MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 5: Le théorème de flux-divergence

Énoncé du théorème de flux-divergence

Introduction

- Énoncé du théorème de flux-divergence.

Énoncé du théorème de flux-divergence

Théorème de flux-divergence

Soit S une surface fermée lisse par morceaux orientée positivement (vers l'extérieur) et E la région de l'espace délimitée par S. Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel ayant des dérivées partieles continues dans un voisinage de S alors

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV.$$

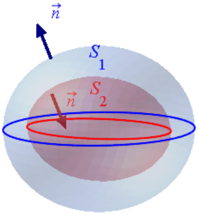
- L'intégrale de gauche est une intégrale de surface qui calcule le flux de $\vec{F}$ à travers S.
- L'intégrale de droite est l'intégrale triple de la fonctions scalaire div $\vec{F}$ sur E.

Énoncé du théorème de flux-divergence

Théorème de flux-divergence généralisé

Soit S_1 et S_2 des surfaces fermées lisses par morceaux telles que S_2 est entièrement contenue àl'intérieur de S_1. Les surfaces sont orientée telle que sur la figure. Soit E la région de l'espace comprise entre S_1 et S_2 et $S = S_1 \cup S_2$. Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel ayant des dérivées partieles continues dans un voisinage de S alors

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV .$$



Résumé

- Énoncé du théorème de flux-divergence.
- Généralisation à une région compris entre deux surfaces ≪ concentriques ≫.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 5: Le théorème de flux-divergence

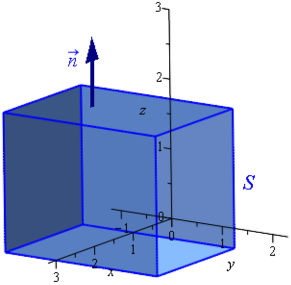
Exemple 1: application simple du théorème de flux-divergence

Exemple 1 : application simple

Calculer le flux vers l'extérieur du champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y, z) = [x^2 + \cos(yz)]\vec{i} + xy\vec{j} + [z^2 + \sin(xy)]\vec{k}$$

à travers la surface S du prisme rectangulaire délimité par les plans $z = 0, z = 2, x = 1, x = 3, y = -1, y = 2$.



- Le calcul direct du flux exige le calcul explicite de 6 intégrales de surface.
- Plus simple : utiliser le théorème de flux-divergence

$$\text{flux} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV.$$

Exemple 1 : application simple

Calculer le flux vers l'extérieur du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = [x^2 + \cos(yz)]\vec{i} + xy\vec{j} + [z^2 + \sin(xy)]\vec{k}$$

à travers la surface S du prisme rectangulaire délimité par les plans $z = 0, z = 2, x = 1, x = 3, y = -1, y = 2$.

On calcule

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\
&= \iiint_E (2x + x + 2z) \, dV \\
&= \int_1^3 \int_{-1}^2 \int_0^2 (3x + 2z) \, dzdydx = 96.
\end{aligned}$$

Résumé

- Application du théorème de flux-divergence au calcul d'un flux à travers une surface fermée.
- Le théorème de flux-divergence simplifie les calculs.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 5: Le théorème de flux-divergence

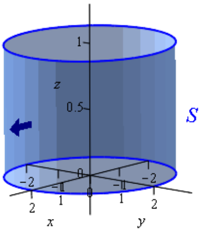
Exemple 2: application du théorème de flux-divergence pour une surface non fermée

Exemple 2 : application pour une surface non fermée

Calculer le flux vers « l'extérieur » du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^3 + e^{yz^2})\vec{i} + (y^3 - e^{xz^2})\vec{j} + z^3\vec{k}$$

à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.



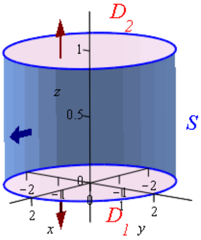
- Le calcul direct du flux exige le calcul d'une intégrale de surface difficile à évaluer.
- Plus simple : utiliser le théorème de flux-divergence. Cependant, la surface S n'est pas fermée.

Exemple 2 : application pour une surface non fermée

Calculer le flux vers « l'extérieur » du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^3 + e^{yz^2})\vec{i} + (y^3 - e^{xz^2})\vec{j} + z^3\vec{k}$$

à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.



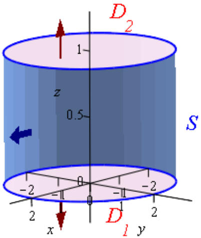
- Le calcul direct du flux exige le calcul d'une intégrale de surface difficile à évaluer.
- Plus simple : utiliser le théorème de flux-divergence. Cependant, la surface S n'est pas fermée.
- Soit $D_1 : x^2 + y^2 \leq 4$ avec $z = 0$ et $D_2 : x^2 + y^2 \leq 4$ avec $z = 1$.
- $S' = S \cup D_1 \cup D_2$.

Exemple 2 : application pour une surface non fermée

Calculer le flux vers « l'extérieur » du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^3 + e^{yz^2})\vec{i} + (y^3 - e^{xz^2})\vec{j} + z^3\vec{k}$$

à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.



- Soit E la région de l'espace bornée par S'.
- L'orientation « vers l'extérieur » de S correspond à l'orientation positive de S'.
- L'orientation positive de S' correspond à un vecteur normal vers le bas pour D_1 et vers le haut pour D_2.

Exemple 2 : application pour une surface non fermée

Calculer le flux vers « l'extérieur » du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^3 + e^{yz^2})\vec{i} + (y^3 - e^{xz^2})\vec{j} + z^3\vec{k}$$

à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Selon le théorème de flux-divergence,

$$\begin{aligned} \iint_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_E \operatorname{div} \vec{F}\, dV \\ &= \iiint_E (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)\, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^1 (3r^2 + 3z^2) r \, dz dr d\theta = 28\pi. \end{aligned}$$

Exemple 2 : application pour une surface non fermée

Calculer le flux vers « l'extérieur » du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^3 + e^{yz^2})\vec{i} + (y^3 - e^{xz^2})\vec{j} + z^3\vec{k}$$

à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Calculons le flux à travers D_1.

- Pour les points de D_1, $z = 0$.
- Si $z = 0$ alors $\vec{F}(x,y,0) = (x^3+1)\vec{i} + (y^3-1)\vec{j} + 0\vec{k}$.
- Le vecteur normal unitaire de D_1 pointant vers le bas est $\vec{n}_1 = -\vec{k}$.
- Ainsi,

$$\iint_{D_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{D_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS = \iint_{D_1} 0 \, dS = 0.$$

Exemple 2 : application pour une surface non fermée

Calculer le flux vers ≪ l'extérieur ≫ du champ vectoriel
$$\vec{F}(x,y,z) = (x^3 + e^{yz^2})\vec{i} + (y^3 - e^{xz^2})\vec{j} + z^3\vec{k}$$
à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Calculons le flux à travers D_2.

- Pour les points de D_2, $z = 1$.
- Si $z = 1$ alors $\vec{F}(x,y,1) = (x^3 + e^y)\vec{i} + (y^3 - e^x)\vec{j} + \vec{k}$.
- Le vecteur normal unitaire de D_2 pointant vers le haut est $\vec{n}_2 = \vec{k}$.
- Ainsi,
$$\iint_{D_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{D_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS = \iint_{D_2} 1 \, dS = \text{aire}(D_2) = 4\pi.$$

Exemple 2 : application pour une surface non fermée

Calculer le flux vers ≪ l'extérieur ≫ du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^3 + e^{yz^2})\vec{i} + (y^3 - e^{xz^2})\vec{j} + z^3\vec{k}$$

à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Finalement, on a

$$\iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_{S} \vec{F} \cdot \vec{dS} + \iint_{D_1} \vec{F} \cdot \vec{dS} + \iint_{D_2} \vec{F} \cdot \vec{dS}.$$

donc, le flux cherché est

$$\iint_{S} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{dS} - \iint_{D_1} \vec{F} \cdot \vec{dS} - \iint_{D_2} \vec{F} \cdot \vec{dS} = 28\pi - 0 - 4\pi = 24\pi.$$

Résumé

- Pour appliquer le théorème de flux-divergence lorsque la surface n'est pas fermée, il faut d'abord la fermer.
- Il faut que toutes les orientations soient compatibles avec l'énoncé du problème et le théorème de flux-divergence.
- Le flux demandé est obtenu en retranchant du flux total le flux à travers les surfaces ajoutées.