Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH1102D - Calcul II
Été 2023

Devoir 4

Nom : ______________________ **Prénom :** ______________________

Matricule : ____________________ **Groupe :** 01

Question corrigée	Autres questions	Total
6	4	10 /10

#1 Coordonnées cylindriques

6

a)

$$J_1 = \iiint_E z(x^2+y^2)^2 \, dV$$

Bornée par : cylindre circulaire → $x^2+y^2=4$
cylindre parabolique → $z=-2-2x^2$
paraboloïde → $z = 2+2x^2+2y^2$

r : distance du point au point d'origine selon axe z
($r \geq 0$)

θ : angle entre le plan xy et le segment de ligne reliant le point au point d'origine
($0 \leq \theta \leq 2\pi$)

z : hauteur du point par rapport au plan xy

- $x^2+y^2 = 4$ On sait que $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4}$ $r = 2$

$r=2$ (distance du point à l'axe z) $\Rightarrow 0 \leq r \leq 2$

- $z = -2-2x^2$

$$z = -2-2(r\cos(\theta))^2$$
$$= -2-2(r^2\cos^2(\theta))$$
$$= -2-2r^2\cos^2(\theta)$$

- $z = 2+2x^2+2y^2$

$$= 2+2(r^2\cos^2(\theta))+2(r^2\sin^2(\theta))$$
$$= 2+2r^2\cos^2(\theta)+2r^2\sin^2(\theta)$$
$$= 2+2r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))$$
$$= 2+2r^2$$

On sait que $E=\{(r,\theta,z) \mid r_1 \le r \le r_2,\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2,\ z_1 \le z \le z_2\}$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2}\int_{z_1}^{z_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$E=\{(r,\theta,z) \mid 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -2-2r^2\cos^2\theta \le z \le 2+2r^2\}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{-2-2r^2\cos^2\theta}^{2+2r^2} z\, r^4\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{-2-2r^2\cos^2\theta}^{2+2r^2} z\, r^5\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left[\frac{z^2}{2} r^5\right]_{-2-2r^2\cos\theta}^{2+2r^2} dr\,d\theta$$

$$= r^5\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left[\left(\frac{(2+2r^2)^2-(-2-2r^2\cos\theta)}{2}\right) dr\,d\theta\right.$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} 2r^7\left(-r^2\cos^4(\theta)-2\cos^2(\theta)+r^2+2\right) dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{2} 2r^7\left(-r^2\cos^4(\theta)-2\cos^2(\theta)+r^2+2\right) dr$$

$$= 2\int_0^{2} 2r^7 + r^7r^2 - 2r^7\cos^2(\theta) - r^7r^2\cos^4(\theta)\,dr$$

$$= 2\int_0^{2} 2r^7 + r^9 - 2r^7\cos^2(\theta) - r^9\cos^4(\theta)\,dr$$

$$= 2\left[\int_0^{2} 2r^7\,dr + \int_0^{2} r^9 - \int_0^{2} 2r^7\cos^2(\theta) - \int_0^{2} r^9\cos^4(\theta)\,dr\right]$$

$$= 2\left[\left[\frac{r^8}{8}\right]_0^2 + \left[\frac{r^{10}}{10}\right]_0^2 - 2\cos^2(\theta)\left[\frac{r^8}{8}\right]_0^2 - \cos^4(\theta)\left[\frac{r^{10}}{10}\right]_0^2\right]$$

$$= 2\left[64 + \frac{512}{5} - 64\cos^2(\theta) - \frac{512}{5}\cos^4(\theta)\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} 2\left(64 + \frac{512}{5} - 64\cos^2(\theta) - \frac{512}{5}\cos^4(\theta)\right)d\theta$$

$$= 2\left[\int_0^{2\pi} 64\,d\theta + \int_0^{2\pi}\frac{512}{5}\,d\theta - 64\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\,d\theta - \frac{512}{5}\int_0^{2\pi}\underbrace{\cos^4(\theta)\,d\theta}_{\cos^3(\theta)\cos(\theta)}\right]$$

$$= 2\left[\left[64\theta\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{512}{5}\theta\right]_0^{2\pi} \underbrace{- \frac{64}{2}\int_0^{2\pi} 1\,d\theta + \int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,d\theta}_{-\frac{64}{2}\left(2\pi + \quad\right)} - \frac{512}{5}\int\right.$$

$u = \cos^3(\theta)$

$v' = \cos(\theta)$

$u' = -3\cos^2\theta\sin\theta$

$v = \int\cos\theta\,d\theta = \sin\theta$

Voin sin

$*$

$u = 2\theta$

$du = 2\,d\theta$

$\frac{du}{2} = d\theta$

$\theta = 0 \quad u = 0$

$\theta = 2\pi \quad u = 4\pi$

$$= \int_0^{4\pi}\cos(u)\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(u)\right]_0^{4\pi}$$

$$= 0$$

$$-\frac{512}{5}\left[\cos^3\theta\sin\theta - \int\left(-3\cos^2\theta\sin\theta\right)\sin(\theta)\,d\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$-\frac{512}{5}\left[\cos^3\theta\sin\theta - \left(\frac{-3}{8}\left(\theta - \frac{1}{4}\sin(4\theta)\right)\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$-\frac{512}{5}\left[\frac{1}{32}\left(32\cos^3\theta\sin\theta + 3(4\theta - \sin 4\theta)\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= 2\left[128\pi + \frac{1024\pi}{5} - \frac{64}{2}(2\pi + 0) - \frac{512}{5}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

3|3

$$= 2\left[128\pi + \frac{1024\pi}{5} - 64\pi - \frac{384\pi}{5}\right]$$

$$256\pi + \frac{2048\pi}{5} - 128\pi - \frac{768}{5}\pi$$

$$128\pi + \frac{1280}{5}\pi = 128\pi + 256\pi = \boxed{384\pi}$$

(*) $-\frac{512}{5}\int_0^{2\pi} \cos^3(\theta)\cos(\theta)\,d\theta$ Intégration par parties

$u = \cos^3\theta$

$v' = \cos\theta$

$u' = -3\cos^2\theta\sin\theta$

$\frac{d(\cos^3(\theta))}{d\theta}$

$3(\cos\theta)^2\frac{d(\cos\theta)}{d\theta}$

$\frac{d}{d\theta}(\cos^3(\theta))$

$f = u^3 \quad u = \cos\theta$

$\frac{d(u^3)}{du}\frac{d(\cos\theta)}{d\theta}$

$\frac{d(u^3)}{du} = 3u^2$

$= 3u^2\frac{d(\cos\theta)}{d\theta} \quad u = \cos\theta$

$= -3\cos^2\theta\sin\theta$

$v = \int\cos\theta\,d\theta = \sin\theta$

$= \left[\cos^3\theta\sin\theta - \int(-3\cos^2\theta\sin\theta)\sin\theta\,d\theta\right]_0^{2\pi}$

$= \left[\cos^3\theta\sin\theta - \int -3\cos^2(\theta)\sin\theta\sin\theta\,d\theta\right]_0^{2\pi}$

$= \left[\cos^3\theta\sin\theta - \int -3\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta\right]_0^{2\pi}$

$= -\frac{512}{5}\left[\cos^3\theta\sin\theta - \underbrace{\int -3\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta}\right]_0^{2\pi}$

$= -3\int\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta$

$= -3\int\frac{1-\cos(4\theta)}{8}\,d\theta$

$$= -3 \cdot \frac{1}{8}\left(\int 1 d\theta - \int \cos(4\theta) d\theta \right.$$

$$= \frac{-3}{8}\left(\theta - \frac{1}{4}\sin(4\theta) \right)$$

$$= \frac{-512}{5}\left[\cos^3(\theta)\sin(\theta) - \left(-\frac{3}{8}\left(\theta - \frac{1}{4}\sin(4\theta) \right) \right) \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{-512}{5}\left[\cos^3\theta \sin\theta + \frac{3}{8}\left(\theta - \frac{1}{4}\sin(4\theta) \right) \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{-512}{5}\left[\frac{32\cos^3\theta \sin\theta + 3(4\theta - \sin(4\theta))}{32} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{-512}{5}\left[\frac{1}{32}\left(\cos^3(\theta)\sin(\theta)\cdot 32 + (\theta \cdot 4 - \sin(4\theta))\cdot 3 \right) \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{-512}{5}\left[\frac{1}{32}\left(32\cos^3\theta \sin\theta + 3(4\theta - \sin(4\theta)) \right) \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{-512}{5} \cdot \frac{3\pi}{4}$$

$$= \frac{-384\pi}{5}$$

b) Volume?

Hyperboloïde $x^2+y^2-z^2=1$ et plans $z=1$
$z=-1$

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z=z \quad r \geq 0$
$x^2+y^2=r^2$

- $x^2+y^2-z^2=1$

$(r^2\cos^2\theta)+(r^2\sin^2\theta)-z^2=1$

$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-z^2=1$

$r^2-z^2=1$
$r^2-1=z^2$

- plans $z=1$ et $z=-1$ délimitent la région verticalement

$\rightarrow \theta: \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$
$\rightarrow z: \quad -1 \leq z \leq 1$

$\rightarrow r^2-1=z^2$
$r^2=z^2+1$
$r=\sqrt{z^2+1}$ Les plans $z=\pm 1$ vont couper l'hyperboloïde, formant 2 cercles.
Donc, r va varier de 0 à $\sqrt{z^2+1}$ (car $r \geq 0$)

$r: \quad 0 \leq r \leq \sqrt{z^2+1}$

$E = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{z^2+1},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -1 \leq z \leq 1\}$

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{z^2+1}} r \, dr\, dz\, d\theta$$

étape 1 $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{\sqrt{z^2+1}} r\,dr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{z^2+1}} = \frac{(\sqrt{z^2+1})^2-0}{2} = \frac{z^2+1}{2}$

étape 2

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{z^2+1}{2}\, dz = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} z^2 dz + \int_{-1}^{1} 1 dz\right) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{z^3}{3} + z\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + 2\right) = \frac{4}{3}$$

étape 3

$$\Rightarrow \int_{0}^{2\pi} \frac{4}{3}\, d\theta = \frac{4}{3}\int_{0}^{\pi} d\theta = \frac{4}{3}\left[\theta\right]_{0}^{2\pi} = \boxed{\frac{8\pi}{3}}$$

3/3

#2 $r \geq 0$

a) $\theta \in [0, 2\pi[$

$z = z$

Solide dans région $x \geq 0$ $y \geq 0$ $z \geq 0$

sphère : $x^2 + y^2 + z^2 = 100$

cylindre : $x^2 + y^2 = 25$ $(x^2 + y^2 \geq 25)$

a) Solide B en <u>coordonnées cylindriques</u>

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad r^2 = x^2 + y^2$

Nous sommes situés dans l'octan cartésien positif :

- $\boxed{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}$

Sphère • $x^2 + y^2 + z^2 = 100$

$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + z^2 = 100$

$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + z^2 = 100$

$r^2 + z^2 = 100$

$r^2 = 100 - z^2$

$r = \pm\sqrt{100 - z^2} \qquad r \geq 0$

$r = \sqrt{100 - z^2}$

Cylindre • $x^2 + y^2 = 25$

$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 25$

$r^2 = 25$

$r = \sqrt{25}$

$r = \pm 5 \qquad r \geq 0$

$r = 5$

r

- $5 \leq r \leq \sqrt{100 - z^2}$

Nous savons que z est borné par l'intersection entre la sphère et le cylindre

$r^2 + z^2 - 100 = 0$

$r^2 - 25 = 0$

$$\cancel{r^2} + z^2 - 100 = \cancel{r^2} - 25$$

$$z^2 - 100 = -25$$

$$z^2 = 75$$

$$z = \pm \sqrt{75}$$

Nous gardons que les valeurs positives de z

$$0 \leq z \leq \sqrt{75}$$

Donc, la région B en coordonnées cylindriques est :

$$B = \{(z, r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \sqrt{75}, 5 \leq r \leq \sqrt{100 - z^2}\}$$

b) Solide B en coordonées sphériques

On sait que : $\sin \phi = \frac{r}{\rho} \Rightarrow r = \rho \sin \phi$

$$x = r \cos \theta \quad = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta \quad = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$\cos \phi = \frac{z}{\rho} \Rightarrow z = \rho \cos \phi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\cos \phi = \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

sphère : $x^2 + y^2 + z^2 = 100$

$$\rho^2 = 100$$

$$\rho = \sqrt{100} = \pm 10 \qquad \rho \geq 0$$

$$\rho = 10$$

Cylindre

- $x^2 + y^2 = 25$

$(\rho \sin\phi \cos\theta)^2 + (\rho \sin\phi \sin\theta)^2 = 25$

$\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta = 25$

$\rho^2(\sin^2\phi \cos^2\theta + \sin^2\phi \sin^2\theta) = 25$

$\rho^2 \sin^2\phi \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} = 25$

$\rho^2 \sin^2\phi = 25$

$\rho^2 = \dfrac{25}{\sin^2\phi}$ $\quad \rho = \pm \dfrac{5}{\sin\phi}$ $\quad \rho \geq 0$ $\quad$ donc : $\boxed{\dfrac{5}{\sin\phi} \leq \rho \leq 10}$

- θ est similaire à la question a) car $x \geq 0$ $y \geq 0$

$$\boxed{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}$$

- $\rho^2 \sin^2\phi = 25$ $\quad \rho^2 = \dfrac{25}{\sin^2\phi}$

$\rho^2 = 100$

$100 = \dfrac{25}{\sin^2\phi} \Rightarrow 10 \sin\phi = 5$

On trouve l'intersection des deux pour trouver ϕ

$\sin\phi = \frac{1}{2}$

$\phi = \arcsin(\frac{1}{2})$

$= \frac{\pi}{6}$

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}$

Région de B en coordonnées sphériques :

$$B = \left\{ (\rho, \phi, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}, \frac{5}{\sin\phi} \leq \rho \leq 10 \right\}$$