Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH1102D - Calcul II
Été 2023

Devoir 8

Nom : ______________________ **Prénom :** ______________________

Matricule : ____________________ **Groupe :** 01

Question corrigée	Autres questions	Total
6	4	10 /10

Devoir 8

#1 ✓

a) $\vec{r}(t) = t^2\cos(t)\,\vec{i} + t^2\sin(t)\,\vec{j} + t^3\,\vec{k} \qquad -\pi \leq t \leq \pi$

(i) $J_1 = \int_C z^{2/3}\, ds$

- $\vec{r}\,'(t) = [2t\cos(t) - t^2\sin(t)]\,\vec{i} + [2t\sin(t) + t^2\cos(t)]\,\vec{j} + [3t^2]\,\vec{k}$
- $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(2t\cos(t) - t^2\sin(t))^2 + (2t\sin(t) + t^2\cos(t))^2 + (3t^2)^2}$

$= \sqrt{\left(4t^2\cos^2(t) - 4t^3\cos(t)\sin(t) + t^4\sin^2(t)\right) + \left(4t^2\sin^2(t) + 4t^3\cos(t)\sin(t) + t^4\cos^2(t)\right) + (9t^4)}$

$= \sqrt{t^4\sin^2(t) + t^4\cos^2(t) + 9t^4 + 4t^2\cos^2(t) + 4t^2\sin^2(t)}$

$= \sqrt{t^4 + 9t^4 + 4t^2} = \sqrt{10t^4 + 4t^2} = \sqrt{t^2(10t^2+4)}$

$= |t|\sqrt{10t^2+4}$

- $f(\vec{r}(t)) = z^{2/3}(t) = (t^3)^{\frac{2}{3}} = t^2$

$J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cdot t\sqrt{10t^2+4}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} t^3\sqrt{10t^2+4}\, dt$

Vu qu'on a $-\pi$ à π, vérifier si la fonction est impaire, donc $f(-t) = -f(t)$

$f(t) = t^3\sqrt{10t^2+4}$

$f(-t) = -t^3\sqrt{10(-t)^2+4} = -t\sqrt{10t^2+4} = -f(t)$

$J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} t^3\sqrt{10t^2+4}\, dt = \cancel{0}$

(i) $\vec{r}(t) = t^2\cos(t)\vec{i} + t^2\sin(t)\vec{j} + t^3\vec{k} \quad -\pi \leq t \leq \pi$

$$J_2 = \int_C \vec{F}\cdot\vec{dr} \quad \text{où} \quad \vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$$

On sait que : $\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt$

et que $\vec{r}'(t)\,dt = \vec{dr}$

$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \int_C \vec{F}\cdot\vec{dr}$$

Orientation $\int_{-C} \vec{F}\cdot\vec{dr} = -\int_C \vec{F}\cdot\vec{dr}$

En 3D : $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

$C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

- $\vec{r}'(t) = [2t\cos(t) - t^2\sin(t)]\vec{i} + [2t\sin(t) + t^2\cos(t)]\vec{j} + [3t^2]\vec{k}$
- $\vec{F}(\vec{r}(t)) = [t^2\sin(t)]\vec{i} - [t^2\cos(t)]\vec{j} + [t^3]\vec{k}$
- $\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot r'(t) = \left([t^2\cos(t)]\vec{i} + [t^2\sin(t)]\vec{j} + [t^3]\vec{k}\right)\cdot\left([2t\cos(t) - t^2\sin(t)]\,i + [2t\sin(t) + t^2\cos(t)]\vec{j} + [3t^2]\vec{k}\right)$

$$\begin{bmatrix} t^2\sin(t) \\ -t^2\cos(t) \\ t^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2t\cos(t) - t^2\sin(t) \\ 2t\sin(t) + t^2\cos(t) \\ 3t^2 \end{bmatrix}$$

$$= -t^4\sin^2(t) + t^3\sin(2t) - t^2\cos(t)\left(2t\sin(t) + t^2\cos(t)\right) + 3t^5$$

$$= -t^4\sin^2(t) + t^3\sin(2t) + 3t^5 - t^4\cos^2(t) - t^3\sin(2t)$$

$$= 3t^5 - t^4\sin^2(t) + t^3\sin(2t) - t^3\sin(2t) - t^4\cos^2(t)$$

$$= 3t^5 - t^4\sin^2(t) - t^4\cos^2(t) = \boxed{3t^5 - t^4}$$

$$= t^4(3t-1)$$

$$J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 3t^5 - t^4 \, dt = 3\int_{-\pi}^{\pi} t^5\, dt - \int_{-\pi}^{\pi} t^4\, dt$$

$$= 3\left[\frac{t^6}{6}\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{t^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \cancel{3\left[\frac{\pi^6}{6} - \frac{\pi^6}{6}\right]}_{0} - \left[\frac{\pi^5}{5} - \frac{-\pi^5}{5}\right] = -\frac{2\pi^5}{5} \approx -122{,}41$$

b) γ paramétré par $\vec{r}(t)$ $a \leq t \leq b$, une courbe lisse et $\vec{G}$ un champ vectoriel constant.

Montrer que :

$$\int_\gamma \vec{G} \cdot d\vec{r} = \vec{G} \cdot [\vec{r}(b) - \vec{r}(a)]$$

On sait que :

Une courbe C paramétrée par une fonction vectorielle $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ est lisse si

1) les composantes de $\vec{r}$ ont des dérivées partielles continues
2) $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ pour tout $t \in [a, b]$

On sait que :

$\vec{G}$ est un champ vectoriel constant, alors

$\nabla g(r(t)) =$ constante

$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{G} \cdot \vec{dr} = \int_a^b \nabla g(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \vec{G} \int_a^b r'(t)\, dt$$

$$= \vec{G} \cdot [r(t)]_a^b = \vec{G}\,[r(b) - r(a)] = \int_\gamma \vec{G} \cdot \vec{dr}$$

#2 $\vec{F}(x,y,z) = [\cos(yz) - 2xz]\vec{i} + [3 - xz\sin(yz)]\vec{j} - [xy\sin(yz) + x^2]\vec{k}$

point début et le même point qu'à la fin

a) C est une courbe fermée, travail de $\vec{F}$ autour de C ?

On sait selon le TFIC que :

preuve l'intervalle curviligne d'un champ vectoriel conservatif $\vec{F} = \nabla f$ autour d'une courbe fermée C est nulle :

Champ conservatif? $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. On sait que : $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$

$\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \vec{F}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(yz) - 2xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3 - xz\sin(yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -xy\sin(yz) - x^2$$

X: $\int \frac{\partial f}{\partial x}dx = \int \cos(yz) - 2xz \, dx$

$$f(x,y,z) = x\cos(yz) - x^2z + g(y,z)$$

Y: $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial(zx\cos(yz) - 2xz)}{\partial y} + \frac{\partial g_y(y,z)}{\partial y}$

$$3 - xz\sin(yz) = -xz\sin(yz) + \frac{\partial g_y(y,z)}{\partial y}$$

$$3 - xz\sin(yz) + xz\sin(yz) = \frac{\partial g_y(y,z)}{\partial y}$$

$$3 = \frac{\partial g_y(y,z)}{\partial y}$$

$$\int g(y,z)\,dy = 3\int dy = \int g_y(y,z)\,dy$$

$$= 3y + h(z)$$

Z : $\frac{f(x,y,z)}{z} = \frac{\partial(x\cos(yz) - x^2z + 3y)}{\partial z} + \frac{\partial h(z)}{z}$

$$-xy\sin(yz) - x^2 = -xy\sin(yz) - x^2 + \frac{\partial h(z)}{z}$$

$\frac{\partial h(z)}{z} = 0$, donc $h(z)$ est une constante

$$f(x,y,z) = \underline{x\cos(yz) - x^2z + 3y}$$

$\Rightarrow$ le champ est conservateur

b) $W = \int_C \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_C \nabla\vec{f}\cdot\vec{dr} = f(Q) - f(P)$

$$W = f(-1,\pi,1) - f(2,0,3)$$

$$= (-1\cos(\pi\cdot 1) - (-1)^2 + 3\pi) - (2\cos(0\cdot 3) - (2)^2\cdot 3 + \cancel{3\cdot 0})$$

$$= (-1\cdot -1 - 1 + 3\pi) - (2\cdot 1 - 4\cdot 3)$$

$$= 3\pi + 10$$

6