MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 2: Les intégrales curvilignes

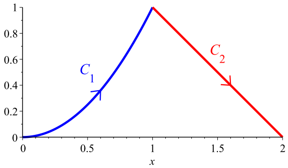
Exemple 1: calcul d'une intégrale curviligne en deux dimensions

Exemple 1 : intégrale curviligne en deux dimensions

Calculer $J = \displaystyle\int_C xy\, ds$ où $C = C_1 \cup C_2$ et

C_1 est la partie de la parabole $y = x^2$ reliant $(0,0)$ à $(1,1)$

C_2 est le segment reliant $(1,1)$ à $(2,0)$.



- Parabole : $y = x^2$

$$\begin{aligned} C_1 : \quad \vec{r}_1(t) &= t\vec{i} + t^2\vec{j}, \quad 0 \le t \le 1 \\ \vec{r}_1'(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} \\ \|\vec{r}_1'(t)\| &= \sqrt{1+4t^2} \end{aligned}$$

- Segment : $y = 2 - x$

$$\begin{aligned} C_2 : \quad \vec{r}_2(t) &= t\vec{i} + (2-t)\vec{j}, \quad 1 \le t \le 2 \\ \vec{r}_2'(t) &= \vec{i} - \vec{j} \\ \|\vec{r}_2'(t)\| &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Exemple 1 : intégrale curviligne en deux dimensions

Calculer $J = \int_C xy\, ds$ où $C = C_1 \cup C_2$ et
C_1 est la partie de la parabole $y = x^2$ reliant $(0,0)$ à $(1,1)$
C_2 est le segment reliant $(1,1)$ à $(2,0)$.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_{C_1} xy\, ds = \int_0^1 x(t)y(t)\, ||\vec{r}_1'(t)||\, dt = \int_0^1 (t)(t^2)\sqrt{1+4t^2}\, dt \\
&= \frac{1}{8}\int_1^5 \frac{(u-1)}{4} u^{1/2}\, du \qquad (u = 4t^2+1,\, du = 8t) \\
&= \frac{5}{24}\sqrt{5} + \frac{1}{120}
\end{aligned}
$$

Exemple 1 : intégrale curviligne en deux dimensions

Calculer $J = \displaystyle\int_C xy\, ds$ où $C = C_1 \cup C_2$ et

C_1 est la partie de la parabole $y = x^2$ reliant $(0,0)$ à $(1,1)$

C_2 est le segment reliant $(1,1)$ à $(2,0)$.

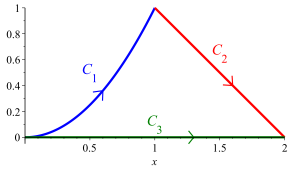
$$J_2 = \int_{C_2} xy\, ds = \int_1^2 x(t)y(t)\,||\vec{r}_2\,'(t)||\,dt = \int_1^2 (t)(2-t)\sqrt{2}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

Finalement,

$$J = J_1 + J_2 = \frac{5}{24}\sqrt{5} + \frac{1}{120} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

Exemple 1 : intégrale curviligne en deux dimensions

Calculer $J = \int_C xy\, ds$ où $C = C_1 \cup C_2$ et
C_1 est la partie de la parabole $y = x^2$ reliant $(0,0)$ à $(1,1)$
C_2 est le segment reliant $(1,1)$ à $(2,0)$.



Soit C_3 le segment allant de $(0,0)$ à $(2,0)$.

Notons $f(x,y) = xy$

Puisque $f(x,y) = 0$ si $(x,y) \in C_3$,

$$\int_{C_3} f(x,y)\, ds = 0$$

L'intégrale curviligne d'une fonction dépend du chemin et non seulement des extrémités de la courbe.

Résumé

- Exemples de paramétrisation.
- Utilisation des propriétés de l'intégrale curviligne.
- Calcul de trois intégrales curvilignes en deux dimensions.