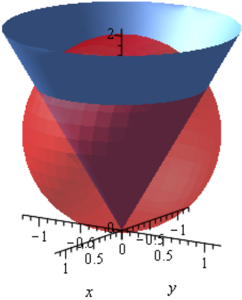
MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 4: Les intégrales triples en coordonnées sphériques

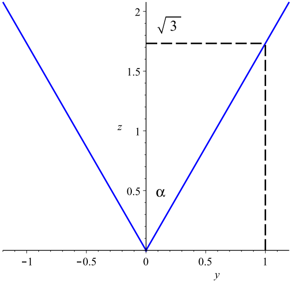
Exemple 1: intégrale en coordonnées sphériques sur un domaine général

Exemple 1 : intégrale sphérique sur un domaine général

Calculer $\iiint_E z^2\, dV$, où E est la région située au-dessus du cône $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

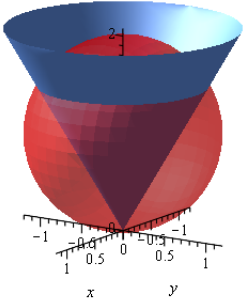


- Côtés du cône forment un angle de $\alpha = \arctan(y/z) = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$ avec l'axe des z positifs



Exemple 1 : intégrale sphérique sur un domaine général

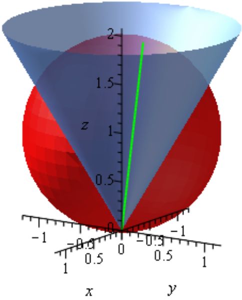
Calculer $\iiint_E z^2\, dV$, où E est la région située au-dessus du cône $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.



- Équation sphérique du cône : $\phi = \pi/6$
- Équation sphérique de la sphère : $\rho = 2\cos\phi$

Exemple 1 : intégrale sphérique sur un domaine général

Calculer $\iiint_E z^2 \, dV$, où E est la région située au-dessus du cône $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.



- Équation sphérique du cône : $\phi = \pi/6$
- Équation sphérique de la sphère : $\rho = 2\cos\phi$

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \,|\, 0 \leq \rho \leq 2\cos\phi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/6\}$$

Exemple 1 : intégrale sphérique sur un domaine général

Calculer $\iiint_E z^2\, dV$, où E est la région située au-dessus du cône $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

$$
\begin{aligned}
\iiint_E z^2\, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^{2\cos\phi} (\rho^2 \cos^2\phi)(\rho^2 \sin\phi)\, d\rho d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{\rho=2\cos\phi} \cos^2\phi \sin\phi\, d\phi d\theta \\
&= \frac{32}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \cos^7\phi \sin\phi\, d\phi d\theta \quad (u = \cos\phi, du = -\sin\phi\, d\phi\ ) \\
&= \frac{35}{64} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{35}{32}\pi.
\end{aligned}
$$

Résumé

- Décrire une région de l'espace en coordonnées sphériques.
- Calculer une intégrale en coordonnées sphériques sur un domaine général.