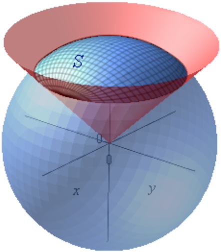
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 2: Les intégrales de surface

Exemple 1: intégrale de surface générale

Exemple 1 : intégrale de surface générale

Calculer l'intégrale de surface $J = \iint_S z^2\, dS$ où S est la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ située au-dessus du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



- L'équation sphérique de la sphère est $\rho = a$ et elle est paramétrée par
  $\vec{R}(\theta, \phi) = a \sin\phi \cos\theta \vec{i} + a \sin\phi \sin\theta \vec{j} + a \cos\phi \vec{k}$
- Les côtés du cône forment un angle de $\pi/4$ avec l'axe des z donc pour S on a $0 \leq \phi \leq \pi/4$.
- De plus, pour S on a aussi $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Exemple 1 : intégrale de surface générale

Calculer l'intégrale de surface $J = \iint_S z^2\, dS$ où S est la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ située au-dessus du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si $\vec{R}(\theta, \phi) = a \sin\phi \cos\theta\, \vec{i} + a \sin\phi \sin\theta\, \vec{j} + a\cos\phi\, \vec{k}$ alors

$$
\begin{aligned}
\vec{R}_\theta &= -a\sin\phi\sin\theta\,\vec{i} + a\sin\phi\cos\theta\,\vec{j} + 0\vec{k} \\
\vec{R}_\phi &= a\cos\phi\cos\theta\,\vec{i} + a\cos\phi\sin\theta\,\vec{j} - a\sin\phi\,\vec{k} \\
\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi &= -a^2\sin^2\phi\cos\theta\,\vec{i} - a^2\sin^2\phi\sin\theta\,\vec{j} - a^2\sin\phi\cos\phi\,\vec{k} \\
||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi|| &= a^2\sin\phi.
\end{aligned}
$$

Exemple 1 : intégrale de surface générale

Calculer l'intégrale de surface $J = \iint_S z^2\, dS$ où S est la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ située au-dessus du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On a $||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi|| = a^2 \sin\phi$ et $f(\vec{R}(\theta,\phi)) = z(\theta,\phi)^2 = a^2\cos^2\phi$.

On calcule

$$\begin{aligned} J &= \iint_D f(\vec{R}(\theta,\phi))||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi||\, dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} (a^2\cos^2\phi)(a^2\sin\phi)\, d\phi d\theta \quad (u = \cos\phi, du = -\sin\phi\, d\phi) \\ &= \frac{2}{3}a^4\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right). \end{aligned}$$

Exemple 1 : intégrale de surface générale

Remarque :

- Il n'y a pas de jacobien dans l'intégrale puisqu'il n'y a eu aucun changement de variable (passage d'un système de coordonnées à un autre).
- L'intégrale a été posée en (θ, ϕ) et évaluée dans ces mêmes variables.

Résumé

- Paramétrisation d'une sphère.
- Calcul d'une intégrale de surface générale.
- Lors du calcul d'une intégrale, un jacobien apparaît seulement si on passe d'un système de coordonnées à un autre.