MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 3: Le théorème fondamental des intégrales curvilignes

Exemple 2: exemple où le critère pour les champs conservatifs ne s'applique pas

Exemple 2 : contrexemple critère champs conservatifs

On considère le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

1. Si $P(x,y) = -y/(x^2+y^2)$ et $Q(x,y) = x/(x^2+y^2)$ sont les composantes de $\vec{F}$ alors

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ P_y &= \frac{-(x^2+y^2)+y(2y)}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

donc $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ pour le champ $\vec{F}$.

Exemple 2 : contrexemple critère champs conservatifs

On considère le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

2. Calculons maintenant l'intégrale de $\vec{F}$ autour du cercle C de rayon 1 centré à l'origine.

$$C : \vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}, \;\; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\vec{i} + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\vec{j} = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) &= (-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1
\end{aligned}$$

Exemple 2 : contrexemple critère champs conservatifs

On considère le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

2. Calculons maintenant l'intégrale de $\vec{F}$ autour du cercle C de rayon 1 centré à l'origine.

$$\int_C \vec{F}\cdot \vec{dr} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0.$$

Exemple 2 : contrexemple critère champs conservatifs

On considère le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

En résumé :

1. $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$, ce qui semble indiquer que $\vec{F}$ est conservatif.
2. L'intégrale de $\vec{F}$ autour de la courbe fermée C est non nulle, ce qui montre que $\vec{F}$ n'est pas conservatif.

Comment réconcilier ces deux constatations ?

Exemple 2 : contrexemple critère champs conservatifs

On considère le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

Comment réconcilier ces deux constatations ?

- Le champ $\vec{F}$ n'est pas défini en $(0,0)$.
- Puisque C entoure l'origine, il n'existe pas de domaine simplement connexe qui contient C et sur lequel les dérivées partielles de $\vec{F}$ sont continues.

  Il y a toujours un « trou » à l'origine.
- Le critère pour les champ conservatifs ne s'applique pas.

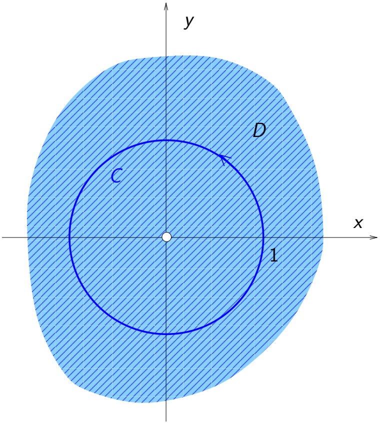
  Donc l'égalité $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ n'implique pas que $\vec{F}$ est conservatif.
- Par conséquent, le premier énoncé ne contredit pas le deuxième.

Exemple 2 : contrexemple critère champs conservatifs

On considère le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}.$$

D n'est pas simplement connexe.



Résumé

- Lors de l'application d'un théorème, il faut vérifier que toutes les hypothèses sont satisfaites. Sans, quoi il est possible que la conclusion soit fausse.
- Ici, un calcul direct montre que le champ n'est pas conservatif ≪ malgré les apparences ≫.