MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 4: Les intégrales triples en coordonnées sphériques

Définition et formule de calcul

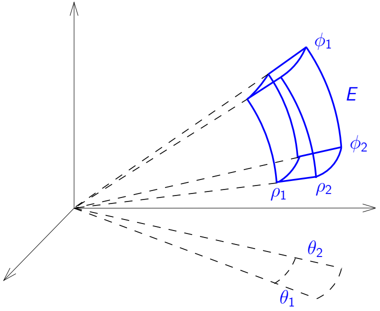
Introduction

- Intégrale triple en coordonnées sphériques.
- Jacobien en coordonnées sphériques.

Définition et formule de calcul

On considère une région

$$E = \{(\rho, \theta, \pi) \mid \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$$



- On subdivise E en sous-régions de même forme.
- On choisit le point milieu de chaque sous-région comme point d'évaluation.
- Le volume d'un « coin sphérique » est donné par la formule $\Delta V = (\rho^*)^2 \sin \phi^* \Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$.
- Avec ces données on forme une triple somme de Riemann puis on prend la limite.

Définition et formule de calcul

Théorème

Soit E une région de l'espace décrite en coordonnées sphériques par

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \,|\, \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$$

et f une fonction intégrable sur E. Alors

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV =$$

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi$$

Définition et formule de calcul

Théorème

Soit E une région de l'espace décrite en coordonnées sphériques par

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \,|\, \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$$

et f une fonction intégrable sur E. Alors

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV =$$

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi$$

Le jacobien provient du calcul du volume d'un petit « coin sphérique ».

Définition et formule de calcul

Théorème

Soit E une région de l'espace décrite en coordonnées sphériques par

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \,|\, u_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq u_2(\theta, \phi), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\},$$

et f une fonction intégrable sur E. Alors

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV =$$

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{u_1(\theta,\phi)}^{u_2(\theta,\phi)} f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi$$

Résumé

- Intégrale triple en coordonnées sphériques sur un $\ll$ coin sphérique $\gg$.
- Jacobien en coordonnées sphériques.
- Intégrale triple en coordonnées sphériques sur un domaine général.

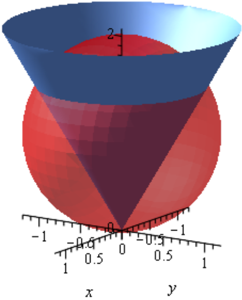
MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 4: Les intégrales triples en coordonnées sphériques

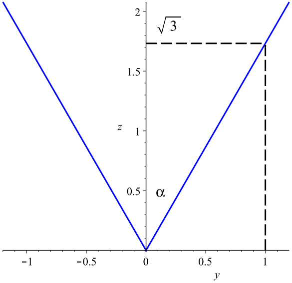
Exemple 1: intégrale en coordonnées sphériques sur un domaine général

Exemple 1 : intégrale sphérique sur un domaine général

Calculer $\iiint_E z^2\, dV$, où E est la région située au-dessus du cône $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

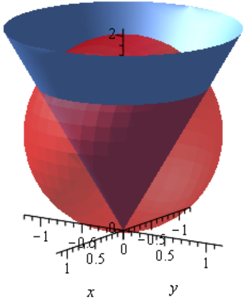


- Côtés du cône forment un angle de $\alpha = \arctan(y/z) = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$ avec l'axe des z positifs



Exemple 1 : intégrale sphérique sur un domaine général

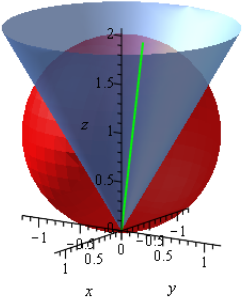
Calculer $\iiint_E z^2\, dV$, où E est la région située au-dessus du cône $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.



- Équation sphérique du cône : $\phi = \pi/6$
- Équation sphérique de la sphère : $\rho = 2\cos\phi$

Exemple 1 : intégrale sphérique sur un domaine général

Calculer $\iiint_E z^2\, dV$, où E est la région située au-dessus du cône $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.



- Équation sphérique du cône : $\phi = \pi/6$
- Équation sphérique de la sphère : $\rho = 2\cos\phi$

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \le \rho \le 2\cos\phi, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi/6\}$$

Exemple 1 : intégrale sphérique sur un domaine général

Calculer $\iiint_E z^2\,dV$, où E est la région située au-dessus du cône $z = \sqrt{3x^2+3y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\iiint_E z^2\,dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2\cos\phi} (\rho^2\cos^2\phi)(\rho^2\sin\phi)\,d\rho d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{\rho=2\cos\phi} \cos^2\phi\sin\phi\,d\phi d\theta \\
&= \frac{32}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \cos^7\phi\sin\phi\,d\phi d\theta \quad (u=\cos\phi, du=-\sin\phi\,d\phi\ ) \\
&= \frac{35}{64}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{35}{32}\pi.
\end{aligned}$$

Résumé

- Décrire une région de l'espace en coordonnées sphériques.
- Calculer une intégrale en coordonnées sphériques sur un domaine général.

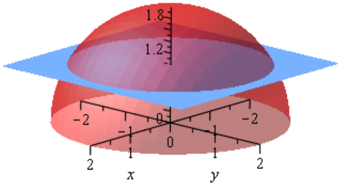
MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 4: Les intégrales triples en coordonnées sphériques

Exemple 2: choix du meilleur système de coordonnées

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.



Intersection :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

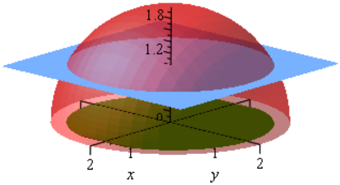
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 1 = 4$$

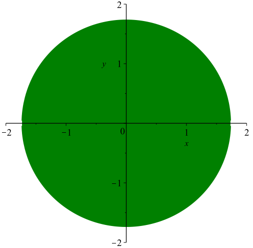
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 3$$

Rayon du cercle est racine de 3

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.





$D : x^2 + y^2 \leq 3$

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} E \;=\; \Big\{(x, y, z) \,|\, -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, -\sqrt{3 - x^2} \leq y \leq \sqrt{3 - x^2}, \\ 1 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\Big\} \end{aligned}$$

et

$$J = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{1}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx.$$

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En coordonnées cylindriques :

- Sphère : $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow r^2 + z^2 = 4 \Rightarrow z = \sqrt{4 - r^2}$ $(z \geq 0)$
- Plan : $z = 1$

$$E = \left\{ (r, \theta, z) \,|\, 0 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

et

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} (r^2) r \, dz dr d\theta.$$

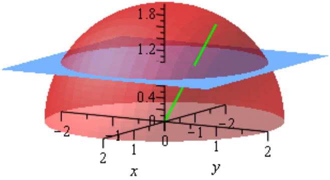
Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En coordonnées sphériques :

- Sphère : $\rho = 2$
- Plan : $z = 1 \Rightarrow \rho \cos \phi = 1 \Rightarrow \rho = 1/\cos \phi = \sec \phi$

La plus petite distance de l'origine jusqu'à la région E pour trouver rho



$\sec \phi \leq \rho \leq 2$

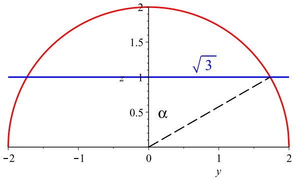
La plus grande valeur est le rayon de la sphère, donc 2

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En coordonnées sphériques :

- Sphère : $\rho = 2$
- Plan : $z = 1 \Rightarrow \rho \cos\phi = 1 \Rightarrow \rho = 1/\cos\phi = \sec\phi$
- Bornes sur ϕ : $\alpha = \arctan(\sqrt{3}/1) = \pi/3$ car on consière les z positifs



$$0 \leq \phi \leq \pi/3$$

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En coordonnées sphériques :

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \,|\, \sec\phi \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/3\}.$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta = \rho^2 \sin^2\phi$$

et

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec\phi}^{2} (\rho^2 \sin^2\phi)\rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta$$

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Pas bon choix en coordonnées cartésiennes

$$(1) \quad J = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx.$$

Coordonnées cylindriques

$$(2) \quad J = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} r^3\, dz\, dr\, d\theta.$$

Coordonnées sphèriques

$$(3) \quad J = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec\phi}^{2} \rho^4 \sin^3\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

1. Cartésien : difficile
2. Cylindrique : après intégration p/r à z,

$$r^3\sqrt{4 - r^2} = r^2 \cdot r\sqrt{4 - r^2}$$

et changement de variable $u = 4 - r^2$.

du = 2r

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

3. Sphérique : après intégration p/r à ρ,

$$\sin^3\phi = (1 - \cos^2\phi)\sin\phi$$

puis changement de variable $u = \cos\phi$

$$\sec^5\phi\sin^3\phi = \left(\sec^5\phi - \frac{\cos^2\phi}{\cos^5\phi}\right)\sin\phi = \left(\frac{1}{\cos^5\phi} - \frac{1}{\cos^3\phi}\right)\sin\phi$$

puis changement de variable. u = cos

Finalement, $J = \frac{53}{30}\pi$.

À faire le calcul!

Résumé

- Décrire une région de l'espace dans les trois systèmes de coordonnées.
- Choisir le système de coordonnées le plus approprié.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 5 :

Changements de variables dans les intégrales multiples

Introduction

- Changement de variable pour une intégrale double
- Changement de variable pour une intégrale triple

Changement de variable général

Définition

Un **changement de variables** est une transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ permettant de passer d'un système de coordonnées à un autre dans $\mathbb{R}^n$.

Changement de variable général

Définition

Un **changement de variables** est une transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ permettant de passer d'un système de coordonnées à un autre dans $\mathbb{R}^n$.

- Dans $\mathbb{R}^2$, on a $T(u, v) = (x, y)$, où $x = g(u, v)$ et $y = h(u, v)$, et où g, h possèdent des dérivées premières continues.

Changement de variable général

Définition

Un **changement de variables** est une transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ permettant de passer d'un système de coordonnées à un autre dans $\mathbb{R}^n$.

- Dans $\mathbb{R}^2$, on a $T(u, v) = (x, y)$, où $x = g(u, v)$ et $y = h(u, v)$, et où g, h possèdent des dérivées premières continues.

  La transformation T permet de passer d'un domaine R en coordonnées (x, y) à un domaine $S := T^{-1}(R)$ en coordonnées (u, v).

Changement de variable général

Définition

Un **changement de variables** est une transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ permettant de passer d'un système de coordonnées à un autre dans $\mathbb{R}^n$.

- Dans $\mathbb{R}^2$, on a $T(u, v) = (x, y)$, où $x = g(u, v)$ et $y = h(u, v)$, et où g, h possèdent des dérivées premières continues.

  La transformation T permet de passer d'un domaine R en coordonnées (x, y) à un domaine $S := T^{-1}(R)$ en coordonnées (u, v).

- Dans $\mathbb{R}^3$, on a $T(u, v, w) = (x, y, z)$, où $x = g(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$ et $z = k(u, v, w)$, et où g, h, k possèdent des dérivées premières continues.

Changement de variable général

Définition

Un **changement de variables** est une transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ permettant de passer d'un système de coordonnées à un autre dans $\mathbb{R}^n$.

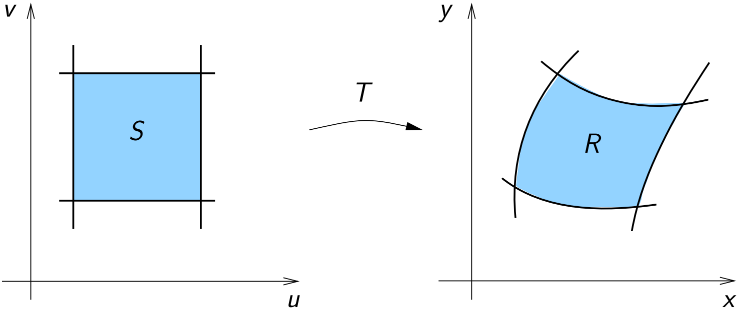
- Dans $\mathbb{R}^2$, on a $T(u, v) = (x, y)$, où $x = g(u, v)$ et $y = h(u, v)$, et où g, h possèdent des dérivées premières continues.

  La transformation T permet de passer d'un domaine R en coordonnées (x, y) à un domaine $S := T^{-1}(R)$ en coordonnées (u, v).

- Dans $\mathbb{R}^3$, on a $T(u, v, w) = (x, y, z)$, où $x = g(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$ et $z = k(u, v, w)$, et où g, h, k possèdent des dérivées premières continues.

  La transformation T permet de passer d'un domaine R en coordonnées (x, y, z) à un domaine $S := T^{-1}(R)$ en coordonnées (u, v, w).

Changement de variable général (2)



Le changement de variables défini par T transforme un domaine D dans le plan des (x, y) en un domaine $S = T^{-1}(R)$ dans le plan des (u, v).

Changement de variable général (3)

- Un changement de variable approprié permet de simplifier l'évaluation d'une intégrale.

Changement de variable général (3)

- Un changement de variable approprié permet de simplifier l'évaluation d'une intégrale.
- Le choix d'un changement de variable en plusieurs variables repose en grande partie sur la forme du domaine d'intégration.

passer d'un domaine compliqué à un domaine plus simple

Changement de variable général (3)

- Un changement de variable approprié permet de simplifier l'évaluation d'une intégrale.
- Le choix d'un changement de variable en plusieurs variables repose en grande partie sur la forme du domaine d'intégration.
- Le passage aux coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques sont des exemples de changements de variables pour les intégrales multiples.

Changement de variable général (4)

Notation

En pratique, on évite d'introduire des symboles supplémentaires g, h, k en écrivant le changement de variable

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

ou

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

pour indiquer que les anciennes variables x, y, z peuvent être exprimées en fonctions des nouvelles variables u, v, w.

Le jacobien d'une transformation

- Le *jacobien* d'une transformation est la généralisation à plusieurs variables du terme $du = g'(x)\,dx$ associé au changement de variable $u = g(x)$ dans une intégrale simple.

Le jacobien d'une transformation

- Le *jacobien* d'une transformation est la généralisation à plusieurs variables du terme $du = g'(x)\,dx$ associé au changement de variable $u = g(x)$ dans une intégrale simple.
- Dans une intégrale multiple, le jacobien tient compte des différentes dérivées partielles des fonctions qui définissent le changement de variable.

Le jacobien d'une transformation

- Le *jacobien* d'une transformation est la généralisation à plusieurs variables du terme $du = g'(x)\,dx$ associé au changement de variable $u = g(x)$ dans une intégrale simple.
- Dans une intégrale multiple, le jacobien tient compte des différentes dérivées partielles des fonctions qui définissent le changement de variable.
- Pour les détails sur l'origine du jacobien, voir la section 7.5 du livre.

Changement de variables dans une intégrale double

Définition

Le **jacobien** de la transformation $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$ en deux dimensions est le déterminant

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Changement de variables dans une intégrale double

Définition

Le **jacobien** de la transformation $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$ en deux dimensions est le déterminant

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Théorème

Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un changement de variables donné par $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$. Alors

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dA = \iint\limits_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

où $R = T(S)$.

Changement de variables dans une intégrale triple

Définition

Le **jacobien** de la transformation $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ en trois dimensions est le déterminant

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Changement de variables dans une intégrale triple

Définition

Le **jacobien** de la transformation $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ en trois dimensions est le déterminant

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Théorème

Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un changement de variables donné par $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$. Alors

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw$$

où $R = T(S)$.

Résumé

- Changement de variables en deux et trois dimensions.

Résumé

- Changement de variables en deux et trois dimensions.
- Jacobien d'une transformation.

Résumé

- Changement de variables en deux et trois dimensions.
- Jacobien d'une transformation.
- Formules de changement de variables pour les intégrales multiples.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 5 :

Changement de variables : exemple 1

Introduction

- Calcul du jacobien en coordonnées cylindriques

Jacobien en coordonnées cylindriques

Pour les coordonnées cylindriques, on a

$$x = x(r, \theta, z) = r\cos\theta, \quad y = y(r, \theta, z) = r\sin\theta, \quad z = z(r, \theta, z) = z$$

ou encore

$$(x, y, z) = T(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

Jacobien en coordonnées cylindriques (suite)

Le jacobien est donc

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Jacobien en coordonnées cylindriques (suite)

Le jacobien est donc

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r\cos\theta}{\partial r} & \frac{\partial r\cos\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial r\cos\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial r\sin\theta}{\partial r} & \frac{\partial r\sin\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial r\sin\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Jacobien en coordonnées cylindriques (suite)

Le jacobien est donc

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r\cos\theta}{\partial r} & \frac{\partial r\cos\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial r\cos\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial r\sin\theta}{\partial r} & \frac{\partial r\sin\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial r\sin\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin\theta & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Jacobien en coordonnées cylindriques (suite)

Le jacobien est donc

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r\cos\theta}{\partial r} & \frac{\partial r\cos\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial r\cos\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial r\sin\theta}{\partial r} & \frac{\partial r\sin\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial r\sin\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin\theta & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot\left(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta\right) = r.$$

Résumé

- Calcul du jacobien en coordonnées cylindriques.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 5 :

Changement de variables : exemple 2

Introduction

- Exemple de changement de variables en deux dimensions

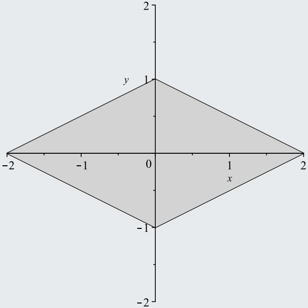
Changement de variables en deux dimensions

Énoncé

Évaluer l'intégrale

$$\iint_R (x+y)^2 \, dA,$$

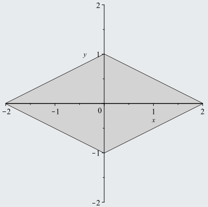
où R est le domaine illustré ci-dessous.



Changement de variables en deux dimensions (2)

Remarque

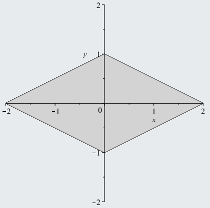
Le calcul peut être simplifié par un changement de variables. Le changement de variables est basé sur des transformations géométriques. Il est résumé dans les figures ci-dessous :



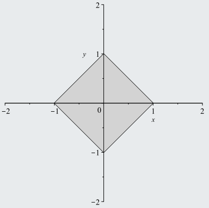
Changement de variables en deux dimensions (2)

Remarque

Le calcul peut être simplifié par un changement de variables. Le changement de variables est basé sur des transformations géométriques. Il est résumé dans les figures ci-dessous :



$\longrightarrow$

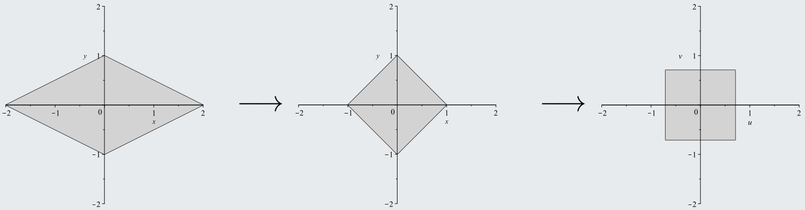


- Contraction le long de l'axe des x

Changement de variables en deux dimensions (2)

Remarque

Le calcul peut être simplifié par un changement de variables. Le changement de variables est basé sur des transformations géométriques. Il est résumé dans les figures ci-dessous :

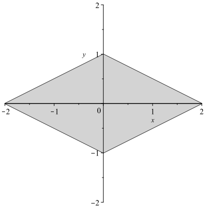


- Contraction le long de l'axe des x prendre le grand axe et le ramener à la longueur du + petit
- Rotation d'angle pi/4

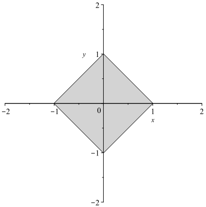
obtenir un carré dont les côtés sont // aux axes de coordonnées

Changement de variables en deux dimensions (3)

Contraction : Prendre l'axe // à l'axe des x et le diminuer de moitié



$\longrightarrow$

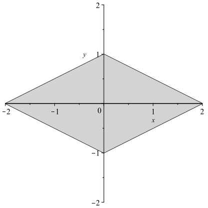


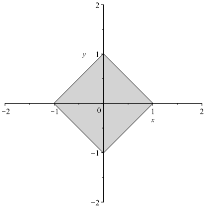
$T_1(x, y) = (x', y')$, où $x' = x/2$ et $y' = y$

x' est
l'ancienne
variable x
divisé par 2

Changement de variables en deux dimensions (3)

Contraction :

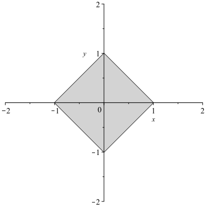




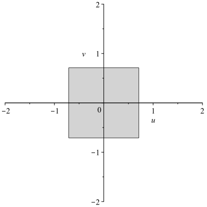
$T_1(x, y) = (x', y')$, où $x' = x/2$ et $y' = y$ donc $x = 2x'$ et $y = y'$.

Changement de variables en deux dimensions (3)

Rotation :

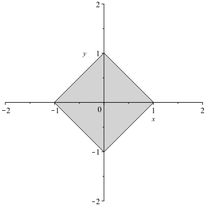


$\longrightarrow$

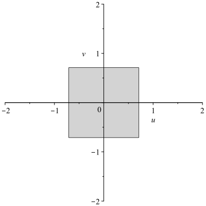


Changement de variables en deux dimensions (3)

Rotation :



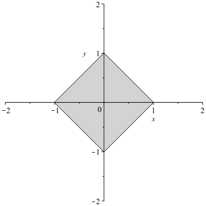
$\longrightarrow$



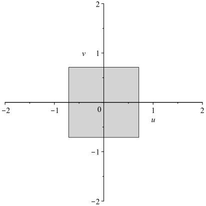
Soit $T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de rotation.

Changement de variables en deux dimensions (3)

Rotation :



$\longrightarrow$



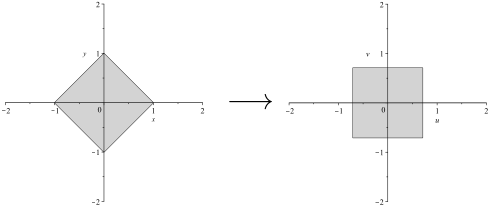
Soit $T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de rotation.

Alors

$$T_2 \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Changement de variables en deux dimensions (3)

Rotation :

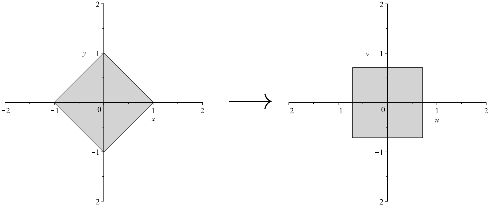


Soit $T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de rotation.

Alors

$$T_2 \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Rotation :



Soit $T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de rotation.

Alors

$$T_2 \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

donc

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} x' - y' \\ x' + y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Changement de variables en deux dimensions (4)

Puisque

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') & = & u \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') & = & v, \end{cases}$$

Changement de variables en deux dimensions (4)

Puisque

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') & = & u \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') & = & v, \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} x' & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v) \\ y' & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(v - u). \end{cases}$$

Changement de variables en deux dimensions (5)

En combinant les deux transformations, on obtient le changement de variables

$$\begin{cases} x &= 2x' &= \sqrt{2}(u+v) \\ y &= y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(v-u) \end{cases}.$$

Jacobien, intégrande et nouveau domaine

On a

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Jacobien, intégrande et nouveau domaine

On a

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2.$$

Jacobien, intégrande et nouveau domaine

On a

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1-(-1) = 2.$$

De plus,

$$f(x,y)$$

Jacobien, intégrande et nouveau domaine

On a

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2.$$

De plus,

$$f(x,y) = f\left(\sqrt{2}(u+v), \frac{\sqrt{2}}{2}(v-u)\right)$$

Jacobien, intégrande et nouveau domaine

On a

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2.$$

De plus,

$$f(x,y) = f\left(\sqrt{2}(u+v), \frac{\sqrt{2}}{2}(v-u)\right) = \frac{(u+3v)^2}{2}$$

après simplification.

Jacobien, intégrande et nouveau domaine

On a

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1-(-1) = 2.$$

De plus,

$$f(x,y) = f\left(\sqrt{2}(u+v), \frac{\sqrt{2}}{2}(v-u)\right) = \frac{(u+3v)^2}{2}$$

après simplification.

Le nouveau domaine est le carré

$$S = \left\{(u,v) \mid -\frac{\sqrt{2}}{2} \le u \le \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \le v \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Calcul de l'intégrale

Ainsi,

$$\iint_R (x+y)^2 \, dA \;\; = \;\; \iint_S f\left(\sqrt{2}(u+v), \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \, dA$$

Calcul de l'intégrale

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\iint_R (x+y)^2\, dA &= \iint_S f\left(\sqrt{2}(u+v), \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\, dA \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(u+3v)^2}{2}\cdot 2\, dudv
\end{aligned}
$$

Calcul de l'intégrale

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\iint_R (x+y)^2 \, dA &= \iint_S f\left(\sqrt{2}(u+v), \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \, dA \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(u+3v)^2}{2} \cdot 2 \, dudv \\
&= \frac{10}{3}.
\end{aligned}
$$

Résumé

- Description d'un changement de variables en deux dimensions.

Résumé

- Description d'un changement de variables en deux dimensions.
- Calcul du jacobien du changement de variables.

Résumé

- Description d'un changement de variables en deux dimensions.
- Calcul du jacobien du changement de variables.
- Calcul d'une intégrale double à l'aide d'un changement de variables.