MTH1102D Calcul II

Chapitre 8, section 2 : Les dérivées et les intégrales des fonctions vectorielles

Vecteurs de base en coordonnées sphériques

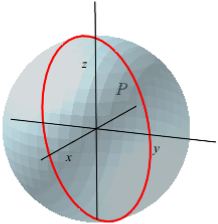
Introduction

- Repère orthonormal associé aux coordonnées sphériques.

Vecteurs de base en coordonnées sphériques (1)

Considérons

- un point P dont les coordonnées sphériques sont $(\rho_0, \theta_0, \phi_0)$
- la courbe C passant par P et paramétrée par

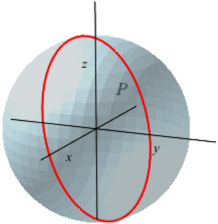


$$\vec{r}(t) = \rho_0 \sin(t) \cos(\theta_0)\, \vec{i} + \rho_0 \sin(t) \sin(\theta_0)\, \vec{j} + \rho_0 \cos(t)\, \vec{k}.$$

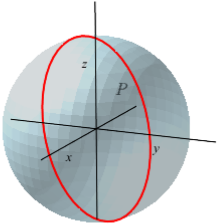
Vecteurs de base en coordonnées sphériques (2)

Repère de Serret-Frenet associé à la courbe C :

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= \rho_0 \cos(t) \cos(\theta_0)\, \vec{i} + \rho_0 \cos(t) \sin(\theta_0)\, \vec{j} \\ &\quad - \rho_0 \sin(t)\, \vec{k}\end{aligned}$$



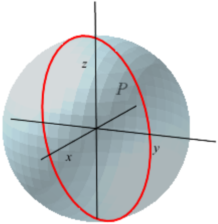
Repère de Serret-Frenet associé à la courbe C :



$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \rho_0 \cos(t) \cos(\theta_0)\, \vec{i} + \rho \cos(t) \sin(\theta_0)\, \vec{j} \\
&\quad - \rho_0 \sin(t)\, \vec{k} \\
\vec{T}(t) &= \cos(t) \cos(\theta_0)\, \vec{i} + \cos(t) \sin(\theta_0)\, \vec{j} \\
&\quad - \sin(t)\, \vec{k}
\end{aligned}
$$

Vecteurs de base en coordonnées sphériques (2)

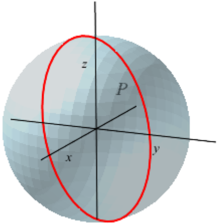
Repère de Serret-Frenet associé à la courbe C :



$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \rho_0 \cos(t)\cos(\theta_0)\,\vec{i} + \rho\cos(t)\sin(\theta_0)\,\vec{j} \\
&\quad -\rho_0 \sin(t)\,\vec{k} \\
\vec{T}(t) &= \cos(t)\cos(\theta_0)\,\vec{i} + \cos(t)\sin(\theta_0)\,\vec{j} \\
&\quad -\sin(t)\,\vec{k} \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{||\vec{T}'(t)||} = -\sin(t)\cos(\theta_0)\,\vec{i} - \sin(t)\sin(\theta_0)\,\vec{j} - \cos(t)\,\vec{k}
\end{aligned}
$$

Vecteurs de base en coordonnées sphériques (2)

Repère de Serret-Frenet associé à la courbe C :



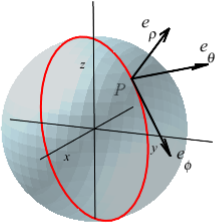
$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \rho_0 \cos(t)\cos(\theta_0)\,\vec{i} + \rho\cos(t)\sin(\theta_0)\,\vec{j} \\
&\quad -\rho_0 \sin(t)\,\vec{k} \\
\vec{T}(t) &= \cos(t)\cos(\theta_0)\,\vec{i} + \cos(t)\sin(\theta_0)\,\vec{j} \\
&\quad -\sin(t)\,\vec{k} \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{||\vec{T}'(t)||} = -\sin(t)\cos(\theta_0)\,\vec{i} - \sin(t)\sin(\theta_0)\,\vec{j} - \cos(t)\,\vec{k} \\
\vec{B}(t) &= \vec{T}(t)\times\vec{N}(t) = -\sin(\theta_0)\,\vec{i} + \cos(\theta_0)\,\vec{j}
\end{aligned}
$$

Vecteurs de base en coordonnées sphériques (3)

On réordonne les vecteurs, en changeant le signe de $\vec{N}$ pour préserver l'orientation positive.

On obtient les vecteurs de base en coordonnées sphériques :

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{e}_\rho = \sin(\phi)\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\phi)\sin(\theta)\vec{j} + \cos(\phi)\vec{k} \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\phi = \cos(\phi)\cos(\theta)\vec{i} + \cos(\phi)\sin(\theta)\vec{j} - \sin(\phi)\vec{k}\end{gathered}}$$



Expressions des vecteurs de base cartésiens

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \sin(\phi)\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\phi)\sin(\theta)\vec{j} + \cos(\phi)\vec{k} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\phi &= \cos(\phi)\cos(\theta)\vec{i} + \cos(\phi)\sin(\theta)\vec{j} - \sin(\phi)\vec{k} \end{aligned}}$$

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ s'expriment comme suit dans la base $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{i} &= \sin(\phi)\cos(\theta)\vec{e}_\rho - \sin(\theta)\vec{e}_\theta + \cos(\phi)\cos(\theta)\vec{e}_\phi \\ \vec{j} &= \sin(\phi)\sin(\theta)\vec{e}_\rho + \cos(\theta)\vec{e}_\theta + \cos(\phi)\sin(\theta)\vec{e}_\phi \\ \vec{k} &= \cos(\phi)\vec{e}_\rho - \sin(\phi)\vec{e}_\phi \end{aligned}}$$

Résumé

- Vecteurs de base en coordonnées sphériques.
- Vecteurs de base cartésiens en fonction des vecteurs en coordonnées sphériques.