Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH1102D - Calcul II
Été 2023

Devoir 6

Nom : ______________________ **Prénom :** ______________________

Matricule : ____________________ **Groupe :** 01

Question corrigée	Autres questions	Total
6	4	10 /10

Devoir 6

#1 Soit C la courbe d'intersection du paraboloïde $z = x^2 + y^2 + 3y$ et du plan $z = 2x - y + 4$

a) Intersection

$$x^2 + y^2 + 3y = 2x - y + 4$$
$$x^2 + y^2 + 3y + y = 2x + 4$$
$$x^2 + y^2 + 4y - 2x = 4$$
$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 4$$
$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y) = 4 + 1$$
$$(x-1)^2 + (y^2 + 4y) = 5$$
$$(x-1)^2 + (y^2 + 4y + 4) = 5 + 4$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$
$$(x-1)^2 + (y-(-2))^2 = 3^2$$

Carré parfait

6

$$\boxed{r = 3}$$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\sin(t) \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\cos(t) \Rightarrow 1 + 3\cos(t) \\ y = 3\sin(t) \Rightarrow -2 + 3\sin(t) \\ z = 2(3\cos(t)) - 3\sin(t) + 4 \\ \quad = 2(1 + 3\cos(t)) - (-2 + 3\sin(t)) + 4 \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = [1 + 3\cos(t)]\vec{i} + [-2 + 3\sin(t)]\vec{j} + [6\cos(t) - 3\sin(t) + 8]\vec{k}$$

$$\vec{r}\,'(t) = -3\sin(t)\vec{i} + 3\cos(t)\vec{j} - [6\sin(t) + 3\cos(t)]\vec{k}$$

$t \in ?$

Trouver t avec le point $(1, -5, 11)$

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 3\cos(t) = 1 \\ y(t) = -2 + 3\sin(t) = -5 \\ z(t) = 6\cos(t) - 3\sin(t) + 8 = 11 \end{cases}$$

$$-2 + 3\sin(t) = -5$$
$$3\sin(t) = -3$$
$$\arcsin(-1) = t$$
$$t = -\frac{\pi}{2}$$ ✓

$$\vec{r}\,'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(-3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{i} + \left(3\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{j} + \left(-6\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{k}$$
$$= 3\vec{i} + 0\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = (1 + 3t)\vec{i} + (-5)\vec{j} + (11 + 6t)\vec{k}$$

$$x(t) = 1 + 3t$$
$$y(t) = -5$$ ✓ $t \in \cancel{-\frac{\pi}{2}}$ $\mathbb{R}$
$$z(t) = 11 + 6t$$

OK.

#2

a) $\vec{r}(t) \perp \vec{r}\,'(t) = 0$

On sait que l'équation d'une sphère centré à 0 est égale à :

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \quad \text{constante}$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = c = \vec{r}(t)$$

$$\| \vec{r}(t) \| = c$$

$$\| \vec{r}(t) \|^2 = c^2$$

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = c^2$$

dériver $\quad \dfrac{\partial}{\partial t} \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = \dfrac{\partial}{\partial t} c^2$

$$\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$$

$$2 \vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$$

$$\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est 0 si $\vec{r}(t) \perp \vec{r}\,'(t)$

γ est situé sur une sphère centrée à l'origine car la propriété est validée

b) Démontrer formule suivante

$$\frac{d}{dt}\|\vec{u}(t)\| = \frac{1}{\|\vec{u}(t)\|}\vec{u}(t)\cdot\vec{u}'(t)$$

On sait que :

$$\|\vec{u}(t)\| = \sqrt{u(t)\cdot u(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\|\vec{u}(t)\| = \frac{d}{dt}\sqrt{u(t)\cdot u(t)} \Big\} \frac{d}{dt}\left(u(t)\cdot u(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u(t)\cdot u(t)}}\cdot\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u(t)\cdot u(t)}}\cdot\left(\frac{d}{dt}\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t) + \vec{u}(t)\frac{d}{dt}\vec{u}(t)\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{u(t)\cdot u(t)}}\cdot\cancel{2}\frac{d}{dt}\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\|\vec{u}(t)\| = \frac{1}{\sqrt{u(t)\cdot u(t)}}\cdot\vec{u}(t)\cdot\vec{u}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\|\vec{u}(t)\| = \frac{1}{\|\vec{u}(t)\|}\cdot\vec{u}(t)\cdot\vec{u}'(t)$$

La formule est démontré