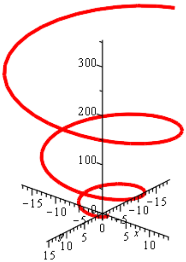
MTH1102D Calcul II

Chapitre 8, section 3: La longueur d'arc et la courbure

Exemple 2: longueur d'une courbe dans l'espace

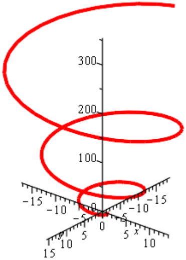
Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.

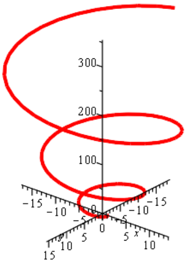


$$x'(t) = \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t$$

dériver composantes par rapport à t

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

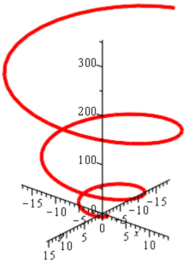
Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \le t \le 6\pi$.



$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t \\
y'(t) &= -\sin t + (\sin t + t\cos t) = t\cos t
\end{aligned}
$$

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

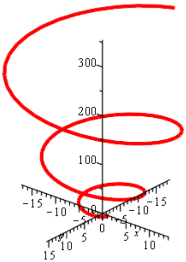
Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t \\ y'(t) &= -\sin t + (\sin t + t\cos t) = t\cos t \\ z'(t) &= 2t \end{aligned}$$

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



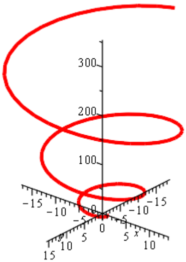
$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t \\ y'(t) &= -\sin t + (\sin t + t\cos t) = t\cos t \\ z'(t) &= 2t \end{aligned}$$

donc

$$\vec{r}\,'(t) = t\sin t\,\vec{i} + t\cos t\,\vec{j} + 2t\vec{k}$$

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



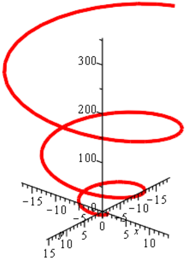
$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t \\
y'(t) &= -\sin t + (\sin t + t\cos t) = t\cos t \\
z'(t) &= 2t
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= t\sin t\vec{i} + t\cos t\vec{j} + 2t\vec{k} \\
||\vec{r}'(t)|| &= \sqrt{t^2\sin^2 t + t^2\cos^2 t + 4t^2}
\end{aligned}
$$

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



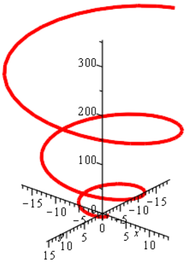
$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t \\
y'(t) &= -\sin t + (\sin t + t\cos t) = t\cos t \\
z'(t) &= 2t
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= t\sin t\vec{i} + t\cos t\vec{j} + 2t\vec{k} \\
||\vec{r}'(t)|| &= \sqrt{t^2\sin^2 t + t^2\cos^2 t + 4t^2} \\
&= \sqrt{5t^2} = \sqrt{5}t \quad (t \geq 0)
\end{aligned}
$$

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

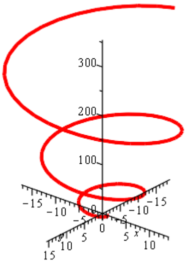
Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



$$L = \int_0^{6\pi} ||\vec{r}\,'(t)||\, dt$$

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

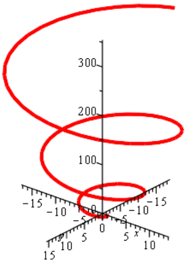
Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



$$\begin{aligned} L &= \int_0^{6\pi} ||\vec{r}'(t)||\,dt \\ &= \int_0^{6\pi} \sqrt{5}t\,dt \end{aligned}$$

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



$$\begin{aligned} L &= \int_0^{6\pi} \|\vec{r}'(t)\|\, dt \\ &= \int_0^{6\pi} \sqrt{5}t\, dt \\ &= 18\sqrt{5}\pi^2 \approx 397.24 \end{aligned}$$

Résumé

- Calcul de la longueur d'un courbe dans l'espace.