MTH1102D Calcul II

Chapitre 6, section 1: Les intégrales doubles sur des rectangles

Définition

Introduction

- Définition de l'intégrale double sur un rectangle.
- Interprétation géométrique.

Intégrale double sur un rectangle

Définition

Un *rectangle* est une région du plan de la forme

$$R = [a, b] \times [c, d] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\right\}.$$

rectangle1.pdf

Intégrale double sur un rectangle

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie et bornée sur $R = [a, b] \times [c, d]$.

Intégrale double sur un rectangle

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie et bornée sur $R = [a, b] \times [c, d]$

- On subdivise $[a, b]$ et $[c, d]$:
  $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
  $c < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d$

rectangle2.pdf

Intégrale double sur un rectangle

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie et bornée sur $R = [a, b] \times [c, d]$

- On subdivise $[a, b]$ et $[c, d]$:
  $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
  $c < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d$

- Ceci donne $n \times m$ sous-rectangles : $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

rectangle3.pdf

Intégrale double sur un rectangle

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie et bornée sur $R = [a, b] \times [c, d]$

- On subdivise $[a, b]$ et $[c, d]$:
  $$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$
  $$c < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d$$

- Ceci donne $n \times m$ sous-rectangles : $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

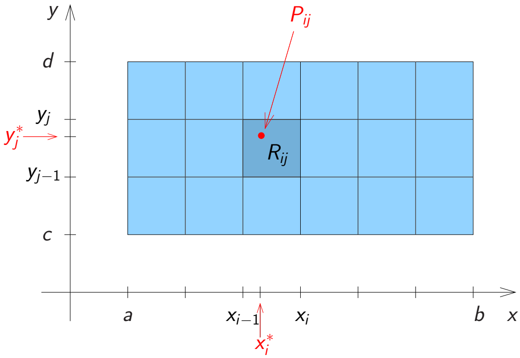
rectangle3.pdf

- On pose
  $$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$
  $$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$
  $$\Delta A_{ij} = \text{aire}(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$$

Intégrale double sur un rectangle

Soit $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie et bornée sur $R = [a, b] \times [c, d]$

- On choisit $P_{ij} = (x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$.

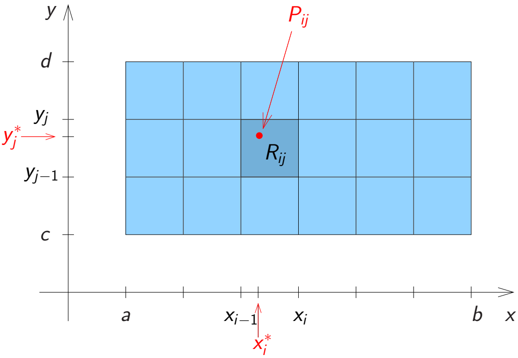


Intégrale double sur un rectangle

Soit $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie et bornée sur $R = [a, b] \times [c, d]$

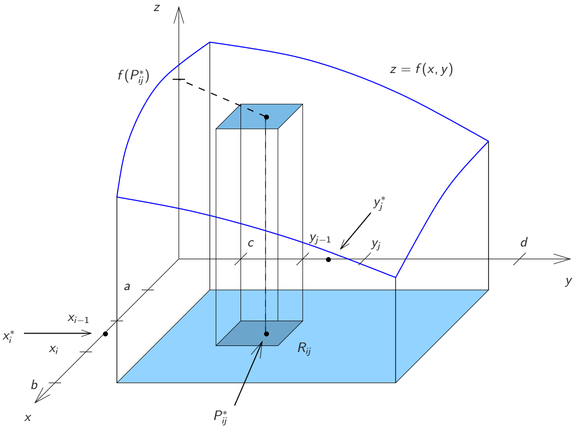
- On choisit $P_{ij} = (x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$.
- On forme la *double somme de Riemann*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta A_{ij}.$$



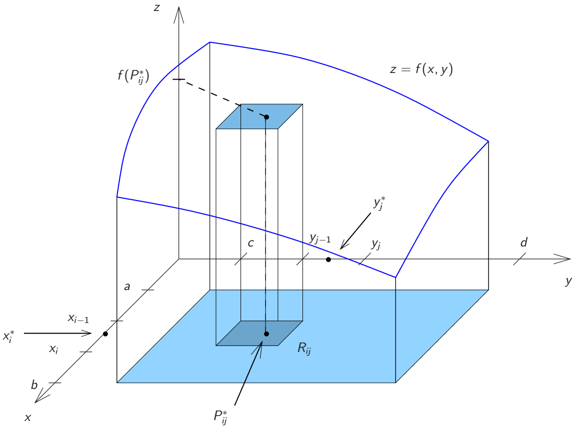
Intégrale double sur un rectangle

Si $f(x,y) \geq 0$ sur D, la double somme de Riemann est le volume des parallélippipèdes de bases R_{ij} et hauteurs $f(x_i^*, y_j^*)$.



Intégrale double sur un rectangle

Si $f(x, y) \geq 0$ sur D, la double somme de Riemann est le volume des parallélippipèdes de bases R_{ij} et hauteurs $f(x_i^*, y_j^*)$.



Cette somme approxime le volume sous la surface $z = f(x, y)$.

Intégrale double sur un rectangle

On suppose les Δx_i égaux et les Δy_j égaux.

Intégrale double sur un rectangle

On suppose les Δx_i égaux et les Δy_j égaux.

$m, n \to \infty$ implique $\Delta A_{ij} \to 0$.

Intégrale double sur un rectangle

On suppose les Δx_i égaux et les Δy_j égaux.

$m, n \to \infty$ implique $\Delta A_{ij} \to 0$.

Définition

L'*intégrale double de f sur R* est

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{n,m \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta A_{ij}$$

si la limite existe.

Intégrale double sur un rectangle

On suppose les Δx_i égaux et les Δy_j égaux.

$m, n \to \infty$ implique $\Delta A_{ij} \to 0$.

Définition

L'*intégrale double de f sur R* est

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\,\Delta A_{ij}$$

si la limite existe.

- Si l'intégrale de f sur R existe, on dit que f est *intégrable* sur le rectangle.

Intégrale double sur un rectangle

On suppose les Δx_i égaux et les Δy_j égaux.

$m, n \to \infty$ implique $\Delta A_{ij} \to 0$.

Définition

L'*intégrale double de f sur R* est

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta A_{ij}$$

si la limite existe.

- Si l'intégrale de f sur R existe, on dit que f est *intégrable* sur le rectangle.
- Le symbole dA dans l'intégrale s'interprète comme un *petit élément d'aire*.

Remarques :

1. Si f est *positive* sur R, l'intégrale donne le volume sous la surface $z = f(x, y)$ au-dessus de R.

Intégrale double sur un rectangle

Remarques :

1. Si f est *positive* sur R, l'intégrale donne le volume sous la surface $z = f(x, y)$ au-dessus de R.
2. L'intégrale double est un nombre réel positif,

Intégrale double sur un rectangle

Remarques :

1. Si f est *positive* sur R, l'intégrale donne le volume sous la surface $z = f(x, y)$ au-dessus de R.
2. L'intégrale double est un nombre réel positif, négatif ou

Remarques :

1. Si f est *positive* sur R, l'intégrale donne le volume sous la surface $z = f(x, y)$ au-dessus de R.
2. L'intégrale double est un nombre réel positif, négatif ou nul.

Remarques :

1. Si f est *positive* sur R, l'intégrale donne le volume sous la surface $z = f(x, y)$ au-dessus de R.
2. L'intégrale double est un nombre réel positif, négatif ou nul. Ça n'est *pas* toujours un volume.

Intégrale double sur un rectangle

Remarques :

1. Si f est *positive* sur R, l'intégrale donne le volume sous la surface $z = f(x, y)$ au-dessus de R.
2. L'intégrale double est un nombre réel positif, négatif ou nul. Ça n'est *pas* toujours un volume.

Remarques :

3. Si f est continue sur R alors $\iint_R f(x, y)\, dA$ existe.

Intégrale double sur un rectangle

Remarques :

3. Si f est continue sur R alors $\iint_R f(x, y)\, dA$ existe.

   Cependant, une fonction intégrable n'est pas nécessairement continue.

Remarques :

3. Si f est continue sur R alors $\iint_R f(x,y)\, dA$ existe.

   Cependant, une fonction intégrable n'est pas nécessairement continue.

   Par exemple, une fonction *continue par morceaux* est intégrable.

Remarques :

3. Si f est continue sur R alors $\iint_R f(x,y)\,dA$ existe.

   Cependant, une fonction intégrable n'est pas nécessairement continue.

   Par exemple, une fonction *continue par morceaux* est intégrable.
4. Il faut que la limite :

   existe pour toutes les subdivisions possibles de R telles que $\Delta A_{ij} \to 0$

Remarques :

3. Si f est continue sur R alors $\iint_R f(x,y)\,dA$ existe.

   Cependant, une fonction intégrable n'est pas nécessairement continue.

   Par exemple, une fonction *continue par morceaux* est intégrable.
4. Il faut que la limite :

   existe pour toutes les subdivisions possibles de R telles que $\Delta A_{ij} \to 0$
   soit indépendante des subdivisions et du choix des P_{ij}.

Résumé

- La construction de l'intégrale double est semblable à celle de l'intégrale simple, mais en deux variables et deux dimensions plutôt qu'une seule.

Résumé

- La construction de l'intégrale double est semblable à celle de l'intégrale simple, mais en deux variables et deux dimensions plutôt qu'une seule.
- Si la fonction est positive, l'intégrale double peut s'interpréter comme un volume.