MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 2: Les intégrales curvilignes

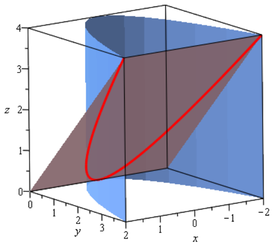
Exemple 2: calcul d'une intégrale curviligne en trois dimensions

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

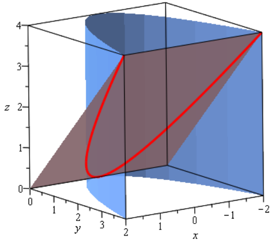
Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z \, ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

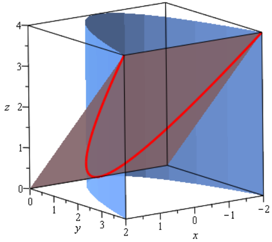
Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

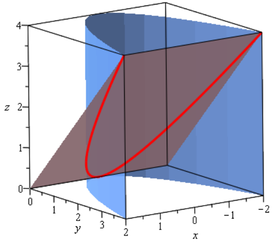
Calculer $J = \displaystyle\int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
- C est sur le plan donc $z(t) = y(t) = t^2$.

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

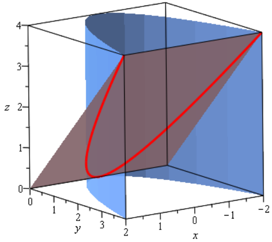


- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
- C est sur le plan donc $z(t) = y(t) = t^2$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



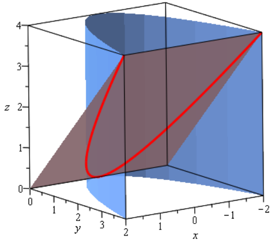
- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
- C est sur le plan donc $z(t) = y(t) = t^2$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}$$

- Bornes sur t :

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
- C est sur le plan donc $z(t) = y(t) = t^2$.

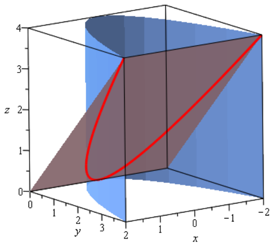
$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}$$

- Bornes sur t :

$$\vec{r}(t) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
- C est sur le plan donc $z(t) = y(t) = t^2$.

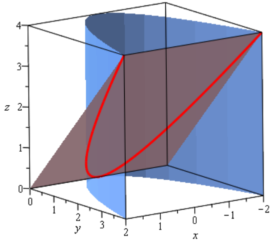
$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}$$

- Bornes sur t :

$$\vec{r}(t) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow t = -2$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
- C est sur le plan donc $z(t) = y(t) = t^2$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}$$

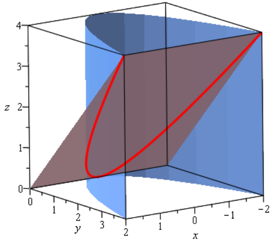
- Bornes sur t :

$$\vec{r}(t) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow t = -2$$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\, ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.



- Projection de C dans le plan des (x, y) est $y = x^2$, paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
- C est sur le plan donc $z(t) = y(t) = t^2$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}$$

- Bornes sur t :

$$\vec{r}(t) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow t = -2$$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow t = 2$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}, \ \ -2 \leq t \leq 2.$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \displaystyle\int_C z\, ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}, \ \ -2 \leq t \leq 2.$$

$$\vec{r}'(t) \ = \ \vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k}$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}, \;\; -2 \leq t \leq 2.$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k} \\ ||\vec{r}'(t)|| &= \sqrt{1 + 8t^2} \end{aligned}$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}, \;\; -2 \leq t \leq 2.$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k} \\ ||\vec{r}'(t)|| &= \sqrt{1 + 8t^2} \\ f(\vec{r}(t)) &= z(t) = t^2 \end{aligned}$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}, \;\; -2 \leq t \leq 2.$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k} \\ ||\vec{r}'(t)|| &= \sqrt{1+8t^2} \\ f(\vec{r}(t)) &= z(t) = t^2 \end{aligned}$$

$$J = \int_{-2}^{2} t^2\sqrt{1+8t^2}\,dt$$

Exemple 2 : intégrale curviligne en trois dimensions

Calculer $J = \displaystyle\int_C z\,ds$ où C est la partie de la courbe d'intersection du cylindre $y = x^2$ et du plan $z = y$ allant de $(-2, 4, 4)$ à $(2, 4, 4)$.

$$C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2\vec{k}, \quad -2 \leq t \leq 2.$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k} \\ ||\vec{r}'(t)|| &= \sqrt{1 + 8t^2} \\ f(\vec{r}(t)) &= z(t) = t^2 \end{aligned}$$

$$J = \int_{-2}^{2} t^2 \sqrt{1 + 8t^2}\,dt = \frac{65}{16}\sqrt{33} + \frac{\sqrt{12}}{256} \ln\left(\frac{-4\sqrt{2} + \sqrt{33}}{4\sqrt{2} + \sqrt{33}}\right)$$

Résumé

- Paramétrisation de la courbe d'intersection de deux surfaces.

Résumé

- Paramétrisation de la courbe d'intersection de deux surfaces.
- Calcul d'une intégrale curviligne en trois dimensions.