POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Questionnaire Contrôle périodique

MTH1102D

[redacted]

Réservé		
1	7	/9
2	6.5	/9
3	5	/8
4	7.5	/9
otal	26	/35

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Question 1 [9 points]

7

Évaluez les intégrales suivantes.

a) $J_1 = \int_0^{\pi} \int_{2x}^{2\pi} y^4 \sin(xy^2)\, dy\, dx.$

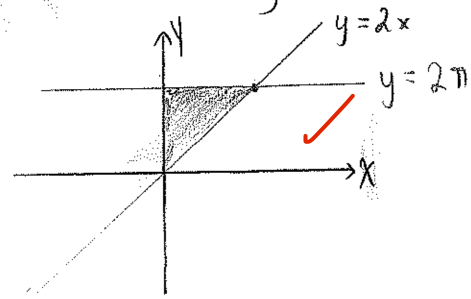
b) $J_2 = \iint_D \left[xy^2 + \frac{xy}{10 + xy^2 + y^4} \right] dA,$

où D est le domaine borné par les droites $y = -x$, $y = x$ et la parabole $x = 2 - y^2$.

ATTENTION : rien au-dessus de cette ligne ne sera corrigé. Écrivez votre solution ci-dessous.

Solution et réponse :

a) On va faire un changement de borne et changement d'ordre d'intégration.



$0 \leq x \leq \pi \,, \quad 2x \leq y \leq 2\pi$

$y = 2x \to x = \frac{y}{2}$

$0 \leq x \leq \frac{y}{2} \,, \quad 0 \leq y \leq 2\pi$

$J_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{y/2} y^4 \sin(xy^2)\, dx\, dy$ $\qquad u = xy^2$, $du = y^2 dx$

$= \int_0^{2\pi} \int y^2 \sin(u)\, du\, dy$

$= -\int_0^{2\pi} y^2 \cos(xy^2) \Big|_0^{y/2} dy = -\Big(\underbrace{\int_0^{2\pi} y^2 \cos(y^3/2)}_{h_2} - \underbrace{\int_0^{2\pi} y^2}_{h_1} \Big) dy \Rightarrow$

$$h_1 = \int_0^{2\pi} y^2\,dy \Rightarrow \frac{y^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3}$$

$$h_2 = \int_0^{2\pi} y^2 \cos\left(\frac{y^3}{2}\right) dy \qquad u = \frac{y^3}{2}$$

$$du = \frac{3y^2}{2}\,dy \Rightarrow \frac{2}{3}\,du = y^2\,dy$$

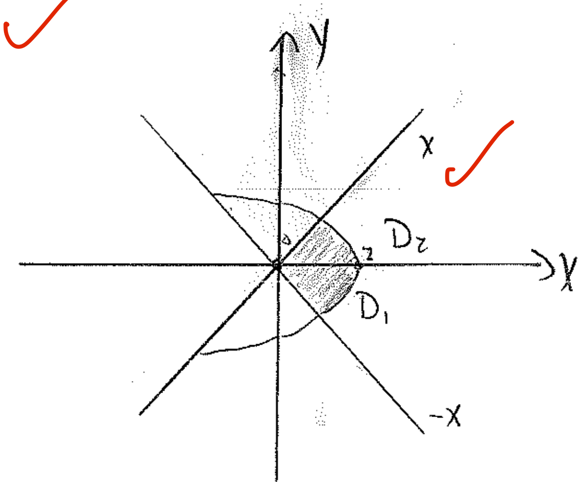
$$\frac{2}{3}\int \cos(u)\,du \Rightarrow \frac{2}{3}\left|\sin\left(\frac{y^3}{2}\right)\right|\Big|_0^{2\pi} \Rightarrow \frac{2\sin(4\pi^3)}{3}$$

$$J_1 = -(h_2 - h_1) = h_1 - h_2 = \frac{8\pi^3}{3} - \frac{2\sin(4\pi^3)}{3}$$

4/4

$$J_1 = \frac{8\pi^3 - 2\sin(4\pi^3)}{3}$$

b)
$$\iint_D \left[xy^2 + \frac{xy}{10 + xy^2 + y^2} \right]$$



$0 \le x < 2$

$x = y \qquad x = 2 - y^2$

La région est symétrique en y.

On vérifie pour voir si h_1 est une fonction impair.

$$\iint_D \left(xy^2 + \underbrace{\frac{xy}{10 + xy^2 + y^2}}_{h_1} \right) dA$$

$$f(x,y) = \frac{x-y}{10 + x(-y)^2 + (-y)^2} = -f(x,y)$$

Ainsi on sait que $\iint_D \frac{xy}{10 + xy^2 + y^2} = 0$ sur le domaine $\rightarrow D_1$

 [redacted]

Les bornes de y: On peut utiliser la symétrie pour dire que les bornes sont:

$y = x \quad y = -x$

$x = 2 - y^2$

$y = \pm\sqrt{2-x}$

$$x \leq y \leq \sqrt{2-x}$$

puisque les régions D_1 et D_2 aurons le même aire.

On aura donc l'intégrale:

$$2 \int_0^2 \int_x^{\sqrt{2-x}} xy^2 \, dy \, dx \Rightarrow \frac{2}{3} \int_0^2 x \, y^3 \Big|_x^{\sqrt{2-x}} dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \int_0^2 x \left((\sqrt{2-x})^3 - x^3 \right) dx \Rightarrow \frac{2}{3} \int_0^2 x(\sqrt{2-x})^3 - x^4 \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \int_0^2 x(\sqrt{2-x})^3 dx - \int_0^2 x^4 \, dx \Rightarrow \frac{2}{3} \int_0^2 x(\sqrt{2-x})^3 dx - \frac{x^5}{5} \Big|_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \int_0^2 x(\sqrt{2-x})^3 dx - \frac{2^6}{15} \Rightarrow$$

$u = 2 - x$

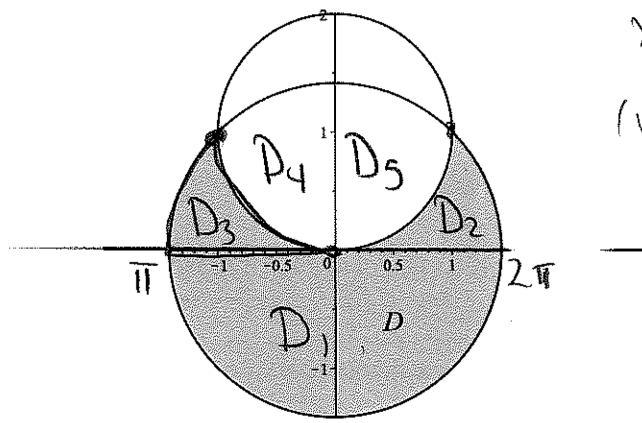
3/5

[redacted]

Question 2 [9 points]

Soit D la région du plan située à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 2$ et à l'extérieur du cercle $x^2 + (y-1)^2 = 1$. La région D est représentée ci-dessous.

6.5



$x^2 +$
$(y-1)(y-1)$
$y^2 - 2y + 1 = 1$

a) Calculez l'aire de D.

b) Évaluez l'intégrale suivante

$$J_3 = \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA.$$

ATTENTION : rien au-dessus de cette ligne ne sera corrigé. Écrivez votre solution ci-dessous.

Solution et réponse : On utilise les coordonnées polaires

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

a) On cherche les bornes de r & θ

D_1: $x^2+y^2 = 2 \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$

$$D_1 = \int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\,dr\,d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\, d\theta \Rightarrow 2\pi - \pi = \boxed{\pi}$$

D_2 & D_3: Les deux sont des régions symétriques

On trouve quand les 2 cercles s'intersectionner :

grand cercle: $r = \sqrt{2}$

petit cercle: $x^2 + y^2 - 2y + \cancel{1} = \cancel{1} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0$

$r^2 - 2r\sin\theta = 0$

$r(r - 2\sin\theta) = 0 \quad r = 2\sin\theta$

$\theta : ?$

$r = \sqrt{2}$ $\quad\quad \sqrt{2} = 2\sin\theta$

$r = 2\sin\theta \Rightarrow$ $\quad \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$ ✓

$3\pi/4$

$D_2 \cancel{\&} D_3 = \quad 2\int_0^{\pi/4}\int_{2\sin\theta}^{\sqrt{2}} r\,\cancel{d}r\,d\theta$ ✓

$\Rightarrow 2\int_0^{\pi/4} \dfrac{r^2}{2}\Big|_{2\sin\theta}^{\sqrt{2}} dr\,d\theta \Rightarrow 2\int_0^{\pi/4} 1 - 4\sin^2\theta\, d\theta$

$\Rightarrow 2\left(\underbrace{\theta\Big|_0^{\pi/4}}_{h_1} - \underbrace{\int_0^{\pi/4} 2(1-\cos 2\theta)\,d\theta}_{h_2}\right) \Rightarrow h_1 = \pi/4$

$h_2 : \int_0^{\pi/4} 2(1-\cos 2\theta)\,d\theta \Rightarrow 2\theta\Big|_0^{\pi/4} - \sin 2\theta\Big|_0^{\pi/4}$

$\Rightarrow \pi/2 - \sin(\pi/2) \Rightarrow \pi/2 - 1$

$2(h_1 - h_2) = \dfrac{\pi}{4} + 1 - \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\dfrac{4-\pi}{4}}$ X

$4.5/5$

La région $D = D_1 + D_2 + D_3$

$= \pi + \dfrac{4-\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{4\pi + 4 - \pi}{4} = \boxed{\dfrac{3\pi + 4}{4}}$ X

b) $\Rightarrow$ ✓

[redacted]

b) $J_1 = \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA \Rightarrow$

$$\iint_D \frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2}}\, r\, dr\, d\theta \Rightarrow \iint_D \cancel{r} \sin\theta\, dr\, d\theta$$

$$D_1 = \int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sin\theta\, dr\, d\theta = \cancel{0}$$

$$D_2 \,\&\, D_3 = 2\int_0^{\pi/4}\int_{2\sin\theta}^{\sqrt{2}} \sin\theta\, dr\, d\theta \Rightarrow 2\int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sin\theta\, d\theta - 2\int_0^{\pi/4} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}(-\cos\tfrac{\pi}{4} + \cos 0) - \cancel{2}\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2\theta}{\cancel{2}}\, d\theta$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sin 2\theta}{2}\right|_0^{\pi/4}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$2/4$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2} - 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{8\sqrt{2} - 8 - \pi + 4}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{8\sqrt{2} - 4 - \pi}{2} \approx 2.086\, \cancel{u^2}$$

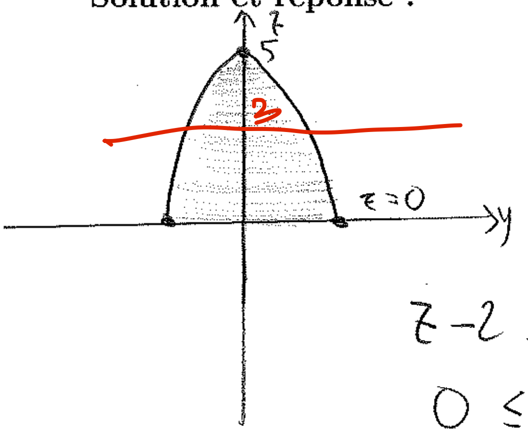
 [redacted]

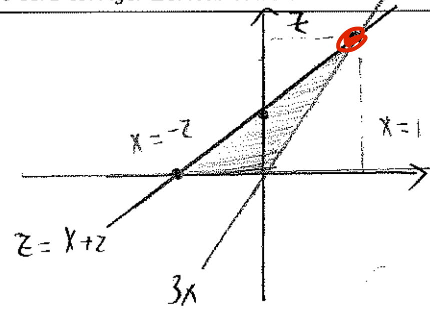
Question 3 [8 points]

Calculez le volume de la région E de l'espace bornée par le cylindre parabolique $z = 5 - y^2$ et les plans $z = 0$, $z = x + 2$ et $z = 3x$.

ATTENTION : rien au-dessus de cette ligne ne sera corrigé. Écrivez votre solution ci-dessous.

Solution et réponse :





$x = z - 2$

$x = \frac{z}{3}$

Quand $z = 0$:

$0 = 5 - y^2$

$y^2 = 5 \Rightarrow y = \pm\sqrt{5}$

$z - 2 \leq x \leq \frac{z}{3}$

$0 \leq z \leq 5 - y^2$

$-\sqrt{5} \leq y \leq \sqrt{5}$

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\int_{0}^{5-y^2}\int_{z-2}^{z/3} 1\, dx\, dz\, dy \Rightarrow \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\int_{0}^{5-y^2} \frac{z}{3} - z - 2\, dz\, dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\int_{0}^{5-y^2} z - 3z + 6\, dz\, dy \Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{-\cancel{2}z^2}{\cancel{2}} + 6z \Big|_{0}^{5-y^2} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} -(5-y^2)^2 + 6(5-y^2)\, dy \Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} -(25 - 10y^2 + y^4) + 30 - 6y^2\, dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} -25 + 10y^2 - y^4 + 30 - 6y^2\, dy \Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} 5 + 4y^2 - y^4\, dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(5y + \frac{4y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{3}\ 5(2\sqrt{5}) + \frac{4}{3}(5^{3/2}\cdot 2) - \frac{2\cdot 5^{5/2}}{5}$$

$\Rightarrow$

En forme exacte $\boxed{\frac{10\sqrt{5}}{3}+\frac{8\sqrt{125}}{3}-\frac{2\sqrt{3125}}{5}} \approx 7.45+29.81-22.36$

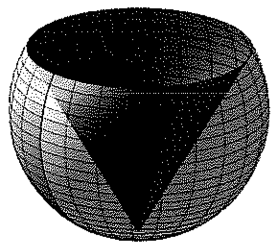
X

approximation $\rightarrow$ $\boxed{\approx 59.62}\, u^3$

[redacted]

Question 4 [9 points]

On considère un solide sphérique possédant une cavité conique, comme illustré ci-dessous. Ce solide occupe la région B située à l'intérieur de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ et sous le cône d'équation $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$. La densité du solide est proportionnelle au carré de la distance à l'origine.
La région B est représentée ci-dessous.



Soit m la masse du solide B.

a) Exprimez m comme une intégrale en coordonnées cylindriques.
On ne demande PAS ici d'évaluer cette intégrale.

b) Exprimez m comme une intégrale en coordonnées sphériques.
On ne demande PAS ici d'évaluer cette intégrale.

c) Calculez maintenant la masse m dans le système de coordonnées de votre choix.

ATTENTION : rien au-dessus de cette ligne ne sera corrigé. Écrivez votre solution ci-dessous.

Solution et réponse :

a) θ : $0 \le \theta \le 2\pi$

r : $r^2 + (z-2)^2 = 4 \Rightarrow r^2 + z^2 - 4z + \cancel{4} = \cancel{4}$

$r = \sqrt{4z - z^2}$

$z = \sqrt{3(r^2)} \Rightarrow z = r\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{z}{\sqrt{3}}$

$\frac{z}{\sqrt{3}} \le r \le \sqrt{4z - z^2}$

z :

$\sqrt{4z - z^2} = \frac{z}{\sqrt{3}} \Rightarrow 4z - z^2 = \frac{z^2}{3}$

$12z - 3z^2 = z^2 \Rightarrow 12z - 4z^2 = 0$

$\Rightarrow z(z-3) = 0 \qquad 0 \le z \le 3$

[redacted]

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_{\frac{z}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4z-z^2}} k\left(\sqrt{r^2+z^2}\right) r\,dr\,dz\,d\theta}$$

b) θ : $0 \leq \theta \leq 2\pi$

ϕ

$$p\cos\phi = \sqrt{3(p\sin\phi\cos\theta)^2 + (p\sin\phi\sin\theta)^2}$$

$$\Rightarrow p\cos\phi = \sqrt{3p^2\sin^2\phi} \Rightarrow \cancel{p}\cos\phi = \cancel{p}\sin\phi\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\phi \Rightarrow \phi = \pi/6$$

$$0 \leq \phi \leq \pi/6$$

p:

$$x^2+y^2+z^2-4z = 0$$

$$p^2 - 4p\cos\phi = 0 \Rightarrow p(p-4\cos\phi) = 0$$

$$0 \leq p \leq 4\cos\phi$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{4\cos\phi} k\,p\,p^2\sin\phi\,dp\,d\phi\,d\theta}$$

3/35

c) M en coordonnées sphérique

densité X

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{4\cos\phi} k\rho^3 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \Rightarrow \frac{k}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \rho^4 \Big|_0^{4\cos\phi} \sin\theta \, d\phi \, d\theta$$

$$\Rightarrow 64k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \sin\phi\cos^4\phi \, d\phi \, d\theta \underset{64k\cdot(2\pi-0)}{\Rightarrow} 128k\pi\int_0^{\pi/6} \sin\phi \cos^4\phi \, d\phi$$

$$\Rightarrow -128k\pi\int^{1} u^4 \, du$$

$u = \cos\theta$
$du = -\sin\theta \, d\theta$

$$\Rightarrow -128k\pi \frac{(\cos\theta)^5}{5}\Big|_0^{\pi/6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-128k\pi}{5}\left(\cos^5(\pi/6) - \cos^5(1)\right)$$

$$\approx \frac{-128k\pi}{5}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - 1\right) = \frac{128k\pi}{5} - \frac{128k\pi\sqrt{3}}{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{256k\pi - 128k\pi\sqrt{3}}{10}}$$

X

$\frac{1}{2}$

PAGE SUPPLÉMENTAIRE

Utilisez cette page en cas de besoin. Indiquez clairement le numéro de la question.

PAGE SUPPLÉMENTAIRE

Utilisez cette page en cas de besoin. Indiquez clairement le numéro de la question.