MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 2: Les intégrales curvilignes

Exemple 3: calcul d'une intégrale curviligne par rapport à une variable

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\vec{i} + 2\sin t\vec{j},\;\; 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\vec{i} + 2\sin t\vec{j}, \;\; 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Notation :

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_C P(x,y)\,dx + \int_C Q(x,y)\,dy$$

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}, \;\; 0 \leq t \leq \pi/2.$$

On a $dx = x'(t)\,dt = -2\sin t\,dt$

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}, \;\; 0 \leq t \leq \pi/2.$$

On a $dx = x'(t)\,dt = -2\sin t\,dt$ et $dy = y'(t)\,dt = 2\cos t\,dt$ donc

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}, \;\; 0 \le t \le \pi/2.$$

On a $dx = x'(t)\,dt = -2\sin t\,dt$ et $dy = y'(t)\,dt = 2\cos t\,dt$ donc

$$J = \int_0^{\pi/2} P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt + \int_0^{\pi/2} Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}, \;\; 0 \leq t \leq \pi/2.$$

On a $dx = x'(t)\,dt = -2\sin t\,dt$ et $dy = y'(t)\,dt = 2\cos t\,dt$ donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt + \int_0^{\pi/2} Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t)\,dt + \int_0^{\pi/2} (2\sin t - 2\cos t)(2\cos t)\,dt \end{aligned}$$

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}, \;\; 0 \leq t \leq \pi/2.$$

On a $dx = x'(t)\,dt = -2\sin t\,dt$ et $dy = y'(t)\,dt = 2\cos t\,dt$ donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt + \int_0^{\pi/2} Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t)\,dt + \int_0^{\pi/2} (2\sin t - 2\cos t)(2\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(-4\cos t\sin t - 4\sin^2 t + 4\sin t\cos t - 4\cos^2 t\right)\,dt \end{aligned}$$

Exemple 3 : calcul d'une int. curviligne p/r à une variable

Calculer $J = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ où

$$P(x,y) = x + y \quad Q(x,y) = y - x$$

$$C : \vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}, \;\; 0 \leq t \leq \pi/2.$$

On a $dx = x'(t)\,dt = -2\sin t\,dt$ et $dy = y'(t)\,dt = 2\cos t\,dt$ donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt + \int_0^{\pi/2} Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t)\,dt + \int_0^{\pi/2} (2\sin t - 2\cos t)(2\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(-4\cos t\sin t - 4\sin^2 t + 4\sin t\cos t - 4\cos^2 t\right)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} -4\,dt = -2\pi. \end{aligned}$$

Résumé

- Calcul d'intégrales curvilignes par rapport à x et à y.