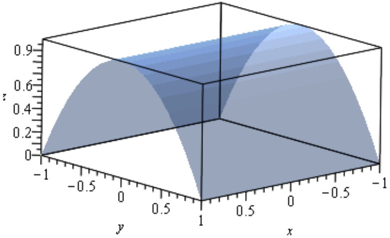
MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 1: Les intégrales triples

Exemple 3: calcul du centre de masse d'un solide

Exemple 3 : Calcul du centre de masse d'un solide

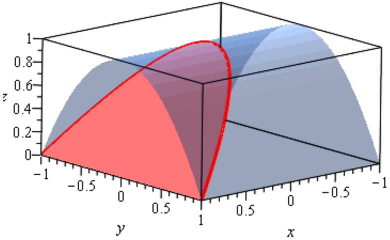
Soit E le solide délimité par le cylindre parabolique $z = 1 - y^2$ et les plans $z = 0, z = 1 - x$ et $z = 1 + x$. Déterminer le centre de masse de E si sa densité est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$.



Cylindre parabolique $z = 1 - y^2$

EExemple 3 : Calcul du centre de masse d'un solide

Soit E le solide délimité par le cylindre parabolique $z = 1 - y^2$ et les plans $z = 0, z = 1 - x$ et $z = 1 + x$. Déterminer le centre de masse de E si sa densité est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$.



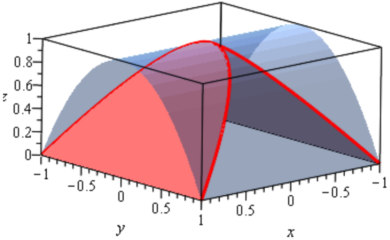
Intersection plan $z = 1 - x$ et cylindre :

$$1 - x = 1 - y^2 \Rightarrow x = y^2$$

(parabole)

Exemple 3 : Calcul du centre de masse d'un solide

Soit E le solide délimité par le cylindre parabolique $z = 1 - y^2$ et les plans $z = 0, z = 1 - x$ et $z = 1 + x$. Déterminer le centre de masse de E si sa densité est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$.



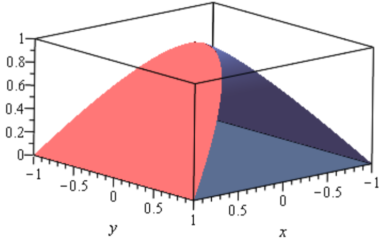
Intersection plan $z = 1 + x$ et cylindre :

$$1 + x = 1 - y^2 \Rightarrow x = -y^2$$

(parabole)

ExExemple 3 : Calcul du centre de masse d'un solide

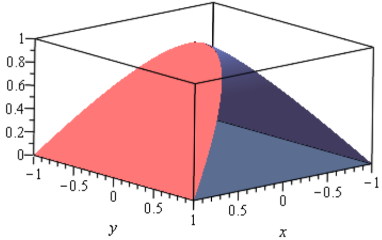
Soit E le solide délimité par le cylindre parabolique $z = 1 - y^2$ et les plans $z = 0, z = 1 - x$ et $z = 1 + x$. Déterminer le centre de masse de E si sa densité est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$.

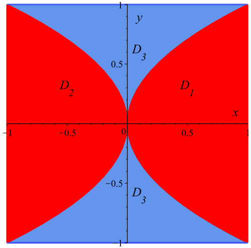


Le solide E

Exemple 3 : Calcul du centre de masse d'un solide

Soit E le solide délimité par le cylindre parabolique $z = 1 - y^2$ et les plans $z = 0, z = 1 - x$ et $z = 1 + x$. Déterminer le centre de masse de E si sa densité est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$.

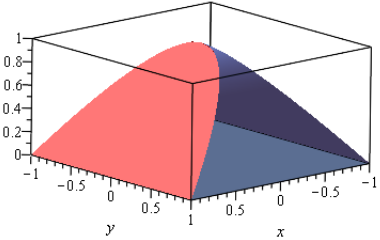


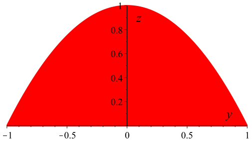


Projection dans le plan des (x, y) (type 1)

Exemple 3 : Calcul du centre de masse d'un solide

Soit E le solide délimité par le cylindre parabolique $z = 1 - y^2$ et les plans $z = 0, z = 1 - x$ et $z = 1 + x$. Déterminer le centre de masse de E si sa densité est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$.



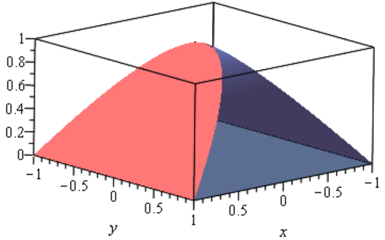


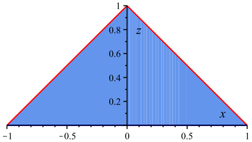
Projection dans le plan des (y, z) (type 2)

$$E = \left\{(x, y, z) \,|\, z - 1 \leq x \leq 1 - z, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - y^2\right\}$$

Exemple 3 : Calcul du centre de masse d'un solide

Soit E le solide délimité par le cylindre parabolique $z = 1 - y^2$ et les plans $z = 0, z = 1 - x$ et $z = 1 + x$. Déterminer le centre de masse de E si sa densité est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$.





Projection dans le plan des (x, z) (type 3)

$$E = \left\{(x, y, z) \,|\, z - 1 \leq x \leq 1 - z, -\sqrt{1-z} \leq y \leq \sqrt{1-z}, 0 \leq z \leq 1\right\}$$

Exemple 3 : Calcul du centre de masse d'un solide

Soit E le solide délimité par le cylindre parabolique $z = 1 - y^2$ et les plans $z = 0, z = 1 - x$ et $z = 1 + x$. Déterminer le centre de masse de E si sa densité est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$.

Type 2 :

$$E = \left\{(x, y, z) \,|\, z - 1 \leq x \leq 1 - z, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - y^2\right\}$$

distance de (x, y, z) au plan $z = 0$ est égale à z

densité : $\rho(x, y, z) = kz$

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-y^2} \int_{z-1}^{1-z} kz \, dxdzdy = \frac{16k}{35}$$

Exemple 3 : Calcul du centre de masse d'un solide

Soit E le solide délimité par le cylindre parabolique $z = 1 - y^2$ et les plans $z = 0, z = 1 - x$ et $z = 1 + x$. Déterminer le centre de masse de E si sa densité est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$.

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho(x, y, z)\, dV = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-y^2} \int_{z-1}^{1-z} kz^2 \, dxdzdy = \frac{64k}{315}$$

donc

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{64k/315}{16k/35} = \frac{4}{9}.$$

Exemple 3 : Calcul du centre de masse d'un solide

Soit E le solide délimité par le cylindre parabolique $z = 1 - y^2$ et les plans $z = 0, z = 1 - x$ et $z = 1 + x$. Déterminer le centre de masse de E si sa densité est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$.

E est symétrique en x et en y (par rapport aux plans $x = 0$ et $y = 0$)

$x\rho(x, y, z) = kxz$ est impaire en x et $y\rho(x, y, z) = kyz$ est impaire en y

donc

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_E x\rho(x, y, z)\, dV = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = 0 \\ M_{xz} &= \iiint_E y\rho(x, y, z)\, dV = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = 0. \end{aligned}$$

Exemple 3 : Calcul du centre de masse d'un solide

Soit E le solide délimité par le cylindre parabolique $z = 1 - y^2$ et les plans $z = 0, z = 1 - x$ et $z = 1 + x$. Déterminer le centre de masse de E si sa densité est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$.

Conclusion : le centre de masse est situé en $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 4/9)$

Résumé

- Comment représenter un solide dans l'espace et choisir une description appropriée (type 1, 2 ou 3).
- Calcul du centre de masse d'un solide.
- Utilisation de la symétrie pour réduire les calculs.