# MTH1102D Calcul II

Chapitre 8, section 1: Les fonctions vectorielles et les courbes paramétrées

## Exemples de base en deux dimensions

# Exemples de base en deux dimensions

1. Identifier la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, où $a > 0$.

# Exemples de base en deux dimensions

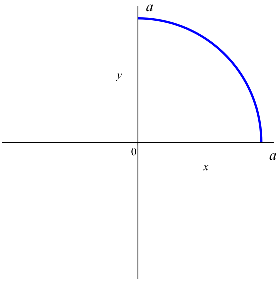
1. Identifier la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, où $a > 0$.

| | |
|---|---|
| $t$ | |
| $x(t)$ | |
| $y(t)$ | |
| $\vec{r}(t)$ | |

# Exemples de base en deux dimensions

1. Identifier la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, où $a > 0$.

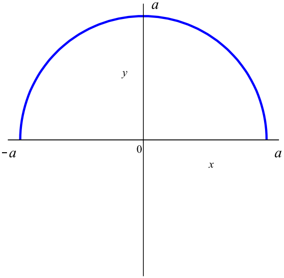
| $t$ | $0$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|
| $x(t)$ | $a$ | $\searrow$ | $0$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $a$ |
| $\vec{r}(t)$ | $a\vec{i}$ | | $a\vec{j}$ |



# Exemples de base en deux dimensions

1. Identifier la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, où $a > 0$.

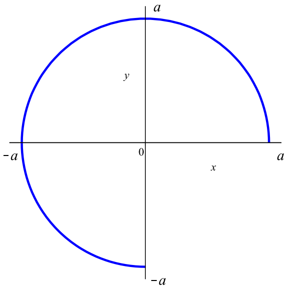
| $t$ | $0$ | | $\pi/2$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | $a$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-a$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $a$ | $\searrow$ | $0$ |
| $\vec{r}(t)$ | $a\vec{i}$ | | $a\vec{j}$ | | $-a\vec{i}$ |



# Exemples de base en deux dimensions

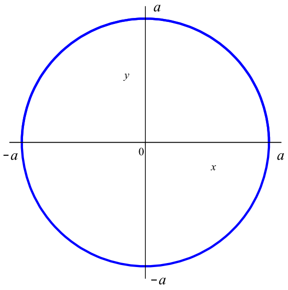
1. Identifier la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, où $a > 0$.

| $t$ | $0$ | | $\pi/2$ | | $\pi$ | | $3\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | $a$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-a$ | $\nearrow$ | $0$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $a$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-a$ |
| $\vec{r}(t)$ | $a\vec{i}$ | | $a\vec{j}$ | | $-a\vec{i}$ | | $-a\vec{j}$ |



1. Identifier la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, où $a > 0$.

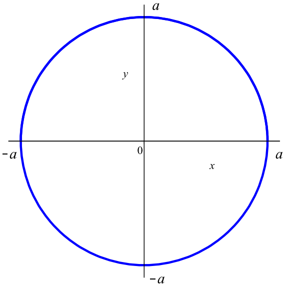
| $t$ | $0$ | | $\pi/2$ | | $\pi$ | | $3\pi/2$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | $a$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-a$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $a$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $a$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-a$ | $\nearrow$ | $0$ |
| $\vec{r}(t)$ | $a\vec{i}$ | | $a\vec{j}$ | | $-a\vec{i}$ | | $-a\vec{j}$ | | $a\vec{i}$ |



# Exemples de base en deux dimensions

1. Identifier la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, où $a > 0$.

Cercle de rayon $a$ centré à l'origine.



# Exemples de base en deux dimensions

1. Identifier la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, où $a > 0$.

Algébriquement :

$$x(t)^2 + y(t)^2$$

# Exemples de base en deux dimensions

1. Identifier la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, où $a > 0$.

Algébriquement :

$$x(t)^2 + y(t)^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t$$

# Exemples de base en deux dimensions

1. Identifier la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, où $a > 0$.

Algébriquement :

$$x(t)^2 + y(t)^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2$$

# Exemples de base en deux dimensions

1. Identifier la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, où $a > 0$.

Algébriquement :

$$x(t)^2 + y(t)^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2$$

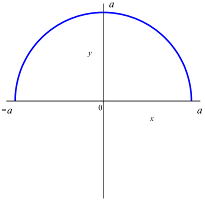
Les points de $C$ vérifient l'équation $x^2 + y^2 = a^2$.

# Exemples de base en deux dimensions

- $\vec{r}(t) = a\cos(2t)\vec{i} + a\sin(2t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$ est aussi une paramétrisation du cercle $x^2 + y^2 = a^2$ (parcouru deux fois plus vite).

# Exemples de base en deux dimensions

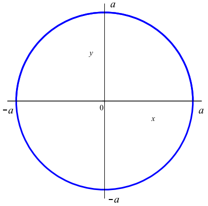
- $\vec{r}(t) = a\cos(2t)\vec{i} + a\sin(2t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$ est aussi une paramétrisation du cercle $x^2 + y^2 = a^2$ (parcouru deux fois plus vite).




$$0 \leq t \leq \pi/2$$

# Exemples de base en deux dimensions

- $\vec{r}(t) = a\cos(2t)\vec{i} + a\sin(2t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$ est aussi une paramétrisation du cercle $x^2 + y^2 = a^2$ (parcouru deux fois plus vite).

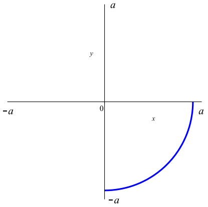



$$\pi/2 \leq t \leq \pi$$

# Exemples de base en deux dimensions

- $\vec{r}(t) = a\cos(2\pi - t)\vec{i} + a\sin(2\pi - t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, est une autre paramétrisation de ce cercle, parcouru dans le sens opposé (horaire).

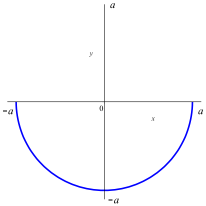
- $\vec{r}(t) = a\cos(2\pi - t)\vec{i} + a\sin(2\pi - t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, est une autre paramétrisation de ce cercle, parcouru dans le sens opposé (horaire).




$$0 \leq t \leq \pi/2$$

# Exemples de base en deux dimensions

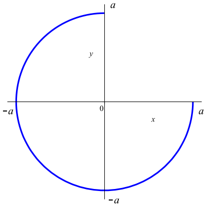
- $\vec{r}(t) = a\cos(2\pi - t)\vec{i} + a\sin(2\pi - t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, est une autre paramétrisation de ce cercle, parcouru dans le sens opposé (horaire).




$$\pi/2 \leq t \leq \pi$$

# Exemples de base en deux dimensions

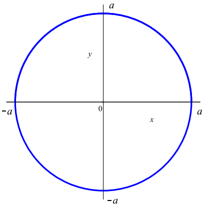
- $\vec{r}(t) = a\cos(2\pi - t)\vec{i} + a\sin(2\pi - t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, est une autre paramétrisation de ce cercle, parcouru dans le sens opposé (horaire).




$$\pi \leq t \leq 3\pi/2$$

# Exemples de base en deux dimensions

- $\vec{r}(t) = a\cos(2\pi - t)\vec{i} + a\sin(2\pi - t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, est une autre paramétrisation de ce cercle, parcouru dans le sens opposé (horaire).



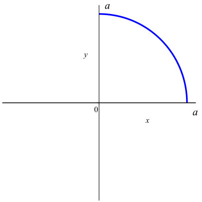

$3\pi/2 \leq t \leq 2\pi$

# Exemples de base en deux dimensions

- $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi/2$, est une paramétrisation du quart de cercle de rayon $a$ centré à l'origine.

# Exemples de base en deux dimensions

- $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi/2$, est une paramétrisation du quart de cercle de rayon $a$ centré à l'origine.




$$0 \leq t \leq \pi/2$$

# Exemples de base en deux dimensions

2. Donner une paramétrisation d'une courbe de la forme $y = f(x)$ avec $a \leq x \leq b$.

# Exemples de base en deux dimensions

2. Donner une paramétrisation d'une courbe de la forme $y = f(x)$ avec $a \leq x \leq b$.

On pose $x = t$ et $y = f(t)$ pour obtenir la paramétrisation

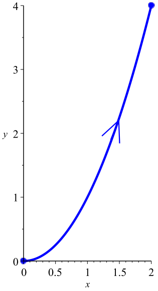
$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

# Exemples de base en deux dimensions

2. Donner une paramétrisation d'une courbe de la forme $y = f(x)$ avec $a \leq x \leq b$.

On pose $x = t$ et $y = f(t)$ pour obtenir la paramétrisation

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}, \quad a \leq t \leq b.$$



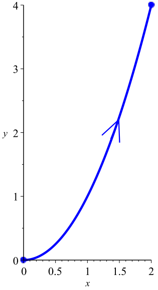

Par exemple, soit $C$ la partie de la parabole $y = x^2$ allant de $(0, 0)$ à $(2, 4)$.

# Exemples de base en deux dimensions

2. Donner une paramétrisation d'une courbe de la forme $y = f(x)$ avec $a \leq x \leq b$.

On pose $x = t$ et $y = f(t)$ pour obtenir la paramétrisation

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}, \quad a \leq t \leq b.$$




Par exemple, soit $C$ la partie de la parabole $y = x^2$ allant de $(0,0)$ à $(2,4)$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}, \; 0 \leq t \leq 2.$$

# Résumé

- Exemples de base de courbes paramétrées.

# Résumé

- Exemples de base de courbes paramétrées.
- La même courbe, comme ensemble de points dans le plan, peut être paramétrée de différentes façons.

# Résumé

- Exemples de base de courbes paramétrées.
- La même courbe, comme ensemble de points dans le plan, peut être paramétrée de différentes façons.
- Des paramétrisations différentes changent comment la courbe est parcourue.