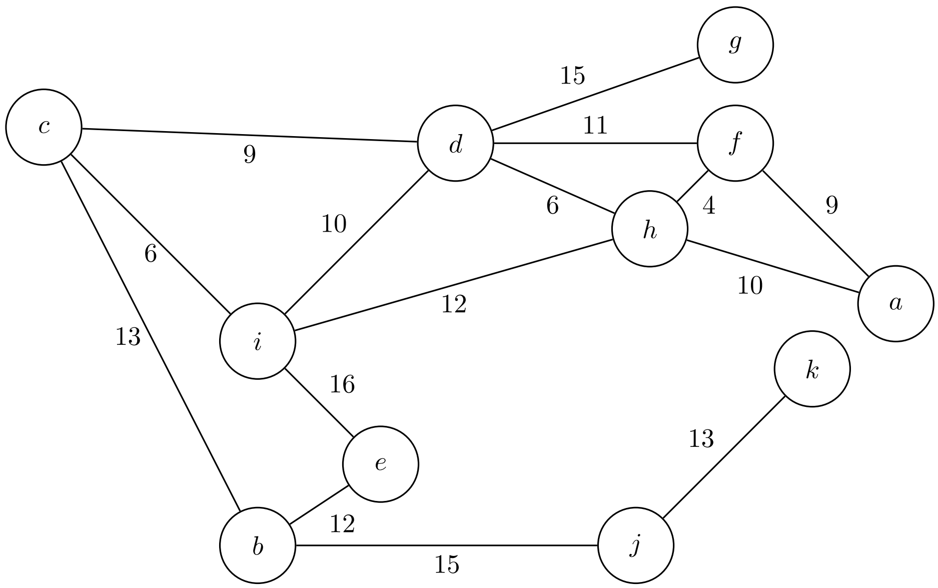
TD 6 : GRAPHES - ARBRES

Exercice 1. Appliquez l'algorithme de Dijkstra au graphe suivant afin de trouver le plus court chemin du sommet a au sommet k.



Solution :

(1) $S = \{a\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0)\}$
Chemins connus : $C = \{(ah, 10), (af, 9)\}$, le reste étant toujours à l'infini.

(2) $S = \{a, f\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9)\}$
Chemins connus : $C = \{(ah, 10), (afd, 20), (afh, 13)\}$

(3) $S = \{a, f, h\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahd, 16), (ahi, 22)\}$

(4) $S = \{a, f, h, d\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31)\}$

(5) $S = \{a, f, h, d, i\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38)\}$

(6) $S = \{a, f, h, d, i, c\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$

(7) $S = \{a, f, h, d, i, c, g\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$

(8) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdcb, 38)\}$

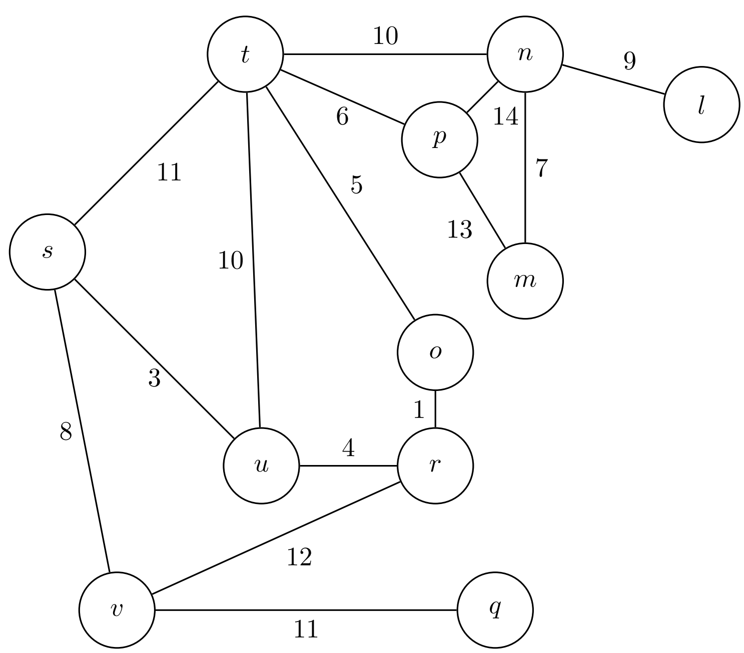
(9) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdcbj, 53)\}$

(10) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b, j\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38), (ahdcbj, 53)\}$
Chemins connus : $C = \{(ahdcbjk, 66)\}$

(11) $S = \{a, f, h, d, i, c, g, e, b, j, k\}$
Chemins fixés : $F = \{(a, 0), (af, 9), (ah, 10), (ahd, 16), (ahi, 22), (ahdc, 25), (ahdg, 31), (ahie, 38), (ahdcb, 38), (ahdcbj, 53), (ahdcbjk, 66)\}$

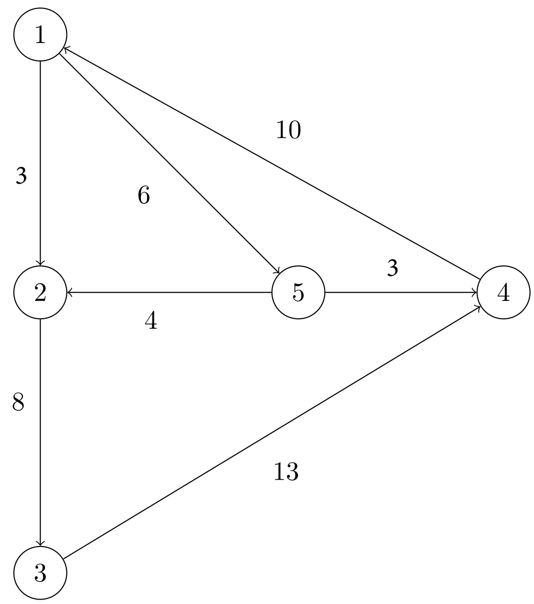
Chemins connus : $C = \{\}$
L'algorithme s'arrête ici en raison de l'apparition du sommet visé dans l'ensemble des sommets connus S. Si on consulte le chemin emprunté pour s'y rendre, on obtient la suite des sommets a, h, d, c, b, j, k pour une distance minimale de 66.

Exercice 2. Appliquez l'algorithme de Floyd au graphe suivant afin de trouver la longueur du chemin minimal du sommet l au sommet v.



Solution : 37
Conseil : Implémenter l'algorithme parce qu'il n'est pas agréable à faire à la main.

Exercice 3. Appliquez l'algorithme de Floyd au graphe suivant afin de trouver la longueur du chemin minimal du sommet *1* au sommet *4*.



Solution : 9

Exercice 4. Soit T un graphe connexe à n sommets montrer que T possède au moins n - 1 aretes.

Solution :
Par récurrence sur n :

Le résultatest évident pour $n = 1$ et $n = 2$.

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. On suppose que tout graphe connexe de n sommets possède au moins $n - 1$ arêtes.

Soit alors T un graphe connexe à $n + 1$ sommets. Soit a le nombre d'arêtesde T.

Notons que la connexité assure que chaque sommet est de degré au moins 1.

- Si chaque sommet est de degré au moins 2, alors le théorème des poignées de main conduit $2a = \sum_{A \in \mathcal{S}} d(A) \geqslant 2n$, et donc $a \geqslant n$.

- S'il existe un sommet de degré 1. Notons le A. Alors, le graphe induit T' obtenu en éliminant A et l'arête dont il est l'extrémité, est un graphe connexe de n sommets qui possède exactement

une arête de moins que T. D'après l'hypothèse de récurrence, T' possède donc au moins n-1 arêtes, d'où T en possède au moins n, ce qui achève la démonstration.

Exercice 5. Montrer que pour un graphe T à n sommets les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) T est un arbre
(2) T est un graphe connexe à $n-1$ arêtes

Preuve :
On peut tout de suite supposer que $n \geqslant 2$.

- Si T est un graphe connexe de n sommets et de n - 1 arêtes.
Par l'absurde : supposons que T possède un cycle, disons $M_1 M_2 ... M_k M_1$.

Alors, en supprimant l'arête (M_1, M_2), on ne brise pas la connexité du graphe (si l'on a besoin de passer de M_1 à M_2, ou le contraire, il suffit de faire le tour via le chemin $M_2 ... M_k M_1$). Le nouveau graphe obtenu est donc connexe et possède n sommets et $n-2$ arêtes, ce qui contredit le résultat de l'exercice précédent.

Donc, T ne possède pas de cycle, ce qui permet d'affirmer qu'il s'agit bien d'un arbre.

- Prouvons maintenant par récurrence sur n, que si T est un arbre à n sommets alors il possède exactement n-1 arêtes.

La conclusion est évidente pour $n = 2$.
Soit $\geqslant$ fixé. Supposons la conclusion établie pour tout arbre de sommets.
Soit T un arbre à $n+1$ sommets.
On va commencer par prouver que T possède au moins un sommet de degré 1 :
Par l'absurde : supposons que tous les sommets soient de degrés au moins 2.

Soit alors M un sommet arbitraire. On choisit M parmi les sommets adjacents à M_1, et on colorie l'arête (M_1, M_2). On choisit alors un sommet M_3, adjacent à M_2 selon une arête non encore coloriée (ce qui est possible, puisque $d(M_2) \geqslant 2$), et on colorie l'arête (M_2, M_3). Et ainsi de suite, tant que c'est possible, si M_i vient d'être construit et qu'il reste une arête d'extrémité M_i qui n'a pas encore été coloriée, on choisit un sommet noté M_{i+1} parmi ceux qui sont les autres extrémités de telles arêtes, et on colorie l'arête (M_i, M_{i+1}).
Comme le nombre d'arêtes est fini et que le nombre d'arêtes non coloriées diminue d'une unité à chaque étape, cette procédure va devoir s'arrêter.

Comme T ne possède pas de cycle, il est impossible qu'un même sommet apparaîsse deux fois dans la suite (M_i).

Soit M_k le dernier sommet construit. Alors, puisque $d(M_k) \geqslant 2$ et que l'on a colorié qu'une seule arête d'extrémité M_k, c'est donc qu'il en reste encore au moins une non coloriée et qui permet de poursuivre la construction. Contradiction

Ainsi, T possède au moins un sommet de degré 1, disons A. Mais alors, en supprimant A et l'arête dont il est une extrémité, on obtient un sous-graphe T' qui est toujours connexe et sans cycle, c.à.d. un arbre, mais qui possède exactement un sommet et une arête de moins que T.

L'hypothèse de récurrence assure donc que T' possède exactement n-1 arêtes, et ainsi que T en possède exactement n.

Exercice 6. Un arbre m-aire complet M avec $m = 5$ a exactement :

a. $n = 21$ sommets. Combien a-t-il de feuilles? 17
b. $i = 12$ sommets internes. Combien a-t-il de sommets? 61
c. $l = 129$ feuilles. Combien a-t-il de sommets internes? 32