MTH1102D Calcul II

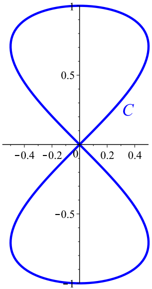
Chapitre 9, section 4: Le théorème de Green

Exemple 3: calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée

Exemple 3 : calcul de l'aire délimitée par une courbe

Calculer l'aire délimitée par une boucle de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos t \sin t \vec{i} + \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

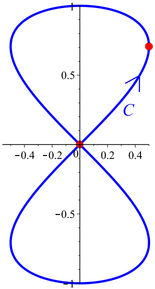


- Les deux boucles sont symétriques et délimitent la même aire.

Exemple 3 : calcul de l'aire délimitée par une courbe

Calculer l'aire délimitée par une boucle de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos t \sin t \vec{i} + \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



- Les deux boucles sont symétriques et délimitent la même aire.
- Puisque

$$\vec{r}(0) = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$

et

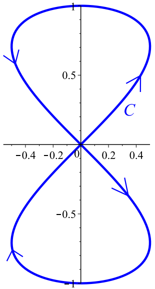
$$\vec{r}(\pi/4) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j},$$

la boucle du haut est parcourue dans le sens antihoraire (positif).

Exemple 3 : calcul de l'aire délimitée par une courbe

Calculer l'aire délimitée par une boucle de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos t \sin t \vec{i} + \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



- Les deux boucles sont symétriques et délimitent la même aire.
- Puisque

$$\vec{r}(0) = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$

et

$$\vec{r}(\pi/4) = \tfrac{1}{2}\vec{i} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j},$$

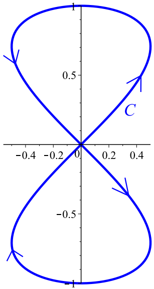
la boucle du haut est parcourue dans le sens antihoraire (positif).

- La boucle du bas est parcourue dans le sens négatif.

Exemple 3 : calcul de l'aire délimitée par une courbe

Calculer l'aire délimitée par une boucle de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos t \sin t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



- Soit C_1 la boucle du haut et D la région qu'elle délimite.
- Puisque
$$\vec{r}(0) = \vec{0} = \vec{r}(\pi)$$
et que $y(t) \geq 0$ pour $t \in [0, \pi]$, la boucle C_1 correspond à l'intervalle du paramètre $0 \leq t \leq \pi$.
- La boucle du bas correspond à $\pi \leq t \leq 2\pi$.

Exemple 3 : calcul de l'aire délimitée par une courbe

Calculer l'aire délimitée par une boucle de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos t \sin t \vec{i} + \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Si $x = \cos t \sin t$ et $y = \sin t$ alors

$$\begin{aligned}
\text{aire}(D) &= \oint_C x\,dy = \int_0^\pi x(t)y'(t)\,dt \\
&= \int_0^\pi [\cos t \sin t][\cos t]\,dt \\
&= \int_0^\pi \cos^2 t \sin t\,dt \quad {\color{blue}(u = \cos t, du = -\sin t)} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Exemple 3 : calcul de l'aire délimitée par une courbe

Calculer l'aire délimitée par une boucle de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos t \sin t \vec{i} + \sin t \vec{j}, \;\; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Puisque $x = \cos t \sin t$ et $y = \sin t$, on a

$$y^2 - x^2 = \sin^2 t - \cos^2 t \sin^2 t = \sin^2 t\,(1 - \cos^2 t) = \sin^2 t \sin^2 t = \sin^4 t = y^4$$

donc l'équation cartésienne de C est $y^2 - x^2 = y^4$.

Isolons x : $x = \pm\sqrt{y^2 - y^4} = \pm y\sqrt{1 - y^2}$ car $y \geq 0$.

De plus, $x = 0 \Rightarrow y^2 - y^4 = 0 \Rightarrow y = 0, \pm 1$.

Exemple 3 : calcul de l'aire délimitée par une courbe

Calculer l'aire délimitée par une boucle de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos t \sin t \vec{i} + \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

D est une région de type II :

$$D = \left\{(x, y) \mid -y\sqrt{1-y^2} \leq x \leq y\sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1\right\}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} \text{aire}(D) &= \iint_D 1\, dA = \int_0^1 \int_{-y\sqrt{1-y^2}}^{y\sqrt{1-y^2}} dxdy \\ &= \int_0^1 2y\sqrt{1-y^2}\, dy = -\int_1^0 u^{1/2}\, du = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Résumé

- Déterminer l'intervalle du paramètre correspondant à une boucle de la courbe.
- Calculer l'aire délimitée par une boucle à l'aide des formules provenant du théorème de Green.