Sigle et titre du cours	Groupe	Trimestre
MTH1102 – Calcul II	TOUS	Été court 2019
Professeur	**Local**	**Téléphone**
Jean Guérin	A-520.23	4098

Jour	Date	Durée	Heures
Vendredi	24 mai 2019	2h00	10h00-12h00

Documentation	Calculatrice	
☒ Aucune	☐ Aucune	Les cellulaires, agendas électroniques ou téléavertisseurs sont interdits.
☐ Toute	☐ Toutes	
☐ Voir directives particulières	☒ Non programmable	

2. 3	/8
3. 12	/12
4. 10	/10
TOTAL	
35	/40

Directives particulières

Important

Cet examen contient 4 questions sur un total de 14 pages
(excluant cette page)

La pondération de cet examen est de 40 %

Vous devez répondre sur : ☒ le questionnaire ☐ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☒ oui ☐ non

Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons (données manquantes, données erronées, etc.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) puis passez à la question suivante.

Contrôle périodique

MTH1102

Réservé

Polytechnique Montréal
Département de mathématiques et de génie industriel
Calcul II - MTH1102
Contrôle périodique - Été 2019 - Trimestre court

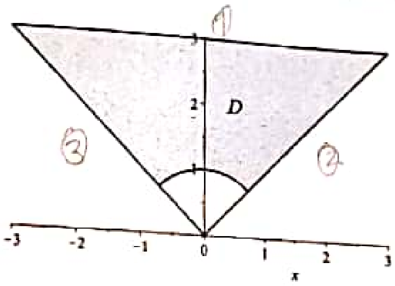
Question 1 [10 points]

Évaluez les intégrales suivantes. Vous devez donner une réponse exacte simplifiée (et non une approximation décimale).

a) $J_1 = \int_0^1 \int_{2y}^2 x^2 \cos(xy)\, dx dy.$

b) $J_2 = \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA,$

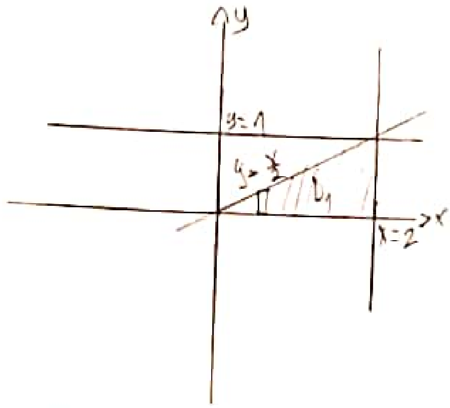
où D est la région du plan située à l'intérieur du triangle de sommets $(0,0)$, $(-3,3)$ et $(3,3)$, et à l'extérieur du cercle $x^2+y^2=1$. La région D est illustrée ci-dessous.



Réponse :

a) $J_1 = \int_0^1 \int_{2y}^2 x^2 \cos(xy)\, dx\, dy$

Traçons le domaine



$0 \le y \le 1$
$2y \le x \le 2$

changeons le domaine de notre projection pour avoir des éléments verticaux

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \frac{x}{2} \end{array}}$

$$J_1 = \int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} x^2 \cos(xy)\, dy\, dx$$

$$\Rightarrow x^2 \int_0^2 \left[\frac{1}{x}\sin(xy)\right]_0^{\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int_0^2 x \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \left[-\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= -\cos(2) + \cos(0) \\ &= 1 - \cos(2) \approx 1{,}416 \text{ rad} \end{aligned}}$$

4

4

b) $J_2 = \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA$

D'abord cherchons les équations des côtés du triangle:

① $y = 3$

② $y = mx + p \qquad m = \frac{3-0}{3-0} = 1$

$y = x$

③ $y = -x$

Convertisons nos donnée en coordonnée polaire

équation du cercle

$x^2+y^2=1$

$r^2\cos\theta^2 + r^2\sin\theta^2 = 1$

$r^2 = 1$

$r = 1$

① $r\sin\theta = 3$

$r = \frac{3}{\sin\theta}$

② $r\sin\theta = r\cos\theta$

$\tan\theta = 1$

③ $r\sin\theta = -r\cos\theta$

$\tan\theta = -1$

équation du solide:

$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2\cos\theta^2 + r^2\sin\theta^2}}$

$= \frac{\cancel{r}\sin\theta}{\cancel{r}}$

$= \sin\theta$

$1 \leq r \leq \frac{3}{\sin\theta}$

$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$

$\arctan(1) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$ ou $\frac{-\pi}{4}$

$\arctan(-1) = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$ ou $\frac{5\pi}{4}$

car graphique dans 1er et 2ème cadrant

$$J_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{1}^{\frac{3}{\sin\theta}} \sin\theta\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \sin\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{\frac{3}{\sin\theta}} d\theta$$

$$= \sin\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{9}{2\sin\theta^2} - \frac{1}{2}\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{9}{2\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \left[\frac{9}{2}\left(\ln(|\csc(\theta) - \cot(\theta)|)\right) + \frac{\cos\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \frac{9}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}+1\right)\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{9}{2}\left(\ln(\sqrt{2}-1)\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{= \frac{9}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{9}{2}\ln(\sqrt{2}-1) - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Formule d'intégration parce csc manquante

$\frac{6}{6}$

Scanned by CamScanner

1.

Polytechnique Montréal
Département de mathématiques et de génie industriel
Calcul II - MTH1102
Contrôle périodique - Été 2019 - Trimestre court

Question 2 [8 points]

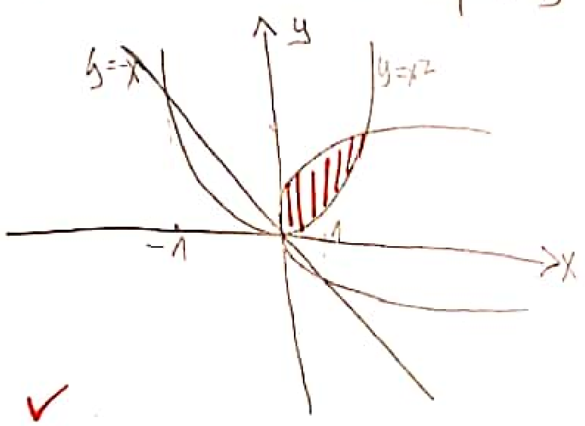
Calculez le volume de la région E de l'espace bornée par les surfaces $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 0$ et $z = x + y$.

$y=1$ $x=x^2$ $x=1$ $y=y^4$ $1=y^3$

$x=-y$

Réponse :

Dessinons la représentation du domaine dans le plans xy



$\Rightarrow 0 \le z \le x+y$ ✓

$-x \le y \le 1$

$-1 \le x \le 1$

$$J_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-x}^{1}\int_{0}^{x+y} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-x}^{1}\Big[z\Big]_{0}^{x+y} dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-x}^{1} x+y \; dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[y+\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{1} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 1+\frac{1^2}{2}+x-\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{3x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \boxed{\frac{3}{10}u^3}$$

$\frac{3}{8}$

Question 3 [12 points]

Un solide B a la forme de la région de l'espace située au-dessus du cône $\boxed{z = \sqrt{x^2 + y^2}}$ et à l'intérieur de la sphère $\boxed{x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4}$. La densité de ce solide est proportionnelle à la distance à l'origine. Le solide B est représenté ci-dessous.

a) Décrivez la région B d'abord en coordonnées cylindriques, puis en coordonnées sphériques.

b) Calculez la masse du solide B en utilisant le système de coordonnées de votre choix. Simplifiez votre réponse.

c) Déterminez le centre de masse du solide en justifiant soigneusement votre réponse. Répondez ensuite à la question suivante : le centre de masse est-il situé au-dessus ou en dessous du plan équatorial de la sphère (c'est-à-dire le plan $z = 2$) ?

Vous devez donner d'abord une réponse exacte pour le centre de masse, mais vous pouvez utiliser une approximation décimale pour répondre à la question.

Réponse :

a) ① transformons les équations en cylindrique.

Cone: $Z = \sqrt{r^2\cos\theta^2 + r^2\sin\theta^2}$

$Z = \sqrt{r^2}$

$Z = |r|$

Sphère: $r^2\cos\theta^2 + r^2\sin\theta^2 + (z-2)^2 = 4$

$r^2 + (z-2)^2 = 4$

$(z-2)^2 = 4 - r^2$

$(z-2) = \pm\sqrt{4-r^2}$

$z = \pm\sqrt{4-r^2} + 2$

équation de la densité

$\rho(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$= k\sqrt{r^2\cos\theta^2 + r^2\sin\theta^2 + z^2}$

$= k\sqrt{r^2+z^2}$

$\Rightarrow$ cherchons la variation de r

$r^2 + (r-2)^2 = 4$

$r^2 + r^2 - 4r + 4 = 4$

$2r^2 - 4r = 0$

$2r(r-2) = 0$

$r = 0$ ou $r - 2 = 0$

$r = 2$

$\boxed{D : \{ P(r,\theta,z) ;\ 0 \le r \le 2 ;\ 0 \le \theta \le 2\pi ;\ r \le z \le \sqrt{4-r^2} + 2}$

$\frac{2}{2}$

Scanned by CamScanner

(2) transformons les équations en sphériques

Cone : $\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2\sin\phi^2\cos\theta^2 + \rho^2\sin\phi^2\sin\theta^2}$

$\rho\cos\phi = |\rho\sin\phi|$

$\cos\phi = \sin\phi$

$\tan\phi = 1$

$\phi = \boxed{\frac{\pi}{4}}$ ou $\frac{3\pi}{4}$

car $z \geq 0$

Sphère : $\rho^2\sin\phi^2\cos\theta^2 + \rho^2\sin\phi^2\sin\theta^2 + (\rho\cos\phi - 2)^2 = 4$

$\Rightarrow \rho^2\sin\phi^2 + \rho^2\cos\phi^2 - 4\rho\cos\phi + 4 = 4$

$\Rightarrow \rho^2 = 4\rho\cos\phi$

$\rho = 4\cos\phi$

Equation de la densité

$p(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$= k\sqrt{\rho^2\sin\phi^2\cos\theta^2 + \rho^2\sin\phi^2\sin\theta^2 + \rho^2\cos\phi^2}$

$= k\sqrt{\rho^2}$

$= k|\rho|$

$D : \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \rho \leq 4\cos\phi ;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi ;\ 0 \leq \phi$

$$J_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_r^{\sqrt{4-r^2}+2} k\sqrt{z^2+r^2}\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^{4\cos\phi} k\rho \times \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

2.0 / 2

b) $$m = k\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^{4\cos\phi} \rho^3 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$= k\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{4\cos\phi} \sin\phi \, d\theta \, d\phi$$

$$= k\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi} 64\cos(\phi)^4 \sin(\phi) \, d\theta \, d\phi$$

$$= k\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\theta\right] 64\cos(\phi)^4 \sin(\phi) \, d\phi$$

$$= k\int_0^{\frac{\pi}{4}} 128\pi \cos(\phi)^4 \sin(\phi) \, d\phi$$

$$= k\left[\frac{-\cos(\phi)^5}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} 128\pi$$

$$m = k\left(\frac{-4\sqrt{2}}{160} + \frac{1}{5}\right)128\pi$$

$$= 128\pi k\left(\frac{160 - 20\sqrt{2}}{800}\right)$$

$$= 128\pi k\left(\frac{8-\sqrt{2}}{40}\right)$$

$$= \boxed{16\pi k\left(\frac{2-\sqrt{2}}{5}\right)}$$

$\frac{3.0}{3}$

c) Cherchons le centre de masse en $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_{E} x \cdot k\sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dV$$

...ons si la fonction est pair ou impaire

$$f(-x;y;z) = -x\,k\sqrt{(-x)^2+y^2+z^2}$$
$$= -x\,k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$\Rightarrow$ la fonction par rapport à x est impaire et puisque notre solide est homogène, alors il ... une symétrie par rapport à yz

$\Rightarrow$ la coordonnée du centre de masse $\bar{X} = 0$

la fonction par rapport à y est impaire et puisque le solide est homogène. Il y a donc une symétrie de la figure par rapport à XZ

voyon par y

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_D y \cdot k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV$$

1.0/1

Effectuons un test de parité

$$F(x;-y;z) = -y\, k\sqrt{x^2+(-y)^2+z^2}$$
$$= -y\, k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{m} k \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^{4\cos\phi} Z \rho^3 \sin\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{1}{m} k \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^{4\cos\phi} \rho \cos\phi\, \rho^3 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{1}{m} k \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{4\cos\phi} \cos\phi \sin\phi\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{1}{m} k \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \frac{1024}{5} \cos\phi^5 \cos\phi \sin\phi\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{1}{m} k \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\theta\right]_0^{2\pi} \cos\phi^6 \sin\phi \times \frac{1024}{5}\, d\phi$$

$$= \frac{1}{m} k \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos\phi^6 \sin\phi \cdot \frac{2048\pi}{5}\right) d\phi$$

$$= \frac{1}{m} k \left[\frac{-\cos(\phi)^7}{7}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2048\pi}{5}$$

$$= \frac{1}{m} k \left(\frac{-8\sqrt{2}}{896} + \frac{1}{7}\right)$$

$$= \frac{2048\pi k}{5m}\left(\frac{-\sqrt{2}}{112} + \frac{1}{7}\right) = \boxed{\frac{2048\pi k}{m}\left(\frac{112-7\sqrt{2}}{784}\right) = \frac{128 k}{m}\left(\frac{16-\sqrt{2}}{7}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{Z} = \frac{128\pi k \frac{16-\sqrt{2}}{7}}{16\pi k\left(\frac{8-\sqrt{2}}{5}\right) \times 5} \qquad \bar{Z} = 2{,}931 \text{ il se trouve juste au dessus du plan équatorial}}$$

1.0/1

3/3

Question 4 [10 points]

Soit C_1 la courbe paramétrée par

$$\vec{r}_1(t) = 2\cos(t)\,\vec{i} + 2\sin(t)\,\vec{j} + 2\sin(2t)\,\vec{k},\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

et C_2 la courbe paramétrée par

$$\vec{r}_2(t) = 2\cos(t)\,\vec{i} + 2\sin(t)\,\vec{j} + \sqrt{3}\,\vec{k},\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a) Montrez que les courbes C_1 et C_2 sont situées sur un même cylindre. Donnez l'équation cartésienne et le rayon de ce cylindre.

b) Donnez les équations paramétriques de la droite tangente à la première courbe, C_1, au point $P = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$.

c) Montrez que le point P appartient aussi à la deuxième courbe, C_2, puis répondez à la question suivante : les deux courbes se coupent-elles à angle droit au point P ?

Réponse :

a) Equation d'un cylindre : $x^2+y^2=a$ $a>0$

C_1 : $2^2\cos(t)^2 + 2^2\sin(t)^2$

$4\cos(t)^2+4\sin(t)^2 = 4$

C_2 : $2^2\cos(t)^2 + 2\sin(t)^2$

$= 4\cos(t)^2 + 4\sin(t)^2 = 4$

- puisque C_1 et C_2 on la même constante 4 à la fin et donc de rayon 2 et sont tous les deux centrés en $(0;0;z)$

$\Rightarrow$ il se trouve sur le même cylindre d'équation $x^2+y^2=4$

2/2

b) $x_1 = 2\cos(t)$ $\Rightarrow$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(t)$ $t = \frac{\pi}{6}$ ou $-\frac{\pi}{6}$

$y_1 = 2\sin(t)$ $\frac{1}{2} = \sin(t)$ $t = \frac{\pi}{6}$

$z_1 = 2\sin(2t)$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(2t)$ $t = \frac{\pi}{6}$

b) $x_1' = -2\sin(t)$ $\Rightarrow r_1'(t) = -2\sin(t)i + 2\cos(t)j + 4\cos(2t)\vec{k}$

$y_1' = 2\cos(t)$ $\quad r_1'(\frac{\pi}{6}) = -1i + \sqrt{3}j + 2\vec{k}$

$z_1' = 4\cos(2t)$

Equation paramétrique de ma droite:

$$\boxed{\begin{cases} x_T = \sqrt{3} - t \\ y_T = 1 + \sqrt{3}t \\ z_T = \sqrt{3} + 2t \end{cases}}$$

$r_1'(\frac{\pi}{6})$ est notre vecteur directeur

5/5

c) $\sqrt{3} = 2\cos(t) \Rightarrow t = \boxed{\frac{\pi}{6}}$ ou $-\frac{\pi}{6}$ $\quad$ oui le point $P \in C_2$

$1 = 2\sin(t) \quad t = \boxed{\frac{\pi}{6}}$

$\sqrt{3} = \sqrt{3}$

pour savoir il faut que $r_1'(t) \cdot r_2'(t) = 0$

cherchons $r_2'(t)$ $\Rightarrow r_2'(t) = -2\sin(t)i + 2\cos(t)j + 0$

$r_2'(\frac{\pi}{6}) = -1i + \sqrt{3}j + 0$

$x_2' = -2\sin(t)$

$y_2' = 2\cos(t)$

$z_2' = 0$

Faisons le produit scalaire des deux entités

3/3

$r_1'(\frac{\pi}{6}) \cdot r_2'(\frac{\pi}{6}) = -1 \times -1 + \sqrt{3} \times \sqrt{3} + 0 \times 2$

$= 2 + 3 = 5$

leur produit scalaire n'est pas nul donc ils ne sont pas perpendiculaires au point P