Département de mathématiques et de génie industriel
MTH1102D - Calcul II
Été 2023 - Devoir 7

Directives

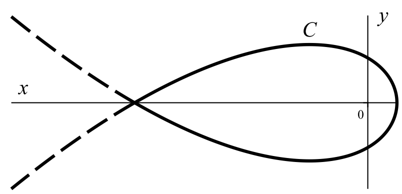
- Le devoir est à rendre dimanche le **9 juillet** avant 23h55 sur le site Moodle du cours.
- Les directives pour la remise et la présentation du devoir sont disponibles sur le site Moodle du cours.
- Vous devez donner les grandes étapes de calcul des intégrales.
- Dans tous les cas, la valeur exacte des intégrales est exigée, et non une approximation décimale.

Question 1

On considère la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = (1 - 3t^2)\,\vec{i} + (t^3 - 3t)\,\vec{j}$$

représentée ci-dessous. Soit C la boucle de cette courbe, en trait plein sur la figure.



a) Calculez la longueur de la courbe C. EXAMEN

b) Si vous êtes initialement au point $(-2, 2)$ de la courbe C et parcourez 4 unités le long de C dans la direction où le paramètre est croissant, en quel point vous situez-vous ?

Question 2

Soit le champ vectoriel défini par

$$\vec{F}(x, y) = x\,\vec{i} - y^3\,\vec{j}.$$

a) Donnez une paramétrisation de la ligne de courant de $\vec{F}$ passant par le point $(3, -4)$.

b) Si $\vec{F}$ est un champ de vitesses et si une particule dans ce champ est au point $(3, -4)$ à l'instant $t = 0$, où sera cette particule à l'instant $t = 2$?

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Département de mathématiques et de génie industriel
MTH1102D - Calcul II
Été 2023 - Devoir 8

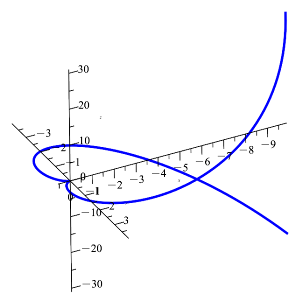
Directives

- Le devoir est à rendre dimanche le **16 juillet** avant 23h55 sur le site Moodle du cours.
- Les directives pour la remise et la présentation du devoir sont disponibles sur le site Moodle du cours.
- Vous devez donner les grandes étapes de calcul des intégrales.
- Dans tous les cas, la valeur exacte des intégrales est exigée, et non une approximation décimale.

Question 1

Les deux sous-questions suivantes sont indépendantes.

a) Soit C la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = t^2\cos(t)\,\vec{i} + t^2\sin(t)\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$, $-\pi \leq t \leq \pi$, et représentée ci-dessous.



Évaluez les intégrales suivantes. Donnez d'abord une réponse exacte simplifiée, puis une réponse arrondie à la deuxième décimale.

(i) $J_1 = \displaystyle\int_C z^{2/3}\,ds$

(ii) $J_2 = \displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, où $\vec{F}$ est le champ vectoriel défini par $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i} - x\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

b) Soit γ paramétrée par $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, une courbe lisse et $\vec{G}$ un champ vectoriel constant. Montrez que

$$\int_\gamma \vec{G}\cdot d\vec{r} = \vec{G}\cdot\left[\vec{r}(b) - \vec{r}(a)\right].$$

Question 2

Soit $\vec{F}$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{F}(x,y,z) = [\cos(yz) - 2xz]\,\vec{i} + [3 - xz\sin(yz)]\,\vec{j} - [xy\sin(yz) + x^2]\,\vec{k}.$$

a) Si C est une courbe fermée, que pouvez-vous dire du travail de $\vec{F}$ autour de C ? EXAMEN

b) Calculez le travail effectué par $\vec{F}$ le long d'une parabole dans l'esapce allant du point $(2,0,3)$ au point $(-1,\pi,1)$.

Département de mathématiques et de génie industriel
MTH1102D - Calcul II
Été 2023 - Devoir 9

Consignes

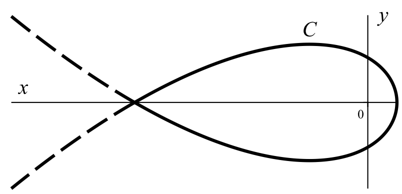
- Le devoir est à rendre dimanche le **23 juillet** avant 23h55 sur le site Moodle du cours.
- Les directives pour la remise et la présentation du devoir sont disponibles sur le site Moodle du cours.
- Vous devez donner les grandes étapes de calcul des intégrales.
- Dans tous les cas, la valeur exacte des intégrales est exigée, et non une approximation décimale.

Question 1

On considère la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = (1 - 3t^2)\,\vec{i} + (t^3 - 3t)\,\vec{j}$$

représentée ci-dessous. Soit C la boucle de cette courbe, en trait plein sur la figure.



a) Calculez l'aire de la région D délimitée par la courbe C. EXAMEN

b) Calculez le travail effectué autour de C par le champ vectoriel défini par

$$\vec{F}(x, y) = \left[7y - \ln(1 + x^4)\right]\,\vec{i} + \left[\ln(1 + y^4) - 3x\right]\,\vec{j}.$$

Vous pouvez utiliser les calculs faits au devoir 8 pour cette courbe, mais vous devez rappeler ici les quantités pertinentes, comme le vecteur tangent, etc.

Question 2

Soit S la partie du paraboloïde hyperbolique $z = x^2 - y^2$ située entre les cylindres $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 25$.

a) Donnez une paramétrisation de S en utilisant x et y comme paramètres. EXAMEN

b) Montrez que S peut aussi être paramétrée par EXAMEN

$$\vec{R}(u, v) = u\cos(v)\,\vec{i} + u\sin(v)\,\vec{j} + u^2\cos(2v)\,\vec{k}$$

et donnez le domaine des paramètres u et v. EXAMEN

c) Calculez l'aire de S en utilisant la paramétrisation de votre choix.

POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Département de mathématiques et de génie industriel
MTH1102D - Calcul II
Été 2023 - Devoir 10

Consignes

- Le devoir est à rendre dimanched le **30 juillet** avant 23h55 sur le site Moodle du cours.
- Les consignes pour la remise et la présentation du devoir sont disponibles sur le site Moodle du cours.
- Vous devez donner les grandes étapes de calcul des intégrales.
- Dans tous les cas, la valeur exacte des intégrales est exigée, et non une approximation décimale.

Question 1

Soit S la partie du paraboloïde $z = 11 - 4x^2 - 4y^2$ située entre les plans $z = -1$ et $z = 2$. Évaluez l'intégrale

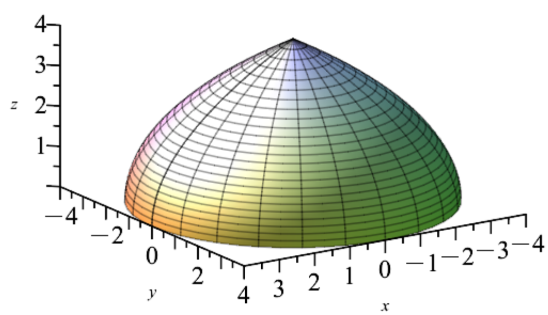
$$J_1 = \iint_S (x^2 + y^2)^{3/2}\, dS.$$

Question 2

Soit S la surface représentée ci-dessous et paramétrée par

$$\vec{R}(u,v) = (4-u^2)\cos(v)\,\vec{i} + (4-u^2)\sin(v)\,\vec{j} + 2u\,\vec{k}, \quad (u,v) \in [0,2] \times [0,2\pi].$$

Cette surface est orientée au point $(3,0,2)$ par le vecteur normal unitaire $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k})$.



EXAMEN (calculer flux)

Évaluez les intégrales suivantes. Vous devez montrer les grandes étapes de vos calculs et indiquer les techniques d'intégration utilisées.

a) $J_2 = \displaystyle\iint_S z\, dS$.

b) $J_3 = \displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, où $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i} - x\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Département de mathématiques et de génie industriel
MTH1102D - Calcul II
Été 2023 Devoir 11

Consignes

- Le devoir est à rendre dimanche le **6 août** avant 23h55 sur le site Moodle du cours.
- Les directives pour la remise et la présentation du devoir sont disponibles sur le site Moodle du cours.
- Vous devez donner les grandes étapes de calcul des intégrales.
- Dans tous les cas, la valeur exacte des intégrales est exigée, et non une approximation décimale.

Question 1

Les sous-questions suivantes sont indépendantes. Vous pouvez supposer que les hypothèses habituelles (dérivées continues, surface lisse par morceaux, etc.) sont toujours satisfaites.

a) Soit S une surface fermée et $\vec{F}$ un champ vectoriel tel que $\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$. Le champ $\vec{F}$ est-il nécessairement conservatif ? Si oui, démontrez-le. Sinon, donnez un contrexemple.

b) Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel défini sur une surface S et tel que $\vec{F}$ est tangent à S en tout point de cette surface. Que pouvez-vous dire du flux de $\vec{F}$ à travers S ? EXAMEN

c) Si f est une fonction scalaire et $\vec{F}$ un champ vectoriel, on définit le nouveau champ $(f\vec{F})$ par $(f\vec{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\vec{F}(x, y, z)$.

Démontrez la formule

$$\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div} \vec{F} + (\nabla f) \cdot \vec{F}.$$

Question 2 Exam

Soit C la courbe d'intersection du paraboloïde hyperbolique $z = 3xy$ et du cylindre $x^2 + y^2 = 10$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.

a) Donnez une paramétrisation de la courbe C et montrez qu'elle est fermée.

b) Calculez la circulation du champ vectoriel STOKES --> EXAMEN

$$\vec{F}(x, y, z) = \left[z^2 + \sqrt{1 + \cos(x)}\right] \vec{i} + \left[-x^2 + \sqrt{1 + \cos(y)}\right] \vec{j} + \left[y^2 + \sqrt{1 + \sin(z^2)}\right] \vec{k}$$

autour de C.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Département de mathématiques et de génie industriel
MTH1102D - Calcul II
Été 2023 - Devoir 12

Consignes

- Le devoir est à rendre dimanche le **13 août** avant 23h55 sur le site Moodle du cours.
- Les consignes pour la remise et la présentation du devoir sont disponibles sur le site Moodle du cours.
- Vous devez donner les grandes étapes de calcul des intégrales.
- Dans tous les cas, la valeur exacte des intégrales est exigée, et non une approximation décimale.

Question 1

Soit S la partie du cylindre $x^2 + y^2 = 16$ situé entre les plans $z = 10 + x$ et $z = 0$. La surface S est orientée au point $(4, 0, 5)$ par le vecteur normal $\vec{i}$. En utilisant un théorème du cours, calculez le flux du champ vectoriel $\vec{F}$ défini par

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2)\,\vec{i} + \ln(1 + z^2)\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$$

à travers S.

Question 2

a) Soit B un solide situé entièrement au dessus du plan $z = 1$ et dont la densité est inversement proportionnelle au carré de la distance au plan $z = 0$, et qui est délimité par une surface fermée S. Montrez que la masse de ce solide peut être calculée à l'aide de la formule

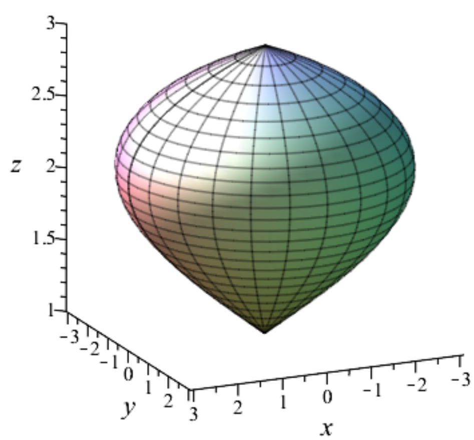
$$m = -c \oiint_S \frac{1}{z}\,\vec{k} \cdot d\vec{S},$$

où c est la constante de proportionnalité.

b) On considère maintenant un solide B comme en a) et délimité par la surface S paramétrée par

$$\vec{R}(u, v) = u(4 - u^2)\cos(v)\,\vec{i} + u(4 - u^2)\sin(v)\,\vec{j} + (1 + u)\,\vec{k}, \quad (u, v) \in [0, 2] \times [0, 2\pi].$$

Le solide B est illustré ci-dessous.



Calculez la masse de B. Vous pouvez supposer que $c = 1$.

Bien que les intégrales soient faciles, elles peuvent être longues à calculer donc vous pouvez utiliser un logiciel pour les calculs algébriques. Assurez-vous de bien indiquer les techniques employées pour l'intégration.
