MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 2: Les intégrales curvilignes

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Introduction

- Intégrale d'un champ vectoriel le long d'une courbe.
- Interprétation physique.
- Formule de calcul.

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Définition

Soit C une courbe et $\vec{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage de C. L'*intégrale de $\vec{F}$ le long de C* est

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

où $\vec{T}$ est le vecteur tangent unitaire de C.

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Définition

Soit C une courbe et $\vec{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage de C. L'*intégrale de* $\vec{F}$ *le long de* C est

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$$

où $\vec{T}$ est le vecteur tangent unitaire de C.

Remarques :

- $\vec{F}$ et $\vec{T}$ sont des fonctions vectorielles qui dépendent du point (x, y, z) de la courbe.

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Définition

Soit C une courbe et $\vec{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage de C. L'*intégrale de $\vec{F}$ le long de C* est

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$$

où $\vec{T}$ est le vecteur tangent unitaire de C.

Remarques :

- $\vec{F}$ et $\vec{T}$ sont des fonctions vectorielles qui dépendent du point (x, y, z) de la courbe.
- $\vec{F} \cdot \vec{T}$ est une fonction scalaire qui dépend du point (x, y, z) de la courbe.

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Définition

Soit C une courbe et $\vec{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage de C. L'*intégrale de* $\vec{F}$ *le long de* C est

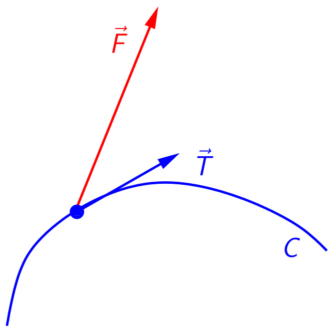
$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

où $\vec{T}$ est le vecteur tangent unitaire de C.

Remarques :

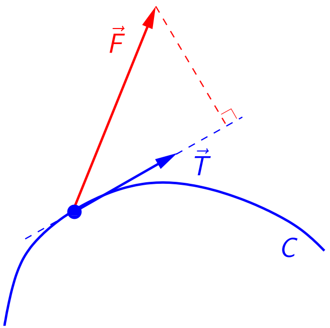
- $\vec{F}$ et $\vec{T}$ sont des fonctions vectorielles qui dépendent du point (x, y, z) de la courbe.
- $\vec{F} \cdot \vec{T}$ est une fonction scalaire qui dépend du point (x, y, z) de la courbe.
- L'intégrale ci-dessus est un cas particulier d'intégrale curviligne.

Interprétation

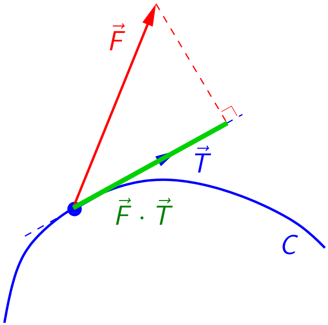


Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Interprétation

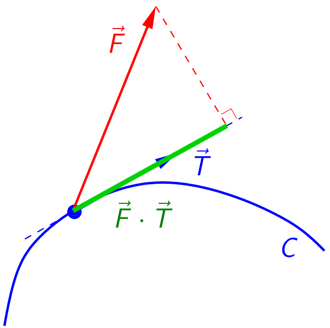


Interprétation



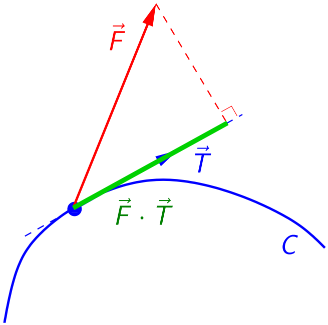
Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Interprétation



- Rappel : si une force agit dans la direction du mouvement alors le travail est égal à force $\times$ distance.

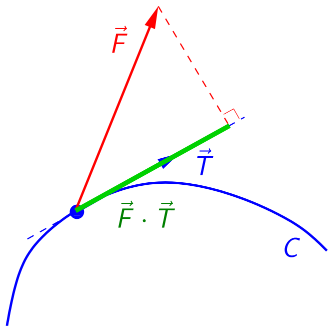
Interprétation



- Rappel : si une force agit dans la direction du mouvement alors le travail est égal à force $\times$ distance.
- $\vec{F} \cdot \vec{T}$ est la composante de $\vec{F}$ dans la direction de $\vec{T}$ (donc du mouvement le long de C).

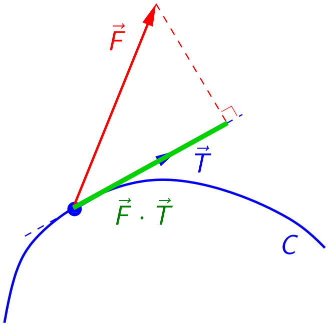
Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Interprétation



- Rappel : si une force agit dans la direction du mouvement alors le travail est égal à force $\times$ distance.
- $\vec{F} \cdot \vec{T}$ est la composante de $\vec{F}$ dans la direction de $\vec{T}$ (donc du mouvement le long de C).
- $\vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$ est le travail effectué par $\vec{F}$ le long d'un petit arc de C.

Interprétation



- Rappel : si une force agit dans la direction du mouvement alors le travail est égal à force $\times$ distance.
- $\vec{F} \cdot \vec{T}$ est la composante de $\vec{F}$ dans la direction de $\vec{T}$ (donc du mouvement le long de C).
- $\vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$ est le travail effectué par $\vec{F}$ le long d'un petit arc de C.
- $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$ est le travail total effectué par $\vec{F}$ le long de C.

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Formule de calcul

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Formule de calcul

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds \;=\; \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||}\, ||\vec{r}'(t)||\, dt$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Formule de calcul

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||}\, ||\vec{r}'(t)||\, dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt \end{aligned}$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Formule de calcul

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \|\vec{r}'(t)\|\, dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt\end{aligned}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Formule de calcul

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||}\, ||\vec{r}'(t)||\, dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt\end{aligned}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt$$

Notation :

On écrit habituellement $\vec{r}'(t)\, dt = \vec{dr}$ et

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}.$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Orientation

Orientation

- Le sens de parcours d'une courbe paramétrée définit son *orientation*.

Orientation

- Le sens de parcours d'une courbe paramétrée définit son *orientation*.
- Si C est une courbe paramétrée alors $-C$ désigne la même courbe mais parcourue en sens opposé (orientation opposée).

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Orientation

- Le sens de parcours d'une courbe paramétrée définit son *orientation*.
- Si C est une courbe paramétrée alors $-C$ désigne la même courbe mais parcourue en sens opposé (orientation opposée).
- Intégrale curviligne générale par rapport à s :

$$\int_{-C} f(x, y, z)\, ds = \int_{C} f(x, y, z)\, ds$$

car $ds = ||\vec{r}'(t)||\, dt$ est positif quel que soit le sens de parcours.

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Orientation

- Le sens de parcours d'une courbe paramétrée définit son *orientation*.
- Si C est une courbe paramétrée alors $-C$ désigne la même courbe mais parcourue en sens opposé (orientation opposée).
- Intégrale curviligne générale par rapport à s :

$$\int_{-C} f(x,y,z)\,ds = \int_{C} f(x,y,z)\,ds$$

car $ds = ||\vec{r}'(t)||\,dt$ est positif quel que soit le sens de parcours.

- Intégrale curviligne d'un champ vectoriel :

$$\int_{-C} \vec{F}\cdot\vec{dr} = -\int_{C} \vec{F}\cdot\vec{dr}$$

car $\vec{dr} = \vec{r}'(t)\,dt$ change de signe lorsque le sens de parcours change.

Autre notation pour la formule de calcul

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Autre notation pour la formule de calcul

- En deux dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et C : $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Autre notation pour la formule de calcul

- En deux dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} \quad = \quad \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt$$

Autre notation pour la formule de calcul

- En deux dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))\vec{i} + Q(x(t), y(t))\vec{j}] \cdot [x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}]\, dt
\end{aligned}$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Autre notation pour la formule de calcul

- En deux dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))\vec{i} + Q(x(t), y(t))\vec{j}] \cdot [x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}]\, dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\, dt
\end{aligned}$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Autre notation pour la formule de calcul

- En deux dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))\vec{i} + Q(x(t), y(t))\vec{j}] \cdot [x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}]\, dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\ dt \\
&= \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\, dt + \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t)\, dt
\end{aligned}$$

Autre notation pour la formule de calcul

- En deux dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$
\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))\vec{i} + Q(x(t), y(t))\vec{j}] \cdot [x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}]\, dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\, dt \\
&= \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\, dt + \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t)\, dt \\
&= \int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy
\end{aligned}
$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Autre notation pour la formule de calcul

- En deux dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\,dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))\vec{i} + Q(x(t), y(t))\vec{j}] \cdot [x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}]\,dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,dt \\
&= \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\,dt + \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t)\,dt \\
&= \int_C P(x, y)\,dx + \int_C Q(x, y)\,dy \\
&= \int_C P\,dx + Q\,dy
\end{aligned}$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Autre notation pour la formule de calcul

- En trois dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$
  et C : $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Autre notation pour la formule de calcul

- En trois dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$
  et $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Résumé

- Intégrale d'un champ vectoriel le long d'une courbe.

Résumé

- Intégrale d'un champ vectoriel le long d'une courbe.
- Interprétation physique de l'intégrale comme un travail.

Résumé

- Intégrale d'un champ vectoriel le long d'une courbe.
- Interprétation physique de l'intégrale comme un travail.
- Formule de calcul de l'intégrale étant donnée une paramétrisation de la courbe.

Résumé

- Intégrale d'un champ vectoriel le long d'une courbe.
- Interprétation physique de l'intégrale comme un travail.
- Formule de calcul de l'intégrale étant donnée une paramétrisation de la courbe.
- Dépendance du travail sur l'orientation de la courbe.

Résumé

- Intégrale d'un champ vectoriel le long d'une courbe.
- Interprétation physique de l'intégrale comme un travail.
- Formule de calcul de l'intégrale étant donnée une paramétrisation de la courbe.
- Dépendance du travail sur l'orientation de la courbe.
- Reformulation de la formule de calcul de l'intégale d'un champ le long d'une courbe.