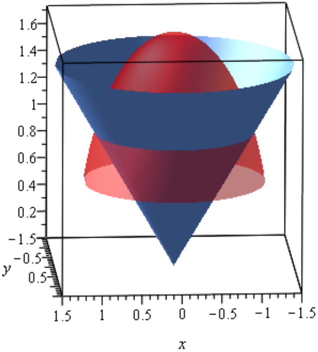
MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 3: Les intégrales triples en coordonnées cylindriques

Exemple 1: calcul de la masse d'un solide

Exemple 1 : calcul de la masse d'un solide

Calculer la masse du solide occupant la région E bornée par la nappe supérieure du cône $z^2 = x^2 + y^2$ et le paraboloïde $z = 3 - 2x^2 - 2y^2$, si sa densité est proportionnelle à la distance à l'axe des z.



Intersection :

$$\begin{cases} z = 3 - 2x^2 - 2y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

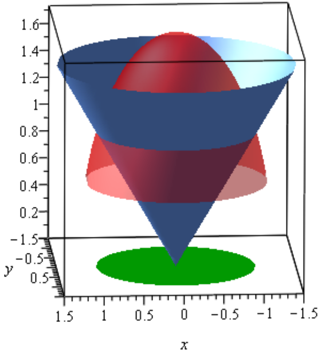
$$\Rightarrow \quad z = 3 - 2z^2$$

$$\Rightarrow \quad 2z^2 + z - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad z = 1 \text{ ou } z = -3/2$$

Exemple 1 : calcul de la masse d'un solide

Calculer la masse du solide occupant la région E bornée par la nappe supérieure du cône $z^2 = x^2 + y^2$ et le paraboloïde $z = 3 - 2x^2 - 2y^2$, si sa densité est proportionnelle à la distance à l'axe des z.



Intersection :

$$\begin{cases} z = 3 - 2x^2 - 2y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad z = 3 - 2z^2$$

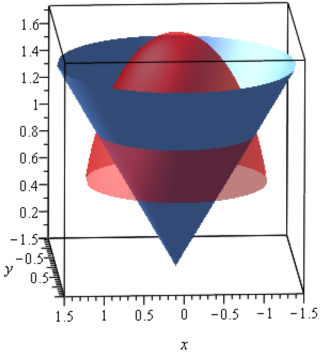
$$\Rightarrow \quad 2z^2 + z - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad z = 1 \text{ ou } z = -3/2$$

$$D : x^2 + y^2 \leq 1$$

Exemple 1 : calcul de la masse d'un solide

Calculer la masse du solide occupant la région E bornée par la nappe supérieure du cône $z^2 = x^2 + y^2$ et le paraboloïde $z = 3 - 2x^2 - 2y^2$, si sa densité est proportionnelle à la distance à l'axe des z.



Surfaces :

Cône : $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

Paraboloïde :
$z = 3 - 2x^2 - 2y^2 = 3 - 2r^2$

Exemple 1 : calcul de la masse d'un solide

Calculer la masse du solide occupant la région E bornée par la nappe supérieure du cône $z^2 = x^2 + y^2$ et le paraboloïde $z = 3 - 2x^2 - 2y^2$, si sa densité est proportionnelle à la distance à l'axe des z.

$$
\begin{aligned}
E &= \left\{(x,y,z)\,|\,(x,y) \in D, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 3 - 2x^2 - 2y^2\right\} \\
&= \left\{(r,\theta,z)\,|\,0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 3 - 2r^2\right\}.
\end{aligned}
$$

Densité :

$$\sigma(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2} \quad (k > 0)$$

$$\sigma(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = kr$$

Exemple 1 : calcul de la masse d'un solide

Calculer la masse du solide occupant la région E bornée par la nappe supérieure du cône $z^2 = x^2 + y^2$ et le paraboloïde $z = 3 - 2x^2 - 2y^2$, si sa densité est proportionnelle à la distance à l'axe des z.

$$
\begin{aligned}
m(E) &= \iiint_E \sigma(x,y,z)\, dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{3-2r^2} \sigma(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r \, dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{3-2r^2} kr^2 \, dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 kr^2(3 - 2r^2 - r)\, dr d\theta = \frac{7}{10} k\pi.
\end{aligned}
$$

Résumé

- Décrire une région de l'espace en coordonnées cylindriques.
- Trouver une formule pour la densité à partir d'une description en mots.
- Calculer la masse d'un solide à l'aide d'une intégrale en coordonnées cyindriques.