MTH1102D Calcul II

Chapitre 6, section 2 : Les intégrales doubles sur des domaines généraux

Exemple d'introduction

Introduction

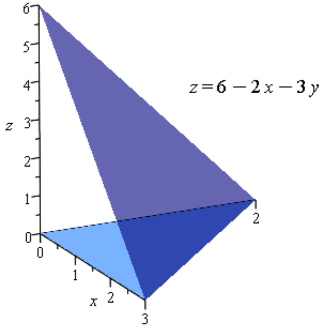
- Un exemple d'une intégrale sur un domaine autre qu'un rectangle.
- La procédure employée peut être justifiée rigoureusement.

Intégrale double sur un domaine général : un exemple

Calculer le volume du solide E borné par les plans $z = 6 - 2x - 3y$, $x = 0, y = 0$ et $z = 0$.

Intégrale double sur un domaine général : un exemple

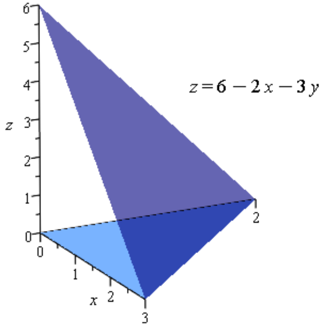
Calculer le volume du solide E borné par les plans $z = 6 - 2x - 3y$, $x = 0, y = 0$ et $z = 0$.



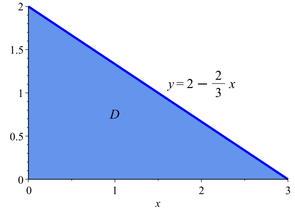
La région E

Intégrale double sur un domaine général : un exemple

Calculer le volume du solide E borné par les plans $z = 6 - 2x - 3y$, $x = 0, y = 0$ et $z = 0$.



La région E

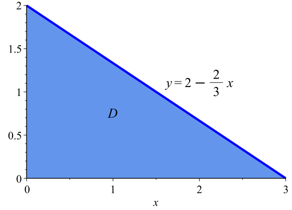


Projection de E dans le plan des (x, y)

Intégrale double sur un domaine général : un exemple

Par analogie avec le cas d'un rectangle, on écrit

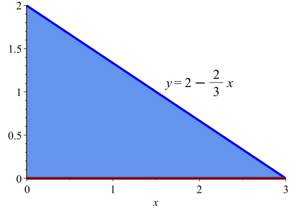
$$\mathrm{vol}(E) = \iint_D (6 - 2x - 3y)\, dA.$$



Intégrale double sur un domaine général : un exemple

$$\text{vol}(E) = \iint_D (6 - 2x - 3y)\, dA.$$

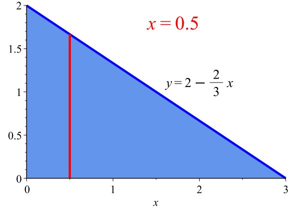
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 - \frac{2}{3}x \right\}$$



Intégrale double sur un domaine général : un exemple

$$\text{vol}(E) = \iint_D (6 - 2x - 3y)\, dA.$$

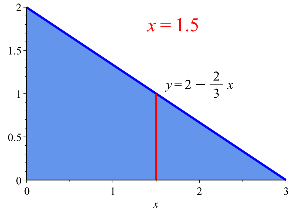
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 - \frac{2}{3}x \right\}$$



Intégrale double sur un domaine général : un exemple

$$\text{vol}(E) = \iint_D (6 - 2x - 3y)\, dA.$$

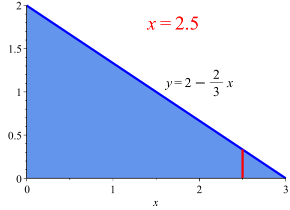
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 - \frac{2}{3}x \right\}$$



Intégrale double sur un domaine général : un exemple

$$\text{vol}(E) = \iint_D (6 - 2x - 3y)\, dA.$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 - \frac{2}{3}x \right\}$$



Intégrale double sur un domaine général : un exemple

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 - \frac{2}{3}x\right\}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(E) &= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} (6 - 2x - 3y)\, dydx \\
&= \int_0^3 \left[6y - 2xy - \frac{3}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2-\frac{2}{3}x} dx \\
&= \int_0^3 \left(6(2-2x/3) - 2x(2-2x/3) - \frac{3}{2}(2-2x/3)^2\right) dx \\
&= \int_0^3 \left(6 - 4x + \frac{2}{3}x^2\right) dx = \left[6x + 2x^2 + \frac{2}{9}x^3\right]_{x=0}^{x=3} = 6.
\end{aligned}$$

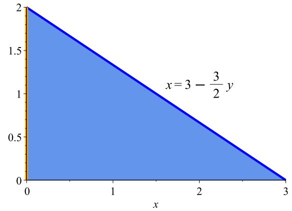
Intégrale double sur un domaine général : un exemple

On aurait pu intégrer selon l'autre ordre :

Intégrale double sur un domaine général : un exemple

On aurait pu intégrer selon l'autre ordre :

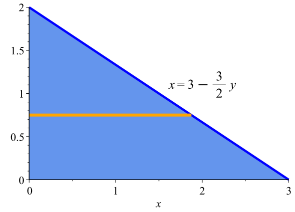
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 3 - \frac{3}{2}y, 0 \leq y \leq 2 \right\}$$



$$\text{vol}(E) = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}y} (6 - 2x - 3y)\, dx\, dy$$

On aurait pu intégrer selon l'autre ordre :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 3 - \frac{3}{2}y, 0 \leq y \leq 2 \right\}$$



$$\mathrm{vol}(E) = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}y} (6 - 2x - 3y)\, dx dy$$

Résumé

- Par analogie avec le cas où le domaine d'intégration est un rectangle, on a pu calculer une intégrale double sur un domaine plus général.
- Le résultat obtenu est plausible mais il faut vérifier si la méthode employée est toujours valide.