A



C



A ∪ C

Exercice 2. Ecrire la matrice d'incidence associée au graphe $G = (V, E)$ tel que $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, avec $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{2, 3\}$, $e_3 = \{3, 1\}$, $e_4 = \{4, 1\}$ et $e_5 = \{4, 4\}$.

Matrice d'incidence :

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

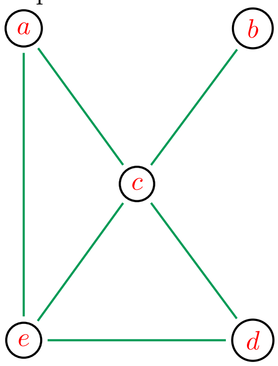
1. Que vaut la somme des éléments d'une colonne. Réponse : 2
2. Que représente la somme des éléments d'une ligne. Réponse : Le degré de chacun des sommets.
3. En déduire que dans un graphe non orienté $G = (V, E)$, on a

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2\,|E|$$

d(1)+d(2)+d(3)+d(4)=3+2+2+3=10=2x5=2|E|

Exercice 3. Soit $G = (V, E)$ le graphe non orienté défini par :
$V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{\{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$.

1. Représenter G.

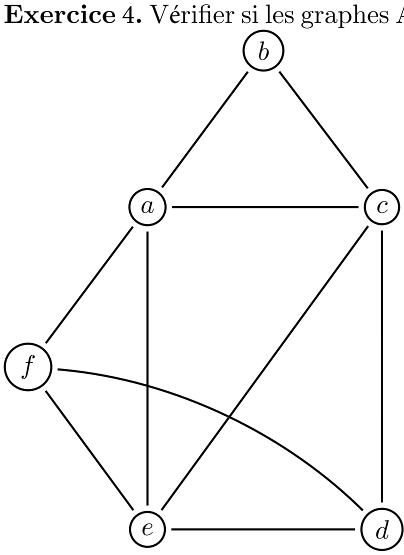


2. Écrire sa matrice d'adjacence et sa liste d'adjacence.

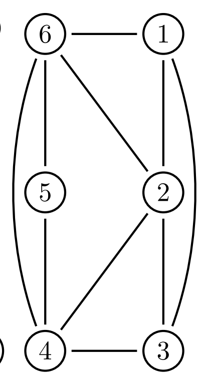
$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Le graphe G est-il r´egulier ? Réponse : Non

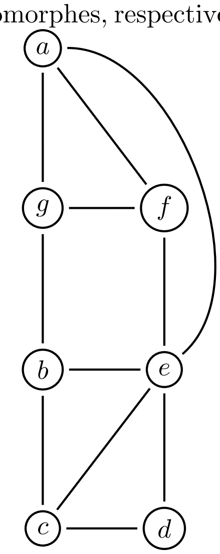
Exercice 4. Vérifier si les graphes A et B, C et D sont isomorphes, respectivement.



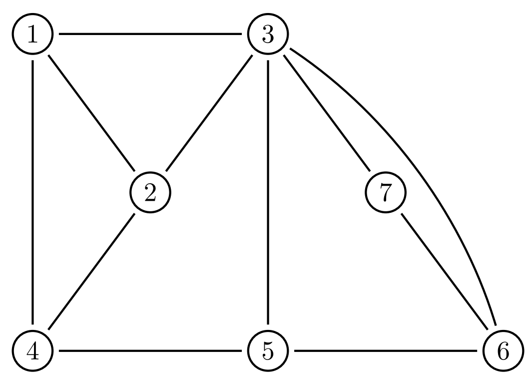
A



B



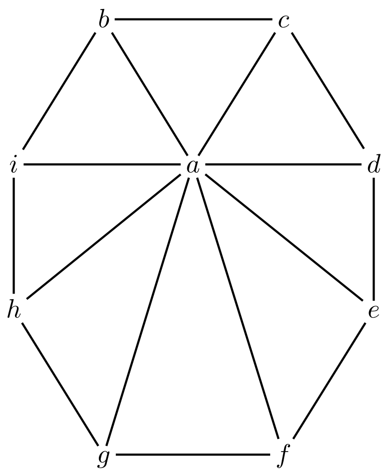
C

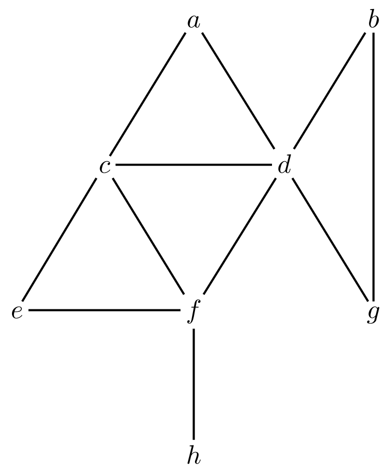


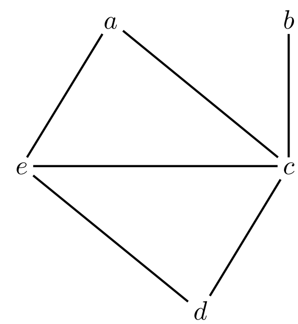
D

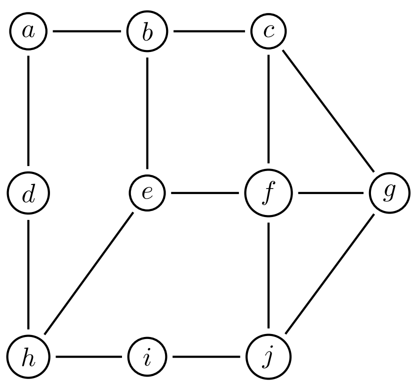
A et B sont isomorphes.
C et D sont isomorphes.

Exercice 5. Déterminer si les graphes sont bipartis.



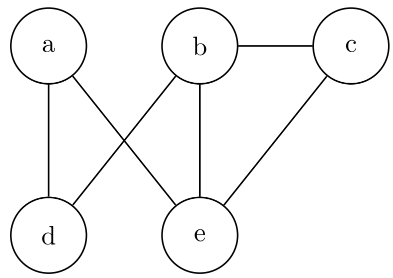






Aucun

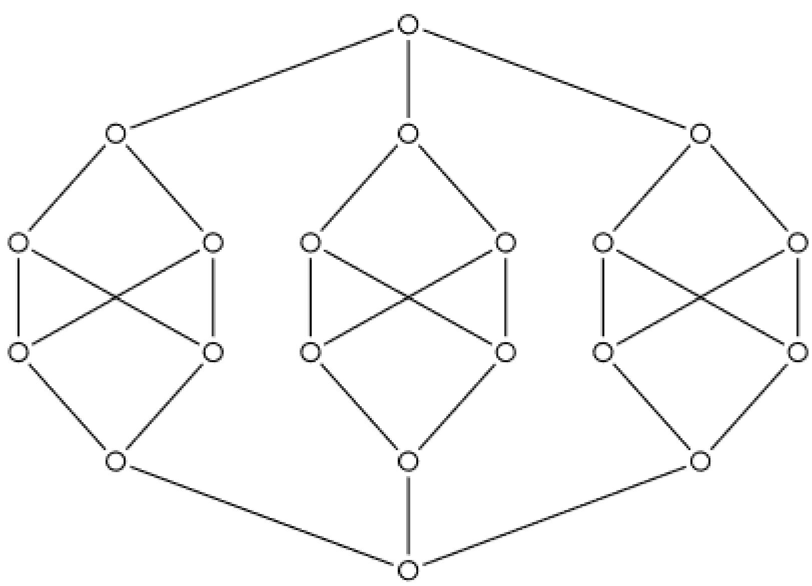
Exercice 6. Soit le graphe suivant :



Les listes de sommets suivants forment-elles des chaînes dans le graphe ci-dessus? Lesquelles sont des chaînes simples? Lesquelles sont des cycles? Quelles sont les longueurs de celles qui sont des chaînes?
Solution :

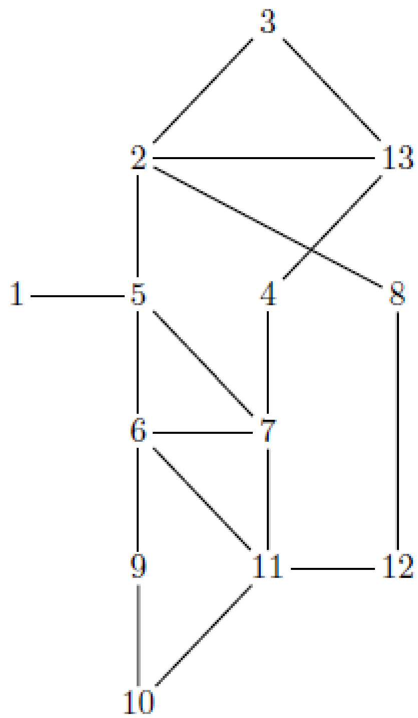
(1) a, e, b, c, b
a, e, b, c, b est une chaîne. Mais ce n'est ni simple, ni un cycle. Sa longueur est 4.
(2) a, e, a, d, b, c, a
a, e, a, d, b, c n'est pas une chaîne.
(3) e, b, a, d, b, e
e, b, a, d, b, e n'est pas une chaîne.
(4) c, b, d, a, e, c
e, b, a, d, b est une chaîne simple et un cycle. Sa longueur est 5.
(5) Combien existe-t-il de chemins de longueur 4 entre a et b?
11

Exercice 7. Le graphe ci-dessous contient-il un cycle hamiltonien ?

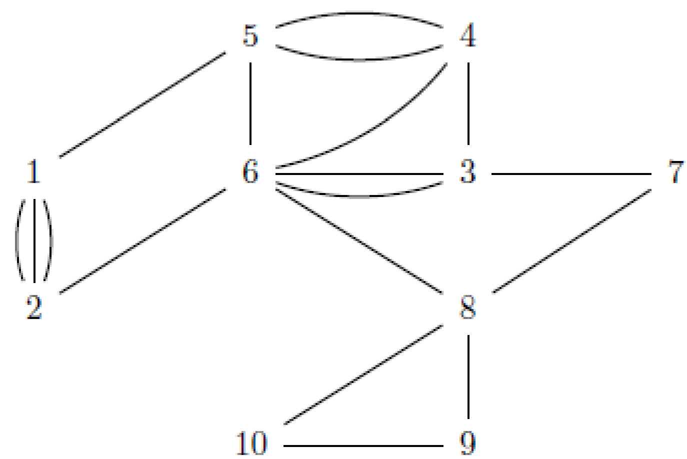


Solution : Non. Il contient par contre une chaîne hamiltonienne:

Exercice 8. Le graphe (a) admet-il une chaîne eulérienne ? Si oui, déterminez-en une.
Le multigraphe (b) admet-il un cycle eulérien ? Si oui, déterminez-en un.



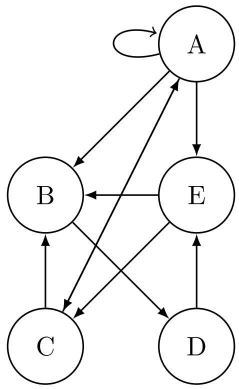
(a)



(b)

Solution :
(a) : Oui : 13-2-3-13-4-7-11-12-8-2-5-7-6-11-10-9-6-5-1
(b) : Oui : 1-5-4-5-6-4-3-7-8-9-10-8-6-3-6-2-1-2-1

Exercice 9. Soit le graphe suivant :



Matrice d'adjacence M :

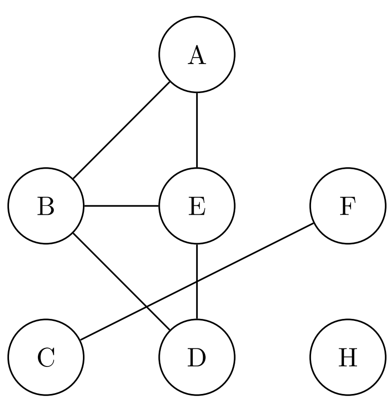
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 allant de A à C ? 2
Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 allant de E à A ? 1

Exercice 10. Soit le graphe suivant :



Combien y a-t-il de composantes connexes dans ce graphe ? 3 : A-B-D-E, F-C et H

2. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 11, 15 (page 399) ; 26, 33, 34, 35, 41 (page 428)