MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 1: Les champs vectoriels

Champs conservatifs

Introduction

- Champs de gradients et champs conservatifs.

Champs conservatifs

Définition

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de plusieurs variables alors le *champ de gradients* associé à f est le champ vectoriel qui associe à chaque point $\mathbf{x}$ le vecteur $\nabla f(\mathbf{x})$.

Définition

Un champ vectoriel $\vec{F}$ est *conservatif* s'il est le champ de gradients d'une fonction f. Autrement dit, $\vec{F} = \nabla f$.

Définition

Si $\vec{F} = \nabla f$ est un champ conservatif alors f est un *potentiel* (ou *fonction potentielle*) pour $\vec{F}$.

Champs conservatifs

Par exemple, le champ gravitationnel

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{||\mathbf{x}||^3}\mathbf{x} = \frac{-mMG}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$$

est conservatif.
La fonction

$$f(x,y,z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

est un potentiel pour ce champ.

Résumé

- Définition de champ de gradients.
- Définition de champ conservatif.
- Potentiel d'un champ conservatif.