MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 5 :

Changements de variables dans les intégrales multiples

Introduction

- Changement de variable pour une intégrale double
- Changement de variable pour une intégrale triple

Changement de variable général

Définition

Un **changement de variables** est une transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ permettant de passer d'un système de coordonnées à un autre dans $\mathbb{R}^n$.

Changement de variable général

Définition

Un **changement de variables** est une transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ permettant de passer d'un système de coordonnées à un autre dans $\mathbb{R}^n$.

- Dans $\mathbb{R}^2$, on a $T(u, v) = (x, y)$, où $x = g(u, v)$ et $y = h(u, v)$, et où g, h possèdent des dérivées premières continues.

Changement de variable général

Définition

Un **changement de variables** est une transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ permettant de passer d'un système de coordonnées à un autre dans $\mathbb{R}^n$.

- Dans $\mathbb{R}^2$, on a $T(u, v) = (x, y)$, où $x = g(u, v)$ et $y = h(u, v)$, et où g, h possèdent des dérivées premières continues.

  La transformation T permet de passer d'un domaine R en coordonnées (x, y) à un domaine $S := T^{-1}(R)$ en coordonnées (u, v).

Changement de variable général

Définition

Un **changement de variables** est une transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ permettant de passer d'un système de coordonnées à un autre dans $\mathbb{R}^n$.

- Dans $\mathbb{R}^2$, on a $T(u, v) = (x, y)$, où $x = g(u, v)$ et $y = h(u, v)$, et où g, h possèdent des dérivées premières continues.

  La transformation T permet de passer d'un domaine R en coordonnées (x, y) à un domaine $S := T^{-1}(R)$ en coordonnées (u, v).

- Dans $\mathbb{R}^3$, on a $T(u, v, w) = (x, y, z)$, où $x = g(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$ et $z = k(u, v, w)$, et où g, h, k possèdent des dérivées premières continues.

Changement de variable général

Définition

Un **changement de variables** est une transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ permettant de passer d'un système de coordonnées à un autre dans $\mathbb{R}^n$.

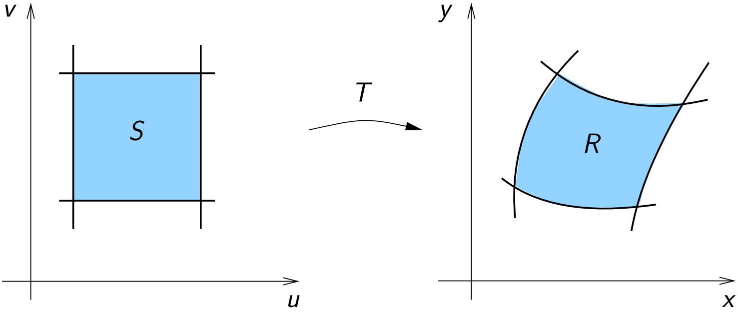
- Dans $\mathbb{R}^2$, on a $T(u, v) = (x, y)$, où $x = g(u, v)$ et $y = h(u, v)$, et où g, h possèdent des dérivées premières continues.

  La transformation T permet de passer d'un domaine R en coordonnées (x, y) à un domaine $S := T^{-1}(R)$ en coordonnées (u, v).

- Dans $\mathbb{R}^3$, on a $T(u, v, w) = (x, y, z)$, où $x = g(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$ et $z = k(u, v, w)$, et où g, h, k possèdent des dérivées premières continues.

  La transformation T permet de passer d'un domaine R en coordonnées (x, y, z) à un domaine $S := T^{-1}(R)$ en coordonnées (u, v, w).

Changement de variable général (2)



Le changement de variables défini par T transforme un domaine D dans le plan des (x, y) en un domaine $S = T^{-1}(R)$ dans le plan des (u, v).

Changement de variable général (3)

- Un changement de variable approprié permet de simplifier l'évaluation d'une intégrale.

Changement de variable général (3)

- Un changement de variable approprié permet de simplifier l'évaluation d'une intégrale.
- Le choix d'un changement de variable en plusieurs variables repose en grande partie sur la forme du domaine d'intégration.

Changement de variable général (3)

- Un changement de variable approprié permet de simplifier l'évaluation d'une intégrale.
- Le choix d'un changement de variable en plusieurs variables repose en grande partie sur la forme du domaine d'intégration.
- Le passage aux coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques sont des exemples de changements de variables pour les intégrales multiples.

Changement de variable général (4)

Notation

En pratique, on évite d'introduire des symboles supplémentaires g, h, k en écrivant le changement de variable

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

ou

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

pour indiquer que les anciennes variables x, y, z peuvent être exprimées en fonctions des nouvelles variables u, v, w.

Le jacobien d'une transformation

- Le *jacobien* d'une transformation est la généralisation à plusieurs variables du terme $du = g'(x)\,dx$ associé au changement de variable $u = g(x)$ dans une intégrale simple.

Le jacobien d'une transformation

- Le *jacobien* d'une transformation est la généralisation à plusieurs variables du terme $du = g'(x)\,dx$ associé au changement de variable $u = g(x)$ dans une intégrale simple.
- Dans une intégrale multiple, le jacobien tient compte des différentes dérivées partielles des fonctions qui définissent le changement de variable.

Le jacobien d'une transformation

- Le *jacobien* d'une transformation est la généralisation à plusieurs variables du terme $du = g'(x)\,dx$ associé au changement de variable $u = g(x)$ dans une intégrale simple.
- Dans une intégrale multiple, le jacobien tient compte des différentes dérivées partielles des fonctions qui définissent le changement de variable.
- Pour les détails sur l'origine du jacobien, voir la section 7.5 du livre.

Changement de variables dans une intégrale double

Définition

Le **jacobien** de la transformation $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$ en deux dimensions est le déterminant

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Changement de variables dans une intégrale double

Définition

Le **jacobien** de la transformation $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$ en deux dimensions est le déterminant

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Théorème

Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un changement de variables donné par $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$. Alors

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

où $R = T(S)$.

Changement de variables dans une intégrale triple

Définition

Le **jacobien** de la transformation $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ en trois dimensions est le déterminant

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Changement de variables dans une intégrale triple

Définition

Le **jacobien** de la transformation $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ en trois dimensions est le déterminant

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Théorème

Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un changement de variables donné par $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$. Alors

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw$$

où $R = T(S)$.

Résumé

- Changement de variables en deux et trois dimensions.

Résumé

- Changement de variables en deux et trois dimensions.
- Jacobien d'une transformation.

Résumé

- Changement de variables en deux et trois dimensions.
- Jacobien d'une transformation.
- Formules de changement de variables pour les intégrales multiples.