MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 2: Les intégrales de surface

Intégrales de surface

Introduction

- Définition d'une intégrale de surface générale.
- Formule de calcul.

Intégrales de surface

Rappel :

- Si S est une surface paramétrée par $\vec{R}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$ alors

$$\text{aire}(S) = \iint_D ||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||\, dA.$$

- $dS = ||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||\, dA$ est un ≪ petit élément d'aire ≫.

On peut écrire

$$\text{aire}(S) = \iint_S \; dS$$

Intégrales de surface

Rappel :

- Si S est une surface paramétrée par $\vec{R}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$ alors

$$\text{aire}(S) = \iint_D ||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||\, dA.$$

- $dS = ||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||\, dA$ est un ≪ petit élément d'aire ≫.

On peut écrire

$$\text{aire}(S) = \iint_S 1\, dS$$

Ceci signifie : intégrale de la fonction constante 1 sur la surface S.

Intégrales de surface

On considère une surface S paramétrée par

$$\vec{R}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

avec $(u,v) \in D$ et une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie dans un voisinage de S.

Définition

L'intégrale (de surface) de f sur S est

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(\vec{R}(u,v))||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||\,dA.$$

Notation : $f(\vec{R}(u,v)) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Résumé

- Définition de l'intégrale de surface d'une fonction comme généralisation de l'intégrale calculant l'aire.
- Cette définition donne une formule de calcul de l'intégrale de surface lorsqu'on a une paramétrisation de cette surface.

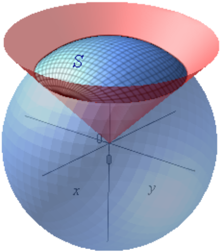
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 2: Les intégrales de surface

Exemple 1: intégrale de surface générale

Exemple 1 : intégrale de surface générale

Calculer l'intégrale de surface $J = \iint_S z^2\, dS$ où S est la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ située au-dessus du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



- L'équation sphérique de la sphère est $\rho = a$ et elle est paramétrée par
  $\vec{R}(\theta, \phi) = a \sin\phi \cos\theta \vec{i} + a \sin\phi \sin\theta \vec{j} + a \cos\phi \vec{k}$
- Les côtés du cône forment un angle de $\pi/4$ avec l'axe des z donc pour S on a $0 \leq \phi \leq \pi/4$.
- De plus, pour S on a aussi $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Exemple 1 : intégrale de surface générale

Calculer l'intégrale de surface $J = \iint_S z^2\, dS$ où S est la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ située au-dessus du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si $\vec{R}(\theta, \phi) = a \sin\phi \cos\theta\, \vec{i} + a \sin\phi \sin\theta\, \vec{j} + a \cos\phi\, \vec{k}$ alors

$$
\begin{aligned}
\vec{R}_\theta &= -a \sin\phi \sin\theta\, \vec{i} + a \sin\phi \cos\theta\, \vec{j} + 0\vec{k} \\
\vec{R}_\phi &= a \cos\phi \cos\theta\, \vec{i} + a \cos\phi \sin\theta\, \vec{j} - a \sin\phi\, \vec{k} \\
\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi &= -a^2 \sin^2\phi \cos\theta\, \vec{i} - a^2 \sin^2\phi \sin\theta\, \vec{j} - a^2 \sin\phi \cos\phi\, \vec{k} \\
||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi|| &= a^2 \sin\phi.
\end{aligned}
$$

Exemple 1 : intégrale de surface générale

Calculer l'intégrale de surface $J = \iint_S z^2\, dS$ où S est la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ située au-dessus du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On a $||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi|| = a^2 \sin\phi$ et $f(\vec{R}(\theta,\phi)) = z(\theta,\phi)^2 = a^2\cos^2\phi$.

On calcule

$$\begin{aligned}
J &= \iint_D f(\vec{R}(\theta,\phi))||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi||\, dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} (a^2\cos^2\phi)(a^2\sin\phi)\, d\phi d\theta \quad (u = \cos\phi, du = -\sin\phi\, d\phi) \\
&= \frac{2}{3}a^4\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right).
\end{aligned}$$

Exemple 1 : intégrale de surface générale

Remarque :

- Il n'y a pas de jacobien dans l'intégrale puisqu'il n'y a eu aucun changement de variable (passage d'un système de coordonnées à un autre).
- L'intégrale a été posée en (θ, ϕ) et évaluée dans ces mêmes variables.

Résumé

- Paramétrisation d'une sphère.
- Calcul d'une intégrale de surface générale.
- Lors du calcul d'une intégrale, un jacobien apparaît seulement si on passe d'un système de coordonnées à un autre.

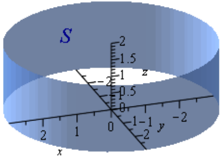
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 2: Les intégrales de surface

Exemple 2: masse d'une plaque mince

Exemple 2 : masse d'une plaque mince

Calculer la masse d'une plaque mince ayant la forme de la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 9$ située entre les plans $z = 0$ et $z = 2$ si la densité est proportionnelle à la distance à l'origine.



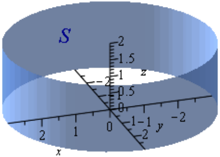
- L'équation cylindrique du cylindre est $r = 3$.
- S est paramétrée par

$$\vec{R}(\theta, z) = 3\cos\theta\ \vec{i} + 3\sin\theta\ \vec{j} + z\,\vec{k}$$

avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 2$.

Exemple 2 : masse d'une plaque mince

Calculer la masse d'une plaque mince ayant la forme de la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 9$ située entre les plans $z = 0$ et $z = 2$ si la densité est proportionnelle à la distance à l'origine.



- L'équation cylindrique du cylindre est $r = 3$.
- S est paramétrée par

$$\vec{R}(\theta, z) = 3\cos\theta\ \vec{i} + 3\sin\theta\ \vec{j} + z\,\vec{k}$$

  avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 2$.
- La densité est $\sigma(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exemple 2 : masse d'une plaque mince

Calculer la masse d'une plaque mince ayant la forme de la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 9$ située entre les plans $z = 0$ et $z = 2$ si la densité est proportionnelle à la distance à l'origine.

- La masse de la plaque est donnée par
$$m = \iint_S \sigma(x, y, z)\, dS.$$
- On calcule
$$\begin{aligned}
\vec{R}_\theta &= -3\sin\theta\ \vec{i} + 3\cos\theta\ \vec{j} + 0\,\vec{k} \\
\vec{R}_z &= 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + \ \vec{k} \\
\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z &= 3\cos\theta\ \vec{i} + 3\sin\theta\ \vec{j} \\
||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z|| &= 3
\end{aligned}$$

Exemple 2 : masse d'une plaque mince

Calculer la masse d'une plaque mince ayant la forme de la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 9$ située entre les plans $z = 0$ et $z = 2$ si la densité est proportionnelle à la distance à l'origine.

On a $||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z|| = 3$ et

$$\sigma(\vec{R}(\theta, z)) = k\sqrt{(3\cos\theta)^2 + (3\sin\theta)^2 + z^2} = k\sqrt{9 + z^2}$$

donc

$$\begin{aligned} m &= \iint_S \sigma(x, y, z)\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sigma(\vec{R}(\theta, z))||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z||\, dzd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 k\sqrt{9 + z^2}\,(3)\, dzd\theta \\ &= 3k\pi\left(2\sqrt{13} + 9\ln(2 + \sqrt{13}) - 9\ln(3)\right) \approx 120.99k \end{aligned}$$

Centre de masse d'une plaque mince

On considère une plaque mince ayant la forme d'une surface S et dont la densité est donnée par $\sigma(x, y, z)$.

Pour cette plaque,

$$\begin{aligned}
m &= \iint_S \sigma(x, y, z)\, dS \\
M_{yz} &= \iint_S x\sigma(x, y, z)\, dS \\
M_{xz} &= \iint_S y\sigma(x, y, z)\, dS \\
M_{xy} &= \iint_S z\sigma(x, y, z)\, dS \\
(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m} \right)
\end{aligned}$$

Résumé

- Paramétrisation d'une surface à l'aide de son équation cylindrique.
- Calcul de la masse d'une plaque mince.
- Moments et centre de masse d'une plaque mince.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 2: Les intégrales de surface

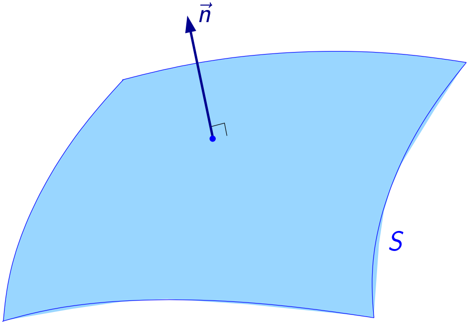
Orientation d'une surface

Introduction

- Vecteur normal à une surface.
- Orientation d'une surface.

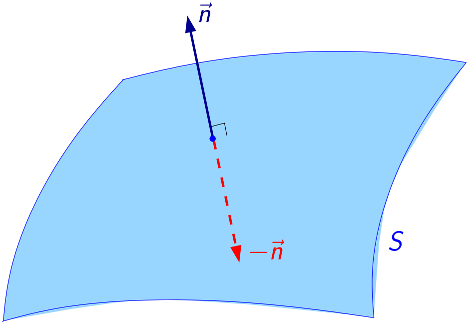
Orientation d'une surface

Un vecteur $\vec{n}$ est *normal* à la surface S en un point donné s'il est perpendiculaire au plan tangent de S en ce point.



Orientation d'une surface

Si S admet un plan tangent en un point alors il existe deux vecteurs normaux unitaires en ce point, qui ont des sens opposés.

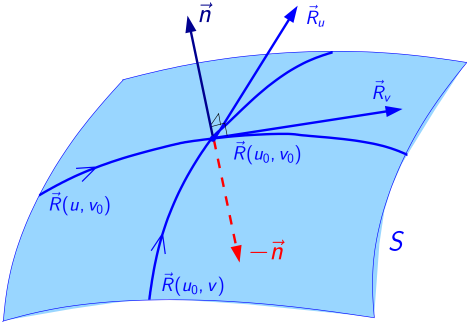


Orientation d'une surface

Si S est paramétrée par $\vec{R}(u, v)$ alors

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}_u(u_0, v_0) \times \vec{R}_v(u_0, v_0)}{||\vec{R}_u(u_0, v_0) \times \vec{R}_v(u_0, v_0)||}$$

est un vecteur unitaire normal à S en $\vec{R}(u_0, v_0)$.

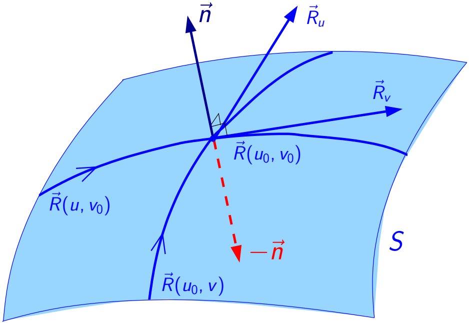


Orientation d'une surface

Si S est paramétrée par $\vec{R}(u, v)$ alors

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}_u \times \vec{R}_v}{||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||}$$

est un vecteur unitaire normal à S.



Orientation d'une surface

Définition

Une surface paramétrée S est *lisse* si $\vec{R}_u \times \vec{R}_v$ existe et est non nul en chaque point de S.

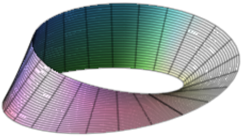
Définition

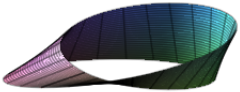
Une surface S est *orientable* s'il est possible de choisir un vecteur normal unitaire $\vec{n}$ en chaque point de S de telle sorte que $\vec{n}$ varie continûment.

- Une surface orientable possède deux orientations, correspondant au choix de $\vec{n}$ ou $-\vec{n}$.
- Une fois que l'orientation a été choisie, la surface est *orientée*.

Orientation d'une surface

Il existe des surfaces *non-orientables*, comme par exemple le ruban de Moebius.





Orientation d'une surface

Définition

Une surface est *fermée* si elle est la frontière d'un solide de volume fini dans l'espace.

- Une surface fermée divise l'espace en deux parties : son *intérieur*, de volume fini, et son *extérieur*.
- L'orientation par défaut d'une surface fermée est donnée par un vecteur normal pointant vers l'extérieur.

Résumé

- Vecteur normal à une surface.
- Calcul du vecteur normal unitaire d'une surface paramétrée.
- Orientation d'une surface.
- Orientation par défaut d'une surface fermée.

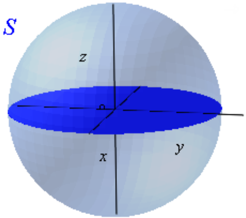
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 2: Les intégrales de surface

Exemple 3: orientation d'une sphère

Exemple 3 : orientation d'une sphère

Donner le vecteur normal unitaire correspondant à l'orientation positive (vers l'extérieur) de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$.



- La sphère est paramétrée par

$$\vec{R}(\theta, \phi) = c \sin\phi \cos\theta \, \vec{i} + c \sin\phi \sin\theta \, \vec{j} + c \cos\phi \, \vec{k}$$

avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

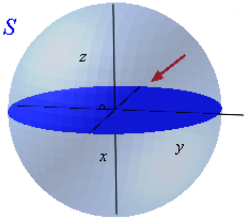
- On calcule

$$\begin{aligned} \vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi &= -c^2 \sin^2\phi \cos\theta \, \vec{i} - c^2 \sin^2\phi \sin\theta \, \vec{j} \\ &\quad -c^2 \sin\phi \cos\phi \, \vec{k} \end{aligned}$$

$$||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi|| = c^2 \sin\phi$$

Exemple 3 : orientation d'une sphère

Donner le vecteur normal unitaire correspondant à l'orientation positive (vers l'extérieur) de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$.



- Le vecteur

$$
\begin{aligned}
-\vec{n} &= \frac{\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi}{||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi||} \\
&= -\sin\phi\cos\theta\,\vec{i} - \sin\phi\sin\theta\,\vec{j} - \cos\phi\,\vec{k}
\end{aligned}
$$

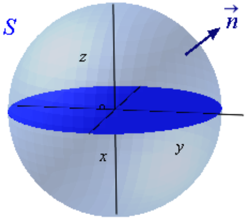
  pointe vers l'intérieur de S.

- Par exemple, au point $\vec{R}(0,0) = c\vec{k}$ (pôle nord), $-\vec{n} = -\vec{k}$.
- Ce vecteur donne l'orientation négative de S.

Exemple 3 : orientation d'une sphère

Donner le vecteur normal unitaire correspondant à l'orientation positive (vers l'extérieur) de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$.

L'orientation positive de S est donnée par le vecteur



$$\begin{aligned}\vec{n} &= -\frac{\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi}{||\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi||} \\ &= \sin\phi\cos\theta\,\vec{i} + \sin\phi\sin\theta\,\vec{j} + \cos\phi\,\vec{k}\end{aligned}$$

Résumé

- Calcul de deux vecteurs normaux pour une sphère.
- Choix du vecteur donnant l'orientation positive de cette surface fermée.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 2: Les intégrales de surface

Flux d'un champ vectoriel à travers une surface

Introduction

- Intégrale de surface d'un champ vectoriel.
- Interprétation de cette intégrale.

Flux à travers une surface

Définition

Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage d'une surface S.
L'intégrale de $\vec{F}$ sur S est

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$

Flux à travers une surface

Définition

Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage d'une surface S. L'intégrale de $\vec{F}$ sur S est

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$

Notation pour désigner l'intégrale de $\vec{F}$ sur S.

Flux à travers une surface

Définition

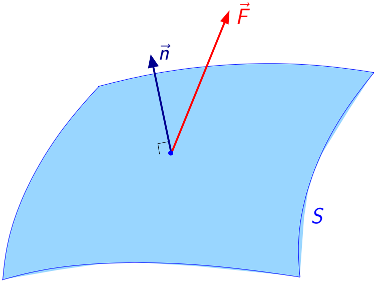
Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage d'une surface S. L'intégrale de $\vec{F}$ sur S est

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$

Fonction scalaire dépendant du point $(x, y, z) \in S$.

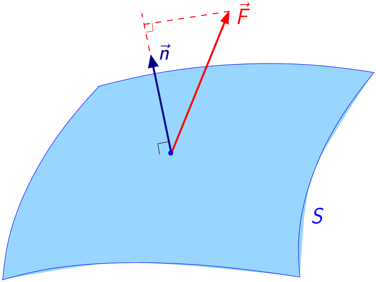
Flux à travers une surface

On considère un champ vectoriel $\vec{F}$ défini dans un voisinage d'une surface S.



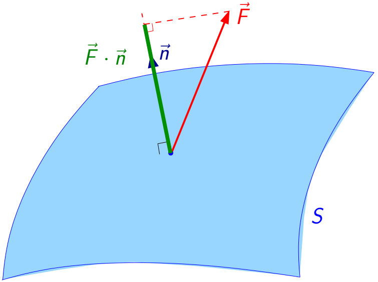
Flux à travers une surface

On considère un champ vectoriel $\vec{F}$ défini dans un voisinage d'une surface S.



Flux à travers une surface

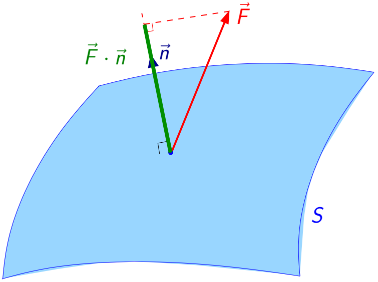
On considère un champ vectoriel $\vec{F}$ défini dans un voisinage d'une surface S.



- $\vec{F} \cdot \vec{n}$ est la composante de $\vec{F}$ normale à S.

Flux à travers une surface

On considère un champ vectoriel $\vec{F}$ défini dans un voisinage d'une surface S.



- $\vec{F} \cdot \vec{n}$ est la composante de $\vec{F}$ normale à S.
- $\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ est la « quantité » de $\vec{F}$ qui passe « à travers » un petit élément d'aire dS.
- $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ est le *flux* de $\vec{F}$ à travers la surface S.

Flux à travers une surface

Formule de calcul

Si S est paramétrée par $\vec{R}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$ alors

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} \quad = \quad \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

Flux à travers une surface

Formule de calcul

Si S est paramétrée par $\vec{R}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$ alors

$$\begin{aligned}
\vec{F} \cdot d\vec{S} &= \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS \\
&= \vec{F}(\vec{R}(u,v)) \cdot \frac{\vec{R}_u \times \vec{R}_v}{||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||} ||\vec{R}_u \times \vec{R}_v||\, dA
\end{aligned}$$

Flux à travers une surface

Formule de calcul

Si S est paramétrée par $\vec{R}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$ alors

$$\begin{aligned}
\vec{F}\cdot d\vec{S} &= \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS \\
&= \vec{F}(\vec{R}(u,v))\cdot\frac{\vec{R}_u\times\vec{R}_v}{\cancel{||\vec{R}_u\times\vec{R}_v||}}\cancel{||\vec{R}_u\times\vec{R}_v||}\,dA \\
&= \vec{F}(\vec{R}(u,v))\cdot\left(\vec{R}_u\times\vec{R}_v\right)\,dA
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{R}(u,v))\cdot\left(\vec{R}_u\times\vec{R}_v\right)\,dA}$$

Flux à travers une surface

Attention à l'orientation :

- La paramétrisation de S choisie ne donne peut-être pas l'orientation correcte (selon le contexte) de S.
- Si le vecteur normal un vecteur normal $\vec{R}_u \times \vec{R}_v$ ne donne pas l'orientation correcte alors on choisit plutôt le vecteur normal $-\left(\vec{R}_u \times \vec{R}_v\right)$ dans la formule de calcul.

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{R}(u,v)) \cdot \pm \left(\vec{R}_u \times \vec{R}_v\right) \, dA$$

Résumé

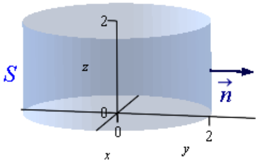
- Définition de l'intégrale de surface d'un champ vectoriel.
- Interprétation de cette intégrale comme un flux.
- Formule de calcul de l'intégrale de flux.
- La formule doit tenir compte de l'orientation de la surface.

MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 2: Les intégrales de surface

Exemple 4: flux à travers un cylindre

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 2$. La surface S est orientée au point $(0, 2, 1)$ par le vecteur normal $\vec{n} = \vec{j}$.

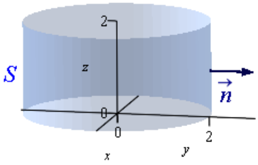


L'équation cylindrique du cylindre est $r = 2$, donc on a

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) &= 2\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) &= 2\sin(\theta) \\ z &= z & \end{aligned}$$

Exemple 4 : flux à travers un cylindre

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 2$. La surface S est orientée au point $(0,2,1)$ par le vecteur normal $\vec{n} = \vec{j}$.



- S est paramétrée par
$$\vec{R}(\theta, z) = 2\cos\theta\,\vec{i} + 2\sin\theta\,\vec{j} + z\vec{k}$$
avec $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le z \le 2$.

- On calcule
$$\begin{aligned}
\vec{R}_\theta &= -2\sin\theta\,\vec{i} + 2\cos\theta\,\vec{j} + 0\vec{k} \\
\vec{R}_z &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k} \\
\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z &= 2\cos\theta\,\vec{i} + 2\sin\theta\,\vec{j}
\end{aligned}$$

- En $(0,2,1)$, $\theta = \pi/2$, $z = 1$ et $\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z = 2\vec{j}$, qui donne l'orientation correcte de S.

Exemple 4 : flux à travers un cylindre

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 2$. La surface S est orientée au point $(0,2,1)$ par le vecteur normal $\vec{n} = \vec{j}$.

On a

$$\begin{aligned}
\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z &= 2\cos\theta\,\vec{i} + 2\sin\theta\,\vec{j} \\
\vec{F}(\vec{R}(\theta,z)) &= 2z\cos\theta\vec{i} + 2z\sin\theta\vec{j} + z^2\vec{k} \\
\vec{F}(\vec{R}(\theta,z)) \cdot \left(\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z\right) &= 4z\cos^2\theta + 4z\sin^2\theta \\
&= 4z.
\end{aligned}$$

Exemple 4 : flux à travers un cylindre

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ à travers la partie S du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 2$. La surface S est orientée au point $(0, 2, 1)$ par le vecteur normal $\vec{n} = \vec{j}$.

Le flux est

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{R}(\theta, z)) \cdot \left(\vec{R}_\theta \times \vec{R}_z\right) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 4z \, dz d\theta \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

Résumé

- Calcul du flux d'un champ vectoriel à travers une surface.

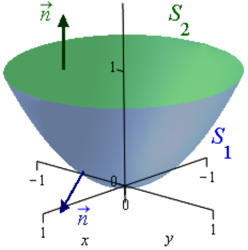
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 2: Les intégrales de surface

Exemple 5: flux à travers une surface fermée

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

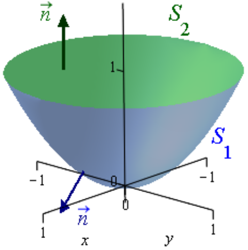


- $S = S_1 \cup S_2$ est constituée de deux morceaux.
- S fermée $\Rightarrow$ l'orientation par défaut (positive) est donnée par un vecteur normal pointant vers l'extérieur.
- Le flux est

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

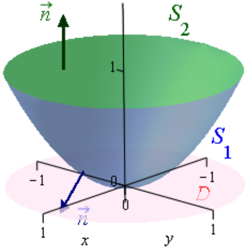


- Intersection des surfaces :

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.



- Intersection des surfaces :

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

- La projection de S_1 et de S_2 dans le plan des (x,y) est le disque $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

1) Flux à travers S_1

S_1 est paramétrée par $\vec{R}^1(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (x^2+y^2)\vec{k}$, $(x,y) \in D$.

On calcule

$$\begin{aligned} \vec{R}^1_x &= \vec{i} + 2x\vec{k} \\ \vec{R}^1_y &= \vec{j} + 2y\vec{k} \\ \vec{R}^1_x \times \vec{R}^1_y &= -2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

Ce vecteur point ≪ vers le haut ≫ et donne l'orientation incorrecte de S.

On choisit plutôt $-\left(\vec{R}^1_x \times \vec{R}^1_y\right) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}$ dans la formule de calcul.

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

1) Flux à travers S_1

On a

$$\begin{aligned} -\left(\vec{R}^1_x \times \vec{R}^1_y\right) &= 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{F}(\vec{R}^1(x, y)) &= x\vec{i} + 2y\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k} \\ \vec{F}(\vec{R}^1(x, y)) \cdot \left(-\vec{R}^1_x \times \vec{R}^1_y\right) &= 3x^2 + 5y^2. \end{aligned}$$

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

1) Flux à travers S_1

Le flux est

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{R}^1(x,y)) \cdot \left(-\vec{R}^1_x \times \vec{R}^1_y\right) \, dA \\
&= \iint_D (3x^2 + 5y^2) \, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3r^2 \cos^2\theta + 5r^2 \sin^2\theta) r \, dr d\theta \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

2) Flux à travers S_2

S_2 est paramétrée par $\vec{R}^2(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + 1\vec{k}$, $(x,y) \in D$.

On calcule

$$\begin{aligned} \vec{R}^2_x &= \vec{i} \\ \vec{R}^2_y &= \vec{j} \\ \vec{R}^2_x \times \vec{R}^2_y &= \vec{k} \end{aligned}$$

Ce vecteur point ≪ vers le haut ≫ et donne l'orientation correcte de S.

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

2) Flux à travers S_2

Le flux est

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{R}^2(x,y)) \cdot \left(\vec{R}^2_x \times \vec{R}^2_y\right) \, dA \\
&= \iint_D \left(x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}\right) \cdot \vec{k} \, dA \\
&= \iint_D -1 \, dA \\
&= -\text{aire}(D) = -\pi.
\end{aligned}$$

Exemple 5 : flux à travers une surface fermée

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ à travers la surface S du solide borné par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

Le flux total à travers S est

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{dS} = 2\pi + (-\pi) = \pi.$$

Résumé

- Flux à travers une surface fermée constituée de deux morceaux.
- Paramétrisation et orientation de chacun des morceaux.
- Calcul du flux à travers chaque morceau et calcul du flux total.