POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Questionnaire examen final

MTH1102/D

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)		
Nom : Orr	**Prénom :** Mathis	
Signature : Mathis	**Matricule :** 2 2 0 6 5 4 6	**Groupe :** 06

Réservé		
Q1	9	/9
Q2	8/8	/~~8~~
Q3	8/9	/8
Q4	8	/9
Total	33	/35

Sigle et titre du cours			
MTH1102(D) Calcul II			
Professeur		*Groupe*	*Trimestre*
Jean Guérin			**H23**
Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Samedi	**25 février**	**2h30**	**13h00 à 14h50**

Documentation	*Calculatrice*	*Outils électroniques*
x Aucune ☐ Toute ☐ Voir directives particulières	☐ Aucune x Toutes	**Les appareils électroniques personnels sont interdits.**

Directives particulières

- **Le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons, veuillez le justifier puis passer à la question suivante.**
- **Un aide-mémoire de 2 pages est fourni avec ce cahier.**
- **IMPORTANT : inscrire votre matricule sur toutes les pages numérotées. Ne rien inscrire sur le verso des pages numérotées.**
- **L'utilisation de cahiers supplémentaires n'est pas permise. Si nécessaire, utiliser les deux pages supplémentaires à la fin de ce cahier**

Cet examen contient 4 questions sur un total de 15 pages
(incluant cette page, excluant les deux pages d'aide-mémoire).

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

ytechnique Montréal
rtement de mathématiques et de génie industriel
ul II - MTH1102/MTH1102D
Contrôle périodique - Hiver 2023

Matricule : 2 2 6 6 5 9 6

Question 1 [9 points]

$x = \sqrt{-y}$

$x^2 = -y \qquad y = -x^2$

Les sous-questions a) et b) sont indépendantes.

a) Évaluez l'expression suivante :

$$J_1 = \int_{-3}^{0}\int_{\sqrt{-y}}^{\sqrt{3}} x^3\cos(xy)\,dxdy + \int_{0}^{3}\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{3}} x^3\cos(xy)\,dxdy.$$

b) Soit D le rectangle de sommets $(-3, 2)$, $(3, 2)$, $(3, -2)$ et $(-3, -2)$.

(i) Évaluez l'intégrale suivante :

$$J_2 = \iint_D \left[2 + x^3y^2\cos(\pi x^3y^3)\right]\,dA.$$

(ii) L'intégrale J_2 représente-t-elle un volume ?

Jusitifez soigneusement vos réponses.

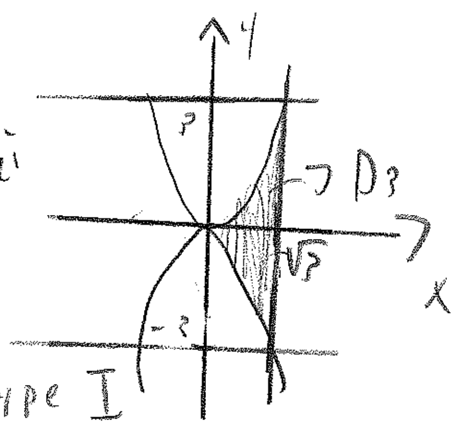
Réponse :

a)

$\sqrt{-y} \leq x \leq \sqrt{3}$, $\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{3}$

$-3 \leq y \leq 3$

D_1 et D_2



Type I

$\sqrt{-y} = x \quad\big|\quad \sqrt{y} = x$

$x^2 = -y \quad\big|\quad y = x^2$

$y = -x^2$

$D_3 = \{(x,y) \mid -x^2 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq \sqrt{3}\}$ → On inverse l'ordre d'intégration.

$$J_1 = \int_0^{\sqrt{3}}\int_{-x^2}^{x} x^3\cos(xy)\,dy\,dx$$

Comme les deux intégrale ont la même fonction intégrée.

Matricule : 1 2 0 6 5 9 6

$$J_1 = \int_0^{\sqrt{3}}\int_{-x^2}^{x^2} x^3\cos(xy)\,dy\,dx$$

C.V.
$u = xy$
$du = x\,dy$

$$= \int_0^{\sqrt{3}}\int_{-x^2}^{x^2} x^2\cos(u)\,du\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} x^2\left[\sin(xy)\right]_{-x^2=y}^{x^2=y} dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} x^2(\sin(x^3) - \sin(-x^3))\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} x^2(\sin x^3 + \sin(x^3))\,dx$$

Formule 5.2 de l'annexe

$$= \int_0^{\sqrt{3}} x^2\, 2\sin x^3\,dx$$

C.V
$t = x^3$
$dt = 3x^2\,dx$
$\frac{dt}{3} = x^2\,dx$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \sin(t)\,dx$$

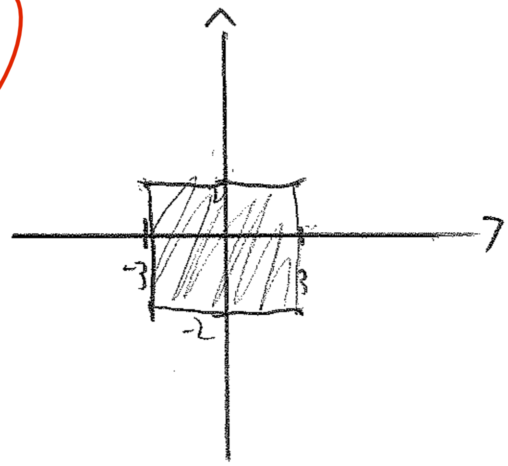
$$= \frac{2}{3}\left[-\cos(x^3)\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\left[-\cos(\sqrt{3}^3) + \cos(0)\right]$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}(-\cos(3\sqrt{3}) + 1)}$$

$\frac{5.0}{5}$

Matricule : 2 7 0 6 5 9 6

6)



$D = \{(x,y) \mid -3 \leq x \leq 3,\ -2 \leq y \leq 2\}$

Domaine symétrique par rapport à $x=0$ et $y=0$ selon le graphique.

$$J_2 = \int_{-2}^{2}\int_{-3}^{3} 2 + x^3y^2(\cos(\pi x^3y^3))\,dx\,dy$$

Vérifions si $x^3y^2(\cos(\pi x^3y^3))$ est pair ou impair car le domaine est symétrique

$$F(-x,y) = (-x)^3y^2(\cos(\pi - x^3y^3)) = -x^3y^2(\cos(\pi x^3y^3)) = -F(x,y)$$

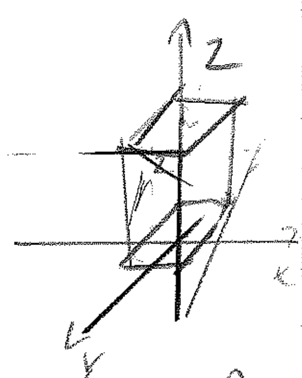
selon formule 5.1 annexe

Donc impaire, $\iint_D x^3y^2(\cos(\pi x^3y^3))\,dA = 0$

$$\Rightarrow J_2 = \int_{-2}^{2}\int_{-3}^{3} 2\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} 2(3-(-3))\,dy = \int_{-2}^{2} 12\,dy$$

$$= 12(2-(-2)) = \boxed{48}$$

3.0 / 3



ii) Oui, car aucun point du domaine D ne permetent une valeur négative dans la fonction. De plus, la fonction à intégré est $z=2$, un plan, il est donc évident qu'il s'agit d'un volume!

NON

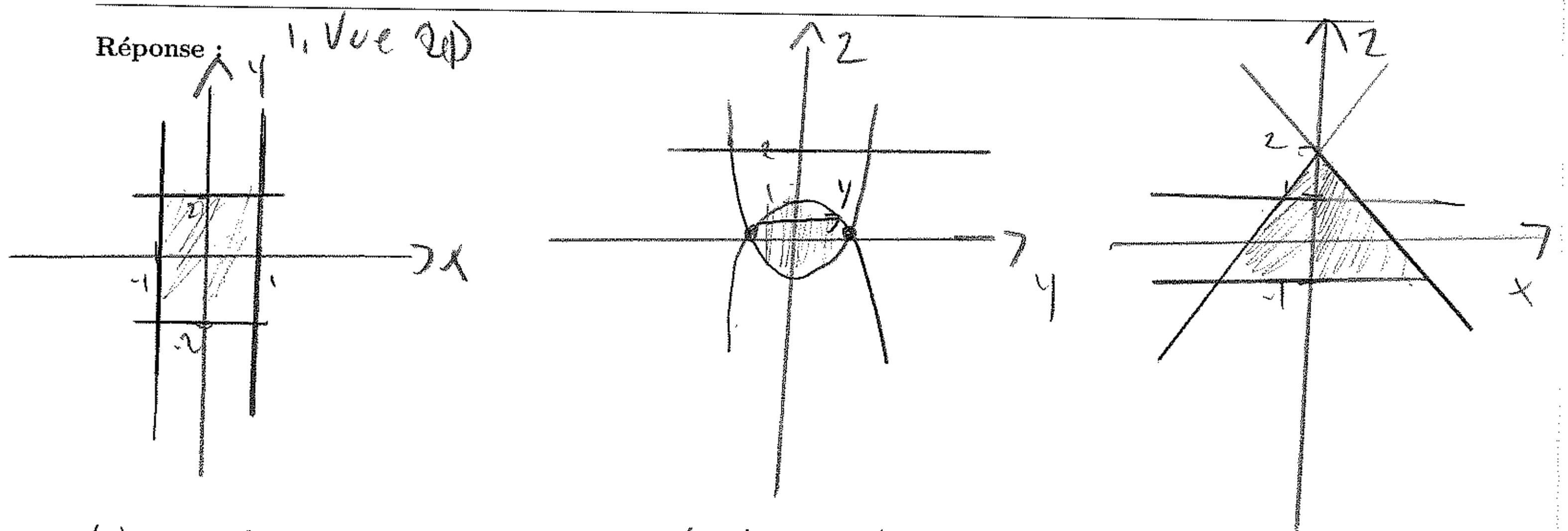
1.0 / 1

8

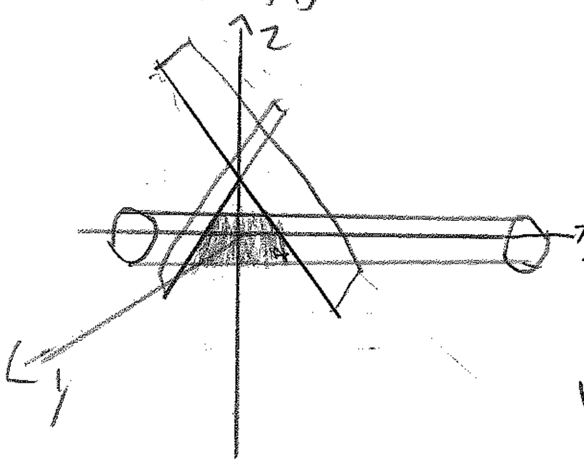
Question 2 [8 points]

Calculez le volume de la région E de l'espace délimitée par les surfaces $z = 1 - y^2$, $z = y^2 - 1$, $z = 2 - x$ et $z = 2 + x$.

Réponse : 1. Vue 2D



2. Vue 3D



3.1 Borner les variables

x: $z = 2 - x$ $\quad$ $z = 2 + x$

$\Rightarrow x = 2 - z$ $\quad$ $\Rightarrow x = z - 2$

z: $z \geq y^2 - 1$ et $z \leq 1 - y^2$

y: $z = 1 - y^2 \Rightarrow 0 = 1 - y^2$

$\Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

3. Région E

$E = \{(x, y, z) \mid z - 2 \leq x \leq -z + 2,\ y^2 - 1 \leq z \leq 1 - y^2,\ -1 \leq y \leq 1\}$

4. Volume

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{y^2-1}^{1-y^2} \int_{z-2}^{-z+2} 1 \, dx \, dz \, dy$$

Par symétrie des bornes et 1 étant une fonction paire, on obtient $\rightarrow$

$$V = 2\int_{-1}^{1}\int_{y^2-1}^{1-y^2}\int_{0}^{1-y^2-z+2} 1 \, dx\, dz\, dy$$

$$= 2\int_{-1}^{1}\int_{y^2-1}^{1-y^2} -z+2 \, dz\, dy = 2\left(\int_{-1}^{1}\int_{y^2-1}^{1-y^2} -z \, dz\, dy + \int_{-1}^{1}\int_{y^2-1}^{1-y^2} 2 \, dz\, dy\right)$$

$$= 2\left(\int_{-1}^{1}\left[\frac{-z^2}{2}\right]_{y^2-1}^{1-y^2} dy + \int_{-1}^{1} 2-2y^2-2y^2+2 \;\; dy\right)$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \frac{-(1-y^2)^2}{2} + \frac{(y^2-1)^2}{2} + 4-4y^2 \, dy = 2\int_{-1}^{1} \frac{-y^4}{2} + \frac{2y^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{y^4}{2} - \frac{2y^2}{2} + \frac{1}{2} + 4-4y^2 \, dy \xrightarrow{} 0$$

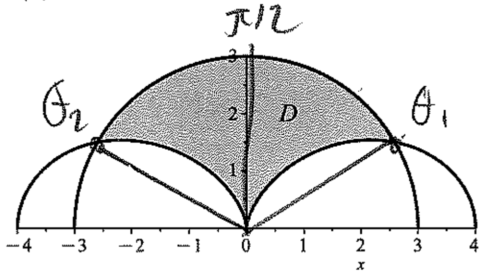
$$= 2\int_{-1}^{1} 4-4y^2 \, dy \quad = 8\left(\left[y\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}\right) = 8\left((1+1) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= 8\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3}u^3 \checkmark$$

Matricule : 7 7 0 6 5 9 6

Question 3 [9 points]

Un plaque mince occupe la région D du plan située à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 9$ et à l'extérieur de la courbe polaire d'équation $r = 4\cos^2(\theta)$. La région D est représentée ci-dessous.



La densité de la plaque est proportionnelle à la distance à l'origine.

a) Calculez le premier moment de la plaque par rapport à l'axe des x.

b) Sachant que la masse de la plaque est $m = \frac{2k}{9}(7\pi + 27\sqrt{3})$, où k est la constante de proportionnalité de la densité, déterminez les coordonnées du centre de masse de la plaque. Justifiez soigneusement votre réponse. Donnez d'abord une réponse exacte, puis arrondissez-la à la deuxième décimale.

$\bar{x} = \frac{M_y}{m}$ $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$

Réponse :

a)

1, $M_x = \iint_D y \cdot \rho(x,y)\, dA$

$\rho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2} = kr$

$D = \{(r,\theta) \mid 4\cos^2(\theta) \le r \le 3,\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}\}$

1, Domaine

θ: $r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \rightarrow$

$3 = 4\cos^2\theta \Rightarrow \sqrt{3} = 2\cos\theta$

$\theta_1 = \frac{\pi}{6}$

$\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

2, Moment

$$M_x = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{4\cos^2\theta}^{3} kr \cdot r\sin\theta \cdot r\, dr\, d\theta = k\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{4\cos^2\theta}^{3} r^3 \sin\theta\, dr\, d\theta$$

Matricule : 7 7 0 6 1 9 6

$$= k\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin\theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_{4\cos^2\theta}^{3} d\theta$$

$$= k\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{5\pi/6} \sin\theta\left(\frac{81}{4} - 64\cdot\cos^8\theta\right) d\theta\right.$$

$$= k\left(\frac{81}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{5\pi/6} \sin\theta\, d\theta - 64\int_{\frac{\pi}{6}}^{5\pi/6} \cos^8\theta\cdot\sin\theta\, d\theta\right)$$

c.v.
$t = \cos\theta$
$dt = -\sin\theta$

$$= k\left(\frac{81}{4}\left[-\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{5\pi/6} + 64\int_{\frac{\pi}{6}}^{5\pi/6} t^8\, dt\right)$$

$$= k\left(\frac{81\sqrt{3}}{4} + \frac{64}{9}\left[\cos^9\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{5\pi/6}\right)$$

$$= k\left(\frac{81\sqrt{3}}{4} + \frac{64}{4}\left(-\frac{81\sqrt{3}}{512} + \frac{81\sqrt{3}}{512}\right)\right)$$

$$= \cancel{\frac{k\,81\sqrt{3}}{4}}$$

-0.5 calculs

Matricule : 7 2 0 6 5 9 6

b)

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{k81\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{2k(7\pi + 27\sqrt{3})}$$

$$= \frac{81\sqrt{3} \cdot 4}{56\pi + 216\sqrt{3}} = \frac{324\sqrt{3}}{56\pi + 216\sqrt{3}}$$ -0.5 a cause de 1

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}$$

$$\Rightarrow M_y = \iint_D rk \cdot r \cdot r\cos\theta \, dV = \iint_D (x^2+y^2) \cdot x \, dA$$

Comme selon le graphique la région D est symétrique par rapport à à $x=0$.

regardons si $(x^2+y^2) \cdot x$ est impaire ok

$F(-x,y) = -x(x^2+y^2)$ donc oui ex alors $\bar{x}=0$

logique vue la symétrie.

Le centre de masse est $C_m = (0; 2,30)$

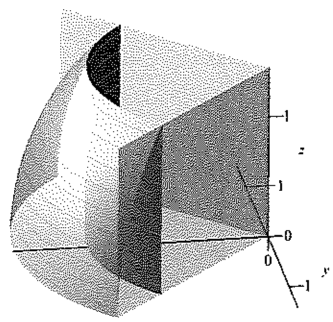
Matricule : 7 2 0 6 5 9 6

Question 4 [9 points]

Soit E la région de l'espace située

- à droite du plan $x = 0$ (là où $x \geq 0$)
- entre les plans $y = -x$ et $y = x$
- au-dessus du plan $z = 0$
- à l'intérieur de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- et « à l'extérieur » du cylindre $x^2 + y^2 = 2$ (c'est-à-dire là où $x^2 + y^2 \geq 2$).

Les surfaces délimitant la région E sont représentées ci-dessous.



a) Décrivez la région E en coordonnées cylindriques.

b) Décrivez la région E en coordonnées sphériques.

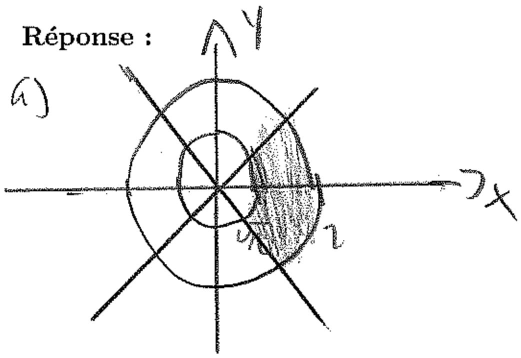
c) Évaluez l'intégrale

$$J_3 = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$$

dans le système de coordonnées de votre choix.

Réponse :

a)



$E = \left\{ (z, r, \theta) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}, \sqrt{2} \leq r \leq 2, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$

3/3

z: $r^2 + z^2 = 4$

$z = +\sqrt{4 - r^2}$

θ: $y = x$

$\rightarrow \angle 45° \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$y = x$

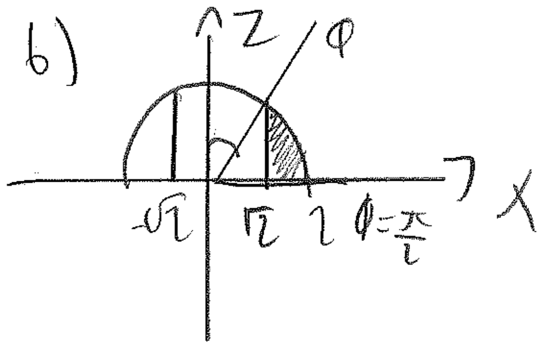
$\rightarrow \angle -45° \rightarrow -\frac{\pi}{4}$

r: $r^2 = 4$ $r = 2$

$r^2 = 2$ $r = \sqrt{2}$

Matricule : 7 2 0 6 5 9 6

b)



ρ : $\rho^2=4 \Rightarrow \rho=2$

$\rho^2\cos^2\theta\sin^2\phi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\phi=2$

$=\rho^2\sin^2\phi\,(1)=2$

$=\rho=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\phi}$

ϕ : Intersection entre

$x=\sqrt{2}$ et $x^2+z^2=4$

$2+z^2=4$

$z=\sqrt{2}$

$\phi=\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

θ :

$-\dfrac{\pi}{4}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{4}$ voir démarche

coordonnée cylindrique

3/3

$$E=\left\{(\rho,\phi,\theta)\mid \frac{\sqrt{2}}{\sin\phi}\leq\rho\leq 2,\ \frac{\pi}{4}\leq\phi\leq\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\right\}$$

c) coordonnée cylindrique

1/1

$$J_3=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-r^2}} r^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{2}}^{2} r^3\,[z]_0^{\sqrt{4-r^2}}\,dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{2}}^{2} r^3\sqrt{4-r^2}\,dr$$

C.V. $v=4-r^2$; $dv=-2r\,dr$ Formule 3.1

$=$

Matricule : 2 2 0 6 5 4 6

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{2} r^2 \sqrt{v}\, dv \qquad \text{où } r^2 = -4 + v$$

$$= \frac{-\pi}{4} \left(\int_{\sqrt{2}}^{2} (-4\sqrt{v} + v^{3/2})\, dv \right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} \left(-\left[\frac{8 v^{3/2}}{3} \right]_{\sqrt{2}}^{2} + \left[\frac{2 v^{5/2}}{5} \right]_{\sqrt{2}}^{2} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} \left(-\left[\frac{8}{3} 2^{3/2} - \frac{8}{3} \sqrt{2}^{3/2} \right] + \left[\frac{2 \cdot 2^{5/2}}{5} - \frac{2 \cdot \sqrt{2}^{5/2}}{5} \right] \right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} \left(-\left(\frac{16\sqrt{2}}{3} - \frac{8\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}}{3} \right) + \left(\frac{8\sqrt{2}}{5} - \frac{4\sqrt[4]{2}}{5} \right) \right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} \left(-\frac{16\sqrt{2} - 8\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}{3} + \frac{8\sqrt{2} - 4\sqrt[4]{2}}{5} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} \left(\frac{-80\sqrt{2} + 24\sqrt{2} - 24\sqrt{2}\sqrt[4]{2} - 12\sqrt[4]{2}}{15} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\frac{56\sqrt{2} + 24\sqrt{2}\sqrt[4]{2} + 12\sqrt[4]{2}}{15} \right)$$

? ✓ 1/2

Matricule :

Matricule :

PAGE SUPPLÉMENTAIRE

Utilisez cette page en cas de besoin. Indiquez clairement le numéro de la question.

Matricule :

PAGE SUPPLÉMENTAIRE

Utilisez cette page en cas de besoin. Indiquez clairement le numéro de la question.