POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

# Questionnaire Contrôle périodique

46

**MTH1102D**

Sigle du cours

| Identification de l'étudiant(e) | | |
|---|---|---|
| Nom [redacted] | Prénom : [redacted] | |
| Signature [redacted] | Matricule : [redacted] | Groupe : |

| Réservé | | |
|---|---|---|
| Q1 | 3 | /9 |
| Q2 | 3.5 | /9 |
| Q3 | 6 | /8 |
| Q4 | 4 | /9 |
| Total | 16.5 | /35 |

| Sigle et titre du cours | | | |
|---|---|---|---|
| MTH1102D Calcul II | | | |
| **Professeur** | | **Groupe** | **Trimestre** |
| Jean Guérin | | | E23 |
| **Jour** | **Date** | **Durée** | **Heures** |
| Mercredi | 21 juin 2023 | 1h50 | 13h – 14h50 |

| Documentation | Calculatrice | Outils électroniques |
|---|---|---|
| x Aucune<br>☐ Toute<br>☐ Voir directives particulières | ☐ Aucune<br>x Toutes | Les appareils électroniques personnels sont interdits. |

## Directives particulières

- Le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons, veuillez le justifier puis passer à la question suivante.
- Un aide-mémoire de 2 pages est fourni avec ce cahier.
- IMPORTANT : inscrire votre matricule sur toutes les pages numérotées. Ne rien inscrire sur le verso des pages numérotées.
- L'utilisation de cahiers supplémentaires n'est pas permise. Si nécessaire, utiliser les deux pages supplémentaires à la fin de ce cahier

Cet examen contient 4 questions sur un total de 16 pages
**(incluant cette page, excluant les deux pages d'aide-mémoire).**

**L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.**

*Matricule :* 1 9 5 5 9 1 3

## Question 1 [9 points]

3

Évaluez les intégrales suivantes.

a) $J_1 = \int_0^{\pi} \int_{2x}^{2\pi} y^4 \sin(xy^2)\, dy dx.$

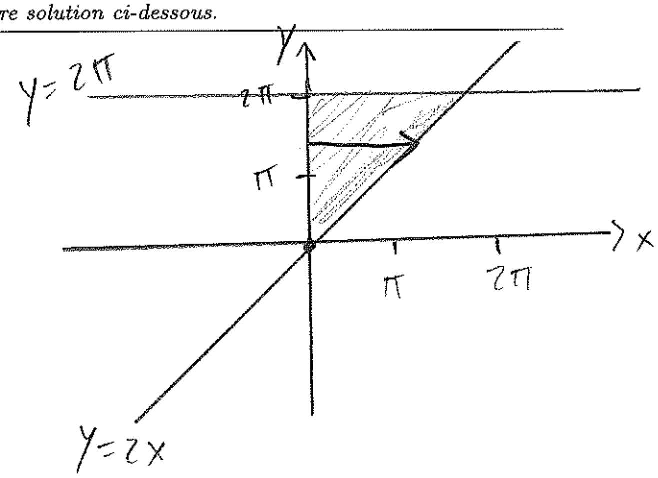
b) $J_2 = \iint_D \left[ xy^2 + \frac{xy}{10 + xy^2 + y^4} \right] dA,$

où $D$ est le domaine borné par les droites $y = -x$, $y = x$ et la parabole $x = 2 - y^2$.

*ATTENTION : rien au-dessus de cette ligne ne sera corrigé. Écrivez votre solution ci-dessous.*

**Solution et réponse :**

a) $0 \leq x \leq \pi \qquad 2x \leq y \leq 2\pi$




Changer d'ordre d'intégration

$2x = y$

$x = \frac{y}{2}$

$\boxed{0 \leq x \leq \frac{y}{2}}$ ✓

$\boxed{0 \leq y \leq 2\pi}$

$\int_0^{2\pi} \int_0^{y/2} y^4 \sin(xy^2)\, dx\, dy \Rightarrow$

① étape $\int_0^{y/2} y^4 \sin(xy^2)\, dx$ /

$u = xy^2$

$du = y^2 dx$

$\frac{du}{y^2} = dx$

$= \int \frac{y^4}{y^2} \sin(u) du$

$= -y^2 [\cos(u)]_0^{y/2}$

$= -y^2 \left[\cos\left(\frac{y}{2}\right) - 1\right]$ /

3/4

② étape $-\int_0^{2\pi} \underbrace{y^2 \cos\left(\frac{y}{2}\right)} + y^2\, dy$

$f(x,-y) = -y^2 \cos\left(\frac{-y}{2}\right)$

$= y^2 \cos\left(\frac{-y}{2}\right)$

$= -y^2 \cos\left(\frac{y}{2}\right)$

$= -f(x,y)$

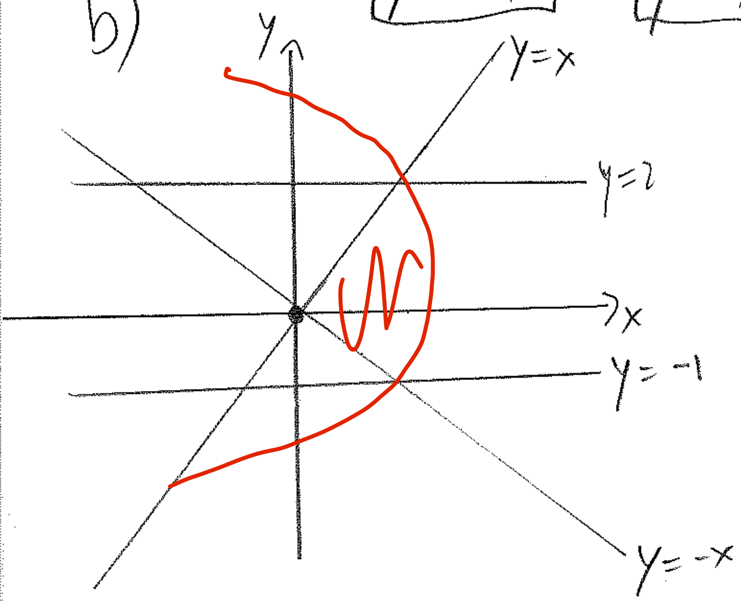
fonction impaire $= 0$

$= \int_0^{2\pi} y^2 dy = \frac{1}{3}[y^3]_0^{2\pi}$

$= \frac{1}{3}[(2\pi)^3 - 0] = \boxed{\frac{8\pi^3}{3}}$ ✗

*Matricule :* 1 9 5 5 9 1 3

b) $\boxed{y=-x}$ $\boxed{y=x}$




$x = 2-y^2$

$y^2 = 2-x$

$y = \sqrt{2-x}$

$y = 2-y^2$

$y^2+y = 2$

$y^2+y-2=0$

$\frac{b^2 \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\frac{1 \pm \sqrt{1-(4\cdot 1\cdot -2)}}{2}$

$= \frac{1\pm 3}{2}$

$y_1 = 2$

$y_2 = -1$

$-1 \leq y \leq 2$

$\iint xy^2 + \frac{xy}{10+xy^2+y^4}$

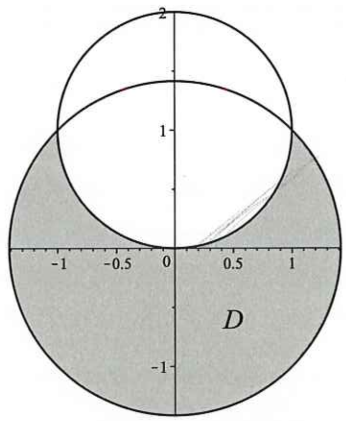
0/5

*Matricule :* 1 9 5 5 9 1 3

*Matricule :* 1 9 5 5 9 1 3

## Question 2 [9 points]

Soit $D$ la région du plan située à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 2$ et à l'extérieur du cercle $x^2 + (y-1)^2 = 1$. La région $D$ est représentée ci-dessous.




3.5

a) Calculez l'aire de $D$.

b) Évaluez l'intégrale suivante

$$J_3 = \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA.$$

$(y-1)(y-1)$
$y^2 - 2y + 1$

*ATTENTION : rien au-dessus de cette ligne ne sera corrigé. Écrivez votre solution ci-dessous.*

a) **Solution et réponse :**

$r \geq 0$

$x^2+y^2=2$

$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 2$

$r^2 = 2$

$r = \sqrt{2}$

$x^2 + (y-1)^2 = 1$

$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2r\sin\theta + 1 = 1$

$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2r\sin\theta = 0$

$r^2 - 2r\sin\theta = 0$

$r^2 = 2r\sin\theta$

$r = 2\sin\theta$ ✓

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\theta : 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ✗

$2\sin\theta \leq r \leq \sqrt{2}$ ✓

$\text{Aire} = \int\int_D \sigma(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$ ✓

1.5/5

b) $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA = \cancel{\int_0^{2\pi}}\int_{2\sin\theta}^{\sqrt{2}} \frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2}}\, r\, dr\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\int_{2\sin\theta}^{\sqrt{2}} \frac{\cancel{r}\sin\theta}{\cancel{r}} \cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{2\sin\theta}^{\sqrt{2}} r\sin\theta\, dr\, d\theta$

2/4

① Étape 1

$= \int_{2\sin\theta}^{\sqrt{2}} r\sin\theta\, dr = \frac{1}{2}\left[r^2\right]_{2\sin\theta}^{\sqrt{2}} \sin\theta = \frac{\sin\theta}{2}\left[2 - 4\sin^2\theta\right]$

$= \sin\theta - 4\sin^3\theta$

$= \sin\theta - 4\sin\theta\sin^2\theta$

$= \sin\theta - 4\sin\theta \cdot \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$

$= \sin\theta + \frac{4\sin\theta\cos(2\theta)}{2}$

$= \sin\theta + 2\sin\theta\cos(2\theta)$

② Étape 2

$\int_0^{2\pi} \sin\theta + 2\sin\theta\cos(2\theta)\, d\theta$

$= ?$

Matricule : 1 9 5 5 9 1 3

Matricule : 1 9 5 5 9 1 3

## Question 3 [8 points]

6

Calculez le volume de la région $E$ de l'espace bornée par le cylindre parabolique $z = 5 - y^2$ et les plans $z = 0$, $z = x + 2$ et $z = 3x$.

*ATTENTION : rien au-dessus de cette ligne ne sera corrigé. Écrivez votre solution ci-dessous.*

**Solution et réponse :** $z = 5 - y^2$ $\quad z = 0$ $\quad z = x+2$ $\quad z = 3x$

$0 = 5 - y^2$

$-5 = -y^2$

$5 = y^2$

$\boxed{y = \pm\sqrt{5}}$

$\boxed{x = z - 2}$ $\quad \boxed{x = \frac{z}{3}}$

$\boxed{\frac{z}{3} \le x \le z - 2}$

$\boxed{0 \le z \le 5 - y^2}$

$E = \left\{(x,y,z) \mid \frac{z}{3} \le x \le z-2,\ -\sqrt{5} \le y \le \sqrt{5},\ 0 \le z \le 5-y^2\right\}$

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \int_{0}^{5-y^2} \int_{\frac{z}{3}}^{z-2} 1 \, dx \, dz \, dy =$$

étape ① $\displaystyle\int_{\frac{z}{3}}^{z-2} dx = [x]_{\frac{z}{3}}^{z-2} = \left(z - 2 - \frac{z}{3}\right) = \left(\frac{2z}{3} - 2\right)$

étape ② $\displaystyle\int_{0}^{5-y^2} \frac{2}{3}z - 2 \, dz = \frac{2}{3}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{5-y^2} - 2[z]_0^{5-y^2}$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\left[(5-y^2)^2 - 0\right] - 2\left[5 - y^2\right] = \frac{1}{3}\left[(5-y^2)^2\right] - 2\left[5-y^2\right]$$

$\hookrightarrow (5-y^2)(5-y^2)$

$25 - 5y^2 - 5y^2 + y^4$

$25 - 10y^2 + y^4$

$$= \frac{25 - 10y^2 + y^4}{3} - 10 + y^2$$

étape ③

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{25}{3} dy - \frac{10}{3}\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} y^2 dy + \frac{1}{3}\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} y^4 dy - 10\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} dy + \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} y^2$$

$$\frac{25}{3}[y]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \quad -\frac{10}{9}[y^3]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} + \frac{1}{15}[y^5]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} - 10[y]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} + \frac{1}{3}[y^3]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}$$

$$\frac{25}{3}[2\sqrt{5}] - \frac{10}{9}\left[5^{\frac{3}{2}} - -5^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{1}{15}\left[5^{\frac{5}{2}} - -5^{\frac{5}{2}}\right] - 10[2\sqrt{5}] + \frac{1}{3}\left[2 \cdot 5^{\frac{3}{2}}\right]$$

*Matricule :* 1 9 5 5 9 1 3

$$\frac{25}{3}\left[2\sqrt{5}\right]-\frac{10}{9}\left[2\cdot 5^{\frac{3}{2}}\right]+\frac{1}{15}\left[2\cdot 5^{\frac{5}{2}}\right]-10\left[2\sqrt{5}\right]+\frac{1}{3}\left[2\cdot 5^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\frac{50}{3}\sqrt{5}-\frac{20\cdot 5^{\frac{3}{2}}}{9}+\frac{2}{15}\cdot 5^{\frac{5}{2}}-20\sqrt{5}+\frac{2}{3}\cdot 5^{\frac{3}{2}}$$

Simplifiez

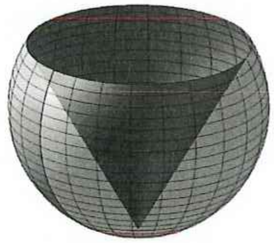
*Matricule :* 1 9 5 5 9 1 3

*Matricule :* 1 9 5 5 9 1 3

4

## Question 4 [9 points]

On considère un solide sphérique possédant une cavité conique, comme illustré ci-dessous. Ce solide occupe la région $B$ située à l'intérieur de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ et sous le cône d'équation $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$. La densité du solide est proportionnelle au carré de la distance à l'origine.
La région $B$ est représentée ci-dessous.

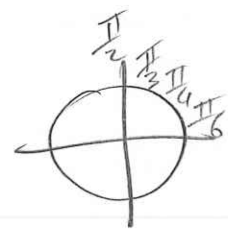


Soit $m$ la masse du solide $B$.

a) Exprimez $m$ comme une intégrale en coordonnées cylindriques.
*On ne demande PAS ici d'évaluer cette intégrale.*

b) Exprimez $m$ comme une intégrale en coordonnées sphériques.
*On ne demande PAS ici d'évaluer cette intégrale.*

c) Calculez maintenant la masse $m$ dans le système de coordonnées de votre choix.




*ATTENTION : rien au-dessus de cette ligne ne sera corrigé. Écrivez votre solution ci-dessous.*

**Solution et réponse :**

$x^2+y^2+(z-2)^2=4$ $\qquad z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ $\qquad$ densité $\propto \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \propto x^2+y^2$

a) Coordonnées cylindriques $\to (r, \theta, z)$

$r \geq 0$ $\qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ou $-\pi \leq \theta \leq \pi$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = z$

$$m = \iint_E \sigma(x,y)\, r\, dr\, d\theta$$

densité
$x^2+y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$

- $x^2+y^2+(z-2)^2=4$
  $r=\sqrt{4}=2$
  $r=0$

$0 \leq r \leq 2$

- $z=\sqrt{3(x^2+y^2)} = \sqrt{3r^2} = \sqrt{3}\,r$

- $\theta$ : $0 \leq \theta \leq 2\pi$

- $x^2+y^2+(z-2)^2=4$
  $r^2+(z-2)^2=4$
  $(z-2)^2=4-r^2 \Rightarrow z-2=\sqrt{4-r^2}$ $\quad z=\sqrt{4-r^2}+2$

$\{(r,\theta,z) \mid 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \sqrt{3}\,r \leq z \leq \sqrt{4-r^2}+2\}$

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}+2} \sigma(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \cdot r \, dz \, dr \, d\theta$$

jacobien

densité ?

2/3.5

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}+2} \cancel{k}\, r \, dz \, dr \, d\theta$$

b) Coordonnées sphériques $\rightarrow (\rho, \theta, \phi)$ $\rightarrow 0 \le \theta \le 2\pi$, $\rightarrow 0 \le \phi \le \pi$, $\rightarrow \rho \ge 0$

- $\theta \rightarrow$ le m̂ que le a) $0 \le \theta \le 2\pi$
- $\phi \rightarrow \frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{\pi}{2}$
- $x^2+y^2+(z-2)^2 = 4$ • $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$

$$\boxed{\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\ z &= \rho\cos\phi \end{aligned}}$$

$$\rho = 2 \cdot C \cdot \cos\phi$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot \cos\phi$$
$$= 4\cos\phi$$

On sait que $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\rho = 2$$

$$\{(\rho,\theta,\phi) \mid 2 \le \rho \le 4\cos\phi,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{\pi}{2}\}$$

$$m = \int_0^{2\pi} \int_{0}^{4\cos\phi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cancel{k} \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta$$

0 ✗ $\frac{\pi}{6}$

2/3.5

c) Calcul masse

$$m = k \int_0^{2\pi} \int_2^{4\cos\phi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta$$

densité ?

étape ①

$$= k\rho^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \, d\phi$$

$$= k\rho^2 \left[-\cos\phi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= k\rho^2 \left[-\overset{0}{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)} - -\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= k\rho^2 \left[0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= k\rho^2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

*Matricule :* 1 9 5 5 9 1 3

étape ②

$$\int_2^{4\cos\phi} \frac{k\rho^2\sqrt{2}}{2}\, d\rho = \frac{k\sqrt{2}}{2}\int_2^{4\cos\phi} \rho^2 = \frac{k\sqrt{2}}{6}\left[\rho^3\right]_2^{4\cos\phi}$$

$$= \frac{k\sqrt{2}}{6}\left[64\cos^3\phi - 8\right] = \frac{k\sqrt{2}\cdot 64\cos^3\phi}{6} - \frac{k\sqrt{2}\,8}{6}$$

$$= \frac{k\sqrt{2}\,64\cos^3\phi - k\sqrt{2}\,8}{6}$$

étape ③

$$\int_0^{2\pi} \frac{k\sqrt{2}\,64\cos^3\phi - k\sqrt{2}\,8}{6}\, d\theta = \frac{k\sqrt{2}\,64\cos^3\phi}{6}\int_0^{2\pi} d\theta - \frac{k\sqrt{2}\,8}{6}\int_0 d\theta$$

---

Je recommence intégrale

$$m = k\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{4\cos\phi} \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \;\Big\}$$

① $k\sin\phi\displaystyle\int_2^{4\cos\phi} \rho^2\, d\rho$

$$= \frac{k\sin\phi}{3}\left[\rho^3\right]_2^{4\cos\phi}$$

$$= \frac{k\sin\phi}{3}\left[64\cos^3\phi - 8\right]$$

$$\cos\phi\cdot\cos^2\phi$$

$$= \cos\phi\cdot\frac{1+\cos(2\phi)}{2}$$

$$= \frac{k\sin\phi}{3}\cdot 64\cos^3\phi - \frac{8k\sin\phi}{3}$$

0/2

$$= 0 - \frac{8k\sin\phi}{3}$$

② $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{8k\sin\phi}{3}\, d\phi = \frac{-8k}{3}\left[\cos\phi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

?

## PAGE SUPPLÉMENTAIRE

*Utilisez cette page en cas de besoin. Indiquez clairement le numéro de la question.*

*Matricule :* 1 9 5 5 9 1 3

## PAGE SUPPLÉMENTAIRE

*Utilisez cette page en cas de besoin. Indiquez clairement le numéro de la question.*