MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 2: Les intégrales de surface

Flux d'un champ vectoriel à travers une surface

Introduction

- Intégrale de surface d'un champ vectoriel.
- Interprétation de cette intégrale.

Flux à travers une surface

Définition

Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage d'une surface S.
L'intégrale de $\vec{F}$ sur S est

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$

Flux à travers une surface

Définition

Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage d'une surface S. L'intégrale de $\vec{F}$ sur S est

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$

Notation pour désigner l'intégrale de $\vec{F}$ sur S.

Flux à travers une surface

Définition

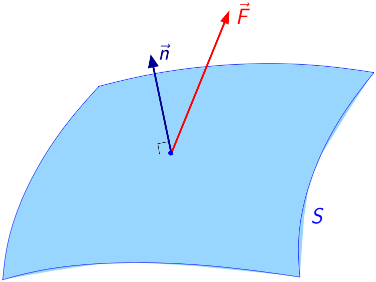
Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage d'une surface S. L'intégrale de $\vec{F}$ sur S est

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Fonction scalaire dépendant du point $(x, y, z) \in S$.

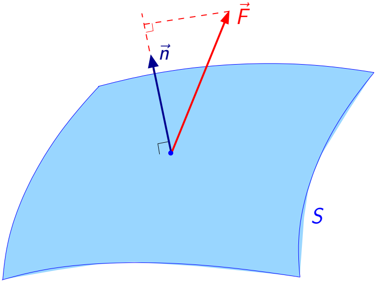
Flux à travers une surface

On considère un champ vectoriel $\vec{F}$ défini dans un voisinage d'une surface S.



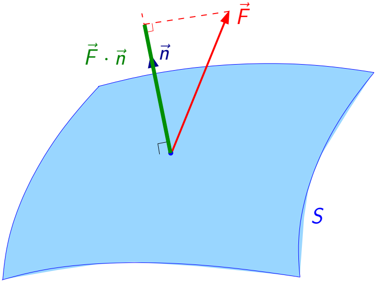
Flux à travers une surface

On considère un champ vectoriel $\vec{F}$ défini dans un voisinage d'une surface S.



Flux à travers une surface

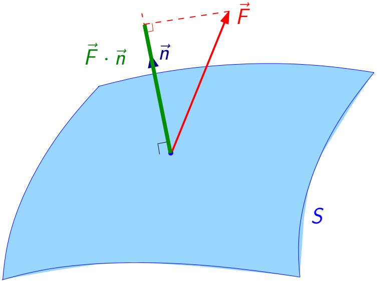
On considère un champ vectoriel $\vec{F}$ défini dans un voisinage d'une surface S.



- $\vec{F} \cdot \vec{n}$ est la composante de $\vec{F}$ normale à S.

Flux à travers une surface

On considère un champ vectoriel $\vec{F}$ défini dans un voisinage d'une surface S.



- $\vec{F} \cdot \vec{n}$ est la composante de $\vec{F}$ normale à S.
- $\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ est la « quantité » de $\vec{F}$ qui passe « à travers » un petit élément d'aire dS.
- $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ est le *flux* de $\vec{F}$ à travers la surface S.

Flux à travers une surface

Formule de calcul

Si S est paramétrée par $\vec{R}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$ alors

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} \quad = \quad \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

Flux à travers une surface

Formule de calcul

Si S est paramétrée par $\vec{R}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$ alors

$$\begin{aligned}
\vec{F} \cdot d\vec{S} &= \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS \\
&= \vec{F}(\vec{R}(u,v)) \cdot \frac{\vec{R}_u \times \vec{R}_v}{||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||} ||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||\, dA
\end{aligned}$$

Flux à travers une surface

Formule de calcul

Si S est paramétrée par $\vec{R}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$ alors

$$\begin{aligned}
\vec{F} \cdot d\vec{S} &= \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS \\
&= \vec{F}(\vec{R}(u,v)) \cdot \frac{\vec{R}_u \times \vec{R}_v}{\cancel{||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||}} \cancel{||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||}\, dA \\
&= \vec{F}(\vec{R}(u,v)) \cdot \left(\vec{R}_u \times \vec{R}_v\right)\, dA
\end{aligned}$$

donc

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{R}(u,v)) \cdot \left(\vec{R}_u \times \vec{R}_v\right)\, dA$$

Flux à travers une surface

Attention à l'orientation :

- La paramétrisation de S choisie ne donne peut-être pas l'orientation correcte (selon le contexte) de S.
- Si le vecteur normal un vecteur normal $\vec{R}_u \times \vec{R}_v$ ne donne pas l'orientation correcte alors on choisit plutôt le vecteur normal $-\left(\vec{R}_u \times \vec{R}_v\right)$ dans la formule de calcul.

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{R}(u,v)) \cdot \pm \left(\vec{R}_u \times \vec{R}_v\right) \, dA$$

Résumé

- Définition de l'intégrale de surface d'un champ vectoriel.
- Interprétation de cette intégrale comme un flux.
- Formule de calcul de l'intégrale de flux.
- La formule doit tenir compte de l'orientation de la surface.