Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH1102D - Calcul II
Été 2023

Devoir 9

Nom : ______________________ **Prénom :** ______________________

Matricule : ____________________ **Groupe :** 01

Question corrigée	Autres questions	Total
6	4	10 /10

Devoir 9

#1 Courbe paramétreé par :

$$\vec{r}(t) = (1-3t^2)\vec{i} + (t^3-3t)\vec{j}$$

a) Calculer aire de la région D délimitée par courbe C

- Valeurs de t

$t^3 - 3t = 0$

$t(t^2-3) = 0$

$t^2 - 3 = 0$

$t^2 = 3$

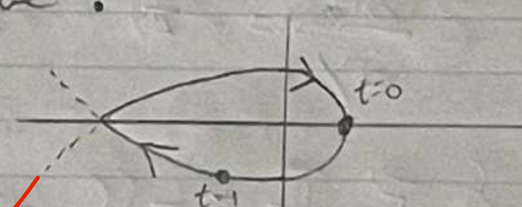
$t = \pm\sqrt{3}$ donc $-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$ (Devoir 7 t vaut la même chose)

- Orientation de la courbe :

$\vec{r}(-1) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{r}(0) = 1\vec{i} + 0\vec{j}$

$\vec{r}(1) = -2\vec{i} - 2\vec{j}$



Le sens est horaire (donc négativement)

- Calculer aire

$$\text{aire}(D) = \oint_C x\,dy = -\oint_C x\,dy = -\oint_C x(t)\,y'(t)\,dt$$

$$= -\oint_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1-3t^2)\cdot(3t^2-3)\,dt = \oint_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} (1-3t^2)\cdot(3t^2-3)\,dt$$

$$= \oint_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} (3t^2 - 3 - 9t^4 + 9t^2)\,dt = \oint_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} -9t^4 + 12t^2 - 3\,dt$$

$$\left[-\frac{9t^5}{5} + 4t^3 - 3t\right]_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} = \frac{162\sqrt{3}}{5} - 18\sqrt{3} = \boxed{\frac{72}{5}\sqrt{3}}$$

b) Calculer travail autour de C par le champ vectoriel :

$$\vec{F}(x,y) = [7y - \ln(1+x^4)]\vec{i} + [\ln(1+y^4) - 3x]\vec{j}$$

En utilisant le théorème de Green

orientation

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{dr}$$

- $P(x,y) = 7y - \ln(1+x^4)$
- $Q(x,y) = \ln(1+y^4) - 3x$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 7 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3$$

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{dr} = -\iint_D (-3-7)\,dA = \iint_D 10\,dA = 10\underbrace{\iint_D dA}_{\text{aire de } D \text{ en a)}}$$

$$= 10\cdot\left(\frac{72}{5}\sqrt{3}\right) = 144\sqrt{3}$$

$$W = \oint_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{dr} = 144\sqrt{3}$$

6

#2 Paraboloïde hyperbolique : $z = x^2 - y^2$

Cylindre : $x^2 + y^2 = 1$

Cylindre : $x^2 + y^2 = 25$

a) Paramétrisation de S

- $z = f(x,y) = x^2 - y^2$

$x = x \qquad y = y$

$\vec{R}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k}$

$= x\vec{i} + y\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k} \qquad (x,y) \in D$

avec $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}$ le domaine de paramétrisation

S est paramétrée par :

$\vec{R}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k}$

b) Montrer que S peut aussi être paramétré par :

$$\vec{R}(u,v) = u\cos(v)\,\vec{i} + u\sin(v)\,\vec{j} + u^2\cos(2v)\,\vec{k}$$

- Coordonnées cylindriques

$u = r \qquad v = \theta$

θ : $0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad 0 \leq v \leq 2\pi$

r : $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r = 1$

$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow r = 5$ (car $r \geq 0$)

$1 \leq r \leq 5$ donc $1 \leq u \leq 5$

z : $z(x,y) = x^2 - y^2$

$z(r,\theta) = (r^2\cos^2\theta) - (r^2\sin^2\theta) = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$z(u,v) = u^2(\cos^2 v - \sin^2 v)$

$z(u,v) = u^2\cos(2v)$ ($\cos^2 v - \sin^2 v = \cos(2v)$)

$x = u\cos(v)$

$y = u\sin(v)$

- Domaine des paramètres u et v :

Domaine $= \{(u,v) \mid 1 \leq u \leq 5,\ 0 \leq v \leq 2\pi\}$

donc, nous avons que :

$$\vec{R}(u,v) = u\cos(v)\,\vec{i} + u\sin(v)\,\vec{j} + u^2\cos(2v)\,\vec{k}$$

dont (u,v) appartiennent au domaine.

c) Calculer aire de S

Si S est une surface paramétrée par $\vec{R}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$ et que $\vec{R}_u \times \vec{R}_v \neq \vec{0}$ sur S alors

$$\text{aire}(S) = \iint_D \|\vec{R}_u(u,v) \times \vec{R}_v(u,v)\| \, dA$$

$$\vec{R}_x = \vec{i} + 2x\vec{k}$$
$$\vec{R}_y = \vec{j} - 2y\vec{k}$$

$$\vec{R}_x \times \vec{R}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = -2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

$$\|\vec{R}_x \times \vec{R}_y\| = \sqrt{(-2x)^2 + (2y)^2 + (1)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} = \sqrt{4r^2+1}$$ ✓

$$\text{aire}(S) = \iint_D \|\vec{R}_x \times \vec{R}_y\| \, dA = \iint_D \sqrt{4r^2+1} \; r \, dr \, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^5 \sqrt{4r^2+1} \; r \, dr \, d\theta$$ ✓

$u = 4r^2 + 1$ $\quad$ $r=1$ $\quad$ $u=5$

$du = 8r \, dr$ $\quad$ $r=5$ $\quad$ $u=101$

$\frac{du}{8r} = dr$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int \sqrt{u} \; \cancel{r} \, \frac{du}{\cancel{r}} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^5 d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2(101)^{\frac{3}{2}}}{3} \right] - \left[\frac{2(5)^{\frac{3}{2}}}{3} \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} 101^{\frac{3}{2}} \, d\theta - \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} 5\sqrt{5} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{12} \left[101^{3/2} \theta \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{12} \left[5\sqrt{5} \, \theta \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{6} \left(101^{3/2} \right) - \frac{\pi}{6} \left(5\sqrt{5} \right) = \boxed{\frac{\pi \left(101^{\frac{3}{2}} - 5^{3/2} \right)}{6}} = \text{aire(s)}$$

$\approx 525{,}618$