MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 4: Le théorème de Stokes

Exemple 2: calcul de l'intégrale de surface à l'aide du théorème de Stokes

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

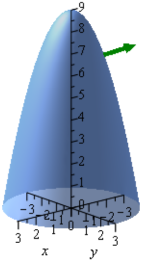
où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

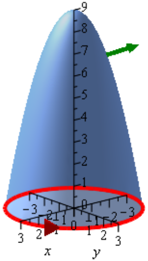


Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.



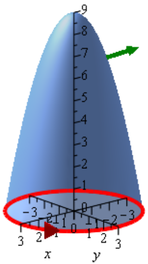
- Le bord orienté positivement de S est le cercle $C : x^2 + y^2 = 9$, parcouru dans le sens antihoraire lorsque vu du-dessus.

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.



- Le bord orienté positivement de S est le cercle $C : x^2 + y^2 = 9$, parcouru dans le sens antihoraire lorsque vu du-dessus.
- Selon le théorème de Stokes,

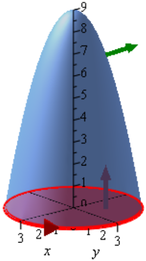
$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.



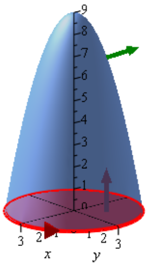
- La courbe C est aussi le bord du disque $D : x^2 + y^2 \leq 9$.

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.



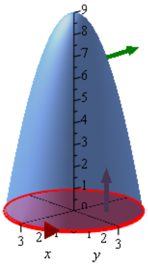
- La courbe C est aussi le bord du disque $D : x^2 + y^2 \leq 9$.
- L'orientation de D compatible avec celle de C est donnée par un vecteur normal pointant vers le haut.

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.



- La courbe C est aussi le bord du disque $D : x^2 + y^2 \leq 9$.
- L'orientation de D compatible avec celle de C est donnée par un vecteur normal pointant vers le haut.
- Selon le théorème de Stokes,

$$\iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

On a donc

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

D est paramétrée par $\vec{R}(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$ avec $(x,y) \in D$.

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

D est paramétrée par $\vec{R}(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$ avec $(x,y) \in D$.

On calcule

$$\vec{R}_x \times \vec{R}_y \;=\; \vec{k}$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

D est paramétrée par $\vec{R}(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$ avec $(x,y)\in D$.

On calcule

$$\begin{aligned} \vec{R}_x \times \vec{R}_y &= \vec{k} \\ \operatorname{rot}\vec{F} &= (2z\sin z^2 - x\cos z)\,\vec{i} - 2z\sin z^2\,\vec{j} + (3y^2 + \sin z)\,\vec{k} \end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

D est paramétrée par $\vec{R}(x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$ avec $(x, y) \in D$.

On calcule

$$\begin{aligned} \vec{R}_x \times \vec{R}_y &= \vec{k} \\ \operatorname{rot} \vec{F} &= (2z \sin z^2 - x \cos z)\,\vec{i} - 2z \sin z^2\,\vec{j} + (3y^2 + \sin z)\,\vec{k} \\ \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{R}(x, y)) &= -x\,\vec{i} + 3y^2\,\vec{k} \end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

Ainsi,

$$\iint_D \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} \quad = \quad \iint_D \operatorname{rot}\vec{F}(\vec{R}(x,y))\cdot\left(\vec{R}_x\times\vec{R}_y\right)\,dA$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{R}(x, y)) \cdot \left(\vec{R}_x \times \vec{R}_y\right)\, dA \\ &= \iint_D [-x\,\vec{i} + 3y^2\,\vec{k}] \cdot \vec{k}\, dA \end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\iint_D \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_D \operatorname{rot}\vec{F}(\vec{R}(x,y))\cdot\left(\vec{R}_x\times\vec{R}_y\right)\,dA\\ &= \iint_D[-x\,\vec{i} + 3y^2\,\vec{k}]\cdot\,\vec{k}\,dA = \iint_D 3y^2\,dA\end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_D \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_D \operatorname{rot}\vec{F}(\vec{R}(x,y))\cdot\left(\vec{R}_x\times\vec{R}_y\right)\,dA \\
&= \iint_D [-x\,\vec{i} + 3y^2\,\vec{k}]\cdot\,\vec{k}\,dA = \iint_D 3y^2\,dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 3r^2\sin^2\theta\,r\,drd\theta
\end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{R}(x, y)) \cdot \left(\vec{R}_x \times \vec{R}_y\right)\, dA \\
&= \iint_D [-x\,\vec{i} + 3y^2\,\vec{k}] \cdot \vec{k}\, dA = \iint_D 3y^2\, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^3 3r^2 \sin^2\theta\, r\, drd\theta = \frac{243}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

En conclusion, l'intégrale cherchée est

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \frac{243}{4}\pi.$$

Résumé

- Deux utilisations successives du théorème de Stokes ont permis de remplacer la surface donnée par une surface plus simple.

Résumé

- Deux utilisations successives du théorème de Stokes ont permis de remplacer la surface donnée par une surface plus simple.
- Calcul d'une intégrale de surface à l'aide du théorème de Stokes.