MTH1102D Calcul II

Chapitre 9, section 1: Les champs vectoriels

Lignes de courant d'un champ vectoriel

Introduction

- Lignes de courant d'un champ vectoriel.

Lignes de courant d'un champ vectoriel

Notation :

Si $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ et $\vec{F}$ est un champ vectoriel alors

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \quad \text{signifie} \quad \vec{F}(x(t), y(t), z(t)).$$

Lignes de courant d'un champ vectoriel

Définition

Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel alors une *ligne de courant* de $\vec{F}$ est une courbe paramétrée par une fonction $\vec{r}$ qui vérifie l'équation

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{r}'(t)$$

pour chaque t.

Lignes de courant d'un champ vectoriel

Définition

Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel alors une *ligne de courant* de $\vec{F}$ est une courbe paramétrée par une fonction $\vec{r}$ qui vérifie l'équation

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{r}'(t)$$

pour chaque t.

Le vecteur tangent à la courbe est donné en chaque point par le champ $\vec{F}$.

Lignes de courant d'un champ vectoriel

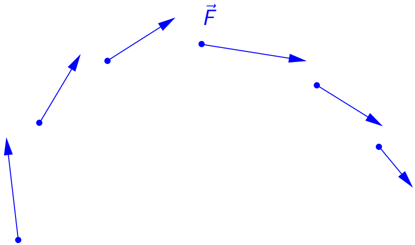
Définition

Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel alors une *ligne de courant* de $\vec{F}$ est une courbe paramétrée par une fonction $\vec{r}$ qui vérifie l'équation

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{r}'(t)$$

pour chaque t.

Le vecteur tangent à la courbe est donné en chaque point par le champ $\vec{F}$.



Lignes de courant d'un champ vectoriel

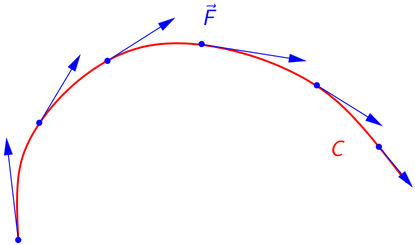
Définition

Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel alors une *ligne de courant* de $\vec{F}$ est une courbe paramétrée par une fonction $\vec{r}$ qui vérifie l'équation

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{r}\,'(t)$$

pour chaque t.

Le vecteur tangent à la courbe est donné en chaque point par le champ $\vec{F}$.



Lignes de courant d'un champ vectoriel

Définition

Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel alors une *ligne de courant* de $\vec{F}$ est une courbe paramétrée par une fonction $\vec{r}$ qui vérifie l'équation

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{r}'(t)$$

pour chaque t.

Interprétation :

Si $\vec{F}$ est le champ de vitesses d'un fluide en mouvement alors une ligne de courant est la trajectoire d'une particule qu'on laisse tomber dans le fluide.

Lignes de courant d'un champ vectoriel

- En deux dimensions :
  $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ et $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

Lignes de courant d'un champ vectoriel

- En deux dimensions :
  $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ et $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$
  On a
  $$P(x(t),y(t))\vec{i} + Q(x(t),y(t))\vec{j} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}.$$

Lignes de courant d'un champ vectoriel

- En deux dimensions :
  $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ et $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$
  On a
  $$P(x(t),y(t))\vec{i} + Q(x(t),y(t))\vec{j} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}.$$

- En trois dimensions :
  $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$
  et $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

Lignes de courant d'un champ vectoriel

- En deux dimensions :
  $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ et $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$
  On a
  $$P(x(t),y(t))\vec{i} + Q(x(t),y(t))\vec{j} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}.$$

- En trois dimensions :
  $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$
  et $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$
  On a
  $$\begin{aligned} & P(x(t),y(t),z(t))\vec{i} + Q(x(t),y(t),z(t))\vec{j} + R(x(t),y(t),z(t)) \\ = \; & x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}. \end{aligned}$$

Lignes de courant d'un champ vectoriel

- Ces équations donnent lieu à des *équations différentielles* qu'il faut résoudre pour trouver la ligne de courant.

Lignes de courant d'un champ vectoriel

- Ces équations donnent lieu à des *équations différentielles* qu'il faut résoudre pour trouver la ligne de courant.

  Par exemple, en deux dimensions :

$$\begin{aligned} x'(t) &= P(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= Q(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

Lignes de courant d'un champ vectoriel

- Ces équations donnent lieu à des *équations différentielles* qu'il faut résoudre pour trouver la ligne de courant.

  Par exemple, en deux dimensions :

$$\begin{aligned} x'(t) &= P(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= Q(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

- Dans les cas simples, ces équations peuvent être résolues avec des méthodes élémentaires.

Résumé

- Lignes de courant d'un champ vectoriel.

Résumé

- Lignes de courant d'un champ vectoriel.
- Interprétation physique.

Résumé

- Lignes de courant d'un champ vectoriel.
- Interprétation physique.
- Équations différentielles à résoudre pour trouver les lignes de courant.