POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Questionnaire contrôle périodique

MTH1102/D/H

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)			
Nom : ALTURK	Prénom : Jean-Michel Altrurk		
Signature : Jean-Michel	Matricule : 2 0 0 8 1 3 5		Groupe : 05

Réservé	
Q1:	3 /9
Q2:	7 /8
Q3:	8,5 /10
Q4:	5,5 /8
Total:	24 /35

Sigle et titre du cours			
MTH1102(D) Calcul II			

Professeur	Groupe	Trimestre
Jean Guérin		H22

Jour	Date	Durée	Heures
Samedi	26 février	1h50	13h00 à 14h50

Documentation	Calculatrice	Outils électroniques
x Aucune ☐ Toute ☐ Voir directives particulières	☐ Aucune x Toutes	Les appareils électroniques personnels sont interdits.

Directives particulières

- **Le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons, veuillez le justifier puis passer à la question suivante.**
- **Un aide-mémoire de 2 pages est fourni à la fin du cahier.**
- **Il est strictement interdit de débrocher l'examen, sauf les 2 pages de l'aide-mémoire.**
- **IMPORTANT : inscrire votre matricule sur toutes les pages numérotées. Ne rien inscrire sur le verso des pages numérotées.**

Cet examen contient 4 questions sur un total de 16 pages
(incluant cette page, excluant les deux pages d'aide-mémoire).

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Matricule :

Question 1 [9 points]

Les sous-questions a) et b) sont indépendantes.

a) Évaluez l'intégrale suivante :

$$J_1 = \int_{1/2}^{1} \int_{1}^{1/y} x^3 e^{x^2 y}\, dx dy.$$

Cette intégrale représente-t-elle un volume ? Justifez votre réponse.

b) Évaluez l'intégrale suivante :

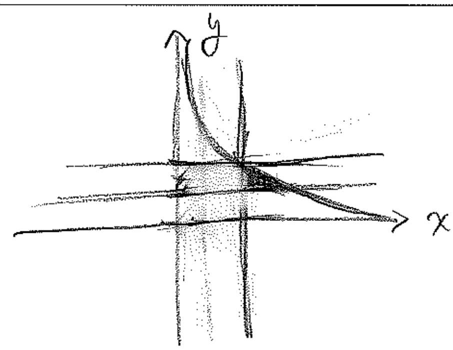
$$J_2 = \iint_D \left[10 + \frac{\sin(xy^2)}{y}\right] dA,$$

où D est le triangle de sommets $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ dans le plan.

Réponse :

a) change l'ordre d'intégration

$$\int_1^2 \int_{1/2}^{1/x} x^3 e^{x^2 y}\, dy\, dx$$



$u = x^2 y \to u = x^2 \cdot \frac{1}{x} \to u = x$

$du = x^2 dy \qquad u = \frac{x^2}{2}$

$x = 1/y$
$y = 1/x$

$$\int_1^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} x e^u\, du\, dx$$

$1 \le x \le 2$
$\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{x}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{x}$
$\frac{x}{2} = 1$
$x = 2$

$$\int_1^2 \left[x e^u\right]_{\frac{x^2}{2}}^{x} dx \to \int_1^2 \left[x e^x - x e^{\frac{x^2}{2}}\right] dx$$

$$\int_1^2 x e^x dx - \int_1^2 x e^{\frac{x^2}{2}} dx \qquad u = x^2/2, \quad du = x\, dx$$

3.0 / 3.5

$$\int_1^2 x e^x dx - \int_1^2 e^u du$$

$$\int_1^2 x e^x dx - \left[e^u\right]_1^2 \to \int_1^2 x e^x dx - \left[e^2 - e^{\frac{1}{2}}\right] = (\cancel{e^2} - 0) - (\cancel{e^2} - e^{1/2})$$

$= e^{1/2}$

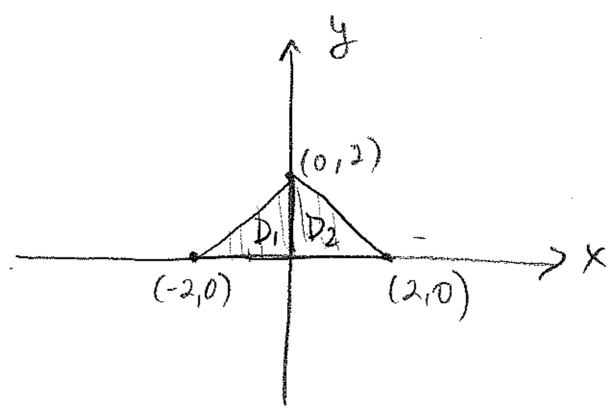
$\left[e^{x^2/2}\right]_1^2 \qquad (x-1)e^x\Big]_1^2 = e^2 - 0$

Oui ceci est un volume car $\boxed{J_1 = c^{te}}$

Non

0 / 1

$D_1 \rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq x+2 \end{cases}$



$D_2 \rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2-x \end{cases}$

$$\int_{-2}^{0}\int_{0}^{x+2}\left[10+\frac{\sin(xy^2)}{y}\right]dy\,dx + \int_{0}^{2}\int_{0}^{2-x}\left[10+\frac{\sin(xy^2)}{y}\right]dy\,dx$$

D_1 :

$$\cancel{\int_{-2}^{0}\int_{0}^{x+2}\left[10+\frac{\sin(xy^2)}{y}\right]dy\,dx}$$

$u = xy^2$
$du = 2xy\,dy$

$\frac{0}{4.5}$

Matricule :

Matricule :

7/8

Question 2 [8 points]

Calculez le volume de la région E de l'espace délimitée par les surfaces $z = 4 - x^2$, $z = 4 - y$, $y = 0$ et $z = 1$.

Réponse :

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{1}^{4-x^2} \int_{0}^{4-z} dy\, dz\, dx$$

7/7

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{1}^{4-x^2} \left[y \right]_0^{4-z} dz\, dx$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{1}^{4-x^2} (4-z)\, dz\, dx$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[4z - \frac{z^2}{2} \right]_1^{4-x^2} dx$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\left(4(4-x^2) - \frac{(4-x^2)^2}{2} \right) - \left(4 - \frac{1}{2} \right) \right] dx$$

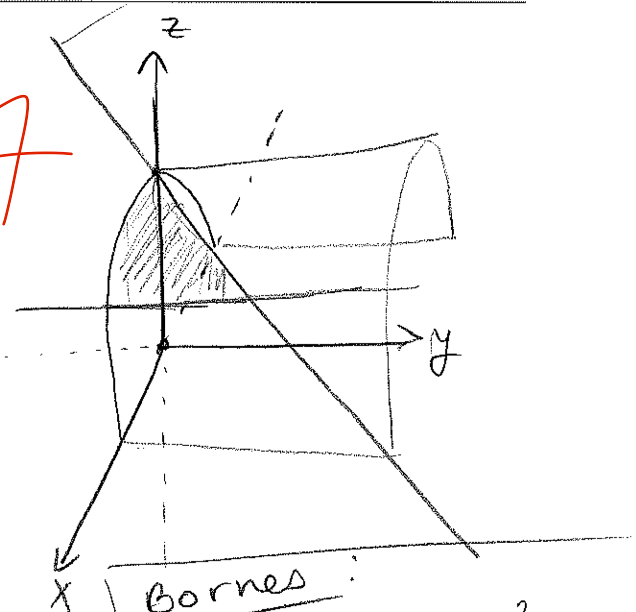
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\left(16 - 4x^2 - \frac{16 - 8x^2 + x^4}{2} \right) - \frac{7}{2} \right] dx$$

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[16 - 4x^2 - \frac{16}{2} - \frac{8x^2}{2} + \frac{x^4}{2} - \frac{7}{2} \right] dx$$

$$\left[16x - \frac{4x^3}{3} - 8x - 4x^2 + \frac{x^5}{10} - \frac{7}{2}x \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$\left[\frac{9}{2}x - \frac{4x^3}{3} - 4x^2 + \frac{x^5}{10} \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$\left[\frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{4(\sqrt{3})^3}{3} - 4(\sqrt{3})^2 + \frac{(\sqrt{3})^5}{10} \right] - \left[-\frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3}(-\sqrt{3})^3 - 4(-\sqrt{3})^2 + \frac{(-\sqrt{3})^5}{10} \right] \approx 4.85$$



Bornes :

$$\begin{cases} 1 \le z \le 4 - x^2 \\ 0 \le y \le 4 - z \\ -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3} \end{cases}$$

$z = 1$
$1 = 4 - x^2$
$-3 = -x^2$
$3 = x^2$
$\pm\sqrt{3} = x$

0/1

Matricule :

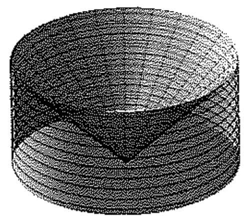
Matricule :

Matricule :

Question 3 [10 points]

8,5/10

Un solide de densité constante occupe la région E située entre le plan $z = 0$ et le cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, et « à l'intérieur » du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ (c'est-à-dire là où $x^2 + y^2 \leq 4$). La région E est représentée ci-dessous.



a) Exprimez la masse du solide comme une intégrale en coordonnées cylindriques. *On ne demande* **PAS** *d'évaluer cette intégrale.*

b) Exprimez la masse du solide comme une intégrale en coordonnées sphériques. *On ne demande* **PAS** *d'évaluer cette intégrale.*

c) La masse est $m = 16k\pi/3$, où k est la densité. Déterminez les coordonnées du centre de masse du solide. Justifiez soigneusement votre réponse.

Réponse :

a) cône : $z = \sqrt{x^2+y^2}$

$z = \sqrt{r^2}$

$z = \pm r$

cylindre : $x^2+y^2 = 4$

$r^2 = 4$

$r = \pm 2$

$K =$ densité

bornes :

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 2 \\ z \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\text{masse} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_z^2 K r \, dr \, dz \, d\theta$$

b) $z=0 \quad z=\sqrt{x^2+y^2} \quad x^2+y^2=4$

$z=\sqrt{x^2+y^2}$

$\rho\cos\varphi=\sqrt{(\rho\sin\varphi\cos\theta)^2+(\rho\sin\varphi\sin\theta)^2}$

$\rho\cos\varphi=\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$

$\rho\cos\varphi=\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi}$

$\rho\cos\varphi=\rho\sin\varphi$

$\cos\varphi=\sin\varphi$

$1=\tan\varphi$

$\frac{\pi}{4}=\varphi$

$z=0$

$\rho\cos\varphi=0$

$\cos\varphi=0$

$\varphi=\frac{\pi}{2}$

cylindre :

$x^2+y^2=4$

$(\rho\sin\varphi\cos\theta)^2+(\rho\sin\varphi\sin\theta)^2=4$

$\rho^2\sin^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=4$

$\rho^2\sin^2\varphi=4$

$\rho\sin\varphi=\pm 2$

$\sin\varphi=\frac{\pm 2}{\rho}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pm 2}{\rho}$

$\rho=\frac{\pm 2}{1}$

$\rho=\pm 2$

$\rho=\frac{2}{\sin(\varphi)}$

-0,5

$$\begin{cases} 0\le\rho\le \cancel{2} \\ \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

$$m=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{?}^{2} K\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

Matricule :

c) $\bar{X} = \bar{Y} = 0 \rightarrow$ forme symmétrique en x, y

2/1

-1

$$\bar{Z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_z^2 z \cdot K \cdot r\,dr\,dz\,d\theta}{\frac{16K\pi}{3}}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[zK\frac{r^2}{2}\right]_z^2 dz\,d\theta$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[zK2 - \frac{z^3K}{2}\right] dz\,d\theta}{m}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi}\left[z^2K - \frac{z^4K}{8}\,d\theta\right]_0^2 d\theta}{m}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi}\left[4K - 2K\right] d\theta}{m}$$

$$= \frac{\left(4K\theta - 2K\theta\right)\Big|_0^{2\pi} d\theta}{m}$$

$2K\theta \cdot 2\pi$

$$= \frac{\cancel{8}^{\,4}K\pi}{\frac{16K\pi}{3}} = \cancel{8K\pi}^{\,4} \cdot \frac{3}{\cancel{16K\pi}} = \frac{3}{\cancel{2}\,4}$$

$-0,25$

Centre de masse $= \left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$

Matricule :

Matricule :

5,5

Question 4 [8 points]

Les deux sous-questions suivantes sont indépendantes.

a) Soit C la courbe d'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 100$ et du paraboloïde hyperbolique $z = xy$. Donnez une paramétrisation de la droite tangente à C au point $P = (5\sqrt{3}, 5, 25\sqrt{3})$.

b) Soit Γ une courbe paramétrée dans le plan ayant la propriété que son vecteur position $\vec{r}(t)$ et son vecteur tangent $\vec{r}'(t)$ sont perpendiculaires pour tout t. Montrez que Γ est un cercle (ou une partie d'une cercle) centré à l'origine.

Réponse :

$z = t\sqrt{100-t^2}$

$\frac{4,5}{6}$ a) posons $x = t$

$t^2 + y^2 = 100$

$y = \sqrt{100-t^2}$

$$\begin{cases} x = t \longrightarrow 5\sqrt{3} = t \\ y = \pm\sqrt{100-t^2} \longrightarrow 5^2 = 100 - t^2 \rightarrow 25 - 100 = -t^2 \rightarrow 5\sqrt{3} = t \\ z = \pm t\sqrt{100-t^2} \end{cases}$$

$t \in ?$ $-0,5$

$t = 5\sqrt{3}$ ✓

$\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \sqrt{100-t^2}\,\vec{j} + t\sqrt{100-t^2}\,\vec{k}$ ✓

$\vec{r}'(t) = 1\,\vec{i} - \dfrac{t}{\sqrt{100-t^2}}\,\vec{j} + \left(\sqrt{100-t^2} - \dfrac{t^2}{\sqrt{100-t^2}}\right)\vec{k}$

$r'(5\sqrt{3}) = 1\,\vec{i} - \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{100-(5\sqrt{3})^2}}\,\vec{j} + \left(\sqrt{100-(5\sqrt{3})^2} - \dfrac{(5\sqrt{3})^2}{\sqrt{100-(5\sqrt{3})^2}}\right)\vec{k}$

\# $r'(5\sqrt{3}) = 1\,\vec{i} - \sqrt{3}\,\vec{j} - 10\,\vec{k}$ ✓

L'équation de la droite tangente est ? -1

Matricule :

1/2

b) $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$ ✓

$\Gamma \rightarrow y = \sqrt{x^2 + r^2}$

$y^2 = x^2 + r^2$

$r^2 = y^2 - x^2$

$\vec{r}(t) = -x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{r}\,'(t) = -x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = (x \cdot x')\vec{i} + (y \cdot y')\vec{j}$

$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y^2)$

$= \cancel{-x^2} + y^2 = C^{te}$

$= \cancel{-x^2} + y^2 = r^2$ Non

-1

$= \quad y^2 = x^2 + r^2$

$y = \pm\sqrt{x^2 + r^2} \rightarrow \Gamma$ est un cercle de centre

Matricule :

Matricule :

PAGE SUPPLÉMENTAIRE

Utilisez cette page en cas de besoin. Indiquez clairement le numéro de la question.

Matricule :

PAGE SUPPLÉMENTAIRE

Utilisez cette page en cas de besoin. Indiquez clairement le numéro de la question.