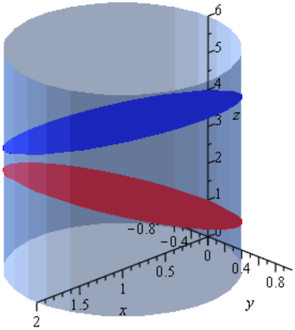
MTH1102D Calcul II

Chapitre 6, section 4 : Les intégrales doubles en coordonnées polaires

Exemple 2: calcul d'un volume

Exemple 2 : calcul d'un volume

Calculer le volume de la région E de l'espace bornée par le cylindre circulaire $(x-1)^2 + y^2 = 1$ et les plans $z = 4 + y$ et $z = x + 1$.



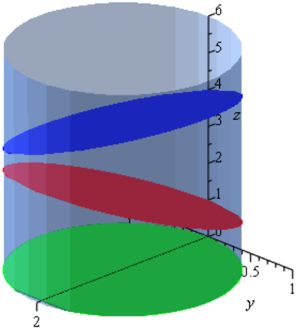
Plan en bleu : $z = 4 + y$

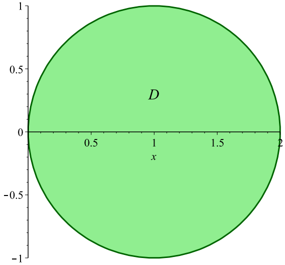
Plan en rouge : $z = x + 1$

$$\begin{aligned} \text{vol}(E) &= \iint_D [(4+y) - (x+1)]\, dA \\ &= \iint_D [3 - x + y]\, dA \end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul d'un volume

Calculer le volume de la région E de l'espace bornée par le cylindre circulaire $(x-1)^2 + y^2 = 1$ et les plans $z = 4 + y$ et $z = x + 1$.

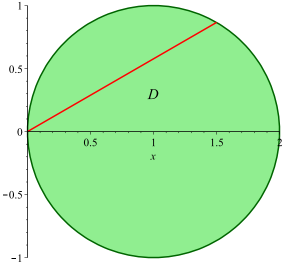




$$D = \left\{(x, y) \,|\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Exemple 2 : calcul d'un volume

Calculer le volume de la région E de l'espace bornée par le cylindre circulaire $(x-1)^2 + y^2 = 1$ et les plans $z = 4 + y$ et $z = x + 1$.



En coordonnées polaires :

$$D = \left\{ (r, \theta) \,|\, 0 \leq r \leq 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Exemple 2 : calcul d'un volume

Calcul de l'intégrale :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}(E) &= \iint_D [3 - x + y]\, dA \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} (3 - r\cos\theta + r\sin\theta) r\, dr d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{r^3}{3}\cos\theta + \frac{r^3}{3}\sin\theta \right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(6\cos^2\theta - \frac{8}{3}\cos^4\theta + \frac{8}{3}\cos^3\theta \sin\theta \right) d\theta
\end{aligned}
$$

Exemple 2 : calcul d'un volume

Calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(E) &= \iint_D [3 - x + y]\, dA \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} (3 - r\cos\theta + r\sin\theta) r\, dr d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{r^3}{3}\cos\theta + \frac{r^3}{3}\sin\theta \right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(6\cos^2\theta - \frac{8}{3}\cos^4\theta + \frac{8}{3}\cos^3\theta\sin\theta \right) d\theta
\end{aligned}$$

$$\cos^2(\theta) = \tfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

Exemple 2 : calcul d'un volume

Calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(E) &= \iint_D [3 - x + y]\, dA \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} (3 - r\cos\theta + r\sin\theta) r\, dr d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{r^3}{3}\cos\theta + \frac{r^3}{3}\sin\theta \right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(6\cos^2\theta - \frac{8}{3}\cos^4\theta + \frac{8}{3}\cos^3\theta \sin\theta \right) d\theta
\end{aligned}$$

formule 74

Exemple 2 : calcul d'un volume

Calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\text{vol}(E) &= \iint_D [3 - x + y]\, dA \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} (3 - r\cos\theta + r\sin\theta) r \, dr d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{r^3}{3}\cos\theta + \frac{r^3}{3}\sin\theta \right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(6\cos^2\theta - \frac{8}{3}\cos^4\theta + \frac{8}{3}\cos^3\theta \sin\theta \right) d\theta
\end{aligned}$$

$$u = \cos\theta, du = -\sin\theta \, d\theta$$

Exemple 2 : calcul d'un volume

Calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(E) &= \iint_D [3 - x + y]\, dA \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} (3 - r\cos\theta + r\sin\theta) r\, dr d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{r^3}{3}\cos\theta + \frac{r^3}{3}\sin\theta\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(6\cos^2\theta - \frac{8}{3}\cos^4\theta + \frac{8}{3}\cos^3\theta\sin\theta\right) d\theta \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Exemple 2 : calcul d'un volume

- Un exemple de calcul d'un volume à l'aide d'une intégrale double en coordonnées polaires.