MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 3: Les intégrales triples en coordonnées cylindriques

Définition et formule de calcul

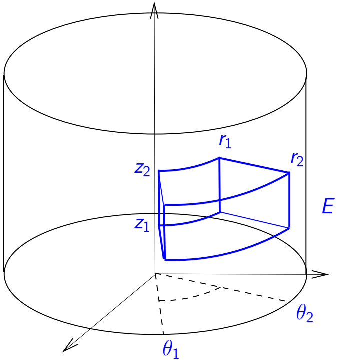
Définition et formule de calcul

- Intégrale triple en coordonnée cylindriques.
- Jacobien en coordonnées cylindriques.

Définition et formule de calcul

On considère une région

$$E = \{(r, \theta, z) \mid r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, z_1 \leq z \leq z_2\}$$



- On subdivise E en sous-régions de même forme.
- On choisit le point milieu de chaque sous-région comme point d'évaluation.
- Le volume d'un « coin cylindrique » est l'aire de sa base fois sa hauteur.
- Avec ces données on forme une triple somme de Riemann puis on prend la limite.

Définition et formule de calcul

Théorème

Soit E une région de l'espace décrite en coordonnées cylindriques par

$$E = \{(r, \theta, z) \,|\, r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, z_1 \leq z \leq z_2\}$$

et f une fonction intégrable sur E. Alors

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dzdrd\theta$$

Définition et formule de calcul

Théorème

Soit E une région de l'espace décrite en coordonnées cylindriques par

$$E = \{(r, \theta, z) \,|\, r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, z_1 \leq z \leq z_2\}$$

et f une fonction intégrable sur E. Alors

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dzdrd\theta$$

Le jacobien provient du calcul du volume d'un petit ≪ coin cylindrique ≫.

Définition et formule de calcul

Théorème

Soit E une région de l'espace décrite en coordonnées cylindriques par

$$E = \{(r,\theta,z) \,|\, \theta_1 \le \theta \le \theta_2, v_1(\theta) \le r \le v_2(\theta), u_1(r,\theta) \le z \le u_2(r,\theta)\}$$

et f une fonction intégrable sur E. Alors

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{v_1(\theta)}^{v_2(\theta)} \int_{u_1(r,\theta)}^{u_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Résumé

- Intégrale triple en coordonnées cylindriques sur un ≪ coin cylindrique ≫.
- Jacobien en coordonnées cylindriques.
- Intégrale triple en coordonnées cylindriques sur un domaine général.