MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 4: Le théorème de Green

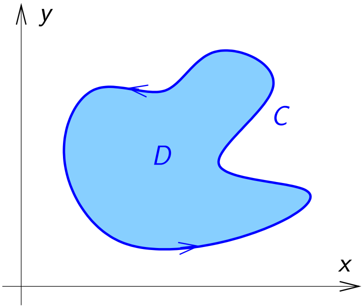
Calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée

Introduction

- Formules pour le calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée.

Calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée

Étant donné une courbe paramétrée fermée simple C orientée positivement, comment calculer l'aire de la région D qu'elle délimite ?



Le théorème de Green permet de répondre à cette question.

- **Donné :** le domaine D et une paramétrisation de sa frontière C
- **À déterminer :** le champ vectoriel $\vec{F}$.

Calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée

Étant donné une courbe paramétrée fermée simple C orientée positivement, comment calculer l'aire de la région D qu'elle délimite ?

Dans le théorème de Green, si on *choisit* de poser $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = x$ alors

$$\begin{aligned}
\oint_C 0\,dx + x\,dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\
&= \iint_D (1-0)\,dA = \iint_D dA = \text{aire}(D).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\text{aire}(D) = \oint_C x\,dy.$$

Calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée

Étant donné une courbe paramétrée fermée simple C orientée positivement, comment calculer l'aire de la région D qu'elle délimite ?

- Si on pose $P(x, y) = -y$ et $Q(x, y) = 0$ on obtient

$$\text{aire}(D) = -\oint_C y\, dx.$$

- Si on pose $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$ et $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$ on obtient

$$\text{aire}(D) = \frac{1}{2}\oint_C x\, dy - y\, dx.$$

- D'autres formules sont possibles...

Calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée

Soit D la région délimitée par une courbe fermée C orientée positivement.

$$
\begin{aligned}
\text{aire}(D) &= \oint_C x\,dy \\
\text{aire}(D) &= -\oint_C y\,dx \\
\text{aire}(D) &= \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx
\end{aligned}
$$

Remarques :

- Ces formules sont utiles si on dispose d'une paramétrisation de la frontière d'une région D et qu'il est difficile de représenter D comme un domaine de type I ou II.
- Si la courbe est orientée négativement, les formules donnent le *négatif* de l'aire. Il faut donc, dans ce cas, ajouter un signe « − » devant chacune des formules.
- Le même principe permet d'expliquer le fonctionnement du *planimètre*, un appareil servant à détermier l'aire délimitée par une courbe représentée graphiquement (voir le document *Planimètre* sur le site du cours.

Résumé

- Formules pour calculer l'aire délimitée par une courbe paramétrée.
- Ces formules sont des applications du théorème de Green.