MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 3: Le rotationnel et la divergence

Le rotationnel

Introduction

- Définition et calcul du rotationnel d'un champ vectoriel.
- Interprétation physique du rotationnel.

Le rotationnel

Définition

Soit $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ un champ vectoriel dont les dérivées partielles existent. Le *rotationnel* de $\vec{F}$ est le champ vectoriel

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Le rotationnel est un nouveau champ vectoriel obtenu à partir des dérivées partielles des composants de $\vec{F}$.

Notation

Soit l'*opérateur différentiel*

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Cet opérateur « agit » sur des fonctions et des champs vectoriels pour donner de nouveaux champs vectoriels.

Par exemple, si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire alors

$$\nabla f = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

est le *gradient* de f.

Le rotationnel

Pour le rotationnel, on écrit symboliquement rot $\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$.

Si on considère ∇ comme un vecteur alors on calcule

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

Le rotationnel

Pour le rotationnel, on écrit symboliquement rot $\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$.

Si on considère ∇ comme un vecteur alors on calcule

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\
&= \operatorname{rot} \vec{F}
\end{aligned}$$

- Cette notation est couramment utilisée.
- Le déterminant permet de calculer facilement le rotationnel.

Le rotationnel

Exemple

Calculer le rotationnel du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$.

Ici, $P(x,y,z) = 1$, $Q(x,y,z) = xy$ et $R(x,y,z) = xz^2$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{F} &= \nabla \times \vec{F} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 1 & xy & xz^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Exemple

Calculer le rotationnel du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$.

Ici, $P(x,y,z) = 1$, $Q(x,y,z) = xy$ et $R(x,y,z) = xz^2$.

$$\begin{aligned} \text{rot}\,\vec{F} &= \nabla \times \vec{F} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 1 & xy & xz^2 \end{vmatrix} \\ &= (0-0)\vec{i} \end{aligned}$$

Le rotationnel

Exemple

Calculer le rotationnel du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$.

Ici, $P(x,y,z) = 1$, $Q(x,y,z) = xy$ et $R(x,y,z) = xz^2$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{F} &= \nabla \times \vec{F} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 1 & xy & xz^2 \end{vmatrix} \\
&= (0-0)\vec{i} - (z^2 - 0)\vec{j}
\end{aligned}$$

Le rotationnel

Exemple

Calculer le rotationnel du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$.

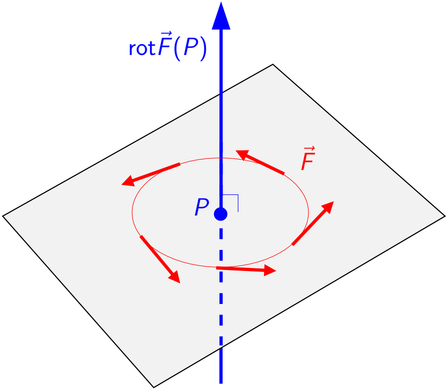
Ici, $P(x, y, z) = 1$, $Q(x, y, z) = xy$ et $R(x, y, z) = xz^2$.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{F} &= \nabla \times \vec{F} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 1 & xy & xz^2 \end{vmatrix} \\
&= (0 - 0)\vec{i} - (z^2 - 0)\vec{j} + (y - 0)\vec{k} \\
&= -z^2\vec{j} + y\vec{k}
\end{aligned}
$$

Le rotationnel

Interprétation du rotationnel

Si $\vec{F}$ est le champ de vitesses d'un fluide alors proche d'un point P le fluide a tendance à « tourner » autour d'un axe de direction $\operatorname{rot}\vec{F}(P)$, orienté selon la règle de la main droite, avec une vitesse de $||\operatorname{rot}\vec{F}(P)||$.



Le rotationnel

Le rotationnel en deux dimensions

Un champ vectoriel en deux dimensions $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ peut être vu comme un champ en trois dimensions dont les composantes sont indépendantes de z :

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\ &= (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \end{aligned}$$

Le rotationnel en deux dimensions

Un champ vectoriel en deux dimensions $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ peut être vu comme un champ en trois dimensions dont les composantes sont indépendantes de z :

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\ &= (0 - 0)\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\end{aligned}$$

Le rotationnel

Le rotationnel en deux dimensions

Un champ vectoriel en deux dimensions $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ peut être vu comme un champ en trois dimensions dont les composantes sont indépendantes de z :

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\text{rot}\,\vec{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\
&= (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

Le rotationnel

Le rotationnel en deux dimensions

Un champ vectoriel en deux dimensions $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ peut être vu comme un champ en trois dimensions dont les composantes sont indépendantes de z :

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Dans ce cas,

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Résumé

- Définition du rotationnel.
- Notation et calcul du rotationnel.
- Interprétation du rotationnel.
- Rotationnel en deux dimensions.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 3: Le rotationnel et la divergence

Un critère en trois dimension pour les champs conservatifs

Introduction

- Généralisation du critère pour les champs conservatifs aux champs en trois dimensions.

Critère pour les champs conservatifs

Théorème

Soit $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ un champ vectoriel dont les dérivées partielles sont continues sur un domaine simplement connexe D de l'espace. Alors

$$\vec{F} \text{ est conservatif sur } D \iff \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}.$$

Remarques

- L'implication $\vec{F}$ conservatif $\Rightarrow$ rot $\vec{F} = \vec{0}$ ne nécessite pas l'hypothèse sur le domaine et est facile à prouver.
- La réciproque exige l'hypothèse sur le domaine et est plus difficile à démontrer.

Critère pour les champs conservatifs

Exemple

Le champ $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$ est-il conservatif ?

On a déjà calculé que rot $\vec{F} = -z^2\vec{j} + y\vec{k}$.

Puisque le rotationnel est non nul, le champ n'est PAS conservatif.

Critère pour les champs conservatifs

Le critère en deux dimensions

Si $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ est un champ vectoriel en deux dimensions alors on a vu que

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Le critère devient

$$\begin{aligned}
\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}
\end{aligned}$$

Résumé

- Critère pour déterminer si un champ vectoriel en trois dimensions est conservatif.
- Ce critère généralise celui vu pour les champs en deux dimensions.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 3: Le rotationnel et la divergence

Exemple 1: utilisation du critère pour les champs conservatifs

Ex. 1 : utilisation du critère pour les champs conservatifs

Soit le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = \left[y^3 - 4\alpha xz^2\right]\vec{i} + \left[3xy^2 + 2yz^2\right]\vec{j} + \left[4\alpha y^2 z - 2x^2 z\right]\vec{k}$$

où α est une constante.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le champ $\vec{F}$ est-il conservatif ?

- Les composantes P, Q et R de $\vec{F}$ sont des polynômes, quelle que soit la valeur de α. Leurs dérivées partielles sont donc continues dans $\mathbb{R}^3$, qui est simplement connexe.
- Dans ce cas, $\vec{F}$ conservatif $\Leftrightarrow$ rot $\vec{F} = \vec{0}$.

Ex. 1 : utilisation du critère pour les champs conservatifs

Soit le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = \left[y^3 - 4\alpha xz^2\right]\vec{i} + \left[3xy^2 + 2yz^2\right]\vec{j} + \left[4\alpha y^2 z - 2x^2 z\right]\vec{k}$$

où α est une constante.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le champ $\vec{F}$ est-il conservatif ?

- On calcule

$$\operatorname{rot}\vec{F} = [8\alpha yz - 4yz]\vec{i} + [-8\alpha xz + 4xz]\vec{j} + 0\vec{k}.$$

- Donc $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 8\alpha yz - 4yz = 0 \\ -8\alpha xz + 4xz = 0 \end{cases}$$

pour tous $(x,y,z) \Leftrightarrow \alpha = 1/2$.

Ex. 1 : utilisation du critère pour les champs conservatifs

Soit le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = \left[y^3 - 4\alpha xz^2\right]\vec{i} + \left[3xy^2 + 2yz^2\right]\vec{j} + \left[4\alpha y^2 z - 2x^2 z\right]\vec{k}$$

où α est une constante.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le champ $\vec{F}$ est-il conservatif ?

- Le champ est conservatif si et seulement si $\alpha = 1/2$.
- Pour $\alpha = 1/2$, on peut vérifier que $f(x,y,z) = xy^3 - x^2z^2 + y^2z^2$ est un potentiel pour $\vec{F}$.

Résumé

- Application du critère pour les champs conservatifs à un champ en trois dimensions.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 3: Le rotationnel et la divergence

La divergence

Introduction

- Définition de la divergence d'un champ vectoriel et formule de calcul.
- Interprétation de la divergence.
- Relation entre la divergence et le rotationnel.

La divergence

Définition

Soit $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ un champ vectoriel dont les dérivées partielles existent. La *divergence* de $\vec{F}$ est la fonction

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

La divergence est une fonction scalaire construite à partir des dérivées partielles des composantes du champ $\vec{F}$.

La divergence

Notation

On se rappelle que

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Si on considère ∇ comme un « vecteur » alors on peut écrire

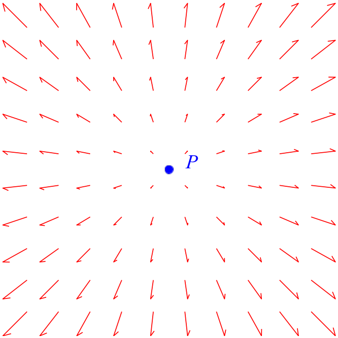
$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

Exemple

Si $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$ alors

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial(1)}{\partial x} + \frac{\partial(xy)}{\partial y} + \frac{\partial(xz^2)}{\partial z} = 0 + x + 2xz = x + 2xz.$$

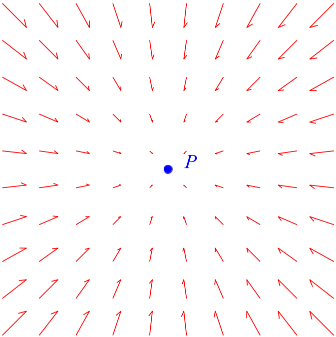
Interprétation



$$\text{div}\,\vec{F}(P) > 0$$

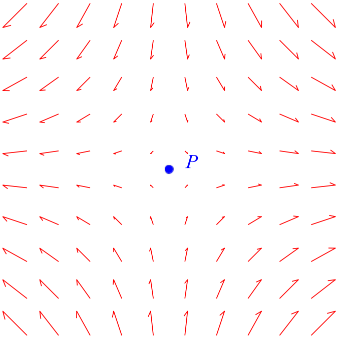
La divergence

Interprétation



$$\operatorname{div} \vec{F}(P) < 0$$

Interprétation



$$\operatorname{div} \vec{F}(P) = 0$$

La divergence

Théorème

Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ est un champ vectoriel ayant des dérivées partielles secondes continues alors

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}
\end{aligned}$$

La divergence

Théorème

Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ est un champ vectoriel ayant des dérivées partielles secondes continues alors

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \cancel{\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exemple

Pour le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$$

il n'existe PAS un autre champ $\vec{G}$ tel que $\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{G}$ car

$$\operatorname{div}\vec{F} = x + 2xz \neq 0.$$

Résumé

- Définition de la divergence d'un champ vectoriel.
- Notation et calcul.
- Interprétation.
- Relation avec le rotationnel.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 4: Le théorème de Stokes

Énoncé du théorème de Stokes

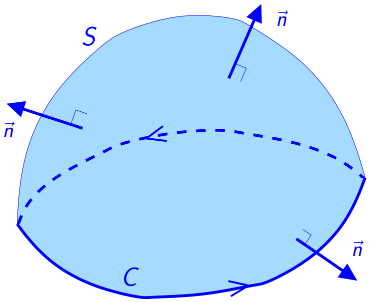
Introduction

- Orientation compatible d'une surface et de son bord.
- Énoncé du théorème de Stokes.

Énoncé du théorème de Stokes

Définition

Soit S une surface orientée et C son bord (sa frontière). On dit que C est orientée *positivement* par rapport à l'orientation de S si la surface est toujours située à gauche lorsqu'on parcourt C.



Énoncé du théorème de Stokes

Définition

Soit S une surface orientée et C son bord (sa frontière). On dit que C est orientée *positivement* par rapport à l'orientation de S si la surface est toujours située à gauche lorsqu'on parcourt C.

- Ceci est essentiellement la règle de la main droite.
- Cette définition n'est pas rigoureuse mais elle suffit à nos besoins.

Énoncé du théorème de Stokes

Définition

Une surface S est *lisse par morceaux (lpm)* si elle est constituée d'un nombre fini de morceaux lisses.

Théorème de Stokes

Soit S une surface orientée lisse par morceaux et C la courbe fermée simple qui forme son bord, orientée positivement par rapport à S. Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel dont les dérivées partielles sont continues dans un voisinage de S. Alors

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Résumé

- Compatibilité entre l'orientation d'une surface et celle de la courbe qui forme son bord.
- Énoncé du théorème de Stokes.

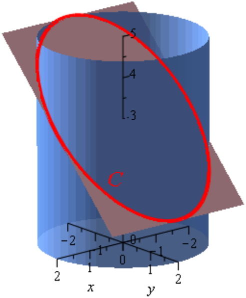
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 4: Le théorème de Stokes

Exemple 1: calcul de l'intégrale curviligne à l'aide du théorème de Stokes

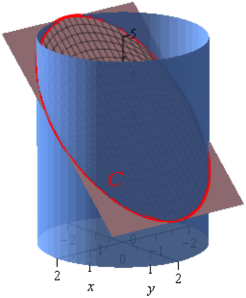
Exemple 1 : calcul de l'intégrale curviligne

Calculer $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$ où $\vec{F}(x, y, z) = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} + ze^{-y}\vec{k}$ et C est la courbe d'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et du plan $z = 3 - y$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.



Exemple 1 : calcul de l'intégrale curviligne

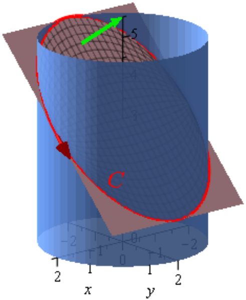
Calculer $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ où $\vec{F}(x, y, z) = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} + ze^{-y}\vec{k}$ et C est la courbe d'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et du plan $z = 3 - y$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.



- C est le bord d'une partie S du plan.

Exemple 1 : calcul de l'intégrale curviligne

Calculer $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ où $\vec{F}(x, y, z) = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} + ze^{-y}\vec{k}$ et C est la courbe d'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et du plan $z = 3 - y$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.



- C est le bord d'une partie S du plan.
- L'orientation de S compatible avec celle de C est donné par un vecteur normal pointant vers le haut.

S est paramétrée par

$$\vec{R}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (3 - y)\vec{k}$$

avec $(x, y) \in D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Exemple 1 : calcul de l'intégrale curviligne

Calculer $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$ où $\vec{F}(x, y, z) = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} + ze^{-y}\vec{k}$ et C est la courbe d'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et du plan $z = 3 - y$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.

On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{R}_x &= \vec{i} \\
\vec{R}_y &= \vec{j} - \vec{k} \\
\vec{R}_x \times \vec{R}_y &= \vec{j} + \vec{k} \\
\text{rot } \vec{F} &= -(x + ze^{-y})\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k} \\
\text{rot } \vec{F}(\vec{R}(x, y)) &= -(x + (3 - y)e^{-y})\vec{i} + 2y\vec{j} - (3 - y)\vec{k} \\
\text{rot } \vec{F}(\vec{R}(x, y)) \cdot (\vec{R}_x \times \vec{R}_y) &= 3y - 3
\end{aligned}$$

Exemple 1 : calcul de l'intégrale curviligne

Calculer $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$ où $\vec{F}(x, y, z) = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} + ze^{-y}\vec{k}$ et C est la courbe d'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et du plan $z = 3 - y$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.

Selon le théorème de Stokes,

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_D \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{R}(x, y)) \cdot (\vec{R}_x \times \vec{R}_y)\, dA \\
&= \iint_D (3y - 3)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r \sin\theta - 3) r \, dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 -3r \, dr d\theta = -3 \text{ aire}(D) = -12\pi.
\end{aligned}$$

Résumé

- Choix d'une surface dont le bord est la courbe donnée.
- Détermination de l'orientation compatible de la surface.
- Calcul de l'intégrale curviligne à l'aide du théorème de Stokes.

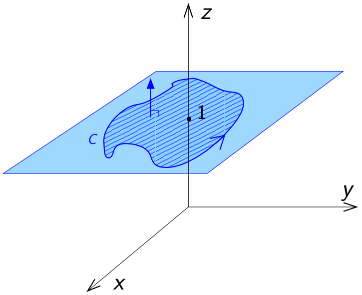
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 4: Le théorème de Stokes

Exemple 3: Utilisation du théorème de Stokes

Exemple 3 : Utilisation du théorème de Stokes

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = (e^x + z)\vec{i} + (e^y + 2x)\vec{j} + (e^z + xy)\vec{k}$ et C une courbe fermée située dans le plan $z = 1$. Montrez que la circulation de $\vec{F}$ autour de C ne dépend que de l'aire de la partie du plan délimitée par C, et non de la courbe elle-même.



- La *circulation* d'un champ $\vec{F}$ autour d'une courbe fermée C est simplement
$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}.$$
- Choisissons d'orienter C dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.
- Soit S la partie du plan délimitée par C, orientée vers le haut ($\vec{n} = \vec{k}$).

Exemple 3 : Utilisation du théorème de Stokes

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = (e^x + z)\vec{i} + (e^y + 2x)\vec{j} + (e^z + xy)\vec{k}$ et C une courbe fermée située dans le plan $z = 1$. Montrez que la circulation de $\vec{F}$ autour de C ne dépend que de l'aire de la partie du plan délimitée par C, et non de la courbe elle-même.

On calcule : $\text{rot}\,\vec{F} = x\vec{i} + (1-y)\vec{j} + 2\vec{k}$

Selon le théorème de Stokes,

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot \vec{n}\,dS \\ &= \iint_S (x\vec{i} + (1-y)\vec{j} + 2\vec{k})\cdot \vec{k}\,dS \\ &= \iint_S 2\,dS = 2\ \text{aire}(S). \end{aligned}$$

La circulation dépend seulement de l'aire délimitée par C.

Résumé

- Utilisation du théorème de Stokes pour démontrer une propriété d'un champ vectoriel donné.
- Calcul de l'intégrale de surface sans passer par une paramétrisation.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 4: Le théorème de Stokes

Exemple 2: calcul de l'intégrale de surface à l'aide du théorème de Stokes

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

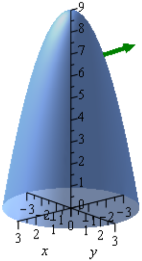
où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

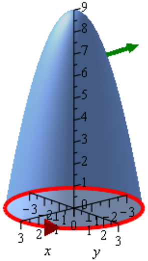


Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.



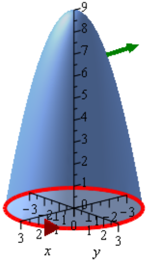
- Le bord orienté positivement de S est le cercle $C : x^2 + y^2 = 9$, parcouru dans le sens antihoraire lorsque vu du-dessus.

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.



- Le bord orienté positivement de S est le cercle $C : x^2 + y^2 = 9$, parcouru dans le sens antihoraire lorsque vu du-dessus.
- Selon le théorème de Stokes,

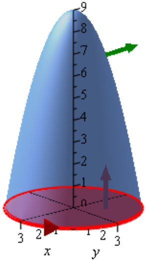
$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.



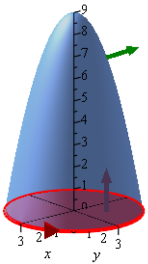
- La courbe C est aussi le bord du disque $D : x^2 + y^2 \leq 9$.

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.



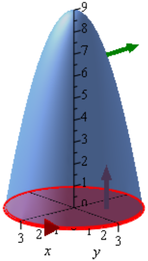
- La courbe C est aussi le bord du disque $D : x^2 + y^2 \leq 9$.
- L'orientation de D compatible avec celle de C est donnée par un vecteur normal pointant vers le haut.

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.



- La courbe C est aussi le bord du disque $D : x^2 + y^2 \leq 9$.
- L'orientation de D compatible avec celle de C est donnée par un vecteur normal pointant vers le haut.
- Selon le théorème de Stokes,

$$\iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

On a donc

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

D est paramétrée par $\vec{R}(x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$ avec $(x, y) \in D$.

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

D est paramétrée par $\vec{R}(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$ avec $(x,y) \in D$.

On calcule

$$\vec{R}_x \times \vec{R}_y = \vec{k}$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

D est paramétrée par $\vec{R}(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$ avec $(x,y) \in D$.

On calcule

$$\begin{aligned} \vec{R}_x \times \vec{R}_y &= \vec{k} \\ \text{rot}\,\vec{F} &= (2z\sin z^2 - x\cos z)\,\vec{i} - 2z\sin z^2\,\vec{j} + (3y^2 + \sin z)\,\vec{k} \end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

D est paramétrée par $\vec{R}(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$ avec $(x,y)\in D$.

On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{R}_x \times \vec{R}_y &= \vec{k} \\
\operatorname{rot}\vec{F} &= (2z\sin z^2 - x\cos z)\,\vec{i} - 2z\sin z^2\,\vec{j} + (3y^2 + \sin z)\,\vec{k} \\
\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{R}(x,y)) &= -x\,\vec{i} + 3y^2\,\vec{k}
\end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

Ainsi,

$$\iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad = \quad \iint_D \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{R}(x, y)) \cdot \left(\vec{R}_x \times \vec{R}_y\right)\, dA$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{R}(x,y)) \cdot \left(\vec{R}_x \times \vec{R}_y\right)\, dA \\
&= \iint_D [-x\,\vec{i} + 3y^2\,\vec{k}] \cdot\ \vec{k}\, dA
\end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_D \text{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \text{rot}\,\vec{F}(\vec{R}(x, y)) \cdot \left(\vec{R}_x \times \vec{R}_y\right)\, dA \\
&= \iint_D [-x\,\vec{i} + 3y^2\,\vec{k}] \cdot \vec{k}\, dA = \iint_D 3y^2\, dA
\end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_D \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_D \text{rot}\,\vec{F}(\vec{R}(x,y))\cdot\left(\vec{R}_x \times \vec{R}_y\right)\,dA \\
&= \iint_D [-x\,\vec{i} + 3y^2\,\vec{k}]\cdot\,\vec{k}\,dA = \iint_D 3y^2\,dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 3r^2\sin^2\theta\, r\,drd\theta
\end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x,y,z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x\sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_D \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_D \operatorname{rot}\vec{F}(\vec{R}(x,y))\cdot\left(\vec{R}_x\times\vec{R}_y\right)\,dA \\
&= \iint_D [-x\,\vec{i} + 3y^2\,\vec{k}]\cdot\,\vec{k}\,dA = \iint_D 3y^2\,dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 3r^2\sin^2\theta\,r\,drd\theta = \frac{243}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul de l'intégrale de surface

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z^2 - y^3)\,\vec{i} + (\cos z^2 + x \sin z)\,\vec{j} + \sin z^2\,\vec{k}$. Calculer

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où S est la partie du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

En conclusion, l'intégrale cherchée est

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{243}{4}\pi.$$

Résumé

- Deux utilisations successives du théorème de Stokes ont permis de remplacer la surface donnée par une surface plus simple.

Résumé

- Deux utilisations successives du théorème de Stokes ont permis de remplacer la surface donnée par une surface plus simple.
- Calcul d'une intégrale de surface à l'aide du théorème de Stokes.