MTH1102D Calcul II

Chapitre 8, section 2: Les dérivées et les intégrales des fonctions vectorielles

Exemple 2: droite tangente à une courbe

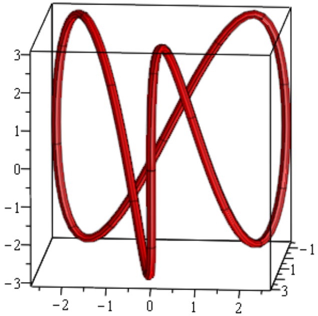
Exemple 2 : droite tangente à une courbe

Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = [2\cos t + \cos 2t]\vec{i} + [2\sin t - \sin 2t]\vec{j} + 3\sin 3t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a) Trouver tous les points de C où la tangente est horizontale.

b) Trouver les équations paramétriques de la droite tangente en l'un de ces points.



Exemple 2 : droite tangente à une courbe

Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = [2\cos t + \cos 2t]\vec{i} + [2\sin t - \sin 2t]\vec{j} + 3\sin 3t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a) Trouver tous les points de C où la tangente est horizontale.

b) Trouver les équations paramétriques de la droite tangente en l'un de ces points.

- Vecteur tangent :

$$\vec{r}\,'(t) = [-2\sin t - 2\sin 2t]\vec{i} + [2\cos t - 2\cos 2t]\vec{j} + 9\cos 3t\,\vec{k}$$

- Tangente horizontale :

$$\begin{aligned} & 9\cos 3t = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \cos 3t = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 3t = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, 7\pi/2, 9\pi/2 \text{ ou } 11\pi/2 \;\text{ si } t \in [0, 2\pi] \\ \Leftrightarrow \quad & t = \pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 7\pi/6, 3\pi/2, \text{ ou } 11\pi/6 \end{aligned}$$

Exemple 2 : droite tangente à une courbe

Points correspondants :

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(\pi/6) &= \left[\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right]\vec{i}+\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\vec{j}+3\vec{k}\\
\vec{r}(\pi/2) &= -\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\\
\vec{r}(5\pi/6) &= \left[-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right]\vec{i}+\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\vec{j}+3\vec{k}\\
\vec{r}(7\pi/6) &= \left[-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right]\vec{i}+\left[-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\vec{j}-3\vec{k}\\
\vec{r}(3\pi/2) &= -\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}\\
\vec{r}(11\pi/6) &= \left[\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right]\vec{i}+\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\vec{j}-3\vec{k}
\end{aligned}
$$

Exemple 2 : droite tangente à une courbe

Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = [2\cos t + \cos 2t]\vec{i} + [2\sin t - \sin 2t]\vec{j} + 3\sin 3t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a) Trouver tous les points de C où la tangente est horizontale.

b) Trouver les équations paramétriques de la droite tangente en l'un de ces points.

Trouvons la tangente au deuxième de ces points (correspond à $t = \pi/2$) :

- Point : $(-1, 2, -3)$
- Vecteur directeur :

$$\begin{aligned}\vec{r}\,'(\pi/2) &= [-2\sin(\pi/2) - 2\sin(2\pi/2)]\vec{i} \\ &\quad +[2\cos(\pi/2) - 2\cos(2\pi/2)]\,\vec{j} \\ &\quad +9\cos(3\pi/2)\,\vec{k} \\ &= -2\vec{i} + 2\vec{j}.\end{aligned}$$

Exemple 2 : droite tangente à une courbe

Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = [2\cos t + \cos 2t]\vec{i} + [2\sin t - \sin 2t]\vec{j} + 3\sin 3t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a) Trouver tous les points de C où la tangente est horizontale.

b) Trouver les équations paramétriques de la droite tangente en l'un de ces points.

- Équations paramétriques de la droite tangente :

$$D : \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ou encore :

$$D : \vec{R}(t) = (-1 - 2t)\vec{i} + (2 + 2t)\vec{j} - 3\vec{k}$$

Exemple 2 : droite tangente à une courbe

En deux dimensions :

- Tangente horizontale : $y'(t) = 0$
- Tangente verticale : $x'(t) = 0$

En trois dimensions :

- Tangente horizontale : $z'(t) = 0$
- Tangente verticale : $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$

Résumé

- Droite tangente à une courbe paramétrée.
- Conditions géométriques sur la droite tangente.