MTH1102D Calcul II

Chapitre 8, section 2: Les dérivées et les intégrales des fonctions vectorielles

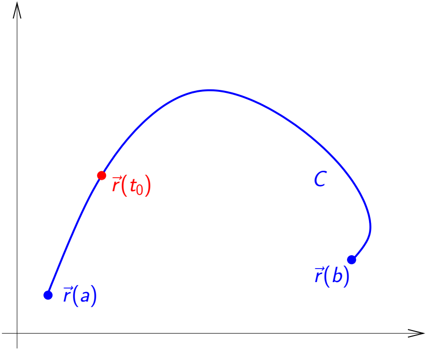
Vecteur tangent et vecteur normal

Introduction

- Vecteur tangent à une courbe paramétrée.
- Vecteur normal à une courbe paramétrée.

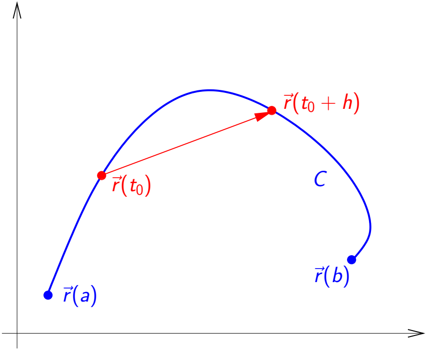
Vecteur tangent et vecteur normal

Soit C une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ et $t_0 \in [a, b]$.



Vecteur tangent et vecteur normal

Soit C une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ et $t_0 \in [a, b]$.

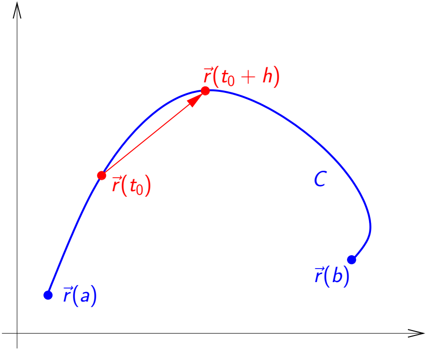


- « vecteur sécant » :

$$\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)$$

Vecteur tangent et vecteur normal

Soit C une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ et $t_0 \in [a, b]$.

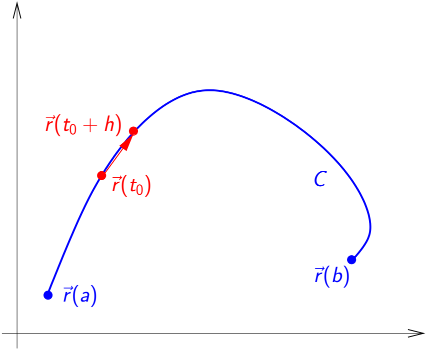


- « vecteur sécant » :

$$\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)$$

Vecteur tangent et vecteur normal

Soit C une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ et $t_0 \in [a, b]$.

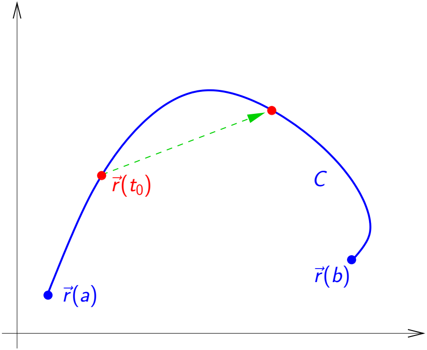


- « vecteur sécant » :

$$\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)$$

Vecteur tangent et vecteur normal

Soit C une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ et $t_0 \in [a, b]$.



- « vecteur sécant » :

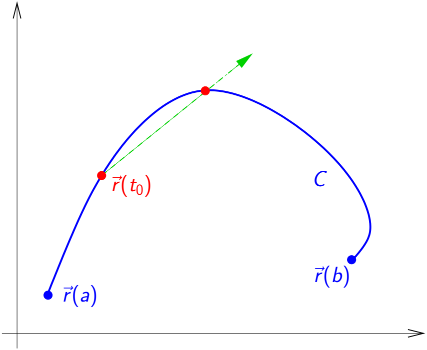
$$\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)$$

- vecteur sécant « normalisé » :

$$\frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$

Vecteur tangent et vecteur normal

Soit C une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ et $t_0 \in [a, b]$.



- « vecteur sécant » :

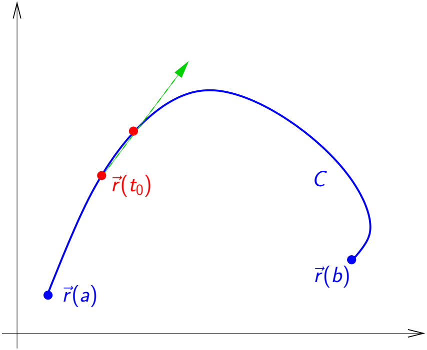
$$\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)$$

- vecteur sécant « normalisé » :

$$\frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$

Vecteur tangent et vecteur normal

Soit C une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ et $t_0 \in [a, b]$.



- « vecteur sécant » :

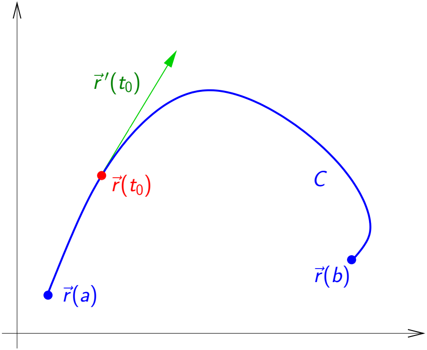
$$\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)$$

- vecteur sécant « normalisé » :

$$\frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$

Vecteur tangent et vecteur normal

Soit C une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ et $t_0 \in [a, b]$.



- « vecteur sécant » :

$$\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)$$

- vecteur sécant « normalisé » :

$$\frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$

- Lorsque $h \to 0$, le « vecteur sécant » devient tangent à la courbe au point $\vec{r}(t_0)$, s'il est non nul.

Vecteur tangent et vecteur normal

Ce qui précède se généralise à des courbes dans l'espace.

Définition

Soit C une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$.

1. Le *vecteur tangent* à C au point correspondant à t est $\vec{r}\,'(t)$.
2. Le *vecteur tangent unitaire* à C au point correspondant à t est

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}.$$

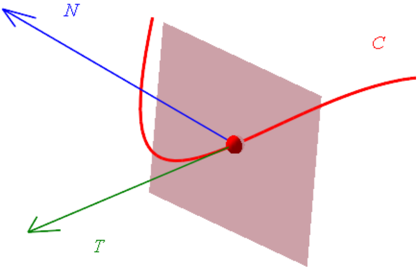
Vecteur tangent et vecteur normal

Définition

Soit C une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$.

Le *vecteur normal unitaire* à C au point correspondant à t est

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{||\vec{T}'(t)||}.$$



Vecteur tangent et vecteur normal

Montrons que $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont perpendiculaires.

$$\vec{T} \text{ unitaire } \Rightarrow \vec{T} \cdot \vec{T} = ||\vec{T}||^2 = 1$$

donc

$$0 = \frac{d}{dt}||\vec{T}||^2 = \left(\vec{T} \cdot \vec{T}\right)' = \vec{T}\,' \cdot \vec{T} + \vec{T} \cdot \vec{T}\,' = 2\vec{T} \cdot \vec{T}\,'$$

Ainsi,

$$\vec{T} \cdot \vec{T}\,' = 0 \Rightarrow \vec{T} \cdot \frac{\vec{T}\,'}{||\vec{T}\,'||} = 0 \Rightarrow \vec{T} \cdot \vec{N} = 0$$

Vecteur tangent et vecteur normal

Montrons que $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont perpendiculaires.

$$\vec{T} \text{ unitaire } \Rightarrow \vec{T} \cdot \vec{T} = ||\vec{T}||^2 = 1$$

donc

$$0 = \frac{d}{dt}||\vec{T}||^2 = \left(\vec{T} \cdot \vec{T}\right)' = \vec{T}\,' \cdot \vec{T} + \vec{T} \cdot \vec{T}\,' = 2\vec{T} \cdot \vec{T}\,'$$

Ainsi,

$$\vec{T} \cdot \vec{T}\,' = 0 \Rightarrow \vec{T} \cdot \frac{\vec{T}\,'}{||\vec{T}\,'||} = 0 \Rightarrow \vec{T} \cdot \vec{N} = 0$$

donc $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont perpendiculaires.

Résumé

- Interprétation de la dérivée d'une fonction vectorielle comme le vecteur tangent à une courbe paramétrée.
- Vecteur normal à une courbe paramétrée.
- Perpendicularité des vecteurs tangent et normal.