MTH1102D Calcul II

Chapitre 8, section 3: La longueur d'arc et la courbure

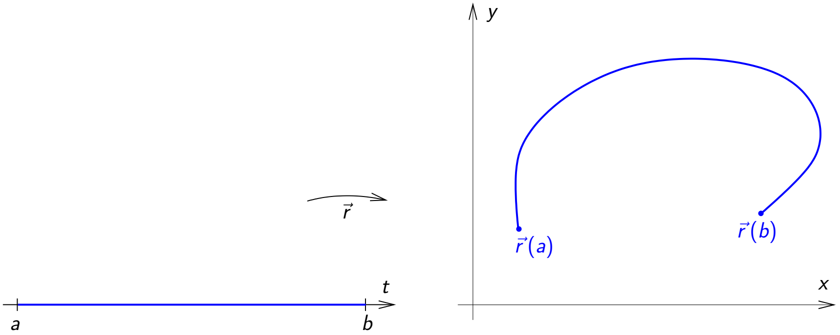
Longueur d'arc

Introduction

- Longueur d'une courbe dans le plan.
- Longueur d'une courbe dans l'espace.

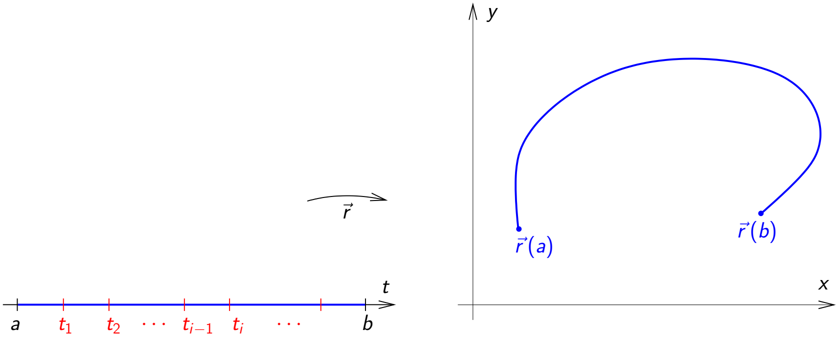
Longueur d'arc

Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.



Longueur d'arc

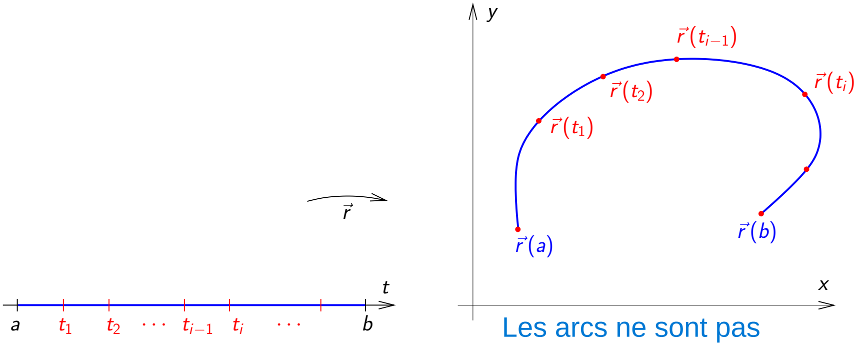
Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.



On subdivise $[a, b]$ en sous-intervalles égaux.

Longueur d'arc

Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.

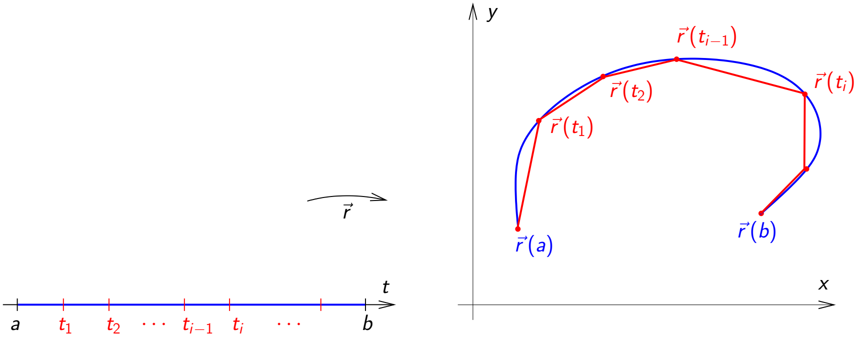


Les arcs ne sont pas subdivisés de la mm longueur

Ceci subdivise C en petits arcs de courbe.

Longueur d'arc

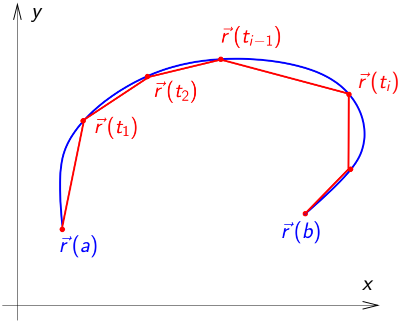
Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.



On approxime ensuite la courbe par une ligne brisée.

Longueur d'arc

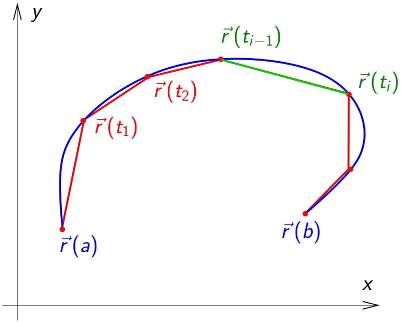
Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.



- La longueur de C est approximée par la longueur de la ligne brisée.

Longueur d'arc

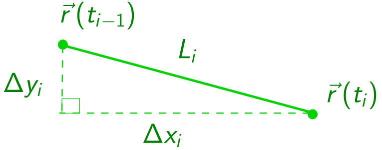
Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \le t \le b$.
Calculons la longueur L de la courbe.



- La longueur de C est approximée par la longueur de la ligne brisée.
- On pose L_i = longueur du segment de $\vec{r}(t_{i-1})$ à $\vec{r}(t_i)$.
- $L \approx \sum_{i=1}^{n} L_i$

Longueur d'arc

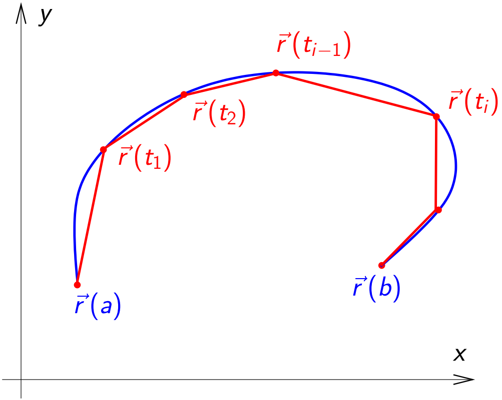
Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.



$$
\begin{aligned}
L &\approx \sum_{i=1}^{n} L_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2}\, \Delta t
\end{aligned}
$$

Longueur d'arc

Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.



Longueur d'arc

Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2}\, \Delta t$$

Lorsque $n \to \infty$ on a $\Delta t \to 0$ et

la ligne brisée
s'approche de
la courbe

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt}$$

1) lorsque n->infini, la longueur L se rapproche de la longueur qu'on a estimé avec la somme
2) lorsque n->infini, les deux termes tendent vers des carrés de dérivés des fonctions x et y

Longueur d'arc

Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$. Calculons la longueur L de la courbe.

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2}\, \Delta t$$

Lorsque $n \to \infty$ l'approximation devient égalité donc

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2}\, \Delta t = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Longueur d'arc

Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$.
Calculons la longueur L de la courbe.

Puisque

$$\boxed{||\vec{r}\,'(t)|| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}$$

on peut écrire

$$\boxed{L = \int_a^b ||\vec{r}\,'(t)||\, dt}$$

Un raisonnement semblable permet de trouver une formule analogue pour une courbe dans l'espace.

Longueur d'arc

Théorème

Si $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$, est une courbe dans le plan alors sa longueur est

$$L = \int_a^b ||\vec{r}\,'(t)||\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Théorème

Si $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$, est une courbe dans l'espace alors sa longueur est

$$L = \int_a^b ||\vec{r}\,'(t)||\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Résumé

- Longueur d'une courbe paramétrée.
- Expression vectorielle pour l'intégrale qui calcule la longueur d'une courbe.

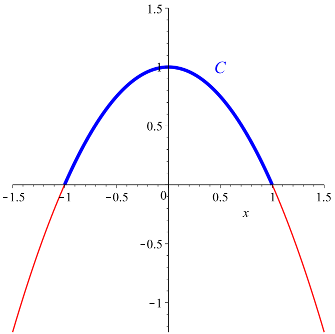
MTH1102D Calcul II

Chapitre 8, section 3: La longueur d'arc et la courbure

Exemple 1: longueur d'une courbe dans le plan

Exemple 1 : longueur d'une courbe dans le plan

Calculer la longueur de la portion C de la parabole $y = 1 - x^2$ située au-dessus de l'axe des x.



- Intersection avec l'axe des x :

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

C correspond à $-1 \leq x \leq 1$.

- $C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + (1 - t^2)\vec{j}$ avec $-1 \leq t \leq 1$.

Exemple 1 : longueur d'une courbe dans le plan

Calculer la longueur de la portion C de la parabole $y = 1 - x^2$ située au-dessus de l'axe des x.

$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + (1 - t^2)\vec{j}$ avec $-1 \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned} \vec{r}\,'(t) &= \vec{i} - 2t\vec{j} \\ ||\vec{r}\,'(t)|| &= \sqrt{1 + 4t^2} \qquad \text{car norme} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{1} ||\vec{r}\,'(t)||\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4t^2}\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{(1/2)^2 + t^2}\, dt = \sqrt{5} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{5} - 2) \approx 2.96 \end{aligned}$$

formule 21 de la feuille

Résumé

- Longueur d'une courbe dans le plan.
- Même si la courbe est simple, l'intégrale qui calcule la longueur peut être difficile à évaluer.

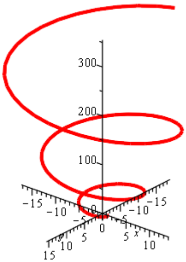
MTH1102D Calcul II

Chapitre 8, section 3: La longueur d'arc et la courbure

Exemple 2: longueur d'une courbe dans l'espace

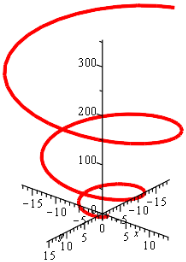
Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.

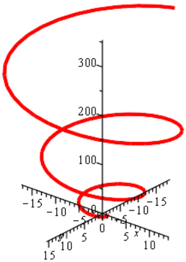


$$x'(t) \quad = \quad \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t$$

dériver composantes par rapport à t

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

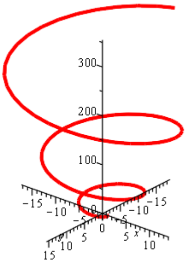
Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t \\ y'(t) &= -\sin t + (\sin t + t\cos t) = t\cos t \end{aligned}$$

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

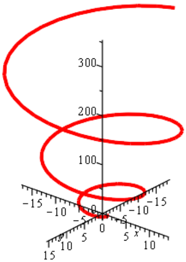
Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t \\ y'(t) &= -\sin t + (\sin t + t\cos t) = t\cos t \\ z'(t) &= 2t \end{aligned}$$

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



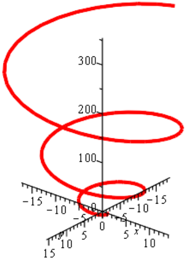
$$\begin{aligned}
x'(t) &= \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t \\
y'(t) &= -\sin t + (\sin t + t\cos t) = t\cos t \\
z'(t) &= 2t
\end{aligned}$$

donc

$$\vec{r}\,'(t) = t\sin t\vec{i} + t\cos t\vec{j} + 2t\vec{k}$$

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



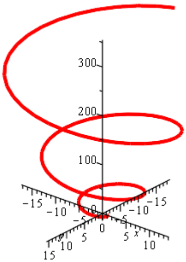
$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t \\
y'(t) &= -\sin t + (\sin t + t\cos t) = t\cos t \\
z'(t) &= 2t
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= t\sin t\vec{i} + t\cos t\vec{j} + 2t\vec{k} \\
||\vec{r}'(t)|| &= \sqrt{t^2\sin^2 t + t^2\cos^2 t + 4t^2}
\end{aligned}
$$

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



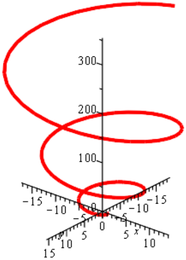
$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t \\ y'(t) &= -\sin t + (\sin t + t\cos t) = t\cos t \\ z'(t) &= 2t \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= t\sin t\vec{i} + t\cos t\vec{j} + 2t\vec{k} \\ ||\vec{r}'(t)|| &= \sqrt{t^2\sin^2 t + t^2\cos^2 t + 4t^2} \\ &= \sqrt{5t^2} = \sqrt{5}t \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

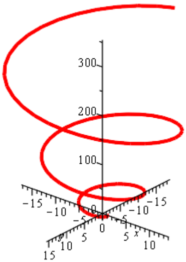
Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



$$L = \int_0^{6\pi} ||\vec{r}'(t)||\, dt$$

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

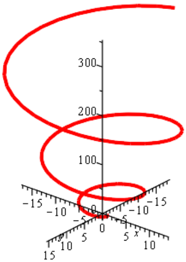
Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{6\pi} ||\vec{r}'(t)||\, dt \\
&= \int_0^{6\pi} \sqrt{5}t\, dt
\end{aligned}
$$

Exemple 2 : longueur d'une courbe dans l'espace

Calculer la longueur du tire-bouchon
$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$ pour $0 \leq t \leq 6\pi$.



$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{6\pi} ||\vec{r}'(t)||\, dt \\
&= \int_0^{6\pi} \sqrt{5}t\, dt \\
&= 18\sqrt{5}\pi^2 \approx 397.24
\end{aligned}
$$

Résumé

- Calcul de la longueur d'un courbe dans l'espace.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 1: Les champs vectoriels

Champs vectoriels

Introduction

- Champs vectoriels en 2 et 3 dimensions.
- Exemples de champs vectoriels.

Champs vectoriels

Conventions et notation

- Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être vu comme

  un *point* avec n coordonnées

  un *vecteur* de dimension n

Champs vectoriels

Conventions et notation

- Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être vu comme

  un *point* avec n coordonnées

  un *vecteur* de dimension n

- Notation :

  un point sera noté en gras : $\mathbf{x}$

  un vecteur sera noté avec une flèche : $\vec{v}$

Champs vectoriels

Conventions et notation

- Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être vu comme

  un *point* avec n coordonnées
  un *vecteur* de dimension n

- Notation :

  un point sera noté en gras : $\mathbf{x}$
  un vecteur sera noté avec une flèche : $\vec{v}$

- En pratique, on identifiera points et vecteurs :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \longleftrightarrow \quad \vec{\mathbf{x}} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \cdots + x_n\vec{e_n}.$$

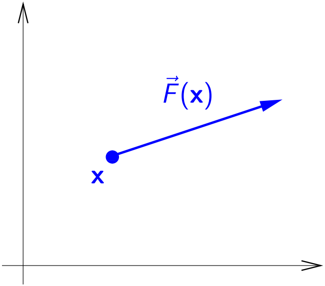
Champs vectoriels

Définition

Un **champ vectoriel** (ou **champ de vecteurs**) dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle

$$\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

qui associe à chaque point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur $\vec{F}(\mathbf{x})$ de dimension n.



Champs vectoriels

Définition

Un **champ vectoriel** (ou **champ de vecteurs**) dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle

$$\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

qui associe à chaque point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur $\vec{F}(\mathbf{x})$ de dimension n.

On écrit un champ vectoriel générique

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j} \quad \text{deux dimensions}$$

Champs vectoriels

Définition

Un **champ vectoriel** (ou **champ de vecteurs**) dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle

$$\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

qui associe à chaque point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur $\vec{F}(\mathbf{x})$ de dimension n.

On écrit un champ vectoriel générique

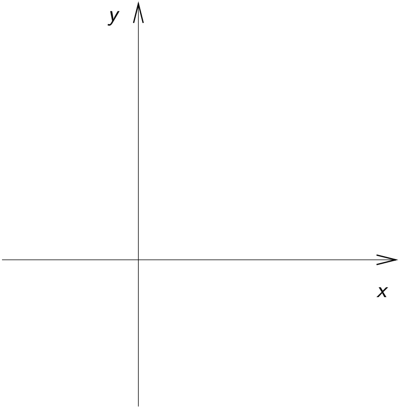
$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j} \quad \text{deux dimensions}$$

ou

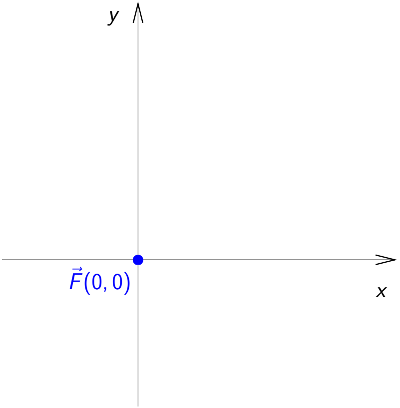
$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k} \quad \text{trois dimensions}$$

Champs vectoriels

Exemple : Représentons graphiquement le champ vectoriel
$\vec{F}(x, y) = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$



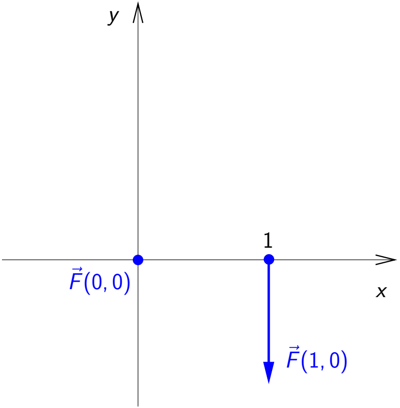
Exemple : Représentons graphiquement le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$



$$\vec{F}(0,0) \quad = \quad \vec{0}$$

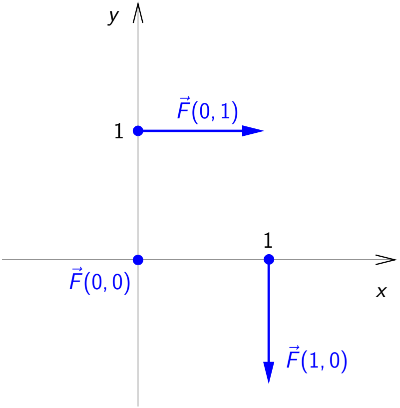
Champs vectoriels

Exemple : Représentons graphiquement le champ vectoriel
$\vec{F}(x, y) = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$



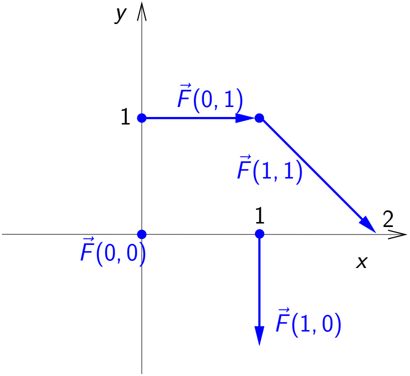
$$
\begin{aligned}
\vec{F}(0,0) &= \vec{0} \\
\vec{F}(1,0) &= -\vec{j}
\end{aligned}
$$

Exemple : Représentons graphiquement le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$



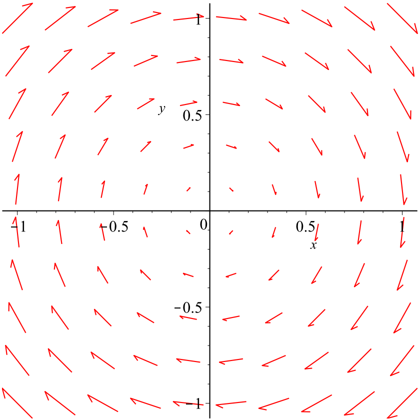
$$\begin{aligned}\vec{F}(0,0) &= \vec{0}\\ \vec{F}(1,0) &= -\vec{j}\\ \vec{F}(0,1) &= \vec{i}\end{aligned}$$

Exemple : Représentons graphiquement le champ vectoriel
$\vec{F}(x, y) = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$



$$
\begin{aligned}
\vec{F}(0,0) &= \vec{0} \\
\vec{F}(1,0) &= -\vec{j} \\
\vec{F}(0,1) &= \vec{i} \\
\vec{F}(1,1) &= \vec{i} - \vec{j}
\end{aligned}
$$

Exemple : Représentons graphiquement le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$



Champs vectoriels

Exemple : La force gravitationnelle exercée par une masse M à l'origine sur un objet de masse m au point $\mathbf{x}$ est

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{||\vec{\mathbf{x}}||^3}\,\vec{\mathbf{x}}$$

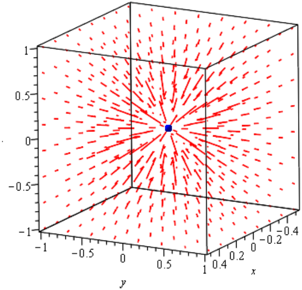
où $G \approx 6.7 \times 10^{-11}$ est la constante de gravitation.

Champs vectoriels

Exemple : La force gravitationnelle exercée par une masse M à l'origine sur un objet de masse m au point $\mathbf{x}$ est

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{||\vec{\mathbf{x}}||^3}\,\vec{\mathbf{x}}$$

où $G \approx 6.7 \times 10^{-11}$ est la constante de gravitation.

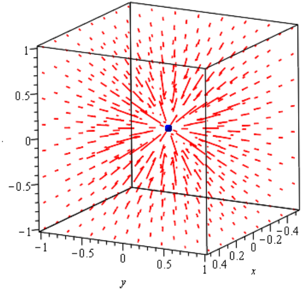


Champs vectoriels

Exemple : La force gravitationnelle exercée par une masse M à l'origine sur un objet de masse m au point $\mathbf{x}$ est

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{||\vec{\mathbf{x}}||^3}\,\vec{\mathbf{x}}$$

où $G \approx 6.7 \times 10^{-11}$ est la constante de gravitation.



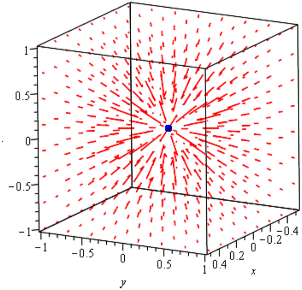
- $\vec{F}(\mathbf{x}) = -\dfrac{\text{cste}}{||\vec{\mathbf{x}}||^3}\,\vec{\mathbf{x}}$ donc la force s'exerce selon la droite reliant m et M.

Champs vectoriels

Exemple : La force gravitationnelle exercée par une masse M à l'origine sur un objet de masse m au point $\mathbf{x}$ est

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{||\vec{\mathbf{x}}||^3}\,\vec{\mathbf{x}}$$

où $G \approx 6.7 \times 10^{-11}$ est la constante de gravitation.



- $\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{\text{cste}}{||\vec{\mathbf{x}}||^3}\,\vec{\mathbf{x}}$ donc la force s'exerce selon la droite reliant m et M.
- $||\vec{F}(\mathbf{x})|| = \frac{\text{cste}}{||\vec{\mathbf{x}}||^3}\,||\vec{\mathbf{x}}|| = \frac{\text{cste}}{||\vec{\mathbf{x}}||^2}$ donc la force est inversement proportionnelle au carré de la distance.

Champs vectoriels

Exemple : La force gravitationnelle exercée par une masse M à l'origine sur un objet de mass m au point $\mathbf{x}$ est

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{||\vec{\mathbf{x}}||^3}\,\vec{\mathbf{x}}$$

où $G \approx 6.7 \times 10^{-11}$ est la constante de gravitation.

- Explicitement :

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{-mMG}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\right)$$

Champs vectoriels

Exemple : La force gravitationnelle exercée par une masse M à l'origine sur un objet de mass m au point $\mathbf{x}$ est

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{||\vec{\mathbf{x}}||^3}\,\vec{\mathbf{x}}$$

où $G \approx 6.7 \times 10^{-11}$ est la constante de gravitation.

- Explicitement :

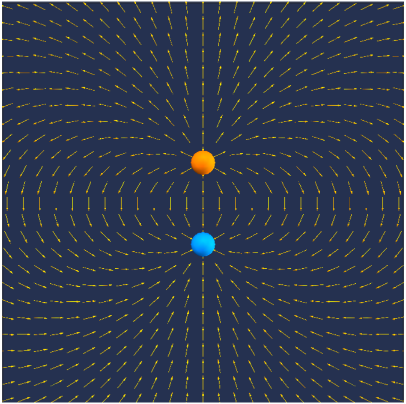
$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{-mMG}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\right)$$

- Le champ électrique est de la même forme :

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{qQ\epsilon}{||\vec{\mathbf{x}}||^3}\,\vec{\mathbf{x}}$$

Champs vectoriels

Exemple : Champ électrique autour d'un dipôle.

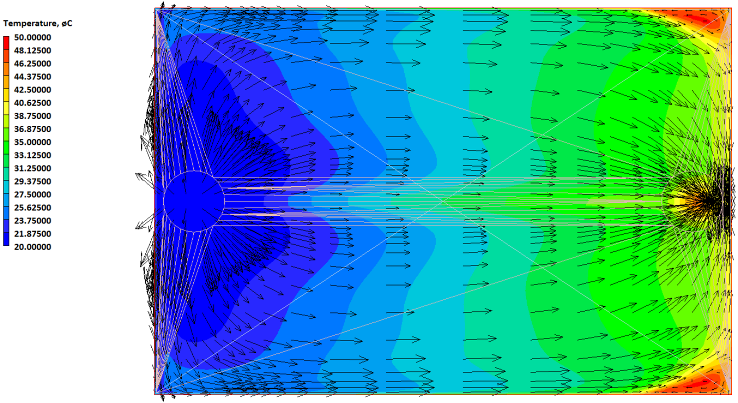


Source :

http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/visualizations/guidedtour/Tour.htm

Champs vectoriels

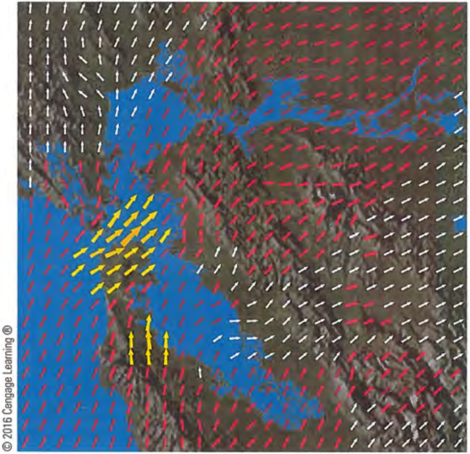
Exemple : Étude du transfert de chaleur dans un panneau solaire.



Source :

http://www.cham.co.uk/casestudies/CCS_HeatTransfer_in_SolarPanel.pdf

Exemple : Vitesse du vent dans la baie de San Francisco le 1er mars 2010 à 18h00.



Résumé

- Définition de champ vectoriel en 2 et 3 dimensions.

Résumé

- Définition de champ vectoriel en 2 et 3 dimensions.
- Exemples de champs vectoriels.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 1: Les champs vectoriels

Champs conservatifs

Introduction

- Champs de gradients et champs conservatifs.

Champs conservatifs

Définition

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de plusieurs variables alors le *champ de gradients* associé à f est le champ vectoriel qui associe à chaque point $\mathbf{x}$ le vecteur $\nabla f(\mathbf{x})$.

Définition

Un champ vectoriel $\vec{F}$ est *conservatif* s'il est le champ de gradients d'une fonction f. Autrement dit, $\vec{F} = \nabla f$.

Définition

Si $\vec{F} = \nabla f$ est un champ conservatif alors f est un *potentiel* (ou *fonction potentielle*) pour $\vec{F}$.

Champs conservatifs

Par exemple, le champ gravitationnel

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{||\mathbf{x}||^3}\mathbf{x} = \frac{-mMG}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$$

est conservatif.
La fonction

$$f(x,y,z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

est un potentiel pour ce champ.

Résumé

- Définition de champ de gradients.
- Définition de champ conservatif.
- Potentiel d'un champ conservatif.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 1: Les champs vectoriels

Exemple 1: calcul d'un potentiel

Exemple 1 : calcul d'un potentiel

1. Montrer que le champ vectoriel $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ n'est *pas* conservatif.

Supposons que $\vec{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$.

$$\begin{cases} f_x(x, y) & = & y & (1) \\ f_y(x, y) & = & -x & (2) \end{cases}$$

On a

$$(1) \Rightarrow f(x, y) = xy + A(y),$$

où A est une fonction indépendante de x (« intégration partielle »)
Donc

$$f_y(x, y) = x + A_y(y)$$

D'autre part

$$(2) \Rightarrow f_y(x, y) = -x$$

Ceci implique que $A_y(y) = -2x$. Impossible car A est indépendante de x.
Conclusion : il n'existe pas de potentiel f donc $\vec{F}$ n'est pas conservatif.

Exemple 1 : calcul d'un potentiel

2. Trouver un potentiel pour le champ vectoriel
$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy+1)\vec{i} + (x^2+z^3+1)\vec{j} + 3yz^2\vec{k}.$$

On cherche f telle que $\vec{F} = \nabla f$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} f_x &= 2xy+1 & (1) \\ f_y &= x^2+z^3+1 & (2) \\ f_z &= 3yz^2 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow f = x^2y + x + A(y,z)$$ intégrer par rapport à x

où A est indépendante de x.

$$(2) \Rightarrow x^2+z^3+1 = f_y = x^2 + A_y(y,z)$$

Exemple 1 : calcul d'un potentiel

2. Trouver un potentiel pour le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy+1)\vec{i} + (x^2+z^3+1)\vec{j} + 3yz^2\vec{k}.$$

On cherche f telle que $\vec{F} = \nabla f$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} f_x &= 2xy+1 & (1) \\ f_y &= x^2+z^3+1 & (2) \\ f_z &= 3yz^2 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow f = x^2y + x + A(y,z)$$

où A est indépendante de x.

$$(2) \Rightarrow \cancel{x^2} + z^3 + 1 = f_y = \cancel{x^2} + A_y(y,z) \Rightarrow A_y(y,z) = z^3+1$$

donc $A(y,z) = yz^3 + y + B(z)$ où B est indépendante de x et y.

Exemple 1 : calcul d'un potentiel

2. Trouver un potentiel pour le champ vectoriel
$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy+1)\vec{i} + (x^2+z^3+1)\vec{j} + 3yz^2\vec{k}.$$

On cherche f telle que $\vec{F} = \nabla f$, c'est-à-dire
$$\left\{\begin{array}{lcll} f_x & = & 2xy+1 & (1) \\ f_y & = & x^2+z^3+1 & (2) \\ f_z & = & 3yz^2 & (3) \end{array}\right.$$

On a donc $f = x^2y + x + yz^3 + y + B(z)$.
$$(3) \Rightarrow 3yz^2 = f_z = 3yz^2 + B_z(z)$$

Exemple 1 : calcul d'un potentiel

2. Trouver un potentiel pour le champ vectoriel
$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy+1)\vec{i} + (x^2+z^3+1)\vec{j} + 3yz^2\vec{k}.$$

On cherche f telle que $\vec{F} = \nabla f$, c'est-à-dire
$$\begin{cases} f_x = 2xy+1 & (1) \\ f_y = x^2+z^3+1 & (2) \\ f_z = 3yz^2 & (3) \end{cases}$$

On a donc $f = x^2y + x + yz^3 + y + B(z)$.
$$(3) \Rightarrow \cancel{3yz^2} = f_z = \cancel{3yz^2} + B_z(z) \Rightarrow B_z(z) = 0$$ dérivé de B est 0

donc $B(z) = C$ où C est une constante. car nulle

Potentiel pour $\vec{F}$:
$$f(x,y,z) = x^2y + x + yz^3 + y + C.$$

Résumé

- Exemple d'un champ non conservatif.
- Calcul d'un potentiel pour un champ conservatif.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 1: Les champs vectoriels

Lignes de courant d'un champ vectoriel

Introduction

- Lignes de courant d'un champ vectoriel.

Lignes de courant d'un champ vectoriel

Notation :

Si $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ et $\vec{F}$ est un champ vectoriel alors

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \quad \text{signifie} \quad \vec{F}(x(t), y(t), z(t)).$$

Lignes de courant d'un champ vectoriel

Définition

Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel alors une *ligne de courant* de $\vec{F}$ est une courbe paramétrée par une fonction $\vec{r}$ qui vérifie l'équation

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{r}'(t)$$

pour chaque t.

Lignes de courant d'un champ vectoriel

Définition

Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel alors une *ligne de courant* de $\vec{F}$ est une courbe paramétrée par une fonction $\vec{r}$ qui vérifie l'équation

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{r}'(t)$$

pour chaque t.

Le vecteur tangent à la courbe est donné en chaque point par le champ $\vec{F}$.

Lignes de courant d'un champ vectoriel

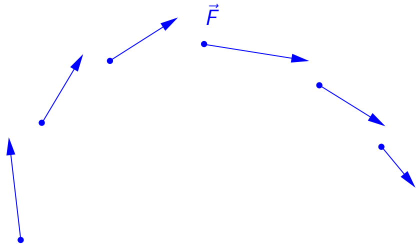
Définition

Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel alors une *ligne de courant* de $\vec{F}$ est une courbe paramétrée par une fonction $\vec{r}$ qui vérifie l'équation

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{r}\,'(t)$$

pour chaque t.

Le vecteur tangent à la courbe est donné en chaque point par le champ $\vec{F}$.



Lignes de courant d'un champ vectoriel

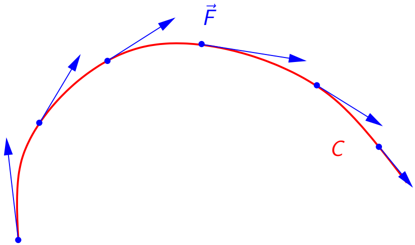
Définition

Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel alors une *ligne de courant* de $\vec{F}$ est une courbe paramétrée par une fonction $\vec{r}$ qui vérifie l'équation

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{r}'(t)$$

pour chaque t.

Le vecteur tangent à la courbe est donné en chaque point par le champ $\vec{F}$.



Lignes de courant d'un champ vectoriel

Définition

Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel alors une *ligne de courant* de $\vec{F}$ est une courbe paramétrée par une fonction $\vec{r}$ qui vérifie l'équation

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{r}\,'(t)$$

pour chaque t.

Interprétation :

Si $\vec{F}$ est le champ de vitesses d'un fluide en mouvement alors une ligne de courant est la trajectoire d'une particule qu'on laisse tomber dans le fluide.

Lignes de courant d'un champ vectoriel

- En deux dimensions :
  $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ et $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

Lignes de courant d'un champ vectoriel

- En deux dimensions :
  $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ et $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$
  On a
  $$P(x(t),y(t))\vec{i} + Q(x(t),y(t))\vec{j} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}.$$

Lignes de courant d'un champ vectoriel

- En deux dimensions :
  $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ et $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$
  On a
  $$P(x(t),y(t))\vec{i} + Q(x(t),y(t))\vec{j} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}.$$

- En trois dimensions :
  $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$
  et $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

Lignes de courant d'un champ vectoriel

- En deux dimensions :
  $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ et $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$
  On a
  $$P(x(t),y(t))\vec{i} + Q(x(t),y(t))\vec{j} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}.$$

- En trois dimensions :
  $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$
  et $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$
  On a
  $$\begin{aligned} & P(x(t),y(t),z(t))\vec{i} + Q(x(t),y(t),z(t))\vec{j} + R(x(t),y(t),z(t)) \\ = \; & x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}. \end{aligned}$$

Lignes de courant d'un champ vectoriel

- Ces équations donnent lieu à des *équations différentielles* qu'il faut résoudre pour trouver la ligne de courant.

Lignes de courant d'un champ vectoriel

- Ces équations donnent lieu à des *équations différentielles* qu'il faut résoudre pour trouver la ligne de courant.

  Par exemple, en deux dimensions :

$$\begin{aligned} x'(t) &= P(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= Q(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

Lignes de courant d'un champ vectoriel

- Ces équations donnent lieu à des *équations différentielles* qu'il faut résoudre pour trouver la ligne de courant.

  Par exemple, en deux dimensions :

$$\begin{aligned} x'(t) &= P(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= Q(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

- Dans les cas simples, ces équations peuvent être résolues avec des méthodes élémentaires.

Résumé

- Lignes de courant d'un champ vectoriel.

Résumé

- Lignes de courant d'un champ vectoriel.
- Interprétation physique.

Résumé

- Lignes de courant d'un champ vectoriel.
- Interprétation physique.
- Équations différentielles à résoudre pour trouver les lignes de courant.

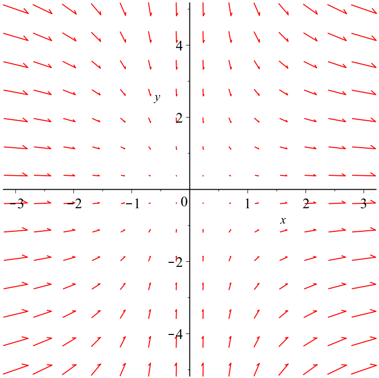
MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 1: Les champs vectoriels

Exemple 2: équations paramétriques des lignes de courant

Exemple 2 : équations paramétriques des lignes de courant

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$. Trouver les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par les points :
a) $(1/2, 2)$ b) $(-1/2, -1)$



Exemple 2 : équations paramétriques des lignes de courant

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$. Trouver les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par les points :
a) $(1/2, 2)$ b) $(-1/2, -1)$

- Soit $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ une paramétrisation d'une ligne de courant.
- Par définition, $\vec{r}'(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 & (1) \\ y'(t) = -y(t) & (2) \end{cases}$$

- L'équation (1) est à *variables séparables* : car à gauche on a mis tous les x et à droite tous les t

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + C \Rightarrow x = \frac{1}{C_1 - t}$$

où C_1 est une constante (on a posé $C_1 = -C$).

isoler x pr l'exprimer en fonction de t

Exemple 2 : équations paramétriques des lignes de courant

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$. Trouver les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par les points :
a) $(1/2, 2)$ b) $(-1/2, -1)$

- Soit $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ une paramétrisation d'une ligne de courant.
- Par définition, $\vec{r}'(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$:

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)^2 & (1) \\ y'(t) &= -y(t) & (2) \end{cases}$$

- L'équation (2) est à *variables séparables* :

$$\frac{dy}{dt} = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dt \Rightarrow \ln|y| = -t + C \Rightarrow y = \pm e^{-t+C} = C_2 e^{-t}$$

où C_2 est une constante (on a posé $C_2 = \pm e^C$).

Exemple 2 : équations paramétriques des lignes de courant

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$. Trouver les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par les points :
a) $(1/2, 2)$ b) $(-1/2, -1)$

- Paramétrisation d'une ligne de courant quelconque :

$$C : \vec{r}(t) = \frac{1}{C_1 - t}\vec{i} + C_2 e^{-t}\vec{j}.$$

- a) Si C passe par $(1/2, 2)$, on suppose que ce point correspond à $t = 0$. Alors

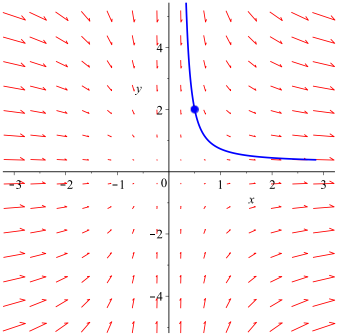
$$\frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j} = \vec{r}(0) = \frac{1}{C_1 - 0}\vec{i} + C_2 e^0\vec{j} \Rightarrow C_1 = 2 \text{ et } C_2 = 2.$$

La ligne de courant passant par $(1/2, 2)$ est paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2 - t}\vec{i} + 2e^{-t}\vec{j}.$$

Exemple 2 : équations paramétriques des lignes de courant

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$. Trouver les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par les points :
a) $(1/2, 2)$ b) $(-1/2, -1)$



$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2-t}\vec{i} + 2e^{-t}\vec{j}, \quad t < 2.$$

- $t < 2$ car composante en $\vec{i}$ non définie en $t = 2$ et le point donné correspond à $t = 0 < 2$.
- asymptote horizontale $y = 2e^{-2}$ lorsque $t \to 2^-$.
- asymptote verticale $x = 0$ lorsque $t \to -\infty$.

Exemple 2 : équations paramétriques des lignes de courant

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$. Trouver les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par les points :
a) $(1/2, 2)$ b) $(-1/2, -1)$

- Paramétrisation d'une ligne de courant quelconque :

$$C : \vec{r}(t) = \frac{1}{C_1 - t}\vec{i} + C_2 e^{-t}\vec{j}.$$

- b) Si C passe par $(-1/2, -1)$, on suppose que ce point correspond à $t = 0$. Alors

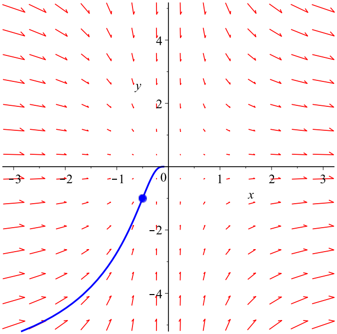
$$-\frac{1}{2}\vec{i} - \vec{j} = \vec{r}(0) = \frac{1}{C_1 - 0}\vec{i} + C_2 e^0 \vec{j} \Rightarrow C_1 = -2 \text{ et } C_2 = -1.$$

La ligne de courant passant par $(-1/2, -1)$ est paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{-2 - t}\vec{i} - e^{-t}\vec{j}.$$

Exemple 2 : équations paramétriques des lignes de courant

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$. Trouver les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par les points :
a) $(1/2, 2)$ b) $(-1/2, -1)$



$$\vec{r}(t) = \frac{1}{-2-t}\vec{i} - e^{-t}\vec{j}, \quad t > -2.$$

- $t > -2$ car composante en $\vec{i}$ non définie en $t = -2$ et le point donné correspond à $t = 0 > -2$.
- asymptote horizontale $y = -e^{-2}$ lorsque $t \to -2^+$.
- $\vec{r}(t) \to \vec{0}$ lorsque $t \to \infty$.

Résumé

- Déterminer les équations paramétriques d'une ligne de courant quelconque.
- Déterminer les équation paramétriques d'une ligne de courant passant par un point donné.
- Déterminer le domaine de la ligne de courant et énoncer ses caractéristiques géométriques.