MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 5 :

Changement de variables : exemple 2

Introduction

- Exemple de changement de variables en deux dimensions

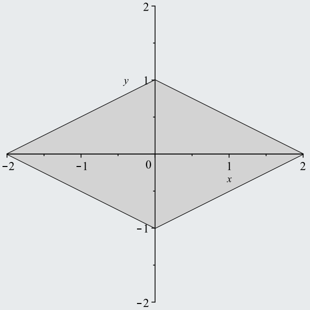
Changement de variables en deux dimensions

Énoncé

Évaluer l'intégrale

$$\iint_R (x+y)^2 \, dA,$$

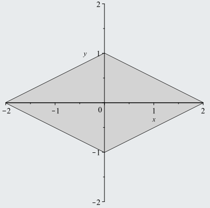
où R est le domaine illustré ci-dessous.



Changement de variables en deux dimensions (2)

Remarque

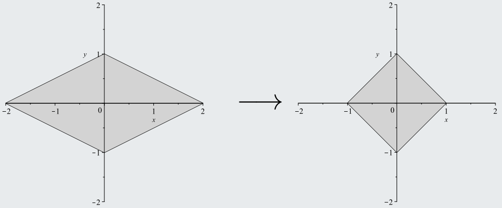
Le calcul peut être simplifié par un changement de variables. Le changement de variables est basé sur des transformations géométriques. Il est résumé dans les figures ci-dessous :



Changement de variables en deux dimensions (2)

Remarque

Le calcul peut être simplifié par un changement de variables. Le changement de variables est basé sur des transformations géométriques. Il est résumé dans les figures ci-dessous :

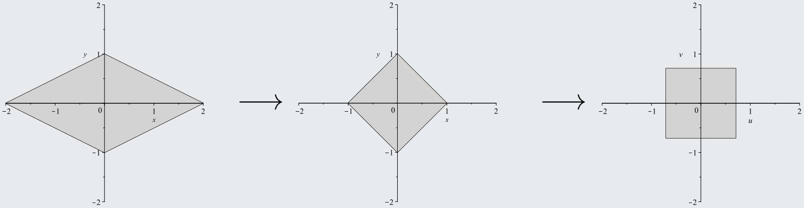


- Contraction le long de l'axe des x

Changement de variables en deux dimensions (2)

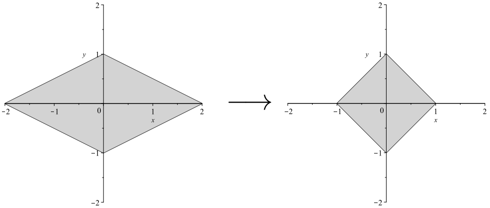
Remarque

Le calcul peut être simplifié par un changement de variables. Le changement de variables est basé sur des transformations géométriques. Il est résumé dans les figures ci-dessous :



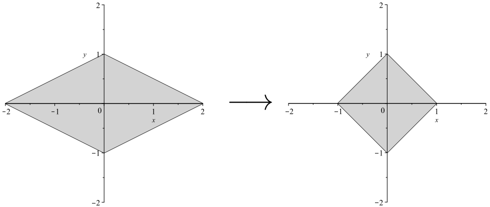
- Contraction le long de l'axe des x
- Rotation

Contraction :



$T_1(x, y) = (x', y')$, où $x' = x/2$ et $y' = y$

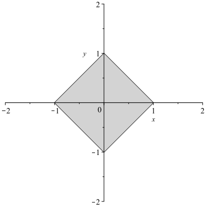
Contraction :



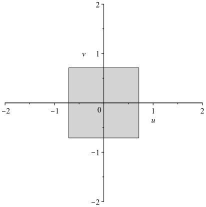
$T_1(x, y) = (x', y')$, où $x' = x/2$ et $y' = y$ donc $x = 2x'$ et $y = y'$.

Changement de variables en deux dimensions (3)

Rotation :

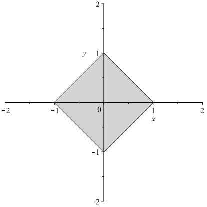


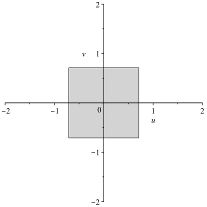
$\longrightarrow$



Changement de variables en deux dimensions (3)

Rotation :

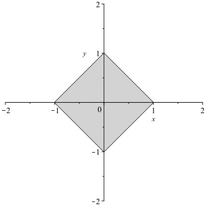




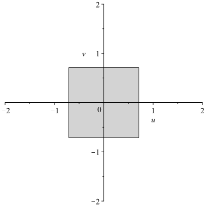
Soit $T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de rotation.

Changement de variables en deux dimensions (3)

Rotation :



$\longrightarrow$



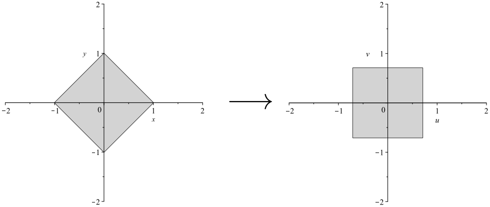
Soit $T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de rotation.

Alors

$$T_2 \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Changement de variables en deux dimensions (3)

Rotation :



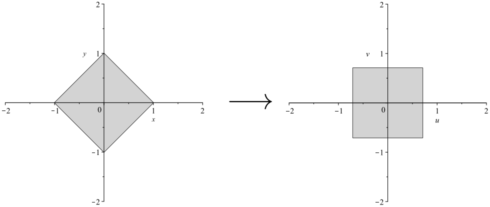
Soit $T_2 = \left[\begin{array}{cc} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{array}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$ la matrice de rotation.

Alors

$$T_2 \left[\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right] \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right]$$

Changement de variables en deux dimensions (3)

Rotation :



Soit $T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de rotation.

Alors

$$T_2 \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

donc

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} x' - y' \\ x' + y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Changement de variables en deux dimensions (4)

Puisque

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') & = & u \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') & = & v, \end{cases}$$

Changement de variables en deux dimensions (4)

Puisque

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') & = & u \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') & = & v, \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} x' & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v) \\ y' & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(v - u). \end{cases}$$

Changement de variables en deux dimensions (5)

En combinant les deux transformations, on obtient le changement de variables

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & 2x' & = & \sqrt{2}(u+v) \\ y & = & y' & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(v-u) \end{array}\right. .$$

Jacobien, intégrande et nouveau domaine

On a

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Jacobien, intégrande et nouveau domaine

On a

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2.$$

Jacobien, intégrande et nouveau domaine

On a

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2.$$

De plus,

$$f(x,y)$$

Jacobien, intégrande et nouveau domaine

On a

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2.$$

De plus,

$$f(x,y) = f\left(\sqrt{2}(u+v), \frac{\sqrt{2}}{2}(v-u)\right)$$

Jacobien, intégrande et nouveau domaine

On a
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1-(-1) = 2.$$

De plus,
$$f(x,y) = f\left(\sqrt{2}(u+v), \frac{\sqrt{2}}{2}(v-u)\right) = \frac{(u+3v)^2}{2}$$
après simplification.

Jacobien, intégrande et nouveau domaine

On a

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2.$$

De plus,

$$f(x,y) = f\left(\sqrt{2}(u+v), \frac{\sqrt{2}}{2}(v-u)\right) = \frac{(u+3v)^2}{2}$$

après simplification.

Le nouveau domaine est le carré

$$S = \left\{(u,v) \mid -\frac{\sqrt{2}}{2} \le u \le \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \le v \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Calcul de l'intégrale

Ainsi,

$$\iint_R (x+y)^2 \, dA \quad = \quad \iint_S f\left(\sqrt{2}(u+v), \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \, dA$$

Calcul de l'intégrale

Ainsi,

$$\begin{aligned}\iint_R (x+y)^2\, dA &= \iint_S f\left(\sqrt{2}(u+v), \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(u+3v)^2}{2}\cdot 2\, dudv\end{aligned}$$

Calcul de l'intégrale

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_R (x+y)^2 \, dA &= \iint_S f\left(\sqrt{2}(u+v), \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \, dA \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(u+3v)^2}{2} \cdot 2 \, dudv \\
&= \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

Résumé

- Description d'un changement de variables en deux dimensions.

Résumé

- Description d'un changement de variables en deux dimensions.
- Calcul du jacobien du changement de variables.

Résumé

- Description d'un changement de variables en deux dimensions.
- Calcul du jacobien du changement de variables.
- Calcul d'une intégrale double à l'aide d'un changement de variables.