MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 3: Le rotationnel et la divergence

La divergence

Introduction

- Définition de la divergence d'un champ vectoriel et formule de calcul.
- Interprétation de la divergence.
- Relation entre la divergence et le rotationnel.

La divergence

Définition

Soit $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ un champ vectoriel dont les dérivées partielles existent. La *divergence* de $\vec{F}$ est la fonction

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

La divergence est une fonction scalaire construite à partir des dérivées partielles des composantes du champ $\vec{F}$.

La divergence

Notation

On se rappelle que

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Si on considère ∇ comme un « vecteur » alors on peut écrire

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

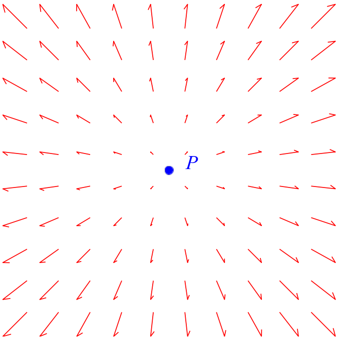
Exemple

Si $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$ alors

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial(1)}{\partial x} + \frac{\partial(xy)}{\partial y} + \frac{\partial(xz^2)}{\partial z} = 0 + x + 2xz = x + 2xz.$$

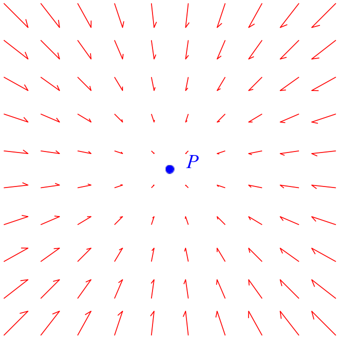
La divergence

Interprétation



$$\operatorname{div} \vec{F}(P) > 0$$

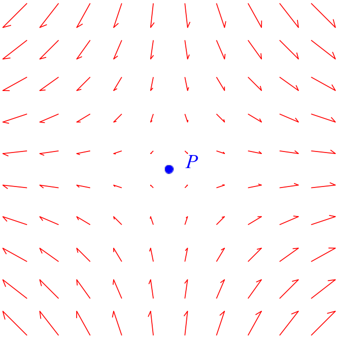
Interprétation



$$\operatorname{div}\vec{F}(P) < 0$$

La divergence

Interprétation



$$\operatorname{div}\vec{F}(P) = 0$$

La divergence

Théorème

Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ est un champ vectoriel ayant des dérivées partielles secondes continues alors

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}
\end{aligned}$$

Théorème

Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ est un champ vectoriel ayant des dérivées partielles secondes continues alors

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \cancel{\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

La divergence

Exemple

Pour le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$$

il n'existe PAS un autre champ $\vec{G}$ tel que $\vec{F} = \text{rot}\,\vec{G}$ car

$$\text{div}\,\vec{F} = x + 2xz \neq 0.$$

Résumé

- Définition de la divergence d'un champ vectoriel.
- Notation et calcul.
- Interprétation.
- Relation avec le rotationnel.