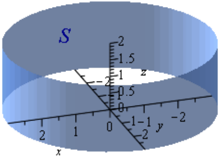
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 2: Les intégrales de surface

Exemple 2: masse d'une plaque mince

Exemple 2 : masse d'une plaque mince

Calculer la masse d'une plaque mince ayant la forme de la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 9$ située entre les plans $z = 0$ et $z = 2$ si la densité est proportionnelle à la distance à l'origine.



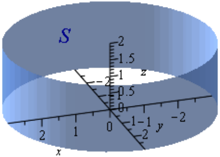
- L'équation cylindrique du cylindre est $r = 3$.
- S est paramétrée par

$$\vec{R}(\theta, z) = 3\cos\theta\ \vec{i} + 3\sin\theta\ \vec{j} + z\,\vec{k}$$

avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 2$.

Exemple 2 : masse d'une plaque mince

Calculer la masse d'une plaque mince ayant la forme de la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 9$ située entre les plans $z = 0$ et $z = 2$ si la densité est proportionnelle à la distance à l'origine.



- L'équation cylindrique du cylindre est $r = 3$.
- S est paramétrée par

$$\vec{R}(\theta, z) = 3\cos\theta\ \vec{i} + 3\sin\theta\ \vec{j} + z\,\vec{k}$$

avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 2$.

- La densité est $\sigma(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exemple 2 : masse d'une plaque mince

Calculer la masse d'une plaque mince ayant la forme de la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 9$ située entre les plans $z = 0$ et $z = 2$ si la densité est proportionnelle à la distance à l'origine.

- La masse de la plaque est donnée par

$$m = \iint_S \sigma(x, y, z)\, dS.$$

- On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{R}_\theta &= -3\sin\theta\ \vec{i} + 3\cos\theta\ \vec{j} + 0\,\vec{k} \\
\vec{R}_z &= 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + \vec{k} \\
\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z &= 3\cos\theta\ \vec{i} + 3\sin\theta\ \vec{j} \\
||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z|| &= 3
\end{aligned}$$

Exemple 2 : masse d'une plaque mince

Calculer la masse d'une plaque mince ayant la forme de la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 9$ située entre les plans $z = 0$ et $z = 2$ si la densité est proportionnelle à la distance à l'origine.

On a $||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z|| = 3$ et

$$\sigma(\vec{R}(\theta, z)) = k\sqrt{(3\cos\theta)^2 + (3\sin\theta)^2 + z^2} = k\sqrt{9 + z^2}$$

donc

$$\begin{aligned} m &= \iint_S \sigma(x, y, z)\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sigma(\vec{R}(\theta, z))||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z||\, dzd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 k\sqrt{9 + z^2}\,(3)\, dzd\theta \\ &= 3k\pi\left(2\sqrt{13} + 9\ln(2 + \sqrt{13}) - 9\ln(3)\right) \approx 120.99k \end{aligned}$$

Centre de masse d'une plaque mince

On considère une plaque mince ayant la forme d'une surface S et dont la densité est donnée par $\sigma(x, y, z)$.

Pour cette plaque,

$$\begin{aligned}
m &= \iint_S \sigma(x,y,z)\,dS \\
M_{yz} &= \iint_S x\sigma(x,y,z)\,dS \\
M_{xz} &= \iint_S y\sigma(x,y,z)\,dS \\
M_{xy} &= \iint_S z\sigma(x,y,z)\,dS \\
(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right)
\end{aligned}$$

Résumé

- Paramétrisation d'une surface à l'aide de son équation cylindrique.
- Calcul de la masse d'une plaque mince.
- Moments et centre de masse d'une plaque mince.