Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH1102D - Calcul II

Été 2023

Devoir 11

Nom : ______________________ **Prénom :** ______________________

Matricule : ____________________ **Groupe :** 01

Question corrigée	Autres questions	Total
5.5	4	9.5 /10

Devoir 11

#1

a) $\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$ Champ conservatif ?

• $\oiint \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \text{rot}\, \vec{F} \cdot (\vec{R}_x \times \vec{R}_y)\, dA$

Champ pas nécessairement conservatif car :

$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \iint_S \text{rot}\, \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$ $\quad \vec{R}_x \times \vec{R}_y = 0$

$\iint_S \text{rot}\, \vec{F}(\vec{R}(x,y)) \cdot \cancel{\|} R_x \times R_y \cancel{\|}\, dx\, dy = 0$

Alors, $R_x \times R_y$ peut être égal à zéro, donc l'équation peut être égale à zéro également. La valeur de rot $\vec{F}(\vec{R}(x,y))$ ne change rien.

→ En d'autres mots, si rot $\vec{F} = 0$, le champ est conservatif, mais il se peut que rot $\vec{F} \neq 0$

$\vec{R}_x \times \vec{R}_y = 0$

Donc, le champ $\vec{F}$ n'est pas nécessairement conservatif.

b)

Flux: $\iint_S \vec{F} \cdot n \, d\vec{S}$

$\boxed{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface S

- On sait que $\vec{F}$ est tangent à S en tout point, alors $\vec{F} \cdot n = 0$ pour tous les points sur S car nous savons que le champ $\vec{F}$ est tangent à la surface. Alors, nous savons qu'il n'y a plus de déplacement à travers la surface

$$\iint_S \vec{F} \cdot n \, d\vec{S} = \iint_S 0 \, d\vec{s} = 0$$

→ Le flux est nul. Le flux est une mesure du déplacement à travers la surface. $\vec{F}$ et n sont orthogonaux sur tous points à la surface car $\vec{F}$ est tangent à la surface et n est normal à la surface. Donc, rien ne passe à travers la surface. Le flux est 0.

c) $(f\vec{F})(x,y,z) = f(x,y,z)\,\vec{F}(x,y,z)$

Démontrer que :

$$\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div}\vec{F} + (\nabla f)\cdot\vec{F}$$

- On sait que :

$$\rightarrow \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$\rightarrow \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

- $\operatorname{div}(f\vec{F}) = \nabla\cdot f\vec{F} = \nabla\cdot(fP\vec{i} + fQ\vec{j} + fR\vec{k})$

$$= \frac{\partial(fP)}{\partial x} + \frac{\partial(fQ)}{\partial y} + \frac{\partial(fR)}{\partial z}$$

$$= \frac{f\partial P}{\partial x} + \frac{f\partial Q}{\partial y} + \frac{f\partial R}{\partial z} + \frac{P\partial f}{\partial x} + \frac{Q\partial f}{\partial y} + \frac{R\partial f}{\partial z}$$

$$= f\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + \frac{P\partial f}{\partial x} + \frac{Q\partial f}{\partial y} + \frac{R\partial f}{\partial z}$$

$$= f\operatorname{div}\vec{F} + \frac{P\partial f}{\partial x} + \frac{Q\partial f}{\partial y} + \frac{R\partial f}{\partial z}$$

$$= f\operatorname{div}\vec{F} + (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k})\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= f\operatorname{div}\vec{F} + \vec{F}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$= f \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot (\nabla f)$

$\Rightarrow \operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div} \vec{F} + (\nabla f) \cdot \vec{F}$

#2 paraboloïde hyperbolique: $z = 3xy$ cylindre: $x^2+y^2=10$

a) On sait que selon système coordonnées cylindrique:

- $x^2+y^2=r^2$, $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$, $z = z$
- Bornes:

r: $x^2+y^2=10$
$r^2 = 10$
$r = \sqrt{10}$

θ: $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq r \leq \sqrt{10}$

$z = 3xy$
$= 3\, r\cos\theta \cdot r\sin\theta$
$= 3\, r^2 \cos\theta \sin\theta$
$= 3 \cdot 10 \cos\theta \sin\theta$
$= 30 \cos\theta \sin\theta$

en fonction?

$\vec{R}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + 3xy\vec{k}$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$\vec{R}(t) = \sqrt{10}\cos(t)\,\vec{i} + \sqrt{10}\sin(t)\,\vec{j} + 30\cos(t)\sin(t)\,\vec{k}$

5.5

Pour que la courbe soit fermée:

$$\vec{R}(0) = \vec{R}(2\pi)$$

- $\vec{R}(0) = \sqrt{10}\cos(0)\vec{i} + \sqrt{10}\sin(0)\vec{j} + 30\cos(0)\sin(0)\vec{k}$

$$= \sqrt{10}\,\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

- $\vec{R}(2\pi) = \sqrt{10}\cos(2\pi)\vec{i} + \sqrt{10}\sin(2\pi)\vec{j} + 30\cos(2\pi)\sin(2\pi)\vec{k}$

$$= \sqrt{10}\,\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

2/2

$\vec{R}(0) = \vec{R}(2\pi)$, donc la courbe est fermée

b) calculer la circulation du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = \left[z^2 + \sqrt{1+\cos(x)}\right]\vec{i} + \left[-x^2 + \sqrt{1+\cos(y)}\right]\vec{j} + \left[y^2 + \sqrt{1+\sin(z^2)}\right]\vec{k}$$

3.5/4

Théorème de Stokes:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D \text{rot}\,\vec{F}(\vec{R}(x,y))\cdot(\vec{R}_x \times \vec{R}_y)\,dA$$

orientation?

- $P = z^2 + \sqrt{1+\cos(x)}$
- $Q = -x^2 + \sqrt{1+\cos(y)}$
- $R = y^2 + \sqrt{1+\sin(z^2)}$

→ $\int$ l'orientation est ~~négative~~ vérification? ✗

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

- $\frac{\partial R}{\partial y} = 2y$ • $\frac{\partial P}{\partial z} = 2z$ • $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x$
- $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$ • $\frac{\partial R}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$

$$\text{rot}\,\vec{F} = (2y-0)\vec{i} + (2z-0)\vec{j} + (-2x-0)\vec{k}$$

$$= 2y\,\vec{i} + 2z\,\vec{j} - 2x\,\vec{k}$$

$$\text{rot}\,\vec{F}(\vec{R}(x,y)) = 2y\,\vec{i} + 6xy\,\vec{j} - 2x\,\vec{k}$$

On sait que :

$$\vec{R}_x = \vec{i} + 3y\,\vec{k}$$

$$\vec{R}_y = \vec{j} + 3x\,\vec{k}$$

$$\vec{R}_x \times \vec{R}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3y \\ 0 & 1 & 3x \end{vmatrix} = -3y\,\vec{i} - 3x\,\vec{j} + \vec{k}$$ ✓

$$\iint_S (2y\,\vec{i} + 6xy\,\vec{j} - 2x\,\vec{k}) \cdot (-3y\,\vec{i} - 3x\,\vec{j} + \vec{k})\, dA$$

$$\iint_S (-6y^2 - 18x^2y - 2x)\, dA$$ } Changement en coordonnées cylindriques

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{10}} -6r^2\sin^2(\theta) - 18(r\cos(\theta))^2(r\sin\theta) - 2(r\cos(\theta))\ r\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{10}} -6r^3\sin^2(\theta) - 18r^4\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 2r^2\cos(\theta)\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{-6r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{10}}\sin^2(\theta) - \left[\frac{18r^5}{5}\right]_0^{\sqrt{10}}\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \frac{2r^3}{3}\cos(\theta)\,d\theta$$

Feuille formules : 1. $\int_0^{2\pi}\cos(x)\,dx = 0$

3. $\int_0^{2\pi}\cos^p(x)\sin(x)\,dx = 0$ pour tout $p \geq 0$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\left[-\frac{6r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{10}}\sin^2(\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -150\sin^2(\theta)\,d\theta = -150\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta)\,d\theta$$

Feuille formules 4 : $\int_0^{2\pi}\sin^2(x)\,dx = \pi$

$$= -150\cdot\pi$$

La circulation du champ vectoriel est de -150π

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = -150\pi$$

Vu que la courbe a une orientation négative :

$$-\oint \vec{F} \cdot \vec{dr} = 150\,\pi$$

Alors, la circulation autour de C est de $150\,\pi$