MTH1102D Calcul II

Chapitre 6, section 5 : Les applications des intégrales doubles

Applications géométriques et masse d'une plaque mince

Introduction

- Applications géométriques.
- Masse d'une plaque mince.

Aire et volume

Aire et volume

1. Si D est une région du plan délimitée par un nombre fini de courbes définies par des fonctions continues alors

$$\text{aire}(D) = \iint_D dA.$$

2. Soit E la région de l'espace située au-dessus d'un domaine D et comprise entre les surfaces $z = h_1(x, y)$ et $z = h_2(x, y)$, où h_1, h_2 sont des fonction continues. Alors

$$\text{vol}(E) = \iint_D [h_2(x, y) - h_1(x, y)]\, dA.$$

Masse d'une plaque mince

Une *plaque mince* est un objet physique dont l'épaisseur est négligeable et qui est représentée par une région du plan (en deux dimensions).

La dimension pertinente dans le cas d'une plaque mince est son aire.

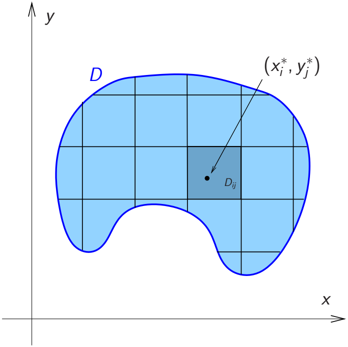
Une plaque mince est constituée d'un matériau de densité qui n'est pas nécessairement constante. En chaque point, la densité est donnée par une fonction $\rho(x, y)$.

Masse d'une plaque mince

On considère une plaque mince occupant une région D du plan et dont la densité est donnée par $\rho(x, y)$.

- On subdivise D en $n \times p$ sous-domaines D_{ij} d'aire ΔA_{ij}.
- Si D_{ij} est petit, la densité est approximativement constante et sa masse est
$$m_{ij} \approx \rho(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij}.$$
- La masse totale de la plaque est

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \rho(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij}.$$



Masse d'une plaque mince

On a

$$m = \lim_{p,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \rho(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij} = \iint_D \rho(x, y)\, dA.$$

Théorème

La masse d'une plaque mince occupant une région D du plan et dont la densité est donnée en chaque point par $\rho(x, y)$ est

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA.$$

Résumé

- Rappel des applications géométriques de l'intégrale double : aire et volume.
- Concept de plaque mince.
- Masse d'une plaque mince de densité non constante.