MTH1102D Calcul II

Chapitre 6, section 2 : Les intégrales doubles sur des domaines généraux

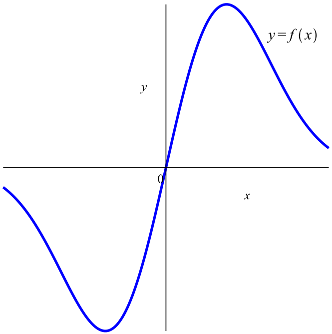
Exemple 6 : utiliser la symétrie

Exemple 6 : utiliser la symétrie

Rappels

- Une fonction f est *impaire* si $f(-x) = -f(x)$.

  Par exemple, $f(x) = \sin(x)$ est impaire car $\sin(-x) = -\sin(x)$.



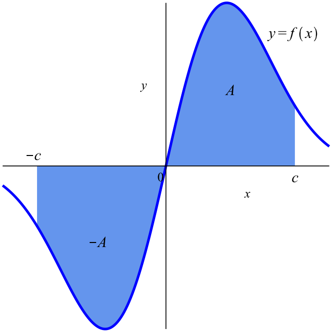
Symétrie par rapport à l'origine

Exemple 6 : utiliser la symétrie

Rappels

- Une fonction f est *impaire* si $f(-x) = -f(x)$.

- Si f est impaire alors $\int_{-c}^{c} f(x)\, dx = 0$.



Exemple 6 : utiliser la symétrie

Évaluer $\int_{-2}^{2} \int_{0}^{1} x^3 \cos(x^2 y^2)\, dydx$.

Domaine d'intégration : rectangle $R = [-2, 2] \times [0, 1]$.

La fonction $f(x, y) = x^3 \cos(x^2 y^2)$ est impaire en x car

$$f(-x, y) = (-x)^3 \cos((-x)^2 y^2) = -x^3 \cos(x^2 y^2) = -f(x, y).$$

Donc

$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{1} x^3 \cos(x^2 y^2)\, dydx = \int_{0}^{1} \int_{-2}^{2} x^3 \cos(x^2 y^2)\, dxdy$$

Exemple 6 : utiliser la symétrie

Évaluer $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{1} x^3\cos(x^2y^2)\,dydx$.

Domaine d'intégration : rectangle $R = [-2,2]\times[0,1]$.

La fonction $f(x,y) = x^3\cos(x^2y^2)$ est impaire en x car

$$f(-x,y) = (-x)^3\cos((-x)^2y^2) = -x^3\cos(x^2y^2) = -f(x,y).$$

Donc

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{1} x^3\cos(x^2y^2)\,dydx = \int_{0}^{1}\int_{-2}^{2} x^3\cos(x^2y^2)\,dxdy$$

Exemple 6 : utiliser la symétrie

Évaluer $\int_{-2}^{2} \int_{0}^{1} x^3 \cos(x^2 y^2)\, dydx$.

Domaine d'intégration : rectangle $R = [-2, 2] \times [0, 1]$.

La fonction $f(x, y) = x^3 \cos(x^2 y^2)$ est impaire en x car

$$f(-x, y) = (-x)^3 \cos((-x)^2 y^2) = -x^3 \cos(x^2 y^2) = -f(x, y).$$

Donc

$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{1} x^3 \cos(x^2 y^2)\, dydx = \int_{0}^{1} \int_{-2}^{2} x^3 \cos(x^2 y^2)\, dxdy = \int_{0}^{1} 0\, dy = 0.$$

Résumé

- Si $f(x,y)$ est impaire en x et D est symétrique par rapport à x alors $\iint_D f(x,y)\,dA = 0$.

- Si $f(x,y)$ est impaire en y et D est symétrique par rapport à y alors $\iint_D f(x,y)\,dA = 0$.