MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 4: Le théorème de Green

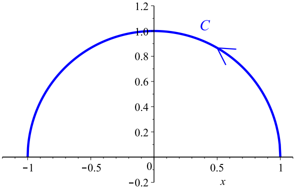
Exemple 2: calcul du travail d'un champ vectoriel à l'aide du théorème de Green

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi-cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.



Première façon : calcul direct.

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= \sin t\left(e^{\cos t} - 2\right)\vec{i} + e^{\cos t}\vec{j} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) &= -\sin^2 t\left(e^{\cos t}\right) + \cos t\, e^{\cos t}
\end{aligned}$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

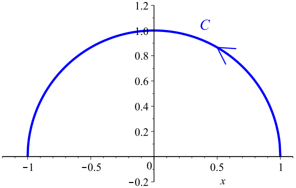
est très difficile à évaluer.

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.



Deuxième façon : théorème de Green.

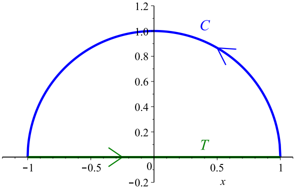
- La courbe C n'est pas fermée.

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.



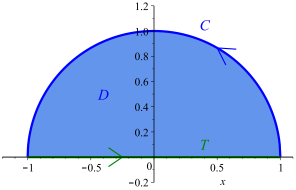
Deuxième façon : théorème de Green.

- La courbe C n'est pas fermée.
- Soit T le segment de $(-1,0)$ à $(1,0)$ et $\Gamma = C \cup T$.
- La courbe Γ est fermée et orientée positivement.

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.



Deuxième façon : théorème de Green.

- La courbe C n'est pas fermée.
- Soit T le segment de $(-1,0)$ à $(1,0)$ et $\Gamma = C \cup T$.
- La courbe Γ est fermée et orientée positivement.
- Soit D le domaine délimité par Γ.

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Selon le théorème de Green, si $P(x,y) = y(e^x - 2)$ et $Q(x,y) = e^x$ alors

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA \\
&= \iint_D [e^x - (e^x - 2)]\, dA = \iint_D 2\, dA \\
&= 2 \text{ aire}(D) = 2\left(\frac{1}{2}\right)(\pi)(1)^2 = \pi.
\end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.

D'autre part,

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} + \int_T \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

donc le travail cherché est

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} - \int_T \vec{F} \cdot \vec{dr}.$$

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Le segment T est paramétré par $\vec{R}(t) = t\vec{i}$, $-1 \leq t \leq 1$ donc

$$\begin{aligned}
\int_T \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \int_{-1}^{1} \vec{F}(\vec{R}(t)) \cdot \vec{R}\,'(t)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} \left[(e^t - 2)(0)\vec{i} + e^t\vec{j}\right] \cdot \vec{i}\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} 0\,dt = 0
\end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Finalement,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} - \int_T \vec{F} \cdot \vec{dr} = \pi - 0 = \pi.$$

Résumé

- Calcul du travail d'un champ en deux dimensions à l'aide du théorème de Green.
- Fermer la courbe pour pouvoir utiliser le théorème de Green.
- L'intégrale curviligne sur le morceau ajouté pour fermer la courbe doit être facile à évaluer.