MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 3: Le théorème fondamental des intégrales curvilignes

Un critère pour les champs conservatifs

Introduction

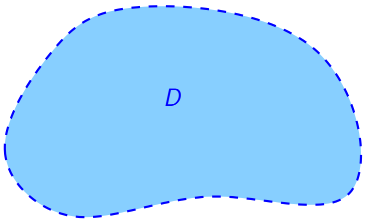
- Un critère permettant de déterminer si un champ vectoriel en deux dimensions est conservatif.

Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *ouvert* s'il ne contient aucun point de sa frontière.

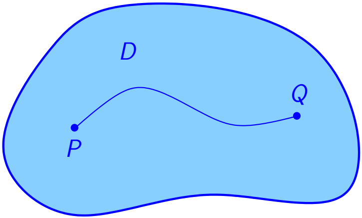
- Pour les besoins du cours, la *frontière* d'une région plane est la courbe qui la délimite.
- On représente habituellement un domaine ouvert en traçant sa frontière en pointillés.



Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *connexe* si toute paire de points de D peut être reliée par un chemin continu situé entièrement à l'intérieur de D.



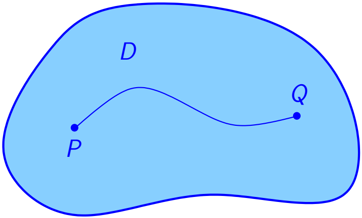
D est connexe

Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *connexe* si toute paire de points de D peut être reliée par un chemin continu situé entièrement à l'intérieur de D.

Autrement dit, D est en *un seul morceau*.



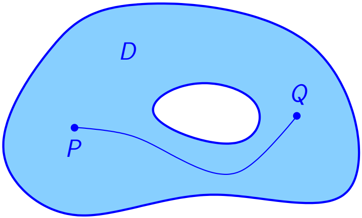
D est connexe

Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *connexe* si toute paire de points de D peut être reliée par un chemin continu situé entièrement à l'intérieur de D.

Autrement dit, D est en *un seul morceau*.



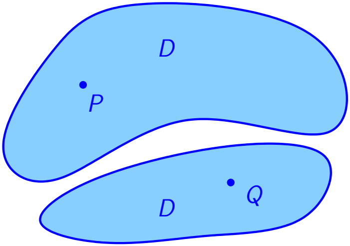
D est connexe

Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *connexe* si toute paire de points de D peut être reliée par un chemin continu situé entièrement à l'intérieur de D.

Autrement dit, D est en *un seul morceau*.

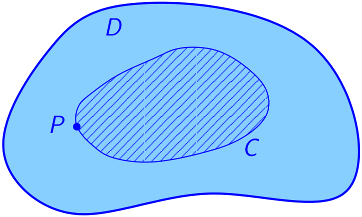


D n'est pas connexe

Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *simplement connexe* s'il est connexe et si toute courbe fermée dans D n'entoure <u>que</u> des points de D.



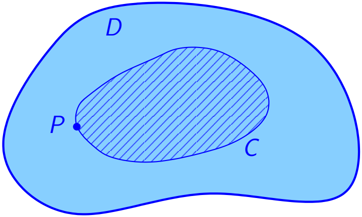
D est simplement connexe

Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *simplement connexe* s'il est connexe et si toute courbe fermé dans D n'entoure <u>que</u> des points de D.

Autrement dit, D n'a *pas de trous*.



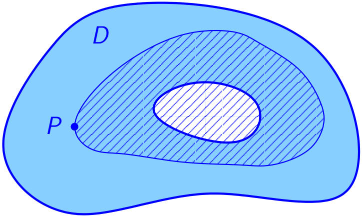
D est simplement connexe

Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *simplement connexe* s'il est connexe et si toute courbe fermé dans D n'entoure que des points de D.

Autrement dit, D n'a *pas de trous*.



D n'est pas simplement connexe

Un critère pour les champs conservatifs

Théorème

Soit $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ un champ vectoriel ayant des dérivées partielles continues sur un domaine simplement connexe D. Dans ce cas,

$$\vec{F} \text{ conservatif } \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Remarques :

- L'implication directe ($\Rightarrow$) est vraie même si D n'est pas simplement connexe et est facile à démontrer.
- La réciproque ($\Leftarrow$) est vraie seulement si D est simplement connexe et est beaucoup plus difficile à démontrer.

Résumé

- Propriétés topologiques de certains domaines du plan.
- Critère pour déterminer si un champ vectoriel en deux dimensions est conservatif.