POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 3-4: RELATION - FONCTIONS

NOTATION ASYMPTOTIQUE - SUITES ET INDUCTION MATHÉMATIQUE

RECURSIVITÉ - FERMETURE DES RELATIONS - ORDRES

1. Relations

Exercice 1. On définit dans $\mathbb{N}^*$ la relation $\ll$ suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, x \ll y \; s'il \; existe \; n \; \in \mathbb{N}^* \; tel \; que \; y = x^n$$

Montrez que $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$

Exercice 2. On définit une relation sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{T}$ suivante:

$$(x,y)\mathcal{T}(x',y') \; si \; |x - x'| \leq y - y'$$

(1) Montrez que $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre.
(2) $\mathcal{T}$ est-elle une relation d'ordre total?.

2. Fonctions

Exercice 3. Sans les cas suivants dites si l'application $f : A \to B$ est injective , surjective ou bijective. Si elle est bijective donnez sa réciproque

(1) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = x + 1$
(2) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 1$
(3) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = 2^x$
(4) $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f(x) = 1/x$
(5) $A \subseteq \mathbb{R}^2, B \subseteq \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x + y, x - y)$

Exercice 4. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$, deux ensembles. On considère les ensembles ci-dessous décrivant une relation E vers F. Précisez si la relation est une fonction, injection, surjection ou bijection.

(1) $\{(a, 2), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\}$
(2) $\{(a, 4), (b, 1), (c, 3), (d, 2)\}$
(3) $\{(a, 2), (b, 2), (a, 1), (b, 4)\}$
(4) $\{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$

Exercice 5. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

(1) Déterminer $F = f(E)$
(2) Vérifier que f est une bijection de E sur F .
(3) Calculer la réciproque de f

Exercice 6. Soient A, B et C trois ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to C$.

1. On suppose $g \circ f$ injective ; montrer que f est injective. g est-elle obligatoirement injective ?
2. On suppose $g \circ f$ surjective ; montrer que g est surjective. f est-elle obligatoirement surjective ?
3. On suppose $g \circ f$ bijective. Que peut-on dire de f et g ? Sont-elles bijectives ?

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^3 - 2$.

(1) Calculer $f \circ g$.
(2) Calculer g^{-1}.

3. Notation asymptotique

Exercice 8. Trouver le plus petit entier n pour lequel $f(x) \in \mathcal{O}(x^n)$ pour chacune des fonctions suivantes, en déterminant des constantes c et k.

a. $f(x) = 4x^2 + 2x^4 + 5$
b. $f(x) = \frac{x^3+8}{5x^2+3x}$
c. $f(x) = 3x^3 - x^2\ log(x)$
d. $f(x) = 4x^4 - 4\ log^3(x)$

Exercice 9. Soit la fonction $f : n \to \left(10^6 n^2 + \frac{n^3}{\log(n)}\right) \cdot (2 + \cos(n))$ définie sur $\mathbb{N}$. Prouver que :

$$f \in \Theta\left(\frac{n^3}{\log(n)}\right)$$

(Θ: grand theta)

Exercice 10. Sur une échelle croissante, classer les fonctions suivantes selon leur comportement asymptotique.

a. $f_1(n) = 2\sqrt{n}$
b. $f_2(n) = \frac{n^4}{6}$
c. $f_3(n) = e^n$
d. $f_4(n) = \sqrt{log(n)}$
e. $f_5(n) = n\log(n)$
f. $f_6(n) = e^{-n}$

4. Suites et induction mathématique

Exercice 11. À 14h durant l'été, sous une température avoisinant 35°C, on dépose un morceau de viande sur un comptoir. Le morceau de viande contient 50 bactéries. On fait l'hypothèse que dans ces conditions, le nombre de bactéries double toutes les 15 minutes.
Soit $\mathcal{U}_n$ est le nombre de bactéries à un moment déterminé, $\mathcal{U}_{n+1}$ le nombre de bactéries 15 minutes plus tard.

1. Préciser la nature et la raison de la suite $(\mathcal{U}_n)$.
2. Exprimer $\mathcal{U}_n$ en fonction de n.
3. Calculer le nombre de bactéries à 16h.
4. En supposant que les conditions ne changent pas, à quelle heure (arrondie au quart d'heure supérieur) aurait-on 100 000 bactéries sur le morceau de viande ?

Exercice 12. Donnez une définition récursive de la suite a_n.

1. $a_n = 2n - 1$
2. $a_n = 3 - 2^n$
3. $a_n = 2^{2^n}$
4. $a_n = \frac{n^2-n+2}{2}$

Exercice 13. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} < \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Exercice 14. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 2$, $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+U_n}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, On a $1 \leq U_n \leq 2$.

Exercice 15. Pour tout réel x et pour tout entier positif non nul n on a :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

En utilisant la notion d'itération, donner l'algorithme d'une fonction qui calcule $S_n(x)$.

Exercice 16. La fonction d'Ackermann est une fonction récursive à deux paramètres entiers définie par :

$$f(n\,,m) = \begin{cases} m+1 & Si\ n = 0 \\ f(n-1,1) & Si\ n \geq 1\ et\ m = 0 \\ f(n-1, f(n, m-1)) & Si\ n \geq 1\ et\ m \geq 1 \end{cases}$$

1. Calculer $f(1\,,0)\,, f(2\,,0)\,, f(3\,,0)$
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\,, f(1\,,k) = k+2$
3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\,, f(2\,,k) = 2k+3$
4. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\,, f(3\,,k) = 2^{k+3} - 3$

5. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2 (pages 64) ; 15, 18, 20, 24 et 26 (pages 65) ; 8, 9 et 14 (pages 73) ; 26 et 27 (pages 83) ; 2, 4, 5, 8 (page 197) ; 18, 21 (page 205) ; 40 (page 215).

6. Récursivité

Exercice 17. Donnez une d´efinition récursive de l'ensemble des entiers positifs congrus à 3 modulo 7 ou congrus à 5 modulo 7.

Exercice 18. Construire un algorithme récursif qui calcule $n * x$ lorsque n et x sont des entiers positifs.

Exercice 20. Démontrez que la somme des n premiers entiers impairs est égale à n^2.

Exercice 21. Démontrez que $n < 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer par induction que $16| \quad \left(3^{2n+6} - 5^{n+2} - 4n\right)$

7. Fermeture des relations

Exercice 23. Soit la relation $\mathcal{R}$ d´efinie sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ par :
$\{(1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 5)\}$.

1. Dessiner le graphe de la relation $\mathcal{R}$.
2. Donner la matrice de la relation $\mathcal{R}$.
3. Donner la fermeture réflexive de $\mathcal{R}$.
4. Donner la fermeture symétrique de $\mathcal{R}$.
5. Donner la fermeture transitive de $\mathcal{R}$.

Exercice 24. On consid`ere les trois ensembles $A = \{2, 3, 4, 6\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{0, 3, 5\}$ et deux relations $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ et $\mathcal{S} \subseteq B \times C$ définies par : $\mathcal{R} = \{(4, a), (6, a), (6, b), (4, c), (6, c)\}$ et $\mathcal{S} = \{(a, 0), (b, 5), (c, 5), (d, 3)\}$

1. Donner la matrice de la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
2. Donner la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ sous forme d'un ensemble de couples.

Exercice 25. Soit la relation $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ d´efinie par : $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, a \times b \leq a + b\}$.

1. Donner la relation $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ sous forme d'un ensemble de couples.
2. En déduire que $\mathcal{R} \circ (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.

8. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 2, 4, 5, 8 (page 197) ; 35 (page 198) ; 18, 21 (page 205) ; 29 (page 214) ; 40 (page 215)

9. Ordres

Exercice 26. On considère la relation d'ordre $\subset$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.

1. Dessiner le diagramme de Hasse pour cette relation.
2. Quels sont les éléments minimaux, maximaux ?
3. Donner le plus petit élément, s'il y a lieu.
4. Donner le plus grand élément, s'il y a lieu.

Exercice 27. Trouver le diagramme de Hasse pour la relation “plus grand ou égal à ” dans l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Exercice 28. Proposer un tri topologique pour le graphe suivant :