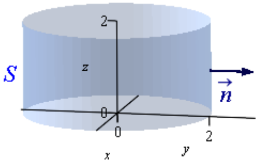
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 2: Les intégrales de surface

Exemple 4: flux à travers un cylindre

Exemple 4 : flux à travers un cylindre

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 2$. La surface S est orientée au point $(0,2,1)$ par le vecteur normal $\vec{n} = \vec{j}$.

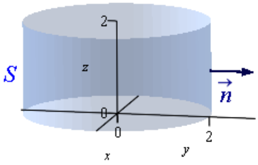


L'équation cylindrique du cylindre est $r = 2$, donc on a

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) &= 2\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) &= 2\sin(\theta) \\ z &= z & \end{aligned}$$

Exemple 4 : flux à travers un cylindre

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 2$. La surface S est orientée au point $(0,2,1)$ par le vecteur normal $\vec{n} = \vec{j}$.



- S est paramétrée par
$$\vec{R}(\theta, z) = 2\cos\theta\,\vec{i} + 2\sin\theta\,\vec{j} + z\vec{k}$$
avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 2$.

- On calcule
$$\begin{aligned} \vec{R}_\theta &= -2\sin\theta\,\vec{i} + 2\cos\theta\,\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{R}_z &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{R}_\theta \times \vec{R}_z &= 2\cos\theta\,\vec{i} + 2\sin\theta\,\vec{j} \end{aligned}$$

- En $(0,2,1)$, $\theta = \pi/2$, $z = 1$ et $\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z = 2\vec{j}$, qui donne l'orientation correcte de S.

Exemple 4 : flux à travers un cylindre

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 2$. La surface S est orientée au point $(0,2,1)$ par le vecteur normal $\vec{n} = \vec{j}$.

On a

$$\begin{aligned}
\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z &= 2\cos\theta\,\vec{i} + 2\sin\theta\,\vec{j} \\
\vec{F}(\vec{R}(\theta,z)) &= 2z\cos\theta\vec{i} + 2z\sin\theta\vec{j} + z^2\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{R}(\theta,z)) \cdot \left(\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z\right) &= 4z\cos^2\theta + 4z\sin^2\theta \\
&= 4z.
\end{aligned}$$

Exemple 4 : flux à travers un cylindre

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 2$. La surface S est orientée au point $(0,2,1)$ par le vecteur normal $\vec{n} = \vec{j}$.

Le flux est

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{R}(\theta,z)) \cdot \left(\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z\right) \, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 4z \, dz d\theta \\
&= 16\pi.
\end{aligned}$$

Résumé

- Calcul du flux d'un champ vectoriel à travers une surface.