MTH1102D Calcul II

Chapitre 6, section 4 : Les intégrales doubles en coordonnées polaires

Définition et formule de calcul

Introduction

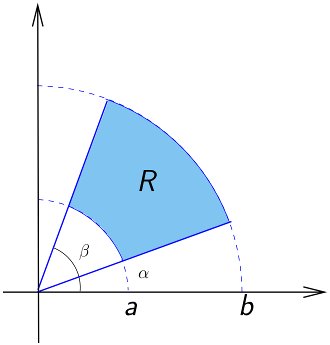
- Intégrale double sur un rectangle polaire.
- Intégrale double sur un domaine borné par des courbes polaires.

Intégrales doubles en coordonnées polaires

On considère un rectangle polaire

$$R = \{(r, \theta) \,|\, a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

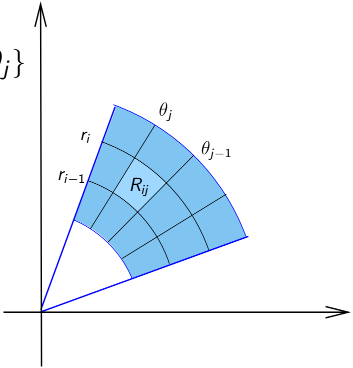
et une fonction f définie sur R.



Construction de l'intégrale

- On subdivise R en sous-rectangles :

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \le r \le r_i, \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j\}$$

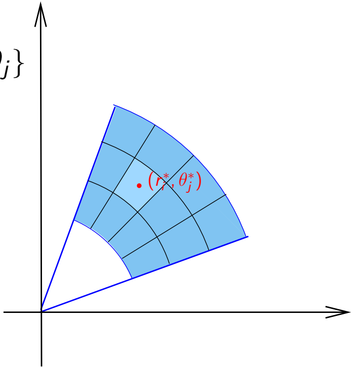


Construction de l'intégrale

- On subdivise R en sous-rectangles :

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$$

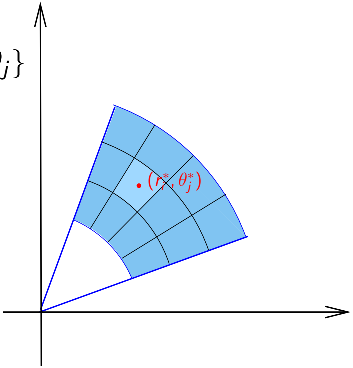
- On suppose que $[a, b]$ et $[\alpha, \beta]$ sont subdivisés en sous-intervalles égaux.



Construction de l'intégrale

- On subdivise R en sous-rectangles :

$$R_{ij} = \{(r,\theta) \,|\, r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$$



- On suppose que $[a,b]$ et $[\alpha,\beta]$ sont subdivisés en sous-intervalles égaux.
- On note (r_i^*, θ_j^*) le point milieu de R_{ij}.

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i)$$

et

$$\theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

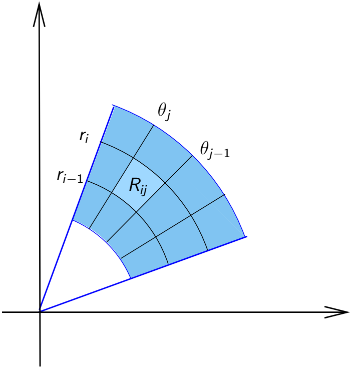
Intégrales doubles en coordonnées polaires

Construction de l'intégrale

- L'aire d'un secteur d'angle ϕ et de rayon ρ est

$$A = \frac{1}{2}\rho^2\phi$$

- L'aire de R_{ij} est la différence des aires de deux secteurs d'angle $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$ et rayons r_i, r_{i-1}.



Construction de l'intégrale

$$\begin{aligned}\Delta A_{ij} &= \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta\\ &= (r_i^2 - r_{i-1}^2)\frac{\Delta\theta}{2}\\ &= \frac{(r_i + r_{i-1})}{2}(r_i - r_{i-1})\Delta\theta\\ &= r_i^*\Delta r\Delta\theta.\end{aligned}$$

Construction de l'intégrale

$$
\begin{aligned}
\Delta A_{ij} &= \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 \Delta\theta \\
&= (r_i^2 - r_{i-1}^2)\frac{\Delta\theta}{2} \\
&= \frac{(r_i + r_{i-1})}{2}(r_i - r_{i-1})\Delta\theta \\
&= r_i^* \Delta r \Delta\theta.
\end{aligned}
$$

Intégrales doubles en coordonnées polaires

Construction de l'intégrale

$$
\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\,dA &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)\,\Delta A_{ij} \\
&= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \underbrace{f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)\,r_i^*}_{g}\,\Delta r\Delta\theta \\
&= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(r_i^*, \theta_j^*)\Delta r\Delta\theta \\
&= \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r,\theta)\,drd\theta \\
&= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta
\end{aligned}
$$

Intégrales doubles en coordonnées polaires

Théorème

Si $R = \{(r, \theta) \,|\, a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ et f est intégrable sur R alors

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \, dr d\theta$$

Intégrales doubles en coordonnées polaires

Théorème

Si $R = \{(r, \theta) \,|\, a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ et f est intégrable sur R alors

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \, dr d\theta$$

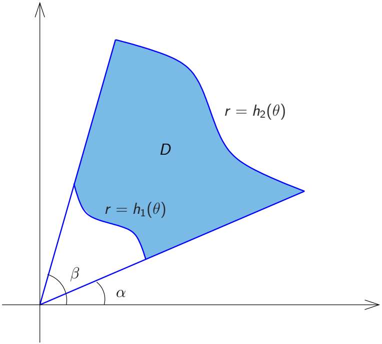
Le terme supplémentaire r dans l'intégrale est appelé le *jacobien*.

Intégrales doubles en coordonnées polaires

Théorème

Si $D = \{(r,\theta) \mid h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ et f est intégrable sur R alors

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,drd\theta$$



Résumé

- L'intégrale double sur un rectangle polaire.
- Le jacobien.
- L'intégrable double sur un domaine polaire général.