MTH1102D Calcul II

Chapitre 6, section 2 : Les intégrales doubles sur des domaines généraux

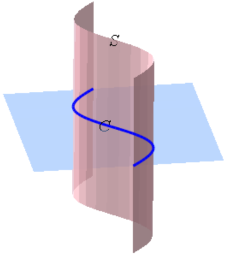
Exemple 7 : calcul d'un volume

Exemple 7 : calcul d'un volume

Définition

Un *cylindre* construit sur une courbe C du plan des (x, y) est la surface dont les points sont (x, y, z) avec $(x, y) \in C$ et $z \in \mathbb{R}$.

Un cylindre est la surface S balayée par les droites perpendiculaires à C dans $\mathbb{R}^3$.

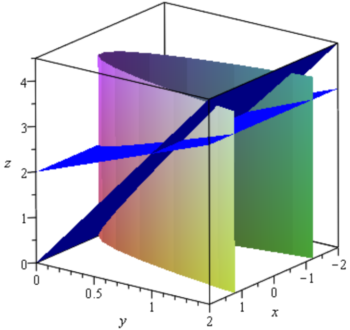


Une définition analogue existe pour une courbe dans le plan des (x, z) ou des (y, z).

Exemple 7 : calcul d'un volume

Calculer le volume de la région E de l'espace bornée par les plans $z = 3y$ et $z = 2 + y$ et par le cylindre parabolique $y = x^2$.

- E est bornée supérieurement et inférieurement par les plans.
- E est bornée horizontalement par le cylindre.



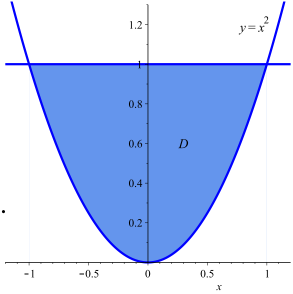
Exemple 7 : calcul d'un volume

Calculer le volume de la région E de l'espace bornée par les plans $z = 3y$ et $z = 2 + y$ et par le cylindre parabolique $y = x^2$.

- Intersection des plans : $3y = 2 + y \Rightarrow y = 1$.
- Projection de E dans le plan des (x, y) est

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\right\}.$$

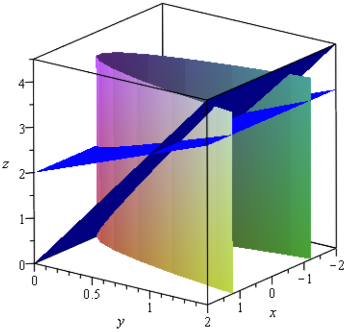
Domaine de type I.



Exemple 7 : calcul d'un volume

Calculer le volume de la région E de l'espace bornée par les plans $z = 3y$ et $z = 2 + y$ et par le cylindre parabolique $y = x^2$.

On a $2 + y \geq 3y$ si $(x, y) \in D$.

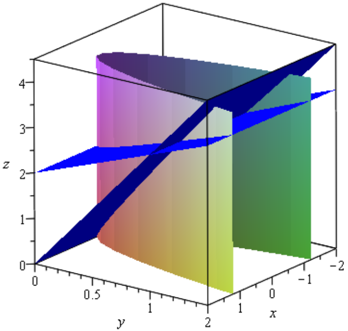


$$\text{vol}(E) = \iint_D (2 + y)\, dA - \iint_D 3y\, dA$$

Exemple 7 : calcul d'un volume

Calculer le volume de la région E de l'espace bornée par les plans $z = 3y$ et $z = 2 + y$ et par le cylindre parabolique $y = x^2$.

On a $2 + y \geq 3y$ si $(x, y) \in D$.

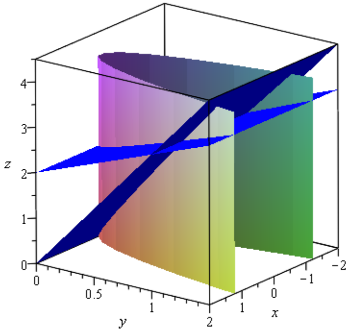


$$\mathrm{vol}(E) = \iint_D (2 + y)\, dA - \iint_D 3y\, dA = \iint_D [(2 + y) - 3y]\, dA$$

Exemple 7 : calcul d'un volume

Calculer le volume de la région E de l'espace bornée par les plans $z = 3y$ et $z = 2 + y$ et par le cylindre parabolique $y = x^2$.

On a $2 + y \geq 3y$ si $(x, y) \in D$.



$$\text{vol}(E) = \iint_D [(2 + y) - 3y] \, dA = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} [2 - 2y] \, dydx = \frac{16}{15}.$$

Résumé

- Étant donné une région de l'espace bornée par des surfaces, on peut calculer son volume à l'aide d'une intégrale double.