

MTH1102D Calcul II

Chapitre 6, section 2 : Les intégrales doubles sur des domaines généraux

Exemple 5: changer l'ordre d'intégration

Exemple 5 : changer l'ordre d'intégration

Évaluer l'intégrale $\int_0^2 \int_{x^2}^4 x e^{y^2} dy dx$.

Première façon : Intégrer selon l'ordre $dydx$.

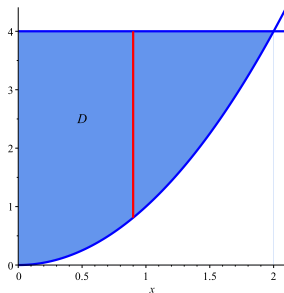
Difficile : il n'y a pas de primitive simple pour e^{y^2} .

Deuxième façon : Intégrer selon l'ordre $dx dy$.

Exemple 5 : changer l'ordre d'intégration

Évaluer l'intégrale $\int_0^2 \int_{x^2}^4 x e^{y^2} dy dx$.

Le domaine d'intégration :



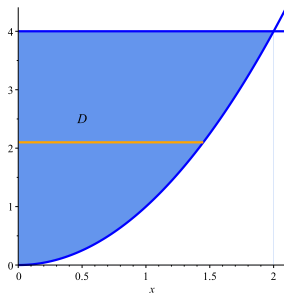
$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}.$$

Domaine de type I pour intégrer selon l'ordre : $dydx$.

Exemple 5 : changer l'ordre d'intégration

Évaluer l'intégrale $\int_0^2 \int_{x^2}^4 xe^{y^2} dy dx$.

Le domaine d'intégration : $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ (pour x positif).



$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 4\}.$$

Domaine de type II pour intégrer selon l'ordre : $dx dy$.

Exemple 5 : changer l'ordre d'intégration

Évaluer l'intégrale $\int_0^2 \int_{x^2}^4 xe^{y^2} dy dx$.

Calcul :

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_{x^2}^4 xe^{y^2} dy dx &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2} dx dy \quad (\text{changement d'ordre}) \\ &= \int_0^4 \frac{(\sqrt{y})^2}{2} e^{y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 ye^{y^2} dy \quad (u = y^2 \Rightarrow du = 2y dy) \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{16} e^u du \\ &= \frac{1}{4}(e^{16} - 1).\end{aligned}$$

- Il est parfois nécessaire de changer l'ordre d'intégration pour simplifier les calculs.
- Pour changer l'ordre d'intégration, il faut d'abord changer la description du domaine.