MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 1: Les intégrales triples

Définition et formules de calcul

Introduction

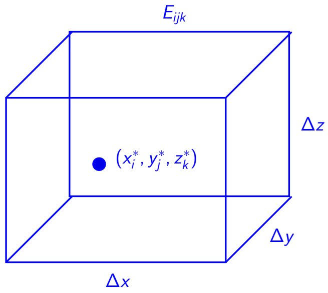
- Intégrale triple sur un parallélippipède.
- Intégrale triple sur un domaine de type 1, 2 ou 3.

Définition et formules de calcul

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables et $E \subset \mathbb{R}^3$ le parallélépipède rectangle

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\right\}.$$

- On subdivise E en sous-domaines E_{ijk} à l'aide de subdivisions des intervalles $[a, b]$, $[c, d]$ et $[r, s]$.
- On choisit des points d'évaluation $(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \in E_{ijk}$.



Définition et formules de calcul

- On suppose les intervalles subdivisés en m, n et p sous-intervalles égaux, de longueur Δx, Δy et Δz.
- On pose $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z = \text{vol}(E_{ijk})$.

Définition

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \lim_{m,n,p\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\,\Delta V$$

si cette limite existe.

Si la limite existe, f est *intégrable* sur E.
Si f est continue sur E alors elle est intégrable.
Une fonction discontinue peut aussi être intégrable.

Définition et formules de calcul

- On suppose les intervalles subdivisés en m, n et p sous-intervalles égaux, de longueur Δx, Δy et Δz.
- On pose $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z = \text{vol}(E_{ijk})$.

Définition

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \lim_{m,n,p\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\, \Delta V$$

si cette limite existe.

Si la limite existe, f est *intégrable* sur E.
Si f est continue sur E alors elle est intégrable.
Une fonction discontinue peut aussi être intégrable.
dV : *petit élément de volume*.

Définition et formules de calcul

Théorème

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz$$

... ou une intégrale analogue selon un autre ordre d'intégration.

Il y a 6 ordre d'intégration possibles.

Définition et formules de calcul

Exemple

Évaluer $J = \iiint_E (x + yz^3)\, dV$, où

$$E = \{(x, y, z) \,|\, 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 0, 1 \le z \le 2\}.$$

On a

$$\begin{aligned}
J &= \int_1^2 \int_{-1}^0 \int_0^1 (x + yz^3)\, dxdydz = \int_1^2 \int_{-1}^0 \left[\frac{x^2}{2} + xyz^3\right]_{x=0}^1 dydz \\
&= \int_1^2 \int_{-1}^0 \left[\frac{1}{2} + yz^3\right] dydz = \int_1^2 \left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} z^3\right]_{y=-1}^0 dz \\
&= \int_1^2 \left[0 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^3\right)\right] dz = \int_1^2 (1 - z^3)\, dz = -\frac{11}{8}.
\end{aligned}$$

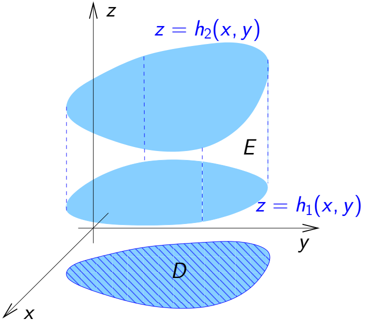
Définition et formules de calcul

Définition

Une région $E \subset \mathbb{R}^3$ est de *type 1* si

$$E = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D,\ h_1(x, y) \le z \le h_2(x, y)\},$$

où D est un domaine du plan Oxy (de type I ou II).



Définition et formules de calcul

Théorème

Si E est un domaine de type 1 et si f est intégrable sur E alors

$$\iiint_E f(x,y,z) = \iint_D \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dA.$$

Définition et formules de calcul

Définition

Une région $E \subset \mathbb{R}^3$ est de *type 2* si

$$E = \{(x,y,z) \,|\, (y,z) \in D,\ h_1(y,z) \leq x \leq h_2(y,z)\},$$

où D est un domaine du plan Oyz (de type I ou II).

Théorème

Si E est un domaine de type 2 et si f est intégrable sur E alors

$$\iiint_E f(x,y,z) = \iint_D \left[\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x,y,z)\, dx \right] dA.$$

Définition et formules de calcul

Définition

Une région $E \subset \mathbb{R}^3$ est de *type 3* si

$$E = \{(x, y, z) \,|\, (x, z) \in D,\ h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\},$$

où D est un domaine du plan Oxz (de type I ou II).

Théorème

Si E est un domaine de type 3 et si f est intégrable sur E alors

$$\iiint_E f(x, y, z) = \iint_D \left[\int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA.$$

Résumé

- Intégrale triple sur un parallélipipède : procédure de construction habituelle pour une intégrale.
- Reǵions de types 1, 2 et 3 dans $\mathbb{R}^3$.
- Intégrales triples sur des domaines de types 1, 2 et 3.