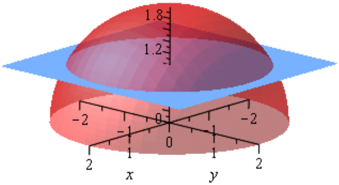
MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 4: Les intégrales triples en coordonnées sphériques

Exemple 2: choix du meilleur système de coordonnées

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.



Intersection :

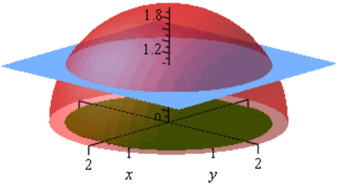
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

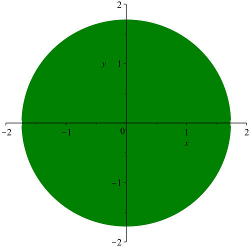
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 1 = 4$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 3$$

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.





$D : x^2 + y^2 \leq 3$

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En coordonnées cartésiennes :

$$E = \Big\{(x, y, z) \mid -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}, -\sqrt{3 - x^2} \le y \le \sqrt{3 - x^2}, \\ 1 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}\Big\}$$

et

$$J = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx.$$

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En coordonnées cylindriques :

- Sphère : $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow r^2 + z^2 = 4 \Rightarrow z = \sqrt{4 - r^2}$ $(z \geq 0)$
- Plan : $z = 1$

$$E = \left\{ (r, \theta, z) \,|\, 0 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

et

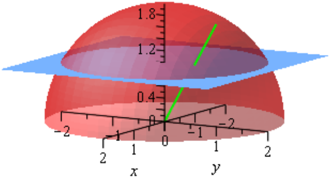
$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} (r^2) r \, dz dr d\theta.$$

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En coordonnées sphériques :

- Sphère : $\rho = 2$
- Plan : $z = 1 \Rightarrow \rho \cos\phi = 1 \Rightarrow \rho = 1/\cos\phi = \sec\phi$



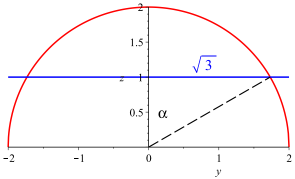
$\sec\phi \leq \rho \leq 2$

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En coordonnées sphériques :

- Sphère : $\rho = 2$
- Plan : $z = 1 \Rightarrow \rho \cos\phi = 1 \Rightarrow \rho = 1/\cos\phi = \sec\phi$
- Bornes sur ϕ : $\alpha = \arctan(\sqrt{3}/1) = \pi/3$



$$0 \leq \phi \leq \pi/3$$

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En coordonnées sphériques :

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \,|\, \sec\phi \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/3\}.$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta = \rho^2 \sin^2\phi$$

et

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec\phi}^{2} (\rho^2 \sin^2\phi)\rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta$$

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

$$(1) \quad J = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx.$$

$$(2) \quad J = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} r^3\, dz\, dr\, d\theta.$$

$$(3) \quad J = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec\phi}^{2} \rho^4 \sin^3\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

1. Cartésien : difficile
2. Cylindrique : après intégration p/r à z,

$$r^3\sqrt{4 - r^2} = r^2 \cdot r\sqrt{4 - r^2}$$

   et changement de variable $u = 4 - r^2$.

Exemple 2 : choix du meilleur système de coordonnées

Calculer $J = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, où E est la région située au-dessus du plan $z = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

3. Sphérique : après intégration p/r à ρ,

$$\sin^3\phi = (1 - \cos^2\phi)\sin\phi$$

puis changement de variable $u = \cos\phi$

$$\sec^5\phi\sin^3\phi = \left(\sec^5\phi - \frac{\cos^2\phi}{\cos^5\phi}\right)\sin\phi = \left(\frac{1}{\cos^5\phi} - \frac{1}{\cos^3\phi}\right)\sin\phi$$

puis changement de variable.

Finalement, $J = \frac{53}{30}\pi$.

Résumé

- Décrire une région de l'espace dans les trois systèmes de coordonnées.
- Choisir le système de coordonnées le plus approprié.