Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH1102D - Calcul II
Été 2023

Devoir 7

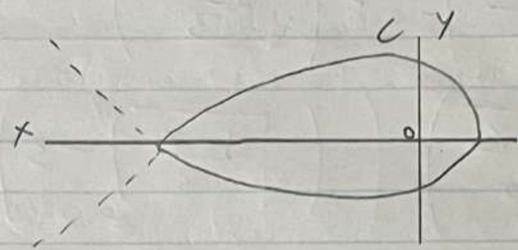
Nom : ______________________ **Prénom :** ______________________

Matricule : ____________________ **Groupe :** 01

Question corrigée	Autres questions	Total
2.75	4	6.75 /10

Devoir 7

#1 $\vec{r}(t) = (1-3t^2)\vec{i} + (t^3-3t)\vec{j}$



a) Calculer la longueur de la courbe C.

On sait que :

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2}\, \Delta t = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

$$L = \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

On a : $\vec{r}(t) = (1-3t^2)\vec{i} + (t^3-3t)\vec{j}$

$$\vec{r}\,'(t) = -6t\,\vec{i} + 3t^2-3\,\vec{j}$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(-6t)^2 + (3t^2-3)^2} = \sqrt{36t^2 + 9t^4 - 18t^2 + 9}$$
$$= \sqrt{9t^4 + 18t^2 + 9}$$
$$= 3t^2 + 3$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} 3t^2 + 3\, dt = \left[t^3 + 3t\right]_{t_1}^{t_2}$$

Trouver l'intervalle des t

$\bullet\ x = 1-3t^2$ $\quad (x-1 = -3t^2 \quad \frac{x-1}{-3} = t^2)$

$t = \sqrt{\frac{1-x}{3}} = t$

2.75

$\bullet\ y = t^3 - 3t$

$= \left(\sqrt{\frac{1-x}{3}}\right)^3 - 3\left(\sqrt{\frac{1-x}{3}}\right)$

$0 = \left(\sqrt{\frac{1-x}{3}}\right)\left(\left(\sqrt{\frac{1-x}{3}}\right)^2 - 3\right)$

$\left(\sqrt{\frac{1-x}{3}}\right) = 0 \Rightarrow x = 1$

$3 = \left(\frac{1-x}{3}\right) \Rightarrow 9 = 1-x \Rightarrow -8 = x$

ok, mais pas nécessaire

Intervalle de $x : [-8, 1]$, trouver intervalle t

$x = 1-3t^2 \Rightarrow -8 = 1-3t^2 \Rightarrow \pm\sqrt{3} = t$

$x = 1-3t^2 \Rightarrow 1 = 1-3t^2 \Rightarrow t = 0$

Intervalle de t : $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

$L = \left[t^3 + 3t\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \left[(\sqrt{3})^3 + 3\sqrt{3}\right] - \left[-(\sqrt{3})^3 + 3\cdot -\sqrt{3}\right]$

2.75/3

$= 2(\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3}$ simplifiez.

$\approx 20{,}785$

b) $k = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$ $\quad s(t) = \int_a^t |r'(u)|\,du$

$a = (-2, 2) \Rightarrow r(a) = (1-3(-2)^2) + ((2)^3 - 3(2))$

vecteur

$\vec{r}(a) = -9$ ← scalaire

On sait que :

$$\frac{ds}{dt} = |r'(u)| = 3(u^2+1)$$

$$s(t) = 3\int_{-9}^{t} (u^2+1)\,du \longrightarrow \int_{\cancel{-1}}^{t} 1\,du + \int_{\cancel{-1}}^{t} u^2\,du$$

$$s(t) = (u^3+u)\Big|_{-9}^{t}$$

$$s(t) = 3\left(t + \frac{t^3}{3} + 252\right)$$

$$s(t) = 3t + t^3 + 756$$

0/3

$$\|r'(t)\| = \sqrt{(-6t)^2 + (3t^2-3)^2}$$

$$= \sqrt{36t^2 + 9t^4 - 18t^2 + 9}$$

$$= \sqrt{9t^4 + 18t^2 + 9}$$

$$= \sqrt{(3t^2+3)^2} = 3t^2+3$$

$(-2, 2)$

$$1 - 3t^2 = -2$$

$$t^3 - 3t = 2$$

$$t^3 + 3t - ((-1)^3 + 3\cdot -1) = 4$$

$$t^3 + 3t + 4 = 4$$

$$t^3 + 3t = 0$$

ok, mais démarche incorrecte

$\boxed{t = 0}$ $\quad t = -\sqrt{3}$

Après avoir bougé de 4 unités d'où le paramètre débute de $(-2,2)$, on obtient :

$$r(0) = (1, 0)$$

#2

$$\vec{F}(x,y) = x\vec{i} - y^3\vec{j}$$

a) Paramétrisation de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par le point $(3,-4)$.

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{r}\,'(t)$$

<u>en 2D</u>

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = \underbrace{x'(t)}_{P(x(t),y(t))}\vec{i} + \underbrace{y'(t)}_{Q(x(t),y(t))}\vec{j}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) :$$

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) & (1) \\ y'(t) = -y(t)^3 & (2) \end{cases}$$

- L'équation (1) est à variables séparables :

$$\frac{dx}{dt} = x \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \Rightarrow \ln|x| = t + C$$

$$x = e^{t + C_1} \qquad C_1 \text{ est une constante}$$

- L'équation (2) est à variables séparables :

$$\frac{dy}{dt} = -y^3 \Rightarrow \frac{dy}{y^3} = -dt \Rightarrow \frac{-1}{2y^2} = -t + C$$

$\cdot y^2$ $$-\frac{1}{2} = -ty^2 + Cy^2$$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2(t - C_2)}}$$

C_2 est une constante

$C : \vec{r}(t) = e^{t+C_1}\,\vec{i} \pm \dfrac{1}{\sqrt{2(t-C_2)}}\,\vec{j}$

Au point $(3,-4)$, posons que $t=0$

$\vec{r}(0) = e^{0+C_1}\,\vec{i} \pm \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot -C_2}}\,\vec{j} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

- $3 = e^{C_1} \Rightarrow C_1 = \ln(3)$
- $-4 = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot -C_2}}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \text{Si } -4 = +\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot -C_2}} \Rightarrow \text{impossible} \\ \text{Si } -4 = -\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot -C_2}} \Rightarrow C_2 = -\dfrac{1}{32} \end{cases}$

d'où $\vec{r}(t) = e^{t+\ln(3)}\,\vec{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2(t-\frac{1}{32})}}\,\vec{j}$

$= e^{t+\ln(3)}\,\vec{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2t-\frac{1}{16}}}\,\vec{j}$

simplifiez

b) Si $\vec{F}$ est un champ de vitesses et si une particule dans ce champ est au point $(3,-4)$ à $t=0$, où sera la particule à $t=2$?

On sait que $\vec{r}(t) = e^{t+C_1}\,\vec{i} \pm \frac{1}{\sqrt{2(t-C_2)}}\,\vec{j}$

Au point (x,y) posons $t=2$

$$\vec{r}(2) = e^{2+C_1}\,\vec{i} \pm \frac{1}{\sqrt{2(2-C_2)}}\,\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

- $x = e^{2+C_1} = e^{2+\ln(3)}$

- $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2\left(2+\frac{1}{32}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{65}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$

$$\vec{r}(2) = e^{2+\ln(3)}\,\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{65}}\,\vec{j}$$