

MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 1: Les intégrales triples

Applications des intégrales triples

Introduction

- Volume.
- Premiers moments et centre de masse d'un solide.
- Seconds moments d'un solide.

Applications des intégrales triples

Théorème

Si E est une région de type 1, 2 ou 3 de l'espace alors

$$\text{vol}(E) = \iiint_E dV.$$

Par exemple, si E est de type 1 :

$$\begin{aligned}\iiint_E dV &= \iint_D \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} dz \right] dA = \iint_D [h_2(x,y) - h_1(x,y)] dA \\ &= \text{volume de la région } E \text{ entre } z = h_1(x,y) \text{ et } z = h_2(x,y), \\ &\quad \text{au-dessus de } D \\ &= \text{vol}(E)\end{aligned}$$

Applications des intégrales triples

Théorème

Si E est un solide occupant une région de type 1, 2 ou 3 de l'espace et dont la densité est donnée par $\rho(x, y, z)$ alors la masse de E est

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z) dV.$$

Applications des intégrales triples

Définition

Si E est un solide occupant une région de type 1, 2 ou 3 de l'espace et dont la densité est donnée par $\rho(x, y, z)$ alors les *premiers moments* de E par rapport aux plans de coordonnées sont

$$\textcircled{1} \quad M_{yz} = \iiint_E x \rho(x, y, z) \, dV \quad (\text{p/r plan } x = 0)$$

$$\textcircled{2} \quad M_{xz} = \iiint_E y \rho(x, y, z) \, dV \quad (\text{p/r plan } y = 0)$$

$$\textcircled{3} \quad M_{xy} = \iiint_E z \rho(x, y, z) \, dV \quad (\text{p/r plan } z = 0).$$

Définition

Le *centre de masse* d'un solide E occupant une région de type 1, 2 ou 3 de l'espace et dont la densité est donnée par $\rho(x, y, z)$ est le point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, où :

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Applications des intégrales triples

Définition

Si E est un solide occupant une région de type 1, 2 ou 3 de l'espace et dont la densité est donnée par $\rho(x, y, z)$ alors les *moments d'inertie* (*seconds moments*) de E par rapport aux plans de coordonnées sont

$$\textcircled{1} \quad I_{yz} = \iiint_E x^2 \rho(x, y, z) dV \quad (\text{p/r plan } x = 0)$$

$$\textcircled{2} \quad I_{xz} = \iiint_E y^2 \rho(x, y, z) dV \quad (\text{p/r plan } y = 0)$$

$$\textcircled{3} \quad I_{xy} = \iiint_E z^2 \rho(x, y, z) dV \quad (\text{p/r plan } z = 0)$$

$$\textcircled{4} \quad I_0 = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV \quad (\text{p/r origine})$$

- Calcul d'une volume à l'aide d'une intégrale triple.
- Calcul de la masse et du centre de masse d'un solide.
- Calcul des moments d'inertie d'un solide.