

MTH1102D Calcul II

Chapitre 6, section 1 : Les intégrales itérées

Méthode de calcul d'une intégrale double

Introduction

- Théorème de Fubini
- Méthode de calcul efficace pour une intégrale double

Théorème de Fubini

Soit f une fonction continue sur le rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$. Alors

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy.$$

Théorème de Fubini

Soit f une fonction continue sur le rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$. Alors

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Notation : On omet habituellement les crochets dans ces deux formules.

Méthode de calcul d'une intégrale double

- A) On choisit l'ordre d'intégration : par rapport à x d'abord ($dx dy$) ou bien par rapport à y d'abord ($dy dx$).
- B) Si on intègre dans l'ordre $dx dy$:

①

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

Intégration partielle par rapport à x . Le résultat dépend de y seulement.

②

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

Intégration par rapport à y . Le résultat est un nombre réel.

Méthode de calcul d'une intégrale double

- A) On choisit l'ordre d'intégration : par rapport à x d'abord ($dx dy$) ou bien par rapport à y d'abord ($dy dx$).
- B) Si on intègre dans l'ordre $dy dx$:

①

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

Intégration partielle par rapport à y . Le résultat dépend de x seulement.

②

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

Intégration par rapport à x . Le résultat est un nombre réel.

- Le théorème de Fubini réduit le calcul d'une intégrale double à celui de deux intégrales simples successives.
- L'ordre d'intégration ne change pas la valeur de l'intégrale.