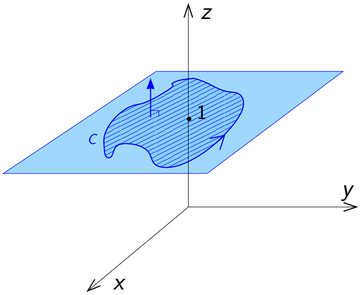
MTH1102D Calcul II

Chapitre 10, section 4: Le théorème de Stokes

Exemple 3: Utilisation du théorème de Stokes

Exemple 3 : Utilisation du théorème de Stokes

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = (e^x + z)\vec{i} + (e^y + 2x)\vec{j} + (e^z + xy)\vec{k}$ et C une courbe fermée située dans le plan $z = 1$. Montrez que la circulation de $\vec{F}$ autour de C ne dépend que de l'aire de la partie du plan délimitée par C, et non de la courbe elle-même.



- La *circulation* d'un champ $\vec{F}$ autour d'une courbe fermée C est simplement

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}.$$

- Choisissons d'orienter C dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.
- Soit S la partie du plan délimitée par C, orientée vers le haut ($\vec{n} = \vec{k}$).

Exemple 3 : Utilisation du théorème de Stokes

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = (e^x + z)\vec{i} + (e^y + 2x)\vec{j} + (e^z + xy)\vec{k}$ et C une courbe fermée située dans le plan $z = 1$. Montrez que la circulation de $\vec{F}$ autour de C ne dépend que de l'aire de la partie du plan délimitée par C, et non de la courbe elle-même.

On calcule : $\text{rot}\,\vec{F} = x\vec{i} + (1 - y)\vec{j} + 2\vec{k}$

Selon le théorème de Stokes,

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS \\
&= \iint_S (x\vec{i} + (1 - y)\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot \vec{k}\, dS \\
&= \iint_S 2\, dS = 2\ \text{aire}(S).
\end{aligned}$$

La circulation dépend seulement de l'aire délimitée par C.

Résumé

- Utilisation du théorème de Stokes pour démontrer une propriété d'un champ vectoriel donné.
- Calcul de l'intégrale de surface sans passer par une paramétrisation.