# MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 4: Les intégrales triples en coordonnées sphériques

## Définition et formule de calcul

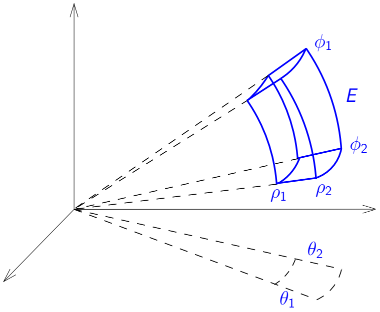
# Introduction

- Intégrale triple en coordonnées sphériques.
- Jacobien en coordonnées sphériques.

# Définition et formule de calcul

On considère une région

$$E = \{(\rho, \theta, \pi) \,|\, \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$$




- On subdivise $E$ en sous-régions de même forme.
- On choisit le point milieu de chaque sous-région comme point d'évaluation.
- Le volume d'un ≪ coin sphérique ≫ est donné par la formule $\Delta V = (\rho^*)^2 \sin\phi^* \Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$.
- Avec ces données on forme une triple somme de Riemann puis on prend la limite.

# Définition et formule de calcul

## Théorème

Soit $E$ une région de l'espace décrite en coordonnées sphériques par

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \,|\, \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$$

et $f$ une fonction intégrable sur $E$. Alors

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV =$$

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi$$

# Définition et formule de calcul

## Théorème

Soit $E$ une région de l'espace décrite en coordonnées sphériques par

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \,|\, \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$$

et $f$ une fonction intégrable sur $E$. Alors

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV =$$

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi$$

Le jacobien provient du calcul du volume d'un petit « coin sphérique ».

# Définition et formule de calcul

## Théorème

Soit $E$ une région de l'espace décrite en coordonnées sphériques par

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \,|\, u_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq u_2(\theta, \phi), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\},$$

et $f$ une fonction intégrable sur $E$. Alors

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV =$$

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{u_1(\theta,\phi)}^{u_2(\theta,\phi)} f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi$$

# Résumé

- Intégrale triple en coordonnées sphériques sur un ≪ coin sphérique ≫.
- Jacobien en coordonnées sphériques.
- Intégrale triple en coordonnées sphériques sur un domaine général.