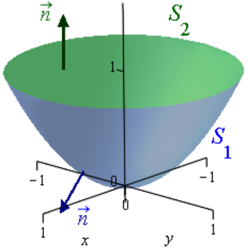
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 2: Les intégrales de surface

Exemple 5: flux à travers une surface fermée

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

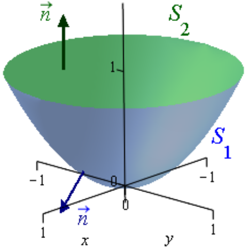


- $S = S_1 \cup S_2$ est constituée de deux morceaux.
- S fermée $\Rightarrow$ l'orientation par défaut (positive) est donnée par un vecteur normal pointant vers l'extérieur.
- Le flux est

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

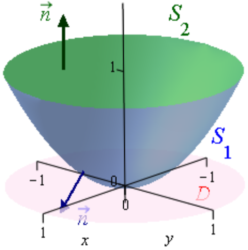


- Intersection des surfaces :

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.



- Intersection des surfaces :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{array} \right. \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

- La projection de S_1 et de S_2 dans le plan des (x,y) est le disque D : $x^2 + y^2 \leq 1$.

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

1) Flux à travers S_1

S_1 est paramétrée par $\vec{R}^1(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (x^2+y^2)\vec{k}$, $(x,y) \in D$.

On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{R}^1_x &= \vec{i} + 2x\vec{k} \\
\vec{R}^1_y &= \vec{j} + 2y\vec{k} \\
\vec{R}^1_x \times \vec{R}^1_y &= -2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}$$

Ce vecteur point ≪ vers le haut ≫ et donne l'orientation incorrecte de S.

On choisit plutôt $-\left(\vec{R}^1_x \times \vec{R}^1_y\right) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}$ dans la formule de calcul.

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

1) Flux à travers S_1

On a

$$\begin{aligned} -\left(\vec{R}_x^1 \times \vec{R}_y^1\right) &= 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{F}(\vec{R}^1(x,y)) &= x\vec{i} + 2y\vec{j} - (x^2+y^2)\vec{k} \\ \vec{F}(\vec{R}^1(x,y)) \cdot \left(-\vec{R}_x^1 \times \vec{R}_y^1\right) &= 3x^2 + 5y^2. \end{aligned}$$

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

1) Flux à travers S_1

Le flux est

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{R}^1(x, y)) \cdot \left(-\vec{R}^1_x \times \vec{R}^1_y\right) \, dA \\
&= \iint_D (3x^2 + 5y^2) \, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3r^2 \cos^2\theta + 5r^2 \sin^2\theta) r \, dr d\theta \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

2) Flux à travers S_2

S_2 est paramétrée par $\vec{R}^2(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + 1\vec{k}$, $(x,y) \in D$.

On calcule

$$\begin{aligned} \vec{R}^2_x &= \vec{i} \\ \vec{R}^2_y &= \vec{j} \\ \vec{R}^2_x \times \vec{R}^2_y &= \vec{k} \end{aligned}$$

Ce vecteur point ≪ vers le haut ≫ et donne l'orientation correcte de S.

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

2) Flux à travers S_2

Le flux est

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{R}^2(x,y)) \cdot \left(\vec{R}^2_x \times \vec{R}^2_y\right) \, dA \\
&= \iint_D \left(x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}\right) \cdot \vec{k} \, dA \\
&= \iint_D -1 \, dA \\
&= -\text{aire}(D) = -\pi.
\end{aligned}$$

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

Le flux total à travers S est

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{dS} = 2\pi + (-\pi) = \pi.$$

Résumé

- Flux à travers une surface fermée constituée de deux morceaux.
- Paramétrisation et orientation de chacun des morceaux.
- Calcul du flux à travers chaque morceau et calcul du flux total.