MTH1102D Calcul II

Chapitre 8, section 2 : Les dérivées et les intégrales des fonctions vectorielles

Vecteurs de base en coordonnées cylindriques

Introduction

- Repère orthonormal associé aux coordonnées cylindriques.

Vecteurs de base en coordonnées cylindriques (1)

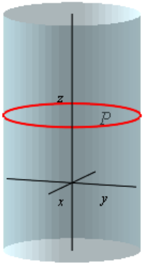
Considérons

Vecteurs de base en coordonnées cylindriques (1)

Considérons

- un point P dont les coordonnées cylindriques sont (r_0, θ_0, z_0)
- la C courbe passant par P et paramétrée par

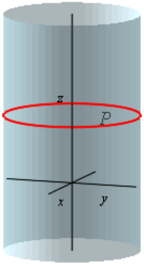
$$\vec{r}(t) = r_0 \cos(t)\,\vec{i} + r_0 \sin(t)\,\vec{j} + z_0\,\vec{k}$$



Vecteurs de base en coordonnées cylindriques (2)

Repère de Serret-Frenet associé à la courbe C :

$$\vec{r}'(t) = -r_0 \sin(t)\,\vec{i} + r_0 \cos(t)\,\vec{j}$$

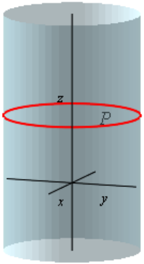


Vecteurs de base en coordonnées cylindriques (2)

Repère de Serret-Frenet associé à la courbe C :

$$\vec{r}'(t) = -r_0 \sin(t)\,\vec{i} + r_0 \cos(t)\,\vec{j}$$

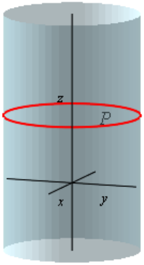
$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||} = -\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}$$



Vecteurs de base en coordonnées cylindriques (2)

Repère de Serret-Frenet associé à la courbe C :

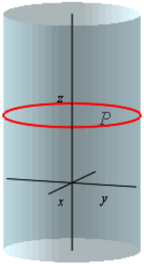
$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= -r_0 \sin(t)\,\vec{i} + r_0 \cos(t)\,\vec{j} \\
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||} = -\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j} \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{||\vec{T}'(t)||} = -\cos(t)\,\vec{i} - \sin(t)\,\vec{j}
\end{aligned}
$$



Vecteurs de base en coordonnées cylindriques (2)

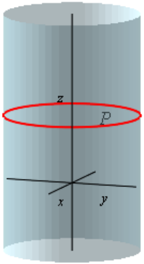
Repère de Serret-Frenet associé à la courbe C :

$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= -r_0 \sin(t)\,\vec{i} + r_0 \cos(t)\,\vec{j} \\
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||} = -\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j} \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{||\vec{T}'(t)||} = -\cos(t)\,\vec{i} - \sin(t)\,\vec{j} \\
\vec{B}(t) &= \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \vec{k}
\end{aligned}
$$



Vecteurs de base en coordonnées cylindriques (2)

Repère de Serret-Frenet associé à la courbe C :



$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= -r_0 \sin(t)\,\vec{i} + r_0 \cos(t)\,\vec{j} \\
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}\,'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||} = -\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j} \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}\,'(t)}{||\vec{T}\,'(t)||} = -\cos(t)\,\vec{i} - \sin(t)\,\vec{j} \\
\vec{B}(t) &= \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \vec{k}
\end{aligned}$$

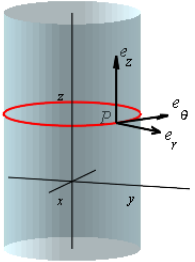
On réordonne les vecteurs, en changeant le signe de $\vec{N}$ pour préserver l'orientation positive.

Vecteurs de base en coordonnées cylindriques (3)

On obtient

$$(-\vec{N}, \vec{T}, \vec{B}) =$$

$$(\cos(\theta_0)\,\vec{i} + \sin(\theta_0)\,\vec{j}, -\sin(\theta_0)\,\vec{i} + \cos(\theta_0)\,\vec{j},\ \vec{k})$$

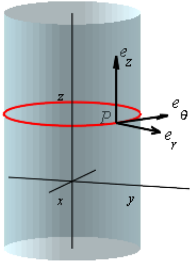


Vecteurs de base en coordonnées cylindriques (3)

On obtient

$$(-\vec{N}, \vec{T}, \vec{B}) =$$

$$(\cos(\theta_0)\,\vec{i} + \sin(\theta_0)\,\vec{j}, -\sin(\theta_0)\,\vec{i} + \cos(\theta_0)\,\vec{j},\ \vec{k})$$



Vecteurs de base en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_z &= \vec{k} \end{aligned}}$$

Expressions des vecteurs de base cartésiens

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_z = \vec{k}\end{gathered}}$$

Exprimons les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$.

Expressions des vecteurs de base cartésiens

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_z &= \vec{k} \end{aligned}}$$

Exprimons les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$.

$\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta$

Expressions des vecteurs de base cartésiens

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_z &= \vec{k} \end{aligned}}$$

Exprimons les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$.

$$\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta = \cos^2(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\theta)\,\vec{j} + \sin^2(\theta)\,\vec{i} - \sin(\theta)\cos(\theta)\,\vec{j}$$

Expressions des vecteurs de base cartésiens

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_z &= \vec{k} \end{aligned}}$$

Exprimons les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$.

$$\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta = \cos^2(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\theta)\,\vec{j} + \sin^2(\theta)\,\vec{i} - \sin(\theta)\cos(\theta)\,\vec{j} = \vec{i}$$

Expressions des vecteurs de base cartésiens

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}\\ \vec{e}_\theta &= -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}\\ \vec{e}_z &= \vec{k}\end{aligned}}$$

Exprimons les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$.

$\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta = \cos^2(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\theta)\,\vec{j} + \sin^2(\theta)\,\vec{i} - \sin(\theta)\cos(\theta)\,\vec{j} = \vec{i}$

$\sin(\theta)\vec{e}_r + \cos(\theta)\vec{e}_\theta$

Expressions des vecteurs de base cartésiens

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_z &= \vec{k} \end{aligned}}$$

Exprimons les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$.

$$\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta = \cos^2(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\theta)\,\vec{j} + \sin^2(\theta)\,\vec{i} - \sin(\theta)\cos(\theta)\,\vec{j} = \vec{i}$$

$$\sin(\theta)\vec{e}_r + \cos(\theta)\vec{e}_\theta = \sin(\theta)\cos(\theta)\,\vec{i} + \sin^2(\theta)\,\vec{j} - \cos(\theta)\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos^2(\theta)\,\vec{j}$$

Expressions des vecteurs de base cartésiens

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_z &= \vec{k} \end{aligned}}$$

Exprimons les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$.

$$\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta = \cos^2(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\theta)\,\vec{j} + \sin^2(\theta)\,\vec{i} - \sin(\theta)\cos(\theta)\,\vec{j} = \vec{i}$$

$$\sin(\theta)\vec{e}_r + \cos(\theta)\vec{e}_\theta = \sin(\theta)\cos(\theta)\,\vec{i} + \sin^2(\theta)\,\vec{j} - \cos(\theta)\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos^2(\theta)\,\vec{j} = \vec{j}$$

Expressions des vecteurs de base cartésiens

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_z &= \vec{k} \end{aligned}}$$

Exprimons les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$.

$$\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta = \cos^2(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\theta)\,\vec{j} + \sin^2(\theta)\,\vec{i} - \sin(\theta)\cos(\theta)\,\vec{j} = \vec{i}$$

$$\sin(\theta)\vec{e}_r + \cos(\theta)\vec{e}_\theta = \sin(\theta)\cos(\theta)\,\vec{i} + \sin^2(\theta)\,\vec{j} - \cos(\theta)\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos^2(\theta)\,\vec{j} = \vec{j}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{i} &= \cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta \\ \vec{j} &= \sin(\theta)\vec{e}_r + \cos(\theta)\vec{e}_\theta \\ \vec{k} &= \vec{e}_z \end{aligned}}$$

Résumé

- Vecteurs de base en coordonnées cylindriques.

Résumé

- Vecteurs de base en coordonnées cylindriques.
- Vecteurs de base cartésiens en fonction des vecteurs en coordonnées cylindriques.