MTH1102D Calcul II

Chapitre 8, section 2: Les dérivées et les intégrales des fonctions vectorielles

Dérivées et intégrales des fonctions vectorielles

Introduction

- Dérivées des fonctions vectorielles
- Formules de dérivation.
- Intégrales des fonctions vectorielles.

Dérivées et intégrales des fonctions vectorielles

Définition

Soit la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ (en 2 ou 3 dimensions) et t_0 un point de son domaine. La *dérivée* de $\vec{r}$ en t_0 est

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$

si cette limite existe.

Dérivées et intégrales des fonctions vectorielles

Théorème

Si $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ alors la dérivée de $\vec{r}$ en t est

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Autrement dit, la dérivée est obtenue en dérivant composante à composante.

Cette formule est aussi valable pour une fonction en deux dimensions (en posant $z(t) \equiv 0$).

Dérivées et intégrales des fonctions vectorielles

Preuve du théorème en deux dimensions :

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[x(t+h)\vec{i}+y(t+h)\vec{j}]-[x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[x(t+h)-x(t)]\vec{i}+[y(t+h)-y(t)]\,\vec{j}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\vec{i}+\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\vec{j}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}\vec{i}+\lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h}\vec{j} \\
&= x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}
\end{aligned}$$

La preuve est analogue pour une fonction en trois dimensions.

Dérivées et intégrales des fonctions vectorielles

Théorème

Si $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont des fonctions vectorielles dont les dérivées existent alors

1. $[\vec{u}(t) \pm \vec{v}(t)]' = \vec{u}\,'(t) \pm \vec{v}\,'(t)$
2. $[c\vec{u}(t)]' = c\vec{u}\,'(t)$, où c est une constante
3. $[f(t)\vec{u}(t)]' = f'(t)\vec{u}(t) + f(t)\vec{u}\,'(t)$, où f est une fonction dérivable
4. $[\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)]' = \vec{u}\,'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}\,'(t)$
5. $[\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)]' = \vec{u}\,'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}\,'(t)$

Dérivées et intégrales des fonctions vectorielles

Théorème

Si $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont des fonctions vectorielles dont les dérivées existent alors

1. $[\vec{u}(t) \pm \vec{v}(t)]' = \vec{u}'(t) \pm \vec{v}'(t)$
2. $[c\vec{u}(t)]' = c\vec{u}'(t)$, où c est une constante
3. $[f(t)\vec{u}(t)]' = f'(t)\vec{u}(t) + f(t)\vec{u}'(t)$, où f est une fonction dérivable
4. $[\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)]' = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$
5. $[\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)]' = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$

Dérivées et intégrales des fonctions vectorielles

Théorème

Si $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont des fonctions vectorielles dont les dérivées existent alors

1. $[\vec{u}(t) \pm \vec{v}(t)]' = \vec{u}'(t) \pm \vec{v}'(t)$
2. $[c\vec{u}(t)]' = c\vec{u}'(t)$, où c est une constante
3. $[f(t)\vec{u}(t)]' = f'(t)\vec{u}(t) + f(t)\vec{u}'(t)$, où f est une fonction dérivable
4. $[\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)]' = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$
5. $[\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)]' = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$

Dérivées et intégrales des fonctions vectorielles

Preuve de la formule 4 (cas en deux dimensions) :

$$
\begin{aligned}
[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)]' &= \left[\left(u_1(t)\vec{i}+u_2(t)\vec{j}\right)\cdot\left(v_1(t)\vec{i}+v_2(t)\vec{j}\right)\right]' \\
&= [u_1(t)v_1(t)+u_2(t)v_2(t)]' \\
&= [u_1(t)v_1(t)]'+[u_2(t)v_2(t)]' \\
&= \left[u_1'(t)v_1(t)+u_1(t)v_1'(t)\right]+\left[u_2'(t)v_2(t)+u_2(t)v_2'(t)\right] \\
&= \left[u_1'(t)v_1(t)+u_2'(t)v_2(t)\right]+\left[u_1(t)v_1'(t)+u_2(t)v_2'(t)\right] \\
&= \left(u_1'(t)\vec{i}+u_2'(t)\vec{j}\right)\cdot\left(v_1(t)\vec{i}+v_2(t)\vec{j}\right) \\
&\quad +\left(u_1(t)\vec{i}+u_2(t)\vec{j}\right)\cdot\left(v_1'(t)\vec{i}+v_2'(t)\vec{j}\right) \\
&= \vec{u}\,'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}\,'(t).
\end{aligned}
$$

La preuve est analogue pour des fonctions en trois dimensions.

Dérivées et intégrales des fonctions vectorielles

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \vec{r}(t)\,dt$ peut être définie avec la procédure habituelle.

Théorème

Si $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ et x, y, z sont des fonctions intégrables alors

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b x(t)\,dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)\vec{j} + \left(\int_a^b z(t)\,dt\right)\vec{k}.$$

Résumé

- Définition de la dérivée d'une fonction vectorielle.
- Formule de calcul pour la dérivée d'une fonction vectorielle.
- Formules de dérivation.
- Formule de calcul pour l'intégrale d'une fonction vectorielle.