MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 3: Le théorème fondamental des intégrales curvilignes

Exemple 1: calcul du travail à l'aide du TFIC

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

1. Vérifions si $\vec{F}$ est conservatif :

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

1. Vérifions si $\vec{F}$ est conservatif :

   1. Les composantes $P(x,y) = (x^3 + 4xy)$ et $Q(x,y) = (2x^2 - y^3)$ du champ sont des polynômes et donc leurs dérivées partielles sont continues dans $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3+4xy)\,\vec{i} + (2x^2-y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

1. Vérifions si $\vec{F}$ est conservatif :
   1. Les composantes $P(x,y) = (x^3+4xy)$ et $Q(x,y) = (2x^2-y^3)$ du champ sont des polynômes et donc leurs dérivées partielles sont continues dans $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe.
   2. On a
   $$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4x = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3+4xy)\,\vec{i} + (2x^2-y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

1. Vérifions si $\vec{F}$ est conservatif :

   1. Les composantes $P(x,y) = (x^3+4xy)$ et $Q(x,y) = (2x^2-y^3)$ du champ sont des polynômes et donc leurs dérivées partielles sont continues dans $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe.
   2. On a
   $$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4x = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Par conséquent, $\vec{F}$ est conservatif en vertu du critère pour les champs conservatifs en deux dimensions.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ :

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} f_x & = & x^3 + 4xy & (1) \\ f_y & = & 2x^2 - y^3 & (2) \end{array} \right.$$

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} f_x & = & x^3 + 4xy & (1) \\ f_y & = & 2x^2 - y^3 & (2) \end{array} \right.$$

(1) implique que $f = x^4/4 + 2x^2y + A(y)$, où A est indépendante de x.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe $C : \vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} f_x & = & x^3 + 4xy & (1) \\ f_y & = & 2x^2 - y^3 & (2) \end{array} \right.$$

(1) implique que $f = x^4/4 + 2x^2y + A(y)$, où A est indépendante de x.
(2) donne

$$2x^2 - y^3 = f_y = 2x^2 + A_y(y)$$

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} f_x & = & x^3 + 4xy & (1) \\ f_y & = & 2x^2 - y^3 & (2) \end{array} \right.$$

(1) implique que $f = x^4/4 + 2x^2y + A(y)$, où A est indépendante de x.
(2) donne

$$\cancel{2x^2} - y^3 = f_y = \cancel{2x^2} + A_y(y) \Rightarrow A_y(y) = -y^3$$

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} f_x & = & x^3 + 4xy & (1) \\ f_y & = & 2x^2 - y^3 & (2) \end{array} \right.$$

(1) implique que $f = x^4/4 + 2x^2y + A(y)$, où A est indépendante de x.
(2) donne

$$\cancel{2x^2} - y^3 = f_y = \cancel{2x^2} + A_y(y) \Rightarrow A_y(y) = -y^3 \Rightarrow A(y) = -y^4/4 + B$$

où B est une constante

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \le t \le 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} f_x & = & x^3 + 4xy & (1) \\ f_y & = & 2x^2 - y^3 & (2) \end{array} \right.$$

(1) implique que $f = x^4/4 + 2x^2y + A(y)$, où A est indépendante de x.
(2) donne

$$\cancel{2x^2} - y^3 = f_y = \cancel{2x^2} + A_y(y) \Rightarrow A_y(y) = -y^3 \Rightarrow A(y) = -y^4/4 + B$$

où B est une constante que l'on peut choisir égale à 0.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe $C : \vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \le t \le 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} f_x & = & x^3 + 4xy & (1) \\ f_y & = & 2x^2 - y^3 & (2) \end{array} \right.$$

(1) implique que $f = x^4/4 + 2x^2y + A(y)$, où A est indépendante de x.
(2) donne

$$\cancel{2x^2} - y^3 = f_y = \cancel{2x^2} + A_y(y) \Rightarrow A_y(y) = -y^3 \Rightarrow A(y) = -y^4/4 + B$$

où B est une constante que l'on peut choisir égale à 0.

Un potentiel est $f(x,y) = x^4/4 + 2x^2y - y^4/4$.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

3. Calculons le travail le long de C.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

3. Calculons le travail le long de C.
   - $f(x,y) = x^4/4 + 2x^2y - y^4/4$.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

3. Calculons le travail le long de C.
   - $f(x,y) = x^4/4 + 2x^2y - y^4/4$.
   - $\vec{r}(0) = 3\,\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{r}(4) = 5\,\vec{i} + \vec{j}$.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

3. Calculons le travail le long de C.
   - $f(x,y) = x^4/4 + 2x^2y - y^4/4$.
   - $\vec{r}(0) = 3\,\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{r}(4) = 5\,\vec{i} + \vec{j}$.
   - Selon le TFIC,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x, y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2 + 9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2 + 9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

3. Calculons le travail le long de C.
   - $f(x, y) = x^4/4 + 2x^2y - y^4/4$.
   - $\vec{r}(0) = 3\,\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{r}(4) = 5\,\vec{i} + \vec{j}$.
   - Selon le TFIC,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = f(\vec{r}(4)) - f(\vec{r}(0)) =$$

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

3. Calculons le travail le long de C.
   - $f(x,y) = x^4/4 + 2x^2y - y^4/4$.
   - $\vec{r}(0) = 3\,\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{r}(4) = 5\,\vec{i} + \vec{j}$.
   - Selon le TFIC,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = f(\vec{r}(4)) - f(\vec{r}(0)) = 206 - 2 = 204.$$

Résumé

- Vérification du critère pour les champ conservatifs en deux dimensions (incluant les hypothèses).

Résumé

- Vérification du critère pour les champ conservatifs en deux dimensions (incluant les hypothèses).
- Calcul d'un potentiel pour le champ.

Résumé

- Vérification du critère pour les champ conservatifs en deux dimensions (incluant les hypothèses).
- Calcul d'un potentiel pour le champ.
- Calcul du travail à l'aide du TFIC.