MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 3: Le rotationnel et la divergence

Exemple 1: utilisation du critère pour les champs conservatifs

Ex. 1 : utilisation du critère pour les champs conservatifs

Soit le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = \left[y^3 - 4\alpha xz^2\right]\vec{i} + \left[3xy^2 + 2yz^2\right]\vec{j} + \left[4\alpha y^2 z - 2x^2 z\right]\vec{k}$$

où α est une constante.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le champ $\vec{F}$ est-il conservatif ?

- Les composantes P, Q et R de $\vec{F}$ sont des polynômes, quelle que soit la valeur de α. Leurs dérivées partielles sont donc continues dans $\mathbb{R}^3$, qui est simplement connexe.
- Dans ce cas, $\vec{F}$ conservatif $\Leftrightarrow$ rot $\vec{F} = \vec{0}$.

Ex. 1 : utilisation du critère pour les champs conservatifs

Soit le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = \left[y^3 - 4\alpha xz^2\right]\vec{i} + \left[3xy^2 + 2yz^2\right]\vec{j} + \left[4\alpha y^2 z - 2x^2 z\right]\vec{k}$$

où α est une constante.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le champ $\vec{F}$ est-il conservatif ?

- On calcule

$$\operatorname{rot}\vec{F} = [8\alpha yz - 4yz]\vec{i} + [-8\alpha xz + 4xz]\vec{j} + 0\vec{k}.$$

- Donc $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 8\alpha yz - 4yz = 0 \\ -8\alpha xz + 4xz = 0 \end{cases}$$

pour tous $(x,y,z) \Leftrightarrow \alpha = 1/2$.

Ex. 1 : utilisation du critère pour les champs conservatifs

Soit le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = \left[y^3 - 4\alpha x z^2\right] \vec{i} + \left[3xy^2 + 2yz^2\right] \vec{j} + \left[4\alpha y^2 z - 2x^2 z\right] \vec{k}$$

où α est une constante.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le champ $\vec{F}$ est-il conservatif ?

- Le champ est conservatif si et seulement si $\alpha = 1/2$.
- Pour $\alpha = 1/2$, on peut vérifier que $f(x,y,z) = xy^3 - x^2z^2 + y^2z^2$ est un potentiel pour $\vec{F}$.

Résumé

- Application du critère pour les champs conservatifs à un champ en trois dimensions.