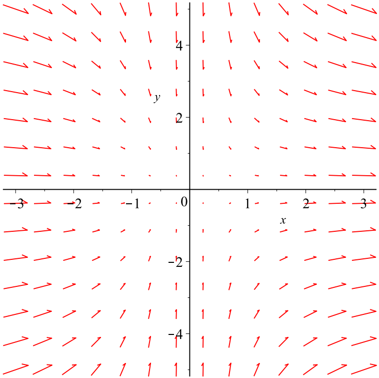
MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 1: Les champs vectoriels

Exemple 2: équations paramétriques des lignes de courant

Exemple 2 : équations paramétriques des lignes de courant

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$. Trouver les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par les points :
a) $(1/2, 2)$ b) $(-1/2, -1)$



Exemple 2 : équations paramétriques des lignes de courant

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$. Trouver les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par les points :
a) $(1/2, 2)$ b) $(-1/2, -1)$

- Soit $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ une paramétrisation d'une ligne de courant.
- Par définition, $\vec{r}'(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$:

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)^2 \quad (1) \\ y'(t) &= -y(t) \quad (2) \end{cases}$$

- L'équation (1) est à *variables séparables* : car à gauche on a mis tous les x et à droite tous les t

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + C \Rightarrow x = \frac{1}{C_1 - t}$$

où C_1 est une constante (on a posé $C_1 = -C$).

isoler x pr l'exprimer en fonction de t

Exemple 2 : équations paramétriques des lignes de courant

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$. Trouver les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par les points :
a) $(1/2, 2)$ b) $(-1/2, -1)$

- Soit $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ une paramétrisation d'une ligne de courant.
- Par définition, $\vec{r}\,'(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$:

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)^2 \quad (1) \\ y'(t) &= -y(t) \quad (2) \end{cases}$$

- L'équation (2) est à *variables séparables* :

$$\frac{dy}{dt} = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dt \Rightarrow \ln|y| = -t + C \Rightarrow y = \pm e^{-t+C} = C_2 e^{-t}$$

où C_2 est une constante (on a posé $C_2 = \pm e^C$).

Exemple 2 : équations paramétriques des lignes de courant

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$. Trouver les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par les points :
a) $(1/2, 2)$ b) $(-1/2, -1)$

- Paramétrisation d'une ligne de courant quelconque :

$$C : \vec{r}(t) = \frac{1}{C_1 - t}\vec{i} + C_2 e^{-t}\vec{j}.$$

- a) Si C passe par $(1/2, 2)$, on suppose que ce point correspond à $t = 0$. Alors

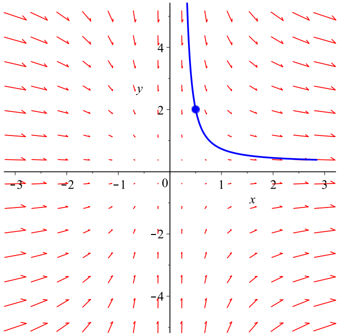
$$\frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j} = \vec{r}(0) = \frac{1}{C_1 - 0}\vec{i} + C_2 e^0\vec{j} \Rightarrow C_1 = 2 \text{ et } C_2 = 2.$$

La ligne de courant passant par $(1/2, 2)$ est paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2 - t}\vec{i} + 2e^{-t}\vec{j}.$$

Exemple 2 : équations paramétriques des lignes de courant

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$. Trouver les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par les points :
a) $(1/2, 2)$ b) $(-1/2, -1)$



$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2-t}\vec{i} + 2e^{-t}\vec{j}, \quad t < 2.$$

- $t < 2$ car composante en $\vec{i}$ non définie en $t = 2$ et le point donné correspond à $t = 0 < 2$.
- asymptote horizontale $y = 2e^{-2}$ lorsque $t \to 2^-$.
- asymptote verticale $x = 0$ lorsque $t \to -\infty$.

Exemple 2 : équations paramétriques des lignes de courant

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$. Trouver les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par les points :
a) $(1/2, 2)$ b) $(-1/2, -1)$

- Paramétrisation d'une ligne de courant quelconque :

$$C : \vec{r}(t) = \frac{1}{C_1 - t}\vec{i} + C_2 e^{-t}\vec{j}.$$

- b) Si C passe par $(-1/2, -1)$, on suppose que ce point correspond à $t = 0$. Alors

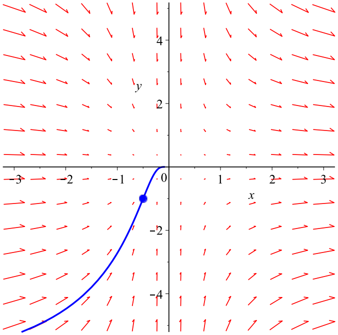
$$-\frac{1}{2}\vec{i} - \vec{j} = \vec{r}(0) = \frac{1}{C_1 - 0}\vec{i} + C_2 e^0\vec{j} \Rightarrow C_1 = -2 \text{ et } C_2 = -1.$$

La ligne de courant passant par $(-1/2, -1)$ est paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{-2-t}\vec{i} - e^{-t}\vec{j}.$$

Exemple 2 : équations paramétriques des lignes de courant

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$. Trouver les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par les points :
a) $(1/2, 2)$ b) $(-1/2, -1)$



$$\vec{r}(t) = \frac{1}{-2-t}\vec{i} - e^{-t}\vec{j}, \quad t > -2.$$

- $t > -2$ car composante en $\vec{i}$ non définie en $t = -2$ et le point donné correspond à $t = 0 > -2$.
- asymptote horizontale $y = -e^{-2}$ lorsque $t \to -2^+$.
- $\vec{r}(t) \to \vec{0}$ lorsque $t \to \infty$.

Résumé

- Déterminer les équations paramétriques d'une ligne de courant quelconque.
- Déterminer les équation paramétriques d'une ligne de courant passant par un point donné.
- Déterminer le domaine de la ligne de courant et énoncer ses caractéristiques géométriques.