MTH1102D Calcul II

Chapitre 6 Section 1 : Intégrales itérées

Exemple 3 : utilité du changement de l'ordre d'intégration

Exemple 2 : utilité du changement d'ordre

Calculons l'intégrale $\iint_R xe^{xy}\, dA$, où $R = [0,1] \times [1,2]$

Première façon : *dxdy*

Intégration par parties par rapport à x :

$$u = x \Rightarrow du = dx \text{ et } dv = e^{xy} dx \Rightarrow v = \frac{e^{xy}}{y} \text{ donne}$$

$$\int xe^{xy}\, dx = \frac{xe^{xy}}{y} - \int \frac{e^{xy}}{y}\, dx = \frac{xe^{xy}}{y} - \frac{e^{xy}}{y^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \iint_R xe^{xy}\, dA &= \int_1^2 \left[\frac{xe^{xy}}{y} - \frac{e^{xy}}{y^2}\right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_1^2 \left[\frac{e^y}{y} - \frac{e^y}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right] dy \end{aligned}$$

Exemple 2 : utilité du changement d'ordre

$$
\begin{aligned}
\iint_R xe^{xy}\,dA &= \int_1^2 \left[\frac{xe^{xy}}{y} - \frac{e^{xy}}{y^2}\right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_1^2 \left[\frac{e^y}{y} - \frac{e^y}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right] dy \\
&= \int_1^2 \frac{ye^y - e^y}{y^2}\,dy + \int_1^2 \frac{1}{y^2}\,dy \\
&= \int_1^2 \frac{d}{dy}\left[\frac{e^y}{y}\right] dy + \int_1^2 \frac{1}{y^2}\,dy \\
&= \left[\frac{e^y}{y}\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{y}\right]_1^2 = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Exemple 2 : utilité du changement d'ordre

Calculons l'intégrale $\iint_R xe^{xy}\, dA$, où $R = [0,1] \times [1,2]$

Deuxième façon : $dydx$

Changement de variable en y : $u = xy \Rightarrow du = x\,dy$ donne

$$\int xe^{xy}\, dy = \frac{xe^{xy}}{x} = e^{xy}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\iint_R xe^{xy}\, dA &= \int_0^1 [e^{xy}]_{y=1}^{y=2}\, dx = \int_0^1 [e^{2x} - e^x]\, dx \\
&= \left[\frac{e^{2x}}{2} - e^x\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \left(\frac{e^2}{2} - e\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Résumé

- Selon le théorème de Fubini, l'ordre d'intégration n'a pas d'importance en théorie.
- En pratique, les calculs peuvent être plus simples avec l'un ou l'autre ordre.