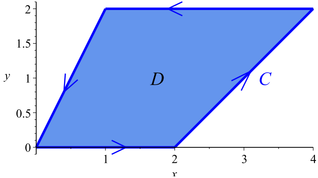
MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 4: Le théorème de Green

Exemple 1: calcul d'une intégrale curviligne à l'aide du théorème de Green

Ex. 1 : calcul d'une intégrale à l'aide du thm. de Green

Calculer $J = \int_C x^3\,dx + x^2y\,dy$ où C est le quadrilatère de sommets $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,2)$, $(1,2)$, parcouru dans le sens antihoraire.



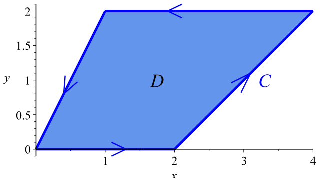
Première façon : calcul direct.

$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ et

$$J = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} x^3\,dx + x^2y\,dy.$$

Ex. 1 : calcul d'une intégrale à l'aide du thm. de Green

Calculer $J = \int_C x^3\,dx + x^2y\,dy$ où C est le quadrilatère de sommets $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,2)$, $(1,2)$, parcouru dans le sens antihoraire.



Deuxième façon : théorème de Green.

Segments obliques :

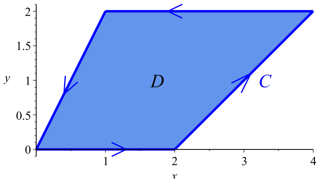
$$y = 2x \Rightarrow x = y/2$$
$$y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2$$

donc le domaine délimité par C est

$$D = \{(x,y)\,|\,y/2 \leq x \leq y+2, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Ici, $P(x,y) = x^3$ et $Q(x,y) = x^2y$.

Calculer $J = \int_C x^3\, dx + x^2 y\, dy$ où C est le quadrilatère de sommets $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,2)$, $(1,2)$, parcouru dans le sens antihoraire.



Deuxième façon : théorème de Green.

$$D = \{(x,y) \,|\, y/2 \le x \le y+2, 0 \le y \le 2\}$$

$$P(x,y) = x^3, Q(x,y) = x^2 y$$

Selon le théorème de Green,

$$\begin{aligned} J &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_0^2 \int_{y/2}^{y+2} (2xy - 0)\, dxdy = \frac{65}{3} \end{aligned}$$

Résumé

- Le théorème de Green donne une autre façon de calculer une intégrale curviligne autour d'une courbe fermée.
- Dans certains cas, l'intégrale double du théorème de Green est plus simple à évaluer.