

MTH1102D Calcul II

Chapitre 6 Section 2 : Les intégrales doubles sur des domaines généraux

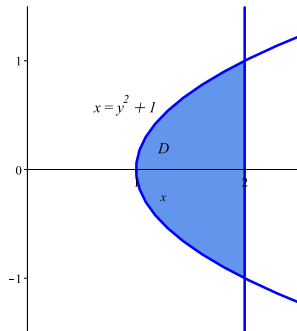
Exemple 3: un domaine de type I et II

Exemple 3 : un domaine de type I et II

Évaluer $\iint_D xy^2 dA$ où D est la région bornée par les courbes $x = y^2 + 1$ et $x = 2$.

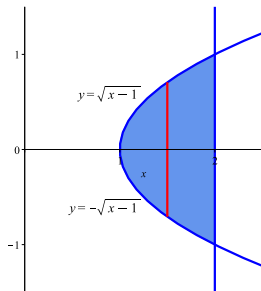
Exemple 3 : un domaine de type I et II

Évaluer $\iint_D xy^2 dA$ où D est la région bornée par les courbes $x = y^2 + 1$ et $x = 2$.



Exemple 3 : un domaine de type I et II

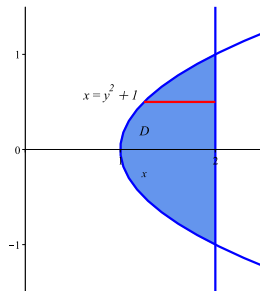
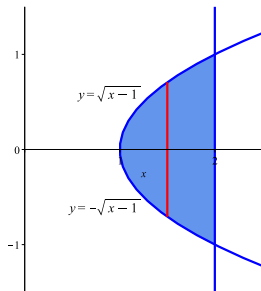
Évaluer $\iint_D xy^2 dA$ où D est la région bornée par les courbes $x = y^2 + 1$ et $x = 2$.



Type I : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, -\sqrt{x-1} \leq y \leq \sqrt{x-1}\}$.

Exemple 3 : un domaine de type I et II

Évaluer $\iint_D xy^2 dA$ où D est la région bornée par les courbes $x = y^2 + 1$ et $x = 2$.



Type I : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, -\sqrt{x-1} \leq y \leq \sqrt{x-1}\}$.

Type II : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + 1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$.

Exemple 3 : un domaine de type I et II

Type I : $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, -\sqrt{x-1} \leq y \leq \sqrt{x-1} \right\}.$

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2 \, dA &= \int_1^2 \int_{-\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x-1}} xy^2 \, dy dx \\ &= \int_1^2 \frac{2}{3} x(x-1)^{3/2} \, dx \quad (u = x-1, du = dx) \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (u+1)u^{3/2} \, du \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 \left[u^{5/2} + u^{3/2} \right] \, du \\ &= \frac{16}{35} \end{aligned}$$

Exemple 3 : un domaine de type I et II

Type II : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + 1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$.

$$\begin{aligned}\iint_D xy^2 \, dA &= \int_{-1}^1 \int_{y^2+1}^2 xy^2 \, dx dy \\&= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} y^2 (4 - (y^2 + 1)^2) \, dy \\&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [3y^2 - 2y^4 - y^6] \, dy \\&= \frac{16}{35}\end{aligned}$$

- Certains domaines sont à la fois de type I et de type II.
- On choisit habituellement un ordre d'intégration qui facilite les calculs.