

# MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 1: Les champs vectoriels

## **Champs vectoriels**

# Introduction

- Champs vectoriels en 2 et 3 dimensions.
- Exemples de champs vectoriels.

## Conventions et notation

- Un élément de  $\mathbb{R}^n$  peut être vu comme
  - un *point* avec  $n$  coordonnées
  - un *vecteur* de dimension  $n$

## Conventions et notation

- Un élément de  $\mathbb{R}^n$  peut être vu comme
  - un *point* avec  $n$  coordonnées
  - un *vecteur* de dimension  $n$
- Notation :
  - un point sera noté en gras :  $\mathbf{x}$
  - un vecteur sera noté avec une flèche :  $\vec{v}$

## Conventions et notation

- Un élément de  $\mathbb{R}^n$  peut être vu comme
  - un *point* avec  $n$  coordonnées
  - un *vecteur* de dimension  $n$
- Notation :
  - un point sera noté en gras :  $\mathbf{x}$
  - un vecteur sera noté avec une flèche :  $\vec{v}$
- En pratique, on identifiera points et vecteurs :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longleftrightarrow \vec{\mathbf{x}} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

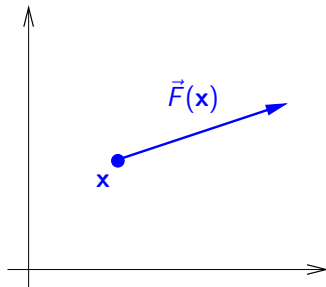
# Champs vectoriels

## Définition

Un **champ vectoriel** (ou **champ de vecteurs**) dans  $\mathbb{R}^n$  est une fonction vectorielle

$$\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui associe à chaque point  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur  $\vec{F}(\mathbf{x})$  de dimension  $n$ .



# Champs vectoriels

## Définition

Un **champ vectoriel** (ou **champ de vecteurs**) dans  $\mathbb{R}^n$  est une fonction vectorielle

$$\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui associe à chaque point  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur  $\vec{F}(\mathbf{x})$  de dimension  $n$ .

On écrit un champ vectoriel générique

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j} \quad \text{deux dimensions}$$

# Champs vectoriels

## Définition

Un **champ vectoriel** (ou **champ de vecteurs**) dans  $\mathbb{R}^n$  est une fonction vectorielle

$$\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui associe à chaque point  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur  $\vec{F}(\mathbf{x})$  de dimension  $n$ .

On écrit un champ vectoriel générique

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j} \quad \text{deux dimensions}$$

ou

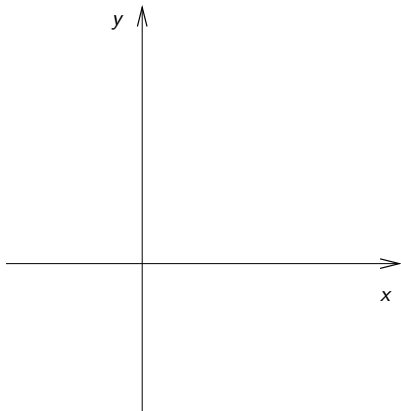
$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k} \quad \text{trois dimensions}$$



# Champs vectoriels

Exemple : Représentons graphiquement le champ vectoriel

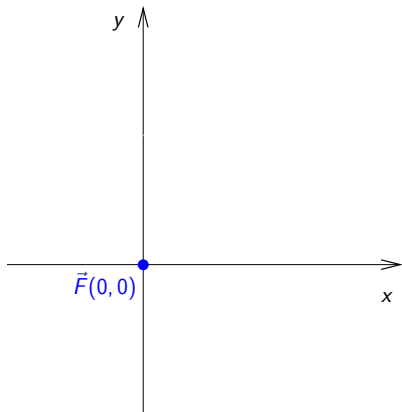
$$\vec{F}(x, y) = y \vec{i} - x \vec{j}$$



# Champs vectoriels

Exemple : Représentons graphiquement le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y) = y \vec{i} - x \vec{j}$$

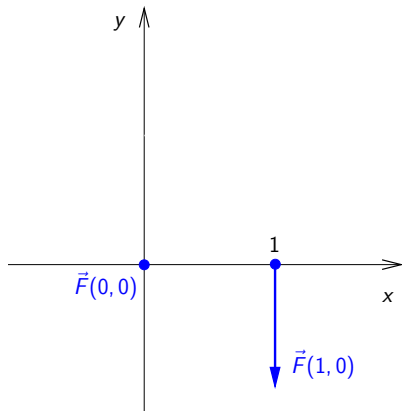


$$\vec{F}(0,0) = \vec{0}$$

# Champs vectoriels

Exemple : Représentons graphiquement le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y) = y \vec{i} - x \vec{j}$$



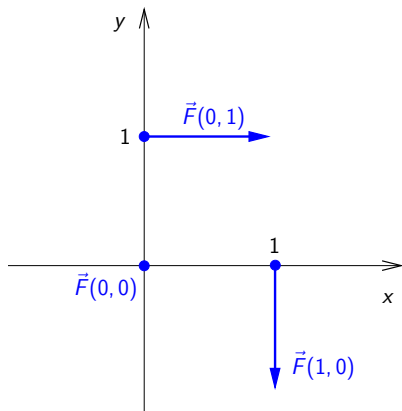
$$\vec{F}(0, 0) = \vec{0}$$

$$\vec{F}(1, 0) = -\vec{j}$$

# Champs vectoriels

Exemple : Représentons graphiquement le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$$



$$\vec{F}(0, 0) = \vec{0}$$

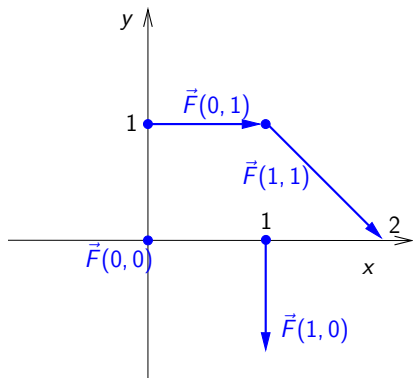
$$\vec{F}(1, 0) = -\vec{j}$$

$$\vec{F}(0, 1) = \vec{i}$$

# Champs vectoriels

Exemple : Représentons graphiquement le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y) = y \vec{i} - x \vec{j}$$



$$\vec{F}(0,0) = \vec{0}$$

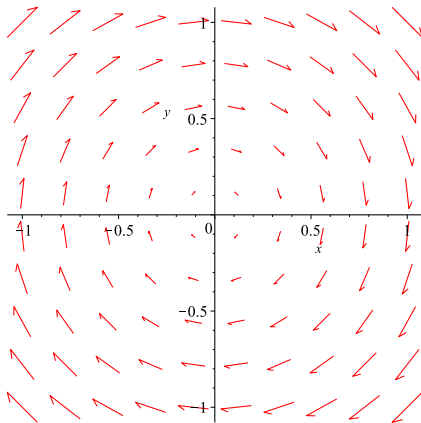
$$\vec{F}(1,0) = -\vec{j}$$

$$\vec{F}(0,1) = \vec{i}$$

$$\vec{F}(1,1) = \vec{i} - \vec{j}$$

# Champs vectoriels

Exemple : Représentons graphiquement le champ vectoriel  
 $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$



# Champs vectoriels

Exemple : La force gravitationnelle exercée par une masse  $M$  à l'origine sur un objet de masse  $m$  au point  $\mathbf{x}$  est

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^3} \vec{\mathbf{x}}$$

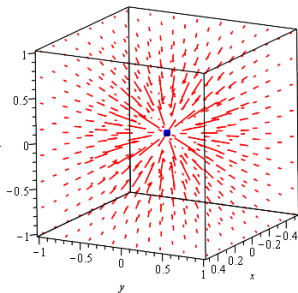
où  $G \approx 6.7 \times 10^{-11}$  est la constante de gravitation.

# Champs vectoriels

Exemple : La force gravitationnelle exercée par une masse  $M$  à l'origine sur un objet de masse  $m$  au point  $\mathbf{x}$  est

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^3} \vec{\mathbf{x}}$$

où  $G \approx 6.7 \times 10^{-11}$  est la constante de gravitation.



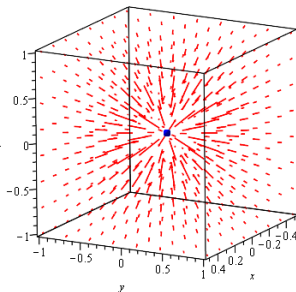


# Champs vectoriels

Exemple : La force gravitationnelle exercée par une masse  $M$  à l'origine sur un objet de masse  $m$  au point  $\mathbf{x}$  est

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^3} \vec{\mathbf{x}}$$

où  $G \approx 6.7 \times 10^{-11}$  est la constante de gravitation.



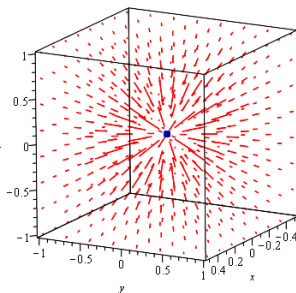
- $\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{\text{cste}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^3} \vec{\mathbf{x}}$  donc la force s'exerce selon la droite reliant  $m$  et  $M$ .

# Champs vectoriels

Exemple : La force gravitationnelle exercée par une masse  $M$  à l'origine sur un objet de masse  $m$  au point  $\mathbf{x}$  est

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^3} \vec{\mathbf{x}}$$

où  $G \approx 6.7 \times 10^{-11}$  est la constante de gravitation.



- $\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{\text{cste}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^3} \vec{\mathbf{x}}$  donc la force s'exerce selon la droite reliant  $m$  et  $M$ .
- $\|\vec{F}(\mathbf{x})\| = \frac{\text{cste}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^3} \|\vec{\mathbf{x}}\| = \frac{\text{cste}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2}$  donc la force est inversement proportionnelle au carré de la distance.

# Champs vectoriels

Exemple : La force gravitationnelle exercée par une masse  $M$  à l'origine sur un objet de mass  $m$  au point  $\mathbf{x}$  est

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^3} \vec{\mathbf{x}}$$

où  $G \approx 6.7 \times 10^{-11}$  est la constante de gravitation.

- Explicitement :

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{-mMG}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$$

# Champs vectoriels

Exemple : La force gravitationnelle exercée par une masse  $M$  à l'origine sur un objet de mass  $m$  au point  $\mathbf{x}$  est

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^3} \vec{\mathbf{x}}$$

où  $G \approx 6.7 \times 10^{-11}$  est la constante de gravitation.

- Explicitement :

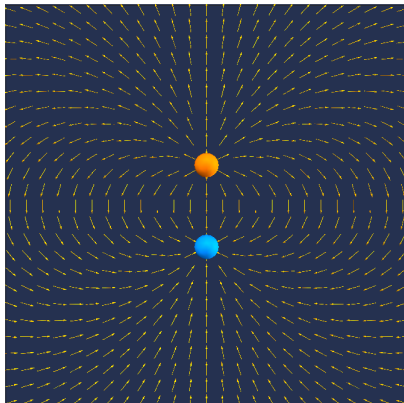
$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{-mMG}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$$

- Le champ électrique est de la même forme :

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{qQ\epsilon}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^3} \vec{\mathbf{x}}$$

# Champs vectoriels

Exemple : Champ électrique autour d'un dipôle.

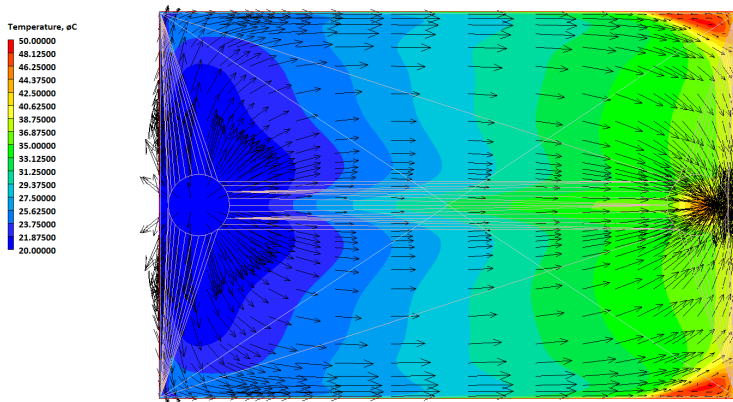


Source :

<http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/visualizations/guidedtour/Tour.htm>

# Champs vectoriels

Exemple : Étude du transfert de chaleur dans un panneau solaire.

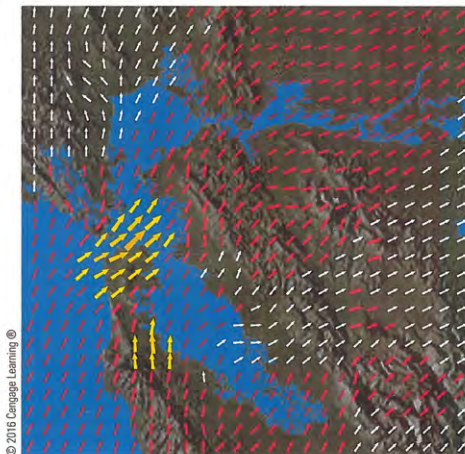


Source :

[http://www.cham.co.uk/casestudies/CCS\\_HeatTransfer\\_in\\_SolarPanel.pdf](http://www.cham.co.uk/casestudies/CCS_HeatTransfer_in_SolarPanel.pdf)

# Champs vectoriels

Exemple : Vitesse du vent dans la baie de San Francisco le 1er mars 2010 à 18h00.



- Définition de champ vectoriel en 2 et 3 dimensions.



- Définition de champ vectoriel en 2 et 3 dimensions.
- Exemples de champs vectoriels.