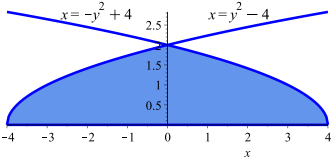
# MTH1102D Calcul II

Chapitre 6, section 5 : Les applications des intégrales doubles

## Exemple 2: centre de masse d'une plaque mince

# Exemple 2 : centre de masse d'une plaque mince

Déterminer le centre de masse d'une plaque mince occupant la région du demi-plan supérieur bornée par les courbes $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 4$ et $y = 0$ et dont la densité est proportionnelle à la distance au bord inférieur de la plaque.



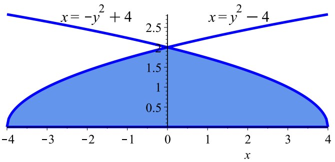

densité $\propto$ distance au bord inférieur

bord inférieur = axe des $x$

densité $\propto$ $y$

# Exemple 2 : centre de masse d'une plaque mince

Déterminer le centre de masse d'une plaque mince occupant la région du demi-plan supérieur bornée par les courbes $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 4$ et $y = 0$ et dont la densité est proportionnelle à la distance au bord inférieur de la plaque.




$$\rho(x, y) = ky \quad (k \geq 0)$$

domaine $D =$

$$\left\{(x, y) \mid y^2 - 4 \leq x \leq 4 - y^2, 0 \leq y \leq 2\right\}$$

# Exemple 2 : centre de masse d'une plaque mince

Déterminer le centre de masse d'une plaque mince occupant la région du demi-plan supérieur bornée par les courbes $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 4$ et $y = 0$ et dont la densité est proportionnelle à la distance au bord inférieur de la plaque.

Calcul de la masse :

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y)\, dA \\ &= \int_0^2 \int_{y^2-4}^{4-y^2} ky\, dxdy \\ &= k \int_0^2 y\left(8 - 2y^2\right)\, dy = 8k \end{aligned}$$

# Exemple 2 : centre de masse d'une plaque mince

Déterminer le centre de masse d'une plaque mince occupant la région du demi-plan supérieur bornée par les courbes $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 4$ et $y = 0$ et dont la densité est proportionnelle à la distance au bord inférieur de la plaque.

Calcul des moments :

- La fonction $x\rho(x, y) = kxy$ est impaire en $x$
- Le domaine est symétrique en $x$
- Donc

$$M_y = \iint_D x\rho(x, y)\, dA = 0$$

et

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = 0$$

# Exemple 2 : centre de masse d'une plaque mince

Déterminer le centre de masse d'une plaque mince occupant la région du demi-plan supérieur bornée par les courbes $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 4$ et $y = 0$ et dont la densité est proportionnelle à la distance au bord inférieur de la plaque.

Calcul des moments :

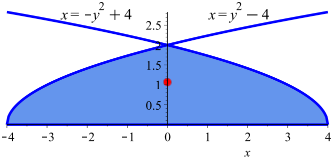
$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y\rho(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_{y^2-4}^{4-y^2} ky^2\,dxdy \\ &= k\int_0^2 y^2\left(8-2y^2\right)\,dy = \frac{128}{15}k \\ \bar{y} &= \frac{M_x}{m} = \frac{128k/15}{8k} = \frac{16}{15} \end{aligned}$$

# Exemple 2 : centre de masse d'une plaque mince

Déterminer le centre de masse d'une plaque mince occupant la région du demi-plan supérieur bornée par les courbes $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 4$ et $y = 0$ et dont la densité est proportionnelle à la distance au bord inférieur de la plaque.

Conclusion :

Le centre de masse est situé en $(0, 16/15)$.



# Résumé

- Déterminer le centre de masse d'une plaque mince.
- Utiliser la symétrie pour réduire les calculs.