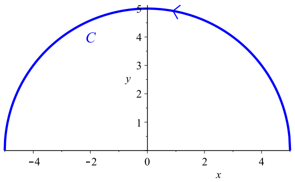
MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 2: Les intégrales curvilignes

Exemple 4: intégrale curviligne d'un champ vectoriel en deux dimensions

Exemple 4 : int. curviligne d'un champ en 2 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ $\vec{F}(x,y) = -x^2\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ le long du demi-cercle défini par $x^2 + y^2 = 25$, $y \geq 0$, parcouru du point $(5,0)$ au point $(-5,0)$.



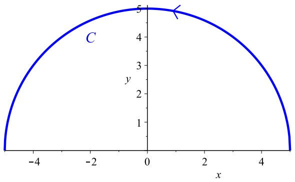
$$C : \vec{r}(t) = 5\cos t\,\vec{i} + 5\sin t\,\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\vec{r}(0) = 5\,\vec{i} \;\text{ et }\; \vec{r}(\pi) = -5\,\vec{i}$$

donc orientation correcte.

Exemple 4 : int. curviligne d'un champ en 2 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ $\vec{F}(x,y) = -x^2\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ le long du demi-cercle défini par $x^2 + y^2 = 25$, $y \geq 0$, parcouru du point $(5,0)$ au point $(-5,0)$.



$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= 5\cos t\,\vec{i} + 5\sin t\,\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi \\
\vec{r}\,'(t) &= -5\sin t\,\vec{i} + 5\cos t\,\vec{j} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= -25\cos^2 t\,\vec{i} + 5\sin t\,\vec{j} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) &= 125\cos^2 t\sin t + 25\cos t\sin t
\end{aligned}
$$

Exemple 4 : int. curviligne d'un champ en 2 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ $\vec{F}(x,y) = -x^2\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ le long du demi-cercle défini par $x^2 + y^2 = 25$, $y \geq 0$, parcouru du point $(5,0)$ au point $(-5,0)$.

$$\begin{aligned}
W &= \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\,dt \\
&= \int_0^{\pi} (125\cos^2 t \sin t + 25\cos t \sin t)\,dt \quad (u = \cos t, du = -\sin t\,dt) \\
&= -\int_1^{-1} (125u^2 + 25u)\,du \\
&= \int_{-1}^{1} (125u^2 + 25u)\,du = \frac{250}{3}.
\end{aligned}$$

Résumé

- Calcul du travail effectué par un champ vectoriel en deux dimensions.