MTH1102D Calcul II

Chapitre 8, section 1: Les fonctions vectorielles et les courbes paramétrées

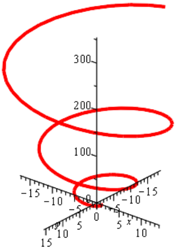
Une courbe paramétrée dans l'espace

Une courbe paramétrée dans l'espace

Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$$

avec $t \geq 0$ (un « tire-bouchon »). Montrer que C est située sur le paraboloïde $z = x^2 + y^2 - 1$.



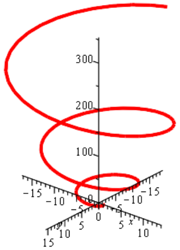
$$\begin{aligned} x(t)^2 + y(t)^2 &= [\sin t - t\cos t]^2 + [\cos t + t\sin t]^2 \\ &= \sin^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t \\ &\quad + \cos^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t \end{aligned}$$

Une courbe paramétrée dans l'espace

Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$$

avec $t \geq 0$ (un « tire-bouchon »). Montrer que C est située sur le paraboloïde $z = x^2 + y^2 - 1$.



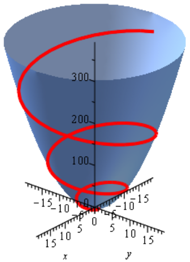
$$\begin{aligned} x(t)^2 + y(t)^2 &= [\sin t - t\cos t]^2 + [\cos t + t\sin t]^2 \\ &= \sin^2 t - \cancel{2t\sin t\cos t} + t^2\cos^2 t \\ &\quad + \cos^2 t + \cancel{2t\sin t\cos t} + t^2\sin^2 t \\ &= 1 + t^2 = 1 + z(t). \end{aligned}$$

Une courbe paramétrée dans l'espace

Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}$$

avec $t \geq 0$ (un « tire-bouchon »). Montrer que C est située sur le paraboloïde $z = x^2 + y^2 - 1$.



$$\begin{aligned} x(t)^2 + y(t)^2 &= [\sin t - t\cos t]^2 + [\cos t + t\sin t]^2 \\ &= \sin^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t \\ &\quad + \cos^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t \\ &= 1 + t^2 = 1 + z(t). \end{aligned}$$

Les points de C satisfont à l'équation du paraboloïde.

Résumé

- Un exemple d'une courbe dans l'espace contenue dans une surface.