
TD 9 : DÉNOMBREMENT
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

Exercice 1. Dans un jeu de 52 cartes, on choisit 5 cartes au hasard. (ces 5 cartes s'appellent une "main").

1. Combien de mains contiennent exactement 2 dames et 1 roi ? $\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{44}{2}$
2. Combien de mains contiennent au moins 3 rois ? $\binom{4}{3} \times \binom{48}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{48}{1}$

Exercice 2. Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 400 qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 4 ?
$400 - \lfloor \frac{400}{2} \rfloor - \lfloor \frac{400}{3} \rfloor + \left\lfloor \frac{400}{2 \times 3} \right\rfloor = 133$

Exercice 3. Calculez le coefficient de x^4y^7 dans le développement de $(2x - y)^{11}$.$-\binom{11}{7} * 16 = -5280$

Exercice 4. *Dénombrement*

(1) Quel est le coefficient de $a^3b^4c^3$ dans le développement de $(a + b + c)^{10}$?
Dans le développement de
$$(a + b + c)^{10} = (a + b + c)(a + b + c)...(a + b + c)$$
on obtient un terme $a^3b^4c^3$ en choisissant trois a, quatre b et trois c.
Il y a $\binom{10}{3}$ choix possibles pour les facteurs dont viendront les a.
Après ce premier choix, il y a $\binom{7}{4}$ choix possibles pour les facteurs d'où viendront les b. Au total, il y a :
$$\binom{10}{3}\binom{7}{4} = 4200$$
termes $a^3b^4c^3$ dans ce développement.

(2) Même question avec $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_p^{k_p}$ dans $(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)^n$.
De même, on obtient $\frac{n!}{\Pi_{i=1}^{p} k_i!}$ si $\sum_{i=1}^{p} k_p = n$ et 0 sinon.

Exercice 5. Soit E un ensemble à n éléments. On appelle dérangement de E toute permutation de E ne laissant aucun élément invariant. On notera D_n le nombre de dérangements de E. On pose $D_0 = 1$.

1. Si E comporte un seul élément, y-a-t-il des dérangements de E ? En déduire D_1.
Réponse : Pas de dérangement. $D_1 = 0$.
2. Si E comporte deux éléments, combien y-a-t-il de dérangements de E ? En déduire D_2.
Réponse : 1 dérangement. $D_2 = 1$.
3. On suppose n quelconque, et on ecrit $E = \{a_1, ..., a_n\}$. Soit f une permutation de E. On suppose qu'elle laisse k éléments invariants. Combien y-a-t-il de telles permutations ? En déduire la formule suivante :
$$n! = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) \times D_k$$
Réponse : Une permutation qui laisse k éléments invariants contient $(n - k)$ dérangements, soit D_{n-k}.
Il y a $C(n, k)$ façons d'avoir k éléments invariants.
Le nombre de permutations est donc $\sum_{k=0}^{n} C(n, k) \times D_{n-k}$.
Déduction : Le nombre de permutations de E est $n!$. On peut donc établir que $n! = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) \times D_{n-k}$.
$\sum_{k=0}^{n} C(n, k) \times D_{n-k} = C(n, 0) \times D_n + C(n, 1) \times D_{n-1} + \cdots + C(n, n-1) \times D_1 + C(n, n) \times D_0$

En considérant que $C(n,k) = C(n,n-k)$, on a :
$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k} = C(n,n) \times D_n + C(n,n-1) \times D_{n-1} + \cdots + C(n,1) \times D_1 + C(n,0) \times D_0$
D'où $n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_k$.

4. En déduire D_3, D_4, D_5.
Réponse : $D_3 = 2$ car $3! = \sum_{k=0}^{3} C(3,k) \times D_k$. En faisant une démarche analogue on obtient $D_4 = 9$, $D_5 = 44$.

Exercice 6. Marie possède cinq paires de gants et s'amuse à les porter de façon dépareillée ; tout d'abord, elle sépare les gants pour la main gauche des gants pour la main droite. Ensuite, elle numérote les gants pour la main gauche de 1 à 5 , et les gants pour la main droite de 1 à 5 (où la paire de gants assortis correspond au gant pour la main gauche n°x et au gant pour la main droite n°x). Finalement, pour chaque gant pour la main droite, elle choisit au hasard un gant pour la main gauche pour finir la paire.

1. À chaque numéro de gant pour la main gauche, on associe le numéro du gant pour la main droite avec lequel il est en paire. Combien y a t-il d'associations possibles ?
Réponse : Une telle association correspond à une permutation de $\{1, ..., 5\}$. Il y a $5! = 120$ possibilités.
2. De combien de manières peut-on composer cinq paires de gants de sorte qu'aucune paire légitime ne soit reconstituée ?
Réponse : Si aucune paire légitime n'est reconstituée, c'est qu'il y a un dérangement. Il y a $D_5 = 44$ possibilités (voir numéro précédent).
3. De combien de manières peut-on composer cinq paires de gants pour qu'une seule paire légitime soit reconstituée ?
Réponse : Si une seule paire légitime est reconstituée, il y a 5 choix pour cette paire. Pour le reste, il faut un dérangement : il y a donc $5 \times D_4 = 45$ possibilités (voir numéro précédent).
4. De combien de manières peut-on composer cinq paires de gants pour qu'il y ait plus de paires illégitimes assorties que de paires légitimes ?
Réponse :
   - On peut avoir trois (03) paires illégitimes et deux (02) paires légitimes. Or il y a $C(5,3) = 10$ choix de 2 paires légitimes parmi 5. Pour les 3 autres, il faut une association qui soit un dérangement D_3. On a donc : $10 \times D_3 = 20$ possibilités (voir numéro précédent).
   - On peut avoir quatre (04) paires illégitimes et une (01) paire légitime. Ce cas est traité dans la question précédente (question 3.). On a donc : $5 \times D_4 = 45$ possibilités (voir numéro précédent).
   - On peut avoir cinq (05) paires illégitimes et zéro (0) paire légitime. Ce cas est traité dans la question 2. On a donc : $D_5 = 44$ possibilités (voir numéro précédent).

   Le nombre d'associations où il y a plus de paires illégitimes que de paires légitimes est donc : 20 + 45 + 44 = 109.

Exercice 7. Parmi les permutations de l'ensemble E = {a, b, c, d, e, f} (que l'on peut représenter par les mots de 6 lettres qui contiennent exactement une fois chaque lettre de E), combien y en a-t-il qui ne contiennent ni ab ni cd ni ef ?

Première méthode

- Nombre de permutations qui contiennent ab.
Pour une position fixe de ab, il y a : 4! possibilités de placer les autres lettres. Or il y a 5 positions possibles pour ab. Donc pour ab on a : $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent cd.
Le raisonnement est analogue au cas de ab. D'où $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ef.
Le raisonnement est analogue au cas de ab. D'où $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab et cd
Pour une position fixe de ab et cd, il y a : 2! possibilités de placer les autres lettres. Il y a 5 positions possibles pour ab. Une fois ab placé, il y a 3, 2, 2, 2, 3 positions respectives pour cd. Soit 12 possibilités. Donc pour ab et cd on a : $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab et ef
Le raisonnement est analogue au cas de ab et cd. D'où $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.

- Nombre de permutations qui contiennent cd et ef
  Le raisonnement est analogue au cas de ab et cd. D'où $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab, cd et ef
  Il y a $3! = 6$ possibilités de permutations.

Le résultat recherché est alors $6! - (3(5 \times 4!) - 3(12 \times 2!) + 3!) = 720 - 294 = 426$ possibilités de permutations.

Deuxième méthode

- Pour avoir ab seul on a : $5 \times 4! - 42$ possibilités. Pareil pour cd seul ou ef seul. Au total on a : $3(5 \times 4! - 42) = 234$ possibilités.
- Pour avoir ab et cd ensemble et sans ef on a : 18 possibilités. Pareil pour cd et ef sans ab puis ab et ef sans cd. Au total on a : 54 possibilités.
- Pour avoir ab, cd et ef ensemble on a : 6 possibilités.

Le résultat recherché est alors $6! - 3(5 \times 4! - 42) - (3 \times 18) - 6 = 426$ possibilités de permutations.

Exercice 8. Un mot long de n lettres compte l lettres différentes. La $i^{ème}$ lettre apparaît n_i fois dans le mot, donc on a :

$$\sum_{i=1}^{l} n_i = n$$

Combien d'anagrammes du mot peut-on écrire ?

- Si on considère toutes les lettres comme distinctes, même lorsqu'il s'agit de la même lettre de l'alphabet, il y a $n!$ permutations. Chaque anagramme a une ou plusieurs permutations qui permet(tent) de l'obtenir.
- Quel que soit l'anagramme considéré, le nombre de permutations associées est $\prod_{i=1}^{l}(n_i!)$ (faire un exemple si nécessaire).

Donc il y a $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{l} n_i!}$ anagrammes.

Exercice 9. On considère le mot MORPHEUS.

1. Dénombrer les anagrammes du mot. $8\,!$
2. Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot :
   2.1. commençant et finissant par une voyelle ;
   $6 \cdot 6!$
   2.2. commençant et finissant par une consonne ;
   $20 \cdot 6!$
   2.3. commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
   $15 \cdot 6!$
   2.4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne. $15 \cdot 6!$

Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 8, 9, 10, 29,30, 32 (Pages 333-335).