Sigle et titre du cours	Groupe	Trimestre
MTH1102/MTH1102D– Calcul II	TOUS	Hiver 2019
Professeur	**Local**	**Téléphone**
Jean Guérin	A-520.23	4098

Jour	Date	Durée	Heures
Samedi	23 février 2019	2h00	13h00 à 15h00

Documentation	Calculatrice	
☒ Aucune	☐ Aucune	Les cellulaires, agendas électroniques ou téléavertisseurs sont interdits.
☐ Toute	☐ Toutes	
☒ Voir directives particulières	☒ Non programmable	

2.	8	/8
3.	9,5	/12
4.	9.5	/8
+9,5	TOTAL	
	38,5	/40

Directives particulières

- Calculatrice AEP autorisée
- Une table intégrale est fournie à la première page.

Important

Cet examen contient 4 questions sur un total de 15 pages (excluant cette page)

La pondération de cet examen est de 40 %

Vous devez répondre sur : ☒ le questionnaire ☐ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☒ oui ☐ non

Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons (données manquantes, données erronées, etc.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) puis passez à la question suivante.

Scanned by CamScanner

Formules d'intégration

Ces formules peuvent être utilisées sans justification supplémentaire dans vos calculs.

1. $\displaystyle\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)|$

2. $\displaystyle\int \sec^3(x)\,dx = \frac{1}{2}\sec(x)\tan(x) + \frac{1}{2}\ln|\sec(x) + \tan(x)|$

3. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}(x)\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$

4. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^3(x)\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotan}(x) + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{cotan}(x)|$

5. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

6. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

7. $\displaystyle\int x^3\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{5}(a^2 - x^2)^{5/2} - \frac{a^2}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}$

Scanned by CamScanner

Question 1 [12 points]

Évaluez les intégrales suivantes. Vous devez donner une réponse exacte (et non une approximation décimale).

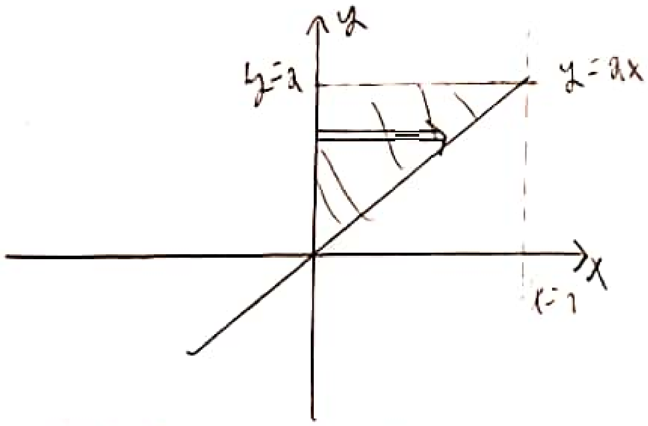
a) $J_1 = \int_0^1 \int_{2x}^2 e^{-y^2}\, dy dx.$

b) $J_2 = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA,$

où D est la région du plan située entre les cercles $x^2+y^2=1$ et $x^2+y^2=16$ et sous la droite $y=2$.

Réponse :

a/ on doit faire un changement d'ordre :



∴ on veut passer d'une intégrale de type I à une intégrale de type II

soit $\begin{cases} y = 2x \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y}{2}$

$\Rightarrow D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq y/2 \text{ et } 0 \leq y \leq 2\}$

$\Rightarrow J_1 = \int_0^2 \int_0^{y/2} e^{-y^2}\, dx\, dy = \int_0^2 e^{-y^2} [x]_{x=0}^{x=y/2}\, dy = \int_0^2 \frac{y}{2} \cdot e^{-y^2}\, dy$

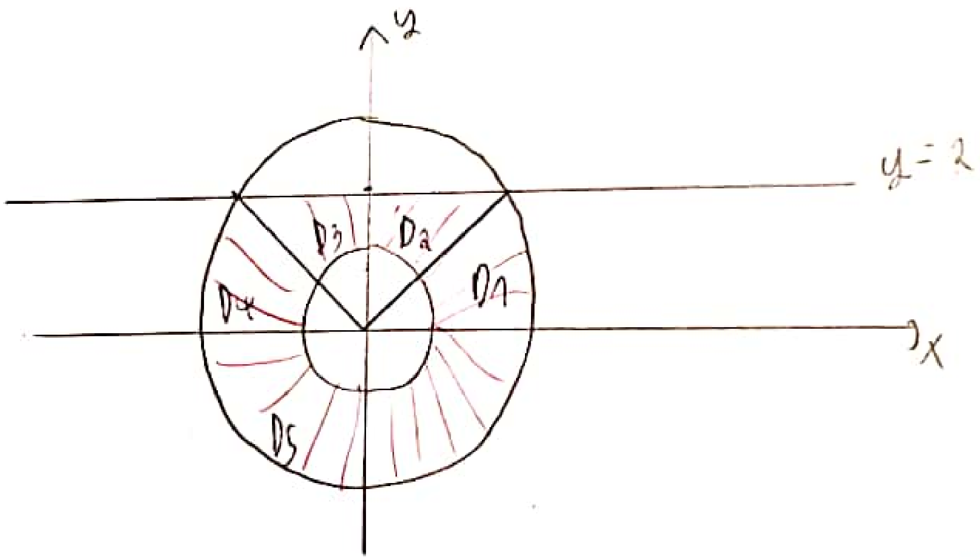
Scanned by CamScanner

$$= \frac{1}{-4}\int_0^2 -2y\, e^{-y^2}\, dy = \frac{-1}{4}\left[e^{-y^2}\right]_0^2 = \frac{-1}{4}\left(e^{-4}-1\right)$$

$$= \frac{-e^{-4}+1}{4}$$

b) Voici la représentation du domaine:

/// = région



Voici plus haut la décomposition du domaine; où $D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5$

$\Rightarrow D = 2D_1 + 2D_2 + D_1$

D_1: on a $1 \leq r \leq 2$ (rayon du cercle)

$0 \leq \theta \leq \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$ (or en $y = 2$ on a $x^2 + 2^2 = 16$

$\Rightarrow x^2 = 12$

$x = \sqrt{12}$

$\Rightarrow 0 \leq \theta \leq \text{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right)$ donc $0 \leq \theta \leq \pi/6$

$\Rightarrow D_1 = \{(r,\theta);\ 0 \leq \theta \leq \pi/6$ et $1 \leq r \leq 2\}$

pour D_2 on a : $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/2$ et $1 \leq r \leq r_{max}$

sachant que $y = r\sin\theta \Rightarrow 2 = r\sin\theta \Rightarrow r_{max} = 2\operatorname{cosec}\theta$

$\Rightarrow D_2 = \{(r,\theta) \mid 1 \leq r \leq 2\operatorname{cosec}\theta \; ; \; \pi/6 \leq \theta \leq \pi/2\}$

Enfin : $D3 = \{(r,\theta) \mid 1 \leq r \leq 2$ et $\pi \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$\Rightarrow I = \underbrace{2\int_0^{\pi/6}\int_1^2 dr\,d\theta}_{H_1} + \underbrace{2\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_1^{2\operatorname{cosec}\theta} dr\,d\theta}_{H_2} + \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi}\int_1^2 dr\,d\theta}_{H_3}$$

$$H_1 = [d\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/6}\,[dr]_{r=1}^{r=2} = \pi/6 \cdot 1 = \pi/6$$

$$H_3 = [d\theta]_{\theta=\pi}^{2\pi}\,[dr]_{r=1}^{r=2} = \pi$$

$$H_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_1^{2\operatorname{cosec}\theta} dr\,d\theta \Rightarrow H_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} 2\operatorname{cosec}\theta\,d\theta - \int_{\pi/6}^{\pi/2} 1\,d\theta$$

$$\Rightarrow H_2 = 2\left[\ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right]_{\theta=\pi/6}^{\theta=\pi/2} - \pi/3 = 2\left(\ln\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)\right) - \pi/3$$

$$\Rightarrow I_2 = \pi + 2\cdot\frac{\pi}{6} + 2\left(2\left(\ln\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)\right) - \pi/3\right) = \cancel{\frac{2\pi}{3}} + 4\ln\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)$$

$\frac{10\pi}{3}$

$\frac{6.0}{7}$

Scanned by CamScanner

Question 2 [8 points]

Calculez le volume de la région E de l'espace bornée par les cylindres paraboliques $y = 3x - x^2$ et $y = x^2 - x$ ainsi que par les plans $z = 5 - y$ et $z = 0$.

Réponse :

on calcule d'abord la région sur le plan xy :

$$\begin{cases} y = 3x - x^2 \\ y = x^2 - x \end{cases} \Rightarrow 3x - x^2 = x^2 - x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 0$$

on a donc $0 \leq x \leq 2$; $x^2 - x \leq y \leq 3x - x^2$; $0 \leq z \leq 5 - y$.

$$\Rightarrow E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 5 - y \ ; \ x^2 - x \leq y \leq 3x - x^2 \ ; \ 0 \leq x \leq 2\}$$

$$\Rightarrow \iiint_E dV = \int_0^2 \int_{x^2-x}^{3x-x^2} \int_0^{5-y} dz\, dy\, dx = \int_0^2 \int_{3x-x^2}^{x^2-x} (5 - y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left(5 \cdot (x^2 - x - 3x + x^2)\right) + \frac{1}{2} \int_0^2 \left((x^2 - x)^2 - (3x - x^2)^2\right) dx$$

$$= \int_0^2 -5\,(2x^2 - 4x)\, dx + \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^4 - 2x^3 + x^2 - (9x^2 - 6x^3 + x^4)\right) dx$$

$$= -\left(5 \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2} - 5 \cdot 4 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=2}\right) + \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^3 - 8x^2)\, dx$$

$$= -\left(\frac{10}{3} \cdot (8) - \frac{20}{2} \cdot 4\right) + \frac{1}{2} \left([x^4]_0^2 - \frac{8}{3} [x^3]_0^2\right) = -\left(\frac{80}{3} - \frac{80}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(16 - \frac{8}{3} \cdot 8\right)$$

$$= \frac{32}{3} \ u^3$$

Scanned by CamScanner

FORME

Question 3 [12 points]

Un solide B a la forme d'une sphère solide creusée d'une cavité conique, comme illustré ci-dessous. Ce solide occupe la région de l'espace située à l'intérieur de la sphère d'équation $x^2+y^2+(z-5)^2 = 25$, au-dessus du plan $z=0$ et en dessous du cône d'équation $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

a) Décrivez le solide B en coordonnées cylindriques.

b) Décrivez le solide B en coordonnées sphériques.

c) Calculez la masse de B, si sa densité est proportionnelle au **carré de la distance à l'origine**. Utilisez le système de coordonnées de votre choix.

d) Expliquez pourquoi le centre de masse de B est situé sur l'axe des z. Votre réponse doit être justifiée rigoureusement.

Réponse :

a) On a $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (1) et $x^2+y^2+(z-5)^2=25$ (2)

on transforme en cylindrique :

$\Rightarrow z=\sqrt{r^2}=r$ et $(z-5)^2=25-r^2$

$\Rightarrow z-5=\pm\sqrt{25-r^2}$

$\Rightarrow z=-\sqrt{25-r^2}+5$

(on met "(-)" car on considère la partie inférieure de la sphère

$\Rightarrow -\sqrt{25-r^2}+5 \leq z \leq r$

on projette la région sur le plan $z=0 \Rightarrow$

en mettant (1) dans (2) on a : $z^2+(z-5)^2=25 \Rightarrow z^2+z^2-10z+25=25$

Scanned by CamScanner

on trouve $z = 5$ ou $z = 0$

(3/3)

donc (1) vaut si $z = r \Rightarrow 5 = r$

soit $0 \leq r \leq 5$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (projection donne un disque)

$\Rightarrow E = \{(z, r, \theta) \mid -\sqrt{25-r^2}+5 \leq z \leq r \,;\, 0 \leq r \leq 5 \,;\, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

b) suite à la projection on a i) $0 \leq \theta \leq 2\pi$

ii) on cherche ϕ : on a $z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2\sin^2\phi}$

$\Rightarrow \rho\cos\phi = \rho\sin\phi$

$\Rightarrow \tan\phi = 1 \Rightarrow \phi = \pi/4$

iii) on cherche ρ : $x^2+y^2+(z-5)^2 = 25$

(3/3)

$\Rightarrow \rho^2\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi - 10\rho\cos\phi + 25 = 25$

$\Rightarrow \rho^2 - 10\rho\cos\phi = 0 \Rightarrow \rho = 10\cos\phi$ et $\rho \geq 0$ (car la région a un contact avec l'origine)

ainsi $E = \{(\rho, \phi, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 10\cos\phi \,;\, \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \,;\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

c) on cherche $\iiint_E \rho(x,y,z)\, dV$ 1/1

(2,5/4)

$\Rightarrow \iiint K\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{10\cos\phi} K\cdot\rho^2\cdot\rho^2\sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$

ρ^2 0/1

1/1

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{10\cos\phi} k\rho^3 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{k}{4}\left[\rho^4\right]_{\rho=0}^{\rho=10\cos\phi} \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} k \cdot 2500 \cos^4(\phi) \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= 2500k \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4\phi \sin\phi \, d\phi = -k \cdot 2500 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\cos^5\phi}{5}\right]_{\phi=\pi/4}^{\phi=\pi/2}$$

$$= -2500 \cdot k \cdot \frac{2\pi}{5}\left(\cancel{\cos^5(\pi/2)} - \cos^5(\pi/4)\right) = +1000\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 k \quad \boxed{\cancel{k \cdot 555{,}36}}$$

$-0{,}5$ $\quad \frac{2{,}5}{2}$

d) on peut voir que la region est symetrique par rapport à l'axe des z

on sait que $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}$ où $M_{yz} = \iiint_E x\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

1/2

soit $f(x,y,z) = kx\sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow f(-x,-y,z) = -x\sqrt{(-x)^2+(-y)^2+z^2}$

$= -f(x,y,z)$

$\Rightarrow f(x,y,z)$ est impaire par rapport à x, y

$\Rightarrow M_{yz} = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = 0}$

de meme $\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \iiint_E y\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ -1

$\Rightarrow f(-x,-y,z) = -y\sqrt{(-x)^2+(-y)^2+z^2} = -f(x,y,z)$

$\Rightarrow M_{xz} = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = 0$

Scanned by CamScanner

ainsi $\bar{x} = 0$ et $\bar{y} = 0$ donc le centre de masse est situé sur l'axe de z où $z > 0$

Scanned by CamScanner

Question 4 [8 points]

Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = t\cos(\pi t)\,\vec{i} + t\sin(\pi t)\,\vec{j} + \sqrt{10 - t^2}\,\vec{k}$$

avec $0 \leq t \leq 3$.

a) Montrez que la courbe C est située sur une sphère et donnez l'équation cartésienne de cette sphère.

b) Donnez une paramétrisation de la droite tangente à C au point $(-1, 0, 3)$.

Question bonus [2 points]

Soit Γ une courbe quelconque située sur une sphère centrée à l'origine. Que pouvez-vous dire au sujet du vecteur position de la courbe et de son vecteur tangent ? Justifiez soigneusement votre réponse.

2

/8

/40

5

Réponse :

a) on a : $\begin{cases} x = t\cos(\pi t) \\ y = t\sin(\pi t) \\ z = \sqrt{1 - t^2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = t^2\cos^2(\pi t) + t^2\sin^2(\pi t) + 10 - t^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + 10 - t^2 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 10}$ 3/3

Ainsi, la courbe décrit une sphère de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon $\sqrt{10}$

b) i) on cherche t :

$\begin{cases} -1 = t\cos(\pi t) & (1) \\ 0 = t\sin(\pi t) & (2) \\ 3 = \sqrt{10 - t^2} & (3) \end{cases} \Rightarrow$ de (3) on a $9 = 10 - t^2$

1/1 $\Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$

→ en remplaçant t dan (1) et (2) on voit que $t = 1$ est une solution

On cherche $r'(t)$:

$$r'(t) = \left(\cos(\pi t) - t\sin(\pi t)\pi\right)\vec{i} + \left(\sin(\pi t) + t\cos(\pi t).\pi\right)\vec{j} + \left(\frac{1 \cdot -2t}{2\sqrt{10-t^2}}\right)\vec{k}$$ 1/1

$$\Rightarrow r'(1) = \left(\cos(\pi) - 1.\sin\pi.\pi\right)\vec{i} + \left(\sin(\pi) + \cos(\pi).\pi\right)\vec{j} + \left(\frac{-1}{3}\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow r'(1) = -\vec{i} - \pi\vec{j} - \frac{1}{3}k$$ 1/1

Soit la paramétrisation :

$$D = \begin{cases} x = -1 - t \\ y = \quad - \pi t \\ z = 3 - \frac{1}{3} t \end{cases}$$

où ~~$t \in \mathbb{R}$~~ $(+0,5)$

p_0

1.5/2

bonus :

si la courbe décrit une sphère $\Rightarrow$ $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = k$ (constante)

$$\Rightarrow \|\vec{r}(t)\| = K \Rightarrow \|\vec{r}(t)\|^2 = K^2$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = k^2$$

on dérive des deux côtés :

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{r}(t).\vec{r}(t) = \frac{\partial}{\partial t}k^2$$

$$\Rightarrow r'(t).r(t) + r(t).r'(t) = 0$$

$$\Rightarrow 2r'(t).r(t) = 0$$ 2/2

$\Rightarrow \vec{r}(t).r(t) = 0$ (le produit scalaire de deux vecteurs sont nuls si $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$ $\Rightarrow$ ~~tes vec~~ $\Rightarrow \vec{r}(t) \perp r'(t)$

8

2

/8

/40

5

Scanned by CamScanner