MTH1102D Calcul II

Chapitre 6, section 2 : Les intégrales doubles sur des domaines généraux

Exemple 8 : estimation d'une intégrale

Exemple 8 : estimation d'une intégrale

Estimer la valeur de l'intégrale $J = \int_2^3 \int_{-1}^1 x^2 e^{\frac{1}{y^2}}\, dxdy$.

- Intégrale difficile à évaluer : $f(x, y)$ ne possède pas de primitive simple en y.
- On approxime J à l'aide de la propriété 4.

Exemple 8 : estimation d'une intégrale

Estimer la valeur de l'intégrale $J = \int_2^3 \int_{-1}^1 x^2 e^{\frac{1}{y^2}}\, dxdy$.

Sur $R = [-1,1] \times [2,3]$,

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 2 \le y \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x^2 \le 1 \\ 4 \le y^2 \le 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x^2 \le 1 \\ \frac{1}{9} \le \frac{1}{y^2} \le \frac{1}{4} \end{cases}$$

donc

$$0 \le x^2 e^{\frac{1}{y^2}} \le 1 \cdot e^{\frac{1}{4}}$$

car l'exponentielle est croissante.

Exemple 8 : estimation d'une intégrale

Estimer la valeur de l'intégrale $J = \int_2^3 \int_{-1}^1 x^2 e^{\frac{1}{y^2}}\, dxdy$.

Selon la propriété 4, si

$$0 \leq x^2 e^{\frac{1}{y^2}} \leq e^{\frac{1}{4}}$$

alors

$$\begin{array}{ccccccc} & \displaystyle\iint_R 0\, dA & \leq & \displaystyle\iint_R x^2 e^{\frac{1}{y^2}}\, dA & \leq & \displaystyle\iint_R e^{\frac{1}{4}}\, dA \\ \Rightarrow & 0 & \leq & J & \leq & e^{\frac{1}{4}} \displaystyle\int_2^3 \int_{-1}^1 1\, dxdy \\ \Rightarrow & 0 & \leq & J & \leq & 2e^{\frac{1}{4}}. \end{array}$$

Exemple 8 : estimation d'une intégrale

- Approximation sous forme d'un intervalle : $0 \leq J \leq 2e^{\frac{1}{4}}$
- Approximation ponctuelle : $J \approx (0 + 2e^{\frac{1}{4}})/2 = e^{\frac{1}{4}} \approx 1.28.$
- En fait, $J \approx 0.79.$

Résumé

- La propriété 4 permet de borner la valeur d'une intégrale.
- Les bornes permettent d'estimer l'intégrale à l'aide d'un intervalle ou d'une approximation ponctuelle.