MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 1: Les intégrales triples

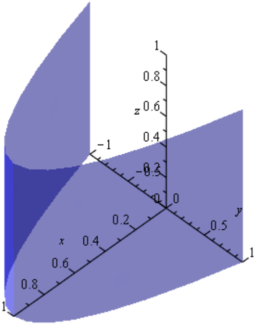
Exemple 1: intégrale triple sur un domaine général

Exemple 1 : Intégrale triple sur un domaine général

Évaluer l'intégrale $J = \iiint_E xy^2z\,dV$, où E est délimitée par les plans $x = 0$, $z = 0$, $z = 1$ et le cylindre parabolique $x + y^2 = 1$.

Exemple 1 : Intégrale triple sur un domaine général

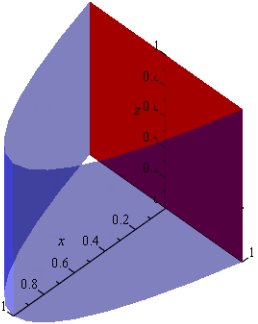
Évaluer l'intégrale $J = \iiint_E xy^2z\,dV$, où E est délimitée par les plans $x = 0$, $z = 0$, $z = 1$ et le cylindre parabolique $x + y^2 = 1$.



Cylindre $x + y^2 = 1$

Exemple 1 : Intégrale triple sur un domaine général

Évaluer l'intégrale $J = \iiint_E xy^2 z\, dV$, où E est délimitée par les plans $x = 0$, $z = 0$, $z = 1$ et le cylindre parabolique $x + y^2 = 1$.

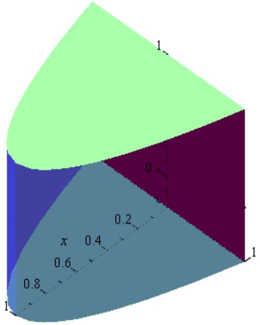


Cylindre $x + y^2 = 1$

Plan $x = 0$

Exemple 1 : Intégrale triple sur un domaine général

Évaluer l'intégrale $J = \iiint_E xy^2 z\, dV$, où E est délimitée par les plans $x = 0$, $z = 0$, $z = 1$ et le cylindre parabolique $x + y^2 = 1$.



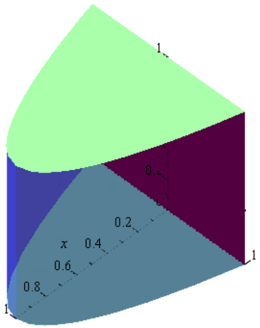
Cylindre $x + y^2 = 1$

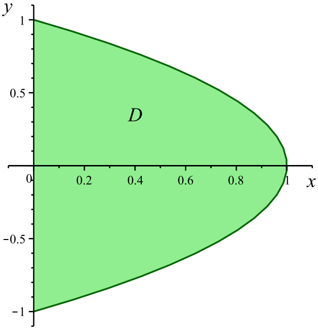
Plan $x = 0$

Plans $z = 0$ et $z = 1$

Exemple 1 : Intégrale triple sur un domaine général

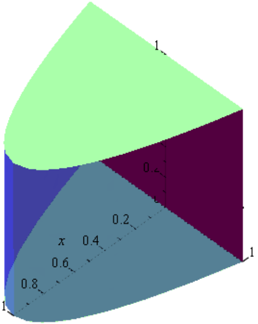
Évaluer l'intégrale $J = \iiint_E xy^2 z \, dV$, où E est délimitée par les plans $x = 0$, $z = 0$, $z = 1$ et le cylindre parabolique $x + y^2 = 1$.

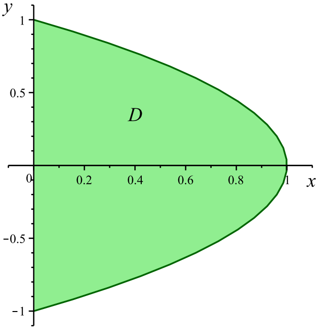




Exemple 1 : Intégrale triple sur un domaine général

Évaluer l'intégrale $J = \iiint_E xy^2 z \, dV$, où E est délimitée par les plans $x = 0$, $z = 0$, $z = 1$ et le cylindre parabolique $x + y^2 = 1$.





$$E = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1\}$$

Exemple 1 : Intégrale triple sur un domaine général

Évaluer l'intégrale $J = \iiint_E xy^2z\,dV$, où E est délimitée par les plans $x = 0$, $z = 0$, $z = 1$ et le cylindre parabolique $x + y^2 = 1$.

Région de type 1 :

$$E = \left\{(x, y, z)\,|\,0 \leq x \leq 1 - y^2, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\right\}$$

Exemple 1 : Intégrale triple sur un domaine général

Évaluer l'intégrale $J = \iiint_E xy^2z\,dV$, où E est délimitée par les plans $x = 0$, $z = 0$, $z = 1$ et le cylindre parabolique $x + y^2 = 1$.

Région de type 1 :

$$E = \left\{(x, y, z)\,|\,0 \leq x \leq 1 - y^2, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\right\}$$

$$J = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-y^2}\int_{0}^{1} xy^2z\,dzdxdy$$

Exemple 1 : Intégrale triple sur un domaine général

Évaluer l'intégrale $J = \iiint_E xy^2 z\, dV$, où E est délimitée par les plans $x = 0$, $z = 0$, $z = 1$ et le cylindre parabolique $x + y^2 = 1$.

Région de type 1 :

$$E = \left\{(x, y, z) \,|\, 0 \leq x \leq 1 - y^2, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\right\}$$

$$J = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-y^2} \int_{0}^{1} xy^2 z\, dzdxdy = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-y^2} \frac{1}{2} xy^2\, dxdy$$

Exemple 1 : Intégrale triple sur un domaine général

Évaluer l'intégrale $J = \iiint_E xy^2z\, dV$, où E est délimitée par les plans $x = 0$, $z = 0$, $z = 1$ et le cylindre parabolique $x + y^2 = 1$.

Région de type 1 :

$$E = \left\{(x, y, z) \,|\, 0 \leq x \leq 1 - y^2, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\right\}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-y^2}\int_{0}^{1} xy^2z\, dzdxdy = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-y^2} \frac{1}{2}xy^2\, dxdy \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1-y^2)^2y^2\, dy \end{aligned}$$

Exemple 1 : Intégrale triple sur un domaine général

Évaluer l'intégrale $J = \iiint_E xy^2 z \, dV$, où E est délimitée par les plans $x = 0$, $z = 0$, $z = 1$ et le cylindre parabolique $x + y^2 = 1$.

Région de type 1 :

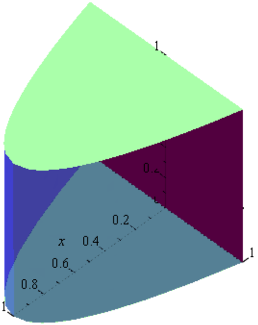
$$E = \left\{(x, y, z) \,|\, 0 \leq x \leq 1 - y^2, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\right\}$$

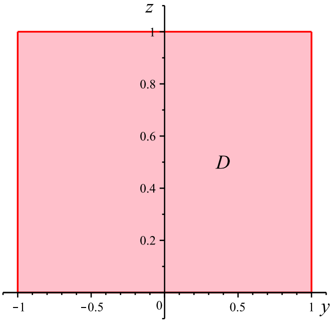
$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-y^2} \int_{0}^{1} xy^2 z \, dzdxdy = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-y^2} \frac{1}{2} xy^2 \, dxdy \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} (1 - y^2)^2 y^2 \, dy = \frac{4}{105} \end{aligned}$$

Exemple 1 : Intégrale triple sur un domaine général

Intégrale de type 2 :

$$J = \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^{1-y^2} xy^2 z \, dxdydz$$

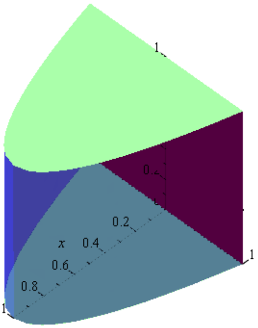


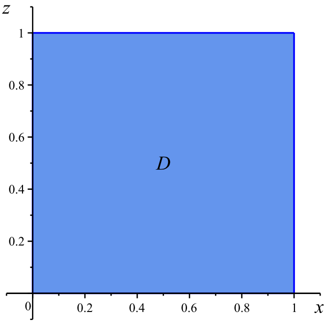


Exemple 1 : Intégrale triple sur un domaine général

Intégrale de type 3 :

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} xy^2 z \, dydxdz$$





Résumé

- Calcul d'une intǵrale triple sur un domaine de type 1.

Résumé

- Calcul d'une intǵrale triple sur un domaine de type 1.
- Le domaine aurait aussi pu être décrit comme un domaine de type 2 ou 3.