MTH1102D Calcul II

Chapitre 7, section 2: Les coordonnées cylindriques et sphériques

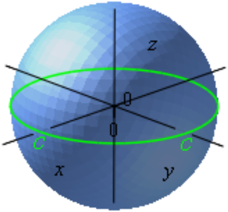
Exemple 2: surfaces en coordonnées sphériques

Exemple 2 : surfaces en coordonnées sphériques

1. Identifier la surface S dont l'équation sphérique est $\rho = c$, où c est une constante positive.

Géométriquement :

- S est l'ensemble des points de l'espace dont la distance à l'origine est constante et égale à c.
- S est donc une sphère de rayon c centrée à l'origine.

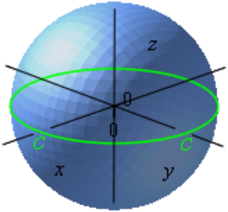


Exemple 2 : surfaces en coordonnées sphériques

1. Identifier la surface S dont l'équation sphérique est $\rho = c$, où c est une constante positive.

Algébriquement :

$$\rho = c$$

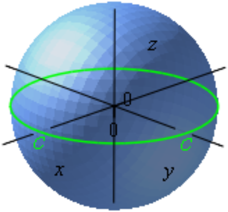


Exemple 2 : surfaces en coordonnées sphériques

1. Identifier la surface S dont l'équation sphérique est $\rho = c$, où c est une constante positive.

Algébriquement :

$$\begin{aligned} & \rho = c \\ \Leftrightarrow \quad & \rho^2 = c^2 \end{aligned}$$

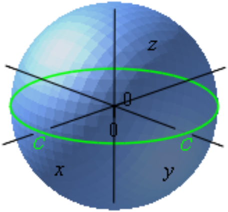


Exemple 2 : surfaces en coordonnées sphériques

1. Identifier la surface S dont l'équation sphérique est $\rho = c$, où c est une constante positive.

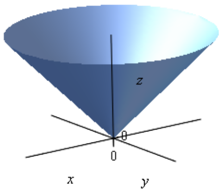
Algébriquement :

$$\begin{aligned} & \rho = c \\ \Leftrightarrow \quad & \rho^2 = c^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \end{aligned}$$



Exemple 2 : surfaces en coordonnées sphériques

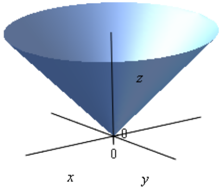
2. Trouver l'équation sphérique du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



$$
\begin{aligned}
& z = \sqrt{x^2 + y^2} \\
\Leftrightarrow\quad & z^2 = x^2 + y^2 \ \ (\text{et } z \geq 0) \\
\Leftrightarrow\quad & \rho^2 \cos^2 \phi = \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta \\
\Leftrightarrow\quad & \rho^2 \cos^2 \phi = \rho^2 \sin^2 \phi \\
\Leftrightarrow\quad & \rho = 0 \text{ ou } \ \cos^2 \phi = \sin^2 \phi \\
\Leftrightarrow\quad & \rho = 0 \text{ ou } \ \cos \phi = \pm \sin \phi \\
\Leftrightarrow\quad & \rho = 0 \text{ ou } \ \tan \phi = \pm 1.
\end{aligned}
$$

Exemple 2 : surfaces en coordonnées sphériques

2. Trouver l'équation sphérique du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



$$\rho = 0 \text{ ou } \tan\phi = \pm 1$$

$$\text{Or } z \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \phi \leq \pi/2$$

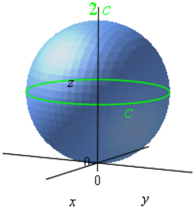
$$\text{donc } \tan\phi = +1 \text{ et } \phi = \pi/4$$

Équation sphérique : $\phi = \pi/4$

$\rho = 0$ correspond à l'origine, qui est déjà incluse dans cette équation.

Exemple 2 : surfaces en coordonnées sphériques

3. Trouver l'équation sphérique de la sphère de rayon c centrée en $(0, 0, c)$.



Équation cartésienne : $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = c^2$

$$\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + (\rho\cos\phi - c)^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 \sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi - 2c\rho\cos\phi + c^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 = 2c\rho\cos\phi$$

$$\Leftrightarrow \rho = 0 \text{ ou } \rho = 2c\cos\phi.$$

Équation sphérique : $\rho = 2c\cos\phi$ avec $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

$\rho = 0$ correspond à l'origine, déjà incluse.

Résumé

- Identifier une surface sphérique en trouvant son équation cartésienne.
- Trouver l'équation sphérique d'une surface dont l'équation cartésienne est donnée.