MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 2: Les intégrales de surface

Intégrales de surface

Introduction

- Définition d'une intégrale de surface générale.
- Formule de calcul.

Intégrales de surface

Rappel :

- Si S est une surface paramétrée par $\vec{R}(u, v)$ avec $(u, v) \in D$ alors

$$\text{aire}(S) = \iint_D ||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||\, dA.$$

- $dS = ||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||\, dA$ est un « petit élément d'aire ».

On peut écrire

$$\text{aire}(S) = \iint_S \; dS$$

Intégrales de surface

Rappel :

- Si S est une surface paramétrée par $\vec{R}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$ alors

$$\text{aire}(S) = \iint_D ||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||\, dA.$$

- $dS = ||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||\, dA$ est un « petit élément d'aire ».

On peut écrire

$$\text{aire}(S) = \iint_S 1\, dS$$

Ceci signifie : intégrale de la fonction constante 1 sur la surface S.

Intégrales de surface

On considère une surface S paramétrée par

$$\vec{R}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

avec $(u,v) \in D$ et une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie dans un voisinage de S.

Définition

L'intégrale (de surface) de f sur S est

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(\vec{R}(u,v)) ||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||\, dA.$$

Notation : $f(\vec{R}(u,v)) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Résumé

- Définition de l'intégrale de surface d'une fonction comme généralisation de l'intégrale calculant l'aire.
- Cette définition donne une formule de calcul de l'intégrale de surface lorsqu'on a une paramétrisation de cette surface.