MTH1102D Calcul II

Chapitre 6, section 1 : Les intégrales doubles sur des rectangles

Exemple 1 : Calcul d'une intégrale double à partir de la définition

Exemple : Calcul à partir de la définition

Soit la fonction $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ et le rectangle $R = [0, 3] \times [0, 4]$.

- On subdivise $[0, 3]$ et $[0, 4]$ en sous-intervalles égaux.

$\Delta x_i = (3 - 0)/n = 3/n$
$x_i = (3 - 0)i/n = 3i/n$
pour $i = 1, 2, \dots, n$

Exemple : Calcul à partir de la définition

Soit la fonction $f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$ et le rectangle $R = [0,3] \times [0,4]$.

- On subdivise $[0,3]$ et $[0,4]$ en sous-intervalles égaux.

$\Delta x_i = (3-0)/n = 3/n$
$x_i = (3-0)i/n = 3i/n$
pour $i = 1, 2, \ldots, n$

$\Delta y_j = (4-0)/m = 4/m$
$y_j = (4-0)j/m = 4j/m$
pour $j = 1, 2, \ldots, m$

Exemple : Calcul à partir de la définition

Soit la fonction $f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$ et le rectangle $R = [0,3] \times [0,4]$.

- On subdivise $[0,3]$ et $[0,4]$ en sous-intervalles égaux.
- On calcule l'aire de chaque sous-rectangle R_{ij}.

$\Delta x_i = (3-0)/n = 3/n$
$x_i = (3-0)i/n = 3i/n$
pour $i = 1, 2, \ldots, n$

$\Delta y_j = (4-0)/m = 4/m$
$y_j = (4-0)j/m = 4j/m$
pour $j = 1, 2, \ldots, m$

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j = \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{4}{m}\right) = \frac{12}{mn}$$

Exemple : Calcul à partir de la définition

Soit la fonction $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ et le rectangle $R = [0, 3] \times [0, 4]$.

- On subdivise $[0, 3]$ et $[0, 4]$ en sous-intervalles égaux.

$$\Delta x_i = (3 - 0)/n = 3/n$$
$$x_i = (3 - 0)i/n = 3i/n$$
pour $i = 1, 2, \ldots, n$
$$\Delta y_j = (4 - 0)/m = 4/m$$
$$y_j = (4 - 0)j/m = 4j/m$$
pour $j = 1, 2, \ldots, m$

- On calcule l'aire de chaque sous-rectangle R_{ij}.

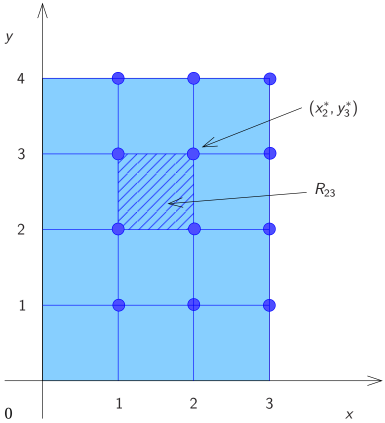
$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j = \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{4}{m}\right) = \frac{12}{mn}$$

- On choisit le coin supérieur droit de chaque R_{ij}.

$$(x_i^*, y_j^*) = (3i/n, 4j/m)$$

Exemple : Calcul à partir de la définition

Par exemple, si $n = 3$ et $m = 4$:



Exemple : Calcul à partir de la définition

Soit la fonction $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ et le rectangle $R = [0, 3] \times [0, 4]$.

$$
\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\, dA &= \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta A_{ij} \\
&= \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(3i/n, 4j/m) \frac{12}{mn} \\
&= \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(25 - (3i/n)^2 - (4j/m)^2\right) \frac{12}{mn} \\
&= \lim_{n,m\to\infty} \frac{12}{mn} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} 25 - \frac{9}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} i^2 - \frac{16}{m^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} j^2 \right].
\end{aligned}
$$

Exemple : Calcul à partir de la définition

Soit la fonction $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ et le rectangle $R = [0, 3] \times [0, 4]$.

À l'aide des formules

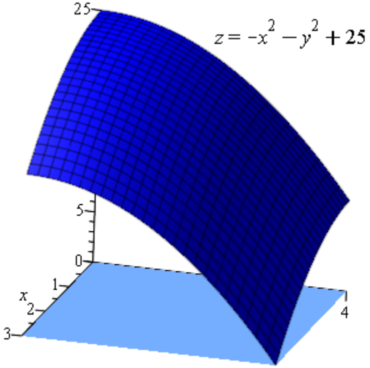
$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n, \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

on évalue la limite :

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x, y)\, dA &= \lim_{n,m\to\infty} \frac{12}{mn} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} 25 - \frac{9}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} i^2 - \frac{16}{m^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} j^2 \right] \\
&= \lim_{n,m\to\infty} 12 \left[25 - \frac{3(n+1)(2n+1)}{2n^2} - \frac{8(m+1)(2m+1)}{3m^2} \right] \\
&= 12 \left[25 - \frac{6}{2} - \frac{16}{3} \right] = 200.
\end{aligned}$$

Exemple : Calcul à partir de la définition

Puisque $f(x,y) \geq 0$ sur R, $\iint_R f(x,y)\,dA = 200$ est un volume.



Exemple : Calcul à partir de la définition

Approximation d'une intégrale

Si m, n sont finis alors

$$\iint_R f(x,y)\,dA \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\,\Delta A_{ij}.$$

Par exemple, $m = n = 2 \Rightarrow$

$$\iint_R f(x,y)\,dA \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(3i/2, 4i/2)\,\Delta A_{ij} = 112.5.$$

et $m = n = 100 \Rightarrow$

$$\iint_R f(x,y)\,dA \approx \sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{100} f(3i/100, 4i/100)\,\Delta A_{ij} = 198.495.$$

Résumé

- On peut calculer une intégrale double à partir de la définition si la fonction à intégrer est simple.
- Dans tous les cas, on peut utiliser la double somme de Riemann pour approximer la valeur de l'intégrale.