MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 2: Les intégrales curvilignes

Exemple 5: intégrale curviligne d'un champ vectoriel en trois dimensions

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) Le segment est paramétré par

$$\vec{r}(t) \quad = \quad (1-t)(2\,\vec{i} + \vec{j} + 2\,\vec{k}) + t(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) Le segment est paramétré par

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (1-t)(2\,\vec{i} + \vec{j} + 2\,\vec{k}) + t(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \\ &= (2-t)\,\vec{i} + (1+t)\,\vec{j} + (2-t)\,\vec{k} \end{aligned}$$

avec $0 \leq t \leq 1$.

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) On calcule

$$\vec{r}(t) \;=\; (2-t)\,\vec{i} + (1+t)\,\vec{j} + (2-t)\,\vec{k}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) On calcule

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (2-t)\,\vec{i} + (1+t)\,\vec{j} + (2-t)\,\vec{k} \\ \vec{r}\,'(t) &= -\,\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (2 - t)\,\vec{i} + (1 + t)\,\vec{j} + (2 - t)\,\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -\,\vec{i} + \,\vec{j} - \,\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= [(2 - t) - (2 - t)]\,\vec{i} + [(2 - t) - (1 + t)]\,\vec{j} \\
&\quad + [(2 - t) + (1 + t)]\,\vec{k}
\end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (2 - t)\,\vec{i} + (1 + t)\,\vec{j} + (2 - t)\,\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -\,\vec{i} + \,\vec{j} - \,\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= [(2 - t) - (2 - t)]\,\vec{i} + [(2 - t) - (1 + t)]\,\vec{j} \\
&\quad + [(2 - t) + (1 + t)]\,\vec{k} = [1 - 2t]\,\vec{j} + 3\,\vec{k}
\end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (2-t)\,\vec{i} + (1+t)\,\vec{j} + (2-t)\,\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -\,\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= [(2-t)-(2-t)]\,\vec{i} + [(2-t)-(1+t)]\,\vec{j} \\
&\quad + [(2-t)+(1+t)]\,\vec{k} = [1-2t]\,\vec{j} + 3\,\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) &= -2-2t
\end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) Ainsi,

$$W = \int_T \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) Ainsi,

$$W = \int_T \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) Ainsi,

$$W = \int_T \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^1 (-2 - 2t)\,dt = -3.$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) Ainsi,

$$W = \int_T \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^1 (-2 - 2t)\,dt = -3.$$

Le travail peut être négatif.

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

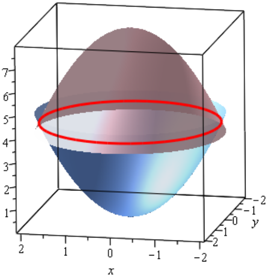
Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.



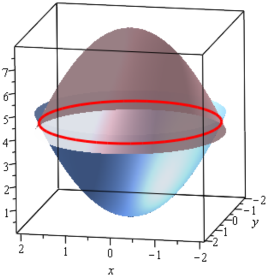
Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.



- b) Intersection des surfaces :

  $$x^2 + y^2 = z = 8 - x^2 - y^2$$

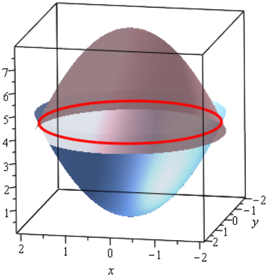
Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.



- b) Intersection des surfaces :

$$x^2 + y^2 = z = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

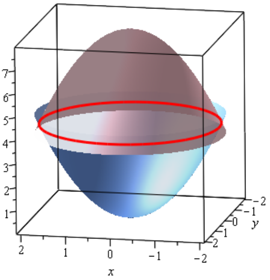
Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.



- b) Intersection des surfaces :

  $x^2 + y^2 = z = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

  $z = 4$

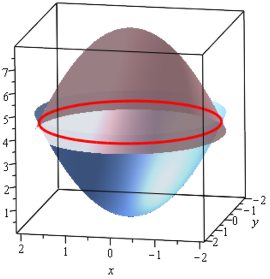
Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.



- b) Intersection des surfaces :

  $$x^2 + y^2 = z = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$
  $$z = 4$$

- Paramétrisation :

  $$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 4\,\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) On calcule

$$\vec{r}(t) \quad = \quad 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) On calcule

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 4\,\vec{k} \\ \vec{r}\,'(t) &= -2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 4\,\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= (4 - 2\cos t)\,\vec{i} + (4 - 2\sin t)\,\vec{j} + (2\cos t + 2\sin t)\,\vec{k}
\end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 4\,\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= (4 - 2\cos t)\,\vec{i} + (4 - 2\sin t)\,\vec{j} + (2\cos t + 2\sin t)\,\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) &= (-2\sin t)(4 - 2\cos t) + (2\cos t)(4 - 2\sin t) + 0
\end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 4\,\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= (4 - 2\cos t)\,\vec{i} + (4 - 2\sin t)\,\vec{j} + (2\cos t + 2\sin t)\,\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) &= (-2\sin t)(4 - 2\cos t) + (2\cos t)(4 - 2\sin t) + 0 \\
&= -8\sin t + 8\cos t
\end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) Ainsi,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) Ainsi,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) Ainsi,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (-8\sin t - 8\cos t)\,dt$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) Ainsi,

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}(-8\sin t - 8\cos t)\,dt = 0.$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) Ainsi,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-8 \sin t - 8 \cos t)\, dt = 0.$$

Le travail peut être nul.

Résumé

- Calcul de l'intégrale d'un champ le long d'une courbe en trois dimensions.

Résumé

- Calcul de l'intégrale d'un champ le long d'une courbe en trois dimensions.
- Le travail d'un champ vectoriel peut être positif, négatif ou nul.