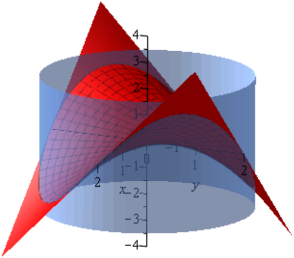
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 1: Les surfaces paramétrées et leur aire

Exemple 6: aire d'une surface $z = f(x, y)$

Exemple 6 : aire d'une surface $z = f(x, y)$

Calculer l'aire de la partie S de la surface $z = xy$ située « à l'intérieur » du cylindre $x^2 + y^2 = 4$.



S est la partie quadrillée de la surface en rouge

- La surface S peut être paramétrée par
$$\vec{R}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + xy\vec{k}$$
- Le domaine des paramètres est la projection de S dans le plan des (x, y) :
$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Exemple 6 : aire d'une surface $z = f(x, y)$

Calculer l'aire de la partie S de la surface $z = xy$ située ≪ à l'intérieur ≫ du cylindre $x^2 + y^2 = 4$.

On calcule

$$
\begin{aligned}
\vec{R}_x &= \vec{i} + y\vec{k} \\
\vec{R}_y &= \vec{j} + x\vec{k} \\
\vec{R}_x \times \vec{R}_y &= -y\vec{i} - x\vec{j} + \vec{k} \\
||\vec{R}_x \times \vec{R}_y|| &= \sqrt{x^2 + y^2 + 1}
\end{aligned}
$$

Exemple 6 : aire d'une surface $z = f(x, y)$

Calculer l'aire de la partie S de la surface $z = xy$ située ≪ à l'intérieur ≫ du cylindre $x^2 + y^2 = 4$.

Si $||\vec{R}_x \times \vec{R}_y|| = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ alors

$$\begin{aligned} \text{aire}(S) &= \iint_D ||\vec{R}_x \times \vec{R}_y||\, dA \\ &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{r^2 + 1}\, r\, dr d\theta \quad (u = r^2 + 1, du = 2r\, dr) \\ &= \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

Résumé

- Paramétrisation d'une surface $z = f(x, y)$.
- Calcul de l'aire d'une surface.