MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 2: Les intégrales curvilignes

Intégrale curviligne générale

Introduction

- Intégrale d'une fonction le long d'une courbe.
- Propriété des intégrales curvilignes.

Intégrale curviligne générale

Rappel :

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors la longueur de C est

$$L = \int_a^b ||\vec{r}'(t)||\, dt$$

Intégrale curviligne générale

Rappel :

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors la longueur de C est

$$L = \int_a^b ||\vec{r}'(t)||\, dt = \int_C 1\, ds$$

Intégrale curviligne générale

Rappel :

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors la longueur de C est

$$L = \int_a^b ||\vec{r}'(t)||\, dt = \int_C 1\, ds$$

Définition

Si f est une fonction définie dans un voisinage de C alors l'intégrale de f le long de C est

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, ||\vec{r}'(t)||\, dt$$

Intégrale curviligne générale

Rappel :

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors la longueur de C est

$$L = \int_a^b ||\vec{r}'(t)||\, dt = \int_C 1\, ds$$

Définition

Si f est une fonction définie dans un voisinage de C alors l'intégrale de f le long de C est

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, ||\vec{r}'(t)||\, dt$$

Notation : On écrit $f(x(t), y(t), z(t)) = f(\vec{r}(t))$ pour simplifier.

Intégrale curviligne générale

Propriétés

- Les propriétés habituelles des intégrales (linéarité, etc.) s'appliquent aussi aux intégrales curvilignes.

Intégrale curviligne générale

Propriétés

- Les propriétés habituelles des intégrales (linéarité, etc.) s'appliquent aussi aux intégrales curvilignes.
- En particulier, si $C = C_1 \cup C_2$ et les courbes $C_1,\ C_2$ ne se chevauchent pas alors

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_{C_1} f(x, y, z)\, ds + \int_{C_2} f(x, y, z)\, ds$$

Intégrale curviligne générale

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$dx = x'(t)\,dt, \quad dy = y'(t)\,dt, \quad dz = z'(t)\,dt.$$

Intégrale curviligne générale

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$dx = x'(t)\,dt, \quad dy = y'(t)\,dt, \quad dz = z'(t)\,dt.$$

Définition

Si f est une fonction définie dans un voisinage de C, on définit

1. $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,dx = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,x'(t)\,dt$
2. $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,dy = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,y'(t)\,dt$
3. $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,dz = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,z'(t)\,dt$

Intégrale curviligne générale

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$dx = x'(t)\,dt, \quad dy = y'(t)\,dt, \quad dz = z'(t)\,dt.$$

Définition

Si f est une fonction définie dans un voisinage de C, on définit

1. $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,dx = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,x'(t)\,dt$
2. $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,dy = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,y'(t)\,dt$
3. $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,dz = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,z'(t)\,dt$

Pour ces intégrales, on tient compte de la variation selon une seule des variables.

Résumé

- Définition de l'intégrale curviligne par rappport à s comme généralisation de l'intégrale donnant la longueur d'une courbe.

Résumé

- Définition de l'intégrale curviligne par rappport à s comme généralisation de l'intégrale donnant la longueur d'une courbe.
- Définition de l'intégrale curviligne rappport à une variable.

Résumé

- Définition de l'intégrale curviligne par rappport à s comme généralisation de l'intégrale donnant la longueur d'une courbe.
- Définition de l'intégrale curviligne rappport à une variable.
- Propriétés des intégrales curvilignes.