MTH1102D Calcul II

Chapitre 8, section 2 : Les dérivées et les intégrales des fonctions vectorielles

Vecteurs de base en coordonnées curvilignes : un exemple

Exemple : calcul du vecteur tangent (1)

Exprimer le vecteur tangent à la courbe C ci-dessous au point P dans la base associée 1) aux coordonnées cylindriques en ce point, et 2) aux coordonnées sphériques en P.

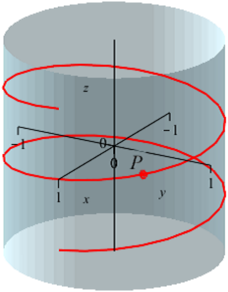
On considère la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j} + \frac{t}{\pi}\,\vec{k}$$

et le point

$$P = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/4)$$

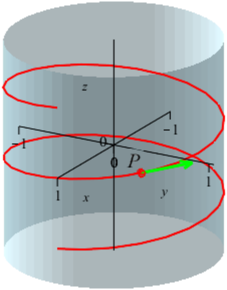
situé sur C et correspondant à $t = \pi/4$.



Exemple : calcul du vecteur tangent (2)

Exprimer le vecteur tangent à la courbe C ci-dessous au point P dans la base associée 1) aux coordonnées cylindriques en ce point, et 2) aux coordonnées sphériques en P.

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j} + \frac{t}{\pi}\,\vec{k}$$



On a

$$\vec{r}'(t) = -\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j} + \frac{1}{\pi}\,\vec{k}$$

et le vecteur tangent à C en P est

$$\vec{r}'(\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{j} + \frac{1}{\pi}\,\vec{k}.$$

Exemple : vecteur tangent en coordonnées cylindriques (1)

Exprimer le vecteur tangent à la courbe C ci-dessous au point P dans la base associée 1) aux coordonnées cylindriques en ce point, et 2) aux coordonnées sphériques en P.

En coordonnées cylindriques, on cherche r, θ et z tels que

$$P = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/4) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z).$$

On trouve

$$r = 1 \quad \text{et} \quad \theta = \pi/4.$$

Exemple : vecteur tangent en coordonnées cylindriques (2)

Exprimer le vecteur tangent à la courbe C ci-dessous au point P dans la base associée 1) aux coordonnées cylindriques en ce point, et 2) aux coordonnées sphériques en P.

Au point P :

$$\vec{r}'(\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{j} + \frac{1}{\pi}\,\vec{k}$$

Exemple : vecteur tangent en coordonnées cylindriques (2)

Exprimer le vecteur tangent à la courbe C ci-dessous au point P dans la base associée 1) aux coordonnées cylindriques en ce point, et 2) aux coordonnées sphériques en P.

Au point P :

$$\vec{r}'(\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{j} + \frac{1}{\pi}\,\vec{k}$$

$$= \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(\pi/4)\vec{e}_r - \sin(\pi/4)\vec{e}_\theta\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin(\pi/4)\vec{e}_r + \cos(\pi/4)\vec{e}_\theta\right) + \frac{1}{\pi}\vec{e}_z$$

Exemple : vecteur tangent en coordonnées cylindriques (2)

Exprimer le vecteur tangent à la courbe C ci-dessous au point P dans la base associée 1) aux coordonnées cylindriques en ce point, et 2) aux coordonnées sphériques en P.

Au point P :

$$\vec{r}'(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{j} + \frac{1}{\pi}\,\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(\pi/4)\vec{e}_r - \sin(\pi/4)\vec{e}_\theta\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin(\pi/4)\vec{e}_r + \cos(\pi/4)\vec{e}_\theta\right) + \frac{1}{\pi}\vec{e}_z \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)\right)\vec{e}_r + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(\pi/4) - \sin(\pi/4)\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{\pi}\vec{e}_z z \\
&= \vec{e}_\theta + \frac{1}{\pi}\vec{e}_z.
\end{aligned}$$

Exemple : vecteur tangent en coordonnées sphériques (1)

Exprimer le vecteur tangent à la courbe C ci-dessous au point P dans la base associée 1) aux coordonnées cylindriques en ce point, et 2) aux coordonnées sphériques en P.

En coordonnées sphériques, on cherche ρ, θ et ϕ tels que

$$P = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/4) = (\rho \sin(\phi)\cos(\theta), \rho \sin(\phi)\sin(\theta), \rho \cos(\phi)).$$

On a

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{(1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 + (1/4)^2} &&= \sqrt{17}/4 \\
\theta &= \arctan\left(\frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}\right) &&= \pi/4 \\
\phi &= \arccos\left(\frac{1/4}{\sqrt{17}/4}\right) &&= \arccos(1/\sqrt{17}) \color{red}{= \alpha}.
\end{aligned}$$

Exemple : vecteur tangent en coordonnées sphériques (2)

Exprimer le vecteur tangent à la courbe C ci-dessous au point P dans la base associée 1) aux coordonnées cylindriques en ce point, et 2) aux coordonnées sphériques en P.

Au point P :

$$\vec{r}'(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{j} + \frac{1}{\pi}\,\vec{k}$$

Exemple : vecteur tangent en coordonnées sphériques (2)

Exprimer le vecteur tangent à la courbe C ci-dessous au point P dans la base associée 1) aux coordonnées cylindriques en ce point, et 2) aux coordonnées sphériques en P.

Au point P :

$$\begin{aligned}
& \vec{r}'(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{j} + \frac{1}{\pi}\,\vec{k} \\
= \quad & -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin(\alpha)\cos(\pi/4)\vec{e}_\rho - \sin(\pi/4)\vec{e}_\theta + \cos(\alpha)\cos(\pi/4)\vec{e}_\phi\right) \\
& +\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin(\alpha)\sin(\pi/4)\vec{e}_\rho + \cos(\pi/4)\vec{e}_\theta + \cos(\alpha)\sin(\pi/4)\vec{e}_\phi\right) \\
& +\frac{1}{\pi}\left(\cos(\alpha)\vec{e}_\rho - \sin(\alpha)\vec{e}_\phi\right)
\end{aligned}$$

Exemple : vecteur tangent en coordonnées sphériques (2)

Exprimer le vecteur tangent à la courbe C ci-dessous au point P dans la base associée 1) aux coordonnées cylindriques en ce point, et 2) aux coordonnées sphériques en P.

Au point P :

$$\begin{aligned}
&\vec{r}'(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{j} + \frac{1}{\pi}\,\vec{k} \\
= \quad & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin(\alpha)\cos(\pi/4) + \sin(\alpha)\sin(\pi/4) + \tfrac{1}{\pi}\cos(\alpha)\right)\vec{e}_\rho \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin(\pi/4) + \cos(\pi/4)\right)\vec{e}_\theta \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos(\alpha)\cos(\pi/4) + \cos(\alpha)\sin(\theta) - \tfrac{1}{\pi}\sin(\alpha)\right)\vec{e}_\phi \\
= \quad & \tfrac{1}{\pi}\cos(\alpha)\vec{e}_\rho + \vec{e}_\theta - \tfrac{1}{\pi}\sin(\alpha)\vec{e}_\phi \;=\; \tfrac{1}{\pi\sqrt{5}}\vec{e}_\rho + \vec{e}_\theta - \tfrac{2}{\pi\sqrt{5}}\vec{e}_\phi
\end{aligned}$$

Résumé

- Calcul des coordonnées curvilignes d'un point à partir de ses coordonnées cartésiennes.
- Calcul du vecteur tangent à une courbe dans la base associée aux coordonnées cylindriques.
- Calcul du vecteur tangent à une courbe dans la base associée aux coordonnées sphériques.