MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 4: Le théorème de Green

Énoncé du théorème de Green

Introduction

- Théorème de Green sous forme générale.
- Théorème de Green pour les champs vectoriels.

Énoncé du théorème de Green

Définition

Une courbe C dans le plan est *simple* si elle ne se recoupe pas elle-même (sauf aux extrémités dans le cas d'une courbe fermée).

Énoncé du théorème de Green

Définition

Une courbe C dans le plan est *simple* si elle ne se recoupe pas elle-même (sauf aux extrémités dans le cas d'une courbe fermée).

Définition

Une courbe fermée C dans le plan est *orientée positivement* si elle est parcourue dans le sens antihoraire.

Énoncé du théorème de Green

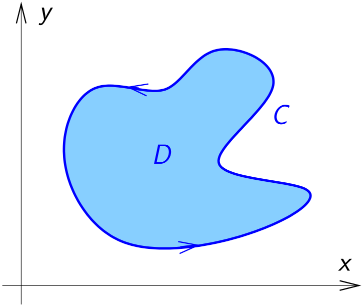
Définition

Une courbe C dans le plan est *simple* si elle ne se recoupe pas elle-même (sauf aux extrémités dans le cas d'une courbe fermée).

Définition

Une courbe fermée C dans le plan est *orientée positivement* si elle est parcourue dans le sens antihoraire.

Autrement dit, lorqu'on parcourt C dans le sens positif, la région D qu'elle délimite est toujours à gauche.



Énoncé du théorème de Green

Notation : Si C est une courbe fermée alors on note habituellement une intégrale curviligne sur C par $\oint_C$ au lieu de $\int_C$.

Énoncé du théorème de Green

Notation : Si C est une courbe fermée alors on note habituellement une intégrale curviligne sur C par $\displaystyle\oint_C$ au lieu de $\displaystyle\int_C$.

Théorème

Soit C une courbe fermée simple lisse par morceaux, orientée positivement, délimitant une région D du plan. Si P et Q sont des fonctions de deux variables possédant des dérivées partielles continue dans un voisinage de C alors

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, dA.$$

Énoncé du théorème de Green

Notation : Si C est une courbe fermée alors on note habituellement une intégrale curviligne sur C par $\oint_C$ au lieu de $\int_C$.

Théorème

Soit C une courbe fermée simple lisse par morceaux, orientée positivement, délimitant une région D du plan. Si P et Q sont des fonctions de deux variables possédant des dérivées partielles continue dans un voisinage de C alors

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

On se rappelle que si $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$ alors

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \left[P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\right] dt.$$

Énoncé du théorème de Green

Rappel : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et C est une courbe dans le plan alors

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_C P\,dx + Q\,dy.$$

Énoncé du théorème de Green

Rappel : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et C est une courbe dans le plan alors

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_C P\,dx + Q\,dy.$$

Reformulation du théorème de Green :

Théorème

Soit C une courbe fermée simple lisse par morceaux, orientée positivement, délimitant une région D du plan. Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ est un champ vectoriel possédant des dérivées partielles continues dans un voisinage de C alors

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Résumé

- Rappels des notations.

Résumé

- Rappels des notations.
- Notation pour les intégrales curviligne sur une courbe fermée.

Résumé

- Rappels des notations.
- Notation pour les intégrales curviligne sur une courbe fermée.
- Deux formulations du théorème de Green :

Résumé

- Rappels des notations.
- Notation pour les intégrales curviligne sur une courbe fermée.
- Deux formulations du théorème de Green :
    - Générale

Résumé

- Rappels des notations.
- Notation pour les intégrales curviligne sur une courbe fermée.
- Deux formulations du théorème de Green :
  - Générale
  - Pour les champs vectoriels.

Résumé

- Rappels des notations.
- Notation pour les intégrales curviligne sur une courbe fermée.
- Deux formulations du théorème de Green :
  - Générale
  - Pour les champs vectoriels.

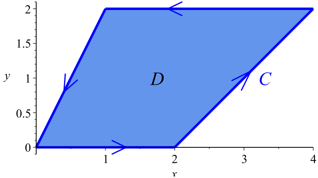
MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 4: Le théorème de Green

Exemple 1: calcul d'une intégrale curviligne à l'aide du théorème de Green

Ex. 1 : calcul d'une intégrale à l'aide du thm. de Green

Calculer $J = \int_C x^3\,dx + x^2 y\,dy$ où C est le quadrilatère de sommets $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,2)$, $(1,2)$, parcouru dans le sens antihoraire.



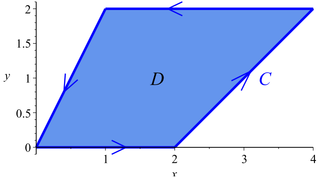
Première façon : calcul direct.

$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ et

$$J = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} x^3\,dx + x^2 y\,dy.$$

Ex. 1 : calcul d'une intégrale à l'aide du thm. de Green

Calculer $J = \int_C x^3\,dx + x^2y\,dy$ où C est le quadrilatère de sommets $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,2)$, $(1,2)$, parcouru dans le sens antihoraire.



Deuxième façon : théorème de Green.

Segments obliques :

$$y = 2x \Rightarrow x = y/2$$
$$y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2$$

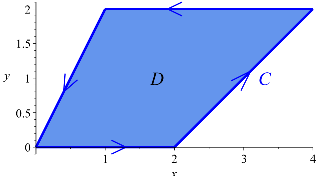
donc le domaine délimité par C est

$$D = \{(x,y)\,|\,y/2 \leq x \leq y+2, 0 \leq y \leq 2\}\,.$$

Ici, $P(x,y) = x^3$ et $Q(x,y) = x^2y$.

Ex. 1 : calcul d'une intégrale à l'aide du thm. de Green

Calculer $J = \int_C x^3\,dx + x^2 y\,dy$ où C est le quadrilatère de sommets $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,2)$, $(1,2)$, parcouru dans le sens antihoraire.



Deuxième façon : théorème de Green.

$$D = \{(x,y) \mid y/2 \le x \le y+2, 0 \le y \le 2\}$$

$$P(x,y) = x^3, Q(x,y) = x^2 y$$

Selon le théorème de Green,

$$\begin{aligned} J &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_0^2 \int_{y/2}^{y+2} (2xy - 0)\,dxdy = \frac{65}{3} \end{aligned}$$

Résumé

- Le théorème de Green donne une autre façon de calculer une intégrale curviligne autour d'une courbe fermée.
- Dans certains cas, l'intégrale double du théorème de Green est plus simple à évaluer.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 4: Le théorème de Green

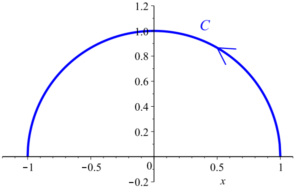
Exemple 2: calcul du travail d'un champ vectoriel à l'aide du théorème de Green

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi-cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.



Première façon : calcul direct.

$$\begin{aligned} \vec{r}\,'(t) &= -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} \\ \vec{F}(\vec{r}(t)) &= \sin t\left(e^{\cos t} - 2\right)\vec{i} + e^{\cos t}\vec{j} \\ \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) &= -\sin^2 t\left(e^{\cos t}\right) + \cos t\, e^{\cos t} \end{aligned}$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

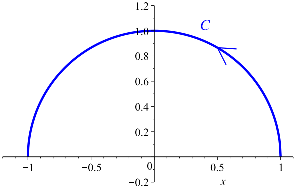
est très difficile à évaluer.

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.



Deuxième façon : théorème de Green.

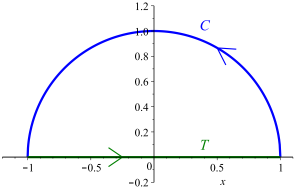
- La courbe C n'est pas fermée.

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.



Deuxième façon : théorème de Green.

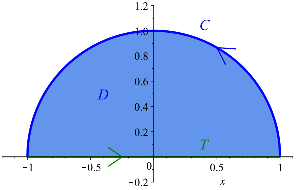
- La courbe C n'est pas fermée.
- Soit T le segment de $(-1,0)$ à $(1,0)$ et $\Gamma = C \cup T$.
- La courbe Γ est fermée et orientée positivement.

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.



Deuxième façon : théorème de Green.

- La courbe C n'est pas fermée.
- Soit T le segment de $(-1,0)$ à $(1,0)$ et $\Gamma = C \cup T$.
- La courbe Γ est fermée et orientée positivement.
- Soit D le domaine délimité par Γ.

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Selon le théorème de Green, si $P(x,y) = y(e^x - 2)$ et $Q(x,y) = e^x$ alors

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA \\
&= \iint_D [e^x - (e^x - 2)]\, dA = \iint_D 2\, dA \\
&= 2 \text{ aire}(D) = 2\left(\frac{1}{2}\right)(\pi)(1)^2 = \pi.
\end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.

D'autre part,

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} + \int_T \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

donc le travail cherché est

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} - \int_T \vec{F} \cdot \vec{dr}.$$

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Le segment T est paramétré par $\vec{R}(t) = t\vec{i}$, $-1 \leq t \leq 1$ donc

$$\begin{aligned}\int_T \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \int_{-1}^{1} \vec{F}(\vec{R}(t)) \cdot \vec{R}'(t)\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} \left[(e^t - 2)(0)\vec{i} + e^t\vec{j}\right] \cdot \vec{i}\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} 0\, dt = 0\end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul du travail à l'aide du théorème de Green

Calculer le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y) = y(e^x - 2)\vec{i} + e^x\vec{j}$$

le long du demi cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Finalement,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} - \int_T \vec{F} \cdot \vec{dr} = \pi - 0 = \pi.$$

Résumé

- Calcul du travail d'un champ en deux dimensions à l'aide du théorème de Green.
- Fermer la courbe pour pouvoir utiliser le théorème de Green.
- L'intégrale curviligne sur le morceau ajouté pour fermer la courbe doit être facile à évaluer.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 4: Le théorème de Green

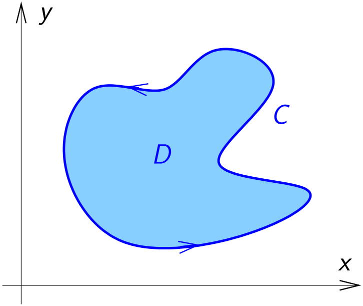
Calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée

Introduction

- Formules pour le calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée.

Calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée

Étant donné une courbe paramétrée fermée simple C orientée positivement, comment calculer l'aire de la région D qu'elle délimite ?



Le théorème de Green permet de répondre à cette question.

- **Donné :** le domaine D et une paramétrisation de sa frontière C
- **À déterminer :** le champ vectoriel $\vec{F}$.

Calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée

Étant donné une courbe paramétrée fermée simple C orientée positivement, comment calculer l'aire de la région D qu'elle délimite ?

Dans le théorème de Green, si on *choisit* de poser $P(x,y) = 0$ et $Q(x,y) = x$ alors

$$\begin{aligned}
\oint_C 0\,dx + x\,dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\
&= \iint_D (1-0)\,dA = \iint_D dA = \text{aire}(D).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\text{aire}(D) = \oint_C x\,dy.$$

Calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée

Étant donné une courbe paramétrée fermée simple C orientée positivement, comment calculer l'aire de la région D qu'elle délimite ?

- Si on pose $P(x, y) = -y$ et $Q(x, y) = 0$ on obtient

$$\text{aire}(D) = -\oint_C y\, dx.$$

- Si on pose $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$ et $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$ on obtient

$$\text{aire}(D) = \frac{1}{2}\oint_C x\, dy - y\, dx.$$

- D'autres formules sont possibles...

Calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée

Soit D la région délimitée par une courbe fermée C orientée positivement.

$$\begin{aligned}
\text{aire}(D) &= \oint_C x\,dy \\
\text{aire}(D) &= -\oint_C y\,dx \\
\text{aire}(D) &= \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx
\end{aligned}$$

Calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée

Remarques :

- Ces formules sont utiles si on dispose d'une paramétrisation de la frontière d'une région D et qu'il est difficile de représenter D comme un domaine de type I ou II.
- Si la courbe est orientée négativement, les formules donnent le *négatif* de l'aire. Il faut donc, dans ce cas, ajouter un signe $\ll - \gg$ devant chacune des formules.
- Le même principe permet d'expliquer le fonctionnement du *planimètre*, un appareil servant à détermier l'aire délimitée par une courbe représentée graphiquement (voir le document *Planimètre* sur le site du cours.

Résumé

- Formules pour calculer l'aire délimitée par une courbe paramétrée.
- Ces formules sont des applications du théorème de Green.

MTH1102D Calcul II

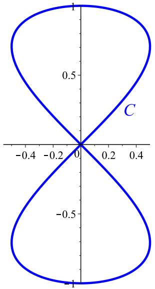
Chapitre 9, section 4: Le théorème de Green

Exemple 3: calcul de l'aire délimitée par une courbe paramétrée

Exemple 3 : calcul de l'aire délimitée par une courbe

Calculer l'aire délimitée par une boucle de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos t \sin t\vec{i} + \sin t\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

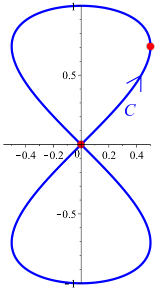


- Les deux boucles sont symétriques et délimitent la même aire.

Exemple 3 : calcul de l'aire délimitée par une courbe

Calculer l'aire délimitée par une boucle de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos t \sin t\vec{i} + \sin t\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



- Les deux boucles sont symétriques et délimitent la même aire.
- Puisque

$$\vec{r}(0) = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$

et

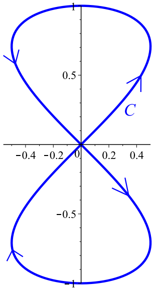
$$\vec{r}(\pi/4) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j},$$

la boucle du haut est parcourue dans le sens antihoraire (positif).

Exemple 3 : calcul de l'aire délimitée par une courbe

Calculer l'aire délimitée par une boucle de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos t \sin t \vec{i} + \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

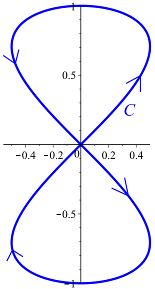


- Les deux boucles sont symétriques et délimitent la même aire.
- Puisque
$$\vec{r}(0) = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$
et
$$\vec{r}(\pi/4) = \tfrac{1}{2}\vec{i} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j},$$
la boucle du haut est parcourue dans le sens antihoraire (positif).
- La boucle du bas est parcourue dans le sens négatif.

Exemple 3 : calcul de l'aire délimitée par une courbe

Calculer l'aire délimitée par une boucle de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos t \sin t \vec{i} + \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



- Soit C_1 la boucle du haut et D la région qu'elle délimite.
- Puisque
$$\vec{r}(0) = \vec{0} = \vec{r}(\pi)$$
et que $y(t) \geq 0$ pour $t \in [0, \pi]$, la boucle C_1 correspond à l'intervalle du paramètre $0 \leq t \leq \pi$.
- La boucle du bas correspond à $\pi \leq t \leq 2\pi$.

Exemple 3 : calcul de l'aire délimitée par une courbe

Calculer l'aire délimitée par une boucle de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos t \sin t \vec{i} + \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Si $x = \cos t \sin t$ et $y = \sin t$ alors

$$\begin{aligned}
\text{aire}(D) &= \oint_C x\,dy = \int_0^\pi x(t)y'(t)\,dt \\
&= \int_0^\pi [\cos t \sin t][\cos t]\,dt \\
&= \int_0^\pi \cos^2 t \sin t\,dt \quad (u = \cos t, du = -\sin t) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Exemple 3 : calcul de l'aire délimitée par une courbe

Calculer l'aire délimitée par une boucle de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos t \sin t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Puisque $x = \cos t \sin t$ et $y = \sin t$, on a

$$\boxed{y^2 - x^2} = \sin^2 t - \cos^2 t \sin^2 t = \sin^2 t\,(1 - \cos^2 t) = \sin^2 t \sin^2 t = \sin^4 t = y^4$$

donc l'équation cartésienne de C est $y^2 - x^2 = y^4$.

Isolons x : $x = \pm\sqrt{y^2 - y^4} = \pm y\sqrt{1 - y^2}$ car $y \geq 0$.

De plus, $x = 0 \Rightarrow y^2 - y^4 = 0 \Rightarrow y = 0, \pm 1$.

Exemple 3 : calcul de l'aire délimitée par une courbe

Calculer l'aire délimitée par une boucle de la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos t \sin t \vec{i} + \sin t \vec{j}, \;\; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

D est une région de type II :

$$D = \left\{ (x, y) \,|\, -y\sqrt{1-y^2} \leq x \leq y\sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} \text{aire}(D) &= \iint_D 1 \, dA = \int_0^1 \int_{-y\sqrt{1-y^2}}^{y\sqrt{1-y^2}} dxdy \\ &= \int_0^1 2y\sqrt{1-y^2} \, dy = -\int_1^0 u^{1/2} \, du = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Résumé

- Déterminer l'intervalle du paramètre correspondant à une boucle de la courbe.
- Calculer l'aire délimitée par une boucle à l'aide des formules provenant du théorème de Green.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 1: Les surfaces paramétrées et leur aire

Surfaces paramétrées

Introduction

- Définition de surface paramétrée dans l'espace.

Surfaces paramétrées

Définition

Une *surface paramétrée* est une fonction vectorielle $\vec{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ qui associe à chaque couple de paramètres (u, v) un vecteur $\vec{R}(u, v) \in \mathbb{R}^3$.

Explicitement,

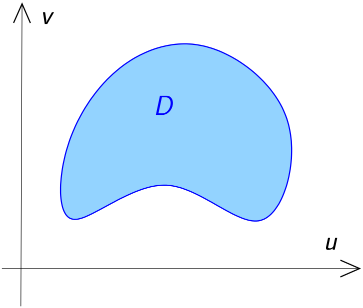
$$\vec{R}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in D$$

où D est le *domaine des paramètres*.

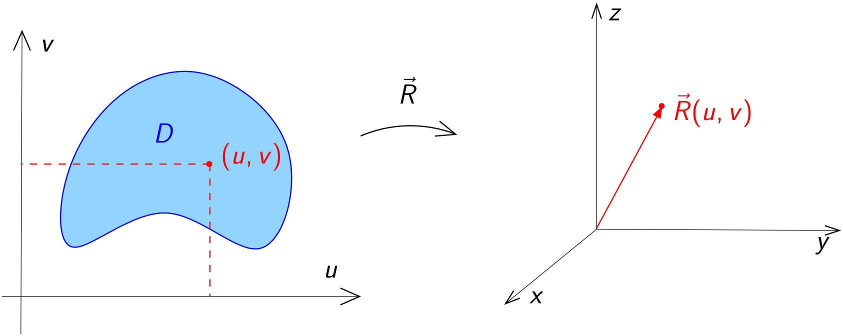
Autre forme : équations paramétriques

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \ (u, v) \in D$$

Surfaces paramétrées

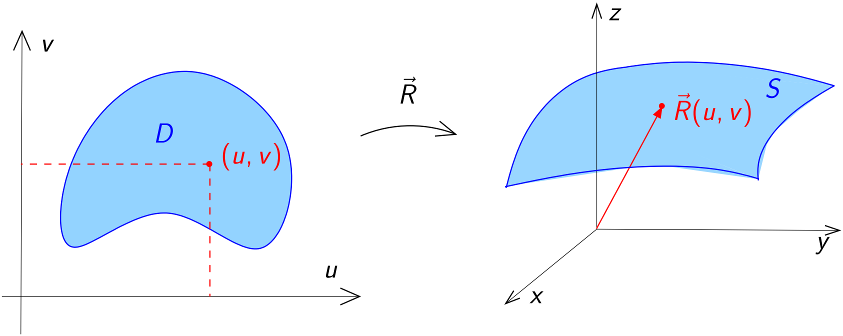


Surfaces paramétrées



À chaque $(u, v) \in D$ correspond un point $\vec{R}(u, v) \in \mathbb{R}^3$.

Surfaces paramétrées



L'ensemble de ces points forment une surface dans l'espace.

Résumé

- Surfaces pramétrées dans l'espace.
- Représentation graphique.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 1: Les surfaces paramétrées et leur aire

Exemple 1: surface paramétrée quelconque

Exemple 1 : surface paramétrée quelconque

Identifier la surface S paramétrée par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq 1.$$

- Ici, $x(u,v) = v\cos u,\ y(u,v) = v\sin u,\ z(u,v) = v.$
- Le domaine des paramètres est le rectangle $D = [0,2\pi] \times [0,1]$.
- Pour chaque point de S on a

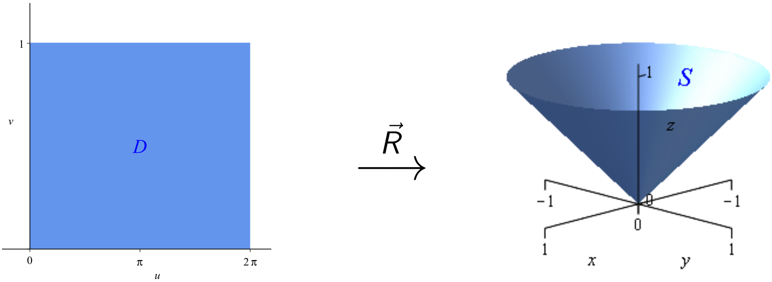
$$\begin{aligned} x(u,v)^2 + y(u,v)^2 &= (v\cos u)^2 + (v\sin u)^2 = v^2\left(\cos^2 u + \sin^2 u\right) \\ &= v^2 = z(u,v)^2 \end{aligned}$$

  donc l'équation cartésienne de S est $x^2 + y^2 = z^2$.
- Équation d'un cône circulaire.
- S est la partie de ce cône située entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Exemple 1 : surface paramétrée quelconque

Identifier la surface S paramétrée par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}, \quad 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 1.$$



Exemple 1 : surface paramétrée quelconque

Identifier la surface S paramétrée par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq 1.$$

- L'équation cylindrique du cône est $z = r$.
- Si on pose $u = \theta$ et $v = r$ alors

$$\begin{array}{ccccc} x & = & r\cos\theta & = & v\cos u \\ y & = & r\sin\theta & = & v\sin u \\ z & = & r & = & v \end{array}$$

et on obtient la paramétrisation donnée du cône.

Résumé

- Trouver l'équation cartésienne d'une surface paramétrée pour pouvoir l'identifier.
- La paramétrisation donnée provient de l'équation cylindrique de la surface.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 1: Les surfaces paramétrées et leur aire

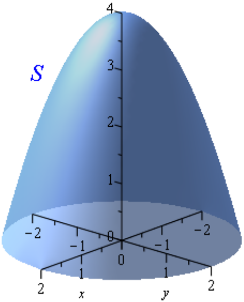
Exemple 2: surface d'équation $z = f(x, y)$

Exemple 2 : surface d'équation $z = f(x, y)$

Donner une paramétrisation de la partie S du paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan des (x, y).

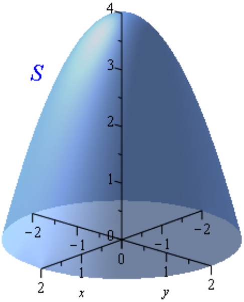
Exemple 2 : surface d'équation $z = f(x, y)$

Donner une paramétrisation de la partie S du paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan des (x, y).



Exemple 2 : surface d'équation $z = f(x, y)$

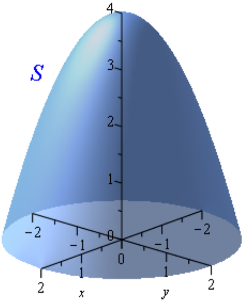
Donner une paramétrisation de la partie S du paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan des (x, y).



- On choisit x et y comme paramètres.

Exemple 2 : surface d'équation $z = f(x, y)$

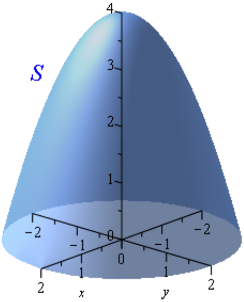
Donner une paramétrisation de la partie S du paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan des (x, y).



- On choisit x et y comme paramètres.
- Alors $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

Exemple 2 : surface d'équation $z = f(x, y)$

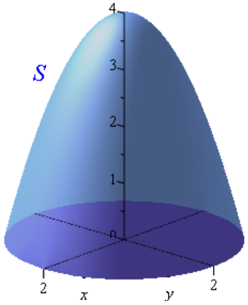
Donner une paramétrisation de la partie S du paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan des (x, y).



- On choisit x et y comme paramètres.
- Alors $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
  et S est paramétrée par
  $$\vec{R}(x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + (4 - x^2 - y^2)\,\vec{k}.$$

Exemple 2 : surface d'équation $z = f(x, y)$

Donner une paramétrisation de la partie S du paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan des (x, y).



- On choisit x et y comme paramètres.

- Alors $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
  et S est paramétrée par
  $$\vec{R}(x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + (4 - x^2 - y^2)\,\vec{k}.$$

- La projection de S dans le plan des (x, y) est le disque $D : x^2 + y^2 \leq 4$, qui est le domaine des paramètres.

Exemple 2 : surface d'équation $z = f(x, y)$

En général

Une surface S d'équation $z = f(x, y)$ peut être paramétrée par

$$\vec{R}(x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + f(x, y)\,\vec{k}$$

avec $(x, y) \in D$, où D est la projection de S dans le plan des (x, y).

Exemple 2 : surface d'équation $z = f(x, y)$

En général

Une surface S d'équation $z = f(x, y)$ peut être paramétrée par
$$\vec{R}(x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + f(x, y)\,\vec{k}$$
avec $(x, y) \in D$, où D est la projection de S dans le plan des (x, y).

Des formules semblables peuvent être employées pour des surfaces $x = f(y, z)$ ou $y = f(x, z)$.

Exemple 2 : surface d'équation $z = f(x, y)$

Remarques :

Exemple 2 : surface d'équation $z = f(x, y)$

Remarques :

- La paramétrisation d'une surface donnée n'est pas unique.

Exemple 2 : surface d'équation $z = f(x, y)$

Remarques :

- La paramétrisation d'une surface donnée n'est pas unique.
- Par exemple, le paraboloïde du début peut aussi être paramétré par
$$\vec{R}(u, v) = v \cos u \ \vec{i} + v \sin u \ \vec{j} + (4 - v^2)\,\vec{k}$$
avec $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2]$.

Exemple 2 : surface d'équation $z = f(x, y)$

Remarques :

- La paramétrisation d'une surface donnée n'est pas unique.
- Par exemple, le paraboloïde du début peut aussi être paramétré par
$$\vec{R}(u, v) = v \cos u \; \vec{i} + v \sin u \; \vec{j} + (4 - v^2) \; \vec{k}$$
avec $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2]$.

  Cette nouvelle paramétrisation provient de l'équation cylindrique du paraboloïde : $z = 4 - r^2$.

Résumé

- Paramétrisation d'une surface dont l'équation cartésienne est connue.

Résumé

- Paramétrisation d'une surface dont l'équation cartésienne est connue.
- La paramétrisation d'une surface n'est pas unique.

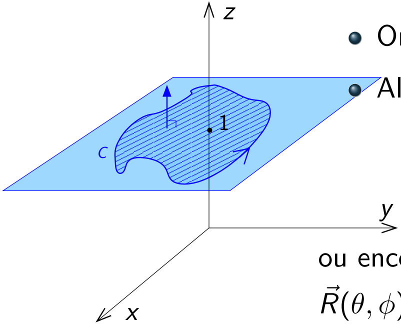
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 1: Les surfaces paramétrées et leur aire

Exemple 3: paramétrisation d'une surface à l'aide de son équation sphérique

Ex. 3 : paramétrisation à l'aide d'une équation sphérique

Donner une paramétrisation de la sphère de rayon c centrée à l'origine.



- Équation sphérique de la sphère : $\rho = c$.
- On choisit θ et ϕ comme paramètres.
- Alors

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta &= c \sin\phi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta &= c \sin\phi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\phi &= c \cos\phi \end{aligned}$$

ou encore,

$$\vec{R}(\theta, \phi) = c \sin\phi \cos\theta \vec{i} + c \sin\phi \sin\theta \vec{j} + c \cos\phi \vec{k}$$

avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq \phi \leq \pi$.

Résumé

- Paramétrisation d'une surface dont l'équation sphérique est connue.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 1: Les surfaces paramétrées et leur aire

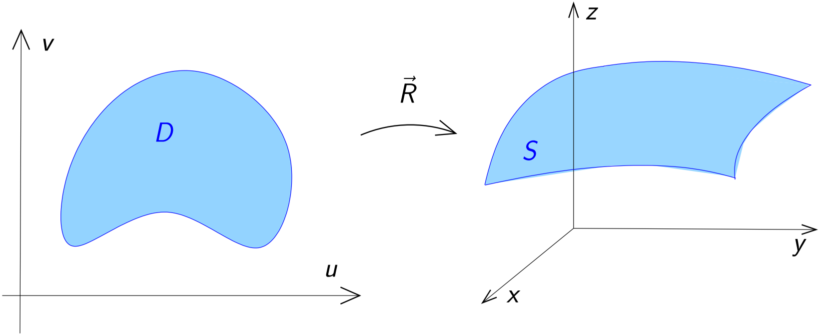
Courbes sur une surface paramétrée

Introduction

- Courbes paramétrées appartenant à une surface paramétrée.

Courbes sur une surface paramétrée

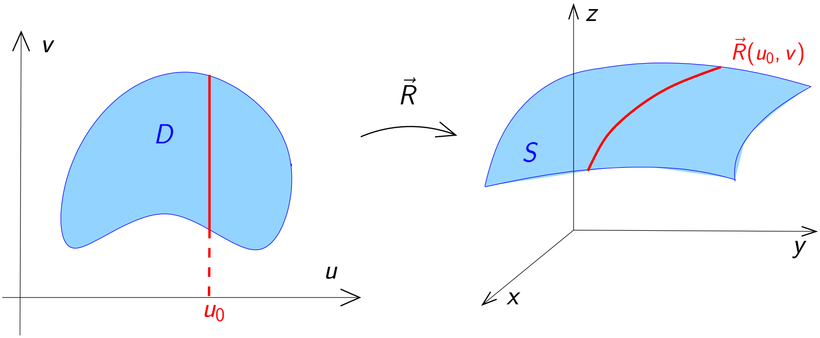
On considère une surface S paramétrée par une fonction vectorielle $\vec{R}(u, v)$ avec $(u, v) \in D$.



Courbes sur une surface paramétrée

On considère une surface S paramétrée par une fonction vectorielle $\vec{R}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$.

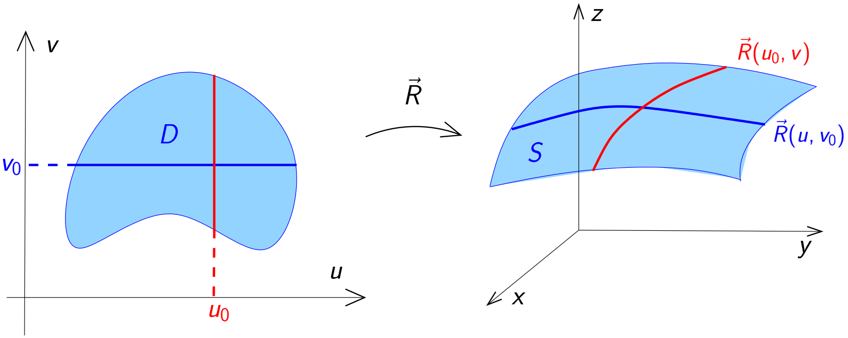
- Si on fixe $u = u_0$ et qu'on fait varier v alors on obtient une courbe paramétrée située sur S.



Courbes sur une surface paramétrée

On considère une surface S paramétrée par une fonction vectorielle $\vec{R}(u, v)$ avec $(u, v) \in D$.

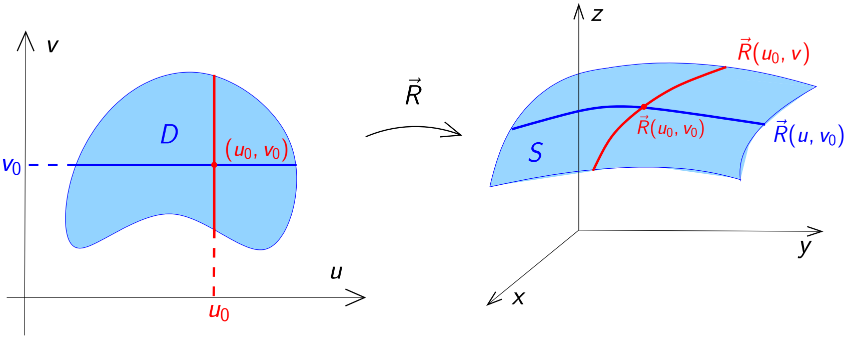
- Si on fixe $v = v_0$ et qu'on fait varier u alors on obtient une courbe paramétrée située sur S.



Courbes sur une surface paramétrée

On considère une surface S paramétrée par une fonction vectorielle $\vec{R}(u, v)$ avec $(u, v) \in D$.

- Ces deux courbes se rencontrent au point $\vec{R}(u_0, v_0)$.



Résumé

- Fixer un paramètre dans la paramétrisation d'une surface donne une courbe paramétrée.
- Cette courbe est située sur la surface.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 1: Les surfaces paramétrées et leur aire

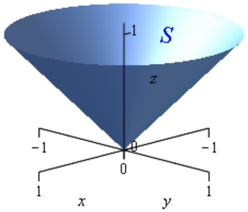
Exemple 4: courbes sur une surface paramétrée

Exemple 4 : courbes sur une surface paramétrée

Soit S le cône paramétré par $\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $v \geq 0$.

a) Identifier les courbes obtenues en fixant $u = u_0$.

b) Identifier les courbes obtenues en fixant $v = v_0$.

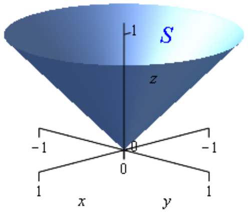


Exemple 4 : courbes sur une surface paramétrée

Soit S le cône paramétré par $\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $v \geq 0$.

a) Identifier les courbes obtenues en fixant $u = u_0$.

b) Identifier les courbes obtenues en fixant $v = v_0$.



- Si $u = u_0$ alors

$$\begin{aligned} \vec{R}(u_0, v) &= v\cos u_0\,\vec{i} + v\sin u_0\,\vec{j} + v\vec{k} \\ &= v(\cos u_0\,\vec{i} + \sin u_0\,\vec{j} + \vec{k}),\ \ v \geq 0 \\ &= v\vec{d} \end{aligned}$$

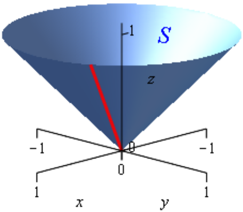
où $d = \cos u_0\,\vec{i} + \sin u_0\,\vec{j} + \vec{k}$ est un vecteur fixé.

Exemple 4 : courbes sur une surface paramétrée

Soit S le cône paramétré par $\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $v \geq 0$.

a) Identifier les courbes obtenues en fixant $u = u_0$.

b) Identifier les courbes obtenues en fixant $v = v_0$.



- Si $u = u_0$ alors

$$\begin{aligned}\vec{R}(u_0, v) &= v\cos u_0\,\vec{i} + v\sin u_0\,\vec{j} + v\vec{k}\\ &= v(\cos u_0\,\vec{i} + \sin u_0\,\vec{j} + \vec{k}),\ \ v \geq 0\\ &= v\vec{d}\end{aligned}$$

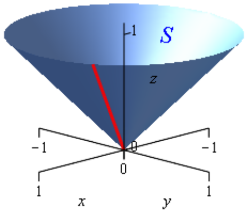
où $d = \cos u_0\,\vec{i} + \sin u_0\,\vec{j} + \vec{k}$ est un vecteur fixé.

- Cette courbe est une demi-droite issue de l'origine.

Soit S le cône paramétré par $\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $v \geq 0$.

a) Identifier les courbes obtenues en fixant $u = u_0$.

b) Identifier les courbes obtenues en fixant $v = v_0$.



- Si $v = v_0$ alors

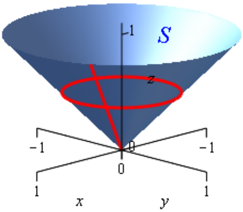
$$\vec{R}(u, v_0) = v_0 \cos u\vec{i} + v_0 \sin u\vec{j} + v_0\vec{k}$$

Exemple 4 : courbes sur une surface paramétrée

Soit S le cône paramétré par $\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $v \geq 0$.

a) Identifier les courbes obtenues en fixant $u = u_0$.

b) Identifier les courbes obtenues en fixant $v = v_0$.



- Si $v = v_0$ alors
$$\vec{R}(u, v_0) = v_0 \cos u\vec{i} + v_0 \sin u\vec{j} + v_0\vec{k}$$
- Cette courbe est un cercle de rayon v_0 situé à hauteur v_0.

Résumé

- Courbes sur une surface obtenues en fixant un paramètre dans la paramétrisation d'un cône.
- Ces courbes peuvent être identifiées car leur équation vectorielle est connue.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 1: Les surfaces paramétrées et leur aire

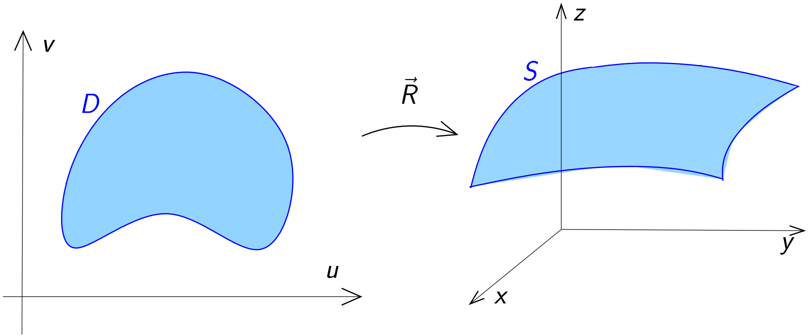
Aire d'une surface paramétrée

Introduction

- Construction d'une intégrale calculant l'aire d'une surface paramétrée.

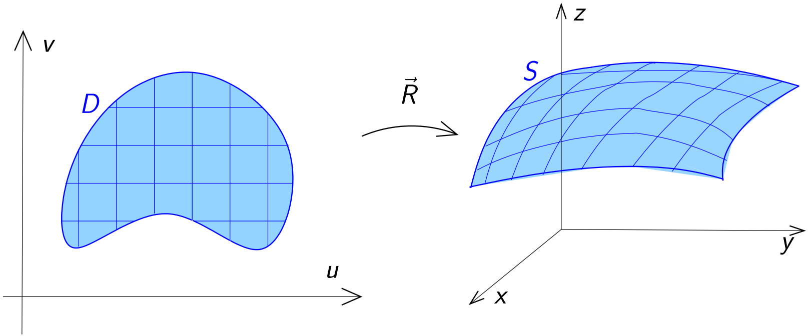
Aire d'une surface paramétrée

Calculer l'aire de la surface S paramétrée par $\vec{R}(u,v)$, $(u,v) \in D$.



Aire d'une surface paramétrée

Calculer l'aire de la surface S paramétrée par $\vec{R}(u, v)$, $(u, v) \in D$.

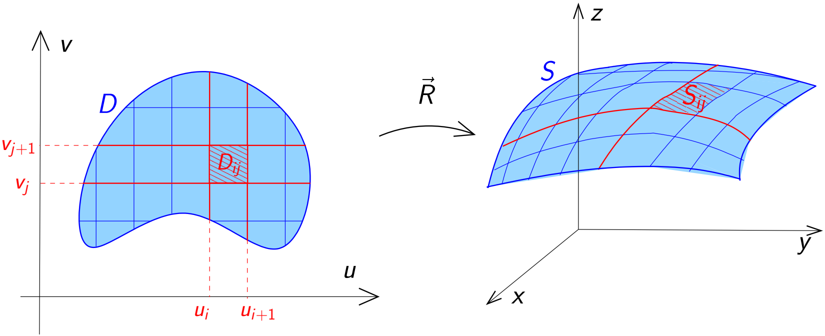


On subdivise D en sous-domaines D_{ij}.

Ceci donne une subdivision de S en sous-régions S_{ij}.

Aire d'une surface paramétrée

Calculer l'aire de la surface S paramétrée par $\vec{R}(u,v)$, $(u,v) \in D$.



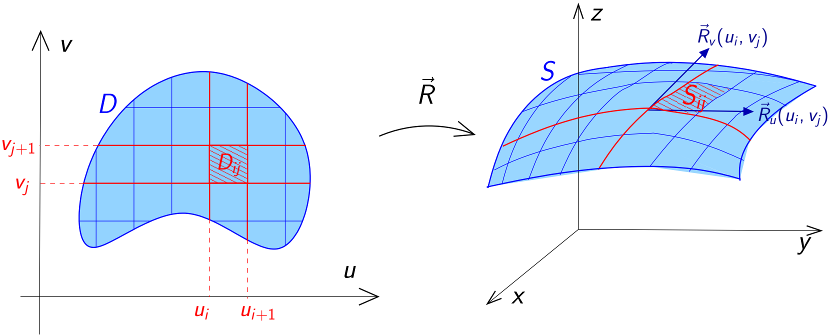
En fixant $u = u_i$ et $v = v_j$ on définit une sous-région S_{ij}.

Les courbes $\vec{R}(u_i, v)$ et $\vec{R}(u, v_j)$ forment deux côtés de S_{ij}.

Ces courbes se croisent au point $\vec{R}(u_i, v_j)$ de S.

Aire d'une surface paramétrée

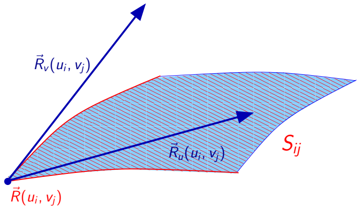
Calculer l'aire de la surface S paramétrée par $\vec{R}(u,v)$, $(u,v) \in D$.



Les dérivées partielles $\vec{R}_u(u_i, v_j)$ et $\vec{R}_v(u_i, v_j)$ sont des vecteurs tangents à S en $\vec{R}(u_i, v_j)$.

Aire d'une surface paramétrée

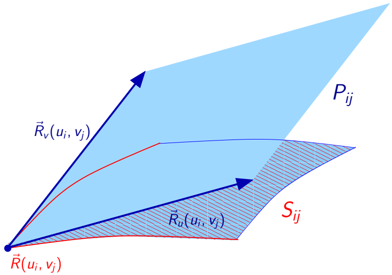
Calculer l'aire de la surface S paramétrée par $\vec{R}(u,v)$, $(u,v) \in D$.



- On veut calculer l'aire de la sous-région S_{ij}.
- Si $\vec{R}_u(u_i, v_j)$ et $\vec{R}_v(u_i, v_j)$ sont linéairement indépendants alors ils engendrent le plan tangent à S en $\vec{R}(u_i, v_j)$.

Aire d'une surface paramétrée

Calculer l'aire de la surface S paramétrée par $\vec{R}(u,v)$, $(u,v) \in D$.



- Soit P_{ij} le parallélogramme engendré par les vecteurs tangents $\vec{R}_u(u_i, v_j)$ et $\vec{R}_v(u_i, v_j)$.
- $\text{aire}(P_{ij}) = ||\vec{R}_u(u_i, v_j) \times \vec{R}_v(u_i, v_j)||$
- Si S_{ij} est petit alors on approxime $\text{aire}(S_{ij})$ par $\text{aire}(P_{ij})$ « mise à l'échelle » en multipliant par $\text{aire}(D_{ij}) = \Delta A_{ij}$.
- Cette mise à l'échelle tient compte du fait qu'une subdivision plus fine de D produit des sous-régions S_{ij} plus petites.

Aire d'une surface paramétrée

Calculer l'aire de la surface S paramétrée par $\vec{R}(u,v)$, $(u,v) \in D$.

- On approxime
$$\text{aire}(S_{ij}) \approx \text{aire}(P_{ij})\Delta A_{ij} = ||\vec{R}_u(u_i,v_j) \times \vec{R}_v(u_i,v_j)||\Delta A_{ij}$$

- On a
$$\text{aire}(S) = \sum_i \sum_j \text{aire}(S_{ij}) \approx \sum_i \sum_j ||\vec{R}_u(u_i,v_j) \times \vec{R}_v(u_i,v_j)||\Delta A_{ij}$$

- Lorsque le nombre de subdivisions de D augmente, les approximations deviennent des égalités et la double somme de Riemann tend vers une intégrale.

- Ainsi,
$$\text{aire}(S) = \iint_D ||\vec{R}_u(u,v) \times \vec{R}_v(u,v)||\, dA$$
où dA est $du\,dv$ ou $dv\,du$.

Aire d'une surface paramétrée

Théorème

Si S est une surface paramétrée par $\vec{R}(u, v)$ avec $(u, v) \in D$ et que $\vec{R}_u \times \vec{R}_v \neq \vec{0}$ sur S alors

$$\text{aire}(S) = \iint_D ||\vec{R}_u(u, v) \times \vec{R}_v(u, v)||\, dA$$

- Les dérivées partielles $\vec{R}_u$ et $\vec{R}_v$ s'obtiennent en dérivant $\vec{R}$ composante à composante selon la variable donnée.

Aire d'une surface paramétrée

Théorème

Si S est une surface paramétrée par $\vec{R}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$ et que $\vec{R}_u \times \vec{R}_v \neq \vec{0}$ sur S alors

$$\text{aire}(S) = \iint_D ||\vec{R}_u(u,v) \times \vec{R}_v(u,v)||\, dA$$

- Les dérivées partielles $\vec{R}_u$ et $\vec{R}_v$ s'obtiennent en dérivant $\vec{R}$ composante à composante selon la variable donnée.
- L'expression $||\vec{R}_u(u,v) \times \vec{R}_v(u,v)||\, dA$ est un « petit élément d'aire » et est notée dS.

Résumé

- Esquisse de la construction de l'intégrale permettant de calculer l'aire d'une surface.
- Formule pour le calcul de l'aire d'une surface paramétrée.
- Notion de ≪ petit élément d'aire d'une surface ≫.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 1: Les surfaces paramétrées et leur aire

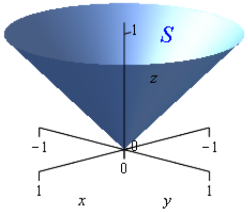
Exemple 5: aire d'une surface quelconque

Exemple 5 : aire d'une surface quelconque

Calculer l'aire de la partie S du cône paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$$

située entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.



- S correspond aux valeurs des paramètres $0 \leq u \leq 2\pi$ et $0 \leq v \leq 1$.
- On a

$$\begin{aligned} \vec{R}_u &= -v\sin u\,\vec{i} + v\cos u\,\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{R}_v &= \cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

Exemple 5 : aire d'une surface quelconque

Calculer l'aire de la partie S du cône paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$$

située entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Si $\vec{R}_u = -v\sin u\,\vec{i} + v\cos u\,\vec{j}$ et $\vec{R}_v = \cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j} + \vec{k}$ alors

$$\vec{R}_u \times \vec{R}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{vmatrix}$$

Exemple 5 : aire d'une surface quelconque

Calculer l'aire de la partie S du cône paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$$

située entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Si $\vec{R}_u = -v\sin u\,\vec{i} + v\cos u\,\vec{j}$ et $\vec{R}_v = \cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j} + \vec{k}$ alors

$$\begin{aligned}
\vec{R}_u \times \vec{R}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}(v\cos u - 0)
\end{aligned}$$

Exemple 5 : aire d'une surface quelconque

Calculer l'aire de la partie S du cône paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$$

située entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Si $\vec{R}_u = -v\sin u\,\vec{i} + v\cos u\,\vec{j}$ et $\vec{R}_v = \cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j} + \vec{k}$ alors

$$\begin{aligned}\vec{R}_u \times \vec{R}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(v\cos u - 0) - \vec{j}(-v\sin u - 0)\end{aligned}$$

Exemple 5 : aire d'une surface quelconque

Calculer l'aire de la partie S du cône paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$$

située entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Si $\vec{R}_u = -v\sin u\,\vec{i} + v\cos u\,\vec{j}$ et $\vec{R}_v = \cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j} + \vec{k}$ alors

$$\begin{aligned}
\vec{R}_u \times \vec{R}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}(v\cos u - 0) - \vec{j}(-v\sin u - 0) + \vec{k}(-v\sin^2 u - v\cos^2 u)
\end{aligned}$$

Exemple 5 : aire d'une surface quelconque

Calculer l'aire de la partie S du cône paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$$

située entre les plans $z = 0$ et $z = 1$.

Si $\vec{R}_u = -v\sin u\,\vec{i} + v\cos u\,\vec{j}$ et $\vec{R}_v = \cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j} + \vec{k}$ alors

$$\begin{aligned}
\vec{R}_u \times \vec{R}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}(v\cos u - 0) - \vec{j}(-v\sin u - 0) + \vec{k}(-v\sin^2 u - v\cos^2 u) \\
&= v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} - v\vec{k}
\end{aligned}$$

Exemple 5 : aire d'une surface quelconque

Calculer l'aire de la partie S du cône paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} + v\vec{k}$$

située entre les plans $z=0$ et $z=1$.

Si $\vec{R}_u \times \vec{R}_v = v\cos u\,\vec{i} + v\sin u\,\vec{j} - v\vec{k}$ alors

$$||\vec{R}_u \times \vec{R}_v|| = \sqrt{v^2\cos^2 u + v^2\sin^2 u + v^2} = \sqrt{2v^2} = \sqrt{2}v$$

car $v \geq 0$.
Donc

$$\begin{aligned} \text{aire}(S) &= \iint_D ||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}v\,dvdu \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} du = \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Résumé

- Rappel du calcul d'un déterminant.
- Calcul de l'aire d'une surface paramétrée.

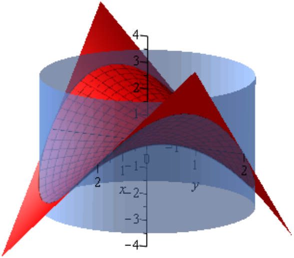
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 1: Les surfaces paramétrées et leur aire

Exemple 6: aire d'une surface $z = f(x, y)$

Exemple 6 : aire d'une surface $z = f(x, y)$

Calculer l'aire de la partie S de la surface $z = xy$ située « à l'intérieur » du cylindre $x^2 + y^2 = 4$.



S est la partie quadrillée de la surface en rouge

- La surface S peut être paramétrée par

$$\vec{R}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + xy\vec{k}$$

- Le domaine des paramètres est la projection de S dans le plan des (x, y) :

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Exemple 6 : aire d'une surface $z = f(x, y)$

Calculer l'aire de la partie S de la surface $z = xy$ située « à l'intérieur » du cylindre $x^2 + y^2 = 4$.

On calcule

$$
\begin{aligned}
\vec{R}_x &= \vec{i} + y\vec{k} \\
\vec{R}_y &= \vec{j} + x\vec{k} \\
\vec{R}_x \times \vec{R}_y &= -y\vec{i} - x\vec{j} + \vec{k} \\
||\vec{R}_x \times \vec{R}_y|| &= \sqrt{x^2 + y^2 + 1}
\end{aligned}
$$

Exemple 6 : aire d'une surface $z = f(x, y)$

Calculer l'aire de la partie S de la surface $z = xy$ située ≪ à l'intérieur ≫ du cylindre $x^2 + y^2 = 4$.

Si $||\vec{R}_x \times \vec{R}_y|| = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ alors

$$\begin{aligned}
\text{aire}(S) &= \iint_D ||\vec{R}_x \times \vec{R}_y||\, dA \\
&= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{r^2 + 1}\, r\, dr d\theta \quad (u = r^2 + 1, du = 2r\, dr) \\
&= \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 1)
\end{aligned}$$

Résumé

- Paramétrisation d'une surface $z = f(x, y)$.
- Calcul de l'aire d'une surface.