Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH1102D - Calcul II

Été 2023

Devoir 12

Nom : ____________________ **Prénom :** ____________________

Matricule : __________________ **Groupe :** __________

Question corrigée	Autres questions	Total
5	4	9 /10

Devoir 12

#1 Cylindre $x^2+y^2=16$ entre les plans $z=10+x$ $z=0$

Orientée au point $(4,0,5)$ par le vecteur normal $\vec{i}$.

5 Flux du champ vectoriel $\vec{F}$ à travers S ?

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2+y^2)\vec{i} + \ln(1+z^2)\vec{j} + 2z\vec{k}$$

- C'est un cylindre avec une hauteur infinie, donc région ouverte (selon vidéos du cours)

- On ferme ainsi la surface

$D_1 = x^2+y^2 \leq 16$ $\quad z=0$

$D_2 = x^2+y^2 \leq 16$ $\quad z=10+x$

$S' = S \cup D_1 \cup D_2$

E : région de l'espace bornée par S'

- Utilison le théorème de flux de divergence.

Aussi, puisque l'orientation vers l'extérieur de S, S' a une orientation positive

$$\text{flux} = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iiint_E \text{div}\,\vec{F}\,dV$$

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\begin{cases} P = x^2+y^2 & \frac{\partial P}{\partial x} = 2x \\ Q = \ln(1+z^2) & \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ R = 2z & \frac{\partial R}{\partial z} = 2 \end{cases}$$

$\operatorname{div}\vec{F} = 2x + z$

- Coordonnées cylindriques pour région E :

$x^2 + y^2 = 16 \qquad r = 4 \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad 0 \leq z \leq 10 + r\cos\theta$

$E = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq r \leq 4,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 10 + r\cos\theta\}$

$$\iiint = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^{10+r\cos\theta} 2r^2\cos\theta + 2r \, dz\, dr\, d\theta$$

distribution du Jacobien

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^{10+r\cos\theta} 2r^2\cos\theta \, dz\, dr\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^{10+r\cos\theta} 2r \, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 (2r^2\cos\theta)(r\cos(\theta)+10)\, dr\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^4 20r + 2r^2\cos\theta \, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 2r^3\cos^2\theta + 20r^2\cos\theta \, dr\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^4 2r^2\cos\theta + 20r \, dr\, d\theta$$

$\Rightarrow \int_0^4 2r^3\cos^2\theta + 20r^2\cos\theta \, dr = \frac{1280}{3}\cos\theta + 128\cos^2\theta$

$\Rightarrow \int_0^4 2r^2\cos\theta + 20r\, dr = 160 + \frac{128}{3}\cos\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1280}{3}\cos\theta + 128\cos^2\theta \, d\theta \qquad = \int_0^{2\pi} 160 + \frac{128}{3}\cos\theta \, d\theta$$

$$= 128\pi \qquad + \qquad 320\pi$$

$$= 448\pi$$

Région D_1 : orientation positive correspond au vecteur normal par le bas

$\vec{F}(x,y,0) = (x^2+y^2)\vec{i} + \ln(1+z^2)\vec{j} + \cancel{z(0)}\vec{k}$

Vecteur unitaire D_1 dirigé par le bas est : $\vec{n}_1 = -\vec{k}$

$$\iint_{D_1} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_{D_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS = \iint_{D_1} 0 \, dS = 0$$ ✓

Région D_2 : orientation positive correspond au vecteur normal dirigé vers le haut

$$\vec{F}(x, y, 10+x) = (x^2+y^2)\vec{i} + \ln(1+z^2)\vec{j} + z(10+x)\vec{k}$$

$\vec{n}_2 = \cancel{\vec{k}}$ car dirigé vers le haut D_2 pas horizontal

$$\iint_{D_2} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_{D_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS = \iint_{D_2} 2x + 20 \, \vec{k} \, dS$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^4 (20 + 2r\cos\theta) \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^4 20r + 2r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^4 20r + 2r^2\cos\theta \, dr = 160 + \frac{128}{3}\cos\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 160 + \frac{128}{3}\cos\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 160 \, d\theta + \frac{128}{3}\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta$$

$$= 320\pi + 0$$

$$= 320\pi$$ ✗

- Calcul du flux à travers la surface S :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{dS} - \iint_{D_1} \vec{F} \cdot \vec{dS} - \iint_{D_2} \vec{F} \cdot \vec{dS}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = 448\pi - 0 - 320\pi = \boxed{128\pi}$$

#2 a) B : situé au dessus plan $z=1$

$$m = -c \oiint_S \frac{1}{z} \vec{k} \cdot \vec{dS}$$

On sait que : $\rho(x,y,z) = \frac{c}{z^2}$

$$m = \iiint_B \rho(x,y,z)\, dS = \iiint_B \frac{c}{z^2}\, dS$$

$dA = \vec{k}\, \vec{dS}$ ⇒ Projection de la normale

$$c \iint_B \frac{-1}{z}\, dA = -c \iint_S \frac{1}{z} \vec{k}\, \vec{dS}$$

Vu que la surface est fermée, alors

$$m = -c \oiint_S \frac{1}{z} \vec{k}\, \vec{dS}$$

b) $\vec{R}(u,v) = u(4-u^2)\cos(v)\,\vec{i} + u(4-u^2)\sin(v)\,\vec{j} + (1+u)\,\vec{k}$

$(u,v) \in [0,2] \times [0,2\pi]$ $\quad c=1$

$$\vec{n} = \vec{R_u} \times \vec{R_v}$$

$$\vec{R_u} = (\cos(v)(4-3u^2))\,\vec{i} + (\sin(v)(4-3u^2))\,\vec{j} + 1\,\vec{k}$$
$$\vec{R_v} = (-u(4-u^2)\sin(v))\,\vec{i} + (u(4-u^2)\cos(v))\,\vec{j}$$

$$\vec{R_u} \times \vec{R_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(v)(4-3u^2) & \sin(v)(4-3u^2) & 1 \\ -u(4-u^2)\sin(v) & u(4-u^2)\cos(v) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -u(4-u^2)\cos(v)\vec{i} - (-u(4-u^2)\sin(v))\vec{j} +$$
$$(\cos^2(v)(4-3u^2)(u(4-u^2)) + \sin^2(v)(4-3u^2)(u(4-u^2)))\vec{k}$$

$$= -u(4-u^2)\cos(v)\vec{i} - (-u(4-u^2)\sin(v))\vec{j} + \underbrace{(u(-u^2+4)(-3u^2+4))}\vec{k}$$

$\boxed{-\vec{n}}$ pour l'orientation afin de refléter le vecteur position de la surface

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{\vec{k}}{z}\, du\, dv$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{u(-u^2+4)(-3u^2+4)}{1+u}\, dv$$
$$= 2\pi - 0$$
$$= 2\pi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{u(-u^2+4)(-3u^2+4)}{1+u}\, du\, dv$$

$$= 2\pi \int_0^2 \frac{u(-u^2+4)(-3u^2+4)}{1+u}\, du$$

Démarche : On fait une division :

$$\frac{u(-u^2+4)(-3u^2+4)}{1+u} \Rightarrow 3u^4 - 3u^3 - 13u^2 + 13u + 3 - \frac{3}{u+1}$$

$$= \int_0^2 3u^4 - 3u^3 - 13u^2 + 13u + 3 - \frac{3}{u+1}\, du$$

Appliquer la règle de la somme

$$= \underbrace{\int_0^2 3u^4\, du}_{\frac{96}{5}} - \underbrace{\int_0^2 3u^3\, du}_{12} - \underbrace{\int_0^2 13u^2\, du}_{\frac{104}{3}} + \underbrace{\int_0^2 13u\, du}_{26} + \underbrace{\int_0^2 3\, du}_{6} - \underbrace{\int_0^2 \frac{3}{u+1}\, du}_{3\ln(3)}$$

Simplifier $= -3\ln(3) + \frac{68}{15}$

$$\Rightarrow = 2\pi\left(-3\ln(3) + \frac{68}{15}\right) \approx 7{,}775$$