



POLYTECHNIQUE  
MONTRÉAL

Département de mathématiques et de génie industriel  
MTH1102D - Calcul II  
Été 2023 - Devoir 12

### Consignes

- Le devoir est à rendre dimanche le **13 août** avant 23h55 sur le site Moodle du cours.
- Les consignes pour la remise et la présentation du devoir sont disponibles sur le site Moodle du cours.
- Vous devez donner les grandes étapes de calcul des intégrales.
- Dans tous les cas, la valeur exacte des intégrales est exigée, et non une approximation décimale.

### Question 1

Soit  $S$  la partie du cylindre  $x^2 + y^2 = 16$  situé entre les plans  $z = 10 + x$  et  $z = 0$ . La surface  $S$  est orientée au point  $(4, 0, 5)$  par le vecteur normal  $\vec{i}$ . En utilisant un théorème du cours, calculez le flux du champ vectoriel  $\vec{F}$  défini par

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2)\vec{i} + \ln(1 + z^2)\vec{j} + 2z\vec{k}$$

à travers  $S$ .

### Question 2

- a) Soit  $B$  un solide situé entièrement au dessus du plan  $z = 1$  et dont la densité est inversement proportionnelle au carré de la distance au plan  $z = 0$ , et qui est délimité par une surface fermée  $S$ . Montrez que la masse de ce solide peut être calculée à l'aide de la formule

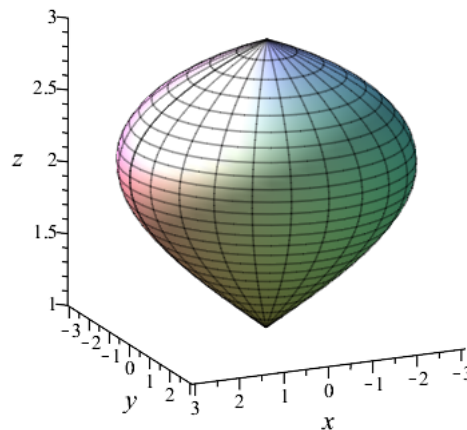
$$m = -c \iint_S \frac{1}{z} \vec{k} \cdot d\vec{S},$$

où  $c$  est la constante de proportionnalité.

- b) On considère maintenant un solide  $B$  comme en a) et délimité par la surface  $S$  paramétrée par

$$\vec{R}(u, v) = u(4 - u^2) \cos(v) \vec{i} + u(4 - u^2) \sin(v) \vec{j} + (1 + u) \vec{k}, \quad (u, v) \in [0, 2] \times [0, 2\pi].$$

Le solide  $B$  est illustré ci-dessous.



Calculez la masse de  $B$ . Vous pouvez supposer que  $c = 1$ .

*Bien que les intégrales soient faciles, elles peuvent être longues à calculer donc vous pouvez utiliser un logiciel pour les calculs algébriques. Assurez-vous de bien indiquer les techniques employées pour l'intégration.*