MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 2: Les intégrales curvilignes

Intégrale curviligne générale

Introduction

- Intégrale d'une fonction le long d'une courbe.
- Propriété des intégrales curvilignes.

Intégrale curviligne générale

Rappel :

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors la longueur de C est

$$L = \int_a^b ||\vec{r}'(t)||\, dt$$

Intégrale curviligne générale

Rappel :

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors la longueur de C est

$$L = \int_a^b ||\vec{r}'(t)||\, dt = \int_C 1\, ds$$

Intégrale curviligne générale

Rappel :

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors la longueur de C est

$$L = \int_a^b ||\vec{r}'(t)||\, dt = \int_C 1\, ds$$

Définition

Si f est une fonction définie dans un voisinage de C alors l'intégrale de f le long de C est

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, ||\vec{r}'(t)||\, dt$$

Intégrale curviligne générale

Rappel :

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors la longueur de C est

$$L = \int_a^b ||\vec{r}'(t)||\, dt = \int_C 1\, ds$$

Définition

Si f est une fonction définie dans un voisinage de C alors l'intégrale de f le long de C est

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, ||\vec{r}'(t)||\, dt$$

Notation : On écrit $f(x(t), y(t), z(t)) = f(\vec{r}(t))$ pour simplifier.

Intégrale curviligne générale

Propriétés

- Les propriétés habituelles des intégrales (linéarité, etc.) s'appliquent aussi aux intégrales curvilignes.

Intégrale curviligne générale

Propriétés

- Les propriétés habituelles des intégrales (linéarité, etc.) s'appliquent aussi aux intégrales curvilignes.
- En particulier, si $C = C_1 \cup C_2$ et les courbes C_1, C_2 ne se chevauchent pas alors

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_{C_1} f(x,y,z)\,ds + \int_{C_2} f(x,y,z)\,ds$$

Intégrale curviligne générale

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$dx = x'(t)\,dt, \quad dy = y'(t)\,dt, \quad dz = z'(t)\,dt.$$

Intégrale curviligne générale

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$dx = x'(t)\,dt, \quad dy = y'(t)\,dt, \quad dz = z'(t)\,dt.$$

Définition

Si f est une fonction définie dans un voisinage de C, on définit

1. $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,dx = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,x'(t)\,dt$
2. $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,dy = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,y'(t)\,dt$
3. $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,dz = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,z'(t)\,dt$

Intégrale curviligne générale

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$dx = x'(t)\,dt, \quad dy = y'(t)\,dt, \quad dz = z'(t)\,dt.$$

Définition

Si f est une fonction définie dans un voisinage de C, on définit

1. $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,dx = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,x'(t)\,dt$
2. $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,dy = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,y'(t)\,dt$
3. $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,dz = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,z'(t)\,dt$

Pour ces intégrales, on tient compte de la variation selon une seule des variables.

Résumé

- Définition de l'intégrale curviligne par rappport à s comme généralisation de l'intégrale donnant la longueur d'une courbe.

Résumé

- Définition de l'intégrale curviligne par rappport à s comme généralisation de l'intégrale donnant la longueur d'une courbe.
- Définition de l'intégrale curviligne rappport à une variable.

Résumé

- Définition de l'intégrale curviligne par rappport à s comme généralisation de l'intégrale donnant la longueur d'une courbe.
- Définition de l'intégrale curviligne rappport à une variable.
- Propriétés des intégrales curvilignes.

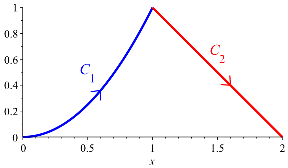
MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 2: Les intégrales curvilignes

Exemple 1: calcul d'une intégrale curviligne en deux dimensions

Exemple 1 : intégrale curviligne en deux dimensions

Calculer $J = \displaystyle\int_C xy\, ds$ où $C = C_1 \cup C_2$ et
C_1 est la partie de la parabole $y = x^2$ reliant $(0,0)$ à $(1,1)$
C_2 est le segment reliant $(1,1)$ à $(2,0)$.



- Parabole : $y = x^2$

x=t

$$\begin{aligned} C_1 : \quad \vec{r}_1(t) &= t\vec{i} + t^2\vec{j}, \quad 0 \le t \le 1 \\ \vec{r}_1{}'(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} \\ \|\vec{r}_1{}'(t)\| &= \sqrt{1+4t^2} \end{aligned}$$

0 car extrémité gauche (0,0) et 1 car extrémité droite de la courbe qui va jusqu'à (1,1)

- Segment : $y = 2 - x$

$$\begin{aligned} C_2 : \quad \vec{r}_2(t) &= t\vec{i} + (2-t)\vec{j}, \quad 1 \le t \le 2 \\ \vec{r}_2{}'(t) &= \vec{i} - \vec{j} \\ \|\vec{r}_2{}'(t)\| &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Exemple 1 : intégrale curviligne en deux dimensions

Calculer $J = \displaystyle\int_C xy\, ds$ où $C = C_1 \cup C_2$ et

C_1 est la partie de la parabole $y = x^2$ reliant $(0,0)$ à $(1,1)$

C_2 est le segment reliant $(1,1)$ à $(2,0)$.

segment 1

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_{C_1} xy\, ds = \int_0^1 x(t)y(t)\,||\vec{r}_1{}'(t)||\, dt = \int_0^1 (t)(t^2)\sqrt{1+4t^2}\, dt \\
&= \frac{1}{8}\int_1^5 \frac{(u-1)}{4} u^{1/2}\, du \qquad (u = 4t^2+1,\, du = 8t) \\
&= \frac{5}{24}\sqrt{5} + \frac{1}{120}
\end{aligned}
$$

Exemple 1 : intégrale curviligne en deux dimensions

Calculer $J = \int_C xy\, ds$ où $C = C_1 \cup C_2$ et
C_1 est la partie de la parabole $y = x^2$ reliant $(0,0)$ à $(1,1)$
C_2 est le segment reliant $(1,1)$ à $(2,0)$.

segment 2

$$J_2 = \int_{C_2} xy\, ds = \int_1^2 x(t)y(t)\, ||\vec{r}_2'(t)||\, dt = \int_1^2 (t)(2-t)\sqrt{2}\, dt = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

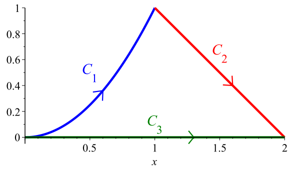
Finalement,

additionner segments

$$J = J_1 + J_2 = \frac{5}{24}\sqrt{5} + \frac{1}{120} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

Exemple 1 : intégrale curviligne en deux dimensions

Calculer $J = \int_C xy\, ds$ où $C = C_1 \cup C_2$ et
C_1 est la partie de la parabole $y = x^2$ reliant $(0,0)$ à $(1,1)$
C_2 est le segment reliant $(1,1)$ à $(2,0)$.



segment 3

Soit C_3 le segment allant de $(0,0)$ à $(2,0)$.

Notons $f(x,y) = xy$

Puisque $f(x,y) = 0$ si $(x,y) \in C_3$,

$$\int_{C_3} f(x,y)\, ds = 0$$

L'intégrale curviligne d'une fonction dépend du chemin et non seulement des extrémités de la courbe.

Résumé

- Exemples de paramétrisation.
- Utilisation des propriétés de l'intégrale curviligne.
- Calcul de trois intégrales curvilignes en deux dimensions.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 2: Les intégrales curvilignes

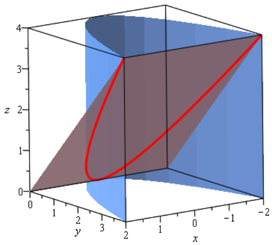
Exemple 2: calcul d'une intégrale curviligne en trois dimensions

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

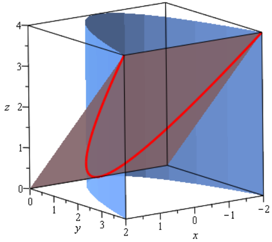
Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

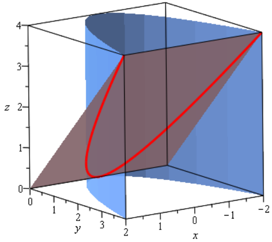
Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

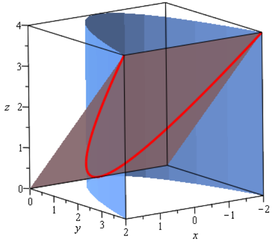
Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
- C est sur le plan donc $z(t) = y(t) = t^2$.

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

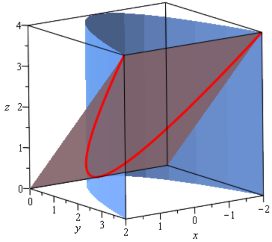


- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
- C est sur le plan donc $z(t) = y(t) = t^2$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2,4,4)$ à $(2,4,4)$.



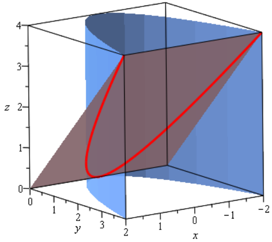
- Projection de C dans le plan des (x,y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
- C est sur le plan donc $z(t) = y(t) = t^2$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}$$

- Bornes sur t :

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\, ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
- C est sur le plan donc $z(t) = y(t) = t^2$.

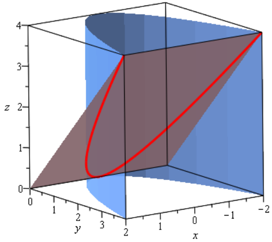
$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}$$

- Bornes sur t :

$$\vec{r}(t) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
- C est sur le plan donc $z(t) = y(t) = t^2$.

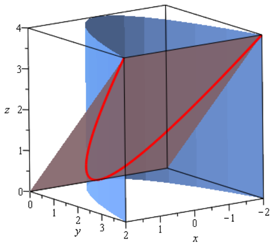
$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}$$

- Bornes sur t :

$$\vec{r}(t) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow t = -2$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\, ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
- C est sur le plan donc $z(t) = y(t) = t^2$.

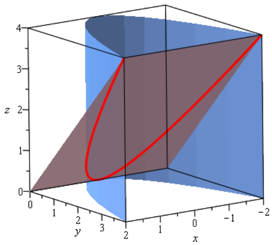
$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}$$

- Bornes sur t :

$$\vec{r}(t) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow t = -2$$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

Calculer $J = \int_C z\, ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
- C est sur le plan donc $z(t) = y(t) = t^2$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}$$

- Bornes sur t :

paramétrisation

$$\vec{r}(t) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow t = -2$$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow t = 2$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}, \;\; -2 \leq t \leq 2.$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}, \quad -2 \leq t \leq 2.$$

$$\vec{r}'(t) \quad = \quad \vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k}$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \displaystyle\int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}, \;\; -2 \leq t \leq 2.$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k} \\ ||\vec{r}'(t)|| &= \sqrt{1 + 8t^2} \end{aligned}$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}, \;\; -2 \leq t \leq 2.$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k} \\
||\vec{r}'(t)|| &= \sqrt{1 + 8t^2} \\
f(\vec{r}(t)) &= z(t) = t^2
\end{aligned}$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\, ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}, \;\; -2 \leq t \leq 2.$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k} \\ ||\vec{r}'(t)|| &= \sqrt{1 + 8t^2} \\ f(\vec{r}(t)) &= z(t) = t^2 \end{aligned}$$

$$J = \int_{-2}^{2} t^2 \sqrt{1 + 8t^2}\, dt$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}, \;\; -2 \leq t \leq 2.$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k} \\ \|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{1+8t^2} \\ f(\vec{r}(t)) &= z(t) = t^2 \end{aligned}$$

$$J = \int_{-2}^{2} t^2\sqrt{1+8t^2}\,dt = \frac{65}{16}\sqrt{33} + \frac{\sqrt{12}}{256}\ln\left(\frac{-4\sqrt{2}+\sqrt{33}}{4\sqrt{2}+\sqrt{33}}\right)$$

Formule 22

Résumé

- Paramétrisation de la courbe d'intersection de deux surfaces.

Résumé

- Paramétrisation de la courbe d'intersection de deux surfaces.
- Calcul d'une intégrale curviligne en trois dimensions.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 2: Les intégrales curvilignes

Exemple 3: calcul d'une intégrale curviligne par rapport à une variable

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \displaystyle\int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ où

$$P(x, y) = x + y \quad Q(x, y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\vec{i} + 2\sin t\vec{j}, \;\; 0 \le t \le \pi/2.$$

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\vec{i} + 2\sin t\vec{j}, \;\; 0 \le t \le \pi/2.$$

Notation :

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_C P(x,y)\,dx + \int_C Q(x,y)\,dy$$

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \displaystyle\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}, \ \ 0 \leq t \leq \pi/2.$$

On a $dx = x'(t)\,dt = -2\sin t\,dt$

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\vec{i} + 2\sin t\vec{j}, \;\; 0 \leq t \leq \pi/2.$$

On a $dx = x'(t)\,dt = -2\sin t\,dt$ et $dy = y'(t)\,dt = 2\cos t\,dt$ donc

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \displaystyle\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}, \;\; 0 \le t \le \pi/2.$$

On a $dx = x'(t)\,dt = -2\sin t\,dt$ et $dy = y'(t)\,dt = 2\cos t\,dt$ donc

$$J \;=\; \int_0^{\pi/2} P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt + \int_0^{\pi/2} Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}, \;\; 0 \le t \le \pi/2.$$

On a $dx = x'(t)\,dt = -2\sin t\,dt$ et $dy = y'(t)\,dt = 2\cos t\,dt$ donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt + \int_0^{\pi/2} Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t)\,dt + \int_0^{\pi/2} (2\sin t - 2\cos t)(2\cos t)\,dt \end{aligned}$$

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}, \;\; 0 \le t \le \pi/2.$$

On a $dx = x'(t)\,dt = -2\sin t\,dt$ et $dy = y'(t)\,dt = 2\cos t\,dt$ donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt + \int_0^{\pi/2} Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t)\,dt + \int_0^{\pi/2} (2\sin t - 2\cos t)(2\cos t)\,dt \end{aligned}$$

on peut regrouper la somme des 2 intégrales en une seule car mm borne

$$= \int_0^{\pi/2} \left(-4\cos t\sin t - 4\sin^2 t + 4\sin t\cos t - 4\cos^2 t\right)\,dt$$

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}, \;\; 0 \le t \le \pi/2.$$

On a $dx = x'(t)\,dt = -2\sin t\,dt$ et $dy = y'(t)\,dt = 2\cos t\,dt$ donc

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\pi/2} P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt + \int_0^{\pi/2} Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t)\,dt + \int_0^{\pi/2} (2\sin t - 2\cos t)(2\cos t)\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(-4\cos t\sin t - 4\sin^2 t + 4\sin t\cos t - 4\cos^2 t\right)\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} -4\,dt = -2\pi.
\end{aligned}$$

Résumé

- Calcul d'intégrales curvilignes par rapport à x et à y.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 2: Les intégrales curvilignes

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Introduction

- Intégrale d'un champ vectoriel le long d'une courbe.
- Interprétation physique.
- Formule de calcul.

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Définition

Soit C une courbe et $\vec{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage de C. L'*intégrale de $\vec{F}$ le long de C* est

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

où $\vec{T}$ est le vecteur tangent unitaire de C.

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Définition

Soit C une courbe et $\vec{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage de C. L'*intégrale de $\vec{F}$ le long de C* est

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

où $\vec{T}$ est le vecteur tangent unitaire de C.

Remarques :

- $\vec{F}$ et $\vec{T}$ sont des fonctions vectorielles qui dépendent du point (x, y, z) de la courbe.

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Définition

Soit C une courbe et $\vec{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage de C. L'*intégrale de $\vec{F}$ le long de C* est

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

où $\vec{T}$ est le vecteur tangent unitaire de C.

Remarques :

- $\vec{F}$ et $\vec{T}$ sont des fonctions vectorielles qui dépendent du point (x, y, z) de la courbe.
- $\vec{F} \cdot \vec{T}$ est une fonction scalaire qui dépend du point (x, y, z) de la courbe.

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Définition

Soit C une courbe et $\vec{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage de C. L'*intégrale de* $\vec{F}$ *le long de* C est

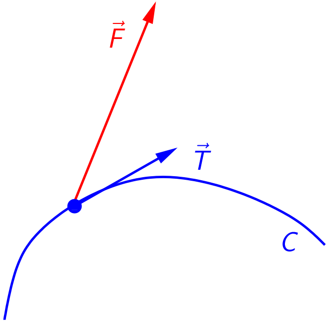
$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

où $\vec{T}$ est le vecteur tangent unitaire de C.

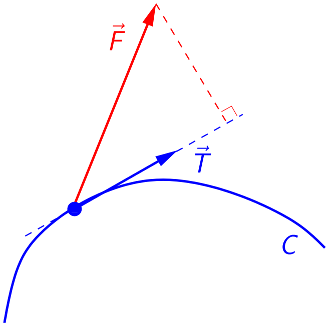
Remarques :

- $\vec{F}$ et $\vec{T}$ sont des fonctions vectorielles qui dépendent du point (x, y, z) de la courbe.
- $\vec{F} \cdot \vec{T}$ est une fonction scalaire qui dépend du point (x, y, z) de la courbe.
- L'intégrale ci-dessus est un cas particulier d'intégrale curviligne.

Interprétation

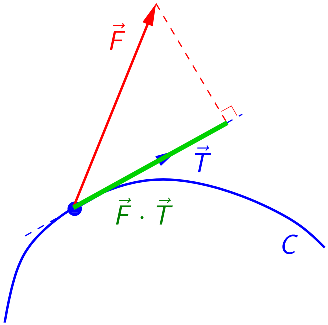


Interprétation

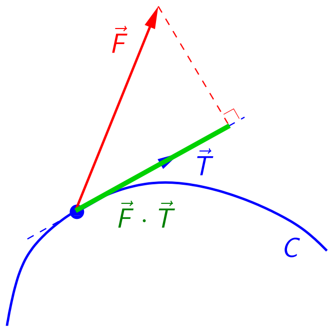


Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Interprétation

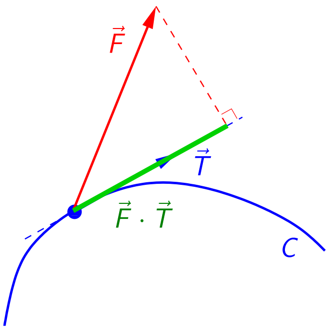


Interprétation



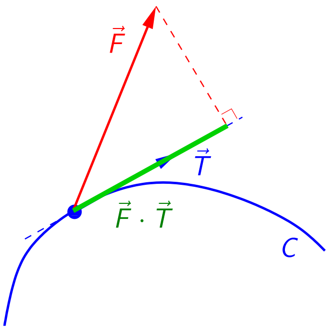
- Rappel : si une force agit dans la direction du mouvement alors le travail est égal à force $\times$ distance.

Interprétation



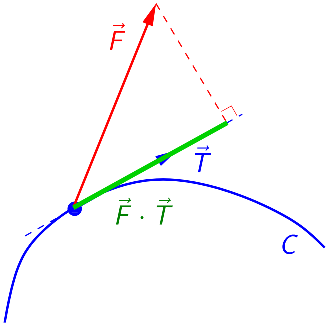
- Rappel : si une force agit dans la direction du mouvement alors le travail est égal à force $\times$ distance.
- $\vec{F}\cdot\vec{T}$ est la composante de $\vec{F}$ dans la direction de $\vec{T}$ (donc du mouvement le long de C).

Interprétation



- Rappel : si une force agit dans la direction du mouvement alors le travail est égal à force $\times$ distance.
- $\vec{F} \cdot \vec{T}$ est la composante de $\vec{F}$ dans la direction de $\vec{T}$ (donc du mouvement le long de C).
- $\vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$ est le travail effectué par $\vec{F}$ le long d'un petit arc de C.

Interprétation



- Rappel : si une force agit dans la direction du mouvement alors le travail est égal à force $\times$ distance.
- $\vec{F} \cdot \vec{T}$ est la composante de $\vec{F}$ dans la direction de $\vec{T}$ (donc du mouvement le long de C).
- $\vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$ est le travail effectué par $\vec{F}$ le long d'un petit arc de C.
- $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$ est le travail total effectué par $\vec{F}$ le long de C.

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Formule de calcul

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Formule de calcul

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds \quad = \quad \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||}\, ||\vec{r}'(t)||\, dt$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Formule de calcul

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{\cancel{||\vec{r}'(t)||}} \cancel{||\vec{r}'(t)||}\, dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt \end{aligned}$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Formule de calcul

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}\,'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}\, ||\vec{r}\,'(t)||\, dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt\end{aligned}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Formule de calcul

Si C est paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||}\, ||\vec{r}'(t)||\, dt \\
&= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt
\end{aligned}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt$$

Notation :

On écrit habituellement $\vec{r}'(t)\, dt = \vec{dr}$ et

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}.$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Orientation

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Orientation

- Le sens de parcours d'une courbe paramétrée définit son *orientation*.

Orientation

- Le sens de parcours d'une courbe paramétrée définit son *orientation*.
- Si C est une courbe paramétrée alors $-C$ désigne la même courbe mais parcourue en sens opposé (orientation opposée).

Orientation

- Le sens de parcours d'une courbe paramétrée définit son *orientation*.
- Si C est une courbe paramétrée alors $-C$ désigne la même courbe mais parcourue en sens opposé (orientation opposée).
- Intégrale curviligne générale par rapport à s :

$$\int_{-C} f(x,y,z)\,ds = \int_{C} f(x,y,z)\,ds$$

car $ds = ||\vec{r}'(t)||\,dt$ est positif quel que soit le sens de parcours.

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Orientation

- Le sens de parcours d'une courbe paramétrée définit son *orientation*.
- Si C est une courbe paramétrée alors $-C$ désigne la même courbe mais parcourue en sens opposé (orientation opposée).
- Intégrale curviligne générale par rapport à s :

$$\int_{-C} f(x, y, z)\, ds = \int_C f(x, y, z)\, ds$$

car $ds = ||\vec{r}'(t)||\, dt$ est positif quel que soit le sens de parcours.

- Intégrale curviligne d'un champ vectoriel :

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot \vec{dr} = -\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

car $\vec{dr} = \vec{r}'(t)\, dt$ change de signe lorsque le sens de parcours change.

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Autre notation pour la formule de calcul

Autre notation pour la formule de calcul

- En deux dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et C : $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Autre notation pour la formule de calcul

- En deux dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} \quad = \quad \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Autre notation pour la formule de calcul

- En deux dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))\vec{i} + Q(x(t), y(t))\vec{j}] \cdot [x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}]\, dt
\end{aligned}$$

Autre notation pour la formule de calcul

- En deux dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))\vec{i} + Q(x(t), y(t))\vec{j}] \cdot [x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}]\, dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\ dt
\end{aligned}$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Autre notation pour la formule de calcul

- En deux dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))\vec{i} + Q(x(t), y(t))\vec{j}] \cdot [x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}]\, dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\ dt \\
&= \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\, dt + \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t)\, dt
\end{aligned}$$

Autre notation pour la formule de calcul

- En deux dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))\vec{i} + Q(x(t), y(t))\vec{j}] \cdot [x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}]\, dt \\
&= \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\, dt \\
&= \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\, dt + \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t)\, dt \\
&= \int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy
\end{aligned}$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Autre notation pour la formule de calcul

- En deux dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ et $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}'(t)\,dt \\
&= \int_a^b [P(x(t),y(t))\vec{i} + Q(x(t),y(t))\vec{j}]\cdot[x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}]\,dt \\
&= \int_a^b [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\;dt \\
&= \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)\,dt + \int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)\,dt \\
&= \int_C P(x,y)\,dx + \int_C Q(x,y)\,dy \\
&= \int_C P\,dx + Q\,dy
\end{aligned}$$

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Autre notation pour la formule de calcul

- En trois dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$
  et $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Autre notation pour la formule de calcul

- En trois dimensions : Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$
  et C : $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ alors

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Résumé

- Intégrale d'un champ vectoriel le long d'une courbe.

Résumé

- Intégrale d'un champ vectoriel le long d'une courbe.
- Interprétation physique de l'intégrale comme un travail.

Résumé

- Intégrale d'un champ vectoriel le long d'une courbe.
- Interprétation physique de l'intégrale comme un travail.
- Formule de calcul de l'intégrale étant donnée une paramétrisation de la courbe.

Résumé

- Intégrale d'un champ vectoriel le long d'une courbe.
- Interprétation physique de l'intégrale comme un travail.
- Formule de calcul de l'intégrale étant donnée une paramétrisation de la courbe.
- Dépendance du travail sur l'orientation de la courbe.

Résumé

- Intégrale d'un champ vectoriel le long d'une courbe.
- Interprétation physique de l'intégrale comme un travail.
- Formule de calcul de l'intégrale étant donnée une paramétrisation de la courbe.
- Dépendance du travail sur l'orientation de la courbe.
- Reformulation de la formule de calcul de l'intégale d'un champ le long d'une courbe.

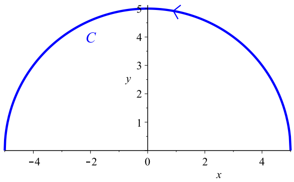
MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 2: Les intégrales curvilignes

Exemple 4: intégrale curviligne d'un champ vectoriel en deux dimensions

Exemple 4 : int. curviligne d'un champ en 2 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ $\vec{F}(x, y) = -x^2\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ le long du demi-cercle défini par $x^2 + y^2 = 25$, $y \geq 0$, parcouru du point $(5, 0)$ au point $(-5, 0)$.



car rayon du cercle est de 5

$$C : \vec{r}(t) = 5\cos t\,\vec{i} + 5\sin t\,\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

quand t = pi on a (-5,0)

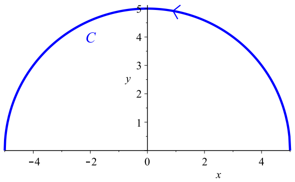
quand t=0, on a (5,0)

$$\vec{r}(0) = 5\,\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{r}(\pi) = -5\,\vec{i}$$

donc orientation correcte.

Exemple 4 : int. curviligne d'un champ en 2 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ $\vec{F}(x,y) = -x^2\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ le long du demi-cercle défini par $x^2 + y^2 = 25$, $y \geq 0$, parcouru du point $(5,0)$ au point $(-5,0)$.



$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= 5\cos t\,\vec{i} + 5\sin t\,\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi \\
\vec{r}'(t) &= -5\sin t\,\vec{i} + 5\cos t\,\vec{j} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= -25\cos^2 t\,\vec{i} + 5\sin t\,\vec{j} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) &= 125\cos^2 t\sin t + 25\cos t\sin t
\end{aligned}$$

Exemple 4 : int. curviligne d'un champ en 2 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ $\vec{F}(x,y) = -x^2\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ le long du demi-cercle défini par $x^2 + y^2 = 25$, $y \geq 0$, parcouru du point $(5,0)$ au point $(-5,0)$.

$$\begin{aligned}
W &= \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\,dt \\
&= \int_0^{\pi} (125\cos^2 t \sin t + 25\cos t \sin t)\,dt \qquad (u = \cos t,\, du = -\sin t\,dt) \\
&= -\int_1^{-1} (125u^2 + 25u)\,du \\
&= \int_{-1}^{1} (125u^2 + 25u)\,du = \frac{250}{3}.
\end{aligned}$$

Résumé

- Calcul du travail effectué par un champ vectoriel en deux dimensions.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 2: Les intégrales curvilignes

Exemple 5: intégrale curviligne d'un champ vectoriel en trois dimensions

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) Le segment est paramétré par

$$\vec{r}(t) \;=\; (1-t)(2\,\vec{i} + \vec{j} + 2\,\vec{k}) + t(\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k})$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) Le segment est paramétré par

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (1-t)(2\,\vec{i} + \vec{j} + 2\,\vec{k}) + t(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \\ &= (2-t)\,\vec{i} + (1+t)\,\vec{j} + (2-t)\,\vec{k} \end{aligned}$$

avec $0 \leq t \leq 1$.

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) On calcule

$$\vec{r}(t) = (2 - t)\,\vec{i} + (1 + t)\,\vec{j} + (2 - t)\,\vec{k}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ
$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) On calcule

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (2 - t)\,\vec{i} + (1 + t)\,\vec{j} + (2 - t)\,\vec{k} \\ \vec{r}\,'(t) &= -\,\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (2-t)\,\vec{i} + (1+t)\,\vec{j} + (2-t)\,\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -\,\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= [(2-t)-(2-t)]\,\vec{i} + [(2-t)-(1+t)]\,\vec{j} \\
&\quad +[(2-t)+(1+t)]\,\vec{k}
\end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (2-t)\,\vec{i} + (1+t)\,\vec{j} + (2-t)\,\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -\,\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= [(2-t)-(2-t)]\,\vec{i} + [(2-t)-(1+t)]\,\vec{j} \\
&\quad + [(2-t)+(1+t)]\,\vec{k} = [1-2t]\,\vec{j} + 3\,\vec{k}
\end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (2-t)\,\vec{i} + (1+t)\,\vec{j} + (2-t)\,\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -\,\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= [(2-t)-(2-t)]\,\vec{i} + [(2-t)-(1+t)]\,\vec{j} \\
&\quad +[(2-t)+(1+t)]\,\vec{k} = [1-2t]\,\vec{j} + 3\,\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) &= -2-2t
\end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) Ainsi,

$$W = \int_T \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) Ainsi,

$$W = \int_T \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) Ainsi,

$$W = \int_T \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^1 (-2 - 2t)\,dt = -3.$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) Ainsi,

$$W = \int_T \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^1 (-2 - 2t)\,dt = -3.$$

Le travail peut être négatif.

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

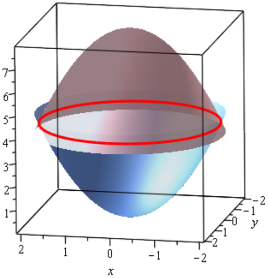
Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.



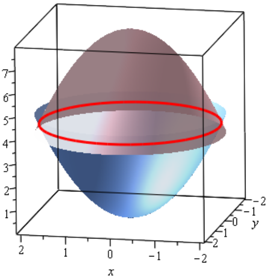
Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.



- b) Intersection des surfaces :

$$x^2 + y^2 = z = 8 - x^2 - y^2$$

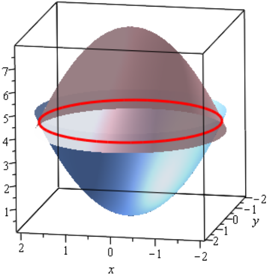
Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.



- b) Intersection des surfaces :

$$x^2 + y^2 = z = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

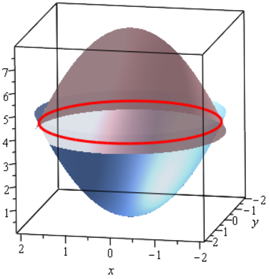
Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.



- b) Intersection des surfaces :

  $x^2 + y^2 = z = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$
  $z = 4$

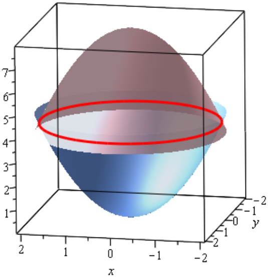
Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.



- b) Intersection des surfaces :

  $$x^2 + y^2 = z = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$
  $$z = 4$$

- Paramétrisation :

  $$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 4\,\vec{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) On calcule

$$\vec{r}(t) \quad = \quad 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 4\,\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + 0\,\vec{k}
\end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 4\,\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= (4 - 2\cos t)\,\vec{i} + (4 - 2\sin t)\,\vec{j} + (2\cos t + 2\sin t)\,\vec{k}
\end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 4\,\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= (4 - 2\cos t)\,\vec{i} + (4 - 2\sin t)\,\vec{j} + (2\cos t + 2\sin t)\,\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) &= (-2\sin t)(4 - 2\cos t) + (2\cos t)(4 - 2\sin t) + 0
\end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) On calcule

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 4\,\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= (4 - 2\cos t)\,\vec{i} + (4 - 2\sin t)\,\vec{j} + (2\cos t + 2\sin t)\,\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) &= (-2\sin t)(4 - 2\cos t) + (2\cos t)(4 - 2\sin t) + 0 \\
&= -8\sin t + 8\cos t
\end{aligned}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) Ainsi,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x)\,\vec{i} + (z - y)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2, 1, 2)$ à $(1, 2, 1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) Ainsi,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) Ainsi,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (-8\sin t - 8\cos t)\,dt$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) Ainsi,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (-8\sin t - 8\cos t)\,dt = 0.$$

Exemple 5 : int. curviligne d'un champ en 3 dimensions

Calculer le travail effectué par le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = (z-x)\,\vec{i} + (z-y)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

a) le long du segment T allant de $(2,1,2)$ à $(1,2,1)$.

b) autour de la courbe d'intersection C des surfaces $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

b) Ainsi,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (-8\sin t - 8\cos t)\,dt = 0.$$

Le travail peut être nul.

Résumé

- Calcul de l'intégrale d'un champ le long d'une courbe en trois dimensions.

Résumé

- Calcul de l'intégrale d'un champ le long d'une courbe en trois dimensions.
- Le travail d'un champ vectoriel peut être positif, négatif ou nul.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 3: Le théorème fondamental des intégrales curvilignes

Énoncé du théorème fondamental et conséquences

Introduction

- Énoncé du théorème fondamental des intégrales curvilignes.
- Deux conséquences importantes.

Théorème fondamental des intégrales curvilignes

Définition

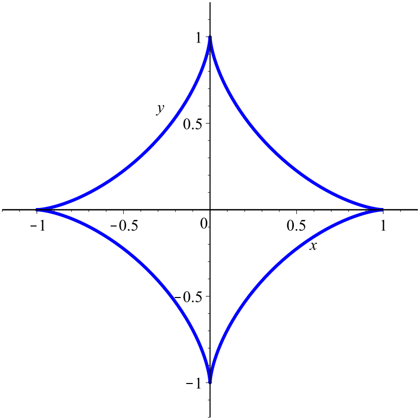
Une courbe C paramétrée par une fonction vectorielle $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, est

- *fermée* si ses deux extrémités coïncident : $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
- *lisse* si
  1. les composantes de $\vec{r}$ ont des dérivées partielles continues
  2. $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ pour tout $t \in [a, b]$.
- *lisse par morceaux (LPM)* si elle est constituée d'un nombre fini de morceaux lisses.

Théorème fondamental des intégrales curvilignes

Exemple : l'*astroïde* paramétrée par $\vec{r}(t) = \cos^3 t\,\vec{i} + \sin^3 t\,\vec{j}$ est lisse par morceaux.

Cette courbe n'est pas lisse car en 4 points le vecteur tangeant r' est nul. Mais, elle est LPM car en tous les autres pts le vecteur tangeant est non nul et les dérivées partielles de r sont partout continues



Théorème fondamental des intégrales curvilignes (TFIC)

Rappel : Un champ vectoriel $\vec{F}$ est conservatif si $\vec{F} = \nabla f$ pour une certaine fonction scalaire f.

Théorème (TFIC)

Soit C une courbe lisse par morceaux et f une fonction scalaire possédant des dérivées partielles continues. Alors on a

extrémités de la courbe

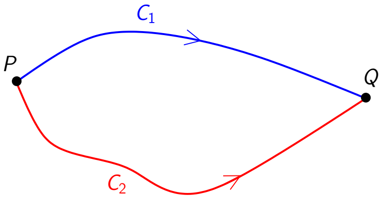
$$\int_C \nabla f \cdot \vec{dr} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

Autrement dit, l'intégrale curviligne d'un champ vectoriel conservatif ayant un potentiel f est égale à la différence de potentiel aux extrémités de la courbe.

Théorème fondamental des intégrales curvilignes

Conséquences du TFIC

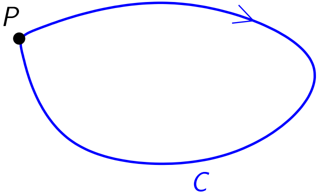
1. L'intégrale curviligne d'un champ vectoriel conservatif $\vec{F} = \nabla f$ est indépendante du chemin : si C_1 et C_2 sont des courbes ayant les mêmes extrémités alors $\int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{dr}$.



$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{dr} = f(Q) - f(P) = \int_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Conséquences du TFIC

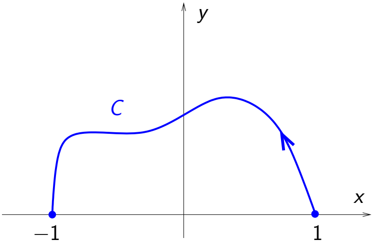
2. L'intégrale curviligne d'un champ vectoriel conservatif $\vec{F} = \nabla f$ autour d'une courbe fermée C est nulle : $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0$.



$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = f(P) - f(P) = 0$$

Exemple

Soit C une courbe reliant le point $(1, 0)$ au point $(-1, 0)$ et $\vec{F}(x, y) = 2(x-1)\vec{i} - 2y\vec{j}$. Calculer $\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$.



- $\vec{F} = \nabla f$, où $f(x, y) = (x-1)^2 - y^2$.
- Selon le TFIC,

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = f(-1, 0) - f(1, 0) = 4 - 0 = 4.$$

Théorème fondamental des intégrales curvilignes

Le TFIC généralise le théorème fondamental du calcul :

- TFC : Si $f'(x) = F(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b F(x)\,dx = f(b) - f(a)$.

- TFIC : Si $\nabla f = \vec{F}$ alors $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$.

Théorème fondamental des intégrales curvilignes

Le TFIC généralise le théorème fondamental du calcul :

- TFC : Si $f'(x) = F(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b F(x)\,dx = f(b) - f(a)$.
- TFIC : Si $\nabla f = \vec{F}$ alors $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$.

La dérivée de f est F.

La $\ll$ dérivée $\gg$ de f est $\vec{F}$

Théorème fondamental des intégrales curvilignes

Le TFIC généralise le théorème fondamental du calcul :

- TFC : Si $f'(x) = F(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b F(x)\,dx = f(b) - f(a)$.
- TFIC : Si $\nabla f = \vec{F}$ alors $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\vec{dr} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$.

L'intégrale de F est égale à la différence des valeurs de f aux extrémités de l'intervalle.

L'intégrale de $\vec{F}$ est égale à la différence des valeurs de f aux extrémités de la courbe.

Résumé

- Énoncé du théorème fondamental des intégrales curvilignes.
- Conséquence : indépendance du chemin pour l'intégrale d'un champ conservatif.
- Conséquence : intégrale nulle pour un champ conservatif autour d'une courbe fermée.
- Le TFIC généralise le TFC du calcul différentiel et intégral en une variable.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 3: Le théorème fondamental des intégrales curvilignes

Un critère pour les champs conservatifs

Introduction

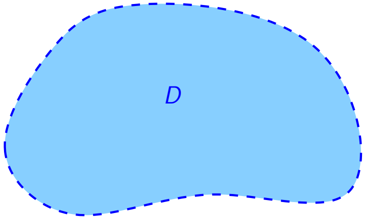
- Un critère permettant de déterminer si un champ vectoriel en deux dimensions est conservatif.

Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *ouvert* s'il ne contient aucun point de sa frontière.

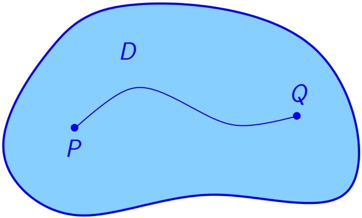
- Pour les besoins du cours, la *frontière* d'une région plane est la courbe qui la délimite.
- On représente habituellement un domaine ouvert en traçant sa frontière en pointillés.



Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *connexe* si toute paire de points de D peut être reliée par un chemin continu situé entièrement à l'intérieur de D.



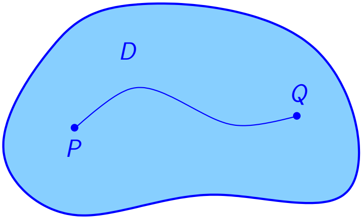
D est connexe

Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *connexe* si toute paire de points de D peut être reliée par un chemin continu situé entièrement à l'intérieur de D.

Autrement dit, D est en *un seul morceau*.



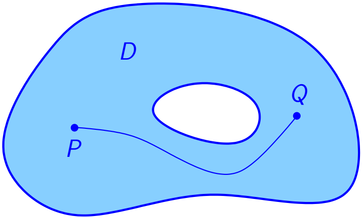
D est connexe

Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *connexe* si toute paire de points de D peut être reliée par un chemin continu situé entièrement à l'intérieur de D.

Autrement dit, D est en *un seul morceau*.



D est connexe

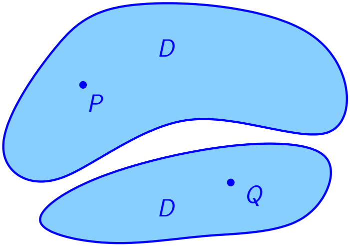
Même s'il y a un trou, les pts P et Q on peut les relier à l'aide d'une courbe, donc D est connexe

Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *connexe* si toute paire de points de D peut être reliée par un chemin continu situé entièrement à l'intérieur de D.

Autrement dit, D est en *un seul morceau*.

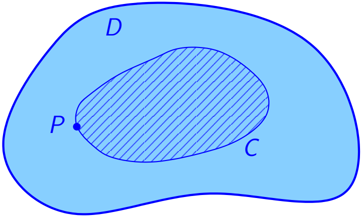


D n'est pas connexe

Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *simplement connexe* s'il est connexe et si toute courbe fermée dans D n'entoure que des points de D.



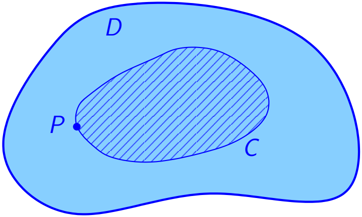
D est simplement connexe

Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *simplement connexe* s'il est connexe et si toute courbe fermé dans D n'entoure <u>que</u> des points de D.

Autrement dit, D n'a *pas de trous*.



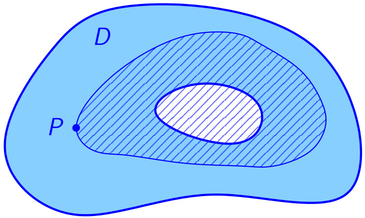
D est simplement connexe

Un critère pour les champs conservatifs

Définition

Un domaine D du plan est *simplement connexe* s'il est connexe et si toute courbe fermé dans D n'entoure <u>que</u> des points de D.

Autrement dit, D n'a *pas de trous*.



D n'est pas simplement connexe

Un critère pour les champs conservatifs

Théorème

Soit $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ un champ vectoriel ayant des dérivées partielles continues sur un domaine simplement connexe D. Dans ce cas,

$$\vec{F} \text{ conservatif } \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Remarques :

- L'implication directe ($\Rightarrow$) est vraie même si D n'est pas simplement connexe et est facile à démontrer.
- La réciproque ($\Leftarrow$) est vraie seulement si D est simplement connexe et est beaucoup plus difficile à démontrer.

Résumé

- Propriétés topologiques de certains domaines du plan.
- Critère pour déterminer si un champ vectoriel en deux dimensions est conservatif.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 3: Le théorème fondamental des intégrales curvilignes

Exemple 1: calcul du travail à l'aide du TFIC

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

1. Vérifions si $\vec{F}$ est conservatif :

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x, y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2 + 9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2 + 9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

1. Vérifions si $\vec{F}$ est conservatif :

   1. Les composantes $P(x, y) = (x^3 + 4xy)$ et $Q(x, y) = (2x^2 - y^3)$ du champ sont des polynômes et donc leurs dérivées partielles sont continues dans $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\vec{j}$, $0 \le t \le 4$.

1. Vérifions si $\vec{F}$ est conservatif :

   1. Les composantes $P(x,y) = (x^3 + 4xy)$ et $Q(x,y) = (2x^2 - y^3)$ du champ sont des polynômes et donc leurs dérivées partielles sont continues dans $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe.
   2. On a
   $$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4x = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

1. Vérifions si $\vec{F}$ est conservatif :

   1. Les composantes $P(x,y) = (x^3 + 4xy)$ et $Q(x,y) = (2x^2 - y^3)$ du champ sont des polynômes et donc leurs dérivées partielles sont continues dans $\mathbb{R}^2$, qui est simplement connexe.
   2. On a
   $$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4x = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Par conséquent, $\vec{F}$ est conservatif en vertu du critère pour les champs conservatifs en deux dimensions.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ :

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3+4xy)\,\vec{i} + (2x^2-y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} f_x & = & x^3+4xy & (1) \\ f_y & = & 2x^2-y^3 & (2) \end{array} \right.$$

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3+4xy)\,\vec{i} + (2x^2-y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllr} f_x & = & x^3+4xy & (1) \\ f_y & = & 2x^2-y^3 & (2) \end{array} \right.$$

(1) implique que $f = x^4/4 + 2x^2y + A(y)$, où A est indépendante de x.

intégrer

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} f_x & = & x^3 + 4xy & (1) \\ f_y & = & 2x^2 - y^3 & (2) \end{array} \right.$$

(1) implique que $f = x^4/4 + 2x^2y + A(y)$, où A est indépendante de x.
(2) donne

$$2x^2 - y^3 = f_y = 2x^2 + A_y(y)$$

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} f_x & = & x^3 + 4xy & (1) \\ f_y & = & 2x^2 - y^3 & (2) \end{array} \right.$$

(1) implique que $f = x^4/4 + 2x^2y + A(y)$, où A est indépendante de x.
(2) donne

$$\cancel{2x^2} - y^3 = f_y = \cancel{2x^2} + A_y(y) \Rightarrow A_y(y) = -y^3$$

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_x &= x^3 + 4xy \quad (1) \\ f_y &= 2x^2 - y^3 \quad (2) \end{cases}$$

(1) implique que $f = x^4/4 + 2x^2y + A(y)$, où A est indépendante de x.
(2) donne

$$\cancel{2x^2} - y^3 = f_y = \cancel{2x^2} + A_y(y) \Rightarrow A_y(y) = -y^3 \Rightarrow A(y) = -y^4/4 + B$$

où B est une constante

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x, y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe $C : \vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_x &= x^3 + 4xy \quad (1) \\ f_y &= 2x^2 - y^3 \quad (2) \end{cases}$$

(1) implique que $f = x^4/4 + 2x^2 y + A(y)$, où A est indépendante de x.
(2) donne

$$\cancel{2x^2} - y^3 = f_y = \cancel{2x^2} + A_y(y) \Rightarrow A_y(y) = -y^3 \Rightarrow A(y) = -y^4/4 + B$$

où B est une constante que l'on peut choisir égale à 0.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

2. Trouvons un potentiel pour le champ : $\vec{F} = \nabla f$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_x = x^3 + 4xy & (1) \\ f_y = 2x^2 - y^3 & (2) \end{cases}$$

(1) implique que $f = x^4/4 + 2x^2y + A(y)$, où A est indépendante de x.
(2) donne

$$\cancel{2x^2} - y^3 = f_y = \cancel{2x^2} + A_y(y) \Rightarrow A_y(y) = -y^3 \Rightarrow A(y) = -y^4/4 + B$$

où B est une constante que l'on peut choisir égale à 0.

Un potentiel est $f(x,y) = x^4/4 + 2x^2y - y^4/4$.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

3. Calculons le travail le long de C.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

3. Calculons le travail le long de C.
   - $f(x,y) = x^4/4 + 2x^2y - y^4/4$.

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \le t \le 4$.

3. Calculons le travail le long de C.
   - $f(x,y) = x^4/4 + 2x^2y - y^4/4$.
   - $\vec{r}(0) = 3\,\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{r}(4) = 5\,\vec{i} + \vec{j}$.

extrémité, point initial

extrémité, point final

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

3. Calculons le travail le long de C.
   - $f(x,y) = x^4/4 + 2x^2y - y^4/4$.
   - $\vec{r}(0) = 3\,\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{r}(4) = 5\,\vec{i} + \vec{j}$.
   - Selon le TFIC,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

3. Calculons le travail le long de C.
   - $f(x,y) = x^4/4 + 2x^2y - y^4/4$.
   - $\vec{r}(0) = 3\,\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{r}(4) = 5\,\vec{i} + \vec{j}$.
   - Selon le TFIC,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = f(\vec{r}(4)) - f(\vec{r}(0)) =$$

Exemple 1 : calcul du travail à l'aide du TFIC

Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\,\vec{i} + (2x^2 - y^3)\,\vec{j}$ le long de la courbe C : $\vec{r}(t) = \sqrt{t^2+9}\,\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t^2+9}\right)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 4$.

3. Calculons le travail le long de C.
   - $f(x,y) = x^4/4 + 2x^2y - y^4/4$.
   - $\vec{r}(0) = 3\,\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{r}(4) = 5\,\vec{i} + \vec{j}$.
   - Selon le TFIC,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = f(\vec{r}(4)) - f(\vec{r}(0)) = 206 - 2 = 204.$$

Résumé

- Vérification du critère pour les champ conservatifs en deux dimensions (incluant les hypothèses).

Résumé

- Vérification du critère pour les champ conservatifs en deux dimensions (incluant les hypothèses).
- Calcul d'un potentiel pour le champ.

Résumé

- Vérification du critère pour les champ conservatifs en deux dimensions (incluant les hypothèses).
- Calcul d'un potentiel pour le champ.
- Calcul du travail à l'aide du TFIC.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 3: Le théorème fondamental des intégrales curvilignes

Exemple 2: exemple où le critère pour les champs conservatifs ne s'applique pas

Exemple 2 : contrexemple critère champs conservatifs

On considère le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

1. Si $P(x,y) = -y/(x^2+y^2)$ et $Q(x,y) = x/(x^2+y^2)$ sont les composantes de $\vec{F}$ alors

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ P_y &= \frac{-(x^2+y^2) + y(2y)}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

donc $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ pour le champ $\vec{F}$.

Exemple 2 : contrexemple critère champs conservatifs

On considère le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

2. Calculons maintenant l'intégrale de $\vec{F}$ autour du cercle C de rayon 1 centré à l'origine.

$$C : \vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}, \;\; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\vec{i} + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\vec{j} = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} \\
\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) &= (-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1
\end{aligned}$$

Exemple 2 : contrexemple critère champs conservatifs

On considère le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}.$$

2. Calculons maintenant l'intégrale de $\vec{F}$ autour du cercle C de rayon 1 centré à l'origine.

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0.$$

donc le champ
F n'est pas
conservatif

Exemple 2 : contrexemple critère champs conservatifs

On considère le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

En résumé :

1. $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$, ce qui semble indiquer que $\vec{F}$ est conservatif.
2. L'intégrale de $\vec{F}$ autour de la courbe fermée C est non nulle, ce qui montre que $\vec{F}$ n'est pas conservatif.

Comment réconcilier ces deux constatations ?

Exemple 2 : contrexemple critère champs conservatifs

On considère le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

Comment réconcilier ces deux constatations ?

- Le champ $\vec{F}$ n'est pas défini en $(0,0)$.
- Puisque C entoure l'origine, il n'existe pas de domaine simplement connexe qui contient C et sur lequel les dérivées partielles de $\vec{F}$ sont continues.

  Il y a toujours un « trou » à l'origine.
- Le critère pour les champ conservatifs ne s'applique pas.

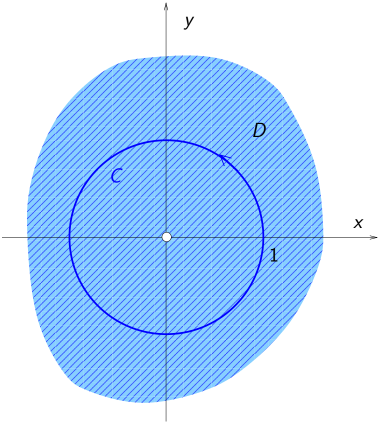
  Donc l'égalité $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ n'implique pas que $\vec{F}$ est conservatif.
- Par conséquent, le premier énoncé ne contredit pas le deuxième.

Exemple 2 : contrexemple critère champs conservatifs

On considère le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

D n'est pas simplement connexe.



Résumé

- Lors de l'application d'un théorème, il faut vérifier que toutes les hypothèses sont satisfaites. Sans, quoi il est possible que la conclusion soit fausse.
- Ici, un calcul direct montre que le champ n'est pas conservatif $\ll$ malgré les apparences $\gg$.