MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 1: Les champs vectoriels

Exemple 1: calcul d'un potentiel

Exemple 1 : calcul d'un potentiel

1. Montrer que le champ vectoriel $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ n'est *pas* conservatif.

Supposons que $\vec{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$.

$$\begin{cases} f_x(x, y) &= & y & (1) \\ f_y(x, y) &= & -x & (2) \end{cases}$$

On a

$$(1) \Rightarrow f(x, y) = xy + A(y),$$

où A est une fonction indépendante de x (« intégration partielle »)
Donc

$$f_y(x, y) = x + A_y(y)$$

D'autre part

$$(2) \Rightarrow f_y(x, y) = -x$$

Ceci implique que $A_y(y) = -2x$. Impossible car A est indépendante de x.
Conclusion : il n'existe pas de potentiel f donc $\vec{F}$ n'est pas conservatif.

Exemple 1 : calcul d'un potentiel

2. Trouver un potentiel pour le champ vectoriel
$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy+1)\vec{i} + (x^2+z^3+1)\vec{j} + 3yz^2\vec{k}.$$

On cherche f telle que $\vec{F} = \nabla f$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} f_x & = & 2xy+1 & (1) \\ f_y & = & x^2+z^3+1 & (2) \\ f_z & = & 3yz^2 & (3) \end{cases}$$

intégrer par rapport à x

$$(1) \Rightarrow f = x^2y + x + A(y,z)$$

où A est indépendante de x.

$$(2) \Rightarrow x^2+z^3+1 = f_y = x^2 + A_y(y,z)$$

Exemple 1 : calcul d'un potentiel

2. Trouver un potentiel pour le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy+1)\vec{i} + (x^2+z^3+1)\vec{j} + 3yz^2\vec{k}.$$

On cherche f telle que $\vec{F} = \nabla f$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lcll} f_x & = & 2xy+1 & (1) \\ f_y & = & x^2+z^3+1 & (2) \\ f_z & = & 3yz^2 & (3) \end{array}\right.$$

$$(1) \Rightarrow f = x^2y + x + A(y,z)$$

où A est indépendante de x.

$$(2) \Rightarrow \cancel{x^2} + z^3 + 1 = f_y = \cancel{x^2} + A_y(y,z) \Rightarrow A_y(y,z) = z^3 + 1$$

donc $A(y,z) = yz^3 + y + B(z)$ où B est indépendante de x et y.

Exemple 1 : calcul d'un potentiel

2. Trouver un potentiel pour le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy+1)\vec{i} + (x^2+z^3+1)\vec{j} + 3yz^2\vec{k}.$$

On cherche f telle que $\vec{F} = \nabla f$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lcll} f_x & = & 2xy+1 & (1) \\ f_y & = & x^2+z^3+1 & (2) \\ f_z & = & 3yz^2 & (3) \end{array}\right.$$

On a donc $f = x^2y + x + yz^3 + y + B(z)$.

$$(3) \Rightarrow 3yz^2 = f_z = 3yz^2 + B_z(z)$$

Exemple 1 : calcul d'un potentiel

2. Trouver un potentiel pour le champ vectoriel
$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy+1)\vec{i} + (x^2+z^3+1)\vec{j} + 3yz^2\vec{k}.$$

On cherche f telle que $\vec{F} = \nabla f$, c'est-à-dire
$$\begin{cases} f_x &= 2xy+1 & (1) \\ f_y &= x^2+z^3+1 & (2) \\ f_z &= 3yz^2 & (3) \end{cases}$$

On a donc $f = x^2y + x + yz^3 + y + B(z)$.
$$(3) \Rightarrow \cancel{3yz^2} = f_z = \cancel{3yz^2} + B_z(z) \Rightarrow B_z(z) = 0$$ dérivé de B est 0

donc $B(z) = C$ où C est une constante. car nulle

Potentiel pour $\vec{F}$:
$$f(x,y,z) = x^2y + x + yz^3 + y + C.$$

Résumé

- Exemple d'un champ non conservatif.
- Calcul d'un potentiel pour un champ conservatif.