MTH1102D Calcul II

Chapitre 8, section 2: Les dérivées et les intégrales des fonctions vectorielles

Exemple 1: calcul du vecteur tangent et du vecteur normal

Exemple 1 : calcul du vecteur tangent et du vecteur normal

Calculons le vecteur tangent unitaire et le vecteur normal unitaire du « tire-bouchon »

$$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}, \quad t \geq 0$$

au point $(1, \pi/2, \pi^2/4)$.

Vecteur tangent :

$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t \\ y'(t) &= -\sin t + (\sin t + t\cos t) = t\cos t \\ z'(t) &= 2t. \end{aligned}$$

donc le vecteur tangent est

$$\vec{r}\,'(t) = t\sin t\vec{i} + t\cos t\vec{j} + 2t\vec{k}$$

Exemple 1 : calcul du vecteur tangent et du vecteur normal

Calculons le vecteur tangent unitaire et le vecteur normal unitaire du « tire-bouchon »

$$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}, \quad t \geq 0$$

au point $(1, \pi/2, \pi^2/4)$.

Vecteur tangent :

$$||\vec{r}\,'(t)|| = \sqrt{(t\sin t)^2 + (t\cos t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{5t^2} = \sqrt{5}t \ \ (t \geq 0)$$

donc le vecteur tangent unitaire est

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \frac{\vec{r}\,'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||} = \frac{1}{\sqrt{5}t}\left(t\sin t\vec{i} + t\cos t\vec{j} + 2t\vec{k}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + 2\vec{k}\right) \end{aligned}$$

Exemple 1 : calcul du vecteur tangent et du vecteur normal

Calculons le vecteur tangent unitaire et le vecteur normal unitaire du « tire-bouchon »

$$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}, \quad t \geq 0$$

au point $(1, \pi/2, \pi^2/4)$.

Vecteur tangent :

Le point donné correspond à t tel que

$$\begin{aligned} x(t) = \sin t - t\cos t &= 1 \\ y(t) = \cos t + t\sin t &= \pi/2 \\ z(t) = t^2 &= \pi^2/4 \end{aligned}$$

On trouve $t = \pi/2$ et

$$\vec{T}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sin(\pi/2)\vec{i} + \cos(\pi/2)\vec{j} + 2\vec{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{k})$$

Exemple 1 : calcul du vecteur tangent et du vecteur normal

Calculons le vecteur tangent unitaire et le vecteur normal unitaire du « tire-bouchon »

$$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}, \quad t \geq 0$$

au point $(1, \pi/2, \pi^2/4)$.

Vecteur normal :

$$\begin{aligned}
\vec{T}(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + 2\vec{k}\right) \\
\vec{T}\,'(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j} + 0\vec{k}\right) \\
||\vec{T}\,'(t)|| &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{||\,\vec{T}'(t)\,||} = \cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}.
\end{aligned}$$

Exemple 1 : calcul du vecteur tangent et du vecteur normal

Calculons le vecteur tangent unitaire et le vecteur normal unitaire du « tire-bouchon »

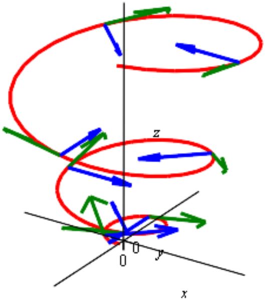
$$\vec{r}(t) = [\sin t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + t\sin t]\vec{j} + t^2\vec{k}, \quad t \geq 0$$

au point $(1, \pi/2, \pi^2/4)$.

Vecteur normal :

$$\begin{aligned} \vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{||\,\vec{T}'(t)\,||} = \cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}. \\ \vec{N}(\pi/2) &= \cos(\pi/2)\vec{i} - \sin(\pi/2)\vec{j} = -\vec{j} \end{aligned}$$

Exemple 1 : calcul du vecteur tangent et du vecteur normal



On remarque :

- Le vecteur normal pointe toujours dans la direction où la courbe ≪ se replie ≫ (toujours le cas).
- Le vecteur normal est horizontal en chaque point (pas toujours le cas).

Résumé

- Identification de la valeur du paramètre correspondant à un point donné.
- Calcul du vecteur tangent général et calcul pour un point donné.
- Calcul du vecteur normal général et calcul pour un point donné.