Induction mathématique : Exemple

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: $n! \geq 2^n$. Montrez que $P(n)$ est vraie a partir d'un certain rang.

$3! = 6$ et $2^3 = 8$. le rang 3 ne convient pas.

$4! = 24$ et $2^4 = 16$ soit $4! \geq 2^4$. La propriété est vraie à l'ordre 4.

Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n (avec $n \geq 4$) et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $(n + 1)$.

$n \geq 4$ alors $(n + 1) \geq 5$.

Ainsi $(n + 1) \geq 2$ et par suite $(n + 1).n! \geq 2 \times n!$

De plus, $n! \geq 2^n$ car $P(n)$ est vrai, donc $2 \times n! \geq 2 \times 2^n$

On en déduit la double inégalité $(n + 1).n! \geq 2 \times n! \geq 2 \times 2^n$

On a : $(n + 1).n! \geq 2 \times 2^n$

soit $(n + 1)! \geq 2^{n+1}$.

La propriété est vraie à l'ordre $n + 1$, c'est à dire $P(n+1)$ est Vrai.

D'ou $\forall\, n \geq 4, \quad n! \geq 2^n$

aurel.randolph@polymtl.ca