

MTH1102D Calcul II

Chapitre 6, section 2 : Les intégrales doubles sur des domaines généraux

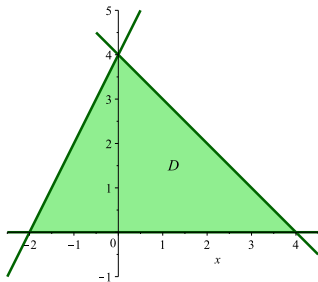
Exemple 2: intégrale sur un domaine de type II

Exemple 2 : intégrale sur un domaine de type II

Évaluer $\iint_D xy \, dA$ où D est le triangle de sommets $(-2, 0)$, $(4, 0)$ et $(0, 4)$.

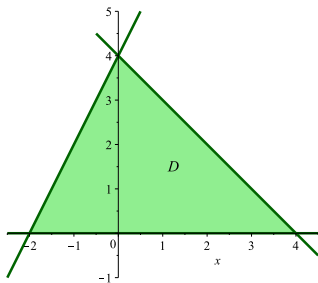
Exemple : intégrale sur un domaine de type II

Évaluer $\iint_D xy \, dA$ où D est le triangle de sommets $(-2, 0)$, $(4, 0)$ et $(0, 4)$.



Exemple : intégrale sur un domaine de type II

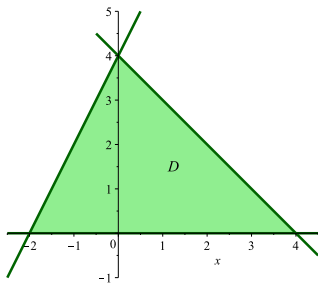
Évaluer $\iint_D xy \, dA$ où D est le triangle de sommets $(-2, 0)$, $(4, 0)$ et $(0, 4)$.



Équations des droites qui bornent D :

Exemple : intégrale sur un domaine de type II

Évaluer $\iint_D xy \, dA$ où D est le triangle de sommets $(-2, 0)$, $(4, 0)$ et $(0, 4)$.



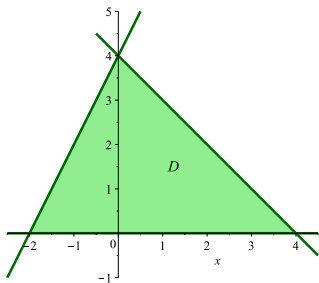
Équations des droites qui bornent D :

Passant par $(-2, 0)$ et $(0, 4)$:

$$y = 2x + 4 \Leftrightarrow x = \frac{y}{2} - 2$$

Exemple : intégrale sur un domaine de type II

Évaluer $\iint_D xy \, dA$ où D est le triangle de sommets $(-2, 0)$, $(4, 0)$ et $(0, 4)$.



Équations des droites qui bornent D :

Passant par $(-2, 0)$ et $(0, 4)$:

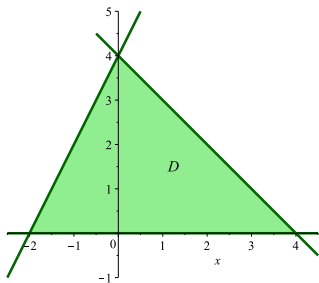
$$y = 2x + 4 \Leftrightarrow x = \frac{y}{2} - 2$$

Passant par $(4, 0)$ et $(0, 4)$:

$$y = 4 - x \Leftrightarrow x = 4 - y$$

Exemple : intégrale sur un domaine de type II

Évaluer $\iint_D xy \, dA$ où D est le triangle de sommets $(-2, 0)$, $(4, 0)$ et $(0, 4)$.



Équations des droites qui bornent D :

Passant par $(-2, 0)$ et $(0, 4)$:

$$y = 2x + 4 \Leftrightarrow x = \frac{y}{2} - 2$$

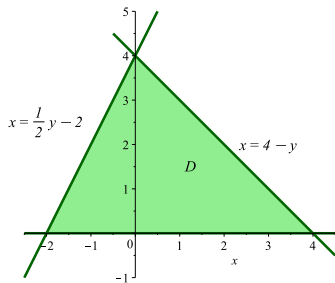
Passant par $(4, 0)$ et $(0, 4)$:

$$y = 4 - x \Leftrightarrow x = 4 - y$$

Horizontale : $y = 0$

Exemple : intégrale sur un domaine de type II

Évaluer $\iint_D xy \, dA$ où D est le triangle de sommets $(-2, 0)$, $(4, 0)$ et $(0, 4)$.



Équations des droites qui bornent D :

Passant par $(-2, 0)$ et $(0, 4)$:

$$y = 2x + 4 \Leftrightarrow x = \frac{y}{2} - 2$$

Passant par $(4, 0)$ et $(0, 4)$:

$$y = 4 - x \Leftrightarrow x = 4 - y$$

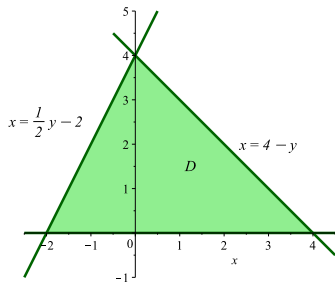
Horizontale : $y = 0$

Exemple : intégrale sur un domaine de type II

Évaluer $\iint_D xy \, dA$ où D est le triangle de sommets $(-2, 0)$, $(4, 0)$ et $(0, 4)$.

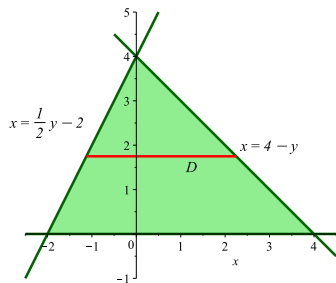
Le domaine D :

$$0 \leq y \leq 4$$



Exemple : intégrale sur un domaine de type II

Évaluer $\iint_D xy \, dA$ où D est le triangle de sommets $(-2, 0)$, $(4, 0)$ et $(0, 4)$.



Le domaine D :

$$0 \leq y \leq 4$$

$$\frac{y}{2} - 2 \leq x \leq 4 - y$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y}{2} - 2 \leq x \leq 4 - y, 0 \leq y \leq 4 \right\}$$

Exemple : intégrale sur un domaine de type II

Domaine de type II :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y}{2} - 2 \leq x \leq 4 - y, 0 \leq y \leq 4 \right\}$$

Exemple : intégrale sur un domaine de type II

Domaine de type II :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y}{2} - 2 \leq x \leq 4 - y, 0 \leq y \leq 4 \right\}$$

$$\iint_D xy \, dA = \int_0^4 \int_{y/2-2}^{4-y} xy \, dx dy$$

Exemple : intégrale sur un domaine de type II

Domaine de type II :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y}{2} - 2 \leq x \leq 4 - y, 0 \leq y \leq 4 \right\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dA &= \int_0^4 \int_{y/2-2}^{4-y} xy \, dx dy \\ &= \int_0^4 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=y/2-2}^{x=4-y} dy \end{aligned}$$

Exemple : intégrale sur un domaine de type II

Domaine de type II :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y}{2} - 2 \leq x \leq 4 - y, 0 \leq y \leq 4 \right\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dA &= \int_0^4 \int_{y/2-2}^{4-y} xy \, dx dy \\ &= \int_0^4 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=y/2-2}^{x=4-y} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 [(4-y)^2 y - (y/2 - 2)^2 y] \, dy \end{aligned}$$

Exemple : intégrale sur un domaine de type II

Domaine de type II :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y}{2} - 2 \leq x \leq 4 - y, 0 \leq y \leq 4 \right\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dA &= \int_0^4 \int_{y/2-2}^{4-y} xy \, dx dy \\ &= \int_0^4 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=y/2-2}^{x=4-y} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 [(4-y)^2 y - (y/2 - 2)^2 y] \, dy \\ &= \frac{3}{8} \int_0^4 (y^3 - 8y^2 + 16y) \, dy \end{aligned}$$

Exemple : intégrale sur un domaine de type II

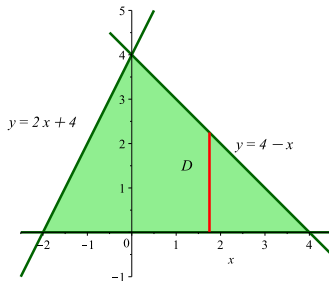
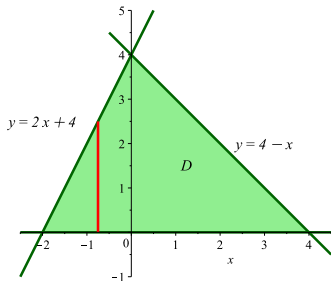
Domaine de type II :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y}{2} - 2 \leq x \leq 4 - y, 0 \leq y \leq 4 \right\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dA &= \int_0^4 \int_{y/2-2}^{4-y} xy \, dx dy \\ &= \int_0^4 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=y/2-2}^{x=4-y} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 [(4-y)^2 y - (y/2 - 2)^2 y] \, dy \\ &= \frac{3}{8} \int_0^4 (y^3 - 8y^2 + 16y) \, dy \\ &= 8. \end{aligned}$$

Exemple : intégrale sur un domaine de type II

D est un domaine de type II mais pas de type I.



- Cet exemple montre comment calculer une intégrale sur un domaine de type II.

- Cet exemple montre comment calculer une intégrale sur un domaine de type II.
- Il n'est pas toujours possible de décrire un domaine selon les deux types.

- Cet exemple montre comment calculer une intégrale sur un domaine de type II.
- Il n'est pas toujours possible de décrire un domaine selon les deux types.
- Puisque la fonction à intégrer n'est pas positive sur tout le domaine D , l'intégrale ne peut pas s'interpréter comme un volume même si elle est positive.