
TD 2 : RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE - RELATIONS
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

1. RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Exercice 1. Soit E et F deux ensembles. Si $A \subset E$ et $B \subset F$ montrer que : $A \times B \subset E \times F$.
Solution :
On sait que $A \subset E$ et $B \subset F$
Soit $(x\,,\,y) \in A \times B$
($x \in A$ et $A \subset E$ alors $x \in E$) et ($y \in B$ et $B \subset F$ alors $y \in F$)
$x \in E$ et $y \in F$, donc $(x\,,\,y) \in E \times F$
On a $\forall (x\,,\,y) \in A \times B\,,\,(x\,,\,y) \in E \times F$
Donc $A \times B \subset E \times F$.

Exercice 2. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Notons $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, la *différence symétrique* de A et B. Soit C un autre sous-ensemble de E.

1. Vérifier que : $A\Delta B = B\Delta A$
   Indication : Utiliser la commutativité de $\cup$ dans la formule donnée par l'énoncé.
2. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
   On sait que/on admet (idée de la démonstration : mq c'est vrai pour tout élément concerné) $\forall C\,,D\,,G$ 3 ensembles, $(C \cup D) - G = (C - G) \cup (D - G)$.
   Donc $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - (A \cap B)) \cup (B - (A \cap B)) = (A - B) \cup (B - A)$
3. Montrer que $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$
   Soit $x \in \overline{A}\Delta\overline{B}$
   $\iff (x \in (\overline{A} - \overline{B}))$ ou $(x \in (\overline{B} - \overline{A}))$
   $\iff (x \in \overline{A}$ et $x \notin \overline{B})$ ou $(x \in \overline{B}$ et $x \notin \overline{A})$
   $\iff (x \notin A$ et $x \in B)$ ou $(x \notin B$ et $x \notin A)$
   $\iff x \in ((B - A) \cup (A - B))$
   $\iff x \in B\Delta A = A\Delta B$
4. Démontrer que $A\Delta B = A\Delta C \to B = C$
   Soit $x \in B$. Mq $x \in C$ (la réciproque se démontre de la même manière puisque B et C jouent le même rôle).
   Par contradiction : supposons que $x \notin C$.
   - Premier cas :$x \in A \implies x \in (A \cap B)$
     $(x \in A$ et $x \notin C) \iff x \in (A - C) \implies x \in A\Delta C = A\Delta B$
     $\implies x \notin (A \cap B$:contradiction
   - Deuxième cas :$x \notin A \implies x \in (B - A)$
     $\implies x \in A\Delta B = A\Delta C$
     et $x \notin C$ donc $x \in (A\Delta C) \cap \overline{C}$
     $(A\Delta C) \cap \overline{C} = ((A \cup C) - (A \cap C)) \cap \overline{C}$
     $= ((A \cup C) \cap \overline{C}) - (A \cap C)$
     $= (A \cap \overline{C}) - (A \cap C)$
     $= A \cap \overline{C}$: contradiction car $x \notin A$

   Donc $B = C$
5. Calculer $A\Delta A\,,\ A\Delta\overline{A}\,,\ A\Delta E\,,\ A\Delta\varnothing$
   $A\Delta A = \varnothing\,,\ A\Delta\overline{A} = E\,,\ A\Delta E = \overline{A}\,,\ A\Delta\varnothing = A$

6. Démontrer que $A\Delta B = A\cap B \implies A = B = \varnothing$
   Idée : $(A\Delta B) = (A\cup B) - (A\cap B)$ donc $A\Delta B = A\cap B \implies A\cap B = \varnothing = A\cup B \implies A = B = \varnothing$

Exercice 3. Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E. On suppose que : $A\cap B \neq \varnothing$, $A\cup B \neq E$, $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$. Montrer que :

1. $A\cap B\,,\ A\cap \overline{B}\,,\ B\cap\overline{A}\,,\ \overline{A\cup B}$ sont non vides.
   - $A\cap B \neq \varnothing$ d'après l'énoncé.
   - $A \not\subseteq B \rightarrow \exists x \in E, x\in A \wedge x \notin B$
     $A \not\subseteq B \rightarrow \exists x \in E, x\in A \wedge x \in \overline{B}$
     $A \not\subseteq B \rightarrow \exists x \in E, x\in A \cap \overline{B}$
     Donc $A\cap\overline{B} \neq \varnothing$
   - $B \not\subseteq A \rightarrow \exists x \in E, x\in B \wedge x \notin A$
     $B \not\subseteq A \rightarrow \exists x \in E, x\in B \wedge x \in \overline{A}$
     $B \not\subseteq A \rightarrow \exists x \in E, x\in B \cap \overline{A}$
     Donc $B\cap\overline{A} \neq \varnothing$
   - $A\cup B \neq E \rightarrow \exists x\in E, x \notin A\cup B$
     $A\cup B \neq E \rightarrow \exists x\in E, x \in \overline{A\cup B}$
     Donc $\overline{A\cup B} \neq \varnothing$
2. $A\cap B\,,\ A\cap \overline{B}\,,\ B\cap\overline{A}\,,\ \overline{A\cup B}$ sont deux à deux disjoints.
   - $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B}) = A\cap B\cap\overline{B}$
     $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B}) = A\cap\varnothing$, car $B\cap\overline{B} = \varnothing$
     $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B}) = \varnothing$, car $A\cap\varnothing = \varnothing$
     Donc $A\cap B$ et $A\cap\overline{B}$ sont disjoints.
   - $(A\cap B)\cap(B\cap\overline{A}) = A\cap B\cap\overline{A}$
     $(A\cap B)\cap(B\cap\overline{A}) = B\cap\varnothing$, car $\cap$ est commutatif et $A\cap\overline{A} = \varnothing$
     $(A\cap B)\cap(B\cap\overline{A}) = \varnothing$, car $B\cap\varnothing = \varnothing$
     Donc $A\cap B$ et $B\cap\overline{A}$ sont disjoints.
   - $(A\cap B)\cap(\overline{A\cup B}) = A\cap B\cap\overline{A}\cap\overline{B}$
     $(A\cap B)\cap(\overline{A\cup B}) = \varnothing$, car $\cap$ est commutatif et $A\cap\overline{A} = \varnothing, B\cap\overline{B} = \varnothing$
     Donc $A\cap B$ et $\overline{A\cup B}$ sont disjoints.
   - $(A\cap\overline{B})\cap(B\cap\overline{A}) = A\cap\overline{B}\cap B\cap\overline{A}$
     $(A\cap\overline{B})\cap(B\cap\overline{A}) = \varnothing$, car $\cap$ est commutatif et $A\cap\overline{A} = \varnothing, B\cap\overline{B} = \varnothing$
     Donc $A\cap\overline{B}$ et $B\cap\overline{A}$ sont disjoints.
   - $(A\cap\overline{B})\cap(\overline{A\cup B}) = A\cap\overline{B}\cap\overline{A}\cap\overline{B}$
     $(A\cap\overline{B})\cap(\overline{A\cup B}) = \varnothing\cap\overline{B}$, car $\cap$ est commutatif et $A\cap\overline{A} = \varnothing$
     $(A\cap\overline{B})\cap(\overline{A\cup B}) = \varnothing$
     Donc $A\cap\overline{B}$ et $\overline{A\cup B}$ sont disjoints.
   - $(B\cap\overline{A})\cap(\overline{A\cup B}) = B\cap\overline{A}\cap\overline{A}\cap\overline{B}$
     $(B\cap\overline{A})\cap(\overline{A\cup B}) = \varnothing\cap\overline{A}$, car $\cap$ est commutatif et $B\cap\overline{B} = \varnothing$
     $(B\cap\overline{A})\cap(\overline{A\cup B}) = \varnothing$
     Donc $B\cap\overline{A}$ et $\overline{A\cup B}$ sont disjoints.
3. $(A\cap B)\bigcup(A\cap\overline{B})\bigcup(B\cap\overline{A})\bigcup(\overline{A\cup B}) = E$
   $(A\cap B)\bigcup(A\cap\overline{B})\bigcup(B\cap\overline{A})\bigcup(\overline{A\cup B}) = (A\cap B)\bigcup(A\cap\overline{B})\bigcup(B\cap\overline{A})\bigcup(\overline{A}\cap\overline{B})$
   $= \left[(A\cap B)\ \cup\ (A\cap\overline{B})\right]\bigcup\left[(B\cap\overline{A})\ \cup\ (\overline{A}\cap\overline{B})\right]$
   $= \left[(A\ \cup\ (A\cap\overline{B}))\ \cap\ (B\ \cup\ (A\cap\overline{B}))\right]\bigcup\left[(B\ \cup\ (\overline{A}\cap\overline{B}))\ \cap\ (\overline{A}\ \cup\ (\overline{A}\cap\overline{B}))\right]$
   $= \left[A\cap(A\ \cup\ \overline{B})\ \cap\ (B\ \cup\ A)\ \cap\ (B\ \cup\ \overline{B})\right]\bigcup\left[(B\cup\overline{A})\ \cap\ (B\cup\overline{B})\ \cap\ (\overline{A}\cup\overline{A})\ \cap\ (\overline{A}\cup\overline{B})\right]$
   $= \left[A\cap(A\ \cup\ \overline{B})\ \cap\ (B\ \cup\ A)\ \cap\ E)\right]\bigcup\left[(B\cup\overline{A})\ \cap\ E\ \cap\ \overline{A}\ \cap\ (\overline{A}\cup\overline{B})\right]$
   $= \left[A\cap(A\ \cup\ \overline{B})\ \cap\ (B\ \cup\ A))\right]\bigcup\left[(B\cup\overline{A})\ \cap\ \overline{A}\ \cap\ (\overline{A}\cup\overline{B})\right]$
   $= \left[A\cap(B\ \cup\ A)\right]\bigcup\left[\overline{A}\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\right]$
   $= A\ \cup\ \overline{A}$
   $= E$

Exercice 4. On considère les énoncés suivants.

a. Si les Belges aiment le fromage ou si les Équatoriens font de l'équitation, alors le président du Ghana boit des smoothies aux bananes.
b. Si le président du Ghana boit des smoothies aux bananes ou que son chat est en surpoids, alors les Indonésiens fabriquent des chaises berçantes.
c. Soit il n'est pas vrai que si le chat du président du Ghana est en surpoids, alors les Belges aiment le fromage, soit il est vrai que si les Équatoriens font de l'équitation, alors les Indonésiens fabriquent des chaises berçantes.
d. Les Indonésiens ne fabriquent pas de chaises berçantes.

---

e. Conclusion.

Traduire ce raisonnement dans la logique des propositions. Parmi les conclusions suivantes, lesquelles sont valides ?

a. Les Belges n'aiment pas le fromage.
b. Les Belges n'aiment pas le fromage ou les Équatoriens ne font pas d'équitation.

Résolution

Considérons les prédicats suivants :
b : Les Belges aiment le fromage.
e : Les Équatoriens font de l'équitation.
g : Le président du Ghana boit des smoothies aux bananes.
c : Le chat du président du Ghana est en surpoids.
i : Les Indonésiens fabriquent des chaises berçantes.
La traduction de l'énoncé donne :
$h_1 : (b \vee e) \to g$
$h_2 : (g \vee c) \to i$
$h_3 : \neg(c \to b) \oplus (e \to i)$
$h_4 : \neg i$

Conclusion .
On a :

1	$\neg i$	h_4
2	$\neg(g \vee c)$	h_2, h_4 et règle *Modus Tollens*
$3a$	$\neg(b \vee e)$	h_1, $\neg g$ et $\neg c$ *vu en* 2
$3b$	$(e \to i)$	h_3, $\neg g$, $\neg c$ *vu en* 2 et règle Syllogisme disjonctif
$3b'$	$\neg e$	h_4, $(e \to i)$ *vu en* 3b et règle Modus T ollens

On peut tirer de ce raisonnement que les Belges n'aiment pas le fromage et que les Équatoriens ne font pas d'équitation. Les conclusions a et b sont valides d'après 3a.
3b permet de percevoir le concept de syllogisme disjonctif cela a un but pédagogique.

Exercice 5. On considère le raisonnement suivant.

a. L'ankylosaure est un animal herbivore.
b. Le tyrannosaure est un animal féroce.
c. Un animal féroce est carnivore.
d. Un carnivore peut manger un herbivore.
e. Un animal chasse ce qu'il mange.

---

f. Le tyrannosaure chasse l'ankylosaure.

Le raisonnement est-il valide ?

Résolution

Considérons les prédicats suivants :
$H(x)$: x est un herbivore.
$F(x)$: x est un animal féroce.
$C(x)$: x est un carnivore.
$M(x, y)$: x mange y.
$Ch(x, y)$: x chasse y.

Soient les constantes l : tyrannosaure et a : ankylosaure. On a
La traduction de l'énoncé donne :
$h_1 : H(a)$
$h_2 : F(t)$
$h_3 : F(x) \to C(x)$
$h_4 : C(x) \wedge H(y) \to M(x\,,y)$
$h_5 : M(x\,,y) \to Ch(x\,,y)$

$Ch(t\,,a)$
On a :

1	$F(x) \to C(x)$	h_3
2	$F(t) \to C(t)$	h_3 *et instanciation universelle*
3	$F(t)$	h_2
4	$C(t)$	h_2 *et tape* 2 *et rgle du modus ponens*
5	$H(a)$	h_1
6	$C(t) \wedge H(a)$	*Conjonction des tapes* 4 *et* 5
7	$C(x) \wedge H(y) \to M(x,y)$	h_4
8	$C(t) \wedge H(a) \to M(t,a)$	*Instanciation universelle sur la base de* h_4 (*tape* 7)
9	$M(t,a)$	*tapes* 6 *et* 8 *et rgle du modus ponens*
10	$M(x,y) \to Ch(x,y)$	h_5
11	$M(t,a) \to Ch(t,a)$	*Instanciation universelle sur la base de* h_5 (*tape* 10)
12	$Ch(t,a)$	*tapes* 9 *et* 11 *et rgle du modus ponens*

Exercice 6. Utilisez une preuve cas par cas pour démontrer que :

a. Si x et y sont des nombres réels, alors $|x| + |y| \geq |x + y|$.
Solution
Raisonnons par cas. Trois cas sont facilement identifiables, le premier étant lorsque $x \geq 0$ et $y \geq 0$, le second lorsque $x \leq 0$ et $y \leq 0$ et le dernier lorsque les deux variables sont de signe différent.
- Dans le premier cas, $x \geq 0 \to |x| = x$, $y \geq 0 \to |y| = y$ et $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \to |x + y| = x + y$. On se retrouve donc en présence d'un égalité.
- De façon similaire, dans le second cas, $x \leq 0 \to |x| = -x$, $y \leq 0 \to |y| = -y$ et $x \leq 0 \wedge y \leq 0 \to |x + y| = -(x + y) = -x - y$. On se retrouve donc en présence d'un égalité.
- Dans le dernier cas, on a que $x \geq 0 \to |x| = x$ et $y \leq 0 \to |y| = -y$.
  Lemme 1 :$\forall a \in \mathbb{R}\,, |a|^2 = a^2$ (preuve :examiner les deux cas)
  Lemme 2 :$\forall a \in \mathbb{R}\,, a \leq |a|$ (preuve : examiner les deux cas)
  Lemme 3 :$\forall a\,, b \in \mathbb{R}^+ / a^2 \leq b^2\,, a \leq b$ (preuve :$b^2 - a^2 \geq 0 \iff (b-a)(b+a) \geq 0 \iff b \geq a$)
  On a :
$$\begin{aligned} |x+y|^2 - (|x| + |y|)^2 &= (x+y)^2 - (|x|^2 + 2|x||y| + |y|^2) \text{ par } L_1 \\ &= (x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 + 2|xy| + y^2) \\ &= 2(xy - |xy|) \leq 0 \text{ par } L_2 \end{aligned}$$
  Donc $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$. Par L_3, on a ce qu'on voulait démontrer.

b. Si n est un entier, alors $n(n + 1)$ est pair.
Solution
Raisonnons par cas. Deux cas sont identifiables, lorsque n est pair et lorsque n est impair. Si n est pair, alors on a un produit entre un nombre pair et un nombre impair $(n + 1)$, ce qui donne toujours un résultat pair. Il en est de même si n est impair, ce qui veut dire que $n(n + 1)$ est toujours pair $\forall n \in \mathbb{Z}$.

c. Si n est un entier naturel, alors $n^2 + 3n$ est un entier pair.
Solution
Raisonnons par cas. Deux cas sont identifiables, lorsque n est pair et lorsque n est impair. Si n est pair, alors on a un produit entre un nombre pair (n^2) et un nombre impair $(3n)$, ce qui donne toujours un résultat pair. Il en est de même si n est impair, ce qui veut dire que $n^2 + 3n$ est toujours pair $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Utilisez le raisonnement par l'absurde pour démontrer que :

a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas entier.

Solution

Nous avons à montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \rightarrow \sqrt{n^2+1}$ n'est pas entier. Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^* | \sqrt{n^2+1}$ est entier.
On note $m = \sqrt{n^2+1}$.
On a donc :

$$m^2 = n^2 + 1 \iff m^2 - n^2 = 1 \iff (m-n)(m+n) = 1$$

$m-n$ et $m+n$ sont des entiers. Donc :

$$(m-n = m+n = 1) \wedge (m-n = m+n = -1)(m = 1 \wedge n = 0) \wedge (m = -1 \wedge n = 0)$$

Les deux cas présentent une contradiction puisque $n \neq 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \rightarrow \sqrt{n^2+1}$ n'est pas entier.

b. si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels, alors au moins un de ces nombres est supérieur ou égal à la moyenne de ces nombres.

Solution :

Posons qu'il existe un $a_j \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ tel que la moyenne des $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est plus petite ou égale à a_j. Si on raisonne par l'absurde, on poserait plutôt que $\forall a_j \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, la moyenne des $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est plus grande que a_j. Or, dans le cas où on choisit le a_j comme étant plus grand ou égal à tous les autres $a_1, a_2, \ldots, a_n$:
$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > a_j * n$
$(a_1 - a_j) + (a_2 - a_j) + \ldots + (a_n - a_j) > 0$
est absurde car tous les a_x sont inférieurs ou égaux à a_j, donc toutes les soustractions additionnées devraient donner 0 ou une valeur inférieure à 0. On peut donc affirmer que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels, alors au moins un de ces nombres est supérieur ou égal à la moyenne de ces nombres.

c. aucun entier $(6n+m)(n+6m)$, avec $n, m \in \mathbb{N}$, n'est une puissance de 2.

Solution :

Supposons qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $e = (6n+m)(n+6m)$ soit une puissance de 2.
e étant une puissance de 2, alors $(6n+m)$ et $(n+6m)$ sont aussi des puissances de 2 et par conséquent ils sont pairs. Il s'en suit que n et m sont aussi pairs (de plus ils sont non nuls).
Posons $n = 2k$ et $m = 2t$. On a $e = (12k+2t)(2k+12t) = 4(6k+t)(k+6t) = 2^2(6k+t)(k+6t)$.
En menant le même raisonnement que précédemment, on obtient que $(6k+t)$ et $(k+6t)$ sont des puissances de 2 et que k et t sont pairs. Le procédé pourrait donc continuer à l'infini. Ce qui prouve que e ne peut être une puissance de 2 (sinon le développement serait fini, on devrait s'arrêter à un moment donné).

d. $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Solution :

Lemme : Si n^2 est un multiple de 3 alors n est un multiple de 3.
Preuve : considérons un entier n tel que n^2 soit un multiple de 3. Supposons que n ne soit pas multiple de 3. Alors il existe un entier k tel que n = 3k + 1 ou n = 3k + 2.
Dans les deux cas, n^2 n'est pas un multiple de 3. Donc, n est multiple de 3.
Supposons que $\sqrt{3}$ soit rationnel. Alors il existe deux entiers p et q tels que $\sqrt{3} = p/q$ avec p/q une fraction irreductible.

$$3 = \frac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 3q^2$$

p^2 est multiple de 3 donc p aussi, donc $p = 3p'$. Donc on a :

$$9p'^2 = 3q^2 \implies 3p'^2 = q^2$$

Donc q est aussi divisible par 3, donc $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, ce qui contredit notre hypothèse initiale.
Donc $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 8. Utilisez la contraposée en formant une preuve indirecte pour démontrer que :

a. soit a un réel, si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $a/2$ n'est pas un entier pair.
Solution
La contraposée s'écrit : si $a/2$ est un entier pair, alors a^2 est un multiple entier de 16.
Prouvons-le par la méthode de la preuve directe. Nous supposons donc que $a/2$ est un entier pair. Alors, $\exists k \in \mathbb{N}, a/2 = 2k$. Nous avons $a = 4k$ et $a^2 = 16k$. D'où a^2 est un multiple entier de 16.

b. pour un entier n quelconque, si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
Solution
La contraposée s'écrit : si n est un entier impair quelconque, alors $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.
Prouvons-le par la méthode de la preuve directe. Nous supposons donc que n peut s'écrire $(2x+1)$, où $x \in \mathbb{Z}$ est un entier. Alors, $(n^2 - 1) = 4(x^2 + x)$. Nous avons que $\forall x$, $x^2 + x$ est pair et peut donc s'écrire sous la forme $x^2 + x = 2t$ D'où $n^2 - 1 = 4 * 2t = 8t$ est divisible par 8.

Exercice 9. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $n^3 - n$ est divisible par 6
Solution
Première méthode
$n^3 - n = n(n+1)(n-1)$
$n^3 - n$ est le produit de 3 entiers consécutifs. Donc au moins un de ces entiers est pair, ce qui implique que $n^3 - n$ est pair. De plus, au moins un de ces entiers est multiple de 3, ce qui implique que $n^3 - n$ est divisible par 3.
$n^3 - n$ est divisible à la fois par 2 et 3. Il est alors divisible par 6.
Deuxième méthode
On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, n \ mod\ 6 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
   - Si $n \ mod\ 6 = 0$, alors $n^3 mod\ 6 = 0$. On a donc $(n^3 - n)\ mod\ 6 = 0$
   - Si $n \ mod\ 6 = 1$, alors $n^3 mod\ 6 = 1$. On a donc $(n^3 - n)\ mod\ 6 = 0$
   - Si $n \ mod\ 6 = 2$, alors $n^3 mod\ 6 = 2$. On a donc $(n^3 - n)\ mod\ 6 = 0$
   - Si $n \ mod\ 6 = 3$, alors $n^3 mod\ 6 = 3$. On a donc $(n^3 - n)\ mod\ 6 = 0$
   - Si $n \ mod\ 6 = 4$, alors $n^3 mod\ 6 = 4$. On a donc $(n^3 - n)\ mod\ 6 = 0$
   - Si $n \ mod\ 6 = 5$, alors $n^3 mod\ 6 = 5$. On a donc $(n^3 - n)\ mod\ 6 = 0$

   En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est divisible par 6.
2. $n^5 - n$ est divisible par 30
Solution
$n^5 - n = n(n+1)(n-1)(n^2+1)$
On retrouve encore le produit de 3 entiers consécutifs. Il est alors divisible par 6. On sait que $6 * 5 = 30$ donc il ne reste qu'à démontrer que $n^5 - n$ est aussi divisible par 5. Si parmi les 3 entiers consécutifs aucun n'est divisible par 5, alors on peut écrire les 3 nombres consécutifs comme un multiple de 5 additionné de 1, 2, 3 ou 4 :
$n^5 - n = (5m+1)(5m+2)(5m+3)((5m+2)^2+1)$ ou
$n^5 - n = (5m+2)(5m+3)(5m+4)((5m+3)^2+1)$
Lorsqu'on développe le polynôme, on s'aperçoit que tous les coefficients sont divisibles par 5 dans les 2 cas. En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, n^5 - n$ est divisible par 30.
3. $n^7 - n$ est divisible par 42
Solution
Même idée (mais c'est long) ou utilisation du petit théorème de Fermat qui donne $n^7 - n$ est divisible par 7. L'examen détaillé (plus court) pour 2 et 3 se fait comme pour la deuxième méthode de la première question. On a un nombre divisible par 2, 3 et 7 donc par leur ppcm, soit 42.

2. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 10 (pages 10) ; 11 à 19 (pages 17) ; 28, 41, 44, 45, 46, 47(pages 171).