TD 3-4: RELATION - FONCTIONS

NOTATION ASYMPTOTIQUE - SUITES ET INDUCTION MATHÉMATIQUE

RECURSIVITÉ - FERMETURE DES RELATIONS - ORDRES

1. Relations

Exercice 1. On définit dans $\mathbb{N}^*$ la relation $\ll$ suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, x \ll y \text{ } s'il \text{ } existe \text{ } n \in \mathbb{N}^* \text{ } tel \text{ } que \text{ } y = x^n$$

Montrez que $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$

$\ll$ est une relation d'ordre si $\ll$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

- Réflexivité : Montrons que $\forall x \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = x^n$.
  En prenant $n = 1$, on conclut la réflexivité de $\ll$.
- antisymétrie : Montrons que $\forall (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $x \ll y$ et $y \ll x$, alors x = y.
  $x \ll y \to y = x^n$ et $y \ll x \to x = y^m$
  en combinant, on obtient : $y = y^{m^n} = y^{m*n}$. Ainsi, $m*n = 1$. On en déduit que $n = 1$, $m = 1$.
  donc $x = y$.
- Transitivité : Montrons que $\forall x, y, z \in \mathbb{N}^*$, si $x \ll y$ et $y \ll z$, alors $\exists\, n \in \mathbb{N}^*, x \ll z$.
  $x \ll y \to y = x^n$ et $y \ll z \to z = y^m$
  En combinant, on obtient : $z = x^{n^m} = x^{n*m}$
  En posant $N = n*m$, on a $N \in \mathbb{N}^*$ et $z = x^N$ donc $x \ll z$.

$\ll$ est donc une relation d'ordre. C'est un ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$ car pour le couple (2,6), il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $6 = 2^n$.

Exercice 2. On définit une relation sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{T}$ suivante:

$$(x,y)\mathcal{T}(x',y') \text{ } si \text{ } |x - x'| \leq y - y'$$

(1) Montrez que $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre.

Solution.

- Réflexivité. Il faut montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y)\ \mathcal{T}\ (x,y)$.
  Trivial.
- Anti-symétrie. Montrons que
  $\forall (x,y) \in \mathbb{R},\ (x,y)\mathcal{T}(x',y') \text{ et } (x',y')\mathcal{T}(x,y) \ \leftrightarrow\ (x,y) = (x',y')$

  $(x,y)\mathcal{T}(x',y') \ \leftrightarrow\ |x - x'| \leq y - y' \text{ et}(x',y')\mathcal{T}(x,y) \leftrightarrow\ |x' - x| \leq y' - y$
  $|x - x'| = |x' - x|,\ |x - x'| \leq y - y' \text{ et } |x - x'| \leq -(y - y'),\ donc\ y - y' = 0,\ soit\ y = y'$. *On en déduit que* $|x - x'| = 0,\ soit\ x = x'$.
- Transivité. Montrons que
  $\forall (x,y),\ (x',y'),\ (x'',y'') \in \mathbb{R},\ (x,y)\mathcal{T}(x',y') \text{ et } (x',y')\mathcal{T}(x'',y'') \ \to\ (x,y)\mathcal{T}(x'',y'')$

  $(x,y)\mathcal{T}(x',y') \text{ et } (x',y')\mathcal{T}(x'',y'') \ \to\ |x - x'| \leq y - y' \text{ et } |x' - x''| \leq y' - y''$
  En sommant les deux inégalités, nous avons: $|x - x'| + |x' - x''| \leq y - y''$.
  Or, $|(x - x') + (x' - x'')| \ \leq\ |x - x'| + |x' - x''| \leq y - y''$, *donc* $|x - x''| \ \leq\ y - y''$

(2) $\mathcal{T}$ est-elle une relation d'ordre total?.

Solution.
Non. Il suffit de montrer un contre-exemple, soit les couples (10,2) et (1,0).

2. Fonctions

Exercice 3. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$, deux ensembles. On considère les ensembles ci-dessous décrivant une relation E vers F. Précisez si la relation est une fonction, injection, surjection ou bijection.

(1) $\{(a, 2), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\}$
Solution: Une fonction
(2) $\{(a, 4), (b, 1), (c, 3), (d, 2)\}$
Solution: Une fonction bijective
(3) $\{(a, 2), (b, 2), (a, 1), (b, 4)\}$
Solution: Aucune
(4) $\{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$
Solution: Aucune

Exercice 4. Sans les cas suivants dites si l'application $f : A \to B$ est injective , surjective ou bijective. Si elle est bijective donnez sa réciproque

(1) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = x + 1$
Solution: fonction bijective. $f^{-1}(x) = x - 1$
(2) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 1$
Solution: fonction non injective et non surjective. Preuve graphique
(3) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = 2^x$
Solution: fonction injective , non surjective
(4) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = 1/x$
Solution: fonction injective mais non surjective (car 0 n'a pas de pré-image), donc non bijective

(5) $A \subseteq \mathbb{R}^2, B \subseteq \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, x - y)$
Solution: fonction bijective

Exercice 5. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

(1) Déterminer $F = f(E)$
Solution: $F =]-1, 1[$
(2) Vérifier que f est une bijection de E sur F . injection : s
(3) Calculer la réciproque de f
Solution: $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$

Exercice 6. Soient A, B et C trois ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to C$.

1. On suppose $g \circ f$ injective ; montrer que f est injective. g est-elle obligatoirement injective ?
Solution : Si $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$, on a $g(f(x)) = g(f(y))$, ce qui n'est pas possible. La fonction g n'est pas forcément injective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective ; montrer que g est surjective. f est-elle obligatoirement surjective ?
Solution : L'image de $g \circ f$ est un sous-ensemble de l'image de g ; donc, si l'image de g n'est pas C tout entier, $g \circ f$ n'est pas surjective. La fonction f n'est pas forcément surjective.
3. On suppose $g \circ f$ bijective. Que peut-on dire de f et g ? Sont-elles bijectives ?
Solution : On sait seulement que f est injective et que g est surjective. Elles ne sont pas forcément bijectives.

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^3 - 2$.
Solution :

(1) Calculer $f \circ g$.
$f \circ g(x) = 2x^3 - 3$.
(2) Calculer g^{-1}.
$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 2}$.

3. Notation asymptotique

Exercice 8. Trouver le plus petit entier n pour lequel $f(x) \in \mathcal{O}(x^n)$ pour chacune des fonctions suivantes, en déterminant des constantes C et k.

a. $f(x) = 4x^2 + 2x^4 + 5$
$n = 4\,, C = 3\,, k = \sqrt{5}$

b. $f(x) = \frac{x^3+8}{5x^2+3x}$
$n = 1\,, C = \frac{1}{5}\,, k = \sqrt{\frac{40}{3}}$

c. $f(x) = 3x^3 - x^2\ log(x)$
$n = 3\,, C = 3\,, k = 0$

d. $f(x) = 4x^4 - 4\ log^3(x)$
$n = 4\,, C = 4\,, k = 0$

Exercice 9. Soit la fonction $f : n \to \left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \cdot (2 + \cos(n))$ définie sur $\mathbb{N}$. Prouver que :

$$f \in \Theta\left(\frac{n^3}{\log(n)}\right)$$

(Θ : grand theta)

Solution :

- $2 + \cos(n) \geq 1$ et $\frac{n^3}{\log(n)} \in \mathcal{O}\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right)$ (prendre par exemple $C = 1\,, k = 2$) donc $\frac{n^3}{\log(n)} \in \mathcal{O}\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \cdot (2 + \cos(n))$

- $\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \in \mathcal{O}(\frac{n^3}{\log(n)})$ (prendre par exemple $C = 10^6 + 1\,, k =$) et $2 + \cos(n) \leq 3$ donc il suffit de prendre $C = (10^6 + 1) * 3$ et toujours $k =$ pour trouver un couple qui convient pour montrer que : $\left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \in \mathcal{O}(\frac{n^3}{\log(n)})(2 + \cos(n))$.

Donc $f \in \Theta\left(\frac{n^3}{\log(n)}\right)$

Exercice 10. Sur une échelle croissante, classer les fonctions suivantes selon leur comportement asymptotique.

a. $f_1(n) = 2\sqrt{n}$
b. $f_2(n) = \frac{n^4}{6}$
c. $f_3(n) = e^n$
d. $f_4(n) = \sqrt{log(n)}$
e. $f_5(n) = n\log(n)$
f. $f_6(n) = e^{-n}$

$e^{-n} \ll \sqrt{\log(n)} \ll 2\sqrt{n} \ll n\log(n) \ll \frac{n^4}{6} \ll e^n$

4. Suites et induction mathématique

Exercice 11. À 14h durant l'été, sous une température avoisinant 35°C, on dépose un morceau de viande sur un comptoir. Le morceau de viande contient 50 bactéries. On fait l'hypothèse que dans ces conditions, le nombre de bactéries double toutes les 15 minutes.
Soit $\mathcal{U}_n$ est le nombre de bactéries à un moment déterminé, $\mathcal{U}_{n+1}$ le nombre de bactéries 15 minutes plus tard.

1. Préciser la nature et la raison de la suite $(\mathcal{U}_n)$. Suite géométrique de raison 2

2. Exprimer $\mathcal{U}_n$ en fonction de n. Un = 50 x 2^n

3. Calculer le nombre de bactéries à 16h. À 16h remarquer que n = 8

4. En supposant que les conditions ne changent pas, à quelle heure (arrondie au quart d'heure supérieur) aurait-on 100 000 bactéries sur le morceau de viande ? 16h 45 mns

Exercice 12. Donnez une définition récursive de la suite a_n.

1. $a_n = 2n+1$ Réponse : $a_0 = 1$; $a_{n+1} = a_n + 2$
2. $a_n = 3 - 2^n$ Réponse : $a_0 = 2$; $a_{n+1} = 2a_n - 3$. Indication : Utiliser la suite $b_n = a_n - 3$.
3. $a_n = 2^{2^n}$ Réponse : $a_0 = 2$; $a_{n+1} = a_n^2$
4. $a_n = \frac{n^2-n+2}{2}$ Réponse : $a_0 = 1$; $a_{n+1} = a_n + n$

Exercice 13. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} < \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Solution : Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

Pour $n = 1$: $u_1 = \frac{1}{2}$, et on a bien : $\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Supposons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} < u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

On a : $u_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n+2)} = u_n \frac{2n+1}{2n+2}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = u_{n+1}$.
Vérifions que $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n+2}}{2n+3}$. Autrement dit, $2n+3 > 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \iff (2n+3)^2 > 4(n+1)(n+2)$
Soit $4n^2+12n+9 > 4n^2+12n+8$ vrai.
Donc $u_{n+1} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n+2}}{2n+3}$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$u_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}$.
Vérifions que $\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$. Autrement dit, $\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3} < 2n+2 \iff (2n+1)(2n+3) < (2n+2)^2$.

Soit $4n^2+8n+3 < 4n^2+8n+4$ vrai.
Donc $u_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$.

On a établi l'encadrement voulu à l'ordre $n+1$.
On conclut, par récurrence sur n, à l'encadrement demandé.

Exercice 14. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 2$, $U_{n+1} = 1 +$ pour $\frac{1}{1+U_n}$. Démontrer par récurrence que tout $n \in \mathbb{N}$, On a $1 \le U_n \le 2$.

Solution : Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \le U_n \le 2$.

(1) Étape de base : $U_0 = 2 ; 1 \le 2 \le 2$, donc $1 \le U_0 \le 2$. $P(0)$ est vraie.

(2) Étape inductive : Supposons jusqu'au rang n que $P(n)$ est vraie.

(3) $1 \le U_n \le 2 \iff 2 \le 1 + U_n \le 3 \iff \frac{1}{3} \le \frac{1}{1+u_n} \le \frac{1}{2} \iff 1 + \frac{1}{3} \le 1 + \frac{1}{1+U_n} \le 1 + \frac{1}{2} \iff 1 \le 1 + \frac{1}{3} \le 1 + \frac{1}{1+u_n} \le 1 + \frac{1}{2} \le 2 \iff 1 \le U_{n+1} \le 2$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie. En supposant jusqu'au rang n que $P(n)$ est vraie, on a $P(n+1)$ qui est vraie. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $1 \le U_n \le 2$.

Exercice 15. Pour tout réel x et pour tout entier positif non nul n on a :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

En utilisant la notion d'itération, donner l'algorithme d'une fonction qui calcule $S_n(x)$.

Indication : Considérer les transformations suivantes :
$S_n(x) = \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^n}{n}$
$S_n(x) = x(\frac{1}{1} + \frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^{n-2}}{n-1} + \frac{x^{n-1}}{n})$
$S_n(x) = x(\frac{1}{1} + x(\frac{1}{2} + \frac{x^1}{3} + \cdots + \frac{x^{n-3}}{n-1} + \frac{x^{n-2}}{n}))$
$S_n(x) = x(1 + x(\frac{1}{2} + x(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{x^{n-4}}{n-1} + \frac{x^{n-3}}{n}))$
$S_n(x) = x(1 + x(\frac{1}{2} + x(\frac{1}{3} + x(\cdots + x(\frac{1}{n-1} + \frac{x}{n})\cdots))))$

Exemple :

```
Sn(x,n) {
    tmp = 1/n
    for k=n to 2 by -1 {
        tmp = 1/(k-1)+x*tmp
    return x*tmp
    }
}
```

Exercice 16. La fonction d'Ackermann est une fonction récursive à deux paramètres entiers définie par :

$$f(n\,,m) = \begin{cases} m+1 & Si\ n=0 \\ f(n-1,1) & Si\ n \geq 1\ et\ m=0 \\ f(n-1, f(n,m-1)) & Si\ n \geq 1\ et\ m \geq 1 \end{cases}$$

1. Calculer $f(1\,,0)\,,f(2\,,0)\,,f(3\,,0)$ Réponse : $f(1\,,0)=2\,;f(2\,,0)=3\,;f(3\,,0)=5$
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\,, f(1\,,k)=k+2$ Indication : Preuve par induction
   - Vrai pour k=0
   - Supposons que la propriété est vraie au rang k.
     Montrons qu'elle est vraie au rang k+1.

$$\begin{aligned} f(1,k+1) &= f(0,f(1,k)) \\ &= f(1,k)+1 \\ &= k+2+1 \text{ d'après la propriété de récurrence} \qquad = (k+1)+2 \end{aligned}$$

3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\,, f(2\,,k)=2k+3$ Indication : Preuve par induction
   - Vrai pour k=0
   - Supposons que la propriété est vraie au rang k.
     Montrons qu'elle est vraie au rang k+1.

$$\begin{aligned} f(2,k+1) &= f(1,f(2,k)) \\ &= f(2,k)+2 \text{ d'après 2.} \\ &= 2k+3+2 \text{ d'après la propriété de récurrence} \qquad = 2(k+1)+3 \end{aligned}$$

4. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\,, f(3\,,k)=2^{k+3}-3$ Indication : Preuve par induction
   - Vrai pour k=0
   - Supposons que la propriété est vraie au rang k.
     Montrons qu'elle est vraie au rang k+1.

$$\begin{aligned} f(3,k+1) &= f(2,f(3,k)) \\ &= 2f(3,k)+3 \text{ d'après 3.} \\ &= 2(2^{k+3}-3)+3 \text{ d'après la propriété de récurrence} \qquad = 2^{(k+1)+3}-3 \end{aligned}$$

5. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2 (pages 64) ; 15, 18, 20, 24 et 26 (pages 65) ; 8, 9 et 14 (pages 73) ; 26 et 27 (pages 83) ; 2, 4, 5, 8 (page 197) ; 18, 21 (page 205) ; 40 (page 215).

6. Récursivité

Exercice 17. Donnez une d´efinition r´ecursive de l'ensemble des entiers positifs congrus `a 3 modulo 7 ou congrus à 5 modulo 7.
$a_0 = 3$; $a_1 = 5$; $a_{n+2} = a_n + 7$

Exercice 18. Construire un algorithme r´ecursif qui calcule $n \cdot x$ lorsque n et x sont des entiers positifs. procedure(n,x)

```
si x = 0 ou n = 0
    procedure(n,x):=0
sinon
    procedure(n,x):=x+procedure(n-1,x)
```

Exercice 20. D´emontrez que la somme des n premiers entiers impairs est ´egale `a n^2.
On peut remarquer que cette somme correspond à une suite arithmétique de raison 2.
On pose que cette suite soit $u_n = 2n + 1$. Dès lors le premier terme $u_0 = 1$ et le dernier terme serait $u_{n-1} = 2n - 1$.
On sait que la somme S_n d'une suite arithmétique u_n ayant n termes est: $S_n = (n)\frac{u_0+u_{n-1}}{2}$ où u_0 est le premier terme et u_{n-1} le dernier terme
On en déduit que cette somme est $s_n = (n)\frac{1+2n-1}{2} = n^2$.

Exercice 21. D´emontrez que $n < 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit la proposition $Q(n)$ définie par : $n < 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Etape de base : vérifions la condition pour $n = 0$
   On a $0 < 2^0 = 1$ vrai
3. Etape inductive : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ $Q(n)$ est vrai. Montrons que $Q(n+1)$ est vrai.
   On sait que $n < 2^n$. En particulier $1 \leq 2^n$. Donc on en déduit que $n+1 < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.
   D'où $Q(n+1)$ vrai.

Exercice 22. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer par induction que:$16|(3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n)$

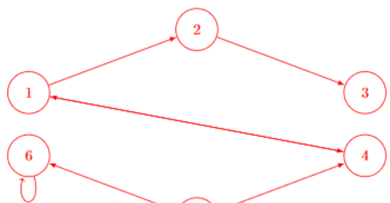
1. Soit Q(n) la proposition 16 divise $(3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n)$
2. Etape de base : vérifions la condition pour $n = 0$
3. Etape inductive : supposons que $Q(n)$ est vrai et montrons que $Q(n+1)$ vrai
   Posons $u_n = 3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n$. On en deduit que $u_{n+1} = 9u_n + 32n + 4(5^{n+2} - 1)$. Ainsi, il suffit de prouver que $5^{n+2} - 1$ divisble par 4.
   On sait que $5 = 4 + 1$.
   Alors $5^{n+2} = (4+1)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} 4^{n+2-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k} 4^{n+2-k} + 1$. Le résultat découle du fait que $5^{n+2} - 1 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k} 4^{n+2-k}$ qui est divisible par 4.
   Note: on peut aussi démontrer que $4|(5^{n+2} - 1)$ par induction.

7. Fermeture des relations

Exercice 23. Soit la relation $\mathcal{R}$ d´efinie sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ par : $\{(1, 2), (1,4), (2, 3), (4, 1), (5, 4), (5, 6), (6,6)\}$.

1. Dessiner le graphe de la relation $\mathcal{R}$.
2. Donner la matrice de la relation $\mathcal{R}$.
3. Donner la fermeture réflexive de $\mathcal{R}$.
4. Donner la fermeture symétrique de $\mathcal{R}$.
5. Donner la fermeture transitive de $\mathcal{R}$.

1.



2. Matrice de la relation $\mathcal{R}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Note sur les questions suivantes : le type de représentation (matrice, graphe, liste de couples) n'a pas d'importance.

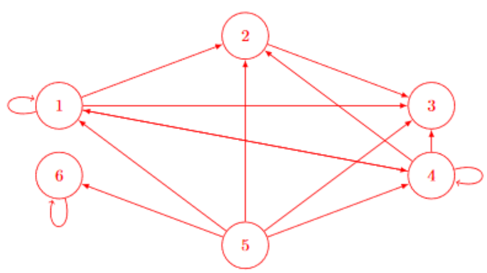
3. Fermeture réflexive :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Fermeture symétrique :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Fermeture transitive (doit être une relation transitive, il faut donc aussi compléter les triangles créés par la complétion d'autres triangles. En outre, la définition d'une relation transitive s'applique aussi dans le cas x=z) :



Note : les fermetures sont utilisées dans certaines requêtes sur des bases de données

Exercice 24. On consid`ere les trois ensembles $A = \{2, 3, 4, 6\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{0, 3, 5\}$ et deux relations $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ et $\mathcal{S} \subseteq B \times C$ d´efinies par : $\mathcal{R} = \{(4, a), (6, a), (6, b), (4, c), (6, c)\}$ et $\mathcal{S} = \{(a, 0), (b, 5), (c, 5), (d, 3)\}$

1. Donner la matrice de la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

$$M_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Donner la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ sous forme d'un ensemble de couples.
   $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(4, 0), (6, 0), (6, 5), (4, 5)\}$

Exercice 25. Soit la relation $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ d´efinie par : $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, a \times b \leq a + b\}$.

1. Donner la relation $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ sous forme d'un ensemble
   $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$. Il suffit de prendre $b = 1$
2. En déduire que $\mathcal{R} \circ (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.

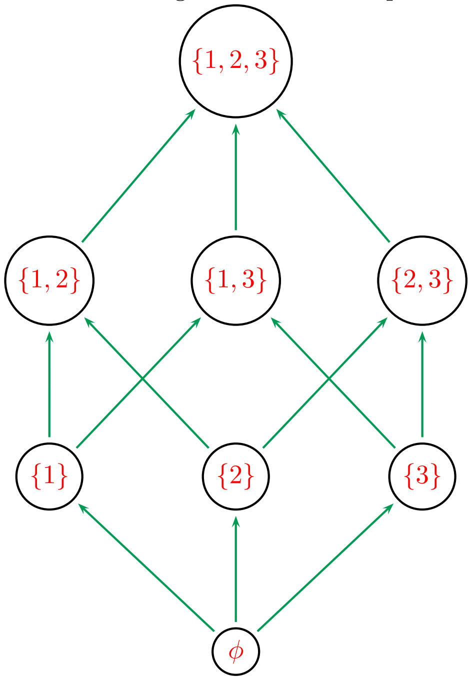
8. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 2, 4, 5, 8 (page 197) ; 35 (page 198) ; 18, 21 (page 205) ; 29 (page 214) ; 40 (page 215)

9. Ordres

Exercice 26. On considère la relation d'ordre $\subset$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.

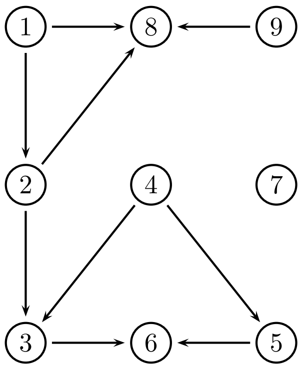
1. Dessiner le diagramme de Hasse pour cette relation.



2. Quels sont les éléments minimaux, maximaux ?
   Élément minimal : ϕ ; Élément maximal : $\{1, 2, 3\}$
3. Donner le plus petit élément, s'il y a lieu.
   Plus petit élément : ϕ
4. Donner le plus grand élément, s'il y a lieu.
   Plus grand élément : $\{1, 2, 3\}$

Exercice 27. Trouver le diagramme de Hasse pour la relation "plus grand ou égal à " dans l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Exercice 28. Proposer un tri topologique pour le graphe suivant :



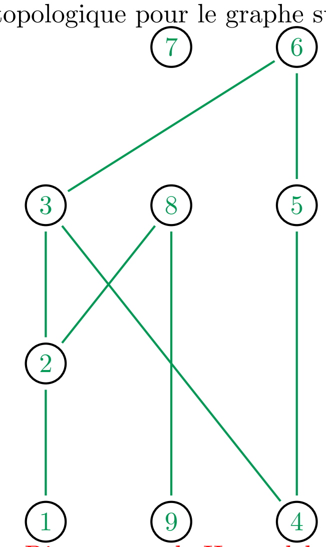


Diagramme de Hasse dela relation

Exemples de tri topologique (la liste n'est pas exhaustive)
1-9-2-4-7-3-8-5-6 ; 7-9-1-4-2-5-8-3-6 ; 1-9-2-4-5-7-3-8-6 ; 9-4-5-1-2-3-6-8-7 ; 7-4-5-9-1-2-8-3-6