MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 3: Le rotationnel et la divergence

Le rotationnel

Introduction

- Définition et calcul du rotationnel d'un champ vectoriel.
- Interprétation physique du rotationnel.

Le rotationnel

Définition

Soit $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ un champ vectoriel dont les dérivées partielles existent. Le *rotationnel* de $\vec{F}$ est le champ vectoriel

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Le rotationnel est un nouveau champ vectoriel obtenu à partir des dérivées partielles des composants de $\vec{F}$.

Notation

Soit l'*opérateur différentiel*

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Cet opérateur « agit » sur des fonctions et des champs vectoriels pour donner de nouveaux champs vectoriels.

Par exemple, si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire alors

$$\nabla f = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

est le *gradient* de f.

Le rotationnel

Pour le rotationnel, on écrit symboliquement rot $\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$.

Si on considère ∇ comme un vecteur alors on calcule

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

Le rotationnel

Pour le rotationnel, on écrit symboliquement rot $\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$.

Si on considère ∇ comme un vecteur alors on calcule

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\
&= \text{rot}\,\vec{F}
\end{aligned}$$

- Cette notation est couramment utilisée.
- Le déterminant permet de calculer facilement le rotationnel.

Exemple

Calculer le rotationnel du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$.

Ici, $P(x,y,z) = 1$, $Q(x,y,z) = xy$ et $R(x,y,z) = xz^2$.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{F} &= \nabla \times \vec{F} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 1 & xy & xz^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Le rotationnel

Exemple

Calculer le rotationnel du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$.

Ici, $P(x,y,z) = 1$, $Q(x,y,z) = xy$ et $R(x,y,z) = xz^2$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{F} &= \nabla \times \vec{F} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 1 & xy & xz^2 \end{vmatrix} \\
&= (0-0)\vec{i}
\end{aligned}$$

Le rotationnel

Exemple

Calculer le rotationnel du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$.

Ici, $P(x,y,z) = 1$, $Q(x,y,z) = xy$ et $R(x,y,z) = xz^2$.

$$\begin{aligned}
\text{rot}\,\vec{F} &= \nabla \times \vec{F} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 1 & xy & xz^2 \end{vmatrix} \\
&= (0-0)\vec{i} - (z^2 - 0)\vec{j}
\end{aligned}$$

Exemple

Calculer le rotationnel du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$.

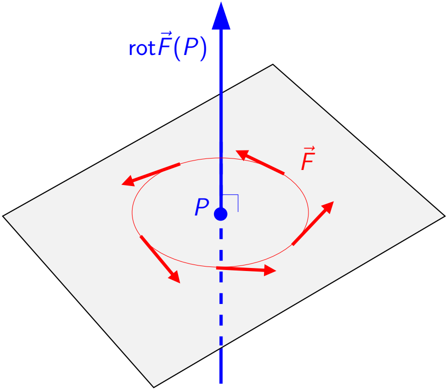
Ici, $P(x,y,z) = 1$, $Q(x,y,z) = xy$ et $R(x,y,z) = xz^2$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{F} &= \nabla \times \vec{F} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 1 & xy & xz^2 \end{vmatrix} \\
&= (0-0)\vec{i} - (z^2 - 0)\vec{j} + (y-0)\vec{k} \\
&= -z^2\vec{j} + y\vec{k}
\end{aligned}$$

Le rotationnel

Interprétation du rotationnel

Si $\vec{F}$ est le champ de vitesses d'un fluide alors proche d'un point P le fluide a tendance à « tourner » autour d'un axe de direction $\operatorname{rot}\vec{F}(P)$, orienté selon la règle de la main droite, avec une vitesse de $||\operatorname{rot}\vec{F}(P)||$.



Le rotationnel en deux dimensions

Un champ vectoriel en deux dimensions $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ peut être vu comme un champ en trois dimensions dont les composantes sont indépendantes de z :

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\
&= (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

Le rotationnel

Le rotationnel en deux dimensions

Un champ vectoriel en deux dimensions $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ peut être vu comme un champ en trois dimensions dont les composantes sont indépendantes de z :

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\text{rot}\,\vec{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\
&= (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

Le rotationnel

Le rotationnel en deux dimensions

Un champ vectoriel en deux dimensions $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ peut être vu comme un champ en trois dimensions dont les composantes sont indépendantes de z :

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\text{rot}\,\vec{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\
&= (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

Le rotationnel en deux dimensions

Un champ vectoriel en deux dimensions $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ peut être vu comme un champ en trois dimensions dont les composantes sont indépendantes de z :

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Dans ce cas,

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Résumé

- Définition du rotationnel.
- Notation et calcul du rotationnel.
- Interprétation du rotationnel.
- Rotationnel en deux dimensions.