MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 1: Les surfaces paramétrées et leur aire

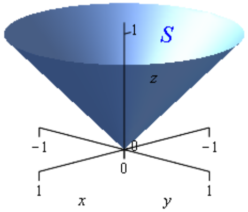
Exemple 5: aire d'une surface quelconque

Exemple 5 : aire d'une surface quelconque

Calculer l'aire de la partie S du cône paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$$

située entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.



- S correspond aux valeurs des paramètres $0 \leq u \leq 2\pi$ et $0 \leq v \leq 1$.
- On a

$$\begin{aligned}
\vec{R}_u &= -v\sin u\,\vec{i} + v\cos u\,\vec{j} + 0\vec{k} \\
\vec{R}_v &= \cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}$$

Exemple 5 : aire d'une surface quelconque

Calculer l'aire de la partie S du cône paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$$

située entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Si $\vec{R}_u = -v\sin u\,\vec{i} + v\cos u\,\vec{j}$ et $\vec{R}_v = \cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j} + \vec{k}$ alors

$$\vec{R}_u \times \vec{R}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{vmatrix}$$

Exemple 5 : aire d'une surface quelconque

Calculer l'aire de la partie S du cône paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$$

située entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Si $\vec{R}_u = -v\sin u\,\vec{i} + v\cos u\,\vec{j}$ et $\vec{R}_v = \cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j} + \vec{k}$ alors

$$\begin{aligned}
\vec{R}_u \times \vec{R}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}(v\cos u - 0)
\end{aligned}$$

Exemple 5 : aire d'une surface quelconque

Calculer l'aire de la partie S du cône paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$$

située entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Si $\vec{R}_u = -v\sin u\,\vec{i} + v\cos u\,\vec{j}$ et $\vec{R}_v = \cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j} + \vec{k}$ alors

$$\begin{aligned}
\vec{R}_u \times \vec{R}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}(v\cos u - 0) - \vec{j}(-v\sin u - 0)
\end{aligned}$$

Exemple 5 : aire d'une surface quelconque

Calculer l'aire de la partie S du cône paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$$

située entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Si $\vec{R}_u = -v\sin u\,\vec{i} + v\cos u\,\vec{j}$ et $\vec{R}_v = \cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j} + \vec{k}$ alors

$$\begin{aligned}
\vec{R}_u \times \vec{R}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}(v\cos u - 0) - \vec{j}(-v\sin u - 0) + \vec{k}(-v\sin^2 u - v\cos^2 u)
\end{aligned}$$

Exemple 5 : aire d'une surface quelconque

Calculer l'aire de la partie S du cône paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$$

située entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Si $\vec{R}_u = -v\sin u\,\vec{i} + v\cos u\,\vec{j}$ et $\vec{R}_v = \cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j} + \vec{k}$ alors

$$\begin{aligned}
\vec{R}_u \times \vec{R}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}(v\cos u - 0) - \vec{j}(-v\sin u - 0) + \vec{k}(-v\sin^2 u - v\cos^2 u) \\
&= v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} - v\vec{k}
\end{aligned}$$

Exemple 5 : aire d'une surface quelconque

Calculer l'aire de la partie S du cône paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$$

située entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Si $\vec{R}_u \times \vec{R}_v = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} - v\vec{k}$ alors

$$||\vec{R}_u \times \vec{R}_v|| = \sqrt{v^2\cos^2 u + v^2\sin^2 u + v^2} = \sqrt{2v^2} = \sqrt{2}v$$

car $v \geq 0$.
Donc

$$\begin{aligned} \text{aire}(S) &= \iint_D ||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}v\,dvdu \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} du = \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Résumé

- Rappel du calcul d'un déterminant.
- Calcul de l'aire d'une surface paramétrée.