MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 2: Les coordonnées cylindriques et sphériques

Coordonnées cylindriques

Introduction

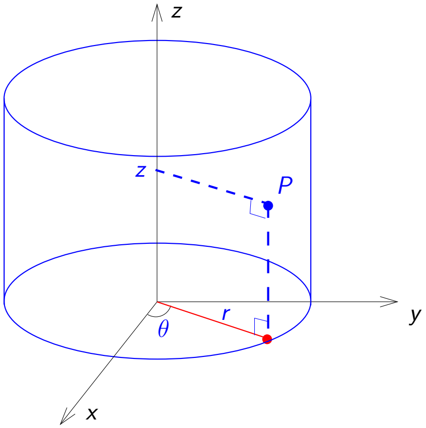
- Coordonnées cylindriques.
- Formules de passage.

Coordonnées cylindriques

Un point P de l'espace est repéré par un triplet (r, θ, z), où

- r et θ sont les coordonnées polaires de la projection de P dans le plan $z = 0$.

  r est la distance du point P à l'axe des z.

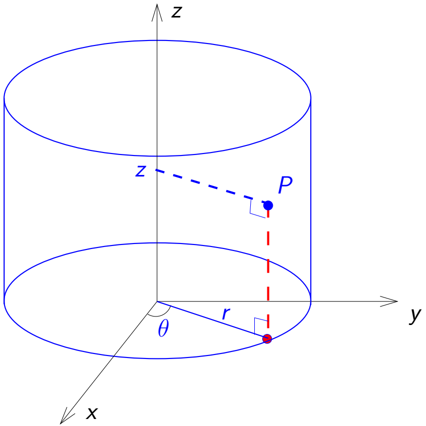


Coordonnées cylindriques

Un point P de l'espace est repéré par un triplet (r, θ, z), où

- r et θ sont les coordonnées polaires de la projection de P dans le plan $z = 0$.

  r est la distance du point P à l'axe des z.
- z est distance du point P au plan $z = 0$.



Coordonnées cylindriques

Conventions :

- On suppose que $r \geq 0$.
- On suppose que $\theta \in [0, 2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi, \pi]$.
- Formules de passage :

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

Coordonnées cylindriques

Conventions :

- On suppose que $r \geq 0$.
- On suppose que $\theta \in [0, 2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi, \pi]$
- Formules de passage :

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

Coordonnées cylindriques

Conventions :

- On suppose que $r \geq 0$.
- On suppose que $\theta \in [0, 2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi, \pi]$
- Formules de passage :

$x = r\cos\theta$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\sin\theta$	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$
$z = z$	

Coordonnées cylindriques

Conventions :

- On suppose que $r \geq 0$.
- On suppose que $\theta \in [0, 2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi, \pi]$
- Formules de passage :

$$
\begin{array}{l|l}
x = r\cos\theta & r = \sqrt{x^2 + y^2} \\
y = r\sin\theta & \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\
z = z & z = z
\end{array}
$$

Résumé

- Définition des coordonnées cylindriques.
- Formules de passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes et vice versa.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 2: Les coordonnées cylindriques et sphériques

Coordonnées sphériques

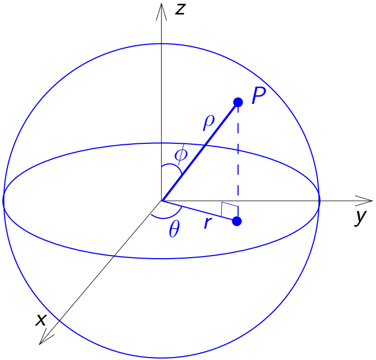
Introduction

- Coordonnées sphériques.
- Formules de passage.

Coordonnées sphériques

Un point P de l'espace est repéré par un triplet (ρ, θ, ϕ), où

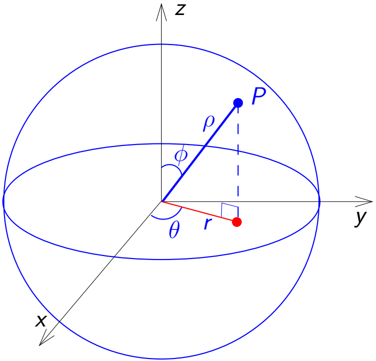
- ρ est la distance de P à l'origine.



Coordonnées sphériques

Un point P de l'espace est repéré par un triplet (ρ, θ, ϕ), où

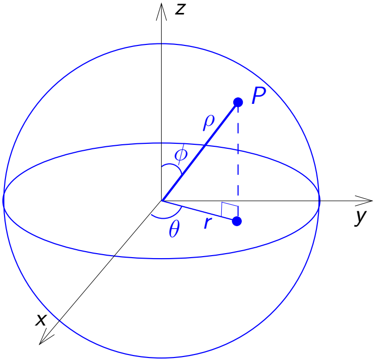
- ρ est la distance de P à l'origine.
- θ est l'angle formé par l'axe Ox et le segment allant de l'origine à la projection de P dans le plan $z = 0$.



Coordonnées sphériques

Un point P de l'espace est repéré par un triplet (ρ, θ, ϕ), où

- ρ est la distance de P à l'origine.
- θ est l'angle formé par l'axe Ox et le segment de l'origine à la projection de P dans le plan $z = 0$.
- ϕ est l'angle formé par l'axe Oz et le segment allant de l'origine à P.



Coordonnées sphériques

Conventions :

- On suppose que $\rho \geq 0$.
- θ est mesuré à partir de l'axe des x positifs et $\theta \in [0, 2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi, \pi]$.
- ϕ est mesuré à partir de l'axe des z positifs et $\phi \in [0, \pi]$.

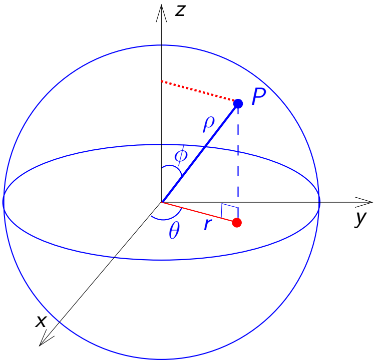
Attention autres conventions possibles :

- Pour les physiciens, notre θ s'appelle pluôt ϕ et vice versa...
- ϕ peut être mesuré à partir de l'équateur (dans le plan $z = 0$) et $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Coordonnées sphériques

Formules de passage :

$$\sin\phi = \frac{r}{\rho} \Rightarrow r = \rho \sin\phi$$



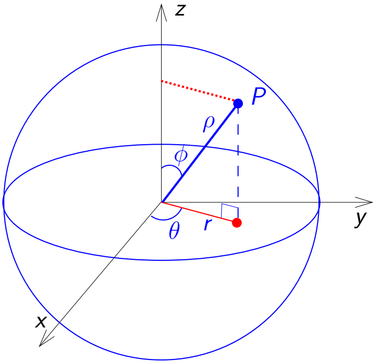
Coordonnées sphériques

Formules de passage :

$$\sin\phi = \frac{r}{\rho} \Rightarrow r = \rho \sin\phi$$

$$x = r\cos\theta = \rho \sin\phi \cos\theta$$

$$y = r\sin\theta = \rho \sin\phi \sin\theta$$



Coordonnées sphériques

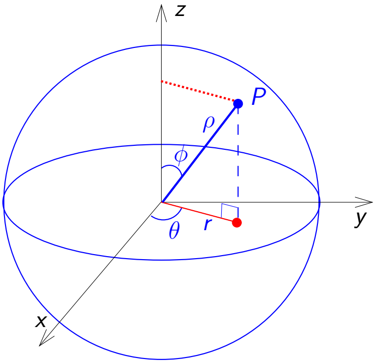
Formules de passage :

$$\sin\phi = \frac{r}{\rho} \Rightarrow r = \rho\sin\phi$$

$$x = r\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta$$

$$\color{red}{\cos\phi = \frac{z}{\rho}} \Rightarrow z = \rho\cos\phi$$



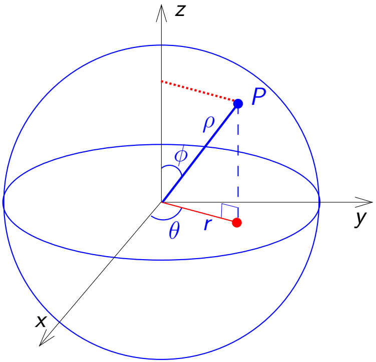
Coordonnées sphériques

Formules de passage :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



Coordonnées sphériques

Formules de passage :

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta \qquad\qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta \qquad\qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$z = \rho \cos\phi \qquad\qquad \cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Résumé

- Définition des coordonnées sphériques.
- Conventions habituelles.
- Formules de passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes et vice versa.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 2: Les coordonnées cylindriques et sphériques

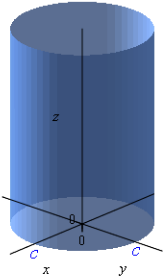
Exemple 1: surfaces en coordonnées cylindriques

Exemple 1 : surfaces en coordonnées cylindriques

1. Identifier la surface S dont l'équation cylindrique est $r = c$, où c est une constante positive.

Géométriquement :

- S est l'ensemble des points de l'espace dont la distance à l'axe des z est constante et égale à c.
- S est donc un cylindre de rayon dont la base est le cercle $x^2 + y^2 = c^2$.

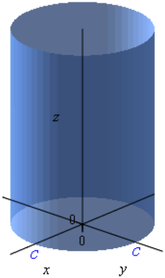


Exemple 1 : surfaces en coordonnées cylindriques

1. Identifier la surface S dont l'équation cylindrique est $r = c$, où c est une constante positive.

Algébriquement :

$$r = c$$

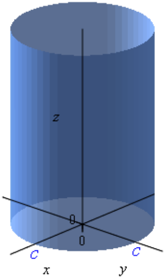


Exemple 1 : surfaces en coordonnées cylindriques

1. Identifier la surface S dont l'équation cylindrique est $r = c$, où c est une constante positive.

Algébriquement :

$$r = c$$
$$\Leftrightarrow \quad r^2 = c^2$$

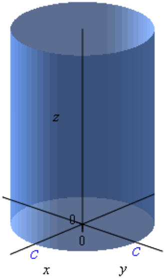


Exemple 1 : surfaces en coordonnées cylindriques

1. Identifier la surface S dont l'équation cylindrique est $r = c$, où c est une constante positive.

Algébriquement :

$$\begin{aligned} & r = c \\ \Leftrightarrow \quad & r^2 = c^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 = c^2 \end{aligned}$$

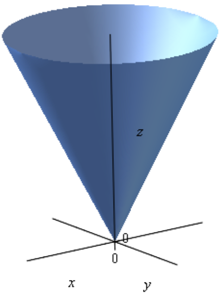


Exemple 1 : surfaces en coordonnées cylindriques

2. Identifier la surface S dont l'équation cylindrique est $r = cz$, où c est une constante positive.

Géométriquement :

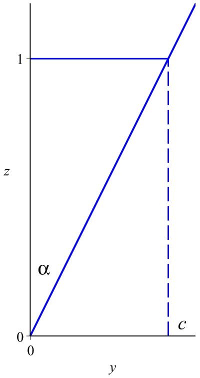
- S est un ensemble de points de l'espace dont la distance à l'axe des z est proportionnelle à la distance au plan des (x, y).
- S est donc un cône circulaire centré sur l'axe des z.



2. Identifier la surface S dont l'équation cylindrique est $r = cz$, où c est une constante positive.

Géométriquement :

- S est un ensemble de points de l'espace dont la distance à l'axe des z est proportionnelle à la distance au plan des (x, y).
- S est donc un cône circulaire centré sur l'axe des z.
- Si $z = 1$ alors $r = c$ donc les côtés de ce cône forment un angle de $\alpha = \arctan(c)$ avec l'axe des z positifs.

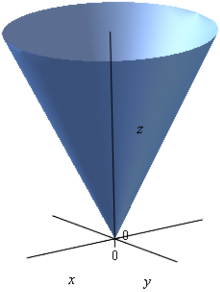


Exemple 1 : surfaces en coordonnées cylindriques

2. Identifier la surface S dont l'équation cylindrique est $r = cz$, où c est une constante positive.

Algébriquement :

$$r = cz$$

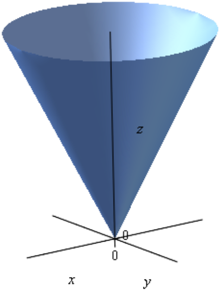


Exemple 1 : surfaces en coordonnées cylindriques

2. Identifier la surface S dont l'équation cylindrique est $r = cz$, où c est une constante positive.

Algébriquement :

$$r = cz$$
$$\Leftrightarrow \quad r^2 = c^2 z^2$$

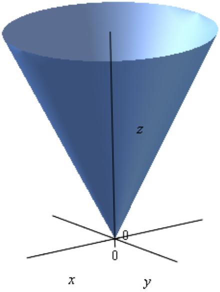


Exemple 1 : surfaces en coordonnées cylindriques

2. Identifier la surface S dont l'équation cylindrique est $r = cz$, où c est une constante positive.

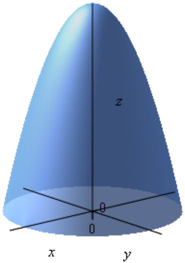
Algébriquement :

$$\begin{aligned} & r = cz \\ \Leftrightarrow\quad & r^2 = c^2 z^2 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 + y^2 = c^2 z^2 \end{aligned}$$



Exemple 1 : surfaces en coordonnées cylindriques

3. Donner l'équation cylindrique du paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$.

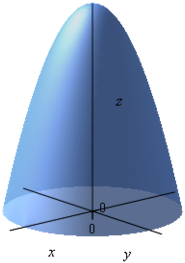


Exemple 1 : surfaces en coordonnées cylindriques

3. Donner l'équation cylindrique du paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$.

Algébriquement :

Puisque $r^2 = x^2 + y^2$, on a



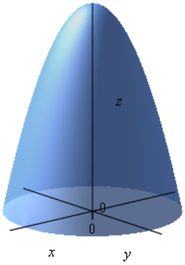
Exemple 1 : surfaces en coordonnées cylindriques

3. Donner l'équation cylindrique du paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$.

Algébriquement :

Puisque $r^2 = x^2 + y^2$, on a

$$z = 1 - x^2 - y^2$$



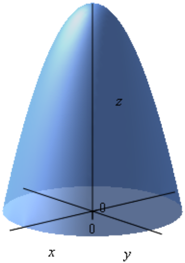
Exemple 1 : surfaces en coordonnées cylindriques

3. Donner l'équation cylindrique du paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$.

Algébriquement :

Puisque $r^2 = x^2 + y^2$, on a

$$\begin{aligned} & z = 1 - x^2 - y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & z = 1 - r^2 \end{aligned}$$



Résumé

- Identifier une surface cylindrique en trouvant son équation cartésienne.
- Trouver l'équation cylindrique d'une surface dont l'équation cartésienne est donnée.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 2: Les coordonnées cylindriques et sphériques

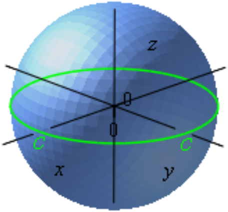
Exemple 2: surfaces en coordonnées sphériques

Exemple 2 : surfaces en coordonnées sphériques

1. Identifier la surface S dont l'équation sphérique est $\rho = c$, où c est une constante positive.

Géométriquement :

- S est l'ensemble des points de l'espace dont la distance à l'origine est constante et égale à c.
- S est donc une sphère de rayon c centrée à l'origine.

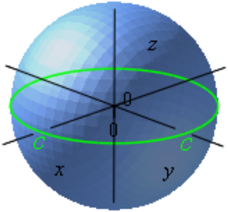


Exemple 2 : surfaces en coordonnées sphériques

1. Identifier la surface S dont l'équation sphérique est $\rho = c$, où c est une constante positive.

Algébriquement :

$$\rho = c$$

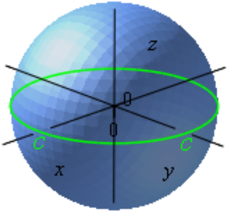


Exemple 2 : surfaces en coordonnées sphériques

1. Identifier la surface S dont l'équation sphérique est $\rho = c$, où c est une constante positive.

Algébriquement :

$$\begin{aligned} & \rho = c \\ \Leftrightarrow \quad & \rho^2 = c^2 \end{aligned}$$

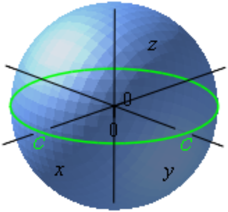


Exemple 2 : surfaces en coordonnées sphériques

1. Identifier la surface S dont l'équation sphérique est $\rho = c$, où c est une constante positive.

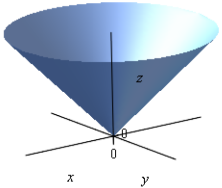
Algébriquement :

$$\begin{aligned} & \rho = c \\ \Leftrightarrow \quad & \rho^2 = c^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \end{aligned}$$



Exemple 2 : surfaces en coordonnées sphériques

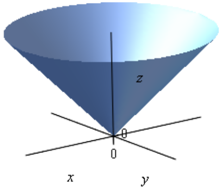
2. Trouver l'équation sphérique du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



$$
\begin{aligned}
& z = \sqrt{x^2 + y^2} \\
\Leftrightarrow\quad & z^2 = x^2 + y^2 \;\; (\text{et } z \geq 0) \\
\Leftrightarrow\quad & \rho^2 \cos^2\phi = \rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta \\
\Leftrightarrow\quad & \rho^2 \cos^2\phi = \rho^2 \sin^2\phi \\
\Leftrightarrow\quad & \rho = 0 \text{ ou } \; \cos^2\phi = \sin^2\phi \\
\Leftrightarrow\quad & \rho = 0 \text{ ou } \; \cos\phi = \pm \sin\phi \\
\Leftrightarrow\quad & \rho = 0 \text{ ou } \; \tan\phi = \pm 1.
\end{aligned}
$$

Exemple 2 : surfaces en coordonnées sphériques

2. Trouver l'équation sphérique du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



$$\rho = 0 \text{ ou } \tan\phi = \pm 1$$

$$\text{Or } z \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \phi \leq \pi/2$$

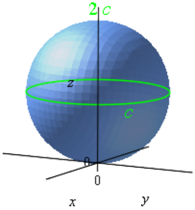
$$\text{donc } \tan\phi = +1 \text{ et } \phi = \pi/4$$

Équation sphérique : $\phi = \pi/4$

$\rho = 0$ correspond à l'origine, qui est déjà incluse dans cette équation.

Exemple 2 : surfaces en coordonnées sphériques

3. Trouver l'équation sphérique de la sphère de rayon c centrée en $(0, 0, c)$.



Équation cartésienne : $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = c^2$

$$\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + (\rho \cos \phi - c)^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi - 2c\rho \cos \phi + c^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 = 2c\rho \cos \phi$$

$$\Leftrightarrow \rho = 0 \text{ ou } \rho = 2c \cos \phi.$$

Équation sphérique : $\rho = 2c \cos \phi$ avec $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

$\rho = 0$ correspond à l'origine, déjà incluse.

Résumé

- Identifier une surface sphérique en trouvant son équation cartésienne.
- Trouver l'équation sphérique d'une surface dont l'équation cartésienne est donnée.

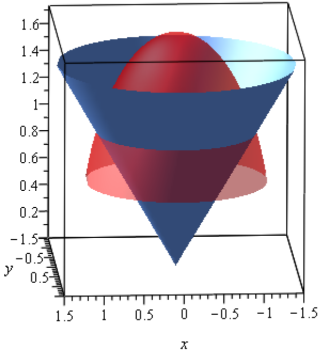
MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 3: Les intégrales triples en coordonnées cylindriques

Exemple 1: calcul de la masse d'un solide

Exemple 1 : calcul de la masse d'un solide

Calculer la masse du solide occupant la région E bornée par la nappe supérieure du cône $z^2 = x^2 + y^2$ et le paraboloïde $z = 3 - 2x^2 - 2y^2$, si sa densité est proportionnelle à la distance à l'axe des z.



Intersection :

$$\begin{cases} z = 3 - 2x^2 - 2y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

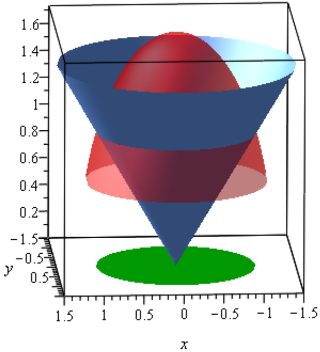
$$\Rightarrow \quad z = 3 - 2z^2$$

$$\Rightarrow \quad 2z^2 + z - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad z = 1 \text{ ou } z = -3/2$$

Exemple 1 : calcul de la masse d'un solide

Calculer la masse du solide occupant la région E bornée par la nappe supérieure du cône $z^2 = x^2 + y^2$ et le paraboloïde $z = 3 - 2x^2 - 2y^2$, si sa densité est proportionnelle à la distance à l'axe des z.



Intersection :

$$\begin{cases} z = 3 - 2x^2 - 2y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad z = 3 - 2z^2$$

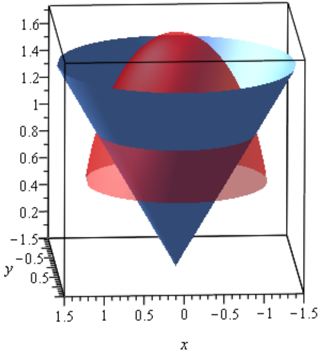
$$\Rightarrow \quad 2z^2 + z - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad z = 1 \text{ ou } z = -3/2$$

$$D : x^2 + y^2 \leq 1$$

Exemple 1 : calcul de la masse d'un solide

Calculer la masse du solide occupant la région E bornée par la nappe supérieure du cône $z^2 = x^2 + y^2$ et le paraboloïde $z = 3 - 2x^2 - 2y^2$, si sa densité est proportionnelle à la distance à l'axe des z.



Surfaces :

Cône : $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

Paraboloïde :
$z = 3 - 2x^2 - 2y^2 = 3 - 2r^2$

Exemple 1 : calcul de la masse d'un solide

Calculer la masse du solide occupant la région E bornée par la nappe supérieure du cône $z^2 = x^2 + y^2$ et le paraboloïde $z = 3 - 2x^2 - 2y^2$, si sa densité est proportionnelle à la distance à l'axe des z.

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x,y,z) \,|\, (x,y) \in D, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 3 - 2x^2 - 2y^2\right\} \\ &= \left\{(r,\theta,z) \,|\, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 3 - 2r^2\right\}. \end{aligned}$$

Densité :

$$\sigma(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2} \quad (k > 0)$$

$$\sigma(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = kr$$

Exemple 1 : calcul de la masse d'un solide

Calculer la masse du solide occupant la région E bornée par la nappe supérieure du cône $z^2 = x^2 + y^2$ et le paraboloïde $z = 3 - 2x^2 - 2y^2$, si sa densité est proportionnelle à la distance à l'axe des z.

$$
\begin{aligned}
m(E) &= \iiint_E \sigma(x,y,z)\,dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{3-2r^2} \sigma(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{3-2r^2} kr^2\,dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 kr^2(3-2r^2-r)\,drd\theta = \frac{7}{10}k\pi.
\end{aligned}
$$

Résumé

- Décrire une région de l'espace en coordonnées cylindriques.
- Trouver une formule pour la densité à partir d'une description en mots.
- Calculer la masse d'un solide à l'aide d'une intégrale en coordonnées cyindriques.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 3: Les intégrales triples en coordonnées cylindriques

Définition et formule de calcul

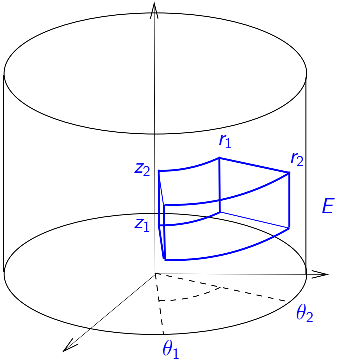
Définition et formule de calcul

- Intégrale triple en coordonnée cylindriques.
- Jacobien en coordonnées cylindriques.

Définition et formule de calcul

On considère une région

$$E = \{(r, \theta, z) \mid r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, z_1 \leq z \leq z_2\}$$



- On subdivise E en sous-régions de même forme.
- On choisit le point milieu de chaque sous-région comme point d'évaluation.
- Le volume d'un « coin cylindrique » est l'aire de sa base fois sa hauteur.
- Avec ces données on forme une triple somme de Riemann puis on prend la limite.

Définition et formule de calcul

Théorème

Soit E une région de l'espace décrite en coordonnées cylindriques par

$$E = \{(r, \theta, z) \mid r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, z_1 \leq z \leq z_2\}$$

et f une fonction intégrable sur E. Alors

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dzdrd\theta$$

Définition et formule de calcul

Théorème

Soit E une région de l'espace décrite en coordonnées cylindriques par

$$E = \{(r, \theta, z) \,|\, r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, z_1 \leq z \leq z_2\}$$

et f une fonction intégrable sur E. Alors

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, {\color{red} r}\, dzdrd\theta$$

Le jacobien provient du calcul du volume d'un petit « coin cylindrique ».

Définition et formule de calcul

Théorème

Soit E une région de l'espace décrite en coordonnées cylindriques par

$$E = \{(r, \theta, z) \,|\, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, v_1(\theta) \leq r \leq v_2(\theta), u_1(r, \theta) \leq z \leq u_2(r, \theta)\}$$

et f une fonction intégrable sur E. Alors

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{v_1(\theta)}^{v_2(\theta)} \int_{u_1(r,\theta)}^{u_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Résumé

- Intégrale triple en coordonnées cylindriques sur un « coin cylindrique ».
- Jacobien en coordonnées cylindriques.
- Intégrale triple en coordonnées cylindriques sur un domaine général.