MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 1: Les surfaces paramétrées et leur aire

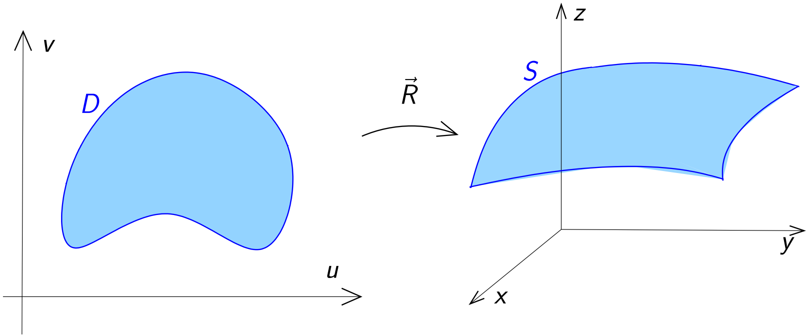
Aire d'une surface paramétrée

Introduction

- Construction d'une intégrale calculant l'aire d'une surface paramétrée.

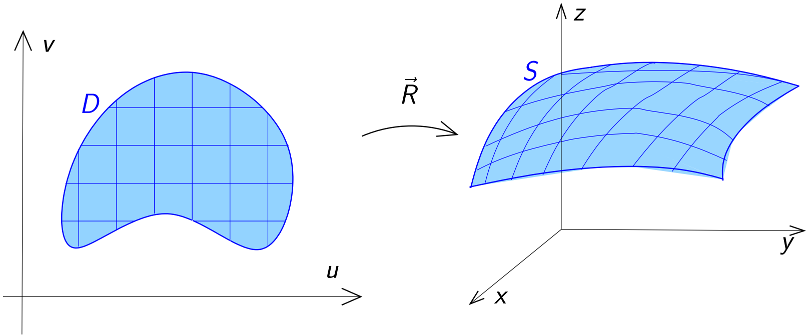
Aire d'une surface paramétrée

Calculer l'aire de la surface S paramétrée par $\vec{R}(u,v)$, $(u,v) \in D$.



Aire d'une surface paramétrée

Calculer l'aire de la surface S paramétrée par $\vec{R}(u,v)$, $(u,v) \in D$.

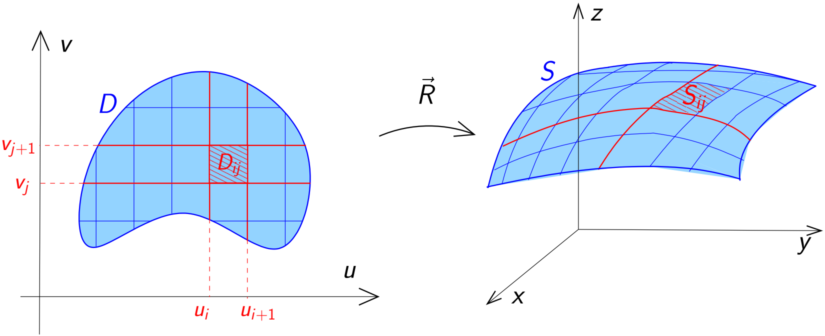


On subdivise D en sous-domaines D_{ij}.

Ceci donne une subdivision de S en sous-régions S_{ij}.

Aire d'une surface paramétrée

Calculer l'aire de la surface S paramétrée par $\vec{R}(u,v)$, $(u,v) \in D$.



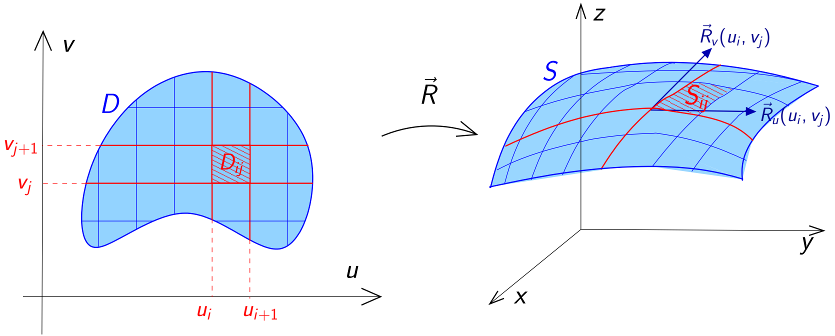
En fixant $u = u_i$ et $v = v_j$ on définit une sous-région S_{ij}.

Les courbes $\vec{R}(u_i, v)$ et $\vec{R}(u, v_j)$ forment deux côtés de S_{ij}.

Ces courbes se croisent au point $\vec{R}(u_i, v_j)$ de S.

Aire d'une surface paramétrée

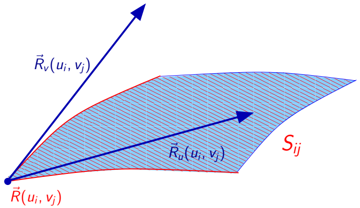
Calculer l'aire de la surface S paramétrée par $\vec{R}(u,v)$, $(u,v) \in D$.



Les dérivées partielles $\vec{R}_u(u_i, v_j)$ et $\vec{R}_v(u_i, v_j)$ sont des vecteurs tangents à S en $\vec{R}(u_i, v_j)$.

Aire d'une surface paramétrée

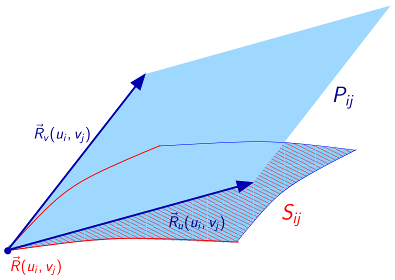
Calculer l'aire de la surface S paramétrée par $\vec{R}(u,v)$, $(u,v) \in D$.



- On veut calculer l'aire de la sous-région S_{ij}.
- Si $\vec{R}_u(u_i, v_j)$ et $\vec{R}_v(u_i, v_j)$ sont linéairement indépendants alors ils engendrent le plan tangent à S en $\vec{R}(u_i, v_j)$.

Aire d'une surface paramétrée

Calculer l'aire de la surface S paramétrée par $\vec{R}(u,v)$, $(u,v) \in D$.



- Soit P_{ij} le parallélogramme engendré par les vecteurs tangents $\vec{R}_u(u_i, v_j)$ et $\vec{R}_v(u_i, v_j)$.
- $\text{aire}(P_{ij}) = ||\vec{R}_u(u_i, v_j) \times \vec{R}_v(u_i, v_j)||$
- Si S_{ij} est petit alors on approxime aire(S_{ij}) par aire(P_{ij})
  ≪ mise à l'échelle ≫ en multipliant par $\text{aire}(D_{ij}) = \Delta A_{ij}$.
- Cette mise à l'échelle tient compte du fait qu'une subdivision plus fine de D produit des sous-régions S_{ij} plus petites.

Aire d'une surface paramétrée

Calculer l'aire de la surface S paramétrée par $\vec{R}(u,v)$, $(u,v) \in D$.

- On approxime
$$\text{aire}(S_{ij}) \approx \text{aire}(P_{ij})\Delta A_{ij} = ||\vec{R}_u(u_i,v_j) \times \vec{R}_v(u_i,v_j)||\Delta A_{ij}$$

- On a
$$\text{aire}(S) = \sum_i \sum_j \text{aire}(S_{ij}) \approx \sum_i \sum_j ||\vec{R}_u(u_i,v_j) \times \vec{R}_v(u_i,v_j)||\Delta A_{ij}$$

- Lorsque le nombre de subdivisions de D augmente, les approximations deviennent des égalités et la double somme de Riemann tend vers une intégrale.

- Ainsi,
$$\text{aire}(S) = \iint_D ||\vec{R}_u(u,v) \times \vec{R}_v(u,v)||\, dA$$
où dA est $du\,dv$ ou $dv\,du$.

Aire d'une surface paramétrée

Théorème

Si S est une surface paramétrée par $\vec{R}(u, v)$ avec $(u, v) \in D$ et que $\vec{R}_u \times \vec{R}_v \neq \vec{0}$ sur S alors

$$\text{aire}(S) = \iint_D ||\vec{R}_u(u, v) \times \vec{R}_v(u, v)||\, dA$$

- Les dérivées partielles $\vec{R}_u$ et $\vec{R}_v$ s'obtiennent en dérivant $\vec{R}$ composante à composante selon la variable donnée.

Aire d'une surface paramétrée

Théorème

Si S est une surface paramétrée par $\vec{R}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$ et que $\vec{R}_u \times \vec{R}_v \neq \vec{0}$ sur S alors

$$\text{aire}(S) = \iint_D ||\vec{R}_u(u,v) \times \vec{R}_v(u,v)||\, dA$$

- Les dérivées partielles $\vec{R}_u$ et $\vec{R}_v$ s'obtiennent en dérivant $\vec{R}$ composante à composante selon la variable donnée.
- L'expression $||\vec{R}_u(u,v) \times \vec{R}_v(u,v)||\, dA$ est un « petit élément d'aire » et est notée dS.

Résumé

- Esquisse de la construction de l'intégrale permettant de calculer l'aire d'une surface.
- Formule pour le calcul de l'aire d'une surface paramétrée.
- Notion de « petit élément d'aire d'une surface ».