MTH1102D Calcul II

Introduction et rappels

Polytechnique Montréal

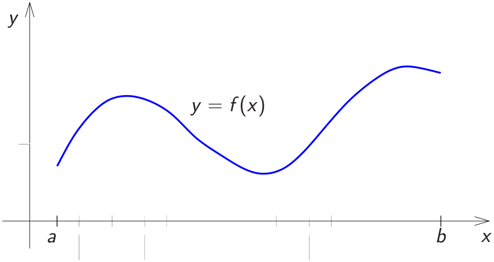
Résumé du cours MTH1102D Calcul II

Sujets abordés :

- Intégrales doubles, intégrales triples et applications.
- Analyse vectorielle dans le plan (champs vectoriels, champs conservatifs, intégrales curvilignes, théorème de Green).
- Analyse vectorielle dans l'espace (champs vectoriels dans l'espace, intégrales de surface, théorème de Stokes, théorème de flux-divergence).

Rappel : intégrale de Riemann en une variable

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$. On construit l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme suit.



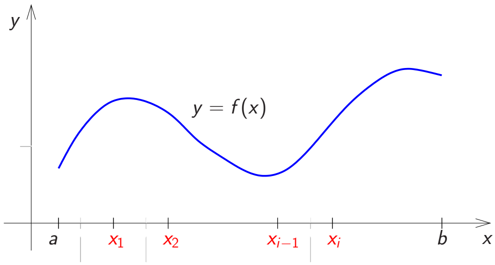
Rappel : intégrale de Riemann en une variable

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$.

- On choisit une subdivision

  $$a < x_1 < x_2 < \cdots < b$$

  de l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles.
- n est un entier positif et les points x_i sont les points de subdivision, $i = 1, 2, \ldots, n$.



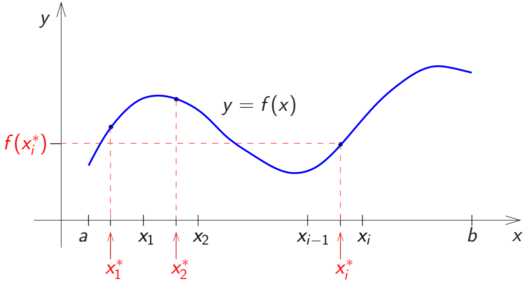
Rappel : intégrale de Riemann en une variable

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$.

- On choisit $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.
- On pose

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

la longueur du i-ème sous-intervalle.

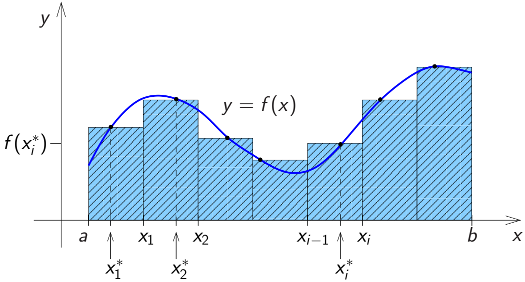


Rappel : intégrale de Riemann en une variable

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$.

- La *somme de Riemann* construite à partir de ces données est la suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i.$$



Remarque : Si f est positive alors cette somme approxime l'aire sous la courbe au-dessus de $[a, b]$.

Rappel : intégrale de Riemann en une variable

On suppose que les sous-intervalles sont tous de même longueur.

Leur longueur est $\Delta x = (b-a)/n$.

Lorsque $n \to \infty$, on a $\Delta x \to 0$.

Définition

On définit *l'intégrale de f sur* $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

si la limite existe. Dans ce cas, on dit que f est *intégrable* sur cet intervalle.

Rappel : intégrale de Riemann en une variable

On suppose que les sous-intervalles sont tous de même longueur.

Leur longueur est $\Delta x = (b-a)/n$.

Lorsque $n \to \infty$, on a $\Delta x \to 0$.

Définition

On définit *l'intégrale de f sur* $[a,b]$ par

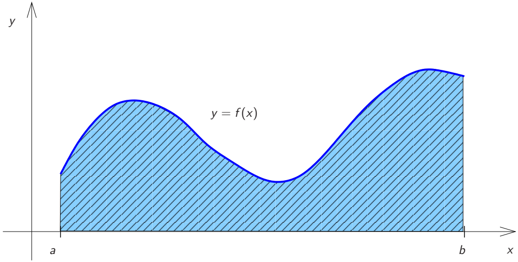
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x_i$$

si la limite existe. Dans ce cas, on dit que f est *intégrable* sur cet intervalle.

Le symbole dx dans l'intégrale s'interprète comme un *petit élément de longueur*.

Rappel : intégrale de Riemann en une variable

Si $f(x, y) \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx$ donne l'aire sous la courbe $y = f(x)$ au-dessus de $[a, b]$.



En général, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est un nombre réel qui peut être positif, négatif ou nul.

Résumé

Construction de l'intégrale : donné une fonction et un domaine d'intégration,

1. on subdivise le domaine d'intégration en sous-domaines.
2. dans chaque sous-domaine, on choisit un point d'évaluation de la fonction.
3. pour chaque sous-domaine, on multiplie la valeur de la fonction au point choisi par la dimension du sous-domaine.
4. on forme une somme de Riemann en additionnant les termes trouvés à l'étape 3.
5. on prend la limite de la somme de l'étape 4 lorsque les sous-domaines deviennent de plus en plus petits.