

# Exemple relation d'équivalence (P144 des notes de cours)

Soit  $m$  un entier non nul et  $R$  la relation dans l'ensemble  $\mathbb{Z}$  tel que  $R = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{m}\}$

**Réflexivité**  $\forall a \in \mathbb{Z}, \quad a R a \text{ car } a \equiv a \pmod{m}$

$a - a = 0$  et  $m$  divise  $0$

**Symétrie** Soit  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}, \quad a R b$

$$a R b \rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

$$a R b \rightarrow m \text{ divise } (a - b)$$

$$a R b \rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a - b = k.m$$

$$a R b \rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -(b - a) = k.m$$

$$a R b \rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad (b - a) = -k.m$$

$$a R b \rightarrow \exists t \in \mathbb{Z}, \quad (b - a) = t.m, \text{ en posant } t = -k ; k \in \mathbb{Z}$$

$$a R b \rightarrow b \equiv a \pmod{m}$$

$m$  divise  $(b-a)$

$$D'où \forall a \in A, b \in A, \quad a R b \rightarrow b R a$$



# Exemple relation d'équivalence (P144 des notes de cours)

Soit  $m$  un entier non nul et  $R$  la relation dans l'ensemble  $\mathbb{Z}$  tel que  $R = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{m}\}$

**Transitivité** Soit  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$  et  $c \in \mathbb{Z}$ ,  $(a R b) \wedge (b R c)$

$$(a R b) \wedge (b R c) \rightarrow a \equiv b \pmod{m} \text{ et } b \equiv c \pmod{m}$$

$$(a R b) \wedge (b R c) \rightarrow \exists k, t \in \mathbb{Z}, a - b = k.m \text{ et } b - c = t.m$$

$$(a R b) \wedge (b R c) \rightarrow \exists k, t \in \mathbb{Z}, a - b + b - c = k.m + t.m$$

$$(a R b) \wedge (b R c) \rightarrow \exists k, t \in \mathbb{Z}, a - c = (k + t).m$$

$$(a R b) \wedge (b R c) \rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, a - c = n.m \text{ avec } n = k + t \text{ et } k, t \in \mathbb{Z}$$

$$(a R b) \wedge (b R c) \rightarrow a \equiv c \pmod{m} \quad m \text{ divise } (a-c)$$

$$D'où \forall a \in A, b \in A, c \in A, ((a R b) \wedge (b R c)) \rightarrow (a R c)$$

La relation  $R$  est reflexive, symétrique et transitive. Elle est donc une relation d'équivalence.

