MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 2: Les coordonnées cylindriques et sphériques

Coordonnées sphériques

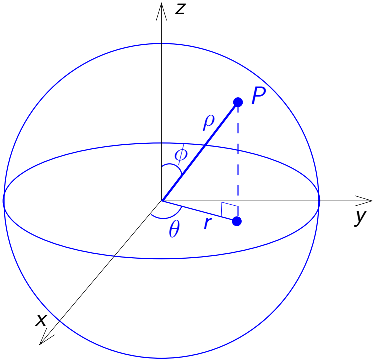
Introduction

- Coordonnées sphériques.
- Formules de passage.

Coordonnées sphériques

Un point P de l'espace est repéré par un triplet (ρ, θ, ϕ), où

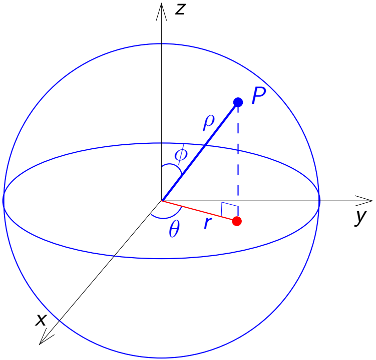
- ρ est la distance de P à l'origine.



Coordonnées sphériques

Un point P de l'espace est repéré par un triplet (ρ, θ, ϕ), où

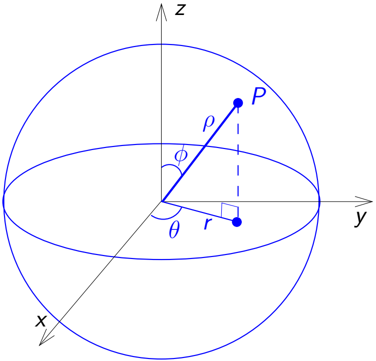
- ρ est la distance de P à l'origine.
- θ est l'angle formé par l'axe Ox et le segment allant de l'origine à la projection de P dans le plan $z = 0$.



Coordonnées sphériques

Un point P de l'espace est repéré par un triplet (ρ, θ, ϕ), où

- ρ est la distance de P à l'origine.
- θ est l'angle formé par l'axe Ox et le segment de l'origine à la projection de P dans le plan $z = 0$.
- ϕ est l'angle formé par l'axe Oz et le segment allant de l'origine à P.



Coordonnées sphériques

Conventions :

- On suppose que $\rho \geq 0$.
- θ est mesuré à partir de l'axe des x positifs et $\theta \in [0, 2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi, \pi]$.
- ϕ est mesuré à partir de l'axe des z positifs et $\phi \in [0, \pi]$.

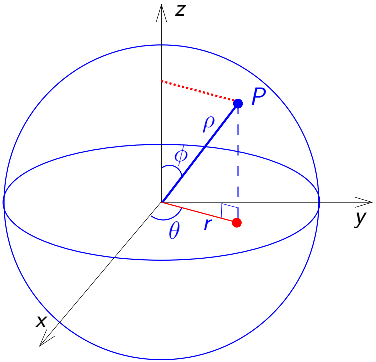
Attention autres conventions possibles :

- Pour les physiciens, notre θ s'appelle pluôt ϕ et vice versa...
- ϕ peut être mesuré à partir de l'équateur (dans le plan $z = 0$) et $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Coordonnées sphériques

Formules de passage :

$$\sin\phi = \frac{r}{\rho} \Rightarrow r = \rho \sin\phi$$



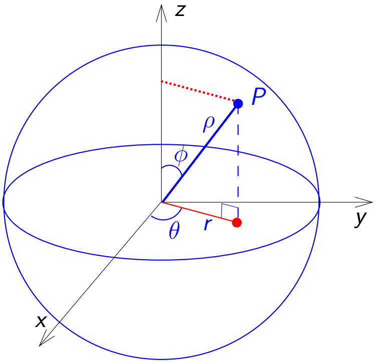
Coordonnées sphériques

Formules de passage :

$$\sin\phi = \frac{r}{\rho} \Rightarrow r = \rho\sin\phi$$

$$x = r\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta$$



Coordonnées sphériques

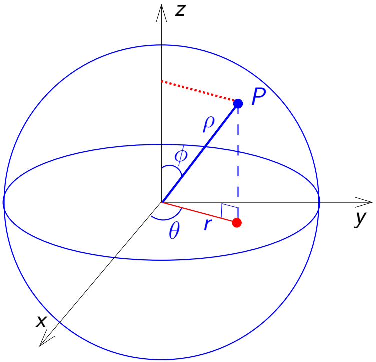
Formules de passage :

$$\sin\phi = \frac{r}{\rho} \Rightarrow r = \rho \sin\phi$$

$$x = r\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta$$

$$\color{red}{\cos\phi = \frac{z}{\rho}} \Rightarrow z = \rho\cos\phi$$



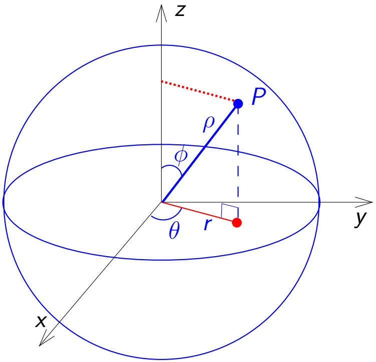
Coordonnées sphériques

Formules de passage :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



Coordonnées sphériques

Formules de passage :

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$z = \rho \cos\phi \qquad \cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Résumé

- Définition des coordonnées sphériques.
- Conventions habituelles.
- Formules de passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes et vice versa.