MTH1102D Calcul II

Chapitre 8, section 3: La longueur d'arc et la courbure

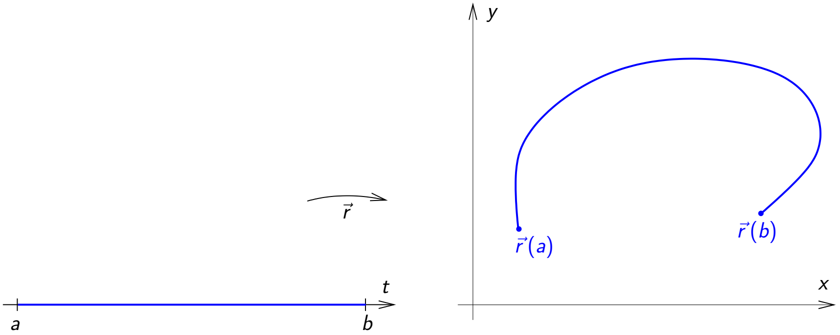
Longueur d'arc

Introduction

- Longueur d’une courbe dans le plan.
- Longueur d’une courbe dans l’espace.

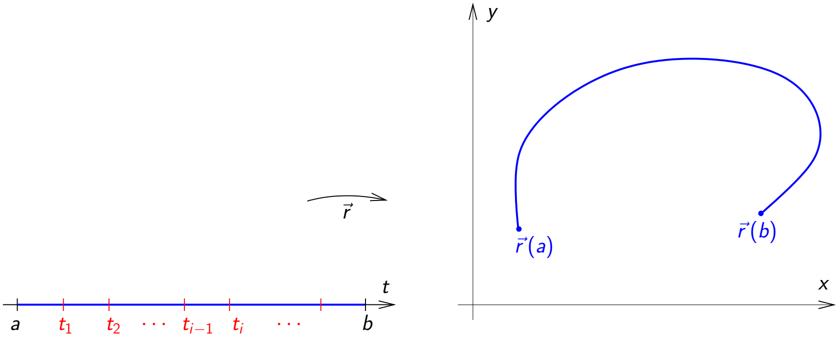
Longueur d'arc

Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.



Longueur d'arc

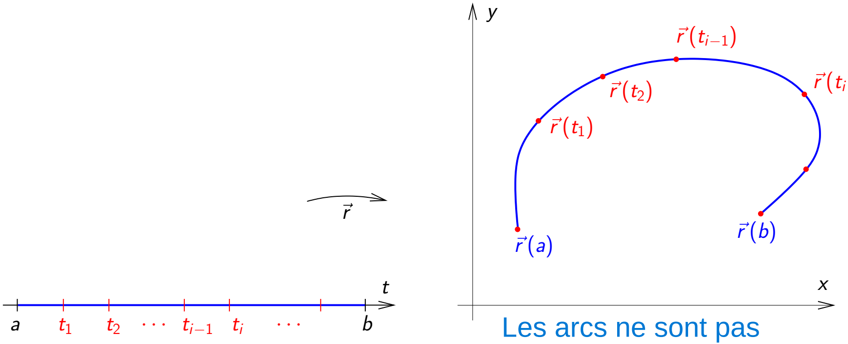
Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.



On subdivise $[a, b]$ en sous-intervalles égaux.

Longueur d'arc

Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.

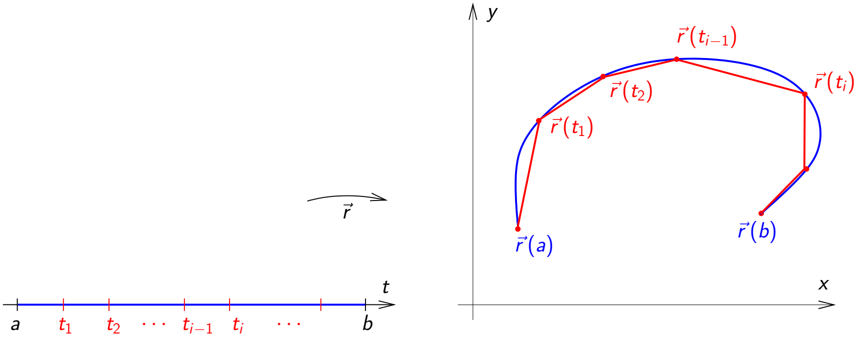


Les arcs ne sont pas subdivisés de la mm longueur

Ceci subdivise C en petits arcs de courbe.

Longueur d'arc

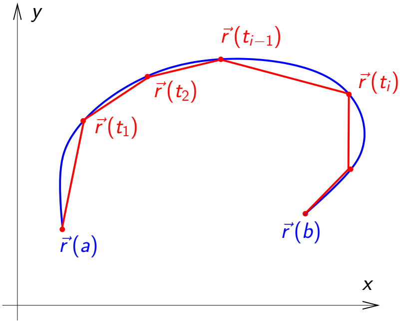
Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.



On approxime ensuite la courbe par une ligne brisée.

Longueur d'arc

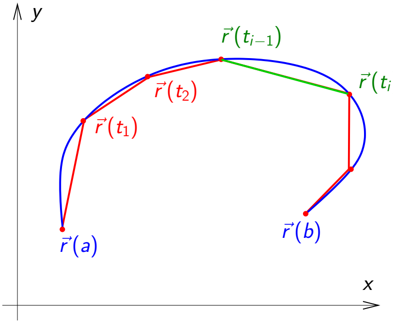
Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.



- La longueur de C est approximée par la longueur de la ligne brisée.

Longueur d'arc

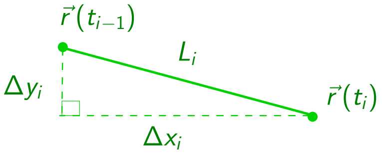
Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.



- La longueur de C est approximée par la longueur de la ligne brisée.
- On pose L_i = longueur du segment de $\vec{r}(t_{i-1})$ à $\vec{r}(t_i)$.
- $L \approx \sum_{i=1}^{n} L_i$

Longueur d'arc

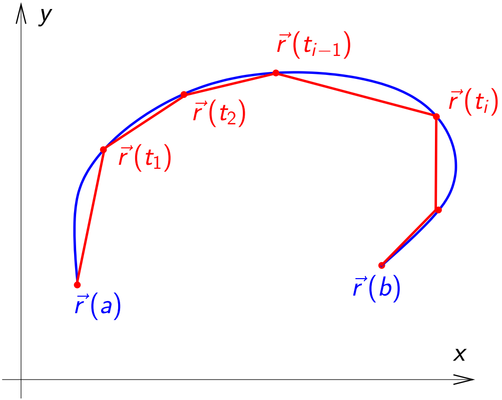
Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.



$$
\begin{aligned}
L &\approx \sum_{i=1}^{n} L_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2}\, \Delta t
\end{aligned}
$$

Longueur d'arc

Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \le t \le b$.
Calculons la longueur L de la courbe.



Longueur d'arc

Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2}\, \Delta t$$

Lorsque $n \to \infty$ on a $\Delta t \to 0$ et

la ligne brisée
s'approche de
la courbe

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt}$$

1) lorsque n->infini, la longueur L se rapproche de la longueur qu'on a estimé avec la somme
2) lorsque n->infini, les deux termes tendent vers des carrés de dérivés des fonctions x et y

Longueur d'arc

Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t$$

Lorsque $n \to \infty$ l'approximation devient égalité donc

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Longueur d'arc

Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.

Puisque

$$||\vec{r}\,'(t)|| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

on peut écrire

$$L = \int_a^b ||\vec{r}\,'(t)||\, dt$$

Un raisonnement semblable permet de trouver une formule analogue pour une courbe dans l'espace.

Longueur d'arc

Théorème

Si $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$, est une courbe dans le plan alors sa longueur est

$$L = \int_a^b ||\vec{r}\,'(t)||\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Théorème

Si $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$, est une courbe dans l'espace alors sa longueur est

$$L = \int_a^b ||\vec{r}\,'(t)||\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

Résumé

- Longueur d'une courbe paramétrée.
- Expression vectorielle pour l'intégrale qui calcule la longueur d'une courbe.