MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 3: Le rotationnel et la divergence

Un critère en trois dimension pour les champs conservatifs

Introduction

- Généralisation du critère pour les champs conservatifs aux champs en trois dimensions.

Critère pour les champs conservatifs

Théorème

Soit $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ un champ vectoriel dont les dérivées partielles sont continues sur un domaine simplement connexe D de l'espace. Alors

$$\vec{F} \text{ est conservatif sur } D \iff \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}.$$

Remarques

- L'implication $\vec{F}$ conservatif $\Rightarrow$ rot $\vec{F} = \vec{0}$ ne nécessite pas l'hypothèse sur le domaine et est facile à prouver.
- La réciproque exige l'hypothèse sur le domaine et est plus difficile à démontrer.

Critère pour les champs conservatifs

Exemple

Le champ $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$ est-il conservatif ?

On a déjà calculé que rot $\vec{F} = -z^2\vec{j} + y\vec{k}$.

Puisque le rotationnel est non nul, le champ n'est PAS conservatif.

Critère pour les champs conservatifs

Le critère en deux dimensions

Si $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ est un champ vectoriel en deux dimensions alors on a vu que

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Le critère devient

$$\begin{aligned}
\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}
\end{aligned}$$

Résumé

- Critère pour déterminer si un champ vectoriel en trois dimensions est conservatif.
- Ce critère généralise celui vu pour les champs en deux dimensions.