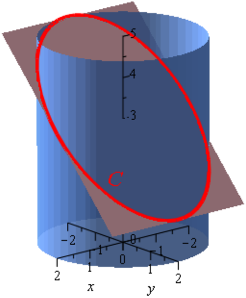
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 4: Le théorème de Stokes

Exemple 1: calcul de l'intégrale curviligne à l'aide du théorème de Stokes

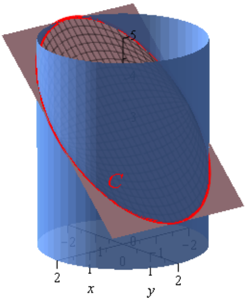
Exemple 1 : calcul de l'intégrale curviligne

Calculer $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ où $\vec{F}(x, y, z) = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} + ze^{-y}\vec{k}$ et C est la courbe d'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et du plan $z = 3 - y$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.



Exemple 1 : calcul de l'intégrale curviligne

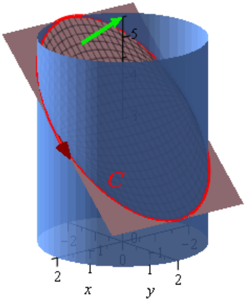
Calculer $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ où $\vec{F}(x,y,z) = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} + ze^{-y}\vec{k}$ et C est la courbe d'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et du plan $z = 3 - y$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.



- C est le bord d'une partie S du plan.

Exemple 1 : calcul de l'intégrale curviligne

Calculer $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ où $\vec{F}(x, y, z) = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} + ze^{-y}\vec{k}$ et C est la courbe d'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et du plan $z = 3 - y$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.



- C est le bord d'une partie S du plan.
- L'orientation de S compatible avec celle de C est donné par un vecteur normal pointant vers le haut.

S est paramétrée par

$$\vec{R}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (3 - y)\vec{k}$$

avec $(x, y) \in D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Exemple 1 : calcul de l'intégrale curviligne

Calculer $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$ où $\vec{F}(x, y, z) = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} + ze^{-y}\vec{k}$ et C est la courbe d'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et du plan $z = 3 - y$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.

On calcule

$$
\begin{aligned}
\vec{R}_x &= \vec{i} \\
\vec{R}_y &= \vec{j} - \vec{k} \\
\vec{R}_x \times \vec{R}_y &= \vec{j} + \vec{k} \\
\text{rot } \vec{F} &= -(x + ze^{-y})\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k} \\
\text{rot } \vec{F}(\vec{R}(x, y)) &= -(x + (3 - y)e^{-y})\vec{i} + 2y\vec{j} - (3 - y)\vec{k} \\
\text{rot } \vec{F}(\vec{R}(x, y)) \cdot (\vec{R}_x \times \vec{R}_y) &= 3y - 3
\end{aligned}
$$

Exemple 1 : calcul de l'intégrale curviligne

Calculer $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$ où $\vec{F}(x, y, z) = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} + ze^{-y}\vec{k}$ et C est la courbe d'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et du plan $z = 3 - y$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.

Selon le théorème de Stokes,

$$
\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_D \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{R}(x, y)) \cdot (\vec{R}_x \times \vec{R}_y)\, dA \\
&= \iint_D (3y - 3)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r \sin\theta - 3) r \, dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 -3r \, dr d\theta = -3 \text{ aire}(D) = -12\pi.
\end{aligned}
$$

Résumé

- Choix d'une surface dont le bord est la courbe donnée.
- Détermination de l'orientation compatible de la surface.
- Calcul de l'intégrale curviligne à l'aide du théorème de Stokes.